Fundamentos de Lógica Proposicional

1. Motivación de la lógica proposicional

La lógica formal nace de la necesidad de analizar la **validez de los argumentos**, más allá de si sus afirmaciones individuales son verdaderas o no.

Ejemplo válido

- Todos los hombres son mortales.
- Sócrates es hombre.

$\Rightarrow$ Sócrates es mortal.

Ejemplo no válido

- Algunas personas son mujeres.
- Sócrates es una persona.

$\not\Rightarrow$ Sócrates es mujer.

Estos ejemplos muestran que el análisis informal del lenguaje natural no siempre es confiable: surgen ambigüedades, presupuestos, creencias, etc. Por eso, necesitamos un **lenguaje formal** con:

- **Sintaxis precisa:** reglas claras de construcción.
- **Semántica bien definida:** significado sin ambigüedades.

Este lenguaje es esencial para:

- Definir objetos y teorías matemáticas.
- Formalizar demostraciones.
- Aplicaciones en computación, ingeniería e inteligencia artificial.

2. Sintaxis de la lógica proposicional

Elementos

- **Variables proposicionales:** p, q, r, ...
- **Conectivos:** $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
- **Paréntesis:** para evitar ambigüedades

Reglas de construcción

1. Cada variable proposicional p es una fórmula.
2. Si φ es fórmula, entonces $\neg\varphi$ también lo es.
3. Si φ y ψ son fórmulas, entonces $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$, $\varphi \leftrightarrow \psi$ también lo son.

3. Semántica: significado de las fórmulas

Dada una valuación $\sigma : P \rightarrow \{0, 1\}$, se extiende a fórmulas completas con:

- $\sigma(\neg\varphi) = 1$ si $\sigma(\varphi) = 0$, y viceversa.
- $\sigma(\varphi \wedge \psi) = 1$ si ambas son 1.
- $\sigma(\varphi \vee \psi) = 1$ si alguna es 1.
- $\sigma(\varphi \rightarrow \psi) = 1$ salvo que $\varphi = 1$ y $\psi = 0$.
- $\sigma(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1$ si tienen el mismo valor.

Nota importante: la implicación ($\rightarrow$) es **falsa solo cuando el antecedente es verdadero y la conclusión falsa**. Si el antecedente es falso, la implicación siempre es verdadera.

4. Tablas de verdad

Permiten analizar fórmulas exhaustivamente. Por ejemplo, para $p \rightarrow q$ y su equivalencia con $\neg p \vee q$:

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$	¿Equivalentes?
0	0	1	1	Sí
0	1	1	1	Sí
1	0	0	0	Sí
1	1	1	1	Sí

5. Equivalencia lógica

Dos fórmulas α y β son equivalentes ($\alpha \equiv \beta$) si tienen la misma tabla de verdad.

Ejemplos de equivalencias útiles

- $\neg(\neg\varphi) \equiv \varphi$ (doble negación)
- $\neg(\varphi \wedge \psi) \equiv \neg\varphi \vee \neg\psi$ (De Morgan)
- $\varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \vee \psi$
- $\varphi \leftrightarrow \psi \equiv (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$

6. Formas normales

Forma Normal Disyuntiva (DNF)

Una disyunción de conjunciones de literales: Ejemplo: $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$

Forma Normal Conjuntiva (CNF)

Una conjunción de disyunciones de literales: Ejemplo: $(p \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee s)$
Teorema: Toda fórmula proposicional es equivalente a una fórmula en DNF o CNF.

7. Conjuntos funcionalmente completos

Un conjunto de conectivos es funcionalmente completo si puede expresar cualquier fórmula proposicional.

- **Funcionalmente completos:** $\{\neg, \vee, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \to\}$, $\{\text{nand}\}$
- **No funcionalmente completos:** $\{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$

Ejemplo: El conectivo **nand** (not and) se define como:

$$p \text{ nand } q = \neg(p \wedge q)$$

Con solo nand se pueden expresar $\neg$, $\wedge$ y cualquier otra operación.

8. Conectivos definidos por tablas de verdad

Dada una tabla de verdad, se puede construir una fórmula equivalente en base a los casos donde el valor es 1 (verdadero), uniendo las conjunciones de literales correspondientes por disyunción.

Ejemplo: Si $\alpha(p, q, r, s)$ es verdadera en ciertas combinaciones, se representa como:

$$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge r \wedge \neg s) \vee \dots$$