Tarea 3: Métodos Numéricos para la Ciencia e Ingeniería

Rodrigo Soria R , 18.358.776-5

8 de Octubre, 2015

1 Introducción

El oscilador de Van der Pool fue propuesto para describir la dinámica de algunos circuitos eléctricos. Este es un oscilador con amortiguamiento no lineal, su evolución temporal obedece a una ecuación diferencial de segundo orden. Su ecuación es la siguiente:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \mu(x^2 - a^2)\frac{dx}{dt}$$

donde k es la constante elástica y mu es un coeficiente de roce. Luego se debe resolver el sistema de Lorenz, el cual corresponde a un set de ecuaciones diferenciales ordinarias conocido por tener algunas soluciones caóticas, la más famosa el llamado atractor de Lorenz. El sistema de ecuaciones es el siguiente:

$$\frac{dx}{ds} = \sigma(y - x)$$

$$\frac{dy}{ds} = x(\rho - z) - y$$

$$\frac{dz}{ds} = xy - \beta z$$

2 Procedimiento

2.1 Problema 1

Se debe realizar un cambio de variable a la ecuacion del oscilador de Van der pool de tal forma la ecuacion dependa solo de μ^*. El cambio de variable elegido es $y(s) = \frac{x}{a}$ y $s = ta^2$.

$$\frac{dx}{dt} = a\frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt} = a\frac{dy}{ds}\sqrt{k}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a\sqrt{k}\frac{d^2y}{ds^2}\frac{ds}{dt} = ak\frac{d^2y}{ds^2}$$

$$ak\frac{d^2y}{ds^2} = -aky - a\mu(y^2a^2 - a^2)\frac{dy}{ds}\sqrt{k}$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = -y - \mu^*(y^2 - 1)\frac{dy}{ds}$$

$$\mu^* = a^2\frac{\sqrt{k}}{k}$$

A continuación el problema del oscilador de Van der Pool se soluciona a través del método Runge-Kutta de orden 3 en donde se define el problema como:

$$y' = f(x, y)$$

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix} y \\ \frac{dy}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dy}{ds} \\ -y - \mu^*(y^2 - 1)\frac{dy}{ds} \end{pmatrix}$$

y se usa el siguiente algoritmo:

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2})$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + 4k_2 + k_3)$$

Con lo que se obtienen los gráficos pedidos.

2.2 Problema 2

Se debe resolver el sistema de Lorenz a traves de Runge-Kutta de orden 4, pero se puede utilizar un algoritmo ya implementado, en este caso se utiliza el modulo Scipy.Integrate.

3 Resultados

3.1 Problema 1

Los resultados de la EDO fueron calculados para 2 condiciones iniciales diferentes; primero con $y(s) = 0.1$ y $\frac{dy}{ds} = 0$ y luego con las condiciones $y(s) = 4$ y $\frac{dy}{ds} = 0$, en donde se puede ver claramente el plano de fase del oscilador en la figura 1 y 2. En la figura 3 se observa el comportamiento caótico del oscilador con diferentes condiciones iniciales en donde = 1.RRR (donde RRR son los últimos 3 digitos del rut (18.358.776-5)) Los gráficos obtenidos que se obtuvieron al solucionar la EDO se encuentran en la carpeta (figuras 1, 2 y 3).

3.2 Problema 2

El sistema de ecuaciones de Lorenz al ser resuelto por el método Runge-Kutta de orden 4, con las siguientes condiciones iniciales; $x = 10, y = 10, z = 10$ y constantes $\sigma = 10, \rho = 28, \beta = 8/3$ tiene la siguiente solución que se puede ver graficamente en la figura 4 adjunta.

4 Conclusiones

Se comprobó exitosamente el comportamiento caótico del péndulo de Van der Pool , y simultaneamente el comportamiento caótico del Sistema de Lorenz, el cual se traduce en el denominado atractor de Lorenz como el comportamiento del clima, si se modifican sus condiciones iniciales, ésto se traduce en un cambio en la solución del sistema, teniendo como consecuencia una nueva solución totalmente distinta. En las figuras 1 y 2 sé observa la convergencia del péndulo a su estado estacionario, además en $y(s) = 2$ se comienza el ciclo y en la figura 3, $y(s) = 2$ es el punto donde se inicia la "peridiocidad", la cual se comprueba con la teoría. El metodo Runge-Kutta es un excelente método, muy eficiente para el cálculo de las EDO's, debido a su convergencia, ya que además es un método ya implementado.