Introducción

La presente unidad trata sobre los números reales, partiendo de sus conjuntos, es decir, los números naturales, los números enteros, los números racionales y los números irracionales.

Las operaciones con los números reales van desde la suma hasta la división, abordadas con sus respectivas propiedades. También se abordan, en forma explícita, los apartados de los números reales como la potenciación, radicalización y racionalización, mediante operaciones con ejemplos basados en las leyes que corresponden.

La graficación de los números reales llamados o conocidos como intervalos reales, se muestra con gráficas fidedignas de lo que se quiere representar. Asimismo, se destaca la importancia de conocer el valor absoluto, junto con sus propiedades y sus aplicaciones en R, como todo lo concerniente a las matemáticas.

¿Qué vamos a aprender?

Competencias	Objetivos	Contenidos
Utilizan el conjunto de los números reales, sus propiedades, operaciones y su aplicación práctica en la vida real.	Conceptualizar el conjunto de los números reales mediante la interpretación gráfica de los números reales.	Representación gráfica de los números reales 1. Interpretación de la gráfica
	Calcular operaciones con números naturales, enteros, racionales e irracionales.	Los números naturales: 1. Adición 2. Diferencia 3. Producto 4. Cociente 5. Potenciación 6. Radicalización 7. Nota histórica 8. Actividad 1
	Calcular y graficar operaciones combinadas con diferentes conjuntos numéricos.	Los números enteros: 1. Operaciones en Z 2. Notas y ejemplos de la vida diaria en los números enteros (Z) 3. Actividad 2
		Los números irracionales: 1. Números relevantes en I 2. Graficación en I 3. Nota importante en I 4. Actividad 4
		Los números reales y sus operaciones: 1. Racionales + Irracionales = Reales 2. Tabla muestra de la clasificación en R 3. Operaciones con números reales 4. Actividad 5

Competencias	Objetivos	Contenidos
Expresan números reales usando la potenciación, radicalización, racionalización, intervalos reales y valor absoluto.	Calcular operaciones de potenciación, radicalización y racionalización en los números reales.	Potenciación en los números reales: 1. Operaciones de la potenciación, según sus propiedades 2. Actividad 6
	Representar mediante graficas lineales, los diferentes tipos de Intervalos Reales.	Racionalización en R: 1. Operaciones de Radicalización en R: 2. Actividad 7
	Calcular y graficar operaciones con valor absoluto y demostrar su importancia en el concepto de distancia.	Racionalización de radicales en R: 1. Operaciones de racionalización en R 2. Actividad 8
		Representación grafica de los números reales: 1. Tipos de representaciones gráficas en R 2. Tipos de intervalos reales 3. Actividad 9
		Valor absoluto en R: 1. Propiedades e implicaciones del valor absoluto 2. Grafica del valor absoluto = distancia

Mis conocimientos previos

A continuación se le presentan una serie de preguntas y ejercicios que usted debe resolver con el propósito de conocer sus aprendizajes previos. Recuerde que si no sabe alguno, no está obligado a contestarlo.

Se espera que en el trascurso del estudio de esta unidad el estudiante pueda ir construyendo las competencias matemáticas necesarias para su formación.

1. ¿Cómo define los números reales?

____

____

2. ¿Cómo está formado el conjunto de los números reales?

____

____

3. Grafique: $\{\frac{x}{x} \in R,\ 2 \leq x \leq 5\}=$

4. ¿Cómo define los números racionales?

____

____

5. ¿Cómo define los números enteros?

____

____

6. Cómo define los números naturales?

____

____

7. ¿Cómo define los números I?

____

____

8. Resuelva: $\frac{2}{3}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{7}\right)\right\}=$

9. Cuántos números irracionales conoce? Dé algunos ejemplos:

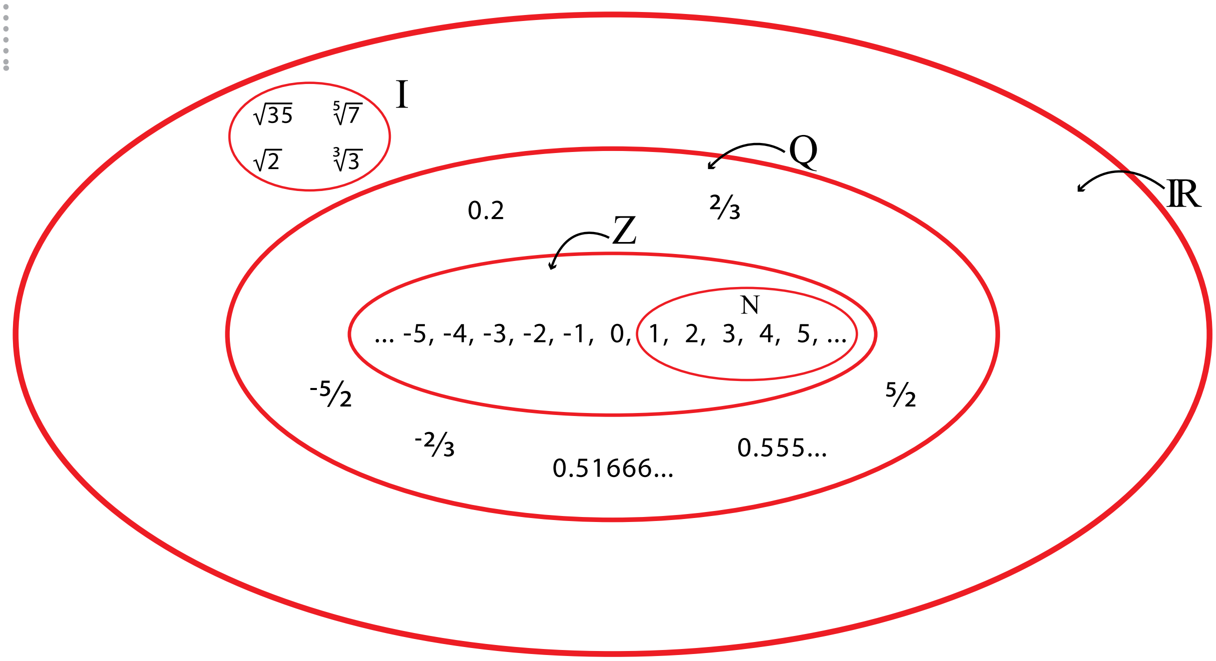
____

____

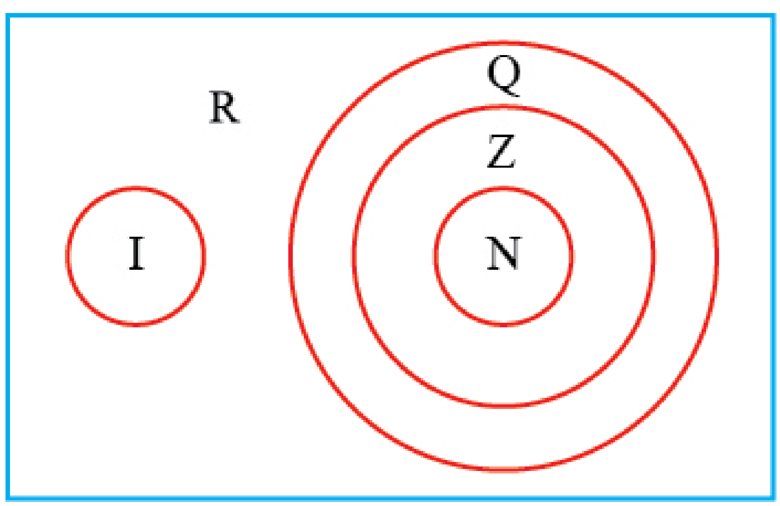
Una vez que haya terminado de realizar todos los ejercicios, puede confrontar sus respuestas en la guía de didáctica.

Representación gráfica de los números reales

1. Interpretación de la gráfica



Representación de los subconjuntos de los números reales.



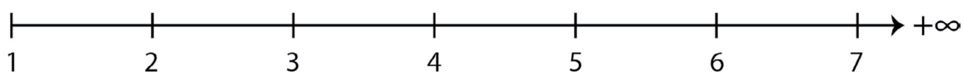
Esta figura muestra otra forma de representar a los números reales.

Los números naturales

Llamaremos conjunto de los números naturales a la colección de números que nos sirven para contar y los representaremos por la letra mayúscula (N).

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8… Su conjunto se representa así:
N = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8…}

Su representación en la recta numérica es:



Con los números naturales contamos los elementos de un conjunto, ya sea finito o infinito, a esto le llamamos números cardinales. También expresamos la posición u orden que ocupa un elemento en un conjunto, a esto le llamamos números ordinales.

Del conjunto de los números naturales debemos decir lo siguiente:

1. Adición: las operaciones de suma y multiplicación de dos números naturales es otro número natural, a esta aseveración se le conoce como propiedad de cierre o de clausura.
   Ejemplo: 3 + 7 = 10 y 6 + 14 = 20, todos estos números pertenecen a los números naturales (N).

2. Diferencia: la diferencia de dos números naturales no siempre es un número natural, solo ocurre cuando el minuendo es mayor que el sustraendo.
   Ejemplo: $9 - 5 = 4 \in N$, pero $5 - 9 = -4 \notin N$.

3. Producto: es el resultado de multiplicar dos números naturales, su resultado final pertenece al mismo conjunto numérico (N).
   Ejemplos: $8 \times 5 = 40 \in N$; $6 \times 8 = 48 \in N$.

Cuando el matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932) introdujo los axiomas para definir el conjunto de los números naturales, inició este conjunto por el número uno. Pero, cuando Cantor estudió la teoría de conjuntos, encontró que debía empezar por el cero, dada la necesidad de asignarle un cardinal al conjunto vacío. Quizá fue esto lo que hizo que, diez años más tarde, Peano empezara los números naturales con el cero.

Básicamente los números naturales se utilizan para contar personas, animales y objetos, a partir de esto el cero puede considerarse el número que corresponde a la ausencia de los mismos. Dependerá del autor si quiere incluir el cero o de lo contrario lo incluye hasta tratar los números enteros.

4. Cociente: el cociente de dos números naturales no siempre es un número natural, solo curre cuando la división es exacta.

   Ejemplo: $\frac{9}{3} = 3 \in N$, pero $\frac{3}{9} = 0.\overline{3} \notin N$.

5. Potenciación: podemos utilizar potencias, ya que es la forma abreviada de escribir un producto formado por varios factores iguales.
   Ejemplo: $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$.

   Si la base y el exponente es un número natural, su resultado será a la vez otro número natural, tal como se ve en el ejemplo anterior.

6. Radicalización: la raíz de un número natural no siempre es un número natural, solo ocurre cuando la raíz es exacta (propiedad de clausura).
   Ejemplo: $\sqrt{9} = 3$ (si cumple con la propiedad de clausura), pero
   $\sqrt{3} = 1.732050808\ldots$(no cumple con la propiedad de clausura)

Nota histórica

Antes de que surgieran los números para la representación de cantidades, el ser humano usó otros métodos para contar, utilizando para ello objetos como piedras, palitos de madera, nudos de cuerdas, o simplemente los dedos.

Más adelante comenzaron a aparecer los símbolos gráficos como señales para contar, por ejemplo, marcas en una vara o simplemente trazos específicos sobre la arena. Pero, fue en Mesopotamia alrededor del año 4.000 a. C. donde aparecen los primeros vestigios de los números, que consistieron en grabados de señales en formas de cuñas sobre pequeños tableros de arcilla, empleando para ello un palito aguzado. De aquí el nombre de escritura cuneiforme.

Este sistema de numeración fue adoptado más tarde, aunque con símbolos gráficos diferentes, en la Grecia antigua y en la antigua Roma. En la Grecia antigua se empleaban simplemente las letras de su alfabeto, mientras que en la antigua Roma además de las letras, se utilizaron algunos símbolos.

Quien colocó al conjunto de los números naturales sobre lo que comenzaba a ser una base sólida, fue Richard Dedekind (matemático alemán,1831-1916), en el siglo XIX.

Que después precisó Giuseppe Peano dentro de una lógica exhaustiva, resultando así los famosos cinco postulados que llevan su nombre.
F. Ludwing G. Frege (matemático alemán,1848-1925), fue superior a ambos, demostrando la existencia del sistema de números naturales partiendo de principios más fuertes en esta área.

Actividad 1

A continuación se le presenta una serie de ejercicios con números naturales que usted está en capacidad de realizar, ya que se trata de usar las herramientas que ya conoce y su aplicación lógica para resolverlos.

Los ejercicios que no tienen respuesta, ameritan una respuesta simple que usted puede resolver y confrontar con su tutor.

a. $8 \text{ x } 4 + [5 + 3 \text{ x } (12 + 7 \text{ x } 1) - 7 \text{ x } \sqrt{9}] + \frac{9}{3}$

b. Busque el término desconocido: $4 (5 + \_\_) = 36$

c. $4\{6[3 + 12(9 \text{ x } 7 - 10)-9(60 - 8)]\}$

d. Opere manualmente: $28035 \div 623$

e. Opere manualmente: $(41 + 19) \div 10$

f. Exprese en forma de potencia: 50,000

g. Escriba en forma de una sola potencia: $2^5 \times 2^4 \times 2$

h. Escriba en forma desarrollada: 87,562

i. Calcule: $5 + 11 + (7 + 8 - 5) - \frac{18}{6}$

Los números enteros

El conjunto de los números enteros es el segundo subconjunto de los números reales. Está representado por la letra mayúscula (Z) y es el conjunto infinito de números positivos que van hacia la derecha en la recta numérica, como los números negativos que van infinitamente hacia la izquierda, partiendo ambos grupos del cero como punto de origen.

Nótese que los números positivos representados a la derecha de la recta numérica es el conjunto N, es decir, que $N \subset Z$ (N está contenido en Z).

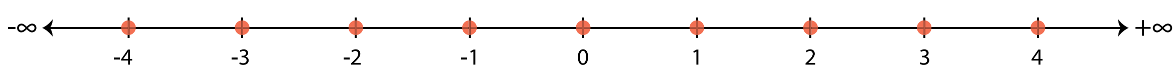
Su conjunto se visualiza así:
$Z = \{\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}$, es decir: $z^-, \{0\}, z^+$

Entonces:

$z^- = \{\ldots -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$
$z^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \ldots\}$
Cero = $\{0\}$

En resumen: $Z = z^- \cup \{0\} \cup z^+$

La siguiente recta complementa lo expuesto sobre los números enteros (vemos la recta numérica en general):



La importancia de los números enteros

a. Nos permiten expresar el dinero adeudado, la temperatura bajo cero, las profundidades con respecto al nivel del mar, etc.

b. Igual que los números naturales, como conjunto definido tienen sus connotaciones.

La ley de los signos: Es una ley matemática usada en los números enteros para multiplicar o dividir.

Tabla ley de signos para multiplicar

+	por	+	=	+
–	por	–	=	+
+	por	–	=	–
–	por	+	=	–

Se debe de leer así:

{(Signos iguales) más por más igual a más
menos por menos igual a más

{(Signos diferentes) más por menos igual a menos
menos por más igual a menos

Tabla ley de signos para dividir

+	entre	+	=	+
–	entre	–	=	+
+	entre	–	=	–
–	entre	+	=	–

Se debe de leer así:

{(Signos iguales) más entre más igual a más
menos entre menos igual a más

{(Signos diferentes) más entre menos igual a menos
menos entre más igual a menos

Cómo funciona la ley de los signos y sus operaciones básicas

Suma y resta

a. Si los números tienen el mismo signo se suman y se deja el mismo signo, no importa si es una operación positiva o negativa; así:

$$3 + 5 = 8$$
$$-4 - 7 = -11$$

b. Si en la operación va un signo que preside a un signo de agrupación, este debe multiplicarse por el signo que está dentro del signo de la agrupación, para retomar el concepto anterior, así:

$$(-3) + (-5) = -3 -5 = -8$$
$$(9) - (-6) = 9 + 6 = 15$$

c. Si los números tienen distinto signo, se restan y al resultado se le coloca el signo del número con mayor valor absoluto; así:

$$-3 + 5 = 2$$
$$3 + (-5) = 3 -5 = -2$$

Multiplicación y división (aplicación directa de ley de signos)

- $2 \times 5 = 10$
- $(-2) \times (-5) = 10$
- $2 \times (-5) = -10$
- $(-2) \times 5 = -10$
- $10 \div 5 = 2$
- $(-10) \div (-5) = 2$
- $10 \div (-5) = -2$
- $(-10) \div 5 = -2$

Potencias

1. Las potencias de exponente par son siempre positivas:

$(+)^{par} = +$

$(-)^{par} = +$

Ejemplos:

$2^6 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 64$

$(-2)^6 = -2 \times -2 \times -2 \times -2 \times -2 \times -2 = 64$

2. Las potencias de exponente impar tiene el mismo signo de la base:

$(+)^{impar} = +$

$(-)^{impar} = -$

Ejemplos

$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

$(-2)^3 = -2 \times -2 \times -2 = -8$

Operaciones en Z

a. La suma, la diferencia y el producto de dos números enteros es otro número entero. Ejemplos:

- $2 + (-3) = 2 - 3 = -1 \in Z$ (suma)
- $8 - 2 = 6 \in Z$ (diferencia)
- $-3 \times 6 = -18 \in Z$ (producto)

b. El cociente de dos números enteros no siempre es un número entero, solo ocurre cuando la división es exacta. Ejemplo:

$\frac{18}{3} = 6 \in Z$, pero $\frac{3}{18} = 0.1\overline{6} \notin Z$

c. Podemos operar con potencias, pero el exponente tiene que ser un número natural. Ejemplo:

$(-3)^3 = -27 \in Z$, pero $(-3)^{-3} = -\frac{1}{27} \notin Z$.

d. La raíz de un número entero no siempre es un número entero, solo ocurre cuando la raíz es exacta o si se trata de una raíz de índice par con radicando positivo. Ejemplo:

$\sqrt{9} = 3$, pero si tenemos $\sqrt{-9} \notin Z$

1. Notas y ejemplos de la vida diaria en los números enteros (Z)

Para introducir la idea de la importancia de los números enteros, daremos algunos ejemplos y notas de la vida diaria que nos inclinan a la necesidad de emplear los números enteros.

Hoy en día se aprende a utilizar los números positivos, los negativos y el cero, pero durante muchos años hasta los más famosos matemáticos se negaron a aceptar la existencia de números negativos: los llamaban “números absurdos”. Veamos:

- ¿Para qué se necesita hacer una cuenta como esta? Supongamos que una persona va al almacén con L.500.00, pero el costo de la mercadería es de L.1, 200.00; se realiza la transacción y el compromiso de deuda, en donde se quedaría debiendo L.700.00. A la deuda se le asignará un signo negativo (-700 lempiras).

- En la Antártida la temperatura a veces llega a -50º C, que son 50 grados bajo cero. Se le asigna el negativo a temperaturas menores a 0º C.

- Por ejemplo, si en una ciudad la temperatura en la tarde es de 10º C y en la noche baja a 14º C, ¿a qué temperatura llega? La respuesta es que la temperatura llega a 4º C bajo cero (es un número negativo -4).

- También puede haber números negativos en el ascensor de un gran edificio para representar los niveles del subsuelo.

- Frecuentemente usamos el valor absoluto de un número en varias situaciones de la vida, pero, ¿qué es el valor absoluto de un número?

- Diremos que es el mismo número sin considerar su signo; por ejemplo, ¿cuál es el valor absoluto de -5? La respuesta es 5 y el valor absoluto de 5 es 5, de aquí también la deducción geométrica que el valor absoluto representa distancia, ya que -5 está a cinco unidades a la izquierda del cero, como también 5 está a cinco unidades a la derecha del cero. Esta distancia 5,es el valor absoluto de: -5 y 5.

  Se escribe: $|5|=5$ $|-5|=5$ $|0|=0$

  Su definición constructiva es la siguiente: $|a|=\begin{cases} -a & \text{Si } a < 0 \\ a & \text{Si } a \geq 0 \\ 0 & \text{Si } a = 0 \end{cases}$

- También puede considerarse el opuesto de un número,que es aquel que se encuentra a la misma distancia del cero.
  Ejemplo: si nos dicen cuál es la distancia que existe desde -5 hasta 5, pues diremos que 10 unidades.

Actividad 2

A continuación se le presenta una serie de ejercicios con números enteros que usted está en capacidad de realizar, ya que se trata de usar las herramientas que ya conoce de ellos y de su aplicación lógica para resolverlos:

a. $-21 + 18 + (-10) + 25 + (-43)$

b. $-12 + 4 + [-26 - (-7 + 3 - 2)] + 36$

c. $7(1 - 3) + 2(3 - 6) + 5(-2)$

d. $4 - (3 + 5) + (-1) -2 + 3$

e. $5(3 - 2) + 7 - 1 + 3(-2)$

f. Un jugador pasa de tener -58 puntos a +180. ¿Cuánto ganó o perdió?

g. En un banco, una cajera empieza el día con L.50, 000.00 en caja. El primer cliente deposita L.3, 560.00; el siguiente retira L.580.00; el tercero retira L.8, 750.00; el cuarto deposita L.9, 845.00. ¿Cuánto dinero tiene en caja después de atender estos cuatro clientes?

h. Una señora gasta L.500.00 en un mueble y después va al banco y retira L.900.00. Después de las transacciones anteriores resulta con un capital de L.1,200.00. ¿Qué capital tenía al principio?

Los números racionales

El conjunto de los números racionales (Q) es el tercer subconjunto de los números reales. Se llama número racional a todo número que puede representarse como el cociente de dos enteros, con denominador distinto de cero.

La idea que genera la creación del número racional es el reparto, cuando una cantidad se va dividiendo en partes iguales, el resultado es un número racional, como los siguientes ejemplos:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{2}$$

Los números: 2, 5, -2, -10, 8.5, $\sqrt{4}$; también son números racionales.

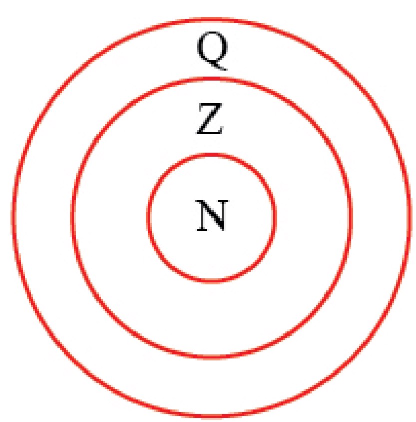
Estos números racionales que generan la idea de reparto los hemos aprendido empíricamente cuando nuestras madres nos enseñaban con toda claridad a usarlas desde muy niños. Por ejemplo: al decirnos: son las cuatro y media, o bien, falta un cuarto para las cinco, lo entendemos muy bien.

De igual manera nos enseñan fracciones cuando compramos pan, queso, azúcar, etc. Pues siempre se dice: me da media libra de azúcar $^1/_2$ de azúcar; o me da $^3/_4$ de queso, etc.

También se usa para más cosas, desde pintar la cerca (pínteme un $^1/_4$ de cerca), hasta para resolver ejercicios matemáticos de la escuela, colegio y universidad.

Su definición constructiva es: $Q = \left\{ \frac{x}{x} = \frac{a}{b} ; a, b \in Z, b \neq 0 \right\}$.

Los números enteros forman un conjunto de números racionales. Tal como se ve en la siguiente figura:



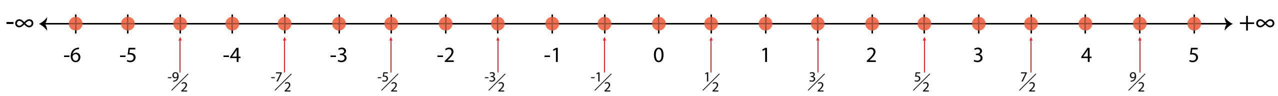
Es decir que: $N \subset Q$ y $Z \subset Q$.

Notas sobre los números racionales

- Todo número natural es racional. Ejemplo: 2 es racional, ya que $^{2}/_{1} = 2$.
- Todo número entero es racional. Ejemplo: 2 es racional, ya que $^{2}/_{1} = 2$, también -5 es racional porque: $^{(-5)}/_{1} = -5$.

1. Graficación en los números racionales (Q)

La siguiente recta numérica señala algunos números racionales graficados en ella, por ejemplo: $\{^{-9}/_{2}, ^{-7}/_{2}, ^{-5}/_{2}, ^{-3}/_{2}, ^{-1}/_{2}, ^{1}/_{2}, ^{3}/_{2}, ^{5}/_{2}, ^{7}/_{2}, ^{9}/_{2}\}$



En la recta real se puede graficar cualquier número racional, como los siguientes ejemplos: $\{^{7}/_{4}, ^{12}/_{5}, ^{0}/_{5}, ^{-7}/_{3}, ^{-13}/_{2}, \sqrt{4}, -9, -0.5, -0.6\ldots\}$

2. Los decimales en los números racionales (Q)

Los números decimales (decimal exacto, periódico puro y periódico mixto) son números racionales, pero los otros números decimales ilimitados no. Ejemplos:

- $^{1}/_{2} = 0.5$ (decimal exacto)
- $^{1}/_{3} = 0.333333333\ldots$ (decimal periódico puro)
- $^{12}/_{11} = 1.090909091\ldots$ (decimal periódico mixto)
- $\pi = 3.141592654\ldots.$ (decimal ilimitado) $\notin$ Q
- $\sqrt{2} = 1.414213562\ldots$ (decimal ilimitado) $\notin$ Q

3. Operaciones en los numeros racionales y de (Q)

a. La suma, la diferencia, el producto y el cociente de dos números racionales es otro número racional. Ejemplos:

- $^{3}/_{4} + ^{7}/_{4} = ^{10}/_{4} = ^{5}/_{2}$ (suma en Q)
- $^{10}/_{4} - ^{7}/_{4} = ^{3}/_{4}$ (diferencia en Q)

- $^{8}/_{4} \cdot {}^{7}/_{3} = {}^{56}/_{12} = {}^{28}/_{6} = {}^{14}/_{3} = \dfrac{4}{({}^{2}/_{3})}$ (producto en Q)
- $\dfrac{({}^{9}/_{5})}{({}^{4}/_{7})} = {}^{9}/_{5} \cdot {}^{7}/_{4} = {}^{63}/_{20} = \dfrac{3}{({}^{3}/_{20})}$ (cociente en Q)

b. Podemos operar con potencias, pero el exponente tiene que ser un número entero. Veamos su definición constructiva:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a^n}{b^n}\right) \quad n \in Z$$

Ejemplo: $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2^2}{3^2}\right),\ 2 \in Z$

c. La raíz de un número racional no siempre es un número racional, solo ocurre cuando la raíz es exacta y si el índice es par, el radicando ha de ser positivo.

Ejemplo: $\sqrt{-\frac{4}{5}} \notin Q$

Actividad 3

Resuelva los siguientes ejercicios aplicando lo que sabe sobre las operaciones en Q:

a. Si un número fraccionario se eleva al exponente -3, es igual a $^{27}/_{8}$. Halle el número.

b. Resuelva: $\left(-\frac{4}{2}\right)^{-3} \cdot \left(-\frac{4}{2}\right)^{5}$

c. Resuelva : $[6(-3)(10)]^2$

d. Un hombre vende $^1/_3$ de su finca, alquila $^1/_8$ y lo restante lo cultiva. ¿Qué porción de la finca cultiva?

e. Resuelva : $^3/_4\,(1-\frac{1}{5}) + {}^1/_3$

f. Resuelva : $5(8 - 2 + 6 - 3)$

g. Hay cuatro botellas de leche. Cada botella tiene $^{2}/_{5}$ litros. ¿Cuánto es el total en litros?

h. Resuelva : $-4\frac{1}{6} + (-3\frac{1}{10}) + (-2\frac{1}{15})$

El conjunto de los números irracionales

1. Números relevantes en I_R.

Los números racionales en la recta numérica dejan espacios en los que es posible alojar un tipo de números especiales, que llamaremos números Irracionales, como las raíces cuadradas, cúbicas, cuartas, quinta, etc.

Son números que no producen un valor entero, por lo tanto, nos darán un número irracional, que posee infinitas cifras decimales no periódicas, los cuales no se pueden expresar en forma de fracción, como los siguientes:

- El número irracional más conocido es π, que se define como la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro: $\pi = 3.141592653589...$

- El número e aparece en procesos de crecimiento, en la desintegración radiactiva, en la fórmula de la catenaria (curva que podemos apreciar en los tendidos eléctricos $e = 2.718281828459\ldots$).

- El número aureo Φ , utilizado por artistas en las proporciones de sus obras de todas las épocas, como Fidias, Leonardo da Vinci, Alberto Durero, Dalí.

  Su equivalencia numérica es: $\Phi = \dfrac{(1+\sqrt{5})}{2} = 1.618033988749\ldots$

2. Notas sobre las operaciones con números irracionales.

Las operaciones de suma, resta, multiplicación y división no son operaciones bien definidas en los números irracionales.

Dados dos números irracionales no siempre la suma, resta, multiplicación o división de dichos números resulta un número irracional. Con las operaciones con números irracionales es necesario tener en cuenta lo siguiente:

- $\sqrt{3} + \sqrt{5} = 3.9681187850687$ (dos irracionales cuya suma es irracional)

- $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6} = 2.4494897427832$ (dos irracionales cuyo producto es irracional)

- $\sqrt{5} + (-\sqrt{5}) = \sqrt{5} - \sqrt{5} = 0$ (dos irracionales cuya suma es racional)

- $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}=\sqrt{16}=4$ (dos irracionales cuyo producto es racional)

- $\sqrt{18} \div \sqrt{2} = \sqrt{(18\div 2)} = \sqrt{9} = 3$ (dos irracionales cuya división es racional)

A pesar de todo lo anterior podemos observar lo siguiente:

- Si a es racional y b es irracional, entonces la suma $a + b$ siempre es irracional.

- Si $a \neq 0$ es racional y b es irracional, entonces el producto $a \cdot b$ siempre es irracional.

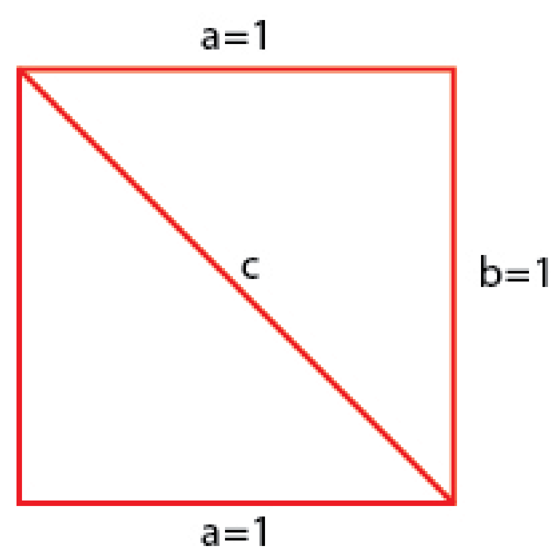
Ejemplos:

$2 + \sqrt{3} = 3.7320508075689$ (es irracional)

$2 \cdot \sqrt{5} = 4.4721359549996$ (es irracional)

3. Graficación en I_R

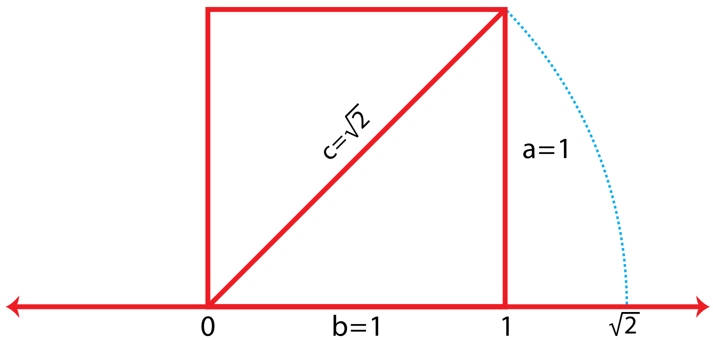
La representación gráfica de $\sqrt{2}$ que vemos arriba, nace del siguiente cuadrado, donde la diagonal "c" (hipotenusa tomará el valor de $\sqrt{2}$):



El cuadro anterior nos lleva a demostrar, en la figura siguiente, que a la verdad $c = \sqrt{2}$ por el teorema de Pitágoras: $c^2 = a^2 + b^2$

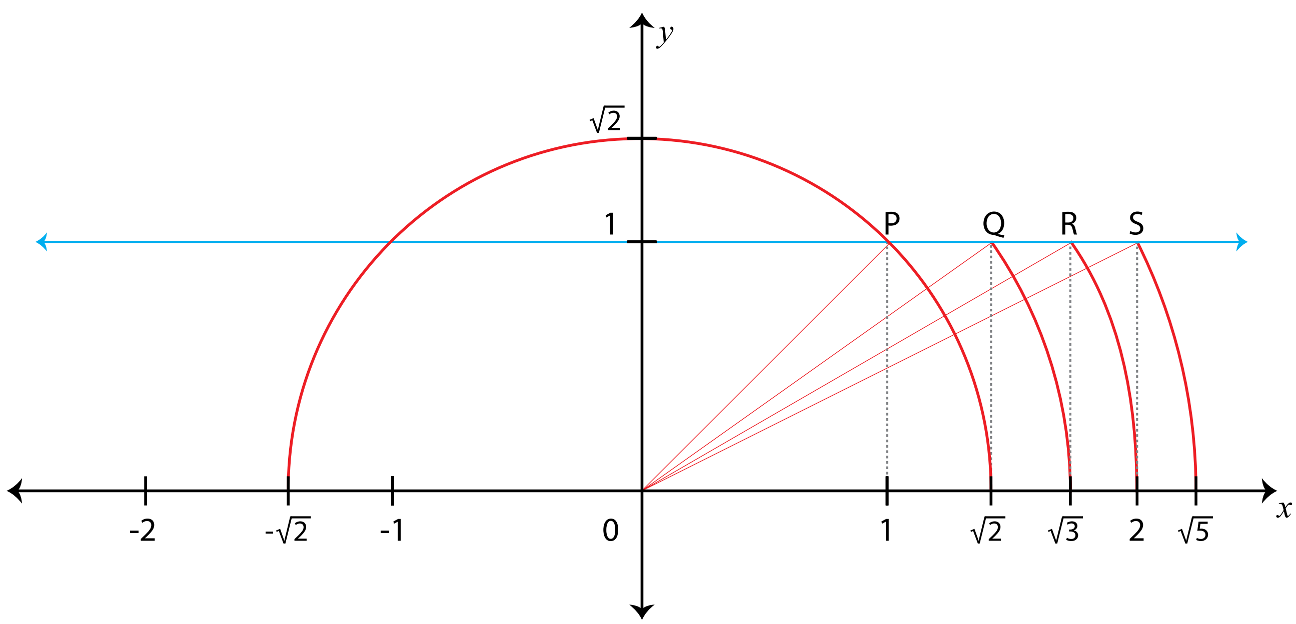
Dado que: a=1 y b=1, entonces c= $\sqrt{2}$. Así:

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$(\sqrt{2})^2 = 1^2 + 1^2$$
$$2 = 1+1$$



En esta misma figura podemos ver graficado en la recta numérica $\sqrt{2}$.

La siguiente figura demuestra la gráfica en la recta numérica de: $\sqrt{2}$, $\sqrt{(3)}$, $\sqrt{5}$. Recuerde que la gráfica parte de un cuadrado a partir de la unidad 1, como se ve en la figura siguiente:



En este esquema se puede ver la gráfica de: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, teniendo en cuenta que debe hacer uso de lo siguiente:

- Teorema de Pitágoras
- Cuadrado y perpendiculares
- Uso de un compas
- Precisión al usar el compás

Actividad 4

a. Grafique en la recta real los siguientes números irracionales (puede pedir ayuda a su tutor):

- $\sqrt{3}$
- $\sqrt{5}$
- $\sqrt{7}$
- $\sqrt{10}$
- $\sqrt{15}$

b. Resuelva los siguientes ejercicios:

- $4\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2\sqrt{2}$
- $3\sqrt{(5)} \cdot 4\sqrt{2}$
- $(12\sqrt{20}) \div (4\sqrt{2})$

Los números reales

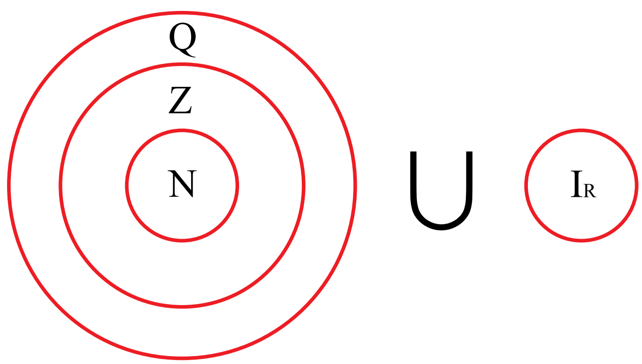
El conjunto formado por los números racionales e irracionales se conoce como el conjunto de los números reales, se designa por *R*.

1. Racionales + irracionales = reales

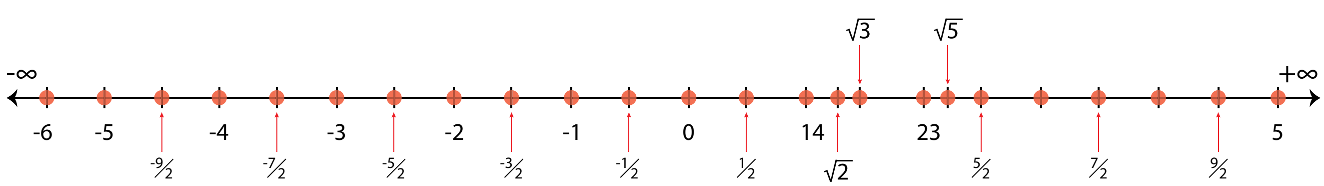
Con los números reales podemos realizar todas las operaciones, excepto la radicación de índice par con radicando negativo y la división por cero. Veamos sus notaciones de contenido:

$$R = Q \cup I$$
$$N \subset Z \subset Q \subset I \subset R$$
$$Q \cap I = \emptyset$$
$$Q \not\subset I$$

La siguiente figura resume las construcciones matemáticas anteriores:



Por lo tanto, el conjunto R es un conjunto amplio, es decir, que hemos rellenado la recta real o numérica y podemos afirmar que: a todo número real le corresponde un punto de la recta y a todo punto de la recta un número real. Veamos la siguiente recta real:



2. Tabla de la clasificación en *R*

La siguiente tabla muestra el conjunto al que pertenece cada uno de los siguientes números (modelo para reconocer algunos números reales y clasificarlos).

Número	*N*	*Z*	*Q*	*I*	*R*
5	✓	✓	✓		✓
$\sqrt[2]{27}$	✓	✓	✓		✓
2π				✓	✓
-3		✓	✓		✓
$-5\sqrt{2}$				✓	✓
$^{-19}/_{31}$			✓		✓
$\sqrt[5]{-32}$		✓	✓		✓
$(-3\pi)^2$				✓	✓
e				✓	✓
$^{3}/_{4}\sqrt{2}$				✓	✓
$-\sqrt{16}$		✓	✓		✓

3. Operaciones con números reales

Adición o suma

Dados: a, $b \in R$, llamaremos suma entre ellos y lo representamos por $a+b$ al número real c, tal que $a+b = c$, la cual es una operación binaria.

Ejemplos:

$$2 + 3 = 5$$

$$8 + 5 = 13$$

Propiedades de la suma en *R*

a. Propiedad de clausura o cierre:

Si: a, $b \in R$, entonces $(a + b) \in R$, la suma de dos números reales siempre será otro número real.

Ejemplos:

$$- 5 + (- 4) =$$

$$- 5 - 4 = - 9$$

b. Propiedad conmutativa:

El orden de los sumandos no varía la suma. Si: a, $b \in R$, entonces:
$a + b = b + a$

Ejemplos:

$$3 + 5 = 5 + 3$$

$$8 = 8$$

$$\sqrt{3} + \sqrt{5} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$$

$$1.73 + 2.24 = 2.24 + 1.73$$

$$3.97 = 3.97$$

c. Propiedad asociativa:

El modo de agrupar los sumandos no varía el resultado.
Si: a, b, c, $\in R$, entonces: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Ejemplo 1:

$$(6 + 4) + 7 = 6 + (4 + 7)$$

$$10 + 7 = 6 + 11$$

$$17 = 17$$

Ejemplo 2:

$$\sqrt{2} + (\sqrt{3} + \sqrt{5}) = (\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{5}$$

$$1.41 + (1.73 + 2.24) = (1.41 + 1.73) + 2.24$$

$$1.41 + 3.97 = 3.14 + 2.24$$

$$5.38 = 5.38$$

d. Existencia del elemento neutro:

El **0** es el elemento neutro de la suma, porque todo número sumado con él da el mismo número a la derecha o a la izquierda.
Si: $a \in R$, entonces: $a + 0 = 0 + a \rightarrow a = a$.

Ejemplos:

$$3 + 0 = 0 + 3 \rightarrow 3 = 3$$
$$\boldsymbol{a + 0 = a}$$
$$\pi + 0 = \pi$$

e. Existencia de opuesto o simétrico aditivo:

Dos números son opuestos, si al sumarlos obtenemos como resultado el cero.
Existe $-a \in R$ *tal qué:*

Ejemplos:

Dado que: $a = 2 \in R$

$$2 + (-2) = -2 + 2$$
$$2 - 2 = -2 + 2$$
$$0 = 0$$
$$4 - 4 = 0$$

f. El opuesto del opuesto de un número es igual al mismo número.

Ejemplos:

$-(-3) = 3 \rightarrow$ El opuesto del opuesto es el mismo número.

$4 + (-4) = (-4) + 4 \rightarrow$ El opuesto del opuesto es el mismo número
$4 - 4 = -4 + 4$
$0 = 0$

La sustracción en *R* no es conmutativa, ya que:

Si: $a, b \in R$, entonces: $a - b \neq b - a$

Dado que si: $a = 6$ y $b = 8$

Diremos que: $6 - 8 \neq 8 - 6$

Puesto que: $6 - 8 \neq 8 - 6$, es decir que:
$-2 \neq 2$

Sustracción o resta (combinación de ejercicios para suma y resta)

La diferencia de dos números reales se define como la suma del minuendo más el opuesto del sustraendo: $\boldsymbol{a - b = a + (-b)}$

Dados: $a,b \in R$, llamaremos diferencia entre ellos y lo representamos por $\boldsymbol{a - b}$, al número real $c \in R$, tal que $\boldsymbol{c = a - b = a + (-b)}$.

La operación definida se llama sustracción o resta y es una operación binaria.

Ejemplo 1:

Ejercicio con signos de agrupación: $-3\{ - [(1.25 + \frac{4}{3} - 2.5) + \frac{14}{5}] - \frac{1}{2} \} =$

Convertimos $\frac{4}{3}$ a decimal: $-3\{ - [(1.25 + 1.\bar{3} - 2.5) + 2.8] - 0.5\} =$

Resolvemos el contenido del paréntesis: $-3\{ - (0.08 + 2.8) - 0.5\}=$

Resolvemos el contenido del corchete: $-3 \{- 2.88 - 0.5\} =$

Resolvemos el contenido de las llaves: $-3 \{ - 3.38\} =$

Multiplicamos: $R = 10.14$

Ejemplo 2

Determine el resultado de:

$\{1\frac{1}{2} - (\frac{4}{3} + \frac{1}{6} - \frac{7}{4}) - \frac{2}{3}\} =$

Resolvemos: $1\frac{1}{2}$ y el contenido del paréntesis:

$\{\frac{3}{2} - (\frac{3}{4}) - \frac{2}{3}\} =$

Se elimina el paréntesis: $\{\frac{3}{2} - \frac{3}{4} - \frac{2}{3}\} =$

Resolvemos la operación final: $\frac{1}{12}$

Ejemplo 3

Determine el resultado de: $8 + 5\sqrt{2} - \{\sqrt{8} + 4\sqrt{3} - (\sqrt{96} - 4\sqrt{3} + \sqrt{18}) - 9\}=$

Simplificamos los radicales: $8 + 5\sqrt{2} - \{2\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - (4\sqrt{6} - 4\sqrt{3} + 3\sqrt{2}) - 9\}=$

Se suprimen los paréntesis al multiplicar los signos:

$$8 + 5\sqrt{2} - \{2\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - 4\sqrt{6} + 4\sqrt{3} - 3\sqrt{2} - 9\} =$$

Reducimos términos semejantes: $8 + 5\sqrt{2} - \{-\sqrt{2} + 8\sqrt{3} - 4\sqrt{6} - 9\} =$

Se suprimen las llaves al multiplicar los signos: $8 + 5\sqrt{2} + \sqrt{2} - 8\sqrt{3} + 4\sqrt{6} + 9 =$

Reducimos términos semejantes:

$$= 6\sqrt{2} - 8\sqrt{3} + 4\sqrt{6} + 17$$

Ejemplo 4

Determine el resultado de: [21 - (6) - (-32)] - [-12 + (-8) 2]

Suprimimos paréntesis y determinamos signos: [21 - 6 + 32] - [-12 - 16]

Suprimimos corchetes: [47] - [-28]

Quitamos signos de agrupación: 47 + 28

Respuesta: 75

Ejemplo 5

Determine el resultado de: $(4.25 + [3\sqrt{10} - 6\sqrt{11}]) - (\frac{12}{5} - [6.05 + 5\sqrt{\pi}])$

Convertimos a decimal lo que está dentro de los corchetes:

$$(4.25 + [3(3.16) - 6(3.32)]) - (2.4 - [6.05 + 5(1.77)])$$

Suprimimos paréntesis y asignamos signos:

$$(4.25 + [9.48 - 19.92]) - (2.4 - [6.05 + 8.85])$$

Operamos lo que está dentro de los corchetes:

$$(4.25 + [-10.44]) - (2.4 - [14.9])$$

Suprimimos corchetes:

$$(4.25-10.44) - (2.4-14.9)$$

Operamos lo que está dentro de los paréntesis:

$$(-6.19) - (-12.5)$$

Suprimimos paréntesis: -6.19 + 12.5 = 6.31

Multiplicación en *R*

Definición:

Dados: $a,b \in R$, llamaremos producto de ambos y lo representaremos por $\boldsymbol{a \cdot b}$ o $\boldsymbol{b \cdot a}$ a un número c tal que $\boldsymbol{c = a \cdot b}$

Propiedades de la multiplicación en *R*

a. Propiedad de clausura o cierre:

Si: $a,b \in R$, entonces $(a \cdot b) \in R$. El producto de dos números reales siempre será otro número real. Ejemplo:

$$5\,(-4) = -20.$$

b. Propiedad conmutativa:

El orden de los factores no varía el producto. Si: $a,b \in R$, entonces:

$$\boldsymbol{a \cdot b = b \cdot a}$$

Ejemplos:

- $3 \cdot 5 = 5 \cdot 3 \rightarrow 15 = 15$
- $\sqrt{2} \cdot \sqrt[2]{3} = \sqrt[2]{3} \cdot \sqrt{2}$
  $1.41(1.44) = (1.44)(1.41)$
  $2.03 = 2.03$

c. Propiedad asociativa:

El modo de agrupar los factores no varía el resultado. Si *a, b* y *c* son números reales cualesquiera, se cumple que:

Si:$a,b,c \in R$, entonces:

$$\boldsymbol{(a \cdot b) \cdot c = c \cdot (b \cdot a)}$$

Ejemplos:

- $6 \cdot (4 \cdot 7) = (6 \cdot 4) \cdot 7$
  $6 \cdot 28 = 24 \cdot 7$
  $168 = 168$

- $(e \cdot \pi) \cdot \Phi = e \cdot (\pi \cdot \Phi)$
  $(2.72 \cdot 3.14)(1.62) = 2.72(3.14 \cdot 1.62)$
  $(8.54)(1.62) = 2.72\ (5.09)$
  $13.84 = 13.84$

d. Existencia de elemento neutro:

El número 1 es el elemento neutro de la multiplicación, porque todo número multiplicado por él da el mismo número.

Existe: $1 \in R$,entonces: $a \cdot 1 = 1 \cdot a \rightarrow a = a$.

Ejemplos:

- $3 \cdot 1 = 1 \cdot 3 \rightarrow 3 = 3$
- $\pi \cdot 1 = \pi$

e. Existencia del inverso multiplicativo:

Un número es inverso del otro si al multiplicarlos obtenemos como resultado el elemento unidad.

Si: $a \neq 0$ existe $(\frac{1}{a})$ tal que: $\frac{a}{1} \cdot (\frac{1}{a}) = \frac{a}{a} = 1$

Ejemplos:

- $2 \neq 0$ existe $(\frac{1}{2})$ tal que: $\frac{2}{1} \cdot (\frac{1}{2}) = \frac{2}{2} = 1$
- $a \cdot \frac{1}{a} = 1$
- $\pi \cdot \frac{1}{\pi} = \pi$

f. Propiedad del elemento absorbente (cero):

Si: $a \in R$, entonces: $\boldsymbol{a\ (0) = (0)\ a = 0}$

Ejemplo:

$$3 \cdot 0 = 0 \cdot 3 \rightarrow 0 = 0$$

g. Propiedad del elemento absorbente (producto nulo):

Si: $a \cdot b = 0$, entonces: $\boldsymbol{a = 0,\ b = 0.}$

Ejemplo: $0 \cdot 0 = 0 \cdot 0 \rightarrow 0 = 0.$

h. Propiedad distributiva con respecto a la suma:

Si: $a, b, c \in R$, entonces: $\boldsymbol{a\ (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)}$

Ejemplos:

Si: $2, 3, 4 \in R$,entonces:

$$2\ (3 + 4) = (2 \cdot 3) + (2 \cdot 4) \rightarrow$$
$$2(7) = 6 + 8 \rightarrow$$
$$14 = 14$$

i. Propiedad del factor común:

Es el proceso inverso a la propiedad distributiva. Si varios sumandos tienen un factor común, podemos transformar la suma en producto extrayendo dicho factor.

Ejemplos:

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c\ )$$
$$\pi \cdot e + \pi \cdot \Phi = \pi \cdot (e + \Phi)$$

Ejemplos misceláneos de multiplicación en *R*

Ejemplo 1

Determine el resultado de:

$$3(9 - 2) + 2(5 - 1)(4 + 3) + 3(6 - 4)\ (8 - 7)$$

Resolvemos las operaciones indicadas dentro de los paréntesis:

$$3(7) + 2(4)(7) + 3(2)(1)$$

Resolvemos los productos:

$$21 + 56 + 6$$

Resolvemos las sumas: R/ = 83

Ejemplo 2

Determine el resultado de:

$$\{15 + (9 \cdot 3 - 5)\ 2\}\ \{(6 \cdot\ 4 \cdot 5)\ 3 + (5 - 4 \cdot 8)\ (3 \cdot 4 - 3)\}$$

Realizamos las operaciones indicadas en los paréntesis:

$$\{15 + (22)\ 2\}\ \{(120)\ 3 + (\ -27)\ (9)\}$$

Resolvemos los productos indicados:

$$\{15 + 44\}\ \ \{360\text{-}243\}$$

Efectuamos las operaciones dentro de las llaves:

$$\{59\}\{117\}$$

Resolvemos el producto:

R/ = 6,903

Ejemplo 3

Determine el resultado de:

$$[(4.25 + 2.56)\ 3 + 6.5\ (9.62 - 14.1)\ 5]\ [(20.8 + 10.6)\ 5.3 - (5.4 - 1.8)\ 2]$$

Desarrollamos las operaciones que están dentro de los paréntesis:

$$[(6.81)3 + 6.5\ (-4.48)\ 5]\ [(31.4)\ 5.3 - (3.6)\ 2]$$

Desarrollamos los productos indicados:

$$[20.43 - 145.6]\ [166.42 - 7.2]$$

Desarrollamos operaciones indicadas dentro de los corchetes:

$$[-125.17]\ [159.22]$$

Realizamos el producto:

$$R/ = -19{,}929.57$$

Ejemplo 4

Determine el resultado de:

$$\sqrt{2}\ \{2\sqrt{3}\ (5\sqrt{2} + \sqrt{50} + \sqrt{18})\} =$$

Resolvemos el contenido del paréntesis simplificando:

$$\sqrt{2}\ \{2\sqrt{3}\ (13\sqrt{2})\} =$$

Efectuamos el producto:

$$\sqrt{2}\ \{26\sqrt{6}\ \} =$$

Efectuamos la operación indicada:

$$26\sqrt{12} =$$

Simplificamos:

$$26(2\sqrt{3})$$

$$R/= 52\ \sqrt{3}$$

La división en *R*

La división es una operación, a dos números, que asocia el producto del primero por el inverso del segundo. De este modo, el cociente "*a*" dividido "*b*" se interpreta como el producto de:

$$a\left(\frac{1}{b}\right)$$

Si la división no es exacta, es decir, el divisor no está contenido en un número exacto de veces en el dividendo, la operación tendrá un resto o residuo, donde:

dividendo = ***cociente*** x ***divisor*** + ***resto***

La división es una operación inversa a la multiplicación.

Veamos estas cláusulas de importancia:

- Si: $\boldsymbol{m \neq 0}$, entonces: $\frac{0}{m} = 0$

  Ejemplo: $5 \neq 0$, entonces: $\frac{0}{5} = 0$
- Si: $\boldsymbol{m \neq 0}$,entonces: $\frac{m}{0}$ = (NED), no está definido

  Ejemplo: $6 \neq 0$, entonces: $\frac{6}{0}$ = (NED), no está definido
- La expresión: $\frac{0}{0}$, se dice que no está definida
- Si: $a, b \in R$, entonces: $\frac{a}{b} \neq \frac{b}{a}$

  Ejemplo: $\frac{2}{3} \neq \frac{3}{2}$

Ejemplo 1

Determine el resultado de:

$$(4\sqrt{6} + 10\sqrt{3}) \div 5\sqrt{3} = (4\sqrt{6} + 10\sqrt{3}) \quad 5\sqrt{3}$$

Aplicamos racionalización del denominador:

$$\frac{(4\sqrt{6} + 10\sqrt{(3)}}{5\sqrt{3}} \; \frac{(5\sqrt{3})}{(5\sqrt{3})} = \frac{(4\sqrt{6} + 10\sqrt{3})}{5\sqrt{3}} \; \frac{(\sqrt{3})}{(\sqrt{3})} = \frac{(4\sqrt{18} + 10\sqrt{9})}{5\sqrt{9}}$$

Resolvemos operaciones indicadas y simplificamos:

$$\frac{(4 \cdot 3\sqrt{2} + 10(3)}{15} \qquad R/= \frac{(12\sqrt{2} + 30)}{15} = \frac{(4\sqrt{2})}{5} + 2$$

Ejemplo 2

Determine el resultado de:

$$-\frac{5}{7} \div \left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{2}{6}\right) \div \left(\frac{8}{6}\right)\left(-\frac{7}{5}\right)\left(\frac{5}{7}\right) + 1$$

Resolvemos las operaciones indicadas:

$$-\frac{5}{7} \div \frac{4}{9} \div -\frac{4}{3} + 1$$

Resolvemos los cocientes indicados:

$$\frac{135}{112} + 1$$

Resolvemos el cociente y la suma:

$$R/= \frac{247}{112} = 2.21$$

Ejemplo 3

Determine el resultado de:

$$[\frac{3}{4} + \frac{5}{2}\ (2 - 1) + 5(\frac{6}{5} + 2)] + 22 =$$

Eliminamos paréntesis indicando producto:

$$[\frac{3}{4} + \frac{5}{2} + 16] + 22 =$$

Eliminamos corchetes:

$$\frac{77}{4} + 22 =$$

Resolvemos lo indicado:

$$R/= \frac{165}{4} \text{ o } 41\tfrac{1}{4}$$

Ejemplo 4

Determine el resultado de:

$$3\sqrt{2}\ (3\sqrt{2} + 5\sqrt{3}) \div 3\sqrt{5}$$

Resolvemos los productos y racionalizamos:

$$\frac{9\sqrt{4} + 15\sqrt{6}}{3\sqrt{(5)}} = \frac{9(2) + 15\sqrt{6}}{3\sqrt{(5)}} = \frac{(18 + 15\sqrt{6})(3\sqrt{5})}{(3\sqrt{5})\quad (3\sqrt{5})} =$$

Operamos los productos de numeradores como denominadores:

$$\frac{54\sqrt{5} + 45\sqrt{30}}{9\sqrt{(25)}} = \frac{54\sqrt{5} + 45\sqrt{30}}{9(5)} = \frac{54\sqrt{5} + 45\sqrt{30}}{45} =$$

Simplificamos:

$$R/ = \frac{(6\sqrt{5})}{5} + \sqrt{(30)}$$

Ejemplo 5

Determine el resultado de:

$$\frac{\frac{4}{6} - \frac{10}{6} - \frac{18}{4}}{(-\frac{8}{3})(\frac{1}{2})(-\frac{5}{4})} \div (\frac{1}{4} + \frac{3}{6} - \frac{4}{9})\text{-}0.25$$

Resolvemos las restas de la parte superior izquierda:

$$\frac{-\frac{11}{2}}{(-\frac{8}{3})(\frac{1}{2})(-\frac{5}{4})} \div (\frac{1}{4} + \frac{3}{6} - \frac{4}{9})\text{-}0.25$$

Resolvemos los productos de la parte inferior izquierda:

$$\frac{-\frac{11}{2}}{\frac{5}{3}} \div (\frac{1}{4} + \frac{3}{6} - \frac{4}{9}) - 0.25$$

Resolvemos las sumas y restas que están entre paréntesis:

$$\frac{-\frac{11}{2}}{\frac{5}{3}} \div (\frac{11}{36}) - 0.25$$

Resolvemos el primer cociente:

$$-\frac{33}{10} \div (\frac{11}{36}) - 0.25$$

Resolvemos el cociente:

$$-\frac{54}{5} - 0.25$$

Resolvemos la resta:

$$-10.8 - 0.25 \rightarrow R = -11.05$$

ACTIVIDAD 5

Resuelva los siguientes ejercicios en *R*:

a. $-10 \{ - [(12 + 5 - 30) + 9] - 32\}$

b. $-\frac{1}{3}\{ - [(\frac{4}{5} + \frac{5}{6} - \frac{1}{9}) + \frac{9}{5}] - \frac{2}{3}\}$

c. $16\{(2 + 9) + 17(45 - 23)\}$

d. $12.36\{(0.2 + 9.3) + 11.7(4.5 - 2.3)\}$

e. $9\,(2\sqrt{2} - 6\sqrt{2}) \div (\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{9}})$

f. $(\sqrt{12} + \sqrt{9}) \div \sqrt{4}$

g. $(5\sqrt{8} + \sqrt{12}) \div (3\sqrt{2} - \sqrt{48})$

h. $-\,0.009\{\,-[(9.002 + 3.052 - 2.001) + 0\,.750] - 8.03\}$

Potenciación en los números reales

La potenciación es una operación en las matemáticas entre dos números, uno denominado: base ***a*** y exponente ***n***. Se escribe $\boldsymbol{a^n}$ y se lee usualmente como: ***a*** elevado a la ***n***.

Definición: sean: $a \in R$ y $n \in Z^{\pm}$, se llama potencia de base *a* y exponente *n* al número $a^n \in R$, el cual lo definimos: $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots$
(*n* veces como factor). Ejemplos:

- $(\sqrt{3})^4 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{81} = 9$
- $(3e)^3 = 3e \cdot 3e \cdot 3e = 27e^3$
- $(0.2)^4 = (0.2) \cdot (0.2) \cdot (0.2) \cdot (0.2) = 0.0016$

1. Operaciones de la potenciación en *R*, según sus propiedades

   a. Producto de igual base y diferente exponente (copiamos la base y sumamos sus exponentes), así: $\boldsymbol{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$

   Ejemplos:

   - $(3\sqrt{2})^4\,(3\sqrt{2})^2 = (3\sqrt{2})^{4+2} = (3\sqrt{2})^6$
   - $(0.5)^{-4}\,(0.5)^{-6} = (0.5)^{-4+(-6)} = (0.5)^{-4-6} = (0.5)^{-10}$

   b. Cociente de igual base y diferente exponente (copiamos la base y restamos sus exponentes), así: $\boldsymbol{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$

   Ejemplos:

   - $\dfrac{(2\sqrt{3})^{-4}}{(2\sqrt{3})^2} = (2\sqrt{3}) - 4 - 2 = (2\sqrt{3})^{-6}$
   - $\dfrac{(3\pi)^5}{(3\pi)^7} = (3\pi)^{5-7} = (3\pi)^{-2}$

- $\frac{e^5}{e^3} = e^{5\text{-}3} = e^2$

c. Potencia de potencia (copiamos la base y multiplicamos las potencias), así: $\boldsymbol{(a^m)^n = a^{m \times n} = a^{mn}}$

Ejemplos:

- $((3\sqrt{2})^2)^3 = (3\sqrt{2})^{2\cdot 3} = (3\sqrt{2})^6$
- $((\frac{2}{3})^2)^{-3} = (\frac{2}{3})^{-6}$

d. Producto de potencias de diferente base, igual exponente: se operan las bases y se copia el exponente, así: $(a^m)(b^m) = (ab)^m$

Ejemplos:

- $(2\sqrt{3})^3\,(3\sqrt{5})^3 = (6\sqrt{15})^3$
- $(3^6)(8)^6 = 191{,}102{,}976$

e. Cociente de potencias de diferente base, igual exponente: se operan las bases y se copia el exponente, así: $\boldsymbol{\frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m}$ si y solo si bs

Ejemplos:

- $\frac{(3\sqrt{2})^5}{(5)^5} = (\frac{3\sqrt{2}}{5})^5$
- $\frac{(12.8)^5}{(4.2)^5} = (\frac{12.8}{4.2})^5 = (3.05)^5$
- $\frac{(10\sqrt{5})^5}{(5\sqrt{3})^5} = (\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}})^5 = (\frac{(2\sqrt{5})(\sqrt{3})}{(\sqrt{3})(\sqrt{3})})^5 = (\frac{2\sqrt{15}}{(\sqrt{9})})^5 = (\frac{2\sqrt{15}}{3})^5$

f. Cociente de potencias de igual base, igual exponente. Se copia la base y se restan los exponentes, así: $\boldsymbol{\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0 = 1}$, si y solo si $\boldsymbol{a \neq 0}$

Ejemplo:

$\frac{5^4}{5^4} = 5^{4-4} = 5^0 = 1$, o $\frac{5}{5} = 1$, $1^4 = 1$

g. Potencia cero. Todo número elevado a la potencia cero es igual a 1, base ≠ 0, así: Si a ∈ *R*.

Ejemplos:

- $a^0 = 1$, $a \neq 0$
- $100^0 = 1$
- 0^0 = NED (no está definido)

h. Potencia negativa. Toda base elevada a una potencia negativa, se formará una fracción, donde el numerador es *1* y el denominador es *la base elevada a una potencia positiva*, así: $\boldsymbol{a^{-m} = \frac{1}{a^m}, a \neq 0}$

Ejemplos:

- $(\pi\sqrt{3})^{-2} = \frac{1}{(\pi\sqrt{3})^2} = \frac{1}{\pi^2 (\sqrt{3})^2} = \frac{1}{3\pi^2}$
- $(4\sqrt{5})^{-3} = \frac{1}{(4\sqrt{5})^3} = \frac{1}{(4)^3 (\sqrt{5})^3} = \frac{1}{(64)(5)\sqrt{5}} = \frac{1}{320\sqrt{5}}$
- $(2.5)^{-2} = \frac{1}{(2.5)^2} = \frac{1}{6.25}$

i. Potencia de una raíz. El exponente del radicando se divide entre el índice de la raíz, así: $\boldsymbol{\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}}$ = si: $\boldsymbol{(a^{m/n})^n = a^m}$

Es decir: $\sqrt[x]{a^y} = a^{y/x}$

Nota: La expresión anterior se debe de aprovecha para explicar la conversión de un radical a exponente y viceversa, es decir que si tenemos: $\mathbf{\sqrt[3]{2^4} = 2^{4/3}}$

Ahora veamos de exponente a radical, así: $\mathbf{3^{3/2} = \sqrt[2]{3^3}}$ o simplemente: $\mathbf{\sqrt{3^3}}$.

Ejemplos:

- $\sqrt[3]{5^4} = 5^{4/3}$
- $\sqrt[2]{9^3} = 9^{3/2}$

Actividad 6

Resuelva los siguientes ejercicios aplicando lo que sabe sobre la potenciación:

a. $(-5)^2\,(-5)^{-6}\,(-5)^3$

b. $[(-5)^2]^{-3}$

c. $(6.5)^{-3}$

d. $\dfrac{(8\sqrt{4})^2}{(2\sqrt{9})^2}$

e. $(4\sqrt{5})^3\,(5\sqrt{5})^3$

f. $(7\sqrt{9})^6\,(7\sqrt{9})^{-3}$

g. $((\frac{1}{2})^3)^{-4}$

h. $(8\sqrt{3})^{-2}$

Radicalización en *R*

$k\ \sqrt[n]{a}$, donde: k = coeficiente, n = indice, $\sqrt{\ }$ = radical, a = radicando

Es el proceso inverso de la potenciación. Hay que recordar también que se pueden dar los dos procesos inversos, es decir, pasarlos de forma radical como exponente racional.

De radical a exponente racional

- $\sqrt[3]{5^4} = 5^{4/3}$
- $\sqrt{3\pi^3} = (3\pi)^{3/2}$
- $\sqrt[3]{5x} = (5x)^{1/3}$
- $-5(\sqrt[4]{2\pi}) = -5(2\pi)^{1/4}$
- $\sqrt[x]{a^y} = (\mathrm{a})^{\mathrm{y/x}}$

De exponente racional a radical

- $(4\pi)^{4/3} = \sqrt[3]{(4\pi)^4}$
- $(3.5)^{1/3} = \sqrt[3]{(3.5)^1} = \sqrt[3]{3.5}$
- $-2(2\pi)^{3/4} = -2\ \sqrt[4]{(2\pi)^3}$

1. Operaciones con radicales en R

   Establecemos algunas diferencias al operar con radicales, por ejemplo, si tenemos las siguientes proposiciones:

   - $\sqrt{64} = \pm 8$
   - $\sqrt{(-64)} \notin R$

- $\sqrt[3]{8} = 2$
- $\sqrt[3]{-8} = -2$

Radicales equivalentes

Utilizando la notación de exponente fraccionario y la propiedad de las fracciones, la cual se basa en multiplicar el numerador y denominador por un mismo número, la fracción es equivalente, obtenemos la notación:

$$a^{m/n} = a^{km/kn} \rightarrow \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$$

Si se multiplican o dividen el índice y el exponente de un radical por un mismo número natural, se obtiene otro radical equivalente.

Ejemplo:

$\sqrt[6]{256} = \sqrt[6]{2^8} = \sqrt[3]{2^4}$

Simplifique: $256 = 2^8$

Aplicamos propiedad de radicales: $\sqrt[6]{2^8} = 2^{8/6} = 2^{4/3} = \sqrt[3]{2^4}$

Simplificación de radicales

Si existe un número natural que divida al índice y al exponente (o los exponentes) del radicando, se obtiene un radical simplificado. Ejemplo:

$\sqrt[4]{36} = \sqrt[4]{(2^2 \cdot 3^2)} = \sqrt[2]{(2 \cdot 3)} = \sqrt{6}$

Simplifique $36 = 2^2 \cdot 3^2$

Dividimos los exponentes entre el índice $4 = \sqrt[2]{(2 \cdot 3)} = \sqrt{6}$

En otros casos de simplificación, dados dos o más expresiones, hallamos el mínimo común múltiplo de los índices, que será el común índice. Dividimos el común índice por cada uno de los índices y cada resultado obtenido se multiplica por sus exponentes correspondientes y el resultado será un equivalente de las expresiones primarias, así:

$$\sqrt{2} \qquad \sqrt[3]{(2^2 \cdot 3^2)} \qquad \sqrt[4]{(2^2 \cdot 3^3)}$$

m.c.m de indices (2, 3, 4) = 12, lo dividimos entre los indices:

$$\sqrt[12]{2^6} \qquad \sqrt[12]{(2^2)^4 \cdot (3^2)^4} \qquad \sqrt[12]{(2^2)^3 \cdot (3^3)^3}$$

$$\sqrt[12]{2^6} \qquad \sqrt[12]{(2^8 \cdot 3^8)} \qquad \sqrt[12]{(2^6 \cdot 3^9)}$$

Extracción de factores fuera del signo radical

Se descompone el radicando en factores:

a. Un exponente es menor que el índice, el factor correspondiente se deja en el radicando. Ejemplos:

$$\sqrt{6} = \sqrt{(2 \cdot 3)} \qquad \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3^2}$$

b. Un exponente es igual al índice, el factor correspondiente sale fuera del radicando. Ejemplos:

$$\sqrt{12} = \sqrt{(2^2 \cdot 3)} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{(2^3)} = 2$$

c. Un exponente es mayor que el índice, se divide dicho exponente por el índice. El cociente obtenido es el exponente del factor fuera del radicando y el resto es el exponente del factor dentro del radicando. Ejemplos:

- $\sqrt{48} = \sqrt{(2^4 \cdot 3)} = 2\ {}^2\sqrt{3}$
- $\sqrt[3]{243} = \sqrt[3]{3^5} = 3\ \sqrt[3]{3^2}$
- $\sqrt{(2 \cdot 3^2 \cdot 5^5)} = 3 \cdot 5^2\ \sqrt{(2 \cdot 5)}$
- $\sqrt[4]{(2^7 \cdot 3^{14} \cdot 5^4)} = 2 \cdot 3^3 \cdot 5\ \sqrt[4]{(2^3 \cdot 3^2)}$

d. Introducción de factores dentro del signo radical. Se introducen los factores elevados al índice correspondiente del radical. Veamos su notación constructiva: $\boldsymbol{a\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{(a^n b)}}$. Ejemplos:

- $2\sqrt{3} = \sqrt{(2^2 \cdot 3)} = \sqrt{12}$

- $2^2 \cdot 3^3\,\sqrt[4]{6} = \sqrt[4]{(2^2)^4 \cdot (3^3)^4 \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt[4]{(2^8 \cdot 3^{12} \cdot 2 \cdot 3)} = \sqrt[4]{(2^9 \cdot 3^{13})}$

Suma de radicales

Solamente pueden sumarse o restarse dos radicales cuando son radicales semejantes, es decir, si son radicales con el mismo índice e igual radicando.
Su modelo: $\boldsymbol{a\,\sqrt[n]{k} + b\,\sqrt[n]{k} + c\,\sqrt[n]{k} = (a + b + c)\,\sqrt[n]{k}}$

Ejemplos:

- $2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + \sqrt{2} = (2 - 4 + 1)\,\sqrt{2} = -\sqrt{2}$

- $3\,\sqrt[4]{5} - 2\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{5} = (3 - 2 - 1)\,\sqrt[4]{5} = 0$

- $\sqrt{12} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{75} = \sqrt{(2^2 \cdot 3)} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{(5^2 \cdot 3)} = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

- $\sqrt[4]{4} + \sqrt[6]{8} - \sqrt[12]{64} = \sqrt[4]{2^2} + \sqrt[6]{2^3} - \sqrt[12]{2^6} = \sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$

Nota: en este último ejercicio, el resultado de raíces se debe a que hemos simplificado tanto los exponentes como los índices, así: $^2/_4 = {}^1/_2$, $^3/_6 = {}^1/_2$, $^6/_{12} = {}^1/_2$, es decir, que el $^1/_2$ representa la $\sqrt{\ }$, y al simplificar su resultado es: $\sqrt{2}$.

Multiplicación de radicales del mismo índice

Se multiplican los radicandos y se deja el mismo índice. Su construcción:

$$\boldsymbol{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{(a \cdot b)}}$$

Ejemplo:

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{(12)} = \sqrt{(2^2 \cdot 3)} = 2\sqrt{3}$

Multiplicación de radicales de distinto índice

Primero se reducen a un índice común y luego se multiplican.
Ejemplos:

- $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[4]{27} \rightarrow$ mcm (2, 3, 4) = 12

  $\sqrt[12]{3^6} \cdot \sqrt[12]{(3^2)^4} \cdot \sqrt[12]{(3^3)^3} = \sqrt[12]{(3^6 \cdot 3^8 \cdot 3^9)} = \sqrt[12]{3^{23}} = 3\sqrt[12]{3^{11}}$

- $\sqrt{12} \cdot \sqrt[3]{36} \rightarrow$ m.c.m (2, 3) = 6

  $\sqrt[6]{12^3} \cdot \sqrt[6]{36^2} = \sqrt[6]{(2^2 \cdot 3)^3 \cdot (2^2 \cdot 3^2)^2} = \sqrt[6]{(2^6 \cdot 3^3 \cdot 2^4 \cdot 3^4)} =$

  $\sqrt[6]{(2^{10} \cdot 3^7)} = 6\sqrt[6]{(2^4 \cdot 3)}$

Radicales del mismo índice, forma racional

Para dividir radicales con el mismo índice se dividen los radicandos y se deja el mismo índice.

Su forma es: $\dfrac{\sqrt[n]{(a)}}{\sqrt[n]{(b)}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

Ejemplo:

$$\frac{\sqrt[6]{(128)}}{\sqrt[6]{(16)}} = \sqrt[6]{\frac{128}{16}} = \sqrt[6]{\frac{2^7}{2^4}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$$

Radicales de distinto índice, forma racional

a. Primero se reducen a índice común y luego se dividen. Ejemplos:

- $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} =$

  Reducimos índices a 6, m.c.m. de 3 y 2 y dividimos 6 entre sus índices:

  $\sqrt[6]{\dfrac{4^2}{2^3}} =$

Buscamos una misma base y descomponemos 4:

$\sqrt[6]{\frac{(2^2)^2}{2^3}} =$

Aplicamos potencia de potencias:

$\sqrt[6]{\frac{2^4}{2^3}} =$

Aplicamos cociente de potencias:

$\sqrt[6]{(2)}$

- $\frac{256}{\sqrt[3]{16}} = \sqrt[6]{\frac{(256)^3}{16^2}} = \sqrt[6]{\frac{(2^8)^3}{(2^4)^2}} = \sqrt[6]{\frac{2^{24}}{2^8}} = \sqrt[3]{2^{16}} = \sqrt[3]{2^8} = 2^2\sqrt[3]{2^2} = 4\sqrt[3]{4}$

b. Para elevar un radical a una potencia, se eleva a dicha potencia el radicando y se deja el mismo índice. Su forma: $\boldsymbol{(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}}$

Ejemplos:

- $\sqrt[3]{18^2} =$

En la expresión anterior simplificamos el número 18=2·3^2:

$\sqrt[3]{(2 \cdot 3^2)^2}$

Aplicamos potencia de potencias:

$\sqrt[3]{2 \cdot 3^4}$

Dividimos 3^4 entre el índice 3 y nos queda 3.

Sale 3 a multiplicar, puesto que: $3^3 \cdot 3 = 3^4$:

$3\sqrt[3]{2^2 \cdot 3}$

Multiplicamos los radicando quedando:

$3\sqrt[3]{12}$

- $\left[\dfrac{\sqrt[3]{(12)} \cdot \sqrt[4]{(18)}}{\sqrt{6}}\right]^4 =$

Suprimimos los corchetes y aplicamos potencia de potencia:

$$\frac{\sqrt[3]{(12)^4} \cdot \sqrt[4]{(18)^4}}{\sqrt{(6)^4}}$$

Simplificamos las bases y sacamos fuera 18:

$$\frac{\sqrt[3]{(2^2 \cdot 3)^4} \cdot 18}{\sqrt{(2^2 \cdot 3)^4}}$$

Aplicamos potencia de potencias:

$$\frac{18 \cdot \sqrt[3]{2^8 \cdot 3^4}}{\sqrt{2^4 \cdot 3^4}}$$

Usamos una sola potencia. m.c.m.(3, 2 = 6) y dividimos ***6 ÷ 3 = 2 ,***
6 ÷ 2 = 3, quedan como potencias:

$$18 \cdot \sqrt[6]{\frac{(2^8 \cdot 3^4)^2}{(2^4 \cdot 3^4)^3}}$$

Aplicamos potencias de potencias:

$$18 \cdot \sqrt[6]{\frac{2^{16} \cdot 3^8}{2^{12} \cdot 3^{12}}} \rightarrow \frac{2^{16}}{2^{12}} = 2^4,\quad \frac{3^8}{3^{12}} = 3^{-4},\ \textit{ahora:}\ \frac{2^4}{1} \div \frac{3^{-4}}{1} = \frac{2^4}{1} \cdot \frac{1}{3^4} = \frac{2^4}{3^4}$$

Aplicamos cociente de potencias de igual base:

$$18 \cdot \sqrt[6]{\frac{2^4}{3^4}}$$

Simplificamos potencias e índice y obtenemos la respuesta:

$$18 \cdot \sqrt[3]{\frac{2^2}{3^2}} \quad = 18 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

La raíz de un radical es otro radical de igual radicando y cuyo índice es el producto de los dos índices.

Su forma: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

En el siguiente ejemplo multiplicamos sus índices: 2(3)4 = 24 y copiamos su raíz con su radicando.

- $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}} = \sqrt[24]{2}$ → En este caso el método rápido es multiplicar los índices

Significa: $\sqrt[4]{2} = 2^{1/4}$ → $\sqrt[3]{2^{1/4}} = 2^{(1/4)\div 3} = 2^{1/12}$ → $\sqrt[2]{2^{1/12}} = 2^{(1/12)\div 2} = 2^{1/24}$

Aplicando conversión de exponente a radical: $\sqrt[24]{2}$

- $\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}} =$

El primer coeficiente 2, lo introducimos en el radical $\sqrt[3]{\ }$, como 2^3:

$\sqrt{\sqrt[3]{2^3 \cdot \sqrt[4]{2}}} =$

Hacemos el producto de: $2^3 \cdot 2 = 2^4$:

$\sqrt{\sqrt[3]{2^4\ \sqrt[4]{2}}} =$

El primer coeficiente 2^4, lo introducimos en el radical $\sqrt[4]{\ }$, como $(2^4)^3$:

$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{(2^4)^4 \cdot 2}}} =$

Aplicamos propiedad potencia de potencias:

$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^{16} \cdot 2}}} =$

Aplicamos producto de potencias (los radicales se eliminan por el método rápido):

$\sqrt[24]{2^{17}}$

Actividad 7

Resuelva los siguientes ejercicios aplicando lo que sabe sobre radicalización en *R.* (aquellos ejercicios que no tengan respuesta, debe confrontarlos con su tutor):

1. $-7(\sqrt[4]{2(8)})$ → De radical a exponencial:

2. $(6.5)^{2/3}$ → De exponencial a radical

3. Simplifique: $\sqrt[4]{(256)} =$

4. Encuentre el equivalente de cada expresión mediante m.c.m. de las siguientes expresiones: $\sqrt[3]{(3^4 \cdot 2^3)}$ y $\sqrt[2]{4^3 \cdot 3^2}$

5. Encuentre un exponente fuera del radical: $\sqrt{320}$

6. Coloque dos factores dentro del radical: $7\sqrt{2}$

7. $8\sqrt{2} - 21\sqrt{2} + \sqrt{2} - 58\sqrt{2} \rightarrow$

8. $\dfrac{\sqrt[4]{(32)}}{\sqrt[4]{16}} \rightarrow$

9. $9\sqrt{12} - 11\sqrt{24} + 2\sqrt{16} - 3\sqrt{36} \rightarrow$

10. $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{3}}} \rightarrow$

Racionalización en *R*

1. Operaciones de racionalización en *R*

Consiste en quitar los radicales del denominador, lo que permite facilitar el cálculo de operaciones como la suma de fracciones. Se pueden distinguir tres casos:

a. Racionalización del tipo: $\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{(b\sqrt{c})}}$

Ejemplos:

- $\dfrac{2}{(3\sqrt{2})} = \dfrac{(2 \cdot \sqrt{2})}{(3\sqrt{(2 \cdot \sqrt{2})})} = \dfrac{(2 \cdot \sqrt{2})}{3(\sqrt{2})^2} = \dfrac{(2 \cdot \sqrt{2})}{(3 \cdot 2)} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

- $\sqrt{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{(2 \cdot \sqrt{2})}} = \sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \left[1 + \dfrac{1}{2}\right]\sqrt{2} = \dfrac{3}{2}\sqrt{2}$

b. Racionalización del tipo: $\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b\,\sqrt[n]{c^m}}}$

Ejemplos:

1. $\dfrac{2}{3\sqrt[5]{4}} = \dfrac{2}{3\sqrt[5]{2^2}} =$

   Multiplicamos por la igualación de exponentes:

   $\dfrac{2}{3\sqrt[5]{2^2}} \cdot \dfrac{2}{\sqrt[5]{2^3}} =$

   Realizamos el producto:

   $\dfrac{2\sqrt[5]{2^3}}{3\sqrt[5]{2^2 \cdot 2^3}} =$

Multiplicamos las potencias del numerador como denominador:

$$\frac{2\sqrt[5]{2^3}}{3\sqrt[5]{2^5}} =$$

Simplificamos:

$$\frac{2\sqrt[5]{8}}{3 \cdot 2} = \frac{2\sqrt[5]{8}}{6}$$

Respuesta:

$$\frac{\sqrt[5]{8}}{6}$$

2. $\dfrac{3ab}{\sqrt[4]{a^2 b^3 c}} =$

Multiplicamos por el resto que le hace falta a los exponentes del denominador para igualarlos al índice 4, así: ***$a^2 b^3 c$***, a esta expresión le hace falta: ***$a^2 b^1 c^3$***, para que tengan todos exponente ***4***:

$$\frac{3ab}{\sqrt[4]{a^2 b^3 c}} \cdot \frac{\sqrt[4]{a^2 b^1 c^3}}{\sqrt[4]{a^2 b^1 c^3}} =$$

Realizamos los productos indicados:

$$\frac{3ab\sqrt[4]{a^2\ b\ c^3}}{\sqrt[4]{a^2 b^3 c^1} \cdot \sqrt[4]{a^2 b^1 c^3}} =$$

Los exponentes han sido igualados al índice 4:

$$\frac{3ab\sqrt[4]{a^2\ b\ c^3}}{\sqrt[4]{a^4 b^4 c^4}} =$$

Simplificamos exponentes con el índice:

$$\frac{3ab\sqrt[4]{a^2\ b\ c^3}}{a\,b\,c} =$$

Dividimos los valores que se pueden dividir (a,b) y resolvemos:

$$\frac{3\cancel{ab}\sqrt[4]{a^2\ b\ c^3}}{\cancel{ab}\,c} = \frac{3\sqrt[4]{a^2\ b\ c^3}}{c}$$

c. Racionalización del tipo: $\dfrac{\boldsymbol{a}}{\sqrt{\boldsymbol{b}} + \sqrt{\boldsymbol{c}}}$ y en general cuando el denominador sea un binomio con al menos un radical.

Se multiplica el numerador y denominador por el conjugado del denominador.

El conjugado de un binomio es igual al binomio con el signo central cambiado.

También tenemos que tener en cuenta que: "suma por diferencia de binomios es igual a diferencia de cuadrados". Así: (a+b)(a-b)= a^2-b^2.

Ejemplos:

3. $$\frac{2}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{2 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3})}{(\sqrt{2} - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{2 - 3} = \frac{2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{-1} = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$$

4. $$\frac{2}{4 - 2\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot (4 + 2\sqrt{2})}{(4 - 2\sqrt{2}) \cdot (4 + 2\sqrt{2})} = \frac{2 \cdot (4 + 2\sqrt{2})}{(4 - 2\sqrt{2}) \cdot (4 + \sqrt{2})}$$

$$= \frac{2 \cdot (4 + 2\sqrt{2})}{4^2 - (2\sqrt{2})^2} = \frac{2 \cdot (4 + 2\sqrt{2})}{16 - 4 \cdot 2} = \frac{2 \cdot (4 + 2\sqrt{2})}{8}$$

$$= \frac{4 + 2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 =$$

5. $$\frac{2\sqrt{2}}{5 - 2\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2}\,(5 + 2\sqrt{6})}{(5 - 2\sqrt{6}) \cdot (5 + 2\sqrt{6})} = \frac{10\sqrt{2} + 4\sqrt{12}}{(5^2 - 2\sqrt{6})^2}$$

$$= \frac{10\sqrt{2} + 4\sqrt{2^2 \cdot 3}}{25 - 4 \cdot 6} = \frac{10\sqrt{2} + 8\sqrt{3}}{25 - 24} = 10\sqrt{2} + 8\sqrt{3}$$

Actividad 8

Resuelva los siguientes ejercicios aplicando lo que sabe sobre racionalización en *R*:

1. $\frac{5}{6\sqrt{2}}$

2. $\sqrt{4} + \frac{2}{\sqrt{3}}$

3. $\frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{4}}$

4. $\frac{4}{10 - 4\sqrt{2}}$

5. $\frac{5 - \sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

6. $\dfrac{12}{\sqrt{7} - \sqrt{10}}$

7. $\dfrac{6}{3 - 2\sqrt{2}}$

8. $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{27} - 2\sqrt{3}}$

9. $\dfrac{6}{2\sqrt[4]{4}}$

10. $\dfrac{2}{5\sqrt{8x^3y^4}}$

Representación gráfica de los números reales usando intervalos reales

1.Tipos de representaciones gráficas en R

Definición de intervalo: se llama intervalo al conjunto de números reales comprendidos entre otros dos números que llamaremos ***a*** y ***b***, donde ***a*** y ***b*** se conocen a la vez como extremos del intervalo.

Existen tres maneras de escribir un número en intervalos reales:

a. Notación constructiva: $\{x \in R, a \leq x \leq b\}$

b. Notación gráfica:

c. Notación de intervalo: $[\ a,b\ ]$

2. Tipos de intervalos reales

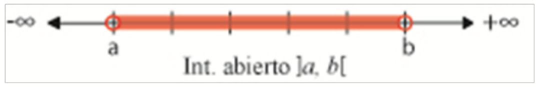
En la notación de intervalos se emplean paréntesis angulares, así:

a. ***Intervalo cerrado*** [,] es el conjunto de todos los números reales mayores o iguales que ***a*** y menores o iguales que ***b***:

I cerrado [a, b]

$$[\ a,b\ ] = \{x \in R, a \leq x \leq b\}$$

b. ***Intervalo abierto***] ,[es el conjunto de todos los números reales mayores que ***a*** y menores que ***b***:



$$]a,b[\; = \; \{x \in R,\ a < x < b\}$$

c. ***Intervalo semiabierto por la derecha*** [,[, es el conjunto de todos los números reales mayores o iguales que ***a*** y menores que ***b***:

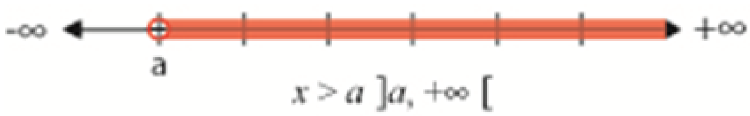
$$[a\ ,b[\; = \; \{x \in R,\ a \leq x < b\}$$

b. ***Intervalo semiabierto por la izquierda***] ,] , es el conjunto de todos los números reales mayores que ***a*** y menores o iguales que ***b***:

$$]a\ ,b] = \{x \in R,\ a < x \leq b\}$$

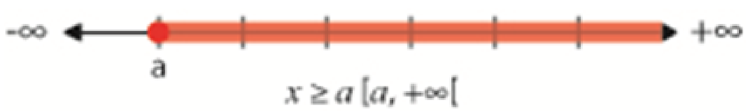
También hay semirrectas en los reales, las cuales están determinadas por un número. En una semirrecta se encuentran todos los números mayores (o menores) que él:

a. $x > a$



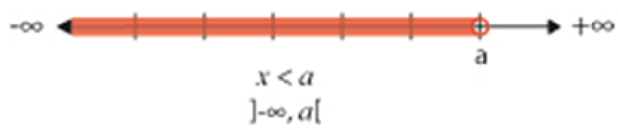
$$]a\ ,+\infty\ [\; = \; \{x \in R,\ a < \infty\}$$

b. $x \geq a$



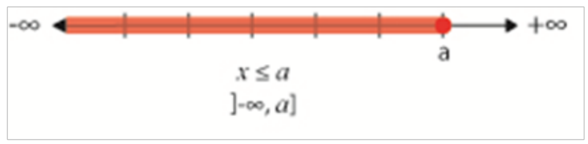
$$[a\ ,+\infty[\; = \; \{x \in R,\ a \leq \infty\}$$

c. $x < a$



$$]-\infty, a[= \{x \in R, -\infty < a\}$$

d. $x \leq a$



$$]-\infty, a] = \{x \in R, -\infty \leq a\}$$

Ejemplos

Representación en las tres notaciones (notación intervalo / notación constructiva / notación gráfica):

a. $[-3,5\ ]$ *Notación intervalo*

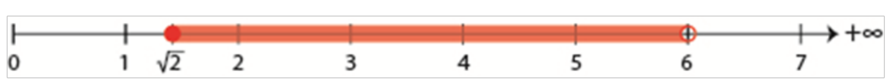
$\{x \in R, -3 \leq x \leq 5\}$ *Notación constructiva*

Notación gráfica

b. $]\sqrt{2}\,, 6[$ *Notación intervalo*

$\{x \in R, \sqrt{2} \leq x < 6\}$ *Notación constructiva*

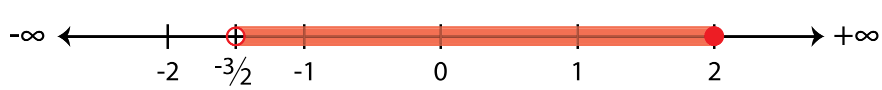
Notación gráfica



c. $]-\frac{3}{2}, 2\ ]$ *Notación intervalo*

$\{x \in R, -\frac{3}{2} < x \leq 2\}$ *Notación constructiva*

Notación gráfica



d. $]-1,\infty[$ *Notación intervalo*

$\{x \in R, -1 < x\}$ o $\{x \in R, x > -1\}$ *Notación constructiva*

Notación gráfica

Actividad 9

Resuelva los siguientes ejercicios aplicando lo que sabe sobre intervalos reales: (Estos ejercicios los puede realizar con la ayuda de su tutor).

a. Exprese cada desigualdad en notación de intervalo y grafique:

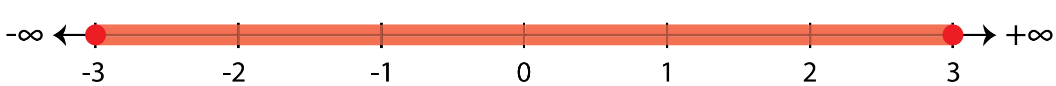
1. $-5 \leq x < 7$

2. $x < 2^{1/3}$

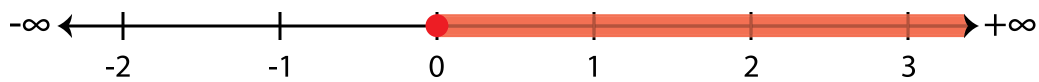
3. $-1.2 \leq x < 4$

4. $-5 \leq x \leq 2$

b. Escriba en notación constructiva las siguientes gráficas, además, exprese cada notación como un intervalo de números reales:

1. 

2. 

3. 

c. Escriba cada uno de los siguientes intervalos en notación constructiva:

1.]-3, 6[

2. [-1, 7]

3.]-2, +∞[

Valor absoluto en *R*

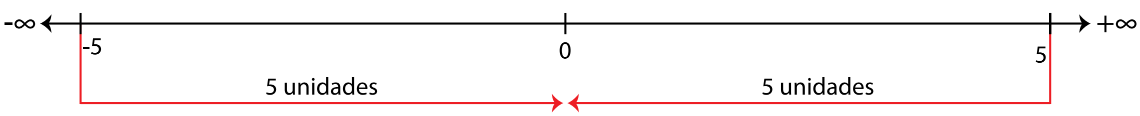
Los números 5 y -5 tienen en común que la distancia de 5 a 0 y de -5 a 0 es la misma, a pesar que 5 y -5 son distintos, pero su distancia en la recta numérica al 0 es igual: 5 unidades.

En otras palabras, -5 esta tan lejos de 0 que 5 implica que el valor absoluto de:

|-5| = 5 Se lee: *valor absoluto de menos cinco es cinco.*

|5| = 5 Se lee: *valor absoluto de cinco es cinco.*

La siguiente recta simboliza lo real del valor absoluto (distancia):



1. Propiedades e implicaciones del valor absoluto

   Valor absoluto de un número real ***a***, se escribe con la simbología **|*a*|**, es el mismo número ***a*** cuando es positivo o cero y opuesto de ***a***, si ***a*** es negativo. He aquí su notación construcción para todo número real ***a*** :

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a > 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

   a. $|5| = 5$, $|-5| = 5$, $|0| = 0$

Propiedades en el valor absoluto

a. Los números opuestos tienen igual valor absoluto. Ejemplo:

|a| = |-a|

|5| = |-5|=5

b. El valor absoluto de un producto es igual al producto de los valores absolutos de los factores. Ejemplo:

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |a|$$

$$|5 \cdot (-2)| = |5| \cdot |(-2)| \rightarrow |(-10)| = |5| \cdot |2| \rightarrow 10 = 10$$

c. El valor absoluto de una suma es menor o igual que la suma de los valores absolutos de los sumandos. Ejemplo:

$$|(a+b)| \leq |a| + |b|$$

$$|5+(-2)| \leq |5| + |(-2)| \rightarrow |3| \leq |5| + |2| \rightarrow 3 \leq 7$$

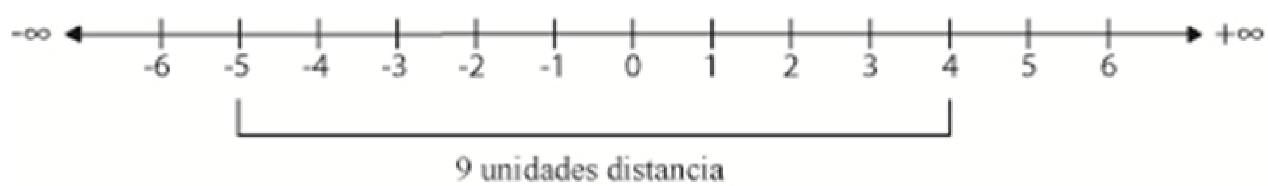
2. Gráfica del valor absoluto = distancia

La distancia entre dos números reales ***a*** y ***b***, que se escribe ***d***(***a, b***), se define como valor absoluto de la diferencia de ambos números:

$$d(a, b) = |b - a|$$

La distancia entre -5 y 4 es:

$$d(-5, 4) = |4- (-5)| = |(4+5)| = |9| = 9$$



Glosario

El número áureo o de oro: se trata de un número algebraico que posee muchas propiedades interesantes y que fue descubierto en la antigüedad, no como unidad, sino como relación o proporción. Esta proporción se encuentra tanto en algunas figuras geométricas como en la naturaleza, en elementos tales como caracoles, nervaduras de las hojas de algunos árboles, el grosor de las ramas, etc.

Notación matemática: la matemática se apoya en un lenguaje simbólico formal que sigue una serie de convenciones propias. Los símbolos representan un concepto, una operación, una entidad matemática según ciertas reglas.

Racionalización: es un proceso en donde se tiene que eliminar la raíz o raíces que están en el denominador de una fracción.

Valor absoluto: magnitud de un número, independientemente de su signo. El valor absoluto de un número "n" siempre es positivo o cero y se escribe como $|n|$. Si se representa el número "n" en una recta numérica, su valor absoluto es la distancia desde el origen hasta ese número.

Actividad metacognitiva

A continuación se le presentan una serie de preguntas que usted debe responder con el propósito de conocer sus aprendizajes al final de esta unidad.

1. ¿Sintió que hizo mucho esfuerzo o fue muy fácil resolver los ejercicios de la unidad?

____

____

____

____

2. ¿Puede mencionar qué temática estuvo fácil o alguna en donde encontró más problema?

3. ¿Considera que adquirió nuevos aprendizajes al estudiar los temas de esta unidad? ¿Puede mencionar cuáles?

4. ¿Cuáles temas estudiados en esta unidad le gustaron más?

5. ¿Qué temas considera importantes para su aplicación en su vida diaria?

Autoevaluación

Instrucciones: a continuación se le presentan una serie de ejercicios que debe responder y confrontar con su propio aprendizaje. Su trabajo consiste en dar respuesta a cada una, sin copiar de su texto y comprobar las respuestas en la guía didáctica.

1. Clasifique los números y diga a qué grupo pertenecen: (Con la ayuda de su tutor realice estos ejercicios).

   a. $\frac{\pi}{2}$ b. $\sqrt{36}$ c. 2.25111… d. $\sqrt{-5}$ e. $\frac{75}{-5}$

2. Dada la siguiente tabla, clasifique cada número *R*.
   Escriba el conjunto (*N, Z, Q, I, R*) al que pertenece cada uno de los siguientes elementos (algunos elementos a más de uno): (Con la ayuda de su tutor realice este ejercicio)

Número	*N*	*Z*	*Q*	*I*	*R*
$2\sqrt{2}$					
$^{10}/_{5}$					
$^{-4}/_{3}$					
$5e$					
$(^{4}/_{3})\ \pi$					

Número	N	Z	Q	I	R
$5/\sqrt{2}$					
$\sqrt{4}$					
$3/\sqrt{2}$					
$-(\sqrt{4}/2)$					
$3/4\sqrt{2}$					
$-(3/8)$					
$7e/2$					

3. Represente en la recta numérica: (Con la ayuda de su tutor grafique estos ejercicios)

   a) $\sqrt{17}$

   b) $\sqrt{13}$

4. Represente en la recta real los números que verifican las siguientes relaciones: (Con la ayuda de su tutor grafique estos ejercicios)

   a. $|x - 2| < 1$
   b. $1 \leq x \leq 3$
   c. $1 > x > 3$
   d. $1 \geq x \geq 3$

5. Calcule los valores de las siguientes potencias:

a. $16^{3/2}$

b. $8^{2/3}$

c. $81^{0.75}$

d. $8^{0.333}$

6. Halle las sumas:

a. $2\sqrt{12} - 3\sqrt{75} + \sqrt{27}$

b. $\sqrt{24} - 5\sqrt{6} + \sqrt{(486)}$

c. $2\sqrt{5} + \sqrt{45} + \sqrt{180} - \sqrt{80}$

d. $\sqrt[2]{54} - \sqrt[2]{16} + \sqrt[2]{250}$

e. $\sqrt[2]{16} + \sqrt[2]{250} + \sqrt[2]{4} - \dfrac{1}{\sqrt[2]{4}}$

7. Realice las operaciones siguientes:

a. $(\sqrt{7}-\sqrt{2})^2$

b. $(2 - \sqrt{3})^2$

c. $(\sqrt{5} + 2) \cdot (\sqrt{5} - 2)$

d) $(2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}) \cdot (2\sqrt{5} - 3\sqrt{2})$

e) $\dfrac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[6]{a^4}}$

8. Opere: $\sqrt[4]{\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{1/8}}}$

9. Efectúe: $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}}}$

10. Calcule:

a) $\frac{1}{(2-\sqrt{3})} \cdot \frac{1}{(2+\sqrt{3})}$

b) $\sqrt{\frac{a-b}{(a-b)^2} \cdot \frac{a+b}{a^2 - b^2}}$

11. Racionalizar:

a) $\frac{5}{(2\sqrt{2})}$

b) $\dfrac{2}{(3+\sqrt{3})}$

c) $\dfrac{1}{(\sqrt[3]{3})}$

d) $\dfrac{\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$

e) $\dfrac{(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})}{(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})}$

12. Determine el resultado de:

a. $5-\{ [(1.25 + \dfrac{3}{2} - 1.4) - \dfrac{16}{5}] - \dfrac{1}{3} \}$

b. $\frac{2}{3}\{1\frac{1}{2} - (\frac{3}{4} + \frac{5}{6} - \frac{2}{3}) - \frac{3}{4}\}$

c. $5 + 2\sqrt{3} - \{\sqrt{8} + 2\sqrt{2} - (\sqrt{48} - 3\sqrt{2} + \sqrt{18}) - 2\}$

d. $\frac{3}{4}[(2 + \frac{1}{2}) + (5 + 3\sqrt{3})]$

e. $\frac{(2\sqrt{6} + 2\sqrt{3})}{(5\sqrt{2})}$

f. $\frac{(5+3\sqrt{2})}{(2+2\sqrt{3})}$

g. $\dfrac{(\sqrt{3}+3\sqrt{2})}{(5+2\sqrt{5})}$

h. $2\sqrt{8}\,(2\sqrt{5} + 3\sqrt{2}) \div (\,3\sqrt{2} + 3\sqrt{3})$

i. $(4\sqrt{5})^{-2} \cdot (2\sqrt{3}) \cdot \sqrt[3]{40}$

13. Grafique en la recta numérica, dé la notación constructiva y gráfica de los siguientes intervalos: (Con la ayuda de su tutor realice los siguientes ejercicios)

a. [-3,4] b.]-2,8] c. [-1,10[d. [1,∞[e.]-∞,5]

14. Dé la notación de intervalo y gráfica de las siguientes notaciones constructivas: (Con la ayuda de su tutor ud puede realizar lo que se le pide)

a) $A = \{ x/x \in R, -3 < x \leq 3 \}$

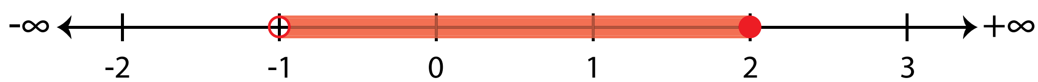
b) $B = \{ x/x \in R, -1 \leq x < 6 \}$

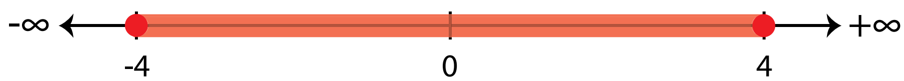
c) $C = \{ x/x \in R, 0 \leq x \leq 8 \}$

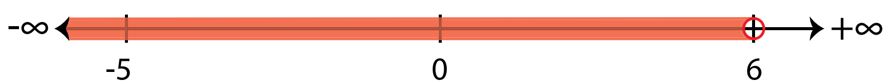
d) $D = \{ x/x \in R, -1 \leq x \}$

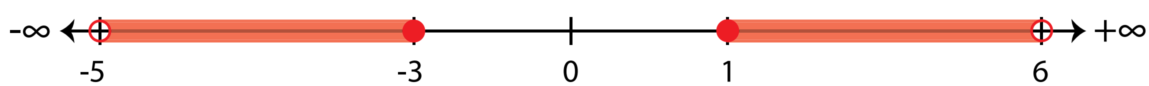
e) $E = \{ x/x \in R, 6 \geq x \}$

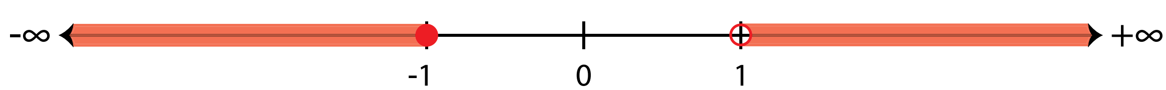
15. Dé la notación de intervalo y constructiva de las siguientes notaciones gráficas: (Con la ayuda de su tutor ud puede realizar lo que se le pide).

a. 

b. 

c. 

d. 

e. 

Bibliografía

Leithold, Louis. *El cálculo con geometría analítica.*

Reyes Núñez. *Horacio. Matemáticas, primero de bachillerato.*