Potenciación en los números reales

La potenciación es una operación en las matemáticas entre dos números, uno denominado: base $\boldsymbol{a}$ y exponente $\boldsymbol{n}$. Se escribe $\boldsymbol{a^n}$ y se lee usualmente como: $\boldsymbol{a}$ elevado a la $\boldsymbol{n}$.

Definición: sean: $a \in R$ y $n \in Z^{\pm}$, se llama potencia de base a y exponente n al número $a^n \in R$, el cual lo definimos: $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a\ldots$
(n veces como factor). Ejemplos:

- $(\sqrt{3})^4 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{81} = 9$
- $(3e)^3 = 3e \cdot 3e \cdot 3e = 27e^3$
- $(0.2)^4 = (0.2) \cdot (0.2) \cdot (0.2) \cdot (0.2) = 0.0016$

1. Operaciones de la potenciación en R, según sus propiedades

a. Producto de igual base y diferente exponente (copiamos la base y sumamos sus exponentes), así: $\boldsymbol{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$

Ejemplos:

- $(3\sqrt{2})^4\,(3\sqrt{2})^2 = (3\sqrt{2})^{4+2} = (3\sqrt{2})^6$
- $(0.5)^{-4}\,(0.5)^{-6} = (0.5)^{-4+(-6)} = (0.5)^{-4-6} = (0.5)^{-10}$

b. Cociente de igual base y diferente exponente (copiamos la base y restamos sus exponentes), así: $\boldsymbol{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$

Ejemplos:

- $\frac{(2\sqrt{3})^{-4}}{(2\sqrt{3})^2} = (2\sqrt{3}) - 4 - 2 = (2\sqrt{3})^{-6}$
- $\frac{(3\pi)^5}{(3\pi)^7} = (3\pi)^{5-7} = (3\pi)^{-2}$

- $\frac{e^5}{e^3} = e^{5-3} = e^2$

c. Potencia de potencia (copiamos la base y multiplicamos las potencias), así: $\boldsymbol{(a^m)^n = a^{m \times n} = a^{mn}}$

Ejemplos:

- $((3\sqrt{2})^2)^3 = (3\sqrt{2})^{2\cdot 3} = (3\sqrt{2})^6$

- $((\frac{2}{3})^2)^{-3} = (\frac{2}{3})^{-6}$

d. Producto de potencias de diferente base, igual exponente: se operan las bases y se copia el exponente, así: $(a^m)(b^m) = (ab)^m$

Ejemplos:

- $(2\sqrt{3})^3 (3\sqrt{5})^3 = (6\sqrt{15})^3$

- $(3^6)(8)^6 = 191{,}102{,}976$

e. Cociente de potencias de diferente base, igual exponente: se operan las bases y se copia el exponente, así: $\boldsymbol{\frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m}$ si y solo si bs

Ejemplos:

- $\frac{(3\sqrt{2})^5}{(5)^5} = (\frac{3\sqrt{2}}{5})^5$

- $\frac{(12.8)^5}{(4.2)^5} = (\frac{12.8}{4.2})^5 = (3.05)^5$

- $\frac{(10\sqrt{5})^5}{(5\sqrt{3})^5} = (\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}})^5 = (\frac{(2\sqrt{5})(\sqrt{3})}{(\sqrt{3})(\sqrt{3})})^5 = (\frac{2\sqrt{15}}{(\sqrt{9})})^5 = (\frac{2\sqrt{15}}{3})^5$

f. Cociente de potencias de igual base, igual exponente. Se copia la base y se restan los exponentes, así: $\boldsymbol{\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0 = 1}$, si y solo si $\boldsymbol{a \neq 0}$

Ejemplo:

$\frac{5^4}{5^4} = 5^{4-4} = 5^0 = 1$, o $\frac{5}{5} = 1$, $1^4 = 1$

g. Potencia cero. Todo número elevado a la potencia cero es igual a 1, base ≠ 0, así: Si a ∈ *R*.

Ejemplos:

- $a^0 = 1$, $a \neq 0$
- $100^0 = 1$
- 0^0 = NED (no está definido)

h. Potencia negativa. Toda base elevada a una potencia negativa, se formará una fracción, donde el numerador es *1* y el denominador es *la base elevada a una potencia positiva*, así: $\boldsymbol{a^{-m} = \frac{1}{a^m}, a \neq 0}$

Ejemplos:

- $(\pi\sqrt{3})^{-2} = \frac{1}{(\pi\sqrt{3})^2} = \frac{1}{\pi^2 (\sqrt{3})^2} = \frac{1}{3\pi^2}$
- $(4\sqrt{5})^{-3} = \frac{1}{(4\sqrt{5})^3} = \frac{1}{(4)^3 (\sqrt{5})^3} = \frac{1}{(64)(5)\sqrt{5}} = \frac{1}{320\sqrt{5}}$
- $(2.5)^{-2} = \frac{1}{(2.5)^2} = \frac{1}{6.25}$

i. Potencia de una raíz. El exponente del radicando se divide entre el índice de la raíz, así: $\boldsymbol{\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}}$ = si: $\boldsymbol{(a^{m/n})^n = a^m}$

Es decir: $\sqrt[x]{a^y} = a^{y/x}$

Nota: La expresión anterior se debe de aprovecha para explicar la conversión de un radical a exponente y viceversa, es decir que si tenemos: $\mathbf{\sqrt[3]{2^4} = 2^{4/3}}$

Ahora veamos de exponente a radical, así: $\mathbf{3^{3/2} = \sqrt[2]{3^3}}$ o simplemente: $\mathbf{\sqrt{3^3}}$.

Ejemplos:

- $\sqrt[3]{5^4} = 5^{4/3}$
- $\sqrt[2]{9^3} = 9^{3/2}$

Actividad 6

Resuelva los siguientes ejercicios aplicando lo que sabe sobre la potenciación:

a. $(-5)^2\,(-5)^{-6}\,(-5)^3$

b. $[(-5)^2]^{-3}$

c. $(6.5)^{-3}$