Radicalización en *R*

$k\,\sqrt[n]{a}$, donde: k = coeficiente, n = indice, $\sqrt{\ }$ = radical, a = radicando

Es el proceso inverso de la potenciación. Hay que recordar también que se pueden dar los dos procesos inversos, es decir, pasarlos de forma radical como exponente racional.

De radical a exponente racional

- $\sqrt[3]{5^4} = 5^{4/3}$
- $\sqrt{3\pi^3} = (3\pi)^{3/2}$
- $\sqrt[3]{5x} = (5x)^{1/3}$
- $-5(\sqrt[4]{2\pi}) = -5(2\pi)^{1/4}$
- $\sqrt[x]{a^y} = (\mathrm{a})^{\mathrm{y/x}}$

De exponente racional a radical

- $(4\pi)^{4/3} = \sqrt[3]{(4\pi)^4}$
- $(3.5)^{1/3} = \sqrt[3]{(3.5)^1} = \sqrt[3]{3.5}$
- $-2(2\pi)^{3/4} = -2\,\sqrt[4]{(2\pi)^3}$

1. Operaciones con radicales en R

   Establecemos algunas diferencias al operar con radicales, por ejemplo, si tenemos las siguientes proposiciones:

   - $\sqrt{64} = \pm 8$
   - $\sqrt{(-64)} \notin R$

- $\sqrt[3]{8} = 2$
- $\sqrt[3]{-8} = -2$

Radicales equivalentes

Utilizando la notación de exponente fraccionario y la propiedad de las fracciones, la cual se basa en multiplicar el numerador y denominador por un mismo número, la fracción es equivalente, obtenemos la notación:

$$\boldsymbol{a^{m/n} = a^{km/kn} \rightarrow \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}}$$

Si se multiplican o dividen el índice y el exponente de un radical por un mismo número natural, se obtiene otro radical equivalente.

Ejemplo:

$\sqrt[6]{256} = \sqrt[6]{2^8} = \sqrt[3]{2^4}$

Simplifique: $256 = 2^8$

Aplicamos propiedad de radicales: $\sqrt[6]{2^8} = 2^{8/6} = 2^{4/3} = \sqrt[3]{2^4}$

Simplificación de radicales

Si existe un número natural que divida al índice y al exponente (o los exponentes) del radicando, se obtiene un radical simplificado. Ejemplo:

$\sqrt[4]{36} = \sqrt[4]{(2^2 \cdot 3^2)} = \sqrt[2]{(2 \cdot 3)} = \sqrt{6}$

Simplifique $36 = 2^2 \cdot 3^2$

Dividimos los exponentes entre el índice $4 = \sqrt[2]{(2 \cdot 3)} = \sqrt{6}$

En otros casos de simplificación, dados dos o más expresiones, hallamos el mínimo común múltiplo de los índices, que será el común índice. Dividimos el común índice por cada uno de los índices y cada resultado obtenido se multiplica por sus exponentes correspondientes y el resultado será un equivalente de las expresiones primarias, así:

$$\sqrt{2} \qquad \sqrt[3]{(2^2 \cdot 3^2)} \qquad \sqrt[4]{(2^2 \cdot 3^3)}$$

m.c.m de indices (2, 3, 4) = 12, lo dividimos entre los indices:

$$\sqrt[12]{2^6} \qquad \sqrt[12]{(2^2)^4 \cdot (3^2)^4} \qquad \sqrt[12]{(2^2)^3 \cdot (3^3)^3}$$

$$\sqrt[12]{2^6} \qquad \sqrt[12]{(2^8 \cdot 3^8)} \qquad \sqrt[12]{(2^6 \cdot 3^9)}$$

Extracción de factores fuera del signo radical

Se descompone el radicando en factores:

a. Un exponente es menor que el índice, el factor correspondiente se deja en el radicando. Ejemplos:

$$\sqrt{6} = \sqrt{(2 \cdot 3)} \qquad \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3^2}$$

b. Un exponente es igual al índice, el factor correspondiente sale fuera del radicando. Ejemplos:

$$\sqrt{12} = \sqrt{(2^2 \cdot 3)} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{(2^3)} = 2$$

c. Un exponente es mayor que el índice, se divide dicho exponente por el índice. El cociente obtenido es el exponente del factor fuera del radicando y el resto es el exponente del factor dentro del radicando. Ejemplos:

- $\sqrt{48} = \sqrt{(2^4 \cdot 3)} = 2\ ^2\sqrt{3}$
- $\sqrt[3]{243} = \sqrt[3]{3^5} = 3\ \sqrt[3]{3^2}$
- $\sqrt{(2 \cdot 3^2 \cdot 5^5)} = 3 \cdot 5^2\ \sqrt{(2 \cdot 5)}$
- $\sqrt[4]{(2^7 \cdot 3^{14} \cdot 5^4)} = 2 \cdot 3^3 \cdot 5\ \sqrt[4]{(2^3 \cdot 3^2)}$

d. Introducción de factores dentro del signo radical. Se introducen los factores elevados al índice correspondiente del radical. Veamos su notación constructiva: $\boldsymbol{a\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{(a^n\, b)}}$. Ejemplos:

- $2\sqrt{3} = \sqrt{(2^2 \cdot 3)} = \sqrt{12}$
- $2^2 \cdot 3^3\, \sqrt[4]{6} = \sqrt[4]{(2^2)^4 \cdot (3^3)^4 \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt[4]{(2^8 \cdot 3^{12} \cdot 2 \cdot 3)} = \sqrt[4]{(2^9 \cdot 3^{13})}$

Suma de radicales

Solamente pueden sumarse o restarse dos radicales cuando son radicales semejantes, es decir, si son radicales con el mismo índice e igual radicando.
Su modelo: $\boldsymbol{a\,\sqrt[n]{k} + b\,\sqrt[n]{k} + c\,\sqrt[n]{k} = (a + b + c)\,\sqrt[n]{k}}$

Ejemplos:

- $2\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + \sqrt{2} = (2 - 4 + 1)\,\sqrt{2} = -\sqrt{2}$
- $3\,\sqrt[4]{5} - 2\sqrt[4]{5} - \sqrt[4]{5} = (3 - 2 - 1)\,\sqrt[4]{5} = 0$
- $\sqrt{12} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{75} = \sqrt{(2^2 \cdot 3)} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{(5^2 \cdot 3)} = 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$
- $\sqrt[4]{4} + \sqrt[6]{8} - \sqrt[12]{64} = \sqrt[4]{2^2} + \sqrt[6]{2^3} - \sqrt[12]{2^6} = \sqrt{2} + \sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$

Nota: en este último ejercicio, el resultado de raíces se debe a que hemos simplificado tanto los exponentes como los índices, así: $^2/_4 = {}^1/_2$, $^3/_6 = {}^1/_2$, $^6/_{12} = {}^1/_2$, es decir, que el $^1/_2$ representa la $\sqrt{\ }$, y al simplificar su resultado es: $\sqrt{2}$.

Multiplicación de radicales del mismo índice

Se multiplican los radicandos y se deja el mismo índice. Su construcción:

$$\boldsymbol{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{(a \cdot b)}}$$

Ejemplo:

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{(12)} = \sqrt{(2^2 \cdot 3)} = 2\sqrt{3}$

Multiplicación de radicales de distinto índice

Primero se reducen a un índice común y luego se multiplican.
Ejemplos:

- $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[4]{27} \;\rightarrow\;$ mcm (2, 3, 4) = 12

  $\sqrt[12]{3^6} \cdot \sqrt[12]{(3^2)^4} \cdot \sqrt[12]{(3^3)^3} = \sqrt[12]{(3^6 \cdot 3^8 \cdot 3^9)} = \sqrt[12]{3^{23}} = 3\,\sqrt[12]{3^{11}}$

- $\sqrt{12} \cdot \sqrt[3]{36} \;\rightarrow\;$ m.c.m (2, 3) = 6

  $\sqrt[6]{12^3} \cdot \sqrt[6]{36^2} = \sqrt[6]{(2^2 \cdot 3)^3 \cdot (2^2 \cdot 3^2)^2} = \sqrt[6]{(2^6 \cdot 3^3 \cdot 2^4 \cdot 3^4)} =$

  $\sqrt[6]{(2^{10} \cdot 3^7)} = 6\,\sqrt[6]{(2^4 \cdot 3)}$

Radicales del mismo índice, forma racional

Para dividir radicales con el mismo índice se dividen los radicandos y se deja el mismo índice.

Su forma es: $\dfrac{\sqrt[n]{(a)}}{\sqrt[n]{(b)}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

Ejemplo:

$$\frac{\sqrt[6]{(128)}}{\sqrt[6]{(16)}} = \sqrt[6]{\frac{128}{16}} = \sqrt[6]{\frac{2^7}{2^4}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$$

Radicales de distinto índice, forma racional

a. Primero se reducen a índice común y luego se dividen. Ejemplos:

- $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}} =$

  Reducimos índices a 6, m.c.m. de 3 y 2 y dividimos 6 entre sus índices:

  $\sqrt[6]{\dfrac{4^2}{2^3}} =$

Buscamos una misma base y descomponemos 4:

$\sqrt[6]{\frac{(2^2)^2}{2^3}} =$

Aplicamos potencia de potencias:

$\sqrt[6]{\frac{2^4}{2^3}} =$

Aplicamos cociente de potencias:

$\sqrt[6]{(2)}$

- $\frac{256}{\sqrt[3]{16}} = \sqrt[6]{\frac{(256)^3}{16^2}} = \sqrt[6]{\frac{(2^8)^3}{(2^4)^2}} = \sqrt[6]{\frac{2^{24}}{2^8}} = \sqrt[3]{2^{16}} = \sqrt[3]{2^8} = 2^2\ \sqrt[3]{2^2} = 4\ \sqrt[3]{4}$

b. Para elevar un radical a una potencia, se eleva a dicha potencia el radicando y se deja el mismo índice. Su forma: $\boldsymbol{(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}}$

Ejemplos:

- $\sqrt[3]{18^2} =$

En la expresión anterior simplificamos el número 18=2·3^2:

$\sqrt[3]{(2 \cdot 3^2)^2}$

Aplicamos potencia de potencias:

$\sqrt[3]{2 \cdot 3^4}$

Dividimos 3^4 entre el índice 3 y nos queda 3.

Sale 3 a multiplicar, puesto que: $3^3 \cdot 3 = 3^4$:

$3\ \sqrt[3]{2^2 \cdot 3}$

Multiplicamos los radicando quedando:

$3\ \sqrt[3]{12}$

- $\left[\dfrac{\sqrt[3]{(12)} \cdot \sqrt[4]{(18)}}{\sqrt{6}}\right]^4 =$

Suprimimos los corchetes y aplicamos potencia de potencia:

$$\frac{\sqrt[3]{(12)^4} \cdot \sqrt[4]{(18)^4}}{\sqrt{(6)^4}}$$

Simplificamos las bases y sacamos fuera 18:

$$\frac{\sqrt[3]{(2^2 \cdot 3)^4} \cdot 18}{\sqrt{(2^2 \cdot 3)^4}}$$

Aplicamos potencia de potencias:

$$\frac{18 \cdot \sqrt[3]{2^8 \cdot 3^4}}{\sqrt{2^4 \cdot 3^4}}$$

Usamos una sola potencia. m.c.m.(3, 2 = 6) y dividimos ***6 ÷ 3 = 2 ,***
6 ÷ 2 = 3, quedan como potencias:

$$18 \cdot \sqrt[6]{\frac{(2^8 \cdot 3^4)^2}{(2^4 \cdot 3^4)^3}}$$

Aplicamos potencias de potencias:

$$18 \cdot \sqrt[6]{\frac{2^{16} \cdot 3^8}{2^{12} \cdot 3^{12}}} \rightarrow \frac{2^{16}}{2^{12}} = 2^4,\ \ \frac{3^8}{3^{12}} = 3^{-4},\ \textit{ahora:}\ \frac{2^4}{1} \div \frac{3^{-4}}{1} = \frac{2^4}{1} \cdot \frac{1}{3^4} = \frac{2^4}{3^4}$$

Aplicamos cociente de potencias de igual base:

$$18 \cdot \sqrt[6]{\frac{2^4}{3^4}}$$

Simplificamos potencias e índice y obtenemos la respuesta:

$$18 \cdot \sqrt[3]{\frac{2^2}{3^2}} \quad = 18 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

La raíz de un radical es otro radical de igual radicando y cuyo índice es el producto de los dos índices.

Su forma: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{\boldsymbol{a}}} = \sqrt[nm]{\boldsymbol{a}}$

En el siguiente ejemplo multiplicamos sus índices: 2(3)4 = 24 y copiamos su raíz con su radicando.

- $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}} = \sqrt[24]{2}$ → En este caso el método rápido es multiplicar los índices

Significa: $\sqrt[4]{2} = 2^{1/4}$ → $\sqrt[3]{2^{1/4}} = 2^{(1/4)\div 3} = 2^{1/12}$ → $\sqrt[2]{2^{1/12}} = 2^{(1/12)\div 2} = 2^{1/24}$

Aplicando conversión de exponente a radical: $\sqrt[24]{2}$

- $\sqrt{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}} =$

El primer coeficiente 2, lo introducimos en el radical $\sqrt[3]{\ }$, como 2^3:

$\sqrt{\sqrt[3]{2^3 \cdot \sqrt[4]{2}}} =$

Hacemos el producto de: $2^3 \cdot 2 = 2^4$:

$\sqrt{\sqrt[3]{2^4\ \sqrt[4]{2}}} =$

El primer coeficiente 2^4, lo introducimos en el radical $\sqrt[4]{\ }$, como $(2^4)^3$:

$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{(2^4)^4 \cdot 2}}} =$

Aplicamos propiedad potencia de potencias:

$\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^{16} \cdot 2}}} =$

Aplicamos producto de potencias (los radicales se eliminan por el método rápido):

$\sqrt[24]{2^{17}}$