Introducción

La presente unidad hace un esbozo sobre la temática referida a los números complejos, partiendo desde su concepto en notación constructiva. Luego se incluyen una serie de representaciones gráficas de los números complejos, que es de suma importancia al abordar estos conocimientos.

Asimismo, se plantea el desarrollo pertinente de la potenciación de los números imaginarios a partir del ciclo de cuatro valores para la unidad imaginaria y se propone una serie de ejercicios que permiten comprender cuáles son los componentes de un número complejo.

También en esta unidad se enseña a conocer las diferentes coordenadas que se alternan y sobre todo las conversiones que estas implican, se muestra cómo se solucionan ecuaciones en C y la resolución de ecuaciones cuadráticas con soluciones complejas.

Esta unidad es de gran utilidad en el mundo de los números, ya que en sus comienzos los números imaginarios se consideraban como un descubrimiento matemático que quizás tendría alguna proyección teórica, pero en actualidad ya han dejado de ser imaginarios y se han constituido en una herramienta numérica de gran valía en las ciencias que conciben su aplicación de forma real y no imaginaria, como aún se les llama.

¿Qué vamos a aprender?

Competencias de la unidad	Objetivos de la unidad	Contenido
Identifican y clasifican números dentro del conjunto de los números complejos. Realizan operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) con números complejos.	Definir el concepto de número complejo. Realizar operaciones básicas con números complejos.	Definición de número complejo: 1. Operaciones con números complejos (C) 2. Operaciones combinadas en C 3 Actividad 1
Representan números complejos en el plano complejo.	Graficar los números complejos en el plano cartesiano.	Representación gráfica de los números complejos: 1. Actividad 2
		Potenciación en los números imaginarios: 1. Métodos para resolver potencias imaginarias 2. Operaciones utilizando potencias mayores a 0 con números complejos 3. Actividad 3
		Componentes gráficos de un número complejo: 1. Módulo de un número complejo 2. Argumento de un número complejo 3. Actividad 4

	Desarrollar ejercicios de conversión de coordenadas cartesianas a polares.	Coordenadas cartesianas y polares: 1. Conversión de coordenadas cartesianas a polares 2. Actividad 5
		Conversión de coordenadas polares a cartesianas: 1. Procedimiento para esta conversión 2. Tabla de las razones trigonométricas y sus conversiones 3. Actividad 6
		Operaciones combinadas para encontrar los diferentes elementos en C, a manera de resumen: 1 Actividad 7
Resuelven ecuaciones cuadráticas que tienen soluciones en el conjunto de los números complejos.	Calcular el valor de x, usando números complejos.	Solución de ecuaciones en C: 1 Actividad 8
	Resolver ecuaciones cuadráticas complejas, aplicando el artificio del discriminante.	Resolución de ecuaciones cuadráticas, con raíces complejas: 1. Uso del discriminante 2. Actividad 9

Mis conocimientos previos

A continuación se le presentan una serie de preguntas y ejercicios que debe resolver con el propósito de conocer sus aprendizajes previos. Recuerde que si no lo sabe alguno, no está obligado a contestarlo, pues se espera que en el trascurso del estudio de esta unidad usted pueda ir construyendo estas competencias matemáticas necesarias en su formación.

¿Cómo define los números complejos?

____

____

____

Resuelva: $(3 + 3i) + (8 - 5i)$

Grafique: $-5 - 2i$

¿Cuál es el valor de i^2?:

Resuelva: $(-3 - 5i)^2 \left(\frac{2}{3}\right)$

¿En C también aplicamos ley de signos? (Escriba sí o no)

____

____

____

¿Cuál es la forma canónica usada para complejos?

____

____

____

Resuelva: $\dfrac{6 - 3i}{-2 + 3i}$

Nota: Puede confrontar sus respuestas en la guía de didáctica una vez que haya terminado de realizar todos los ejercicios.

Definición de número complejo

El término número complejo describe la suma de un número real y un número imaginario (que es un múltiplo real de la unidad imaginaria, que se indica con la letra i).

Los números complejos se utilizan en todos los campos de las matemáticas, tales como campos de la Física, es de mucha utilidad en la mecánica cuántica, en la ingeniería, electrónica y en las telecomunicaciones por su utilidad para representar las ondas electromagnéticas y la corriente eléctrica.

Al número $a + bi$ le llamamos número complejo en forma binómica.

El número a se llama parte real del número complejo.

El número bi se llama parte imaginaria del número complejo.

Si $b = 0$ el número complejo se reduce a un número real ya que: $a + 0i = a$.

Si $a = 0$ el número complejo se reduce a: bi, y se dice que es un número imaginario puro.

El conjunto de todos números complejos se designa por $\underline{C}$. Aunque muchos matemáticos introducen para representar los números complejos la letra "Z", nosotros usaremos la letra C, para evitar confusiones. Entonces, tenemos:

$$C = \{a + bi \,/\, a,b \in R\}$$

- Los números complejos: $(a + bi)$ y $(-a - bi)$ se llaman opuestos.
- Los números complejos $C = (a + bi)$ y $C = (a - bi)$ se llaman conjugados.
- Dos números complejos son iguales cuando tienen el mismo componente real y el mismo componente imaginario.

Historia de los números complejos

El descubrimiento del número llamado i, representa la raíz cuadrada de –1. El producto de cualquier número real por i, da como resultado unos números llamados imaginarios que, como veremos, no son menos reales que los llamados números reales.

La suma de un número real y otro imaginario se llama número complejo. Realmente el conocimiento de los números complejos se encuentra en la obra de Girolamo Cardano, un italiano que vivió a principios del siglo XVI, era médico, jugador y confeccionador de horóscopos, escribió un influyente tratado de álgebra llamado Ars Magna (publicado en 1545).

En el estudio de las soluciones de una ecuación cúbica, basado en parte en la obra previa de Scipione del Ferro y de Tartaglia, se percató Cardano, que en cierto paso se veía obligado a tomar la raíz cuadrada de un número negativo.

Aunque esto era un enigma para él, se dio cuenta que si se permitía tomar esa raíz cuadrada, solo entonces podría expresar la respuesta completa, que finalmente siempre era real.

Más tarde, en 1572, Raphael Bombelli , en una obra titulada: L Algebra, extendió el trabajo de Cardano y comenzó el estudio del actual álgebra de los números complejos e introdujo el número complejo, como en los siguientes ejemplos:

$\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$.

Los matemáticos mencionados anteriormente se ocuparon de resolver cierto tipo de ecuaciones, que incluían el número imaginario, pero fue Descartes el primero que utilizó este número y de forma despectiva los llamó imaginarios.

Este tipo de número ha permanecido y ha sido aceptado por todos los matemáticos. Pero, recuerde siempre que todo número complejo es de la forma $a \pm bi$, donde $\underline{a}$ es un número real y $\underline{bi}$ es un número imaginario.

La representación de los números imaginarios también conocidos como complejos se representan por la letra C .

Actualmente el nombre de número imaginario está cayendo en desuso y desapareciendo, ya que están siendo utilizados con gran actividad en ciencias de la actualidad, por lo que se les debe considerar números de gran envergadura, en las ciencias reales, y no simplemente llamarlos imaginarios.

1. Operaciones con números complejos (C)

   Basados siempre en que los números son de la forma; $a \pm bi$, donde:
   $a \in R$ y bi imaginario.

Adición en C

Si deseamos sumar los números complejos, sumamos los números enteros primero y después los números imaginarios.

Dicho de otra forma, la suma y diferencia de números complejos se realiza sumando y restando partes reales entre sí y partes imaginarias entre sí. Al sumar números complejos podemos usar las propiedades de la suma, como la siguiente:

- $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

Ejemplo:

$(5 + 2i) + (-8 + 3i) - (4 - 2i) = (5 - 8 - 4) + (2 + 3 + 2)i = -7 + 7i$

Podemos sumar y restar en C igualmente que en los reales, de forma vertical u horizontal. Ejemplos:

- Sumar: $(5 + 4i) + (7 - 2i)$

$$\begin{array}{r} 5 + 4i \\ \underline{7 - 2i} \\ \text{R/} = 12 + 2i \end{array}$$

- Sumar $(5 - 3i) + (-8i) + (4)$

$$\begin{array}{r} 5 - 3i \\ 0 - 8i \\ \underline{4 + 0i} \\ \text{R/} = 9 - 11i \end{array}$$

- Sumar: $(3 + 2i) + (-7 - 2i) + (8 + i) + (7i)$

$$\begin{array}{r} 3 + 2i \\ -7 - 2i \\ 8 + i \\ \underline{0 + 7i} \\ 4 + 8i \end{array} \rightarrow \text{Aprecie la forma binómica de : } a + bi$$

Diferencia en C

Para restar en los complejos se usa la misma técnica de la suma, ya que debemos de tener en cuenta la ley de los signos siempre. Veamos algunos ejemplos:

Restar : $(7 - 2i) - (8 - 3i) = 7 - 2i - 8 + 3i$
$= -1 + i$

Reste : $-(7 + 2i) - (-4 + 8i) - i = -7 - 2i + 4 - 8i - i$
$= -3 - 11i$

Producto en C

El producto de los números complejos se realiza aplicando la propiedad distributiva del producto respecto de la suma y teniendo en cuenta que:
$i^2 = -1$.

$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Ejemplo:

$$\begin{aligned}(5 + 2i) \cdot (2 - 3i) &= 10 - 15i + 4i - 6i^2 \\ &= 10 - 11i + 6 \\ &= 16 - 11i\end{aligned}$$

- Multiplique : $(5 + 8i)(4 - 2i) = 20 - 10i + 32i - 16i^2$
$= 20 - 10i + 32i - 16(-1)$
$= 20 - 10i + 32i + 16$
$= 36 - 22i$

- Multiplique : $(-5 - 2i)(4 + 7i) = (-5 - 2i)(4 + 7i)$
$= -20 - 3i - 8i - 14i^2$
$= -20 - 11i - 14(-1)$
$= -20 - 11i + 14$
$= -6 - 11i$

• Multiplique: $(2 + 3i^2)(- 9 - 8i) = \left[2 + 3(-1)\right](- 9 - 8i) \rightarrow (2 - 3)(- 9 - 8i)$

$$= (-1)(- 9 - 8i)$$

$$= 9 + 8i$$

• Multiplique: $\left(\sqrt{-50} + \sqrt{-32}\right)\left(-\sqrt{-8}\right) =$

Recuerde que: $\sqrt{-50} = 5\sqrt{2}i$, $\sqrt{-32} = 4\sqrt{2}i$ y $-\sqrt{-8} = -2\sqrt{2}i$

Por lo que la expresión se transforma en: $(5\sqrt{2}i + 4\sqrt{2}i)(- 2\sqrt{2}i)$

$$= -10(\sqrt{2})^2 i^2 - 8(\sqrt{2})^2 i^2$$

$$= -10(2)(-1) - 8(2)(-1)$$

$$= 20 + 16 = 36$$

Cociente en C

El cociente de números complejos se hace racionalizando el denominador, esto es, multiplicando numerador y denominador por el conjugado de este (denominador). Observemos su notación constructiva:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)}{(c + di)} \cdot \frac{(c - di)}{(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

$$= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

$$\frac{3 + 2i}{1 - 2i} = \frac{(3 + 2i)}{(1 - 2i)} = \frac{(1 + 2i)}{(1 + 2i)} = \frac{3 + 6i + 2i + 4i^2}{1 - (2i)^2}$$

$$= \frac{(3 + 8i - 4)}{1 + 4} = \frac{1}{5} + \frac{8}{5}i$$

- Divida: $\dfrac{(2+i)}{3i}$, su equivalente es, aplicando la forma binómica:

  $\dfrac{(2+i)}{(0+3i)}$, convertimos esta división en producto, así: $\left(\dfrac{(2+i)}{(0+3i)}\right)\left(\dfrac{(0-3i)}{(0-3i)}\right)$,

  al multiplicar binomio por binomio, nos queda así:

  $\dfrac{-6i-3(-1)}{-9(-1)} = \dfrac{-6i+3}{9}$, su resultado final: $\dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{3}i$

- Divida: $\dfrac{2+3i}{2i} \rightarrow \left(\dfrac{2+3i}{0+2i}\right)\left(\dfrac{0-2i}{0-2i}\right) \rightarrow \dfrac{-4i+6}{-4i^2}$

  $$\rightarrow \dfrac{-4i+6}{-4(-1)} \rightarrow \dfrac{-4i+6}{4} \rightarrow R/= \dfrac{3}{2} - i$$

- Divida: $\dfrac{2-3i}{3+2i} \rightarrow \left(\dfrac{2-3i}{3+2i}\right)\left(\dfrac{3-2i}{3-2i}\right) = \dfrac{6-4i-9i+6i^2}{3^2-(2i)^2}$

  $$= \dfrac{6-13i-6}{9-4i^2} = \dfrac{-13i}{9+4} = \dfrac{-13i}{13} \quad R/= -i$$

Operaciones combinadas en C

Dados los siguientes complejos:

$C_1 = -3 + 4i$

$C_2 = 5 - 2i$

$C_3 = \dfrac{3}{2}$

$C_4 = 7i$

Calcular:

- $\dfrac{C_1}{2C_3 + C_4} = \dfrac{-3+4i}{2(\frac{3}{2})+7i} = \dfrac{-3+4i}{\frac{6}{2}+7i} = \dfrac{-3+4i}{\frac{6}{2}+7i}$

$$= \frac{-3+4i}{3+7i} \rightarrow \text{R/} = \frac{19}{58} + \frac{33}{58}i$$

En este ejercicio recuerde la racionalización.

- $\dfrac{C^2}{C^1} = \dfrac{5-2i}{-3+4i} = \dfrac{5-2i}{-3+4i} \cdot \dfrac{-3-4i}{-3-4i} = -\dfrac{23}{25} - \dfrac{14}{25}i$

En este ejercicio recuerde la racionalización.

- $C_1^{\,2}\, C_3 = (-3+4i)^2 \left(\frac{3}{2}\right) = (-7-24i)\left(\frac{3}{2}\right) \rightarrow \text{R/} = -\frac{21}{2} - 36i$

En este ejercicio recuerde la potenciación.

- $(\overline{C_1 + C_2})^{-1} = (\overline{-3+4i+5-2i})^{-1} = (\overline{2-2i})^{-1} = (2-2i)^{-1}$

$$= \frac{1}{2-2i} \rightarrow \text{R/} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$$

En este ejercicio recuerde la racionalización y el conjugado de una expresión.
La barra significa conjugado, ya sabemos que es un conjugado.

- $(\overline{\overline{C_1\, C_2}}) = (-3+4i)(5-2i) = -15 + 6i + 20i - 8i^2 = -7 + 26i$

En este ejercicio debe de recordar que "el conjugado del conjugado de un número es el propio número". Las dos barras dobles superpuestas significan: el conjugado del conjugado de un número.

- $C_2^{-1} = \dfrac{1}{C_2} = \dfrac{1}{5-2i} = \dfrac{1}{5-2i} \cdot \dfrac{5+2i}{5+2i} = \dfrac{1(5+2i)}{(5+2i)(5+2i)}$

$$= \frac{(5+2i)}{(5+2i)(5+2i)} = \frac{(5+2i)}{21+20i} = \text{R/} = \frac{5}{29} + \frac{2}{29}i$$

En este ejercicio debe de recordar siempre la racionalización.

- $C_1 + C_3^{-1} = (-3+4i) + \left(\dfrac{1}{\frac{3}{2}}\right) = (-3+4i) + \dfrac{2}{3} = -\dfrac{7}{3} + 4i$

- $\overline{C_1 + C_4 - 5C_2} = -\overline{3 + 4i + 7i - 5(5 - 2i)} = -\overline{28 + 21i}$

  $\rightarrow$ R/ $= -28 - 21i$

En este ejercicio haga uso del conjugado.

- $C_1 C_4 + C_3 C_4 = (-3 + 4i)(7i) + \left(\frac{3}{2}\right)(7i) = -28 - 21i + \frac{21}{2}$

  $=$ R/$= -28 - \frac{21}{2}i$

- $(C_1 - C_2)\, C_3 = \left[(-3 + 4i) - (5 - 2i)\right]\frac{3}{2} = (-8 + 6i)\frac{3}{2}$

  $\rightarrow$ R/$= -12 + 9i$

Actividad 1

Resuelva los ejercicios que a continuación se le presentan.

a. $(4 - 3i)(2i) + \left(\frac{5}{3}\right)(3i) =$

b. $(-5 - 3i)^2\left(\frac{1}{2}\right) =$

c. $\dfrac{-2+3i}{5\left(\frac{2}{3}\right)+4i} =$

d. $\dfrac{4+2i}{3i} =$

e. $(\sqrt{-16} + \sqrt{-24})(-\sqrt{-16}) =$

f. $(5 + 5i^2)\ (-2 - 6i) =$

g. $(1 + 3i)+(-5 - i) + (6 + i) + (4i)=$

h. $-(9 + 4i) - (-2 + 5i) -i=$

i. $(10 + 4i) + (-2 + 2i) - (6 - i) =$

j. $-2 + 3i + 5i - 2(3 - 3i) =$

Representación gráfica de los números complejos

Los números complejos se representan en los ejes cartesianos. *El eje x se llama eje real* y el *eje y imaginario*. El número complejo $a + bi$ se representa por el punto (a,b), que se llama afijo, y mediante un vector de origen $(0,0)$ y extremo (a,b).

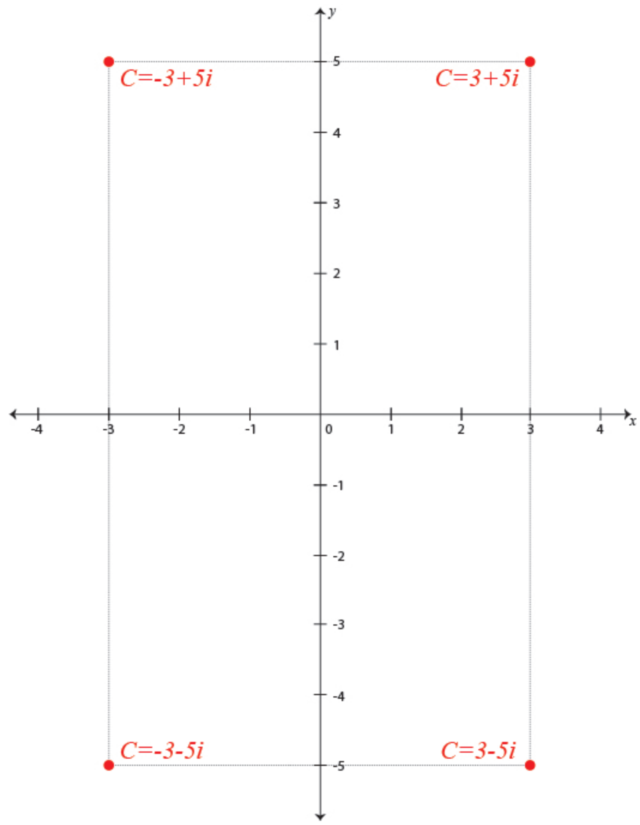
a. Representar los siguientes complejos:

$C = -3 + 5i$

$C = 3 + 5i$

$C = 3 - 5i$

$C = -3 - 5i$

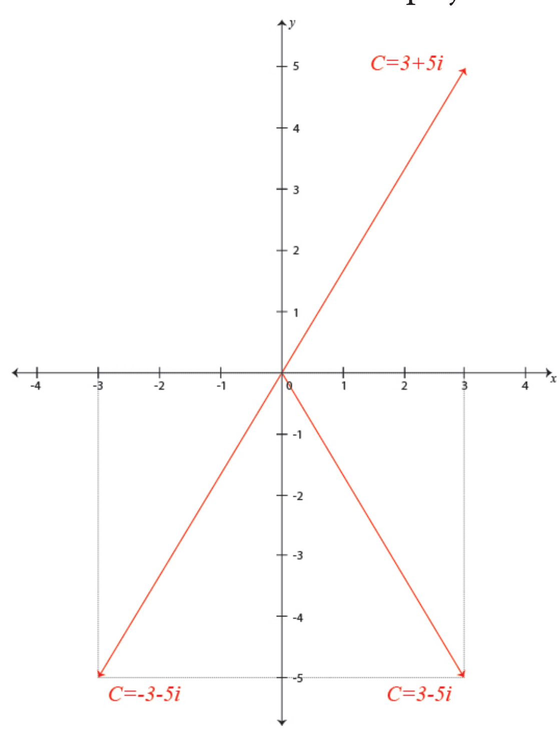


b. Graficar como vectores en el plano cartesiano los números complejos siguientes:

$C = 3 + 5i$

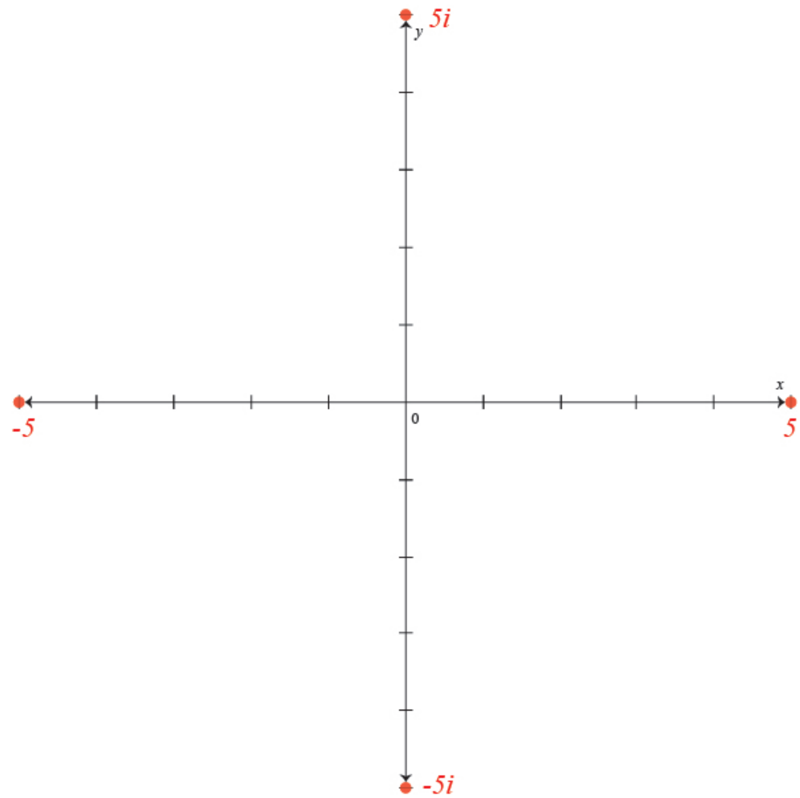
$C = 3 - 5i$

$C = -3 - 5i$



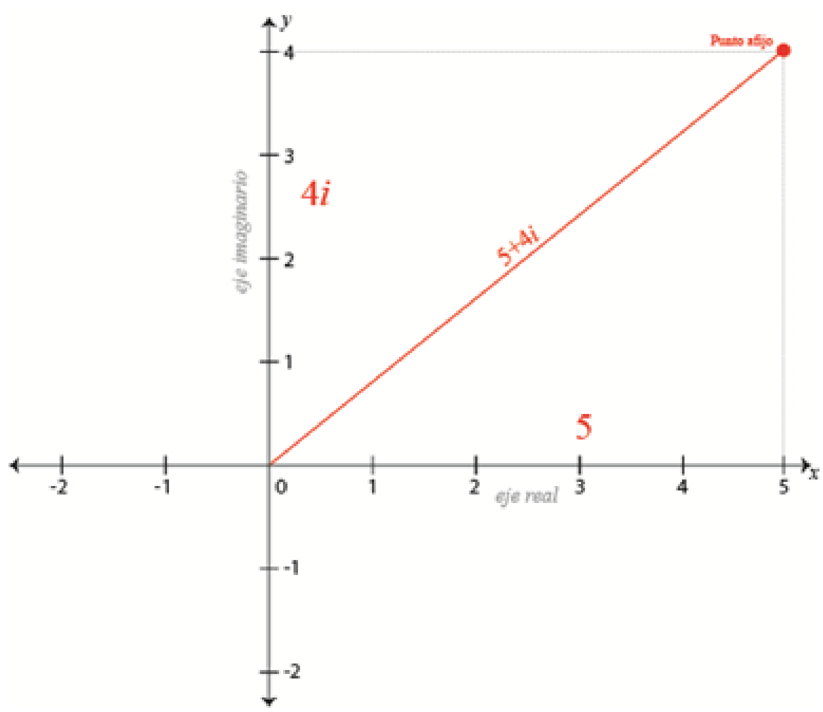
Los afijos de los números reales se sitúan sobre el eje real, x, y los imaginarios sobre el eje imaginario, y.

c. Graficar los siguientes números: $5i$, $-5i$, -5, 5

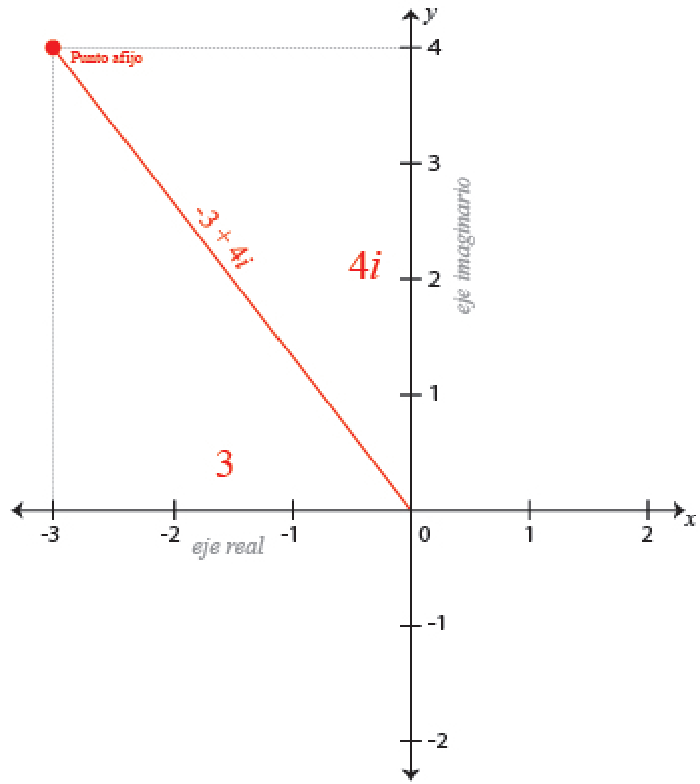


d. Dado que los números complejos se definen de la forma: $a \pm bi$, su representación gráfica son las siguientes:

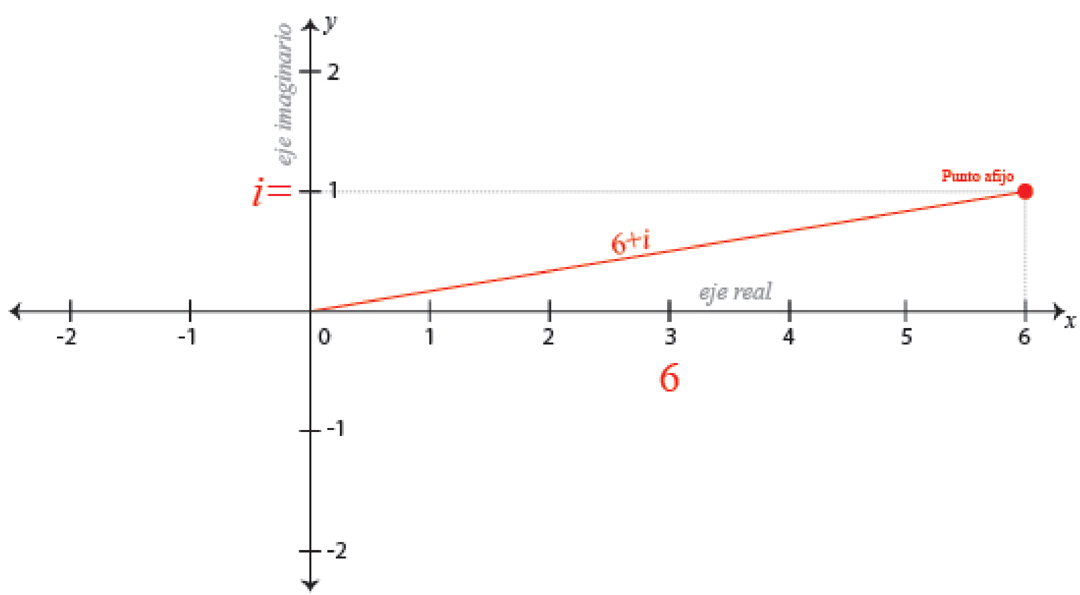
- Graficar: $5 + 4i$



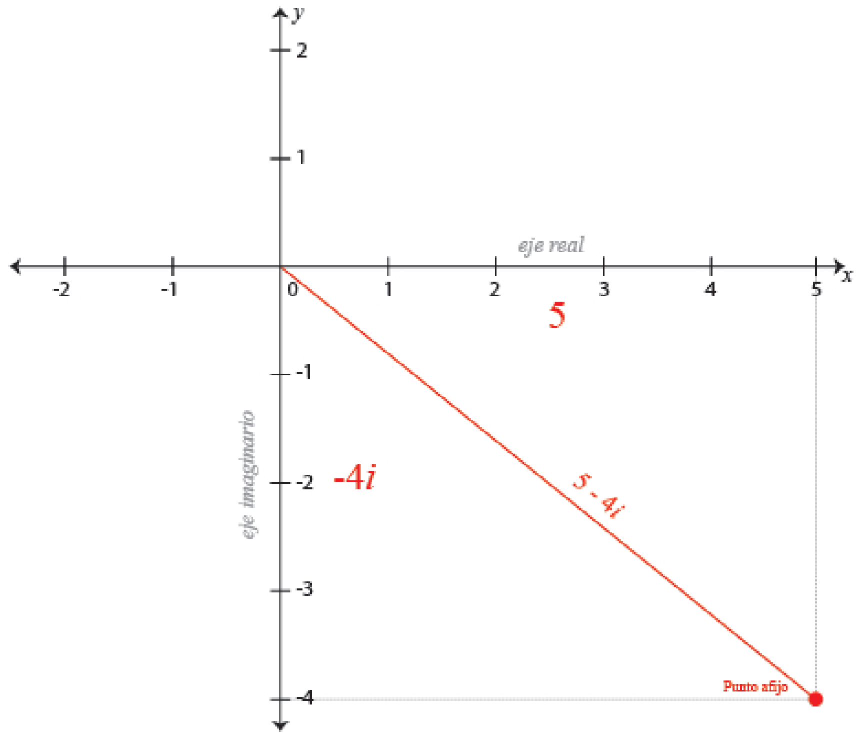
- Graficar: $-3 + 4i$



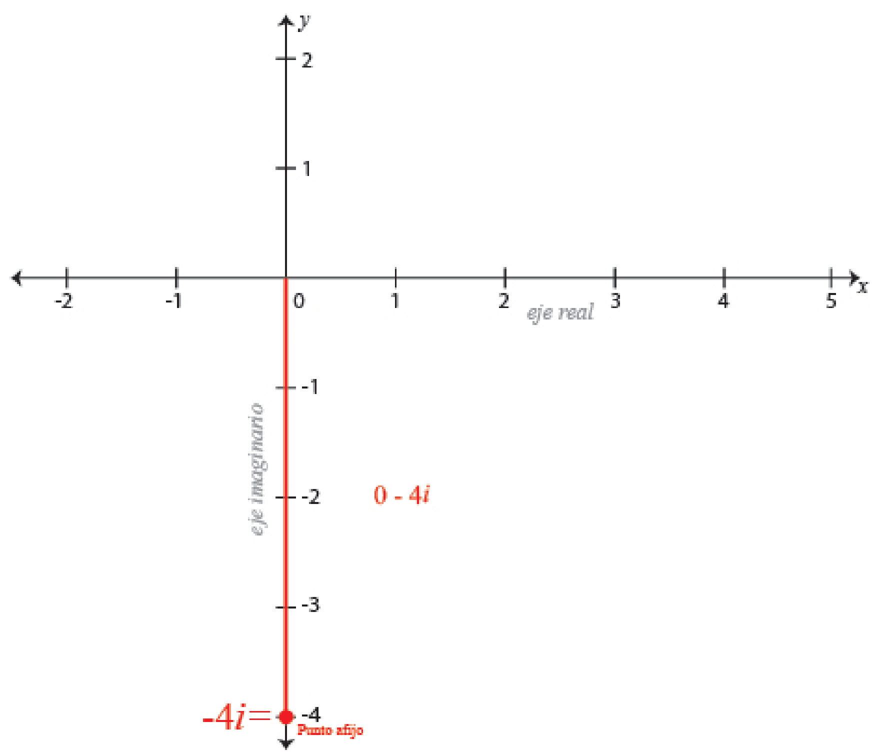
- Graficar: $6 + i$



- Graficar: $5 - 4i$



- Graficar: $- 4i = 0 - 4i$



Se debe observar que el número real a se localiza en el eje x y el número imaginario bi se localiza y se dibuja en el eje y.

Actividad 2

Grafique los ejercicios que a continuación se le presentan(las gráficas debe confrontarlas con su tutor):

a. Graficar: $5i$

b. Graficar: $2 - 3i$

c. Graficar: $3 + i$

d. Graficar: $-5 + 3i$

e. Graficar los siguientes números: $3i$, $-3i$, -3, 3

f. Graficar: $-5 + 3i + 3 - i$

g. Graficar como vectores en el plano cartesiano los números complejos siguientes:

- $C = 2 + 3i$
- $C = 2 - 3i$
- $C = -2 - 3i$

h. Graficar: $-3 + (-3i - 1) - 2i$

i. Graficar: $\frac{1}{2} - \left(3i + \frac{3}{2}\right) + 2i$

j. Graficar: (- 6 - 2) + (- 4*i* - 1) - (*i* - 5)

Potenciación en los números imaginarios

Métodos para resolver potencias imaginarias

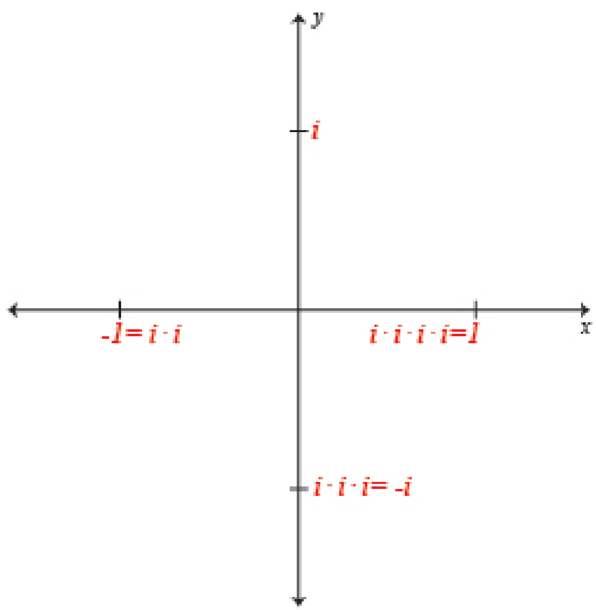
Potencias de la unidad imaginaria: Con el manejo del siguiente ciclo, podemos encontrar el valor de cualquier complejo:

- $i^0 = 1$
- $i^1 = i$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = -i$
- $i^4 = 1$

Nota importante: para recordar este ciclo de cuatro valores sustituya los valores del plano cartesiano así:

- $1 = i^4$
- $-1 = i^2$
- $i = i^1$
- $-i = i^3$

Veamos esta interpretación de forma gráfica:



La figura anterior nos demuestra los dos ejes, real e imaginario, con su número respectivo en los cuatro cuadrantes.

Primer método para despejar una potencia de la unidad imaginaria

Los valores se repiten de cuatro en cuatro, por eso, para saber cuánto vale una determinada potencia de *i*, se divide el exponente entre 4 y el resto es el exponente de la potencia equivalente a la dada. Ejemplos

- Cuál es el valor de i^{22}:

$22 \div 4 = 5 + (2)$

Entonces: $i^{22} = (\, i^4\,)^5 \cdot i^2 = 1^5\,(-1) = -1$, de ahí que $i^{22} = -1$

- Cuál es el valor de i^{27}:

$27 \div 4 = 6 + (3)$

Entonces: $i^{27} = (i^4)^6 \cdot i^3 = 1^6\,(\text{-i}) = -i$*, de ahí que* $i^{27} = -i$

- Cuál es el valor de: $i^{50} \rightarrow \dfrac{50}{4} = 12$ sobrando 2

$(i^4)^{12}\,(i^2) = (1)^{12}\,(-1) = 1(-1) = -1$

- Cuál es el valor de: $i^{31} \rightarrow \dfrac{31}{4} = 7$ sobrando 3

$(i^4)^7\,(i^3) = (1)^7\,(-1) = \quad 1(-i) = -\text{i}$

- Cuál es el valor de $i^{2012}: \rightarrow \dfrac{2012}{4} = 503$

$(i^4)^{503} = (1)^{503} = 1$

- Cuál es el valor de $i^{510}: \rightarrow \dfrac{510}{4} = 127$ diferencia 2

$(i^4)^{127}\ \ i^2 = (1)^{127}\,(-1) = 1(-1) = -1$

- Cuál es el valor de $i^{144}: \rightarrow \dfrac{144}{4} = 36$

$(i^4)^{36} = (1)^{36} = 1$

- Cuál es el valor de $i^{(-10)}: \rightarrow \dfrac{1}{i^{10}} = \dfrac{10}{4} = 2$ diferencia 2

$(i^4)^2\, i^2 = (1)^2\,(-1) = 1(-1) = -1 \qquad$ *Entonces* $\dfrac{1}{1} = 1$

- Cuál es el valor de $i^{-105}: \rightarrow \dfrac{1}{105} = \dfrac{105}{4} = 26$ diferencia 1

$(i^4)^{26}\, i^1 = (1)^{26}\,(i) = 1(i) = i$

Entonces: $\dfrac{1}{i} = \dfrac{1}{i} \cdot \dfrac{i}{i} = \dfrac{i}{i^2} = \dfrac{i}{-1} = -i$

- Cuál es el valor de $i^{-10} \rightarrow \frac{1}{10} : = \frac{10}{4} = 2$ diferencia 2

$(i^4)^2 \ i^2 = (1)^2 (-1) = 1(-1) = -1$

Entonces: $\frac{1}{-1} = -1$

Segundo método para despejar una potencia de la unidad imaginaria

Otra de la formas para resolver potencias de la unidad imaginaria es conociendo el valor de i^2 para valores pares. Si sabemos que $i^2 = -1$

Veamos los siguientes ejemplos:

- $i^{12} = (i^2)^6 = (-1)^6 = 1$ entonces $i^{12} = 1$
- $i^{50} = (i^2)^{25} = (-1)^{25} = -1$ entonces $i^{50} = -1$
- $i^{100} = (i^2)^{50} = (-1)^{50} = 1$ entonces $i^{100} = 1$
- $i^{60} = (i^2)^{30} = (-1)^{30} = 1$ entonces $i^{60} = 1$
- $i^{2012} = (i2)^{1006} = (-1)^{1006} = 1$ entonces $i^{2012} = 1$
- $i^{144} = (i^2)^{72} = (-1)^{72} = 1$ entonces $i^{144} = 1$
- $i^{140} = (i^2)^{70} = (-1)^{70} = 1$ entonces $i^{140} = 1$
- $i^{24} = (i^2)^{12} = (-1)^{12} = 1$ entonces $i^{24} = 1$
- $(i)\ i^{31} = (i^{30}\ i) = (i^2)^{15}\ i = (-1)^{15}\ i = -1i = -i$ entonces $i^{31} = -i$

Para potencias negativas se trabaja de la siguiente forma:

- $i^{-60} = \frac{1}{i^{60}} = \frac{1}{(i^2)^{30}} = \frac{1}{(-1)^{30}} = \frac{1}{1} = 1$ entonces $i^{-60} = 1$

- $i^{-121} = i^{120}\ i = \frac{1}{i^{120}\ i} = \frac{1}{(i^2)^{60}\ i} = \frac{1}{(-1)^{60}\ i} = \frac{1}{1(i)} = \frac{1}{i}$ entonces $\mathrm{i}^{-121} = -\mathrm{i}$

El resultado: $\frac{1}{i}$ es un cociente, que empleando conjugado es igual a: $-i$

- $2i^{-3} = \frac{2}{1}\left(\frac{1}{i^3}\right) = \frac{2}{i^3} = \frac{2}{-i} \rightarrow \frac{2}{-i} \cdot \frac{i}{i} = 2i$

Nota: Ahora si i está elevada a una potencia impar, la rebajamos a una potencia par anterior. Veamos los siguientes ejemplos:

- $i^{11} = (i^{10})i = (i^2)^5\, i = (-1)^5\, i = -1i = -i$
- $i^{33} = (i^{32})i = (i^2)^{16}\, i = (-1)^{16}\, i = 1i = i$
- $i^{121} = (i^{120})i = (i^2)^{60}\, i = (-1)^{60}\, i = 1i = i$
- $i^{1995} = (i^{1994})i = \left(i^2\ \frac{45}{41} + \frac{36i}{41}\right)^{997} i = (-1)^{997}\, i = -1i = -i$

2. Operaciones utilizando potencias mayores a 0 con números complejos

Sume:

- $5 + 7i^3 + 3 - 10i^{16} - i^{70} = 5 + 7(-i) + 3 - 10(1) - (-1)$

$$= 5 + 3 - 10 + 1 - 7i \rightarrow R/ = -1 - 7i$$

Suma con m.c.m:

- $\frac{2 - 3i}{1 + i} + \frac{7 + 4i}{3 + 5i} = \frac{(2 - 3i)(3 + 5i) + (7 + 4i)(1 + i)}{(1 + i)(3 + 5i)}$

$$\frac{(21 + i)(3 + 11i)}{(1 + i)(3 + 5i)} = \frac{24 + 12i}{-2 + 8i} \rightarrow \frac{12}{17} - \frac{54i}{17} = \frac{12 - 54i}{17}$$

Simplificación:

- $\frac{1}{3 + 2i} = \frac{1}{3 + 2i} \cdot \frac{3 - 2i}{3 - 2i} \rightarrow R/= \frac{3 - 2i}{13}$

División:

- $7 + 2i^{12} \div 5 - 4i^{-3}$ $\rightarrow 7 + 2i^{12} \div 5 - 4(i)$

$\rightarrow 7 + 2(1) \div 5 - 4i$

$\rightarrow 9 \div 5 - 4i$ su equivalente: $\dfrac{9}{5 - 4i}$

racionalizamos $\dfrac{9}{5 - 4i} \cdot \dfrac{5 + 4i}{5 + 4i}$

R/= $\dfrac{45}{41} + \dfrac{36i}{41}$

Actividad 3

Resuelva las siguientes potencias imaginarias que a continuación se le presentan:

a. $i^{2006} =$

b. $i^{37} =$

c. $5i^{-5} =$

d. $\dfrac{3 - 2i}{2 + i} + \dfrac{4 + 5i}{1 + 3i} =$

e. $i^{-137} =$

f. $i^{-20} =$

g. $\dfrac{2}{4 + 3i} =$

h. $i^{44} =$

i. $5 + 2i^3 + 3 - 5i^{16} - i^{50} =$

j. $8 + 4i^{12} \div 6 - 3i^{-3} =$

Componentes gráficos de un número complejo

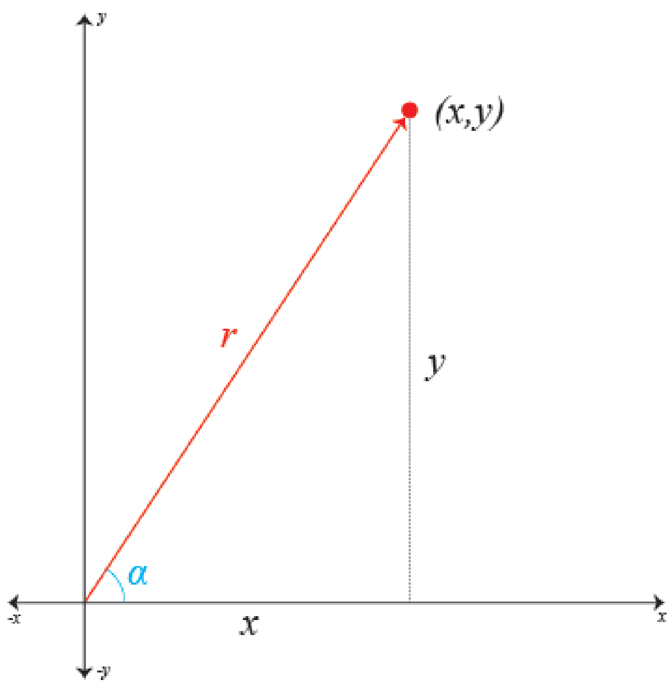
Módulo de un número complejo (distancia)

El módulo de un número complejo es básicamente la distancia de la hipotenusa, con clara aplicación al teorema de Pitágoras.

Argumento de un número complejo (ángulo)

El argumento de un número complejo es precisamente el ángulo principal del triángulo a partir de su base. A continuación se presenta la gráfica modelo que se usará para este tema.

La figura siguiente demuestra el módulo [distancia (r)] y argumento [ángulo (α)] de determinado ejercicio, como a la vez las funciones trigonométricas de seno (y), coseno (x) y tangente:



Módulo de un número complejo

El módulo de un número complejo es el módulo del vector (distancia del punto) (0,0) a afijo (a, b) determinado por el origen de coordenadas y su afijo. Se designa por $|C|$. Veamos su construcción:

$C = a + bi$

$r = |C| = \sqrt{a^2 + b^2}$

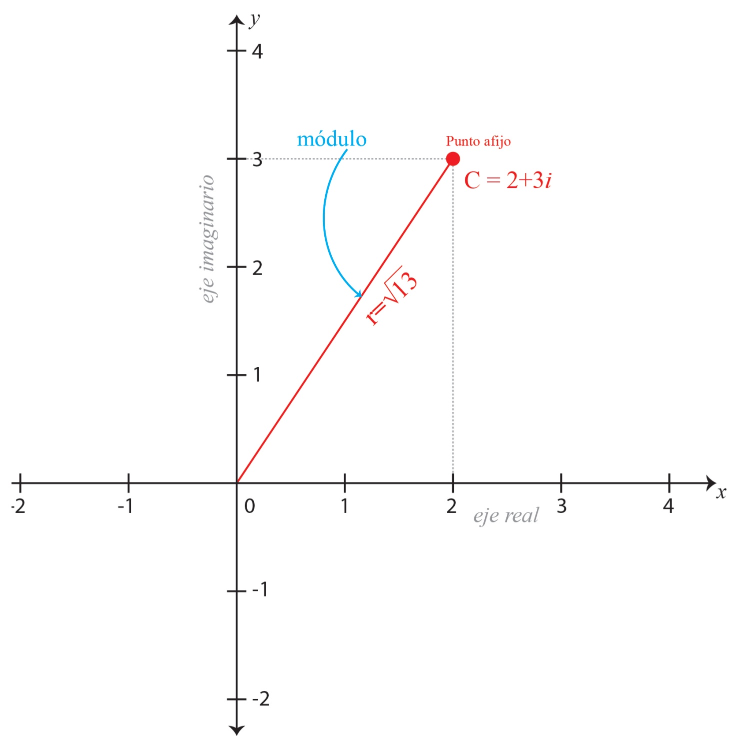
Donde: r = módulo $|C|$ = valor absoluto de C

Los ejemplos siguientes, viendo sus gráficas, se demuestra que es un triángulo con aplicaciones trigonométricas, haciendo uso de los números complejos.

Veamos los siguientes ejemplos:

a. $C = 2 + 3i$

$$r = |C| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} = 3.6$$

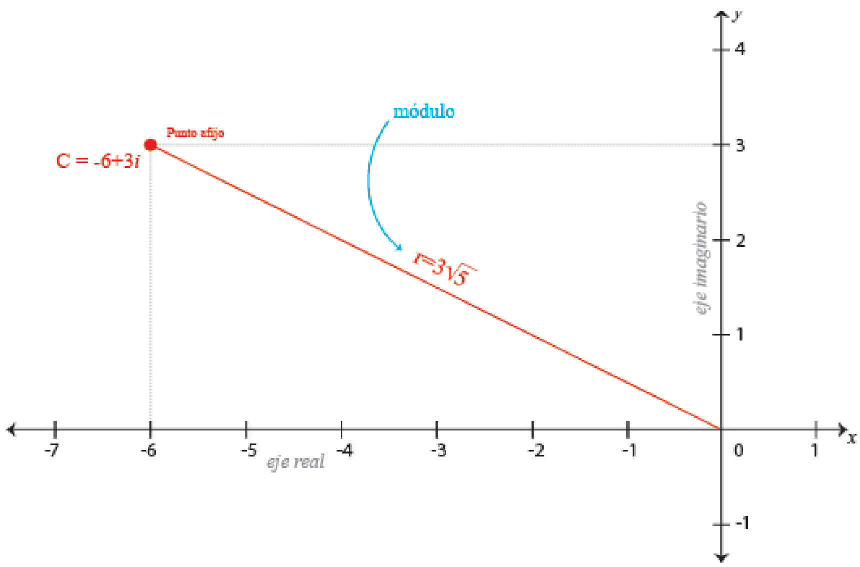


b. $C = 4 - 5i$

$$r = |C| = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41} = 6.4$$

c. $C = - 6 + 3i$

$$r = |C| = \sqrt{-6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5} = 6.7$$

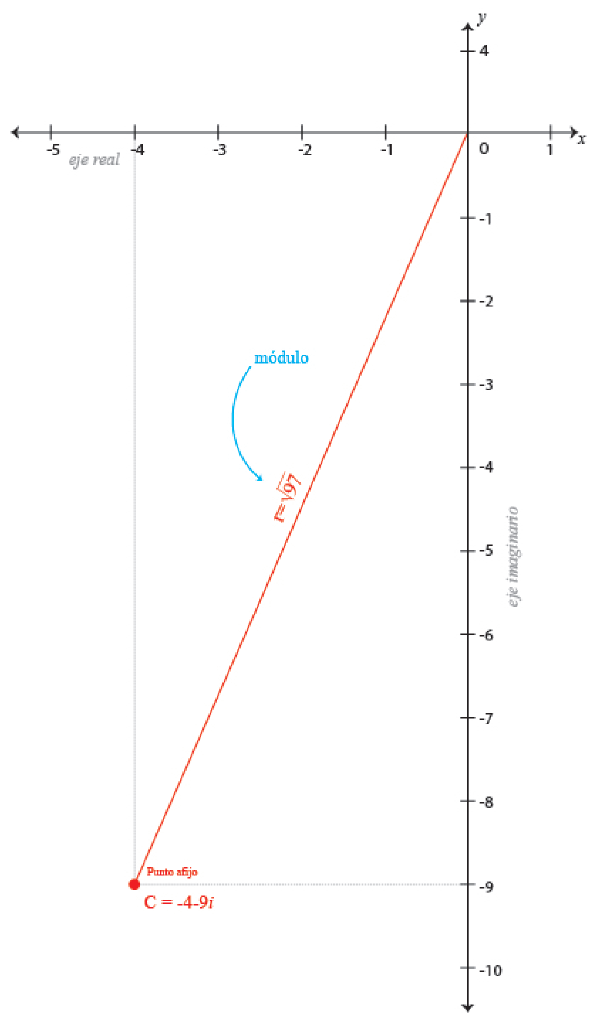


d. $C = 5 - 4i$

$$r = |C| = \sqrt{5^2 + (-4)^2} = \sqrt{41} = 6.4$$

e. $C = -4 - 9i$

$$r = |C| = \sqrt{-4^2 + (-9)^2} = \sqrt{97} = 9.8$$



Argumento de un número complejo

El argumento de un número complejo es el ángulo (α) que forma el vector con el eje real. Se designa por: arg(C).

Los ángulos se pueden dar en el siguiente esquema de funciones:

$$\alpha = \text{arctg } \frac{b}{a} \begin{cases} \frac{+b}{+a} = \alpha \\[2ex] \frac{b}{-a} = 180° - \alpha \\[2ex] \frac{-b}{-a} = 180° + \alpha \\[2ex] \frac{-b}{a} = 360° - \alpha \end{cases}$$

Notas:

- El hecho de trabajar con algunas funciones trigonométricas en los temas subsiguientes, no significa que estamos totalmente imbuidos en la trigonometría propiamente dicha, solo es una ayuda, de manera general, para tratar el tema en C.

- Se debe trabajar con valores absolutos al usar esta tabla, los signos de las formas racionales solo es un indicador para ubicarnos en los cuadrantes del plano cartesiano.

- α= arctg: Significa ángulo igual al arcotangente de: $\frac{b}{a}$

  Significa ángulo igual a la inversa de la tangente de: $\frac{b}{a}$

  Significa ángulo igual a la Tan^{-1} de: $\frac{b}{a}$ (calculadora)

Expresión de un número complejo en forma polar.

$C = r_a$

$|C| = r$ es el módulo.

Arg $(C) = \alpha$ es el argumento.

Actividad 4

Resuelva los siguientes ejercicios que a continuación se le presentan:

a. Encuentre el módulo y la gráfica de: $C = 2\frac{1}{2} + 2i$

b. Encuentre el módulo y la gráfica de: $C = 3 - 2i$

c. Encuentre el módulo y la gráfica de: $C = -3 - i$

d. Encuentre el módulo y la gráfica de: $C = -3 - 3i$

e. Encuentre el módulo y la gráfica de: $C = -1 + 2i$

f. Encuentre el módulo, argumento y la gráfica de: $C = 2\frac{1}{2} + 2i$

g. Encuentre el módulo, argumento y la gráfica de: $C = 3 - 2i$

h. Encuentre el módulo, argumento y la gráfica de: $C = -3 - i$

i. Encuentre el módulo, argumento y la gráfica de: $C = -3 - 3i$

j. Encuentre el módulo, argumento y la gráfica de: $C = -1 + 2i$

Coordenadas cartesianas y polares

1. Conversión de coordenadas cartesianas a polares

Ejemplo 1

Dada la forma cartesiana siguiente pasarla a la forma polar (para este tipo de ejercicios se debe de ver el esquema de funciones que está arriba y trabajar con el valor absoluto):

$C = 1 + \sqrt{3}\ i \longrightarrow$ Complejo (coordenada cartesiana)

$|c| = \sqrt{1^2 (\sqrt{3})^2} = 2 \longrightarrow$ Distancia (radio r) módulo, hipotenusa

$\alpha = \text{arctg } \dfrac{+\sqrt{3}}{(+1)} = 60° \longrightarrow (\text{Tan}^{-}) \dfrac{+\sqrt{3}}{(+1)} = 60°$ o su Inversade Tan $\dfrac{+\sqrt{3}}{(+1)}$

$C = 2_{60°} \longrightarrow$ El módulo es 2 y su ángulo es 60°

Nota: $2_{60°}$ También se puede escribir en forma de radianes, así: $2_{\pi/3}$

Nótese a la vez la importancia de las conversiones viceversa de grados a radianes como de radianes a grados.

Daré este ejercicio como muestra para estas conversiones, así:

- De grados a radianes. Usamos la proporción o regla de tres así:

$$\frac{\pi}{\alpha} = \frac{180°}{60} \qquad 180\alpha = 60\pi \ \text{ despejamos para } \alpha = \frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

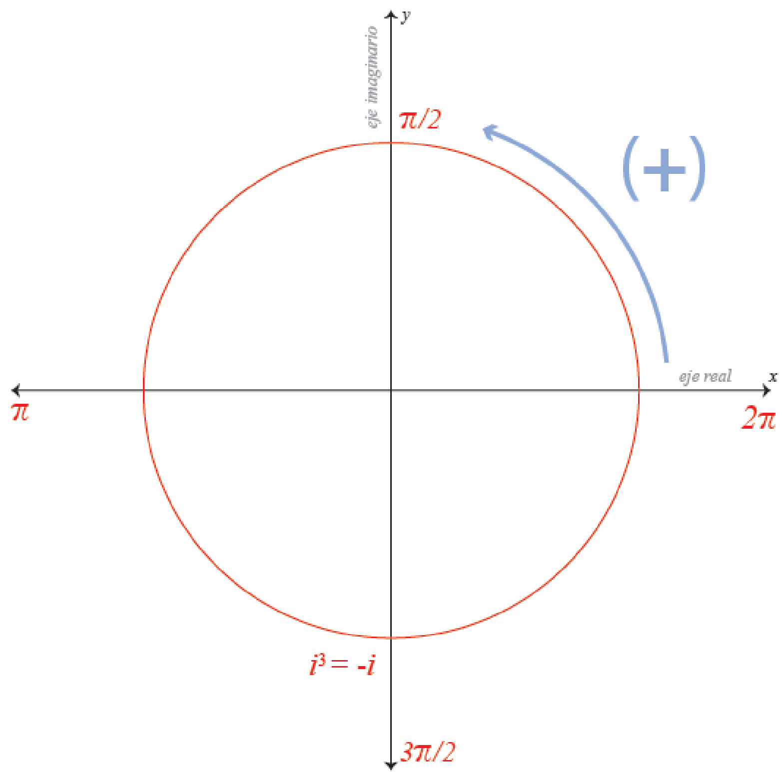
- De radianes a grados: $\dfrac{\pi}{3}\text{rad} = \dfrac{1 \cdot 180°}{3} = \dfrac{180°}{3} = 60°$

Recuerde que: $\frac{\pi}{3}$ es lo mismo que $\frac{1}{3}\pi$

La siguiente tabla puede ayudar para conocer algunos grados y sus correspondientes radianes existentes en la circunferencia:

G	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
R	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$5\pi/4$	$4\pi/3$	$3\pi/2$	$5\pi/3$	$7\pi/4$	$11\pi/6$	2π

La siguiente circunferencia también nos muestra como están dispuestos los principales radianes en 2π alrededor de 360°, que es la misma circunferencia, es decir: 360° $=2\pi$.



Ejemplo 2

Dada la forma cartesiana siguiente, pasarla a la forma polar:

$c = -1 + \sqrt{3}i$

$|c| = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2} = 2$

$\alpha = \text{arctg}\,\frac{+\sqrt{3}}{-1}$ → - 60°, pero nuestro argumento de la tabla dada arriba, dice:

α= arctg $\frac{b}{a} \rightarrow \frac{b}{-a}$ =180° -α, por lo tanto: 180° - (60° positivo) → R/=120°

$C = 2_{120°} = 2_{\frac{2\pi}{3}}$ Y así sucesivamente para los demás ejercicios siguientes.

Nótese a la vez la importancia de las conversiones viceversa de grados a radianes y de radianes a grados.

Daré este segundo ejercicio como muestra para estas conversiones, así:

- De grados a radianes. Usamos la proporción: $\frac{\pi}{\alpha} = \frac{180°}{120} \rightarrow$

  $180\alpha = 120\pi$ despejamos para $\alpha = \frac{120\pi}{180} = \frac{2\pi}{3}$ rad.

- De radianes a grados: $\frac{2\pi}{3}$ rad $= \frac{2 \cdot 180°}{3} = \frac{360°}{3} = 120°$

  Recuerde que: $\frac{2\pi}{3}$ es lo mismo que $\frac{2}{3}\pi$

Ejemplo 3

Dada la forma cartesiana siguiente, pasarla a la forma polar:

$C = -1 - \sqrt{3}i$

$|c| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$

α=arctg $\frac{-\sqrt{3}}{-1} \rightarrow$ 60°, pero nuestro argumento de la tabla dada arriba, dice:

α= arctg $\frac{b}{a} \rightarrow \frac{-b}{-a}$ =180°+ α, por lo tanto: 180°+60° → R/=240° = 240°

$C = 2_{240°}$

Ejemplo 4

Dada la forma cartesiana siguiente, pasarla a la forma polar:

$C= -1- \sqrt{3}i$

$|c| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$

$\alpha = \text{arctg} \dfrac{-\sqrt{3}}{+1} + \rightarrow -60°$, pero nuestro argumento de la tabla dada arriba, dice:

$\alpha = \text{arctg} \dfrac{b}{a} \rightarrow \dfrac{-b}{a} = 360° - \alpha$, por lo tanto: $360° - 60° \rightarrow$ R/=300°

$C = 2_{300°}$

Ejemplo 5

Dada la forma cartesiana siguiente, pasarla a la forma polar:

$C = 2$

Para este tipo de ejercicios ver la tabla de valores angulares para los cuadrantes en el plano cartesiano. Recuerde que esta tabla son deducciones matemáticas, pero usted también puede usar los conocimientos que ha aprendido en esta unidad.

Tabla de valores angulares para pasar a la forma polar

$C = 1_{0°} \longrightarrow$	(1,0)
$C = 1_{180°} \longrightarrow$	(-1,0)
$C = 1_{90°} \longrightarrow$	(0,1)
$C = 1_{270°} \longrightarrow$	(0-1)

Solución:

$C = 2 \rightarrow 2 + 0i$. Su forma es (1,0), donde su ángulo es: 0°

$|c| = \sqrt{2^2 + 0^2} = 2$

$\alpha = \text{arctg}\ \frac{0}{2} = 0°$

$C = 2_{0°}$

Ejemplo 6

Dada la forma cartesiana siguiente, pasarla a la forma polar:

$C = -2 \rightarrow -2 + 0i$. Su forma es (-1,0), donde su ángulo es: 180°

$|c| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = 2$

$\alpha = \text{arctg}\ \frac{0}{-2} = 0° \rightarrow$ vea su tabla y su gráfica= 180°

$C = 2_{180°}$

Ejemplo 7

Dada la forma cartesiana siguiente, pasarla a la forma polar:

$C=2i \rightarrow 0+2i$. Su forma es (0,1), donde su ángulo es: 90°

$|c| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$

$\alpha = \text{arctg}\ \frac{2}{0}$ =NED (no está definido),pero vea su tabla y gráfica= 90°

$C = 2_{90°}$

Ejemplo 8

Dada la forma cartesiana siguiente, pasarla a la forma polar:

C=-2*i* → 0 - 2*i*. Su forma es (0,-1), donde su ángulo es: 270°

$|c| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$

$\alpha = \text{arctg}\ \frac{-2}{0}$ = NED (no está definido),pero vea su tabla y gráfica= 270°

$C = 2_{270°}$

Nota importante: para los ejemplos anteriores se recomienda analizar su gráfica de ubicación y los criterios de las tablas dadas.

Actividad 5

Resuelva los siguientes ejercicios pasándolos a forma polar:

a. C= - 4*i*

b. C= 3*i*

c. $C = -3$

d. $C = 4$

e. $C = 2 - \sqrt{3}\ i$

f. $C = -2 - \sqrt{3}\ i$

g. $C = -2 + \sqrt{3}\ i$

h. C= $2 + \sqrt{3}\ i$

i. C= $-2i$

J. C= 5

Conversión de coordenadas polares a cartesianas

1. Procedimiento para esta conversión

Ejemplo 1

De la forma polar pasar a la forma binómica:

Se debe conocer el siguiente argumento, para estas conversiones:

$x = r \bullet \cos \alpha$

$y = r \bullet \text{sen } \alpha$

$C = 2_{120°}$ Esta es la forma polar.

Con estos datos se trabaja para pasar a la forma cartesiana.

Para pasar de la forma polar a la binómica (cartesiana), tenemos que pasar en primer lugar a la forma trigonométrica:

$r_a = r (\cos \alpha + i \text{ sen } \alpha)$ → Forma trigonometrica

$C = 2 \cdot (\cos 120° + i \text{ sen } 120°)$

$a = 2 \cdot \cos 120° = 2(-\frac{1}{2}) = -1$

$b = 2 \cdot \text{sen } 120° = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$

Por lo tanto, el número complejo (forma binómica o cartesiana) es:

$C = -1 + \sqrt{3}i$

Nota: para resolver este tipo de ejercicios usted debe de tener la tabla de los valores de las razones trigonométricas que más adelante se encuentra.

Por ejemplo: cos 120° su valor racional es: $-\frac{1}{2}$

Para: sen120° su valor racional es: $\frac{\sqrt{3}}{2}$, así trabajamos este ejercicio.

2. Tabla de las razones trigonométricas y sus conversiones

Valores de las razones trigonométricas

(°)	0	30	45	60	90	120	135	150	180	210	225	240	270	300	315	330	360
π rad	0	$^1/_6$	$^1/_4$	$^1/_3$	$^1/_2$	$^2/_3$	$^3/_4$	$^5/_6$	1	$^7/_6$	$^5/_4$	$^4/_3$	$^3/_2$	$^5/_3$	$^7/_4$	$^{11}/_6$	2
También puede usar los siguientes valores, pero al final se debe de multiplicar por 2.										$^7/_{12}$	$^5/_9$	$^2/_3$	$^3/_4$	$^5/_6$	$^7/_8$	$^{11}/_{12}$	2
Sen	0	$^1/_2$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1/2	1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-1}{2}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-1}{2}$	-1
Cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{2}$	$^1/_2$	0	$-^1/_2$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	0	$-^1/_2$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	0	$^1/_2$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0
Tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\in$	$-\sqrt{3}$	1	$\frac{-\sqrt{3}}{2}$	0	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\in$	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	$\in$
Csc	$\in$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	1	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$-\sqrt{2}$	-2	-1	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$-\sqrt{2}$	-2	-1
Sec	1	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	$\in$	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\in$	-2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\in$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	$\in$
Ctg	$\in$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\sqrt{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\sqrt{3}$	0

Ejemplo 2

Dada la forma polar encuentre la forma binómica:

$\sqrt{2}_{\frac{\pi}{3}}$ Esta expresión es equivalente con: $\sqrt{2}_{60°}$

Primera forma polar con radianes:

$$\sqrt{2}_{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\text{sen}\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i \quad \text{Forma binómica}$$

Segunda forma polar con grados:

$\sqrt{2}_{60°}$

$C = \sqrt{2} \cdot (\cos 60^{\circ} + i \text{ sen } 60^{\circ})$

$a = \sqrt{2} \cdot \cos 60° = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$b = \sqrt{2} \cdot \text{sen } 60° = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}i$

Por lo tanto, el número complejo (forma binómica o cartesiana) es:

$C = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$

Ejemplo 3

Dada la forma polar, encuentre la forma binómica:

$1_{\frac{3\pi}{4}}$ Esta expresión es equivalente con: $1_{135°}$

Primera forma con radianes:

$$1_{\frac{3\pi}{4}} = 1\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \text{ sen}\frac{3\pi}{4}\right) = 1\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \quad \text{Forma binómica}$$

Segunda forma con grados:

$1_{135°}$

$C = 1 \cdot (\cos 135^{\circ} + i \text{ sen } 135^{\circ})$

$$a = 1 \cdot \cos 135^{\circ} = 1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$b = 1 \cdot \operatorname{sen} 135^{\circ} = 1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\, i$$

Por lo tanto, el número complejo (forma binómica o cartesiana) es:

$$C = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\, i$$

Ejemplo 4

Pasar a la forma binómica:

Dada la forma trigonométrica encuentre la forma cartesiana o binomica:

$$3\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}\right) = 3(0 + 1i) = 0 + 3i \text{ o } 3i$$

La forma polar de la expresión anterior sería: $3_{\frac{\pi}{2}}$ o $3_{90^{\circ}}$

Si trabajamos con grados nos quedaría así la expresión:

$$3(\cos 90^{\circ} + i \operatorname{sen} 90^{\circ}) = 3(0 + 1i) = 0 + 3i \text{ o } 3i$$

Se demuestra que es la misma solución con radianes y grados o viceversa.

Ejemplo 5

Pasar a la forma binómica:

Dada la forma trigonométrica encuentre la forma cartesiana:

$$\sqrt{3}\,(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

La forma polar de la expresión anterior sería: $\sqrt{3}_{\frac{\pi}{6}}$ o $\sqrt{3}_{30°}$

Si trabajamos con grados, nos quedaría así la expresión:

$$\sqrt{3}\,(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°) = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Se demuestra que es la misma solución con radianes y grados o viceversa.

Actividad 6

Resuelva los siguientes ejercicios pasándolos a forma binómica (confronte las respuestas con su tutor, use sus tablas trigonométricas y todo lo que sea necesario):

a. $\sqrt{2}\,(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}) =$

b. $3_{45} =$

c. $3_{\frac{2\pi}{3}} =$

d. $\sqrt{1}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}\right) =$

e. $3_{90} =$

f. $5_{\frac{3\pi}{4}} =$

g. $3(\cos\frac{11\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}) =$

h. $4_{120} =$

i. $5_{\frac{4\pi}{3}} =$

j. $2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\ \text{sen}\ \frac{5\pi}{6})=$

Operaciones combinadas para encontrar los diferentes elementos en C

Determine el módulo, el argumento, la forma polar y la forma trigonométrica de los siguientes números complejos y grafique lo que es posible, dado que existen las siguientes formas canónicas de coordenadas y de frecuente uso en C.

Binómica: $C= a + bi$

Polar: $C= r_a$

Trigonométrica: $C= r(\cos \alpha + i\ \text{sen}\ \alpha)$

Ejercicio 1: $\sqrt{3} + i \rightarrow$

Módulo (distancia): $|\sqrt{3} + i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$

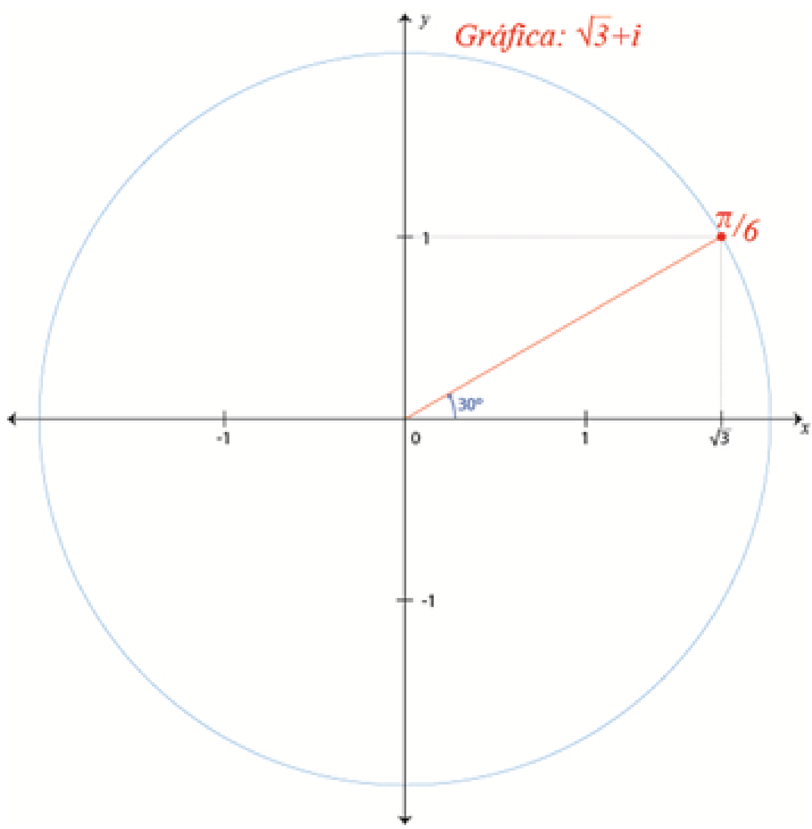
Argumento (ángulo): $(\sqrt{3} + i) = arctg(Inv\ Tan)\ \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} = 30°$

Recuerde auxiliarse de su tabla trigonométrica y una calculadora científica.

Forma polar: $\sqrt{3} + i = 2_{\frac{\pi}{6}}$ o $2_{30°}$

Forma trigonométrica: $\sqrt{3} + i = 2(\cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6})$

Gráfica correspondiente a: $\sqrt{3} + i$



Ejercicio 2: $\frac{5}{3}i \rightarrow$ o $0+\frac{5}{3}i$

Módulo (distancia): $\left|\frac{5}{3}i\right| = \frac{5}{3}$ (Haga su argumento con forma cartesiana).

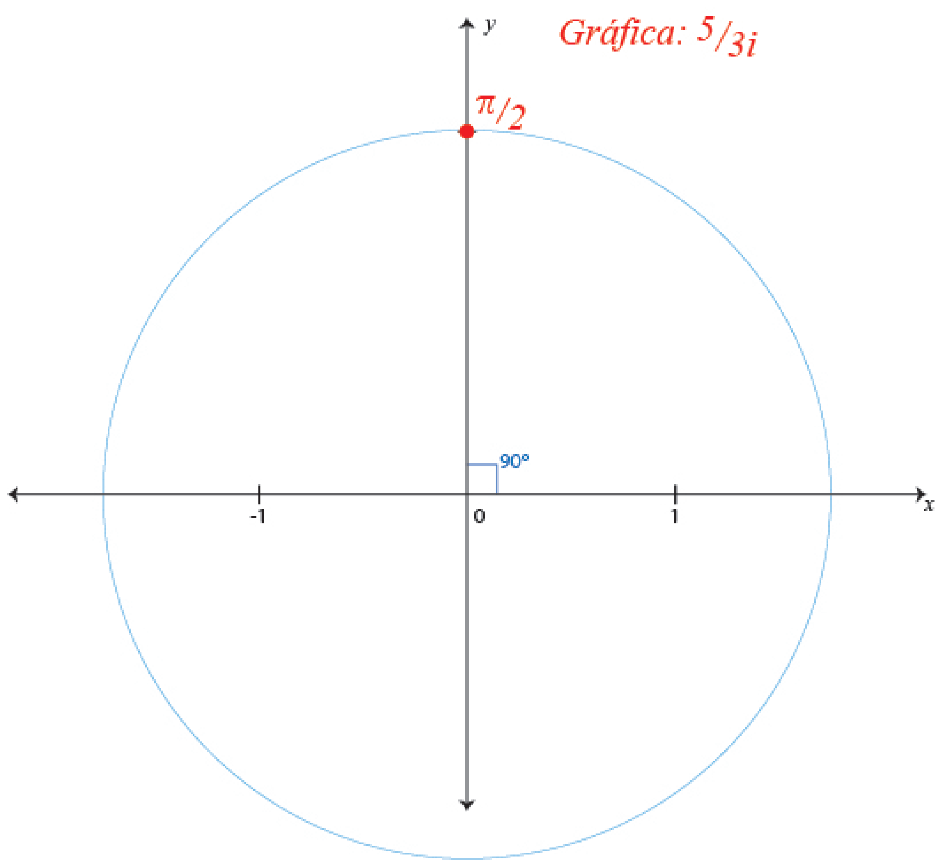
Argumento (ángulo): $\frac{5}{3}i =$ está en el eje y positivo y hace 90° o $\frac{\pi}{2}$

Recuerde auxiliarse de su lógica y gráfica.

Forma polar: $\left|\frac{5}{3}i\right| = \frac{5}{3}_{\pi/2}$ o $\frac{5}{3}_{90°}$

Forma trigonométrica: $\frac{5}{3}i = \frac{5}{3}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\ \text{sen}\ \frac{\pi}{2}\right)$

Gráfica correspondiente a: $\frac{5}{3}i$



Ejercicio 3: $-\sqrt{5} \rightarrow$ o $-\sqrt{5} + 0i$

Módulo (distancia): $\left|-\sqrt{5}\right| = \sqrt{5}$ (Haga su argumento con forma cartesiana).

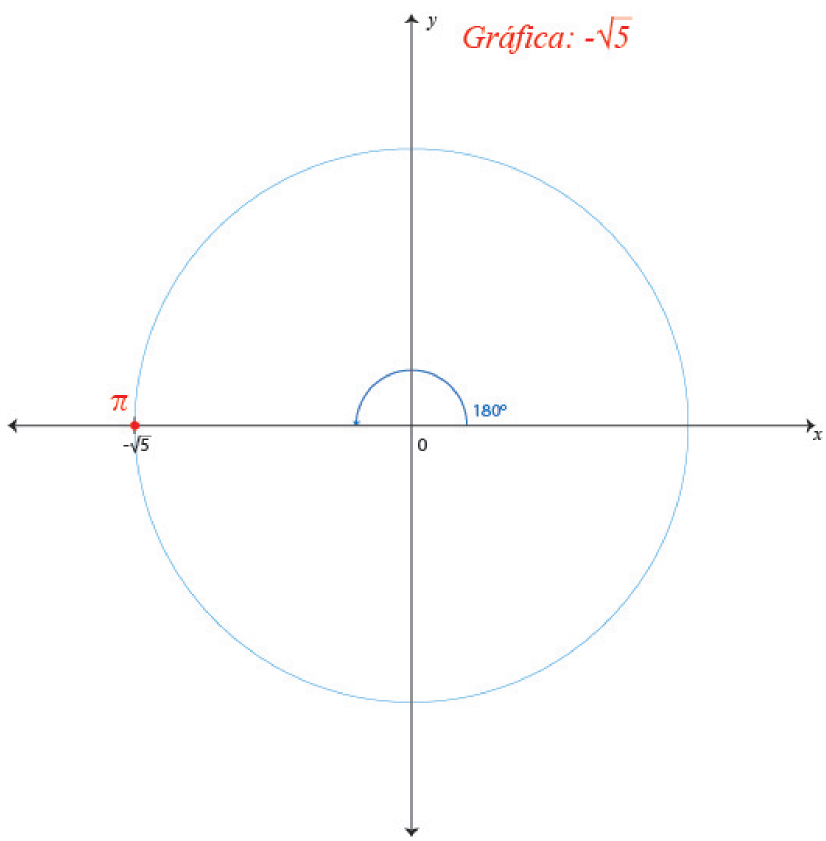
Argumento (ángulo): $-\sqrt{5}$ = está en el eje x negativo y hace 180° o π
Recuerde auxiliarse de su lógica y grafica.

Forma polar: $-\sqrt{5} = \sqrt{5}_{\pi}$ o $\sqrt{5}_{180°}$

Forma trigonométrica: $-\sqrt{5} = \sqrt{5}\,(\cos\pi + i\ \text{sen}\pi)$

Recuerde que la forma polar y trigonométrica se da positiva por el módulo que nos indica que es distancia.

Gráfica correspondiente a: $-\sqrt{5}$



Ejercicio 4: -2 -2i

Módulo (distancia): $|-2\ -2i\ | = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2}\ =\ \sqrt{8}\ =\ 2\sqrt{2}$

Argumento (ángulo): $(-2\ -2i) = \text{arctg}\ \frac{-2}{-2} = \text{arctg}1 = \frac{5\pi}{4}$

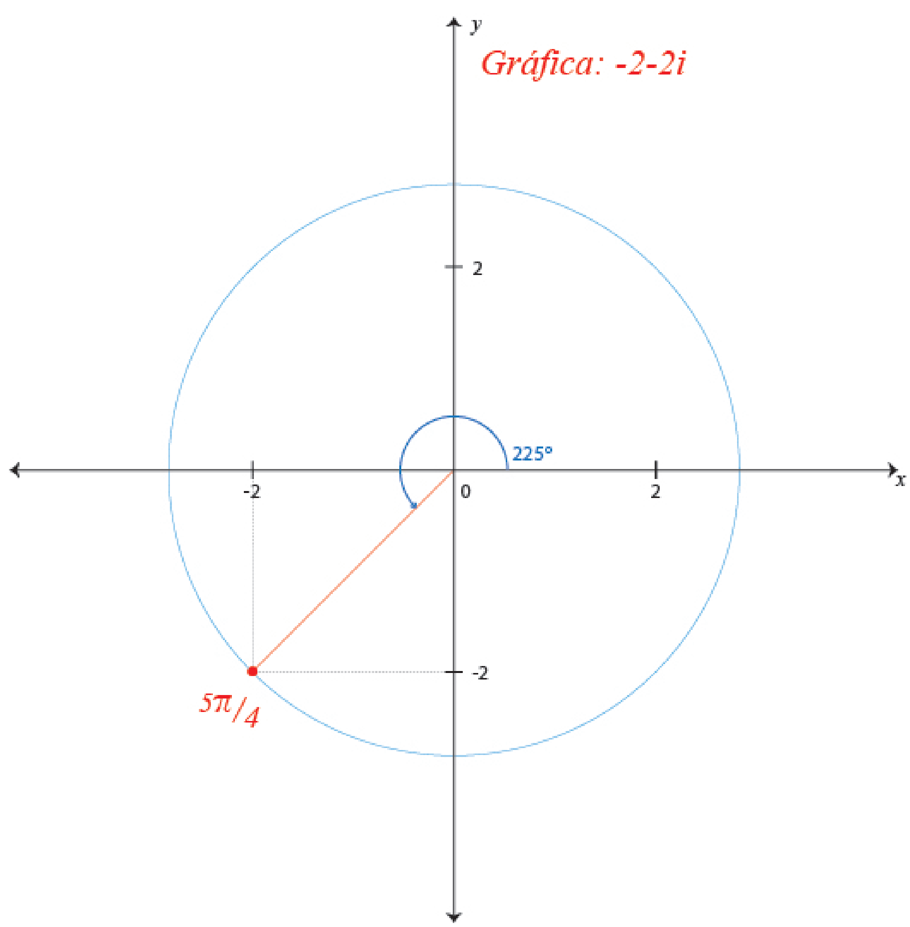
Recuerde que la Inv. Tan de 1 es 45°, pero el afijo de la expresión cartesiana cae en el III cuadrante, por lo que debe sumar 180 + 45 = 225°.

Forma polar: $-2\ -\ 2i = \left(2\sqrt{2}\right)_{\frac{5\pi}{4}}$ o $\left(2\sqrt{2}_{225°}\right)$

Forma trigonométrica: $-2\ -2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\ \text{sen}\ \frac{5\pi}{4}\right)$

Recuerde usar su gráfica de afijo y todas las demás herramientas que le damos en cada ejercicio.

Gráfica correspondiente a: -2 -2i



Ejercicio 5: $2 - 2i$

Módulo (distancia): $|2 - 2i| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Argumento (ángulo): $(-2\ -2i) = \text{arctg}\ \frac{-2}{2} = \text{arctg}\ -1 = \frac{7\pi}{4}$

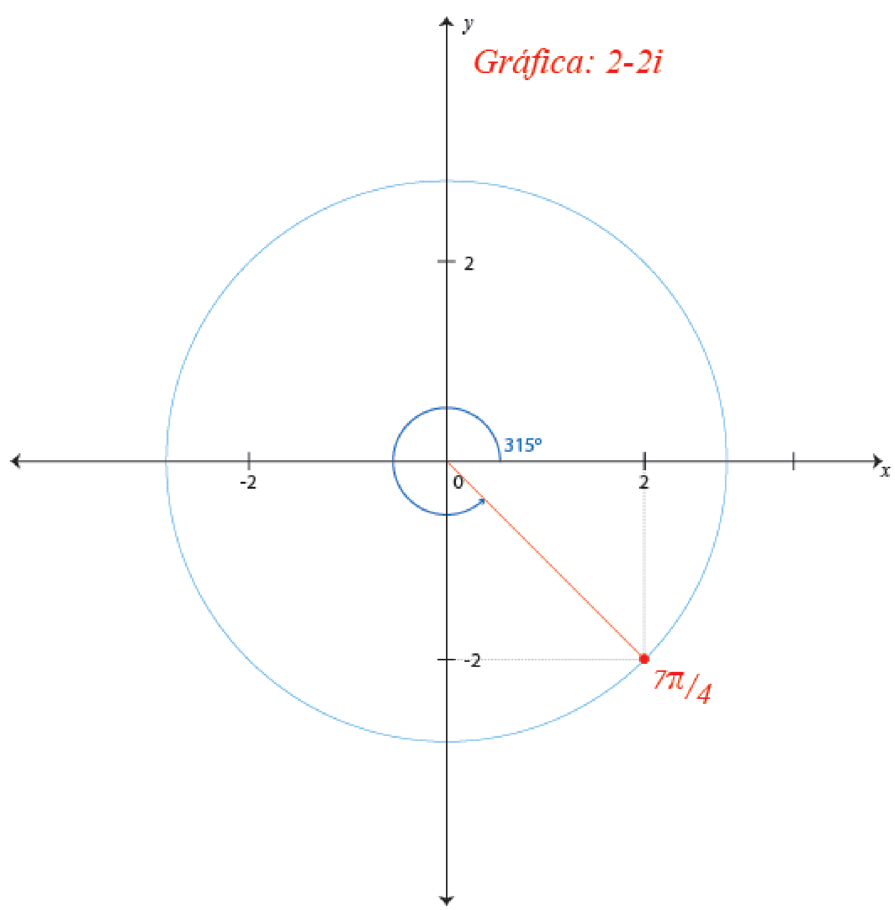
Recuerde que la Inv Tan de -1 es - 45°, pero el afijo de la expresión cartesiana cae en el IV cuadrante, por lo que debe sumar 270 + 45 = 315°.

Forma polar: $2\text{-}2i = \left(2\sqrt{2}\right)_{\frac{7\pi}{4}}$ o $\left(2\sqrt{2}\right)_{315°}$

Forma trigonométrica: $2\text{-}2i = 2\sqrt{2}\,(\cos \frac{7\pi}{4} + i \text{ sen } \frac{7\pi}{4})$

Recuerde usar su gráfica de afijo y todas las demás herramientas que le damos en cada ejercicio.

Gráfica correspondiente a: $2\text{-}2i$



Ejercicio 6: $-2+2i$

Módulo (distancia): $|-2+2i| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Argumento (ángulo): $(-2+2i)$= arctg $\frac{-2}{2}$ = arctg $-1 = \frac{3\pi}{4}$

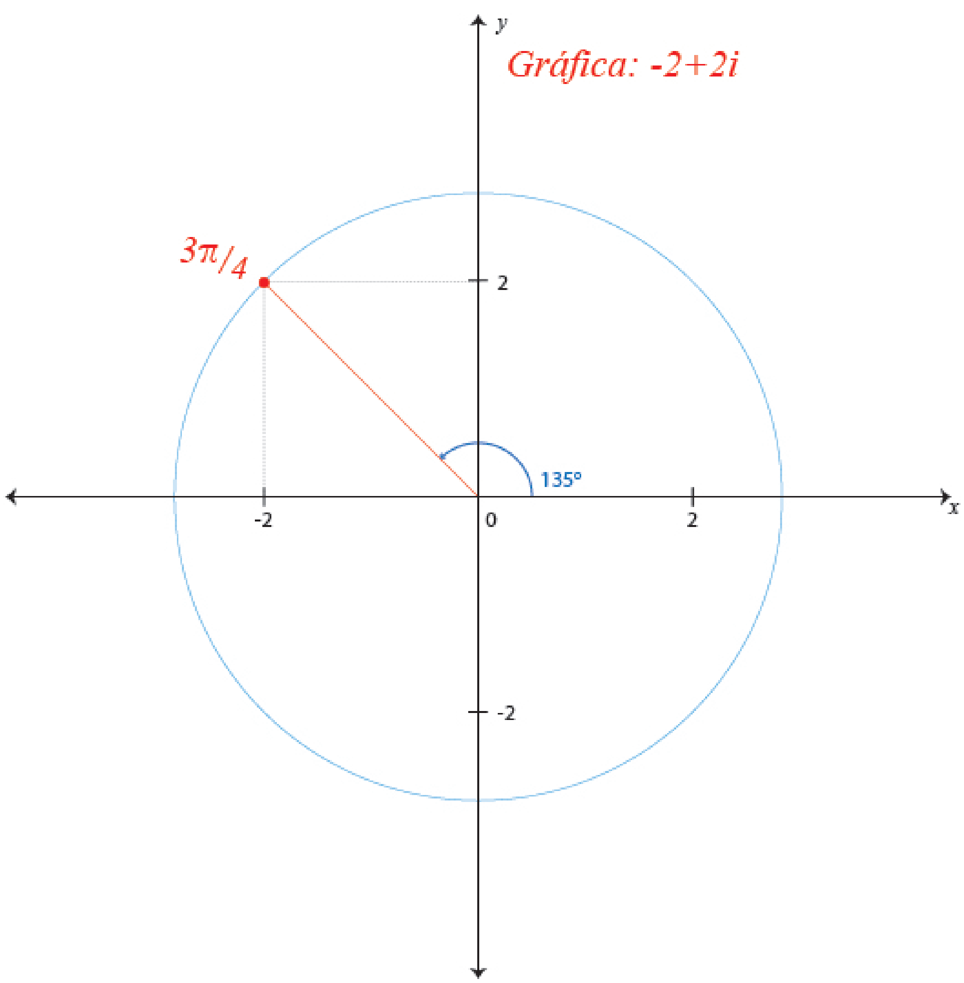
Recuerde que la Inv. Tan de -1 es -45°, pero el afijo de la expresión cartesiana cae en el II cuadrante, por lo que debe sumar 90 + 45= 135°.

Forma polar: $-2+2i = \left(2\sqrt{2}\right)_{\frac{3\pi}{4}}$ o $\left(2\sqrt{2}\right)_{135°}$

Forma trigonométrica: $-2+2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$

Recuerde usar su gráfica de afijo y todas las demás herramientas que le damos en cada ejercicio.

Gráfica correspondiente a: $-2+2i$



Ejercicio 7: 2+2i

Módulo (distancia): $|2+2i|= \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Argumento (ángulo): $(2+2i)=$ arctg $\frac{2}{2}$ = arctg1= $\frac{\pi}{4}$

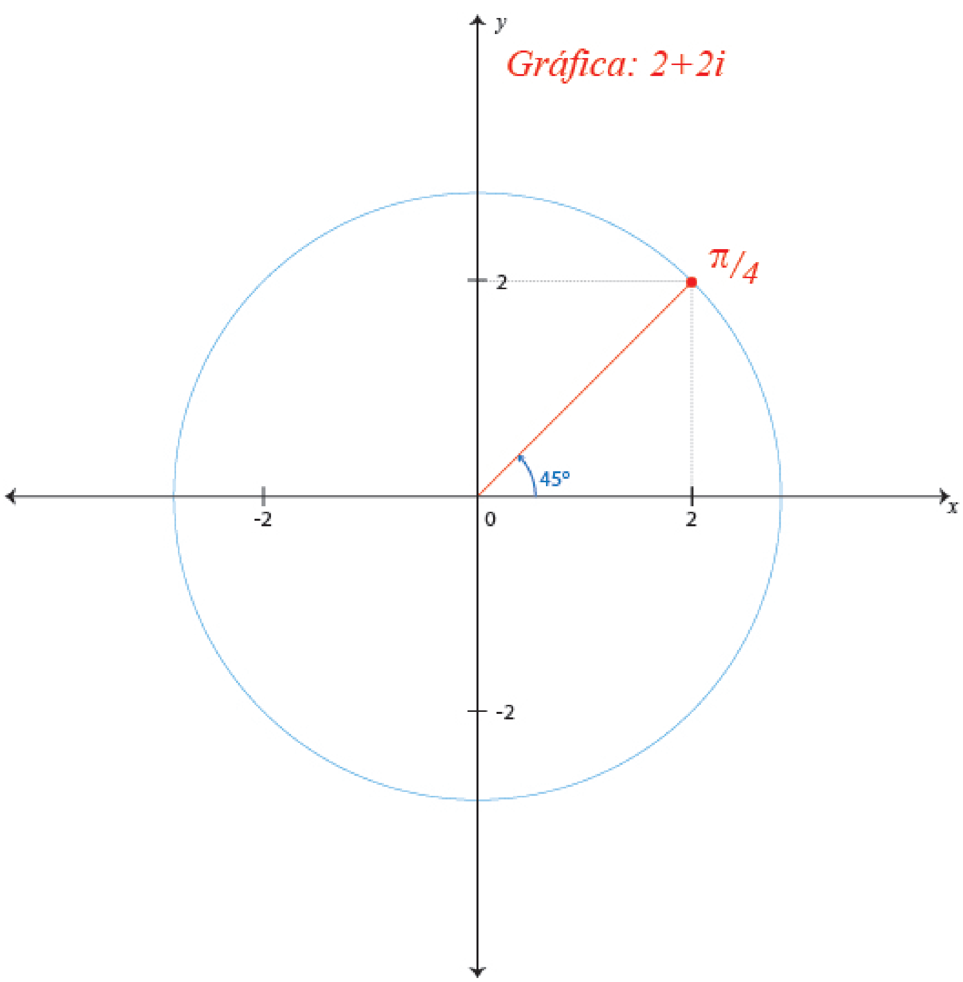
Recuerde que la Inv. Tan de 1 es 45°, pero el afijo de la expresión cartesiana cae en el I cuadrante, por lo que debe ser 45°.

Forma polar: $2+2i = \left(2\sqrt{2}\right)_{\frac{\pi 4}{4}}$ o $\left(2\sqrt{2}\right)_{45°}$

Forma trigonométrica: $2+2i = 2\sqrt{2}\ (\cos \frac{\pi}{4} + i \text{ sen } \frac{\pi}{4})$

Recuerde usar su gráfica de afijo y todas las demás herramientas que le damos en cada ejercicio.

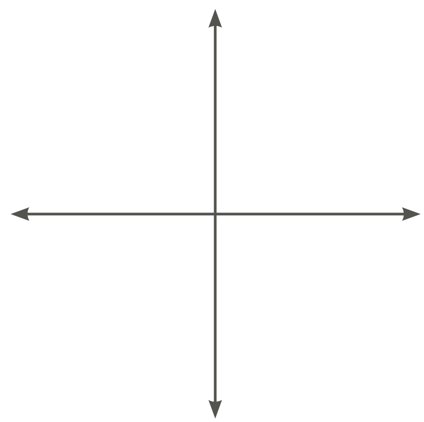
Gráfica correspondiente a: 2+2i



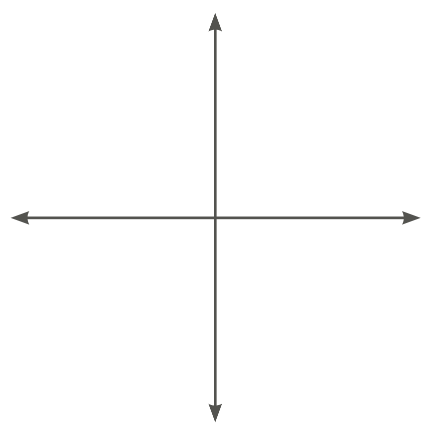
Actividad 7

Determine el módulo, el argumento, la forma polar y la forma trigonométrica y grafique (graficando y siguiendo los ejemplos dados, determina lo que se le pide y confróntelo con su tutor).

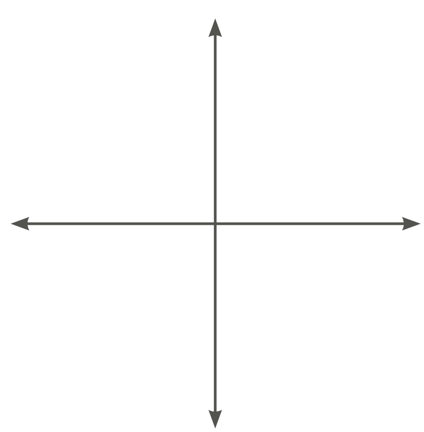
a. 5



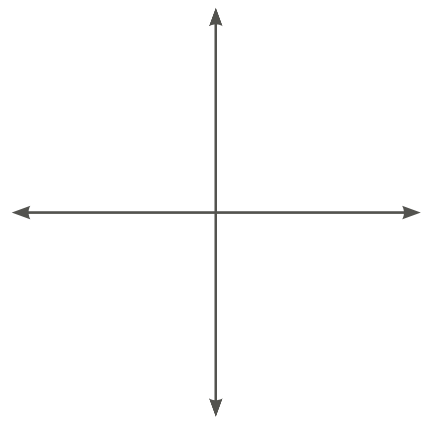
b. $-2i$



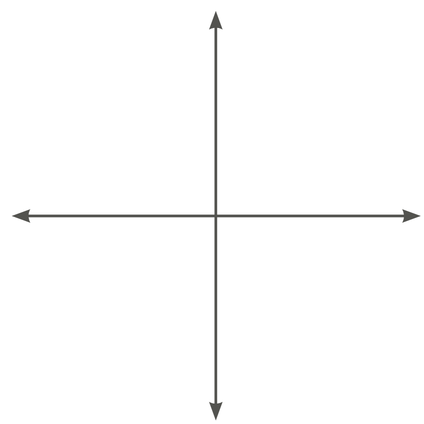
c. $2+\sqrt{3}\ i$



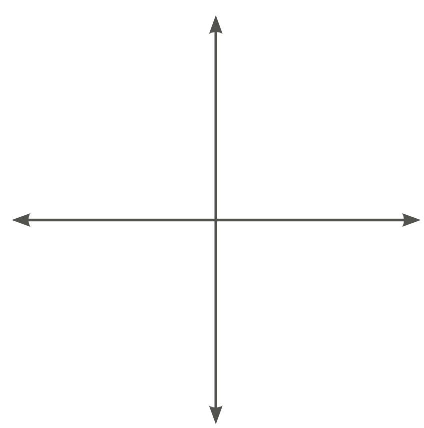
d. $-2+\sqrt{3}i$



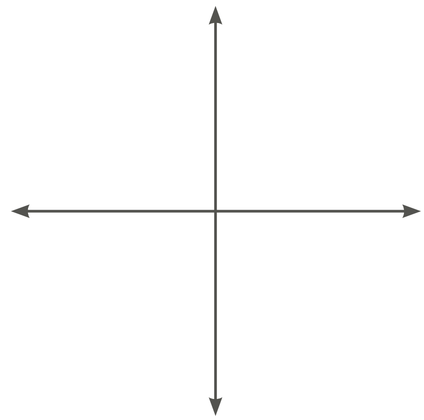
e. $-2-\sqrt{3}i$



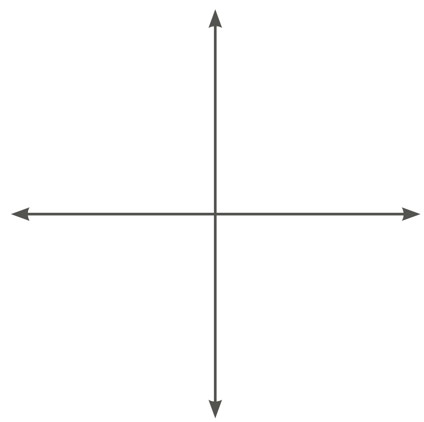
f. $2-\sqrt{3}i$



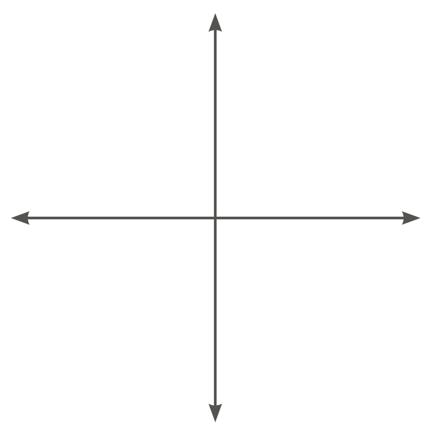
g. 4



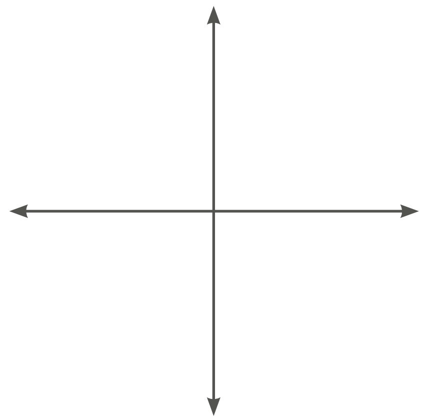
h. −3



i. $3i$



j. $-4i$



Solución de ecuaciones en C

Al igual que en R, podemos resolver ecuaciones dada una variable intrínseca en cualquiera de los miembros, también en C podemos trabajar las ecuaciones. Veamos algunos ejemplos.

Dados los números complejos:

$C_1 = 2 - i$

$C_2 = 3 + 6i$

Determine el número x que verifica cada una de las siguientes igualdades:

- $C_2\, x = C_1$

  Solución:

  $(3 + 6i)x = 2 - i$

  $$x = \frac{2 - i}{3 + 6i} = \frac{(2 - i)(3 + 6i)}{(3 + 6i)\,(3 - 6i)} = \frac{6 - 12i - 3i + 6i^2}{9 - 36i^2} = \frac{6 - 15i - 6}{9 + 36} = \frac{-15i}{45} \rightarrow$$

R= $\left(-\frac{1}{3}i\right)$ o C.S

Comprobando: $(3 + 6i)\left(\frac{-1}{3}i\right) = \frac{-3i-6i^2}{3} = \frac{-3i+6}{3} = -i+2$ o $2-i$

Entonces: $2-i = 2-i$

- $C_2^2 + x = -C_1^2$

  Solución:

  $(3+6i)^2 + x = (2 - i)^2$

  $x = -(2 - i)^2 - (3 + 6i)^2$

  $x = -(3 - 4i)-(-27 + 36i) = -3 + 4i + 27 - 36i = 24 - 32i$

  C.S= $\{24 - 32i\}$

  Al sustituir este C.S en la variable x, sus dos miembros quedan:
  $3 - 4i = 3 - 4i$

- $C_1 + C_2 + x = 1$

  Solución:

  $(2 - i) + (3 + 6i) + x = 1$

  $x = 1 -(2 - i) - (3 + 6i) = 1 - 2 + i - 3 - 6i = -4 -5i$

  C.S= $\{-4 -5i\}$

  Al sustituir este C.S en la variable x, sus dos miembros verifican la igualdad.

- $C_1^2\ x = 1$

  Solución:

  $(2 - i)^2\ x = 1$

  $$x = \frac{1}{(2 - i)^2} = \frac{1}{(3 - 4i)} = \frac{1(3 + 4i)}{(3 - 4i)\,(3 + 4i)} = \frac{(3 + 4i)}{25} \quad o \quad \frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$$

  $$C.S = \frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$$

  Al sustituir este C.S en la variable x, sus dos miembros verifican la igualdad.

- $C_1 + x = C_2$

  Solución:

  $(2\text{-}i) + x = 3 + 6i$

  $x = 3 + 6i - (2 - i)$

  $x = 3 + 6i - 2 + i$

  $x = 1 + 7i$

  $C.S = \{1 + 7i\}$

  Al sustituir este C.S en la variable x, sus dos miembros verifican la igualdad.

Actividad 8

Resuelva las siguientes ecuaciones, con aplicación en C:

a. $(3 + 2i)$ -x= $1 - 2i$

b. $(1 - i)^2$ x= 2 →

c. $(1 + i) - (2 - 2i) + x = 5$

d. $(2 + 3i)^2 - x = (1 + 4i)^2$

e. $(2 + i)\,x = 1 + 3i \rightarrow$

f. $4i + 2i + 2x - 3x = 4i - 2$

g. $(-4 + 2i) - (3 - i) = -(6i)\,x + 2$

h. $2x - i = 6x + 2i$

i. $(\frac{1}{2} - 2i)\ x = \frac{3}{4}6i$

j. $\frac{5}{2}i - \frac{2}{3}\ x + 3 = \frac{1}{3}\ x - \frac{3}{2}$

Resolución de ecuaciones cuadráticas con raíces complejas

Uso del discriminante

Para verificar cuando una ecuación cuadrática tiene raíces complejas, nos remitimos a que existen 3 tipos de soluciones indicadas por la expresión conocida en las ecuaciones cuadráticas como discriminante, que desarrollamos a continuación, y está dado por la expresión: $b^2 - 4ac$. Existen 3 casos importantes:

Caso 1: *Si*. $b^2 - 4ac > 0$ tiene dos soluciones reales y distintas.

Al graficar la cuadrática que se propone, esta corta en dos puntos en el eje x.

Caso 2: *Si*. $b^2 - 4ac = 0$ tiene soluciones reales e iguales.

Al graficar la cuadrática que se propone, esta corta en un solo punto.

Caso 3: *Si*. $b^2 - 4ac < 0$ tiene soluciones complejas conjugadas.

Al graficar la cuadrática no corta o interseca al eje x.

Para resolver los siguientes ejemplos debemos conocer el siguiente argumento de los números complejos: ($\sqrt{-1} = i$ y $i^2 = -1$).

Ejercicio 1

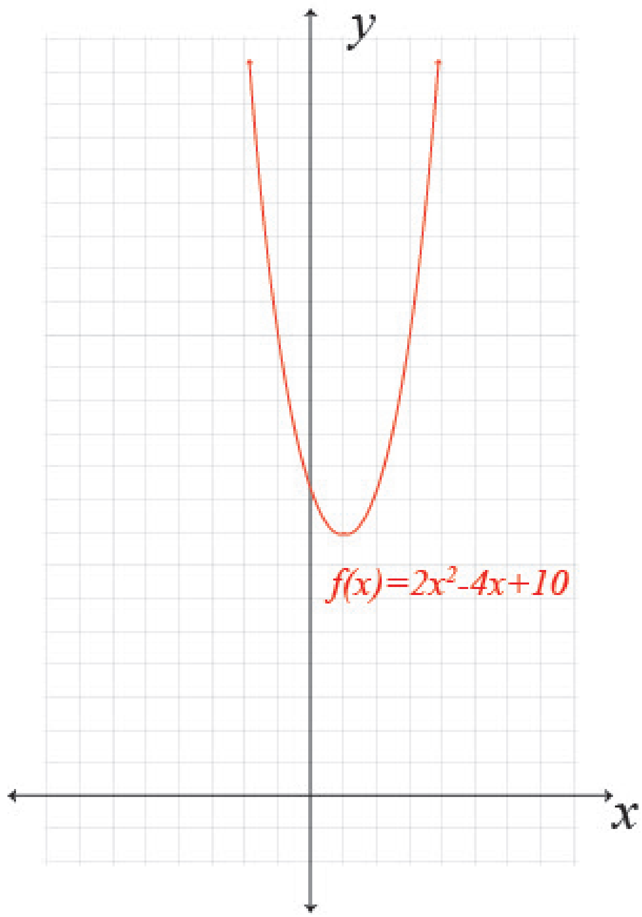
$2x^2 - 4x + 10 = 0$, donde: $a = 2$, $b = -4$, $c = 10$

¿Qué caso es? Veamos:

Si. $b^2 - 4ac \longrightarrow (-4)^2 - 4(2)(10) = 16 - 80 = -64 < 0$

tiene soluciones complejas.

Su gráfica no intersecta al eje x,solo al eje y positivo,en un punto.



Utilizando la fórmula general: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(2)(10)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 80}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{-64}}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{64\,(-1)}}{4} = \frac{4 \pm 8\sqrt{-1}}{4} = 1 \pm 2\sqrt{-1} =$$

$x = 1 \pm 2i \longrightarrow x_1 = 1 + 2i \longrightarrow x_2 = 1 - 2i$

C.S= $\{ 1 + 2i , 1 - 2i\}$

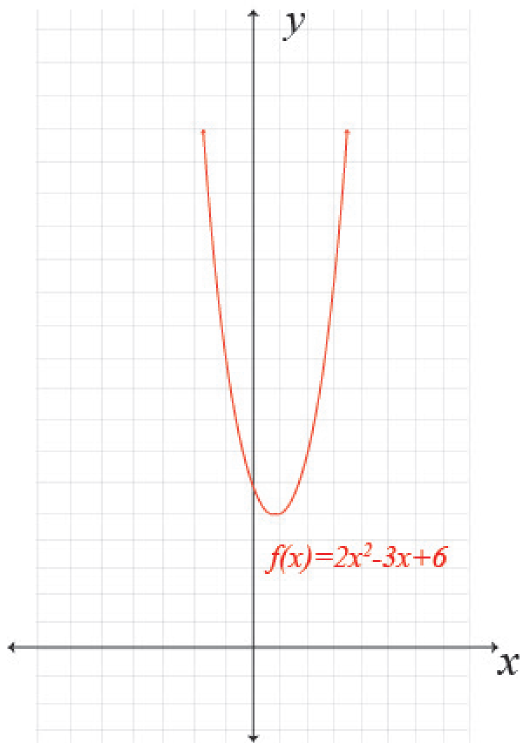
Ejercicio 2

$2x^2 - 3x = -6 \longrightarrow 2x^2 - 3x + 6 = 0$, donde: $a= 2$, $b= -3$, $c = 6$

¿Qué caso es? Veamos:

Si. $b^2 - 4ac \longrightarrow (-3)^2 - 4(2)(6)= 9 - 48 = -39 < 0$ tiene soluciones complejas.

Su gráfica no intersecta al eje x,solo al eje y positivo,en un punto.



Fórmula cuadrática: $x = \dfrac{-(-3)\pm\sqrt{(-3^2)-4(2)(6)}}{2(2)}$

$$x= \frac{3 \pm \sqrt{9 - 48}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{-39}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{39\,(-1)}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{39}i}{4}$$

$$x_1 = \frac{3 \pm \sqrt{39}i}{4} \qquad x_2 = \frac{3 - \sqrt{39}i}{4}$$

$$C.S= \left\{ \frac{3 \pm \sqrt{39}i,}{4} \quad \frac{3 - \sqrt{39}i}{4} \right\}$$

Ejercicio 3

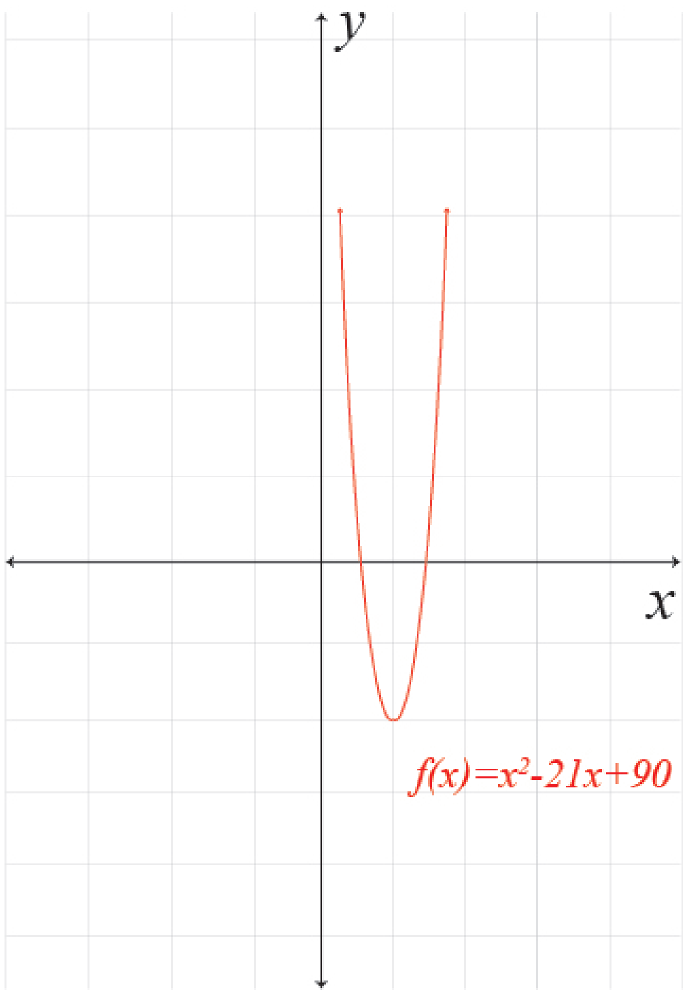
$\frac{x^2}{6} - \frac{x}{2} = 3(x - 5) \longrightarrow \frac{x^2}{6} - \frac{x}{2} = \frac{3(x-5)}{1} \longrightarrow \frac{x^2}{6} - \frac{x}{2} = \frac{3x - 15}{1} \rightarrow$

$x^2 - 21x + 90 = 0$, donde: $a= 1$, $b= -21$, $c=90$

¿Qué caso es? Veamos:

Si. $b^2 - 4ac \longrightarrow (-21)^2 - 4(1)(90)= 441 - 360= 81 > 0$, tiene soluciones reales y distintas.

Su gráfica intersecta al eje x en dos puntos.



Fórmula cuadrática: $x = \frac{-(-21) \pm \sqrt{(-21)^2 - 4(1)(90)}}{2(1)} = \frac{21 \pm \sqrt{441 - 360}}{2}$

$$= \frac{21 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{21 \pm 9}{2}$$

$x_1 = \frac{21 + 9}{2} = \frac{30}{2} = 15$, $x_2 = \frac{12}{2} = 6$

C.S= { 15,6} $\longrightarrow$ Este C.S esta definido en R y no en C.

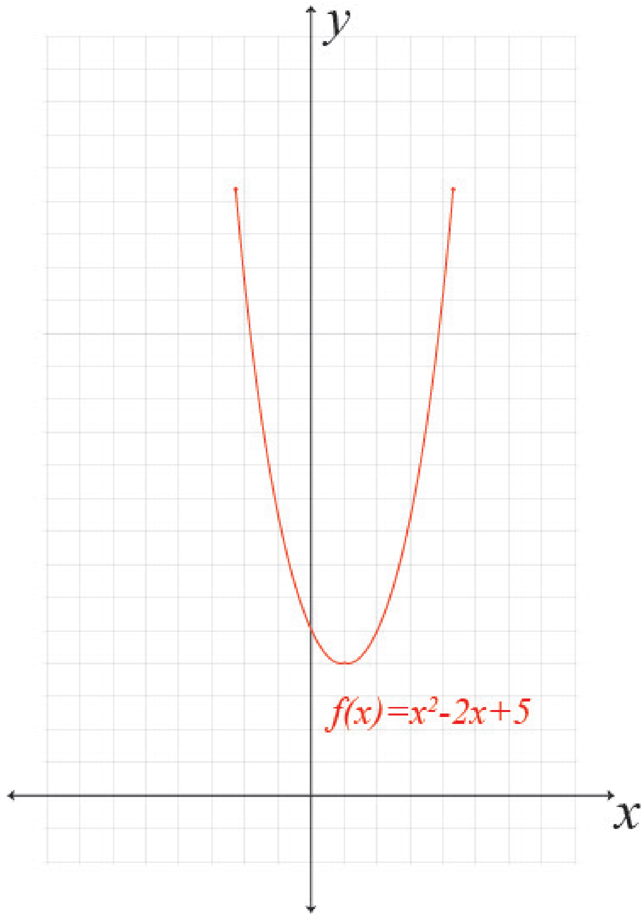
Ejercicio 4

$x^2 - 2x + 5 \longrightarrow$ donde: a= 1, b= -2, c= 5

¿Qué caso es? Veamos:

Si. $b^2 - 4ac \longrightarrow (-2)^2 - 4(1)(5) = 4 - 20 = -16 < 0 \rightarrow$ tiene soluciones complejas.

Su gráfica no intersecta al eje x,solo al eje y positivo,en un punto.



Fórmula cuadrática: $x = \dfrac{(-2)^2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(5)}}{2(1)}$

$x= \dfrac{4 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \dfrac{2 \pm 4i}{2}$

$x_1 = \dfrac{2 + 4i}{2} = 1+2i$ $\qquad$ $x_2 = \dfrac{2 - 4i}{2} = 1-2i$

C.S= { 1 + 2i , 1 - 2i }

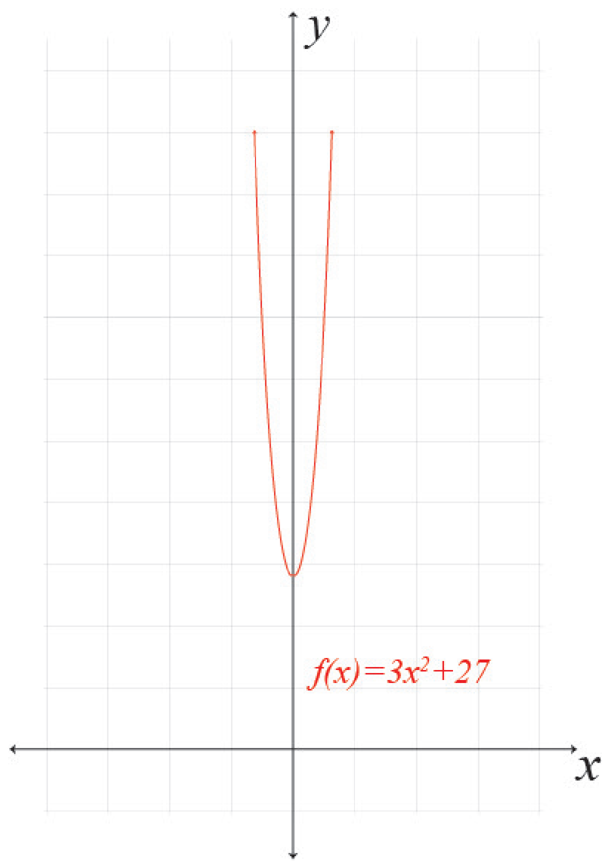
Ejercicio 5

$3x^2 + 27 \longrightarrow$ donde: a=3, b=0, c=27

¿Qué caso es? Veamos:

Si. $b^2 - 4ac \longrightarrow (0)^2 - 4(3)(27) = 0 - 324 = -324 < 0 \longrightarrow$ tiene soluciones complejas.

Su gráfica no intersecta al eje x,solo al eje y positivo,en un punto.



Fórmula cuadrática: $x = \dfrac{(0)^2 \pm \sqrt{(0)^2 - 4(3)(27)}}{2(3)}$

$$x = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 324}}{6} = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 324}}{6} = \frac{0 \pm \sqrt{-324}}{6} = \frac{0 \pm 18i}{6}$$

$$x_1 = \frac{0 + 18i}{6} = 0 + 3i \qquad x_2 = \frac{0 - 18i}{6} = 0 - 3i$$

C.S= { 0 + 3i , 0 - 3i }

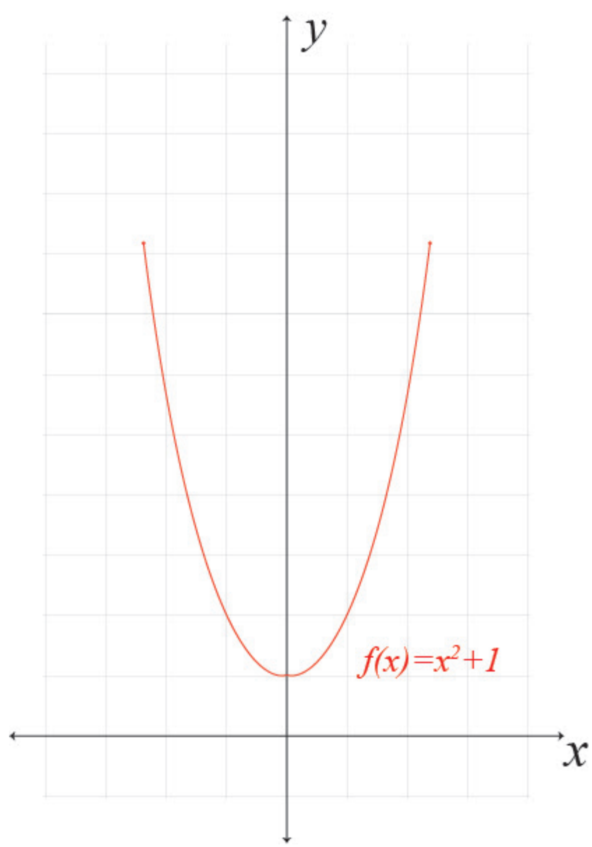
Ejercicio 6

$x^2 + 1 = 0 \longrightarrow$ donde: a=1, b=0, c=1

¿Qué caso es? Veamos:

Si. $b^2 - 4ac \longrightarrow (0)^2 - 4(1)(1) = 0 - 4 = -4 < 0 \longrightarrow$ tiene soluciones complejas.

Su gráfica no intersecta al eje x,solo al eje y positivo,en un punto.



Fórmula cuadrática: $x = \dfrac{(0)^2 \pm \sqrt{(0)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$

$$x = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4}}{2} = \frac{0 \pm \sqrt{0 - 4}}{2} = \frac{0 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{0 \pm 2i}{2}$$

$x_1 = \frac{0 + 2i}{2} = 0 + i \qquad x_2 = \frac{0 - 2i}{2} = 0 - i$

C.S= $\{ \pm i \}$

Actividad 9

Resuelva las siguientes ecuaciones cuadráticas con soluciones complejas, aplicando todos sus parámetros (se da solución únicamente del conjunto solución, lo demás que se pide queda a cargo del alumno y debe confrontarlo con el tutor):

a. $x^2 - 4x + 13 = 0$

b. $x^2 + 6x + 10 = 0$

c. $x^2 - 1 = 0$

d. $5x^2 + 1 = 0$

e. $x^2 + 3x + 4 = 0$

f. $x^2 + x + 1 = 0$

g. $x^2 + x - 1 = 0$

h. $5x^2 + 3x + 1 = 0$

i. $3x^2 + 27 = 0$

J. $2x^2 + 3x + 4 = 0$

Glosario

Mecánica cuántica: rama de la física (conocida originalmente como mecánica ondulatoria), uno de los más grandes avances del siglo veinte para el conocimiento humano, se refiere a la aplicación a escalas muy pequeñas llamadas cuantos.

Son leyes de la física que gobiernan el reino de lo pequeño como: átomos, moléculas, electrones, protones, y que habitan también en el reino de lo grande, pero raramente se muestran allí.

Número imaginario: es un número cuyo cuadrado es negativo. Fue en el año 1,777 cuando Leonard Euler le dio al nombre de *i* (por imaginario) y se propuso para ser despectivo, en la actualidad son de gran valor.

Afijo de un número complejo: Los números complejos se representan en unos ejes cartesianos.

El eje “x” se llama eje real y el eje “y”, se le llama eje imaginario.
El número complejo: a + bi se representa por el punto (a,b), que se llama afijo.

Teorema de Pitágoras: Establece que en un triángulo rectángulo el cuadrado de la longitud de la hipotenusa (el lado de mayor longitud del triángulo rectángulo), es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los dos catetos (los dos lados menores del triángulo rectángulo).

Forma Cartesiana: Para todo número complejo C existe un único par de números reales (a, b) tal que a + bi = C.

Este par de números reales expresa al complejo C en forma cartesiana, siendo “x” la parte real e “y “la parte imaginaria de C.

Forma polar: Un número complejo en forma polar consta de dos componentes: módulo y argumento.

El módulo de un número complejo es el módulo del vector determinado por el origen de coordenadas y su afijo. Se designa por |C|.

Forma binómica: Un número complejo en forma binómica es :a + bi.

El número “a” es la parte real del número complejo.
El número “b” es la parte imaginaria del número complejo.

Forma trigonométrica: esta forma viene dada y derivada de las siguientes formas:

Binómica: $z = a + bi$

Polar: $z = r_a$

Trigonométrica: $z = r\,(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$

Arco seno: En trigonometría está definido como la función inversa del seno de un ángulo.

Su significado geométrico es el arco cuyo seno es alfa.

Raíces complejas: Si el discriminante de la ecuación $ax^2 + bx + c= 0$ es negativo, debe sustituirse el signo negativo por i^2 y de esa forma se obtienen las raíces complejas de la ecuación.

Actividad metacognitiva

A continuación se le presentan una serie de preguntas que usted debe responder, con el propósito de conocer su aprovechamiento final. Recuerde que si no conoce alguna de las preguntas planteadas, puede pasar a la siguiente interrogante.

1. ¿Qué pensó mientras estudiaba la unidad de los números complejos?

____

____

____

____

2. ¿Utilizó alguna técnica de estudio para resolver los ejercicios de la unidad de los números complejos? ¿Qué aprendió al hacerlo de esta forma?

____

____

____

____

3. De los temas abordados en esta unidad, ¿cuáles le resultaron más difíciles de aprender? ¿Por qué?

____

____

____

____

4. ¿Qué temas considera importantes para su aplicación en su vida diaria?

____

____

____

____

5. ¿Cómo se preparó para estudiar esta unidad de los números complejos y resolver cada uno de los ejercicios propuestos?

____

____

____

____

Autoevaluación

Guía de operaciones con números complejos

A. Dado que: C= a + b*i*, donde: a $\in$ R y b*i* $\in$ C, resuelva los siguientes ejercicios:

1. Sume: $5 + 4i$, $-6 -3i$, $4 + \sqrt{-9}$, $2i$=

2. Simplifique y sume: $\sqrt{-50} + \sqrt{-32} + \sqrt{-20} =$

3. $3\sqrt{-9} + 7\sqrt{-8} + \sqrt{-75} + \sqrt{9} =$

4. $4 + 6i$, $-2 + 2i$, $\sqrt{9} - \sqrt{-16}$, $-2i =$

5. $\frac{3}{4} + \frac{5}{4}i$, $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$, $\frac{7}{3} - \sqrt{-\frac{4}{9}} =$

Multiplique:

6. $(3 + 2i)\ (4 - 2i)=$

7. $(-\sqrt{-8} + 2)\ \ (-\sqrt{-4} - \sqrt{9})=$

8. $(3 + 2i)^2\ \ (3i)=$

9. $(2 + 2i)\ (2+2i) - (3 + 2i)\ (3 - 2i) + 2(2 - i)^2=$

10. $(3 - 2i)^2 \ (4 - i)^2 =$

Divida:

11. $\dfrac{2 + 3i}{2i} =$

12. $\dfrac{2 + 3\sqrt{-1}}{3+\sqrt{-1}} =$

13. $\dfrac{(3 - 5i)^2}{(1 - 3i)^2} =$

14. $\dfrac{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}i}{\frac{3}{2} - \frac{1}{4}i}$

B. Potencias de i. Encuentre, sabiendo que

($i^2 = -1$ o por el ciclo de 4 valores):

a. $i^{11}=$

b. $5i^{-3}=$

c. $-7i^{-2}=$

d. $(2i^{103} + 2)(-3i) =$

e. $(-3i^{2})(3i^{203} + 2) =$

f. $\dfrac{5 + 4i^{-2}}{15 - 3i^{-7}} =$

g. $\dfrac{i^{200}}{i^{111}} =$

C. Encuentre el módulo y la gráfica de los siguientes ejercicios (las respuestas confróntelas con su tutor):

a. $4 + 2i=$

b. $5 - 3i=$

c. $-2 + i=$

d. $-4 - 3i=$

e. $-1 + 3i=$

D. Encuentre el módulo, argumento y la gráfica de:

a. $-1 + 3i=$

b. $-4 - 3i=$

c. $-2 + i=$

d. $5 - 3i=$

e. $4 + 2i=$

E. Resuelva los siguientes ejercicios pasándolos a forma polar (su respuesta confróntela con su tutor):

a. $C = -8i$

b. $C = 6i$

c. $C = -5$

d. $C = 7$

e. $C = 4 - \sqrt{2i}$

f. $C = -3 - \sqrt{5i}$

g. $C = -1 + \sqrt{2i}$

h. $C = 3 + \sqrt{5i}$

i. $C = -4i$

j. $C = 6$

F. Resuelva los siguientes ejercicios pasándolos a forma binómica (confronte las respuestas con su tutor, use sus tablas trigonométricas y todo lo que sea necesario):

a. $\sqrt{4}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\,\text{sen}\,\frac{4\pi}{3}\right) =$

b. $7_{120} =$

c. $4_{\frac{5\pi}{4}} =$

d. $\sqrt{3}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{6}\right) =$

e. $5_{135} =$

f. $3_{\frac{2\pi}{3}} =$

g. $2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6}\right) =$

h. $8_{\frac{\pi}{2}} =$

i. $6_{\frac{\pi}{3}} =$

j. $(\cos \frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4})=$

G. Resuelva las siguientes ecuaciones, encuentre el valor de x con aplicación en C:

a. $\frac{2}{5} + 2x - 3= 5x - 1$

b. $(6 - 2i)\, x = \frac{3}{4}\, i$

c. $4x - 2i = -8x + 5i$

d. $(-2 + i) + (2 - 3i) = -(3i)x + 4$

e. $6i + 5i + 9x - 6x = 8i + 3$

f. $(5 + 2i)x = 2 - 3i$

g. $(4 - 2i)^2 - 2x = (2 + 3i)^2$

h. $(2 + i) + (4 - 3i) + x = 3$

i. $(4 - 2i)^2 x= 8$

j. $(3 + 4i) + x= 4 - 6i$

H. Dadas las siguientes ecuaciones cuadráticas, encuentre las soluciones complejas, o quizás reales, usando todos los parámetros según los ejemplos (las respuestas confróntelas con su tutor):

a. $x^2 - 4x + 13= 0$

b. $x^2 + 6x + 10 = 0$

c. $x^2 - 1 = 0$

d. $x^2 + x + 1 = 0$

e. $x^2 + x - 1 = 0$

f. $3x^2 - 27 = 0$

g. $6x^2 - 2x + 9= 0$

h. $4x^2 + 8= 0$

i. $3x^2 + x + 7= 0$

j. $2x^2 - 6x + 1= 0$

Bibliografía

a) Matemáticas previas al Cálculo, Louis Leithold.
Análisis funcional y geometría analítica con ejercicios para calculadora

b) Matemáticas I Bachillerato en Ciencias y Letras, Horacio Reyes Núñez