j. Graficar: $(-6-2)+(-4i-1)-(i-5)$

Potenciación en los números imaginarios

Métodos para resolver potencias imaginarias

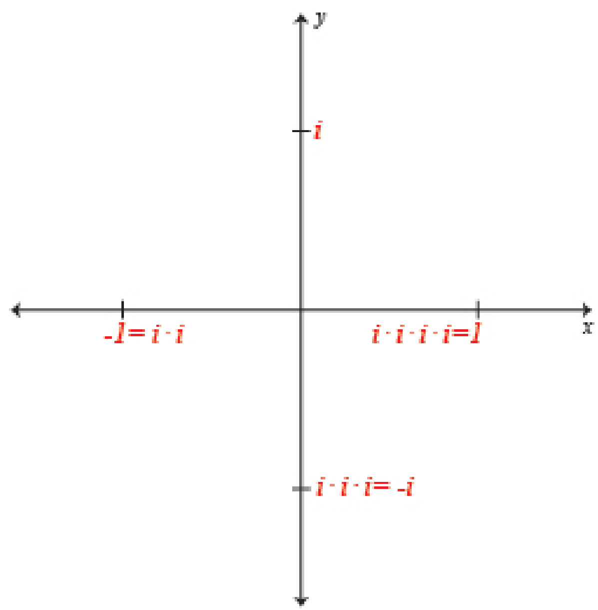
Potencias de la unidad imaginaria: Con el manejo del siguiente ciclo, podemos encontrar el valor de cualquier complejo:

- $i^0 = 1$
- $i^1 = i$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = -i$
- $i^4 = 1$

Nota importante: para recordar este ciclo de cuatro valores sustituya los valores del plano cartesiano así:

- $1 = i^4$
- $-1 = i^2$
- $i = i^1$
- $-i = i^3$

Veamos esta interpretación de forma gráfica:



La figura anterior nos demuestra los dos ejes, real e imaginario, con su número respectivo en los cuatro cuadrantes.

Primer método para despejar una potencia de la unidad imaginaria

Los valores se repiten de cuatro en cuatro, por eso, para saber cuánto vale una determinada potencia de *i*, se divide el exponente entre 4 y el resto es el exponente de la potencia equivalente a la dada. Ejemplos

- Cuál es el valor de i^{22}:

  $22 \div 4 = 5 + (2)$

  Entonces: $i^{22} = (i^4)^5 \cdot i^2 = 1^5 (-1) = -1$, de ahí que $i^{22} = -1$

- Cuál es el valor de i^{27}:

$27 \div 4 = 6 + (3)$

Entonces: $i^{27} = (i^4)^6 \cdot i^3 = 1^6\,(-i) = -i$, *de ahí que* $i^{27} = -i$

- Cuál es el valor de: $i^{50} \rightarrow \dfrac{50}{4} = 12$ sobrando 2

$(i^4)^{12}\,(i^2) = (1)^{12}\,(-1) = 1(-1) = -1$

- Cuál es el valor de: $i^{31} \rightarrow \dfrac{31}{4} = 7$ sobrando 3

$(i^4)^7\,(i^3) = (1)^7\,(-1) = \; 1(-i) = -i$

- Cuál es el valor de $i^{2012}: \rightarrow \dfrac{2012}{4} = 503$

$(i^4)^{503} = (1)^{503} = 1$

- Cuál es el valor de $i^{510}: \rightarrow \dfrac{510}{4} = 127$ diferencia 2

$(i^4)^{127}\;\; i^2 = (1)^{127}\,(-1) = 1(-1) = -1$

- Cuál es el valor de $i^{144}: \rightarrow \dfrac{144}{4} = 36$

$(i^4)^{36} = (1)^{36} = 1$

- Cuál es el valor de $i^{(-10)}: \rightarrow \dfrac{1}{i^{10}} = \dfrac{10}{4} = 2$ diferencia 2

$(i^4)^2\, i^2 = (1)^2\,(-1) = 1(-1) = -1$ *Entonces* $\dfrac{1}{1} = 1$

- Cuál es el valor de $i^{-105}: \rightarrow \dfrac{1}{105} = \dfrac{105}{4} = 26$ diferencia 1

$(i^4)^{26}\, i^1 = (1)^{26}\,(i) = 1(i) = i$

Entonces: $\dfrac{1}{i} = \dfrac{1}{i} \cdot \dfrac{i}{i} = \dfrac{i}{i^2} = \dfrac{i}{-1} = -i$

- Cuál es el valor de $i^{-10} \rightarrow \frac{1}{10} := \frac{10}{4} = 2$ diferencia 2

$(i^4)^2 \; i^2 = (1)^2 (-1) = 1(-1) = -1$

Entonces: $\frac{1}{-1} = -1$

Segundo método para despejar una potencia de la unidad imaginaria

Otra de la formas para resolver potencias de la unidad imaginaria es conociendo el valor de i^2 para valores pares. Si sabemos que $i^2 = -1$

Veamos los siguientes ejemplos:

- $i^{12} = (i^2)^6 = (-1)^6 = 1$ entonces $i^{12} = 1$
- $i^{50} = (i^2)^{25} = (-1)^{25} = -1$ entonces $i^{50} = -1$
- $i^{100} = (i^2)^{50} = (-1)^{50} = 1$ entonces $i^{100} = 1$
- $i^{60} = (i^2)^{30} = (-1)^{30} = 1$ entonces $i^{60} = 1$
- $i^{2012} = (i2)^{1006} = (-1)^{1006} = 1$ entonces $i^{2012} = 1$
- $i^{144} = (i^2)^{72} = (-1)^{72} = 1$ entonces $i^{144} = 1$
- $i^{140} = (i^2)^{70} = (-1)^{70} = 1$ entonces $i^{140} = 1$
- $i^{24} = (i^2)^{12} = (-1)^{12} = 1$ entonces $i^{24} = 1$
- $(i)\; i^{31} = (i^{30}\, i) = (i^2)^{15}\, i = (-1)^{15}\, i = -1i = -i$ entonces $i^{31} = -i$

Para potencias negativas se trabaja de la siguiente forma:

- $i^{-60} = \frac{1}{i^{60}} = \frac{1}{(i^2)^{30}} = \frac{1}{(-1)^{30}} = \frac{1}{1} = 1$ entonces $i^{-60} = 1$

- $i^{-121} = i^{120}\, i = \frac{1}{i^{120}\, i} = \frac{1}{(i^2)^{60}\, i} = \frac{1}{(-1)^{60}\, i} = \frac{1}{1(i)} = \frac{1}{i}$ entonces $\mathrm{i}^{-121} = -\mathrm{i}$

El resultado: $\frac{1}{i}$ es un cociente, que empleando conjugado es igual a: $-i$

- $2i^{-3} = \frac{2}{1}\left(\frac{1}{i^3}\right) = \frac{2}{i^3} = \frac{2}{-i} \rightarrow \frac{2}{-i} \cdot \frac{i}{i} = 2i$

Nota: Ahora si i está elevada a una potencia impar, la rebajamos a una potencia par anterior. Veamos los siguientes ejemplos:

- $i^{11} = (i^{10})i = (i^2)^5\ i = (-1)^5\ i = -1i = -i$
- $i^{33} = (i^{32})i = (i^2)^{16}\ i = (-1)^{16}\ i = 1i = i$
- $i^{121} = (i^{120})i = (i^2)^{60}\ i = (-1)^{60}\ i = 1i = i$
- $i^{1995} = (i^{1994})i = \left(i^2\ \frac{45}{41} + \frac{36i}{41}\right)^{997} i = (-1)^{997}\ i = -1i = -i$

2. Operaciones utilizando potencias mayores a 0 con números complejos

Sume:

- $5 + 7i^3 + 3 - 10i^{16} - i^{70} = 5 + 7(-i) + 3 - 10(1) - (-1)$

$$= 5 + 3 - 10 + 1 - 7i \rightarrow R/ = -1 - 7i$$

Suma con m.c.m:

- $\frac{2 - 3i}{1 + i} + \frac{7 + 4i}{3 + 5i} = \frac{(2 - 3i)(3 + 5i) + (7 + 4i)(1 + i)}{(1 + i)(3 + 5i)}$

$$\frac{(21 + i)(3 + 11i)}{(1 + i)(3 + 5i)} = \frac{24 + 12i}{-2 + 8i} \rightarrow \frac{12}{17} - \frac{54i}{17} = \frac{12 - 54i}{17}$$

Simplificación:

- $\frac{1}{3 + 2i} = \frac{1}{3 + 2i} \cdot \frac{3 - 2i}{3 - 2i} \rightarrow R/= \frac{3 - 2i}{13}$

División:

- $7 + 2i^{12} \div 5 - 4i^{-3}$ $\rightarrow 7 + 2i^{12} \div 5 - 4(i)$

$\rightarrow 7 + 2(1) \div 5 - 4i$

$\rightarrow 9 \div 5 - 4i$ su equivalente: $\dfrac{9}{5 - 4i}$

racionalizamos $\dfrac{9}{5 - 4i} \cdot \dfrac{5 + 4i}{5 + 4i}$

R/= $\dfrac{45}{41} + \dfrac{36i}{41}$

Actividad 3

Resuelva las siguientes potencias imaginarias que a continuación se le presentan:

a. $i^{2006} =$

b. $i^{37} =$

c. $5i^{-5} =$

d. $\dfrac{3 - 2i}{2 + i} + \dfrac{4 + 5i}{1 + 3i} =$

e. $i^{-137} =$