Los números reales

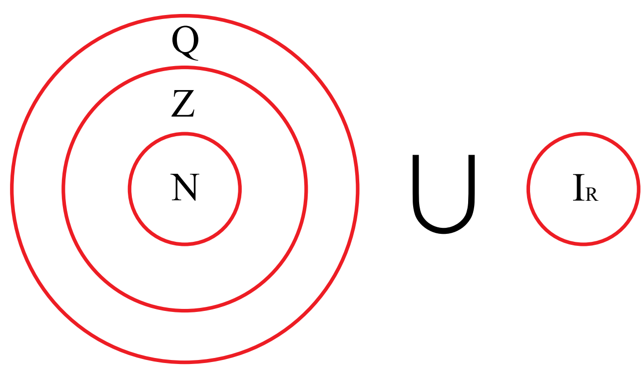
El conjunto formado por los números racionales e irracionales se conoce como el conjunto de los números reales, se designa por *R*.

1. Racionales + irracionales = reales

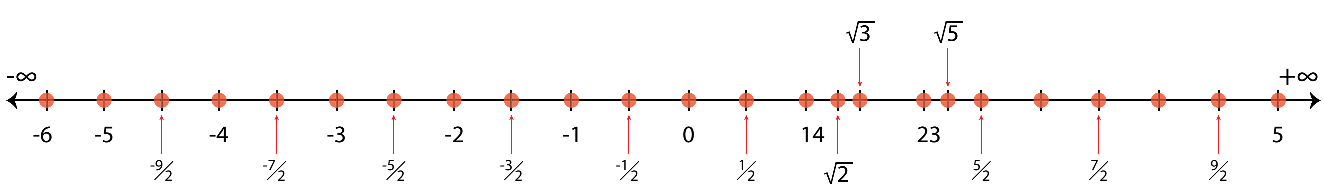
Con los números reales podemos realizar todas las operaciones, excepto la radicación de índice par con radicando negativo y la división por cero. Veamos sus notaciones de contenido:

$$R = Q \cup I$$
$$N \subset Z \subset Q \subset I \subset R$$
$$Q \cap I = \emptyset$$
$$Q \not\subset I$$

La siguiente figura resume las construcciones matemáticas anteriores:



Por lo tanto, el conjunto R es un conjunto amplio, es decir, que hemos rellenado la recta real o numérica y podemos afirmar que: a todo número real le corresponde un punto de la recta y a todo punto de la recta un número real. Veamos la siguiente recta real:



2. Tabla de la clasificación en *R*

La siguiente tabla muestra el conjunto al que pertenece cada uno de los siguientes números (modelo para reconocer algunos números reales y clasificarlos).

Número	N	Z	Q	I	R
5	✓	✓	✓		✓
$\sqrt[2]{27}$	✓	✓	✓		✓
2π				✓	✓
-3		✓	✓		✓
$-5\sqrt{2}$				✓	✓
$^{-19}/_{31}$			✓		✓
$\sqrt[5]{-32}$		✓	✓		✓
$(-3\pi)^2$				✓	✓
e				✓	✓
$^{3}/_{4}\sqrt{2}$				✓	✓
$-\sqrt{16}$		✓	✓		✓

3. Operaciones con números reales

Adición o suma

Dados: a, $b \in R$, llamaremos suma entre ellos y lo representamos por $a+b$ al número real c, tal que $a+b = c$, la cual es una operación binaria.

Ejemplos:

$$2 + 3 = 5$$

$$8 + 5 = 13$$

Propiedades de la suma en *R*

a. Propiedad de clausura o cierre:

Si: a, $b \in R$, entonces $(a + b) \in R$, la suma de dos números reales siempre será otro número real.

Ejemplos:

$$- 5 + (- 4) =$$

$$- 5 - 4 = - 9$$

b. Propiedad conmutativa:

El orden de los sumandos no varía la suma. Si: a, $b \in R$, entonces:
$a + b = b + a$

Ejemplos:

$$3 + 5 = 5 + 3$$

$$8 = 8$$

$$\sqrt{3} + \sqrt{5} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$$

$$1.73 + 2.24 = 2.24 + 1.73$$

$$3.97 = 3.97$$

c. Propiedad asociativa:

El modo de agrupar los sumandos no varía el resultado.
Si: a, b, c, $\in R$, entonces: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Ejemplo 1:

$$(6 + 4) + 7 = 6 + (4 + 7)$$

$$10 + 7 = 6 + 11$$

$$17 = 17$$

Ejemplo 2:

$$\sqrt{2} + (\sqrt{3} + \sqrt{5}) = (\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{5}$$

$$1.41 + (1.73 + 2.24) = (1.41 + 1.73) + 2.24$$

$$1.41 + 3.97 = 3.14 + 2.24$$

$$5.38 = 5.38$$

d. Existencia del elemento neutro:

El **0** es el elemento neutro de la suma, porque todo número sumado con él da el mismo número a la derecha o a la izquierda.
Si: $a \in R$, entonces: $a + 0 = 0 + a \rightarrow a = a$.

Ejemplos:

$3 + 0 = 0 + 3 \rightarrow 3 = 3$
$\boldsymbol{a + 0 = a}$
$\pi + 0 = \pi$

e. Existencia de opuesto o simétrico aditivo:

Dos números son opuestos, si al sumarlos obtenemos como resultado el cero.
Existe $-a \in R$ *tal qué:*

Ejemplos:

Dado que: $a = 2 \in R$

$2 + (-2) = -2 + 2$
$2 - 2 = - 2 + 2$
$0 = 0$
$4 - 4 = 0$

f. El opuesto del opuesto de un número es igual al mismo número.

Ejemplos:

$-(-3) = 3 \rightarrow$ El opuesto del opuesto es el mismo número.

$4 + (- 4) = (- 4) + 4 \rightarrow$ El opuesto del opuesto es el mismo número
$4 - 4 = - 4 + 4$
$0 = 0$

La sustracción en R no es conmutativa, ya que:

Si: $a, b \in R$, entonces: $a - b \neq b - a$

Dado que si: $a = 6$ y $b = 8$

Diremos que: $6 - 8 \neq 8 - 6$

Puesto que: $6 - 8 \neq 8 - 6$, es decir que:
$-2 \neq 2$

Sustracción o resta
(combinación de ejercicios para suma y resta)

La diferencia de dos números reales se define como la suma del minuendo más el opuesto del sustraendo: $\boldsymbol{a - b = a + (-b)}$

Dados: $a,b \in R$, llamaremos diferencia entre ellos y lo representamos por $\boldsymbol{a - b}$, al número real $c \in R$, tal que $\boldsymbol{c = a - b = a + (-b)}$.

La operación definida se llama sustracción o resta y es una operación binaria.

Ejemplo 1:

Ejercicio con signos de agrupación: $-3\{ - [(1.25 + \frac{4}{3} - 2.5) + \frac{14}{5}] - \frac{1}{2} \} =$

Convertimos $\frac{4}{3}$ a decimal: $-3\{ - [(1.25 + 1.\bar{3} - 2.5) + 2.8] - 0.5\} =$

Resolvemos el contenido del paréntesis: $-3\{ - (0.08 + 2.8) - 0.5\}=$

Resolvemos el contenido del corchete: $-3 \{- 2.88 - 0.5\} =$

Resolvemos el contenido de las llaves: $-3 \{ - 3.38\} =$

Multiplicamos: $R = 10.14$

Ejemplo 2

Determine el resultado de:

$\{1\frac{1}{2} - (\frac{4}{3} + \frac{1}{6} - \frac{7}{4}) - \frac{2}{3}\} =$

Resolvemos: $1\frac{1}{2}$ y el contenido del paréntesis:

$\{\frac{3}{2} - (\frac{3}{4}) - \frac{2}{3}\} =$

Se elimina el paréntesis: $\{\frac{3}{2} - \frac{3}{4} - \frac{2}{3}\} =$

Resolvemos la operación final: $\frac{1}{12}$

Ejemplo 3

Determine el resultado de: $8 + 5\sqrt{2} - \{\sqrt{8} + 4\sqrt{3} - (\sqrt{96} - 4\sqrt{3} + \sqrt{18}) - 9\}=$

Simplificamos los radicales: $8 + 5\sqrt{2} - \{2\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - (4\sqrt{6} - 4\sqrt{3} + 3\sqrt{2}) - 9\}=$

Se suprimen los paréntesis al multiplicar los signos:

$$8 + 5\sqrt{2} - \{2\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - 4\sqrt{6} + 4\sqrt{3} - 3\sqrt{2} - 9\} =$$

Reducimos términos semejantes: $8 + 5\sqrt{2} - \{-\sqrt{2} + 8\sqrt{3} - 4\sqrt{6} - 9\} =$

Se suprimen las llaves al multiplicar los signos: $8 + 5\sqrt{2} + \sqrt{2} - 8\sqrt{3} + 4\sqrt{6} + 9 =$

Reducimos términos semejantes:

$$= 6\sqrt{2} - 8\sqrt{3} + 4\sqrt{6} + 17$$

Ejemplo 4

Determine el resultado de: [21 - (6) - (-32)] - [-12 + (-8) 2]

Suprimimos paréntesis y determinamos signos: [21 - 6 + 32] - [-12 - 16]

Suprimimos corchetes: [47] - [-28]

Quitamos signos de agrupación: 47 + 28

Respuesta: 75

Ejemplo 5

Determine el resultado de: $(4.25 + [3\sqrt{10} - 6\sqrt{11}]) - (\frac{12}{5} - [6.05 + 5\sqrt{\pi}])$

Convertimos a decimal lo que está dentro de los corchetes:

$$(4.25 + [3(3.16) - 6(3.32)]) - (2.4 - [6.05 + 5(1.77)])$$

Suprimimos paréntesis y asignamos signos:

$$(4.25 + [9.48 - 19.92]) - (2.4 - [6.05 + 8.85])$$

Operamos lo que está dentro de los corchetes:

$$(4.25 + [-10.44]) - (2.4 - [14.9])$$

Suprimimos corchetes:

$$(4.25-10.44) - (2.4-14.9)$$

Operamos lo que está dentro de los paréntesis:

$$(-6.19) - (-12.5)$$

Suprimimos paréntesis: -6.19 + 12.5 = 6.31

Multiplicación en *R*

Definición:

Dados: $a,b \in R$, llamaremos producto de ambos y lo representaremos por $\boldsymbol{a \cdot b}$ o $\boldsymbol{b \cdot a}$ a un número c tal que $\boldsymbol{c = a \cdot b}$

Propiedades de la multiplicación en *R*

a. Propiedad de clausura o cierre:

Si: $a,b \in R$, entonces $(a \cdot b) \in R$. El producto de dos números reales siempre será otro número real. Ejemplo:

$$5\,(-4) = -20.$$

b. Propiedad conmutativa:

El orden de los factores no varía el producto. Si: $a,b \in R$, entonces:

$$\boldsymbol{a \cdot b = b \cdot a}$$

Ejemplos:

- $3 \cdot 5 = 5 \cdot 3 \rightarrow 15 = 15$
- $\sqrt{2} \cdot {}^{2}\sqrt{3} = {}^{2}\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$
  $1.41(1.44) = (1.44)(1.41)$
  $2.03 = 2.03$

c. Propiedad asociativa:

El modo de agrupar los factores no varía el resultado. Si *a, b* y *c* son números reales cualesquiera, se cumple que:

Si:$a,b,c \in R$, entonces:

$$\boldsymbol{(a \cdot b) \cdot c = c \cdot (b \cdot a)}$$

Ejemplos:

- $6 \cdot (4 \cdot 7) = (6 \cdot 4) \cdot 7$
  $6 \cdot 28 = 24 \cdot 7$
  $168 = 168$

- $(e \cdot \pi) \cdot \Phi = e \cdot (\pi \cdot \Phi)$
  $(2.72 \cdot 3.14)(1.62) = 2.72(3.14 \cdot 1.62)$
  $(8.54)(1.62) = 2.72\ (5.09)$
  $13.84 = 13.84$

d. Existencia de elemento neutro:

El número 1 es el elemento neutro de la multiplicación, porque todo número multiplicado por él da el mismo número.

Existe: $1 \in R$,entonces: $a \cdot 1 = 1 \cdot a \rightarrow a = a$.

Ejemplos:

- $3 \cdot 1 = 1 \cdot 3 \rightarrow 3 = 3$
- $\pi \cdot 1 = \pi$

e. Existencia del inverso multiplicativo:

Un número es inverso del otro si al multiplicarlos obtenemos como resultado el elemento unidad.

Si: $a \neq 0$ existe $(\frac{1}{a})$ tal que: $\frac{a}{1} \cdot (\frac{1}{a}) = \frac{a}{a} = 1$

Ejemplos:

- $2 \neq 0$ existe $(\frac{1}{2})$ tal que: $\frac{2}{1} \cdot (\frac{1}{2}) = \frac{2}{2} = 1$
- $a \cdot \frac{1}{a} = 1$
- $\pi \cdot \frac{1}{\pi} = \pi$

f. Propiedad del elemento absorbente (cero):

Si: $a \in R$, entonces: $\boldsymbol{a\,(0) = (0)\,a = 0}$

Ejemplo:

$$3 \cdot 0 = 0 \cdot 3 \rightarrow 0 = 0$$

g. Propiedad del elemento absorbente (producto nulo):

Si: $a \cdot b = 0$, entonces: $\boldsymbol{a = 0, b = 0.}$

Ejemplo: $0 \cdot 0 = 0 \cdot 0 \rightarrow 0 = 0.$

h. Propiedad distributiva con respecto a la suma:

Si: $a, b, c \in R$, entonces: $\boldsymbol{a\,(b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)}$

Ejemplos:

Si: $2, 3, 4 \in R$,entonces:

$$2\,(3 + 4) = (2 \cdot 3) + (2 \cdot 4) \rightarrow$$
$$2(7) = 6 + 8 \rightarrow$$
$$14 = 14$$

i. Propiedad del factor común:

Es el proceso inverso a la propiedad distributiva. Si varios sumandos tienen un factor común, podemos transformar la suma en producto extrayendo dicho factor.

Ejemplos:

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$$
$$\pi \cdot e + \pi \cdot \Phi = \pi \cdot (e + \Phi)$$

Ejemplos misceláneos de multiplicación en *R*

Ejemplo 1

Determine el resultado de:

$$3(9 - 2) + 2(5 - 1)(4 + 3) + 3(6 - 4)(8 - 7)$$

Resolvemos las operaciones indicadas dentro de los paréntesis:

$$3(7) + 2(4)(7) + 3(2)(1)$$

Resolvemos los productos:

$$21 + 56 + 6$$

Resolvemos las sumas: R/ = 83

Ejemplo 2

Determine el resultado de:

$$\{15 + (9 \cdot 3 - 5)\, 2\}\, \{(6 \cdot 4 \cdot 5)\, 3 + (5 - 4 \cdot 8)\, (3 \cdot 4 - 3)\}$$

Realizamos las operaciones indicadas en los paréntesis:

$$\{15 + (22)\, 2\}\, \{(120)\, 3 + (-27)\, (9)\}$$

Resolvemos los productos indicados:

$$\{15 + 44\}\ \{360-243\}$$

Efectuamos las operaciones dentro de las llaves:

$$\{59\}\{117\}$$

Resolvemos el producto:

R/ = 6,903

Ejemplo 3

Determine el resultado de:

$$[(4.25 + 2.56)\ 3 + 6.5\ (9.62 - 14.1)\ 5]\ [(20.8 + 10.6)\ 5.3 - (5.4 - 1.8)\ 2]$$

Desarrollamos las operaciones que están dentro de los paréntesis:

$$[(6.81)3 + 6.5\ (-4.48)\ 5]\ [(31.4)\ 5.3 - (3.6)\ 2]$$

Desarrollamos los productos indicados:

$$[20.43 - 145.6]\ [166.42 - 7.2]$$

Desarrollamos operaciones indicadas dentro de los corchetes:

$$[-125.17]\ [159.22]$$

Realizamos el producto:

$$R/ = -19{,}929.57$$

Ejemplo 4

Determine el resultado de:

$$\sqrt{2}\ \{2\sqrt{3}\ (5\sqrt{2} + \sqrt{50} + \sqrt{18})\} =$$

Resolvemos el contenido del paréntesis simplificando:

$$\sqrt{2}\ \{2\sqrt{3}\ (13\sqrt{2})\} =$$

Efectuamos el producto:

$$\sqrt{2}\ \{26\sqrt{6}\ \} =$$

Efectuamos la operación indicada:

$$26\sqrt{12} =$$

Simplificamos:

$$26(2\sqrt{3})$$

$$R/= 52\ \sqrt{3}$$

La división en *R*

La división es una operación, a dos números, que asocia el producto del primero por el inverso del segundo. De este modo, el cociente "*a*" dividido "*b*" se interpreta como el producto de:

$$a\left(\frac{1}{b}\right)$$

Si la división no es exacta, es decir, el divisor no está contenido en un número exacto de veces en el dividendo, la operación tendrá un resto o residuo, donde:

dividendo = ***cociente*** x ***divisor*** + ***resto***

La división es una operación inversa a la multiplicación.

Veamos estas cláusulas de importancia:

- Si: $\boldsymbol{m \neq 0}$, entonces: $\frac{0}{m} = 0$

  Ejemplo: $5 \neq 0$, entonces: $\frac{0}{5} = 0$
- Si: $\boldsymbol{m \neq 0}$,entonces: $\frac{m}{0}$ = (NED), no está definido

  Ejemplo: $6 \neq 0$, entonces: $\frac{6}{0}$ = (NED), no está definido
- La expresión: $\frac{0}{0}$, se dice que no está definida
- Si: $a, b \in R$, entonces: $\frac{a}{b} \neq \frac{b}{a}$

  Ejemplo: $\frac{2}{3} \neq \frac{3}{2}$

Ejemplo 1

Determine el resultado de:

$$(4\sqrt{6} + 10\sqrt{3}) \div 5\sqrt{3} = (4\sqrt{6} + 10\sqrt{3}) \quad 5\sqrt{3}$$

Aplicamos racionalización del denominador:

$$\frac{(4\sqrt{6} + 10\sqrt{(3)}}{5\sqrt{3}} \frac{(5\sqrt{3})}{(5\sqrt{3})} = \frac{(4\sqrt{6} + 10\sqrt{3})}{5\sqrt{3}} \frac{(\sqrt{3})}{(\sqrt{3})} = \frac{(4\sqrt{18} + 10\sqrt{9})}{5\sqrt{9}}$$

Resolvemos operaciones indicadas y simplificamos:

$$\frac{(4 \cdot 3\sqrt{2} + 10(3)}{15} \qquad R/= \frac{(12\sqrt{2} + 30)}{15} = \frac{(4\sqrt{2})}{5} + 2$$

Ejemplo 2

Determine el resultado de:

$$-\frac{5}{7} \div (-\frac{4}{3})(-\frac{2}{6}) \div (\frac{8}{6})(-\frac{7}{5})(\frac{5}{7}) + 1$$

Resolvemos las operaciones indicadas:

$$-\frac{5}{7} \div \frac{4}{9} \div -\frac{4}{3} + 1$$

Resolvemos los cocientes indicados:

$$\frac{135}{112} + 1$$

Resolvemos el cociente y la suma:

$$R/= \frac{247}{112} = 2.21$$

Ejemplo 3

Determine el resultado de:

$$[\frac{3}{4} + \frac{5}{2}\ (2 - 1) + 5(\frac{6}{5} + 2)] + 22 =$$

Eliminamos paréntesis indicando producto:

$$[\frac{3}{4} + \frac{5}{2} + 16] + 22 =$$

Eliminamos corchetes:

$$\frac{77}{4} + 22 =$$

Resolvemos lo indicado:

$$R/= \frac{165}{4} \text{ o } 41\tfrac{1}{4}$$

Ejemplo 4

Determine el resultado de:

$$3\sqrt{2}\ (3\sqrt{2} + 5\sqrt{3}) \div 3\sqrt{5}$$

Resolvemos los productos y racionalizamos:

$$\frac{9\sqrt{4} + 15\sqrt{6}}{3\sqrt{(5)}} = \frac{9(2) + 15\sqrt{6}}{3\sqrt{(5)}} = \frac{(18 + 15\sqrt{6})(3\sqrt{5})}{(3\sqrt{5})\quad(3\sqrt{5})} =$$

Operamos los productos de numeradores como denominadores:

$$\frac{54\sqrt{5} + 45\sqrt{30}}{9\sqrt{(25)}} = \frac{54\sqrt{5} + 45\sqrt{30}}{9(5)} = \frac{54\sqrt{5} + 45\sqrt{30}}{45} =$$

Simplificamos:

$$R/ = \frac{(6\sqrt{5})}{5} + \sqrt{(30)}$$

Ejemplo 5

Determine el resultado de:

$$\frac{\frac{4}{6} - \frac{10}{6} - \frac{18}{4}}{(-\frac{8}{3})(\frac{1}{2})(-\frac{5}{4})} \div (\frac{1}{4} + \frac{3}{6} - \frac{4}{9})-0.25$$

Resolvemos las restas de la parte superior izquierda:

$$\frac{-\frac{11}{2}}{(-\frac{8}{3})(\frac{1}{2})(-\frac{5}{4})} \div (\frac{1}{4} + \frac{3}{6} - \frac{4}{9})-0.25$$

Resolvemos los productos de la parte inferior izquierda:

$$\frac{-\frac{11}{2}}{\frac{5}{3}} \div (\frac{1}{4} + \frac{3}{6} - \frac{4}{9}) - 0.25$$

Resolvemos las sumas y restas que están entre paréntesis:

$$\frac{-\frac{11}{2}}{\frac{5}{3}} \div (\frac{11}{36}) - 0.25$$

Resolvemos el primer cociente:

$$-\frac{33}{10} \div (\frac{11}{36}) - 0.25$$

Resolvemos el cociente:

$$-\frac{54}{5} - 0.25$$

Resolvemos la resta:

$$-10.8 - 0.25 \rightarrow R = -11.05$$