¿En C también aplicamos ley de signos? (Escriba sí o no)

___

___

___

¿Cuál es la forma canónica usada para complejos?

___

___

___

Resuelva: $\dfrac{6 - 3i}{-2 + 3i}$

Nota: Puede confrontar sus respuestas en la guía de didáctica una vez que haya terminado de realizar todos los ejercicios.

Definición de número complejo

El término número complejo describe la suma de un número real y un número imaginario (que es un múltiplo real de la unidad imaginaria, que se indica con la letra *i*).

Los números complejos se utilizan en todos los campos de las matemáticas, tales como campos de la Física, es de mucha utilidad en la mecánica cuántica, en la ingeniería, electrónica y en las telecomunicaciones por su utilidad para representar las ondas electromagnéticas y la corriente eléctrica.

Al número $a + bi$ le llamamos número complejo en forma binómica.

El número a se llama parte real del número complejo.

El número bi se llama parte imaginaria del número complejo.

Si $b = 0$ el número complejo se reduce a un número real ya que: $a + 0i = a$.

Si $a = 0$ el número complejo se reduce a: bi, y se dice que es un número imaginario puro.

El conjunto de todos números complejos se designa por $\underline{C}$. Aunque muchos matemáticos introducen para representar los números complejos la letra "Z", nosotros usaremos la letra C, para evitar confusiones. Entonces, tenemos:

$$C = \{a + bi \,/\, a,b \in R\}$$

- Los números complejos: $(a + bi)$ y $(-a - bi)$ se llaman opuestos.
- Los números complejos $C = (a + bi)$ y $C = (a - bi)$ se llaman conjugados.
- Dos números complejos son iguales cuando tienen el mismo componente real y el mismo componente imaginario.

Historia de los números complejos

El descubrimiento del número llamado i, representa la raíz cuadrada de -1. El producto de cualquier número real por i, da como resultado unos números llamados imaginarios que, como veremos, no son menos reales que los llamados números reales.

La suma de un número real y otro imaginario se llama número complejo. Realmente el conocimiento de los números complejos se encuentra en la obra de Girolamo Cardano, un italiano que vivió a principios del siglo XVI, era médico, jugador y confeccionador de horóscopos, escribió un influyente tratado de álgebra llamado Ars Magna (publicado en 1545).

En el estudio de las soluciones de una ecuación cúbica, basado en parte en la obra previa de Scipione del Ferro y de Tartaglia, se percató Cardano, que en cierto paso se veía obligado a tomar la raíz cuadrada de un número negativo.

Aunque esto era un enigma para él, se dio cuenta que si se permitía tomar esa raíz cuadrada, solo entonces podría expresar la respuesta completa, que finalmente siempre era real.

Más tarde, en 1572, Raphael Bombelli , en una obra titulada: L Algebra, extendió el trabajo de Cardano y comenzó el estudio del actual álgebra de los números complejos e introdujo el número complejo, como en los siguientes ejemplos:

$\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$.

Los matemáticos mencionados anteriormente se ocuparon de resolver cierto tipo de ecuaciones, que incluían el número imaginario, pero fue Descartes el primero que utilizó este número y de forma despectiva los llamó imaginarios.

Este tipo de número ha permanecido y ha sido aceptado por todos los matemáticos. Pero, recuerde siempre que todo número complejo es de la forma $a \pm bi$, donde $\underline{a}$ es un número real y $\underline{bi}$ es un número imaginario.

La representación de los números imaginarios también conocidos como complejos se representan por la letra C .

Actualmente el nombre de número imaginario está cayendo en desuso y desapareciendo, ya que están siendo utilizados con gran actividad en ciencias de la actualidad, por lo que se les debe considerar números de gran envergadura, en las ciencias reales, y no simplemente llamarlos imaginarios.

1. Operaciones con números complejos (C)

   Basados siempre en que los números son de la forma; $a \pm bi$, donde:
   $a \in R$ y bi imaginario.

Adición en C

Si deseamos sumar los números complejos, sumamos los números enteros primero y después los números imaginarios.

Dicho de otra forma, la suma y diferencia de números complejos se realiza sumando y restando partes reales entre sí y partes imaginarias entre sí. Al sumar números complejos podemos usar las propiedades de la suma, como la siguiente:

- $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$
- $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

Ejemplo:

$(5 + 2i) + (-8 + 3i) - (4 - 2i) = (5 - 8 - 4) + (2 + 3 + 2)i = -7 + 7i$

Podemos sumar y restar en C igualmente que en los reales, de forma vertical u horizontal. Ejemplos:

- Sumar: $(5 + 4i) + (7 - 2i)$

$$\begin{array}{r} 5 + 4i \\ \underline{7 - 2i} \\ R/ = 12 + 2i \end{array}$$

- Sumar $(5 - 3i) + (-8i) + (4)$

$$\begin{array}{r} 5 - 3i \\ 0 - 8i \\ \underline{4 + 0i} \\ R/ = 9 - 11i \end{array}$$

- Sumar: $(3 + 2i) + (-7 - 2i) + (8 + i) + (7i)$

$$\begin{array}{r} 3 + 2i \\ -7 - 2i \\ 8 + i \\ \underline{0 + 7i} \\ 4 + 8i \end{array} \rightarrow \text{Aprecie la forma binómica de : } a + bi$$

Diferencia en C

Para restar en los complejos se usa la misma técnica de la suma, ya que debemos de tener en cuenta la ley de los signos siempre. Veamos algunos ejemplos:

Restar : $(7 - 2i) - (8 - 3i) = 7 - 2i - 8 + 3i$
$= -1 + i$

Reste : $-(7 + 2i) - (-4 + 8i) - i = -7 - 2i + 4 - 8i - i$
$= -3 - 11i$

Producto en C

El producto de los números complejos se realiza aplicando la propiedad distributiva del producto respecto de la suma y teniendo en cuenta que:
$i^2 = -1$.

$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Ejemplo:

$(5 + 2i) \cdot (2 - 3i) = 10 - 15i + 4i - 6i^2$
$= 10 - 11i + 6$
$= 16 - 11i$

- Multiplique : $(5 + 8i)(4 - 2i) = 20 - 10i + 32i - 16i^2$
$= 20 - 10i + 32i - 16(-1)$
$= 20 - 10i + 32i + 16$
$= 36 - 22i$

- Multiplique : $(-5 - 2i)(4 + 7i) = (-5 - 2i)(4 + 7i)$
$= -20 - 3i - 8i - 14i^2$
$= -20 - 11i - 14(-1)$
$= -20 - 11i + 14$
$= -6 - 11i$

- Multiplique: $(2 + 3i^2)(-9 - 8i) = \left[2 + 3(-1)\right](-9 - 8i) \rightarrow (2 - 3)(-9 - 8i)$

$$= (-1)(-9 - 8i)$$
$$= 9 + 8i$$

- Multiplique: $\left(\sqrt{-50} + \sqrt{-32}\right)\left(-\sqrt{-8}\right) =$

Recuerde que: $\sqrt{-50} = 5\sqrt{2}i$, $\sqrt{-32} = 4\sqrt{2}i$ y $-\sqrt{-8} = -2\sqrt{2}i$

Por lo que la expresión se transforma en: $(5\sqrt{2}i + 4\sqrt{2}i)(-2\sqrt{2}i)$

$$= -10(\sqrt{2})^2\ i^2 - 8(\sqrt{2})^2\ i^2$$
$$= -10(2)(-1) - 8(2)(-1)$$
$$= 20 + 16 = 36$$

Cociente en C

El cociente de números complejos se hace racionalizando el denominador, esto es, multiplicando numerador y denominador por el conjugado de este (denominador). Observemos su notación constructiva:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)}{(c + di)} \cdot \frac{(c - di)}{(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

$$= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\, i$$

$$\frac{3 + 2i}{1 - 2i} = \frac{(3 + 2i)}{(1 - 2i)} = \frac{(1 + 2i)}{(1 + 2i)} = \frac{3 + 6i + 2i + 4i^2}{1 - (2i)^2}$$

$$= \frac{(3 + 8i - 4)}{1 + 4} = \frac{1}{5} + \frac{8}{5}\, i$$

- Divida: $\frac{(2+i)}{3i}$, su equivalente es, aplicando la forma binómica:

  $\frac{(2+i)}{(0+3i)}$, convertimos esta división en producto, así: $\left(\frac{(2+i)}{(0+3i)}\right)\left(\frac{(0-3i)}{(0-3i)}\right)$,

  al multiplicar binomio por binomio, nos queda así:

  $\frac{-6i-3(-1)}{-9(-1)} = \frac{-6i+3}{9}$, su resultado final: $\frac{1}{3} - \frac{2}{3}i$

- Divida: $\frac{2+3i}{2i} \rightarrow \left(\frac{2+3i}{0+2i}\right)\left(\frac{0-2i}{0-2i}\right) \rightarrow \frac{-4i+6}{-4i^2}$

  $\rightarrow \frac{-4i+6}{-4(-1)} \rightarrow \frac{-4i+6}{4} \rightarrow$ R/= $\frac{3}{2} - i$

- Divida: $\frac{2-3i}{3+2i} \rightarrow \left(\frac{2-3i}{3+2i}\right)\left(\frac{3-2i}{3-2i}\right) = \frac{6-4i-9i+6i^2}{3^2-(2i)^2}$

  $= \frac{6-13i-6}{9-4i^2} = \frac{-13i}{9+4} = \frac{-13i}{13}$ R /= $-i$

Operaciones combinadas en C

Dados los siguientes complejos:

$C_1 = -3 + 4i$

$C_2 = 5 - 2i$

$C_3 = \frac{3}{2}$

$C_4 = 7i$

Calcular:

- $\frac{C_1}{2C_3 + C_4} = \frac{-3+4i}{2(\frac{3}{2})+7i} = \frac{-3+4i}{\frac{6}{2}+7i} = \frac{-3+4i}{\frac{6}{2}+7i}$

$= \dfrac{-3+4i}{3+7i} \rightarrow$ R/ $= \dfrac{19}{58} + \dfrac{33}{58}i$

En este ejercicio recuerde la racionalización.

- $\dfrac{C^2}{C^1} = \dfrac{5-2i}{-3+4i} = \dfrac{5-2i}{-3+4i} \cdot \dfrac{-3-4i}{-3-4i} = -\dfrac{23}{25} - \dfrac{14}{25}i$

  En este ejercicio recuerde la racionalización.

- $C_1^2\, C_3 = (-3+4i)^2 \left(\dfrac{3}{2}\right) = (-7-24i)\left(\dfrac{3}{2}\right) \rightarrow$ R/ $= -\dfrac{21}{2} - 36i$

  En este ejercicio recuerde la potenciación.

- $(\overline{C_1 + C_2})^{-1} = (\overline{-3+4i+5-2i})^{-1} = (\overline{2-2i})^{-1} = (2-2i)^{-1}$

  $= \dfrac{1}{2-2i} \rightarrow$ R/ $= \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}i$

  En este ejercicio recuerde la racionalización y el conjugado de una expresión. La barra significa conjugado, ya sabemos que es un conjugado.

- $(\overline{\overline{C_1\, C_2}}) = (-3+4i)(5-2i) = -15 + 6i + 20i - 8i^2 = -7 + 26i$

  En este ejercicio debe de recordar que "el conjugado del conjugado de un número es el propio número". Las dos barras dobles superpuestas significan: el conjugado del conjugado de un número.

- $C_2^{-1} = \dfrac{1}{C_2} = \dfrac{1}{5-2i} = \dfrac{1}{5-2i} \cdot \dfrac{5+2i}{5+2i} = \dfrac{1(5+2i)}{(5+2i)(5+2i)}$

  $= \dfrac{(5+2i)}{(5+2i)(5+2i)} = \dfrac{(5+2i)}{21+20i} =$ R/ $= \dfrac{5}{29} + \dfrac{2}{29}i$

  En este ejercicio debe de recordar siempre la racionalización.

- $C_1 + C_3^{-1} = (-3+4i) + \left(\dfrac{1}{\frac{3}{2}}\right) = (-3+4i) + \dfrac{2}{3} = -\dfrac{7}{3} + 4i$

- $\overline{C_1 + C_4 - 5C_2} = -\overline{3 + 4i + 7i - 5(5 - 2i)} = -\overline{28 + 21i}$

  $\rightarrow$ R/ = $- 28 - 21i$

En este ejercicio haga uso del conjugado.

- $C_1 C_4 + C_3 C_4 = (- 3 + 4i)(7i) + \left(\frac{3}{2}\right)(7i) = -28 - 21i + \frac{21}{2}$

  $=$ R/= $- 28 - \frac{21}{2} i$

- $(C_1 - C_2)\, C_3 = \left[(- 3 + 4i) - (5 - 2i)\right] \frac{3}{2} = (- 8 + 6i) \frac{3}{2}$

  $\rightarrow$ R/= $- 12 + 9i$

Actividad 1

Resuelva los ejercicios que a continuación se le presentan.

a. $(4 - 3i)(2i) + \left(\frac{5}{3}\right)(3i) =$

b. $(-5 - 3i)^2 \left(\frac{1}{2}\right) =$