

# FITTING A QUANTITATIVE MODEL ONTO A MARKET SMILE

August 16, 2018

by **Rodrigo Durán**

## Contents

<b>Abstract</b>	<b>1</b>
<b>Part I: The Data</b>	<b>2</b>
<b>Step 1: Elección software</b>	<b>2</b>
<b>Step 2: Revisión data</b>	<b>2</b>
<b>Step 3: Cuadratura de datos</b>	<b>6</b>
Forward . . . . .	6
Strike . . . . .	6
Option Value . . . . .	7
<b>Part II: The Pricing Engine</b>	<b>8</b>
El Modelo . . . . .	8
<b>Step 4: Métodos de valorización</b>	<b>9</b>
Monte Carlo . . . . .	9
Diferencias Finitas mediante modelo Crank-Nicolson . . . . .	9
Benchmarking . . . . .	11
Elección del Motor de calculo . . . . .	11
<b>Step 5: Valorización de contratos lineales</b>	<b>12</b>
Depósitos a plazo . . . . .	12
Forward . . . . .	13
<b>Step 6: Valorización de contratos vanillas</b>	<b>14</b>
Análisis de sensibilidad . . . . .	15
<b>Part III: The Model Calibration</b>	<b>16</b>
<b>Step 7: Estimación de parámetros</b>	<b>16</b>
<b>Step 8: Función Objetivo</b>	<b>17</b>
<b>Step 9: Primera Smile</b>	<b>18</b>
Análisis Cross-Sectional . . . . .	20
<b>Step 10: Calibración Historica de la Data</b>	<b>22</b>
Calibración diaria . . . . .	22
Primera calibración parámetros constantes . . . . .	25

Segunda calibración parámetros constantes . . . . .	26
<b>Step 11: Conclusiones</b>	<b>28</b>
<b>References</b>	<b>29</b>

## List of Figures

1	Spot en función del tiempo. . . . .	2
2	Volatilidad en función del tiempo. . . . .	3
3	Volatilidad en función del tiempo. . . . .	4
4	Sensibilidad Omega ( $\omega$ ) con $\eta=0.32$ . . . . .	15
5	Sensibilidad Eta ( $\eta$ ) con $\omega=0.32$ . . . . .	15
6	Distribución de Volatilidades a 1M, 2M, 3M, 6M y 1Y. . . . .	16
7	Smile para volatilidades a 1M, 2M, 3M, 6M y 1Y. . . . .	18
8	Comparación Smile de Mercado vs Modelo. . . . .	19
9	Comportamiento parámetro $\omega$ . . . . .	20
10	Comportamiento parámetro $\eta$ . . . . .	20
11	Comportamiento Error. . . . .	21
12	Comportamiento Omega ( $\omega$ ). . . . .	22
13	Comportamiento Eta ( $\eta$ ). . . . .	22
14	Error Volatilidad entre Mercado y Modelo. . . . .	23
15	Análisis entre parámetros Omega ( $\omega$ ), Eta ( $\eta$ ) y Error. . . . .	24
16	Error con parámetros $\eta$ y $\omega$ constantes. . . . .	25
17	Error con nuevos parámetros $\eta$ y $\omega$ constantes entre Octubre 2013 y Marzo 2018. . . . .	26
18	Smiles Mercado v/s Modelo v/s Benchmark parámetros ideales para el 16 de Marzo 2018. . . . .	27

## List of Tables

1	Volatilidad a 3 meses. . . . .	5
2	Volatilidad a 6 meses. . . . .	5
3	Volatilidad a 1 año. . . . .	5
4	Spots. . . . .	5
5	Comparación resultados Monte Carlo v/s Crank-Nicolson. . . . .	11
6	Depósito a plazo v/s Crank-Nicolson. . . . .	12
7	Opción Forward Black-Scholes v/s Crank-Nicolson. . . . .	13
8	Resultados Monte Carlo v/s Crank-Nicolson con Black-Scholes. . . . .	14
9	Coeficientes regresión lineal. . . . .	16
10	Parámetros Smiles primer día. . . . .	19
11	Eficiencia Tiempo Computacional. . . . .	20
12	Resultados parámetros. . . . .	23
13	Datos Error Octubre 2013 - Marzo 2018. . . . .	25
14	Datos parámetros calibración sesgada. . . . .	26
15	Datos Error Octubre 2013 - Marzo 2018. . . . .	26
16	Parámetros Smiles último día. . . . .	27

## Abstract

El estudio se realiza a partir de datos para un ajuste cuantitativo de la smile de mercado dólar - peso chileno durante los años 2008 al 2018, mediante un modelo de volatilidad local llamado *Displaced Diffusion*. Se verifica la consistencia de los datos, mediante la cuadratura del valor de forward, strike y valor de opción, luego se analiza la precisión y eficiencia de dos motores de calculo. Para finalmente realizar una calibración diaria la que nos entrega un error promedio de 0.95% y una calibración con parámetros constantes considerando solo un periodo de estabilidad, la que nos entrega un error del 1.05%.

## Part I: The Data

### Step 1: Elección software

El objetivo de este proyecto es realizar un modelo de ajuste cuantitativo sobre la smile de mercado, la cual calibrará el modelo dado a USD-CLP. Para esto se utilizará el software *Matlab* dada la simplicidad de su lenguaje. También es importante mencionar que para este informe se utilizó un MacBook Air 2017 con sistema operativo macOS High Sierra, procesador 1.8GHz Intel Core i5, memoria RAM 8 GB 1600 MHz DDR3 y tarjeta gráfica Intel HD Graphics 6000 1536 MB.

### Step 2: Revisión data

Primero se exporta la base de datos *Data Fitting a quantitative model onto a market smile USD-CLP.xls* a archivo *.csv*, luego se cargan en *Matlab* y se realizan los siguientes plot's con el fin de estudiar la distribución y comportamiento de los datos.

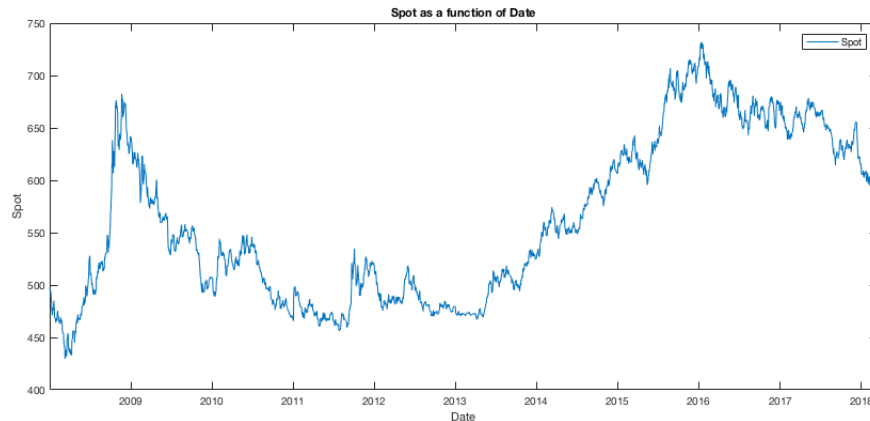


Figure 1: Spot en función del tiempo.

En la figura 1 podemos observar dos grandes peaks en el valor del dolar observado o precio spot. El primer peak se dio durante el 2008, el cual esta explicado por la crisis subprime en EEUU, donde la mal gestión de los créditos hipotecarios entregados a los ciudadanos americanos generó una burbuja crediticia, la cual finalmente exploto causando la quiebra del banco Lehman Brothers. El segundo peak se dio por el colapso del precio del petróleo durante 2015 y 2016, donde el precio del crudo cayo fuertemente debido a los desordenes y conflictos en medio oriente, impulsando al economía norteamericana.

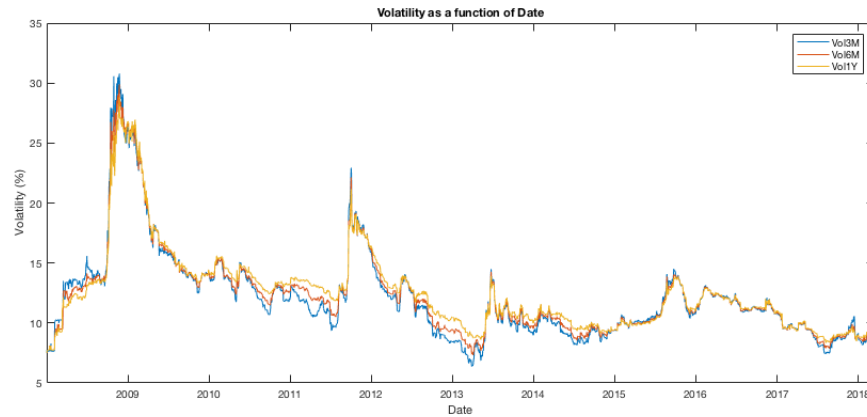


Figure 2: Volatilidad en función del tiempo.

En la figura 2, también se puede observar el efecto de la crisis subprime en 2008 en EEUU, luego la volatilidad vuelve a dispararse a mediados del 2011 con la crisis Europea, el peak se dio cuando Grecia anuncia su nuevo nivel de deuda, lo que impacta fuertemente al mercado global, para en los siguientes años mantener su volatilidad en un margen aceptable y constante.

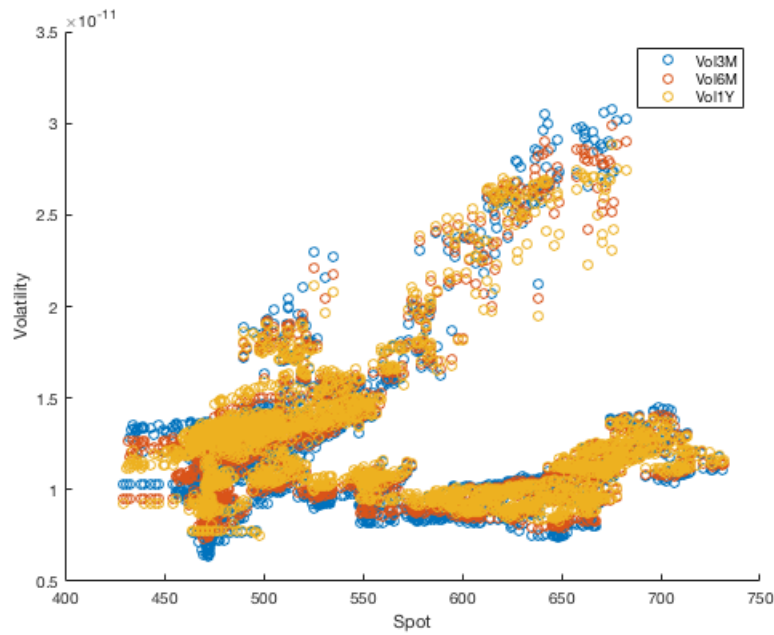


Figure 3: Volatilidad en función del tiempo.

En la figura 3, se observa la volatilidad ATM en función del Spot de las opciones de tipo de cambio a 3, 6 y 12 meses. Se puede deducir que la volatilidad se mantiene constante frente al Spot en un intervalo de  $[0.5, 1.5]$ , con excepciones, en donde si existe un aumento en la volatilidad respecto del Spot.



Finalmente se obtienen los valores de media, desviación estándar, máximo y mínimo para la volatilidad a 3, 6 meses y 1 año y Spot:

Indicadores	Valores
Media	0.1211
Desv. Estándar	0.0388
Máximo	0.0388
Mínimo	0.0639

Table 1: Volatilidad a 3 meses.

Indicadores	Valores
Media	0.1227
Desv. Estándar	0.0371
Máximo	0.2989
Mínimo	0.0731

Table 2: Volatilidad a 6 meses.

Indicadores	Valores
Media	0.124
Desv. Estándar	0.0355
Máximo	0.2884
Mínimo	0.0750

Table 3: Volatilidad a 1 año.

Indicadores	Valores
Media	561.6932
Desv. Estándar	77.2707
Máximo	731.46
Mínimo	429.55

Table 4: Spots.

### Step 3: Cuadratura de datos

Antes de comenzar a trabajar con una base de datos, es recomendable revisar la consistencia de los datos. A continuación se estudiará el comportamiento de los datos teóricos de Forward, Strike y Option Value, para ser contrastados frente a sus datos empíricos.

#### Forward

Para este caso se utilizaron las siguientes formulas:

$$F = S_0 \cdot e^{(r-q)T}$$

Dado que los datos entregan los factores de descuento domestic (r) y foreing (q), se utilizará la relación equivalente:

$$\begin{aligned} e^{-qT} &= \text{ForeignDiscountFactor} \\ e^{-rT} &= \text{DomesticDiscountFactor} \end{aligned}$$

Y, por lo tanto:

$$F = S_0 \cdot \frac{\text{DomesticDiscountFactor}}{\text{ForeignDiscountFactor}}$$

Se evalua ECM (error cuadrático medio) para ver la consistencia de los datos obteniéndose: **6.4751·e-26**

Se observa que el ECM es muy cercano a 0, por lo que los datos son consistentes.

#### Strike

Del mismo modo, se revisa la consistencia de los Strikes, obteniendo su valor teórico, para ser contrastado con el empírico. Se define  $\epsilon=1$ , por lo que se trabajará como una Call Option, luego el tenor (T) se define como los días trabajados en un año. Para este estudio se utilizaron las siguientes formulas:

$$d_1 = \epsilon \cdot N^{-1}\left(\frac{\epsilon \cdot \Delta}{\alpha}\right)$$

$$K = S_0 \cdot e^{(r-q) \cdot T} \cdot e^{\frac{\sigma^2 \cdot T}{2} - d_1 \cdot \sigma \sqrt{T}}$$

El valor ECM obtenido es: **0**, el cual es un resultado consistente por lo que fue calculado correctamente.

## Option Value

Finalmente, verificaremos el valor para Option Value, utilizando la ecuación de Black-Scholes para evaluar la consistencia de los datos. Para este estudio se utilizaron las siguientes formulas:

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - q)T}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$$V_0 = S_0 \cdot e^{-qT} \cdot N(d_1) - K \cdot e^{-rT} \cdot N(d_2)$$

Se contrasta el valor  $V_0$  de la opción teorica con el dado empiricamente. En este caso el valor obtenido mediante ECM es: **1.7522·e+03**, lo que representa que se cometió un error en el procedimiento para evaluar la consistencia de los datos, dado su alto valor.

Sin embargo, podemos concluir que la estimación para **Forward** y **Strike** si nos entrega un error cercano a 0, lo cual implica que los datos son consistentes como para continuar con la aplicación del modelo.

## Part II: The Pricing Engine

### El Modelo

El presente informe, tiene como base el modelo de volatilidad local *Displaced Diffusion*<sup>[1]</sup>, presentado por Mark Rubinstein en 1938 para la valorización sencilla de opciones vanilla y opciones exóticas. La volatilidad que se estudia en dicho modelo esta dada por la siguiente formula:

$$\sigma_{DD}(S, t) = \eta \left[ \omega + (1 - \omega) \frac{\bar{S}}{S} \right]$$

la cual se ajusta al proceso de difusión de un movimiento browniano con drift, por ende el proceso de volatilidad local se presenta de la siguiente forma:

$$dS = (r - q) \cdot S \cdot dt + \eta \left[ \omega + (1 - \omega) \frac{\bar{S}}{S} \right] \cdot S \cdot dW$$

donde S representa precio Spot, r tasa de descuento nacional, q tasa de descuento extranjera, dt diferencial de tiempo,  $\eta$  representa la volatilidad implícita,  $\omega$  la porción que de riqueza que se invertirá en activo con riesgo,  $(1 - \omega)$  la porción de riqueza que se invertirá en el activo libre de riesgo,  $\bar{S}$  el promedio de los spot y dW un proceso estocástico con distribución Gaussiana.

## Step 4: Métodos de valorización

Para la valorización de contratos vanilla, se utilizarán dos motores de cálculo, en primer lugar mediante simulaciones de Monte Carlo y en segundo lugar mediante Diferencias Finitas por método de Crank Nicolson. Con el objetivo de comparar la precisión en el valor de las opciones y elegir el motor mas eficiente para continuar con el estudio.

### Monte Carlo

El método de Monte Carlo es un método no determinista o estocástico. En este informe el modelo realiza N número de simulaciones a partir de un precio spot  $S_0$ , bajo una probabilidad de riesgo neutral de medida Q, obteniendo:

$$S_{t+\Delta t} = S_t \cdot e^{(r-q-\sigma^2/2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}z}$$

Donde r es la tasa de descuento nacional, q tasa de descuento extranjera y z corresponde a un proceso estocástico de Wiener. Luego este valor es valorizado como una opción y llevado a valor presente.

### Diferencias Finitas mediante modelo Crank-Nicolson

El método de diferencias finitas discretiza el espacio fijando un precio minimo y un precio maximo, los cuales estan dados por:

$$\begin{aligned} S_{max} &= S \cdot e^{[(r-q)-\sigma^2/2] \cdot T + 3\sigma\sqrt{T}} \\ S_{min} &= S \cdot e^{[(r-q)-\sigma^2/2] \cdot T - 3\sigma\sqrt{T}} \end{aligned}$$

donde  $z=3$ , el cual corresponde a la cantidad d desviaciones estándar que tendrá el modelo, donde el nivel de confianza dado deja fuera a escenarios muy poco probables.

Luego se crea un vector de valores de Spots, entre  $S_{min}$  y  $S_{max}$  de 100 valores distribuidos a la misma distancia uno de otro, el cual llamaremos S. Luego procederemos a crear la matriz de discretización  $\mathcal{A}$ , donde se buscara discretizar el operador espacial con los puntos del vector S, desde la segunda posición a la penultima, con el fin de transformar la PDE a un *sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias*.

La matriz  $\mathcal{A}$  esta compuesta por las siguientes formulas:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\vec{V}_j &= V_{j-1} \left( \frac{-d_j + g_j}{2} \right) + V_j(-g_j - r) + V_{j+1} \left( \frac{d_j + g_j}{2} \right) \\ \mathcal{A}_{j,j} &= -g_j - r \\ \mathcal{A}_{j,j-1} &= \frac{-d_j + g_j}{2} \\ \mathcal{A}_{j,j+1} &= \frac{d_j + g_j}{2}\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}d_j &= \frac{(r - q)S_j}{\Delta S} \\ g_j &= \frac{\sigma^2 S_j^2}{(\Delta S)^2} \\ S_j &= \text{Vector de precios Spot}\end{aligned}$$

Definiéndose el limite inferior y superior de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(1, 1) &= -d(1) - r \\ \mathcal{A}(1, 2) &= d(1) \\ \mathcal{A}(100, 99) &= -d(100) \\ \mathcal{A}(100, 100) &= d(100) - r\end{aligned}$$

Finalmente, discretizaremos el tiempo con  $\Delta\tau$  y se utilizara el esquema de Crank-Nicolson para la convergencia del valor, en caso de no ser exacto, este se interpolará para obtener el precio de la opción.

$$\vec{V}_{i+1} = [I - \mathcal{A}\Delta\tau/2]^{-1} [I + \mathcal{A}\Delta\tau/2] \vec{V}_i$$

## Benchmarking

Para verificar que los motores de calculo están funcionando correctamente, realizaremos una comparación entre los resultados de los dos métodos, bajo un set de parámetros para una Call Europea. Los parámetros son  $\text{spot}=600$ ,  $\text{tenor}=1$ ,  $\text{rateclp}=0.05$ ,  $\text{rateusd}=0.01$ ,  $\text{vol}=0.25$ . La simulación de Monte Carlo esta evaluada bajo  $N=100000$  y  $\Delta t = \frac{1}{12}$ , mientras que Diferencias Finitas esta evaluada bajo  $N=100$ ,  $\Delta \tau = \frac{1}{2}$  y  $z=3$ .

Strike	Black-Scholes	Monte Carlo	Crank-Nicolson
400	215.3033	$215.6501 \pm 0.4679$	215.1283
500	131.9602	$132.2160 \pm 0.4253$	132.2933
600	70.3156	$70.5065 \pm 0.3423$	65.2237
700	33.12	$33.2406 \pm 0.2464$	34.0130
Tiempo promedio [seg]	0.015659	0.103958	0.012572

Table 5: Comparación resultados Monte Carlo v/s Crank-Nicolson.

## Elección del Motor de calculo

De la tabla 5, se concluye que los motores de calculo trabajan bajo intervalos de confianza similares, donde el modelo de Crank-Nicolson supera al de Monte Carlo tanto la precisión de sus resultados como en el tiempo de calculo, este ultimo item es vital importancia para la calibración de nuestro modelo, ya que el tiempo es eficiencia y como quant's se busca obtener resultados precisos de manera eficiente. Por lo que el motor de calculo a elegir será el de Diferencias Finitas por esquema de Crank-Nicolson.

## Step 5: Valorización de contratos lineales

En esta sección se busca valorizar contratos y opciones lineales tales como depósitos a plazo y forwards con el motor de calculo elegido, antes de valorizar opciones más complejas.

### Depósitos a plazo

El calculo de un deposito a plazo tiene como objetivo verificar si el factor de descuento se encuentra descontando de manera correcta, ya que es un contrato lineal que no depende del precio spot y tampoco del strike, dada por la siguiente formula:

$$\text{Depósito a Plazo} = e^{-rT}$$

La tabla 6, muestra la consistencia de valores obtenidos para el calculo teórico y mediante Diferencias Finitas para un set de parametros  $T=1$  y  $q=0$ .

r	Depósito a plazo	Crank-Nicolson
0.05	0.9512	0.9512
0.10	0.9048	0.9048
0.20	0.8187	0.8187
0.30	0.7408	0.7408

Table 6: Depósito a plazo v/s Crank-Nicolson.



## Forward

Para verificar el calculo realizado por el motor de calculo Crank-Nicolson, se utilizará un payoff lineal, se utilizara como benchmark la formula de Black-Scholes para comparar los resultados obtenidos, dado por la siguiente formula:

$$Forward_{BS} = Call_{BS} - Put_{BS}$$

El set de parámetros a utilizar son spot=600, tenor=1, rateclp=0.05, rateusd=0.01, vol=0.25. La simulación de Diferencias Finitas esta evaluada bajo  $N=100$ ,  $\Delta\tau = \frac{1}{2}$  y  $z=3$ . El Strike ira variando para alcanzar las posiciones OTM, ATM e ITM.

Strike	Black-Scholes	Crank-Nicolson
400	213.5381	213.5391
500	118.4152	118.4164
600	23.2922	23.2937
700	-71.8307	-71.8290

Table 7: Opción Forward Black-Scholes v/s Crank-Nicolson.

De la tabla 7, podemos observar que los valores calculados para Forward mediante Diferencias Finitas son consistentes con la valorización de forwards bajo el método de Black-Scholes con una precisión totalmente aceptable.

## Step 6: Valorización de contratos vanillas

En el paper escrito por Mark Rubinstein en 1938 para la valorización de opciones vanillas, se afirma que el modelo de *Displaced Diffusion* representará el modelo de Black-Scholes cuando  $\omega$  sea igual a 1 y de esta manera  $\eta$  se comportará como la volatilidad. En la tabla 5 vimos el comportamiento de los motores de cálculo para opciones con volatilidad dada, a continuación veremos el comportamiento del modelo *Displaced Diffusion* en el motor de calculo de diferencias finitas, para la valorización de una Call Europea, la cual será contrastada con el valor de la formula de Black-Scholes. Los cálculos serán realizados bajo el set de parámetros spot=600, tenor=1, rateclp=0.05, rateusd=0.01, vol=0.1. La simulación de Monte Carlo esta evaluada bajo N=100000 y  $\Delta t = \frac{1}{12}$ , Diferencias Finitas esta evaluada bajo N=100,  $\Delta \tau = \frac{1}{2}$ , z=3 y los parámetros para el modelo de volatilidad local son  $\bar{S}=600$ ,  $\omega=1$ ,  $\eta = 0.1$ .

Strike	Black-Scholes	Monte Carlo	Crank-Nicolson
400	213.5382	$213.7022 \pm 0.1881$	213.5391
500	118.6580	$118.8125 \pm 0.1865$	118.6282
600	36.7019	$36.7833 \pm 0.1401$	34.8361
700	3.9698	$3.9922 \pm 0.0477$	3.6779

Table 8: Resultados Monte Carlo v/s Crank-Nicolson con Black-Scholes.

Se observa que ambos motores de cálculos son consistentes con la valorización de una Call Europea, donde debe destacarse el que modelo de Diferencias Finitas vuelve a ser mas preciso que el método de Monte Carlo. También podemos observar que el modelo de Crank-Nicolson es mucho mas preciso en valorizaciones OTM.

## Análisis de sensibilidad

Para comprender bien el funcionamiento de un modelo, es necesario estudiar el comportamiento de sus variables, en este caso se evaluarán los valores de  $\omega$  y  $\eta$  entre 0 y 1 a lo largo del contrato de una opción Call Europea.

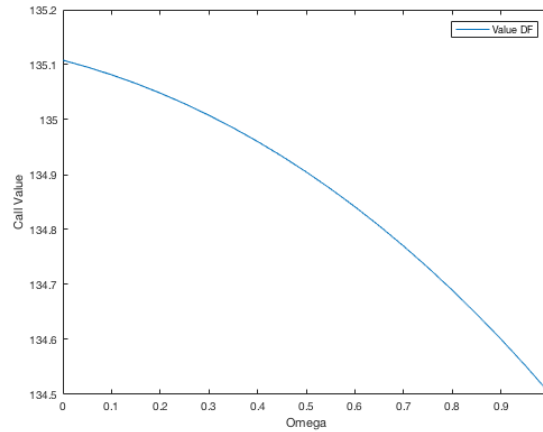


Figure 4: Sensibilidad Omega ( $\omega$ ) con  $\eta=0.32$ .

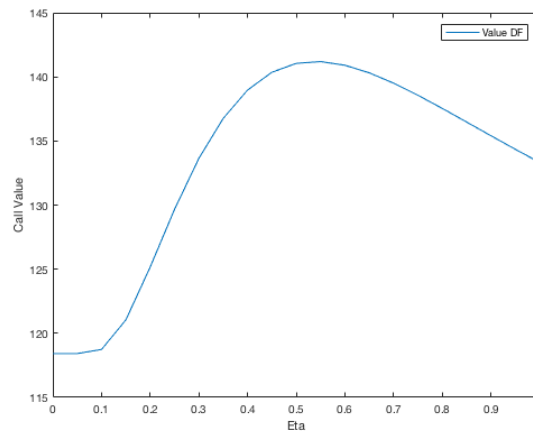


Figure 5: Sensibilidad Eta ( $\eta$ ) con  $\omega=0.32$ .

En las figuras 4 y 5 se observa que en variaciones de  $\omega$  cuando este toma valores cercanos a 0 el valor de la opción aumenta y para  $\eta$  se puede observar que el contrato toma su máximo valor cuando este toma un valor cercano a 0.55.

## Part III: The Model Calibration

### Step 7: Estimación de parámetros

Antes de comenzar con la calibración del modelo es necesario estimar los parámetros iniciales con los que comenzaremos. Para esta sección se usará el modelo de volatilidad local *Displaced Diffusion*, el cual depende del precio Spot. En la figura 6 se muestran las volatilidades de la data, respecto de la variación del ratio de spots, el cual toma los valores de spot de la data en contraste con su promedio ( $\frac{\bar{S}}{S}$ ), junto con su correspondiente regresión lineal simple ( $y = A + Bx$ ).

$$\sigma_{DD}(S, t) = \eta \left[ \omega + (1 - \omega) \frac{\bar{S}}{S} \right]$$

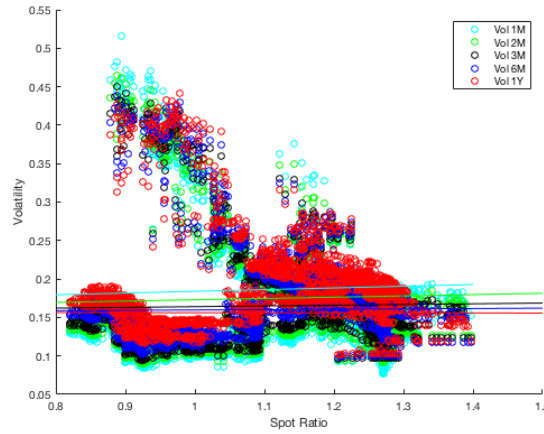


Figure 6: Distribución de Volatilidades a 1M, 2M, 3M, 6M y 1Y.

Los valores de los coeficientes que entrega la regresión lineal son utilizados para la estimación de los parámetros  $\omega$  y  $\eta$ . Estos se observan en la Tabla 9.

Volatilidad	Coefficiente A	Coefficiente B
Vol 1M	0.1573	-0.001014
Vol 2M	0.1551	0.004675
Vol 3M	0.1547	0.009371
Vol 6M	0.1561	0.01688
Vol 1Y	0.1618	0.02217

Table 9: Coeficientes regresión lineal.

Luego para la estimación de  $\omega$  y  $\eta$  se utilizaron las siguientes formulas:

$$\eta = A + B$$

$$\omega = \frac{A}{A + B}$$

Finalmente se calcularon los promedios para  $\eta$  y  $\omega$  obteniendo:

$$\eta_{promedio} = 0.1674$$

$$\omega_{promedio} = 0.9404$$

## Step 8: Función Objetivo

La finalidad de esta sección es definir el objetivo del estudio, es decir, como se buscará minimizar la volatilidad entregada por el mercado versus el modelo de volatilidad *Displaced Diffusion* a través de los parámetros  $\eta$  y  $\omega$ . Utilizando la siguiente formula:

$$\min_{\eta, \omega} \frac{1}{25} \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 |\sigma_{implicito_{mercado}} - \sigma_{implicito_{modelo}}|$$

Siendo  $i$  el numero de pilares y  $j$  los tenors. Dado esto se procederá a minimizar la distancia para 25 contratos diarios, entregándonos parámetros de  $\eta$  y  $\omega$  para un día en particular.

Para calcular la volatilidad implícita del modelo, primero motor de calculo nos entregará una prima, luego esta se le entregamos al algoritmo de Newton-Raphson para que finalmente este nos entregue una volatilidad implícita.

El algoritmo de Newton-Raphson en su forma recursiva esta dada por:

$$X_{n+1} = X_n + \frac{f^* - f(X_n)}{f'(X_n)}$$

Donde  $X_n$  representa la posición en la iteración numero "n",  $X_{n+1}$  la posición sucesiva,  $f^*$  la función objetivo,  $f(X_n)$  la posición "n" evaluada en al función y  $f'(X_n)$  la derivada de la función evaluada en la posición "n". De manera simplificada este algoritmo avanza a través de su derivada por medio de la curva de la función y se detendrá cuando se cumpla:

$$X_{n+1} - X_n = Objetivo$$

Finalmente buscamos una selección de parámetros diarios que nos permitan ajustar nuestro modelo a la Smile de mercado.

## Step 9: Primera Smile

La finalidad de este informe es realizar un ajuste cuantitativo a la Smile de mercado, para ello estudiamos esta a través de un modelo de volatilidad local (*Displaced Diffusion*), con el objetivo de obtener valores similares de volatilidades implícitas entre el motor de calculo y la data de mercado, para que ambas Smile sean lo más semejantes posibles. En la figura 7 podemos apreciar el comportamiento de la Smile en el primer día de data para las volatilidades a 1, 2, 3, 6 meses y 1 año.

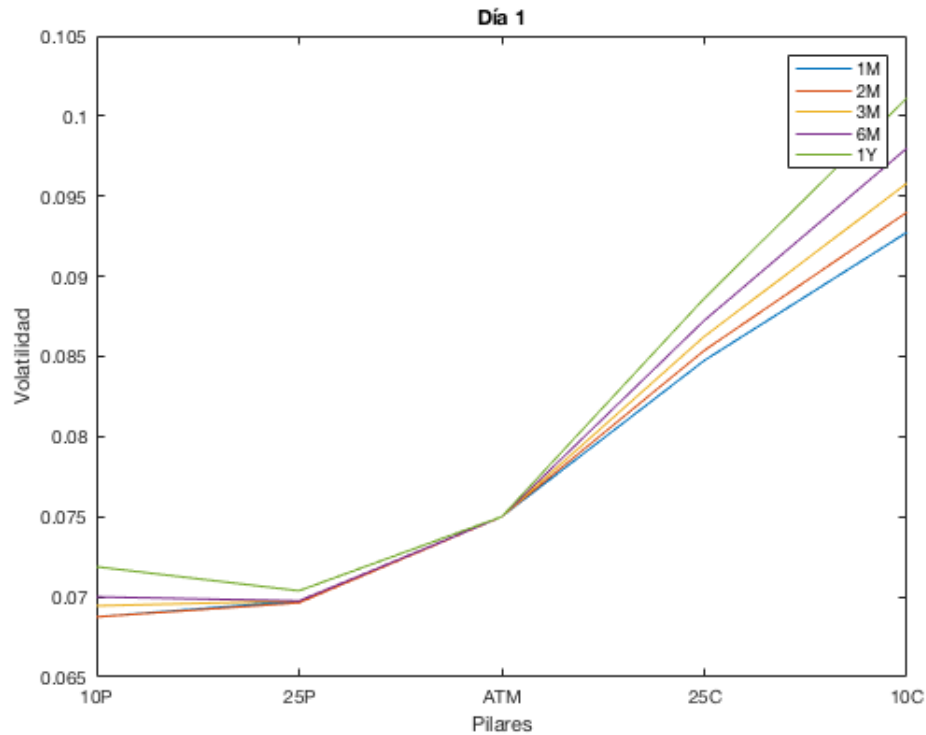


Figure 7: Smile para volatilidades a 1M, 2M, 3M, 6M y 1Y.

A continuación, se procede a calcular la Smile del día 2 de Enero del 2008 para un tenor de 1 año.

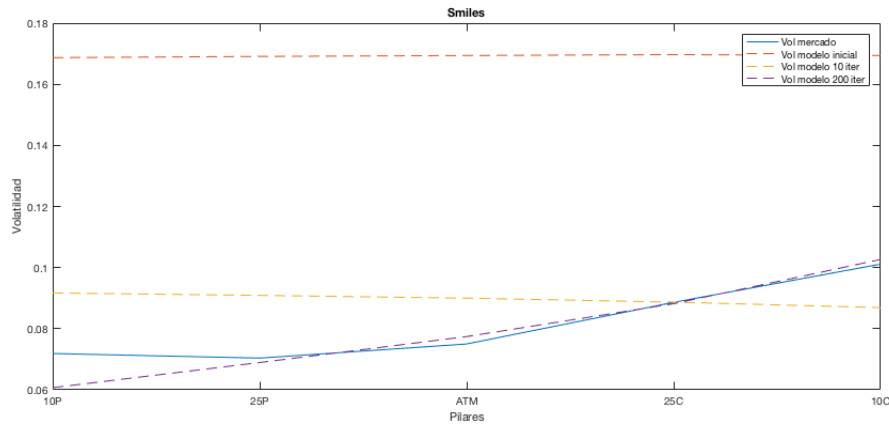


Figure 8: Comparación Smile de Mercado vs Modelo.

Parámetros	Inicial	10 Iteraciones	200 Iteraciones
$\eta$	0.1674	0.0962	0.0215
$\omega$	0.9404	1.3224	-11.9384
Error promedio	0.0884	0.0136	0.0038

Table 10: Parámetros Smiles primer día.

En el gráfico 8 se puede observar cuatro cálculos realizados para la Smile, en primer lugar la línea azul representa la Smile de mercado la cual nos sirve para realizar una comparación con nuestras Smiles obtenidas a partir del modelo, en segundo lugar la línea roja representa la Smile con los parámetros calculados mediante el ejercicio de regresiones lineales en el step 7, donde los parámetros calculados no reflejan el comportamiento de la Smile de mercado, en tercer lugar la línea amarilla representa una Smile para parámetros calibrados para el día 2 de Enero del 2008 con un número de 10 iteraciones, la cual podemos ver que se acerca de forma importante a la Smile de mercado, en último lugar la línea morada representa la Smile con parámetros calibrados para el día 2 de Enero del 2008 con un número de 200 iteraciones, en esta última se puede apreciar que sigue un comportamiento semejante desde los pilares 25P al 10C y en algunos momentos la representa de forma idéntica, sobre todo en el pilar 25C.

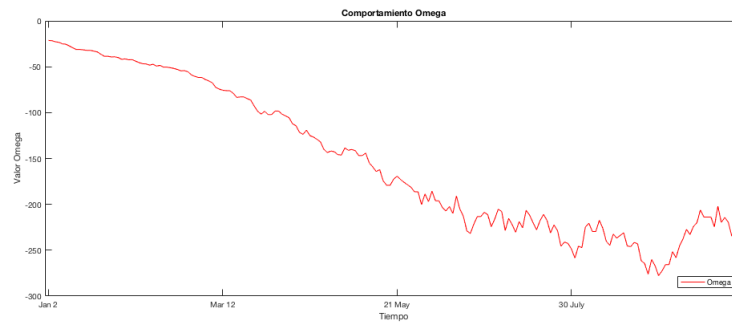
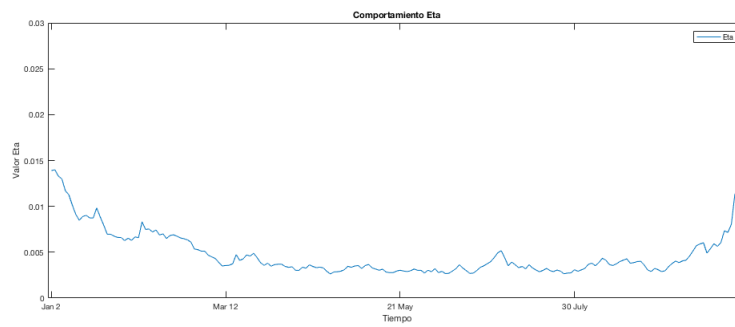
Es importante volver a mencionar que como quants se desea obtener resultados precisos en un tiempo óptimo, es por eso que el tiempo computacional en la calibración es un factor relevante. A continuación en la tabla 11, analizaremos el comportamiento de los tiempos computacionales en relación al número de iteraciones vs la cantidad de días a calibrar:

Iteraciones	1 día	2 días	100 días	2663 días
10	2.37 seg	4.33 seg	237.73 seg	1.56 horas
20	4.27 seg	8.46 seg	387.51 seg	3.12 horas
50	15.00 seg	20.45 seg	1500.24 seg	11.09 horas
200	39.42 seg	80.39 seg	3942.77 seg	29.16 horas

Table 11: Eficiencia Tiempo Computacional.

### Análisis Cross-Sectional

En esta sección se comenzará con la calibración de nuestro modelo. En primer lugar debido a la gran cantidad de datos, es recomendable realizar un análisis cross-sectional, es decir, tomar una cantidad de datos, que no represente un recurso computacional alto para obtener los primeros datos de  $\eta$  y  $\omega$  en un corto periodo de tiempo y así analizar su comportamiento. Por lo que se tomo una muestra de los primeros 200 datos, obteniendo:

Figure 9: Comportamiento parámetro  $\omega$ .Figure 10: Comportamiento parámetro  $\eta$ .



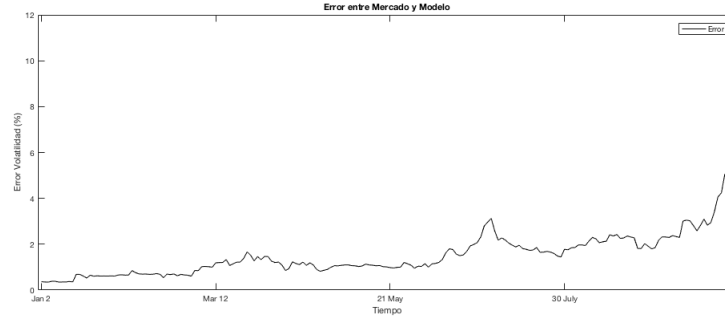


Figure 11: Comportamiento Error.

Como podemos ver en la figura 9, durante los últimos 100 días (21 de Mayo) el valor de omega ( $\omega$ ) tiende a valores negativos altos los cuales no tienen una interpretación lógica, por lo que en la próxima calibración será necesario establecer un limite inferior para que evaluar su comportamiento en un rango adecuado. Por otro lado en la figura 10, el valor de eta ( $\eta$ ) se comporta en un rango de parámetros esperados lo que es un buen indicador y finalmente la figura 11 se observa que el error no supera el 2 % de error hasta que comienza la crisis subprime en Noviembre del 2008. En síntesis el único arreglo que se necesita realizar es un ajuste en los limites inferiores para el parámetro omega.

## Step 10: Calibración Histórica de la Data

### Calibración diaria

Luego de haber realizado el ajuste para el parámetro de omega ( $\omega$ ) con un intervalo de  $] + \infty, -30]$ , se procede a realizar una calibración de 10 iteraciones para el total de datos (2663) con parámetros iniciales del día 1 calibrados a 200 iteraciones, obteniendo los resultados presentes en las figuras 12, 13, 14 y tabla 12:

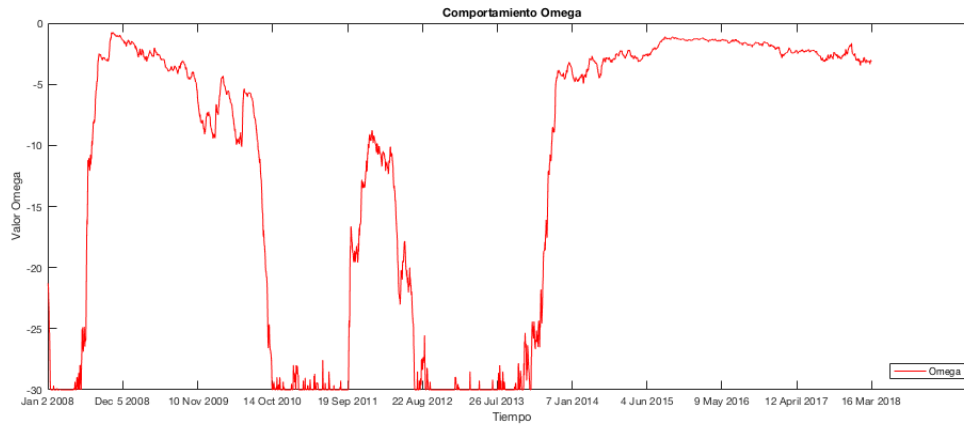


Figure 12: Comportamiento Omega ( $\omega$ ).

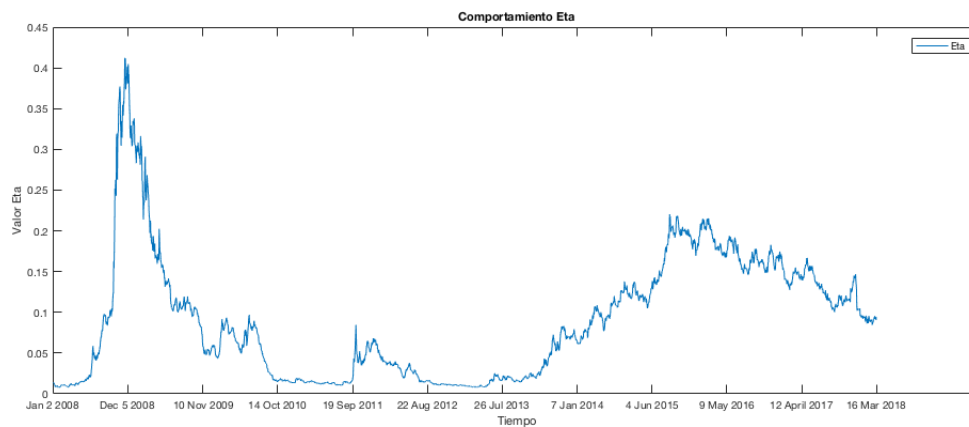


Figure 13: Comportamiento Eta ( $\eta$ ).

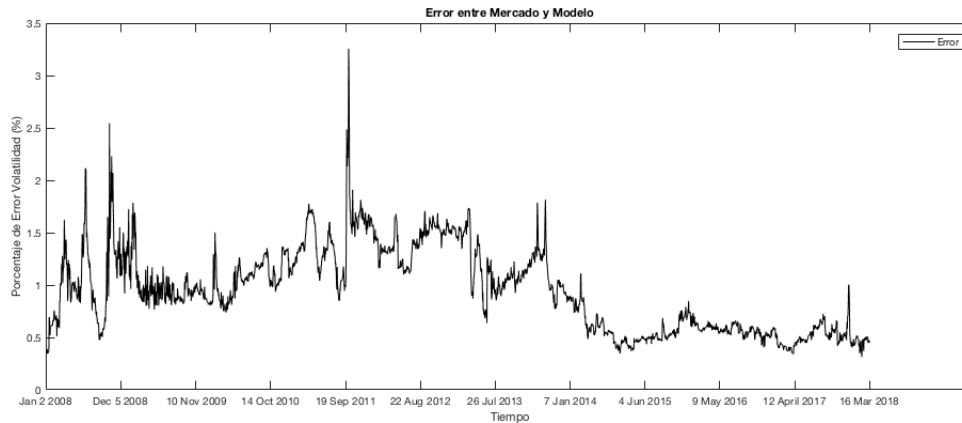


Figure 14: Error Volatilidad entre Mercado y Modelo.

Parámetros	Media	Desv. Estándar
$\eta$	0.0906	0.0768
$\omega$	-12.3647	11.9502
Error	0.0095	0.0040

Table 12: Resultados parámetros.

En primera instancia se observa que los parámetros de  $\eta$  y  $\omega$  se comportan en rangos esperados y que el error a lo largo de la data con calibración diaria tiene un promedio bajo el 1%.

Para realizar un análisis más detallado y comparar de forma clara el comportamiento de los parámetros estudiados, se procede a presentar el siguiente gráfico comparativo:

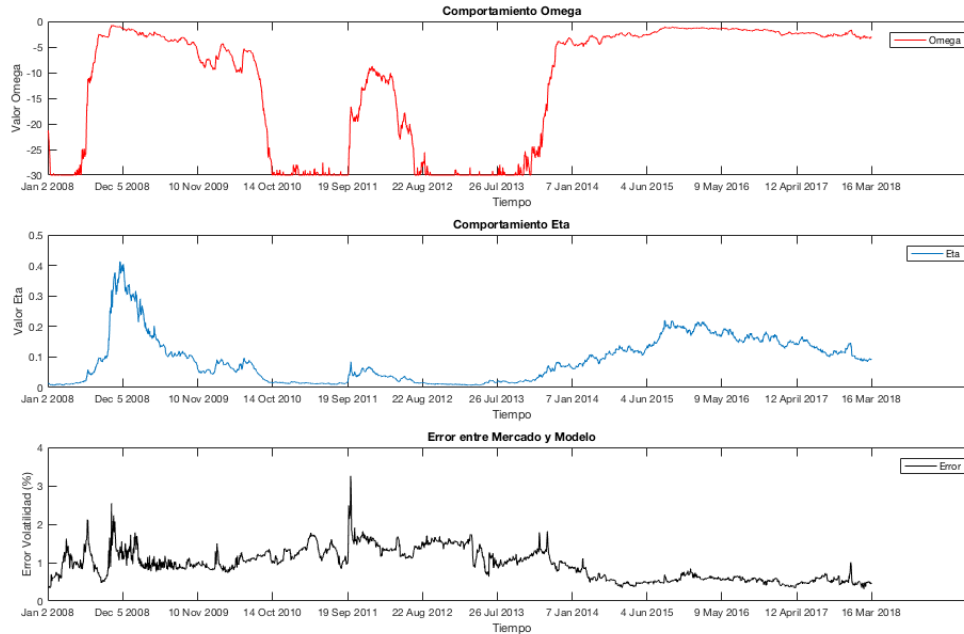


Figure 15: Análisis entre parámetros Omega ( $\omega$ ), Eta ( $\eta$ ) y Error.

Donde podemos observar claramente que en épocas de crisis existen patrones de shocks que se repiten en alzas de los parámetros repercutiendo en alzas del error, como sucede con el shock de la crisis subprime, el shock en Septiembre del 2011 y el shock de Noviembre del 2013, para luego entrar en un periodo con ausencia de shocks, es decir, sin cambios abruptos en las volatilidades de mercado.

## Primera calibración parámetros constantes

Cabe destacar que el objetivo de esta sección es buscar un set de parámetros para  $\eta$  y  $\omega$  que sean constantes en el tiempo y entreguen el menor error posible, es decir se adapten mejor a la Smile de mercado, para esto se eligieron los promedios de  $\eta$  y  $\omega$  calculados anteriormente (Tabla 12), obteniendo los resultados presentes en la figura 16 y tabla 13:

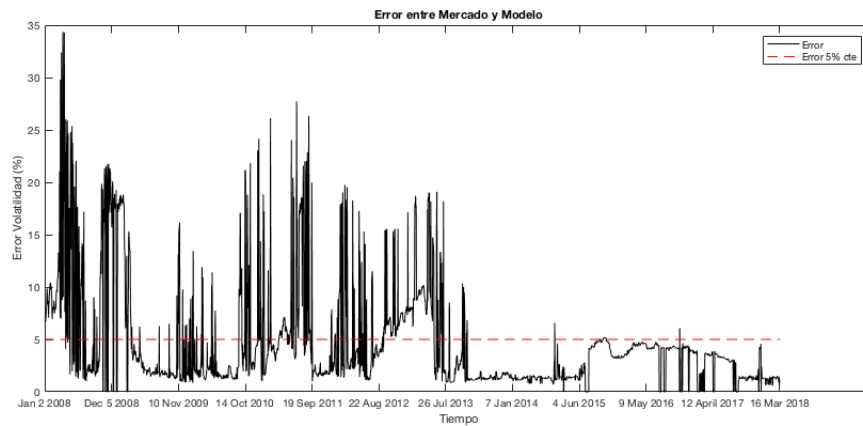


Figure 16: Error con parámetros  $\eta$  y  $\omega$  constantes.

Parámetros	Media	Desv. Estándar
Error	0.0463	0.0506

Table 13: Datos Error Octubre 2013 - Marzo 2018.

Como se observa en la figura 16, de Enero del 2008 a Octubre del 2013 es un periodo marcado fuertemente por inestabilidades financieras en la moneda de Estados Unidos frente a nuestra moneda, apreciándola y depreciándola constantemente. Dado esto existe un periodo posterior desde Octubre del 2013 a Marzo 2018 marcado por una estabilidad particular que en gran parte no supera el 5% de error.

## Segunda calibración parámetros constantes

Dado lo anterior, se procederá a calibrar el modelo para el periodo con estabilidad (Octubre 2013 - Marzo 2018), con el fin de observar el comportamiento del error y la Smile durante ese intervalo de tiempo. Los parámetros de  $\eta$  y  $\omega$  a utilizar serán el promedio de estos en el intervalo de tiempo a estudiar, presentados en la tabla 14:

Parámetros	Media
$\eta$	0.1271
$\omega$	-4.6241

Table 14: Datos parámetros calibración sesgada.

Obteniendo los resultados presentes en la figura 17 y tabla 15:

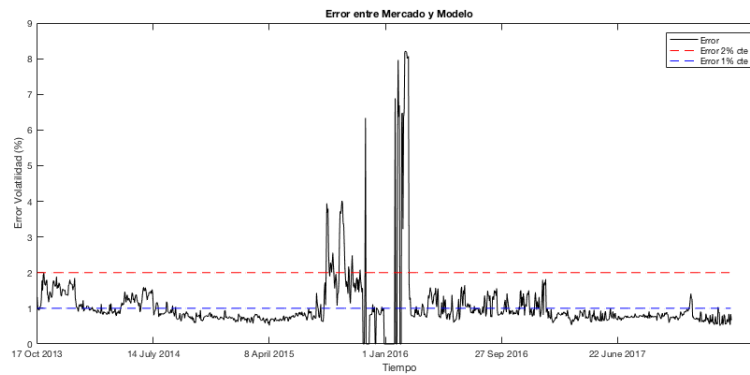


Figure 17: Error con nuevos parámetros  $\eta$  y  $\omega$  constantes entre Octubre 2013 y Marzo 2018.

Parámetros	Media	Desv. Estándar
Error	0.0105	0.0089

Table 15: Datos Error Octubre 2013 - Marzo 2018.

Se observa que para el set de parámetros constantes presentados en la tabla 15, se obtiene en promedio un error cercano al 1% y un comportamiento bastante regular del error durante los años 2013, 2014, 2017 y 2018. Una vez comprobado un rango de error aceptable (1% aprox.) se procede a realizar el ajuste a la Smile del modelo con la de mercado a parámetros constantes, para el último dato de la base de datos (2663), que corresponde al día 16 de Marzo del 2018 para un tenor de 1 año. Finalmente se obtienen los resultados presentes en la figura 18 y tabla 16.

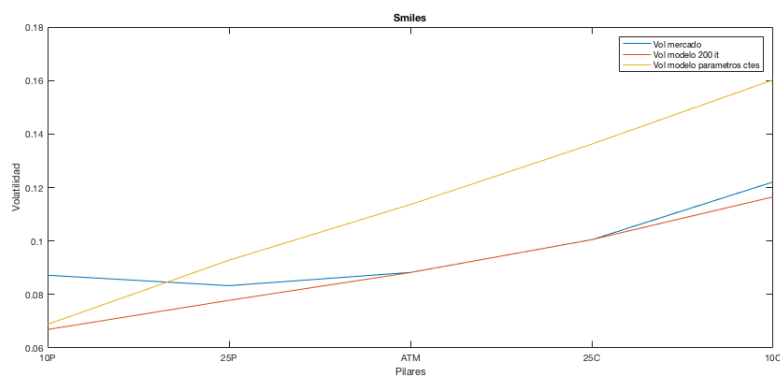


Figure 18: Smiles Mercado v/s Modelo v/s Benchmark parámetros ideales para el 16 de Marzo 2018.

Parámetros	Constantes	200 Iteraciones
$\eta$	0.1271	0.0944
$\omega$	-4.6241	-2.8381
Error promedio	0.0136	0.0047

Table 16: Parámetros Smiles último día.

## Step 11: Conclusiones

En primer lugar se logró estudiar el comportamiento de la base de datos de spots y volatilidades, respaldando con hechos históricos las alzas en los precios del dólar observado y su volatilidad. Después se analizó la cuadratura de los datos, calculando de forma empírica estos, obteniendo resultados cercanos a 0, lo que respalda la consistencia de la data. Luego se valorizaron contratos lineales y vanillas con dos distintos motores de calculo, siendo el más preciso y eficiente: Diferencias Finitas mediante esquema de Crank-Nicolson.

Se realizó una estimación para parámetros iniciales de  $\eta$  y  $\omega$  y luego se procedió a realizar una calibración diaria, de la cual se concluyó que a un mayor número de iteraciones, la smile del modelo se acercaba significativamente a la smile de mercado, por lo que se procedió a realizar un análisis entorno al recurso computacional requerido para lograr realizar un ajuste de manera optima, en un tiempo adecuado. La estrategia fue realizar una calibración a 200 iteraciones para el primer día de la data y usar los parámetros entregados como los iniciales, luego se procedió a realizar una calibración diaria de 10 iteraciones para la data completa.

El mayor desafío fue escoger parámetros de  $\eta$  y  $\omega$  constantes en el tiempo, para esto se eligió la media, ya que de esta manera se incorporan los datos de crisis como los datos de estabilidad, luego de realizar la calibración para las medias de los parámetros, se observa un periodo de estabilidad desde Octubre del 2013 a Marzo 2018, del cual seria interesante estudiar el error entregando nuevos parámetros constantes.

Respecto de los resultados entregados por el estudio, se concluye que el modelo de volatilidad local de *Displaced Diffusion*, realiza un ajuste interesante con un promedio de error del 0.95% de nuestra moneda frente al dólar estadounidense y no se ajusta de manera correcta para parámetros constantes en periodos de crisis, presentando errores hasta del 30%, que al momento de anticipar una crisis no son válidos, por lo que se sugiere al lector estudiar estos periodos bajo un modelo de volatilidad estocástica, de manera de comprobar un mejor ajuste bajo estos modelos.

Finalmente para los parámetros del modelo *Displaced Diffusion* el valor de  $\eta$  que representa la volatilidad implícita del modelo, al momento de calibrar, si presenta un comportamiento con alzas en épocas de crisis y bajas en periodos de estabilidad, lo que es coherente con la realidad. Respecto a los valores de  $\omega$ , estos no tienen relación con las porciones de riqueza que debieran invertirse en activos riesgosos y libres de riesgo respectivamente, ya que durante toda la calibración este entrega resultados negativos, pero resulta interesante mencionar que este entrega patrones de bajas en periodos de crisis, esto puede traducirse como: a medida que existen mayor volatilidad en el mercado, el modelo sugiere dejar de invertir en activos riesgosos, refugiándose en activos libres de riesgo.



## References

- [1] Mark Rubinstein, Displaced Diffusion Option Pricing, The Journal of Finance, Vol. 38, No. 1 (Mar., 1983), pp. 213-217.