Probabilité & Statistique	Travaux Dirigés n°4	Variables aléatoires continues
Hechmi Abdelmoumen	IRM 1	2024-2025

Exercice 1

La durée de vie T en année, d'un serveur informatique, avant la première panne, suit une loi exponentielle de paramètre λ. D'après une étude, la probabilité que cet appareil tombe en panne pour la première fois avant la fin de la première année est $0,22$.

1. Déterminer, d'après cette étude, la valeur de λ à 10^{-2} près.

2. On suppose dans la suite que $\lambda = 0.24$, déterminer la durée de vie moyenne de cet appareil avant la première panne.

3. Quelle est la probabilité que l'appareil ne connaisse pas de panne au cours des quatre premières années.

4. Déterminer la durée de demi-vie, M telle que $p(T \geq M) = 0.5$.

5. Soit D la durée de vie, avant la première panne, d'un nouveau serveur plus robuste que le premier. Une étude a montré que cette durée est quatre fois plus longue que T. Déterminer la loi de D.

Exercice 2

Une machine fabrique des tubes métaliques cylindriques. Le diamètre d'un tube en millimètre, noté X, est distribué suivant une loi normale de moyenne 15 et d'écart-type 3, $N(15, 3)$. Pour être utilisable, un tube doit avoir un diamètre compris entre 14 et 16 millimètres.

1. Quelle est la probabilité qu'un diamètre dépasse 16 millimètres ?

2. Quelle est la probabilité qu'un tube soit utilisable ?

3. Trouver le diamètre d, tel que $p(X \leq d) = 0.8413$

4. Un ingénieur affirme qu'en modifiant la machine, il peut réduire l'écart-type, tout en gardant la moyenne constante. Quel devrait-être cet écart-type pour qu'un tube ait 95% de chance d'être utilisable ?

Exercice 3

Un industriel doit vérifier l'état de marche de ses machines et en remplacer certaines le cas échéant. D'après une statistique, il évalue à 30% la probabilité pour une machine tombe en panne en 5 ans. On choisit au hasard et de manière indépendante un échantillon de 150 machines pour contrôle. Soit X le nombre de machines en panne.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale, en préciser ses paramètres.

2. Déterminer le nombre moyen de machines en panne en 5 ans.

3. Déterminer « sd » l'erreur standard (l'écart-type) de X.

4. Justifier que la loi de X est proche d'une loi normale dont on précisera ses paramètres.

5. Calculer la probabilité d'évaluer au plus 35 machines en panne pendant 5 ans.

6. Déterminer le nombre maximal de machines à 81% de panne en 5 ans.

Exercice 4

Des tests ont montré que le quotient intellectuel (Q.I.) des adultes est une distribution normale de moyenne égale à 100 et d'écart-type égal à 15.

1. Quelle est la proportion de personnes dont le Q.I. est supérieur à 100 ?

2. Quelle est la probabilité d'obtenir un Q.I. compris entre 95 et 105 ?

3. Quel Q.I. minimum faut-il obtenir pour faire partie des 5% d'individus les plus performants ?

4. On considère un échantillon de 9 personnes dont le Q.I. est :

$$X = (95, 102, 98, 104, 105, 99, 103, 97, 106)$$

On suppose que cet échantillon est représentatif d'une population normale de moyenne inconnue et d'écart-type σ égal à 3.
4.1. Calculer le Q.I. moyen de cette échantillon.
4.2. Estimer le Q.I. moyen de cette population en utilisant la méthode de l'intervalle dce confiance à un niveau de risque égal à 5%.
4.3. Interpréter ce résultat.