[illegible] - תרגיל 1

① תהי q ההתפלגות הבאה:

$$q(x_1,x_2,x_3)=\begin{cases}\frac{1}{12} & ,x_1\oplus x_2\oplus x_3=0\\ \frac{1}{6} & ,x_1\oplus x_2\oplus x_3=1\end{cases}$$

א. נחשב את ערכי ההתפלגות q עבור המשתנים השונים x_1,x_2,x_3:

x_1	x_2	x_3	$q(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	1/12
0	0	1	1/6
0	1	0	1/6
0	1	1	1/12
1	0	0	1/6
1	0	1	1/12
1	1	0	1/12
1	1	1	1/6

אביה רוזנברג - 204676257
[illegible] אסולין - 203799226

ע"י סכימת x_3 החוצה נוכל לחשב את ההתפלגות השולית של x_1,x_2:

x_1	x_2	$q(x_1,x_2)$
0	0	1/4
0	1	1/4
1	0	1/4
1	1	1/4

ע"י סכימת x_2 החוצה נוכל לחשב את ההתפלגות השולית של x_1:

x_1	$q(x_1)$
0	1/2
1	1/2

משיקולי סימטריה ברור ש: $q(x_1)=q(x_2)=q(x_3)$

$q(x_1,x_2)=q(x_2,x_3)=q(x_1,x_3)$

ראשית נשים לב ש: $x_1\perp x_2$ מכיוון ש:

$$q(0,0)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=q(0)\,q(0)$$

$$q(0,1)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=q(0)\cdot q(1)$$

$$q(1,0)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=q(1)\cdot q(0)$$

$$q(1,1)=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=q(1)\cdot q(1)$$

ומשיקולי סימטריה מתקיים גם: $x_1\perp x_3$, $x_2\perp x_3$.

מכיוון ש: $X_1, X_2 \not\perp X_3$ $q(0,0,0)=\frac{1}{12}\neq\frac{1}{8}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=q(0,0)\cdot q(0)$

ושוב באופן סימטרי: $X_1, X_3 \not\perp X_2$, $X_2, X_3 \not\perp X_1$.

$X_1 \not\perp X_2 \mid X_3$ מכיוון ש:

$$q(0,0|0)=\frac{q(0,0,0)}{q(0)}=\frac{1/12}{1/2}=\frac{1}{6}\neq\frac{1/4}{1/2}\cdot\frac{1/4}{1/2}=\frac{q(0,0)}{q(0)}\cdot\frac{q(0,0)}{q(0)}=q(0|0)\cdot q(0|0)$$

ובאופן סימטרי: $X_1 \not\perp X_3 \mid X_2$, $X_2 \not\perp X_3 \mid X_1$.

סה״כ קיבלנו: $I(q)=\{(X_1\perp X_2),(X_2\perp X_3),(X_1\perp X_3)\}$.

ב. לא קיים גרף G שהוא DAG כך ש: $I_{LM}(G)=I(q)$.
נניח בשלילה שקיים גרף כזה. לכל צומת X_i מתקיימת תכונת LM: $X_i \perp X_{ND(i)-Pa(i)} \mid X_{Pa(i)}$ אבל מכיוון ש: $I_{LM}(G)=I(q)$ אין אף תכונות אי-תלות שמתקיימות בהתניה על קבוצה כלשהי.
לפיכך לאף צומת אין הורה ולכן הגרף היחיד שאפשרי הוא: X_1 X_2 X_3.
אבל בגרף זה מתקיים למשל: $X_1, X_2 \perp X_3$ בסתירה ל-$I(q)$ שמצאנו בסעיף הקודם.

ג. לא קיים גרף לא מכוון G כך ש: $I_{sep}(G)=I(q)$.
בכדי לראות זאת פשוט נעבור על כל הגרפים האפשריים (עד כדי איזומורפיזם) על הצמתים X_1, X_2, X_3.
בגלל הסימטריה לא משנה איזה שמות ניתן לקודקודים.
האפשרויות הן:

(1)

X_2 מפריד בין X_1 ל-X_3 באופן ריק ולכן:
$X_1 \perp X_3 | X_2 \in I_{sep}(G)$ אבל $X_1 \perp X_3 | X_2 \notin I(q)$.

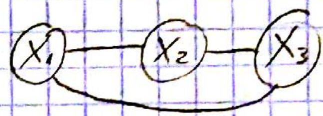
(2)

X_2 מפריד בין X_1 ל-X_3 באופן ריק ולכן:
$X_1 \perp X_3 | X_2 \in I_{sep}(G)$ אבל $X_1 \perp X_3 | X_2 \notin I(q)$.

(3)

X_2 מפריד בין X_1 ל-X_3 (קל לראות את זה) ולכן:
$X_1 \perp X_3 | X_2 \in I_{sep}(G)$ אבל $X_1 \perp X_3 | X_2 \notin I(q)$.

(4)



$X_1 \perp X_3 \in I(q)$ אבל הקבוצה הריקה לא מפרידה בין
X_1 ו-X_3 כי יש ביניהם קשת ולכן $X_1 \perp X_3 \notin I_{sep}(G)$

② <u>טענת עזר:</u> יהיו X,Y,W,Z מ"מ כך ש- $p(x,y,w,z)$ חיובי ממש, $X \perp Y \mid Z$, וכן $X \perp W \mid Y,Z$. אזי מתקיים: $X \perp Y,W \mid Z$.

<u>הוכחה:</u> $X \perp Y \mid Z$ ולכן $p(x \mid y,z) = p(x \mid z)$ ⊛. כמו כן, $X \perp W \mid Y,Z$ ולכן $p(x \mid w,y,z) = p(x \mid y,z)$ ⊛⊛. מתקיים:

$$p(x,y,w \mid z) \underset{\text{כלל השרשרת}}{=} p(x \mid y,w,z) \cdot p(y,w \mid z) \underset{⊛⊛}{=} p(x \mid y,z) p(y,w \mid z) \underset{⊛}{=}$$

$$= p(x \mid z) p(y,w \mid z)$$

לפיכך מתקיים $X \perp Y,W \mid Z$.

<u>טענה:</u> יהיו X,Y,W,Z מ"מ כך ש: $p(x,y,w,z)$ חיובי ממש, $X \perp Y \mid Z,W$ וכן $X \perp W \mid Z,Y$. אזי מתקיים: $X \perp Y,W \mid Z$.

<u>הוכחה:</u> $X \perp Y \mid Z,W$ ולכן $p(x \mid y,z,w) = p(x \mid z,w)$. כמו כן, $X \perp W \mid Z,Y$ ולכן $p(x \mid y,z,w) = p(x \mid z,y)$. מכך קיבלנו:

$p(x \mid z,y) = p(x \mid z,w)$ ולפי הגדרת הסתברות מותנה: $\frac{p(x,w \mid z)}{p(w \mid z)} = \frac{p(x,y \mid z)}{p(y \mid z)}$

$$\Downarrow$$

$$p(x,y \mid z) p(w \mid z) = p(x,w \mid z) p(y \mid z)$$

נוכל לסכום החוצה את w: $\sum_w p(x,y \mid z) p(w \mid z) = \sum_w p(x,w \mid z) p(y \mid z)$

$$p(x,y \mid z) \sum_w p(w \mid z) = p(y \mid z) \sum_w p(x,w \mid z)$$

$$p(x,y \mid z) \cdot 1 = p(y \mid z) \cdot p(x \mid z)$$

ומכאן קיבלנו $p(x,y \mid z) = p(x \mid z) p(y \mid z)$ ולכן $X \perp Y \mid Z$.

כמו כן, לפי הנתון $X \perp W \mid Z,Y$ אז לפי טענת העזר קיבלנו: $X \perp Y,W \mid Z$.

שאלה 3

עבור הקדקוד X_i ב DAG G נגדיר את ה- Markov Blanket (M.B) שלו להיות הקבוצה S הבאה:

$$S = \underbrace{Pa(x_i)}_{\text{הקדקודים ב-G שהם הורים של } x_i} \cup \underbrace{Ch(x_i)}_{\text{הילדים של } x_i \text{ ב-G}} \cup Pa(Ch(x_i))$$

$$Pa(Ch(x_i)) = \bigcup_{x_j \in Ch(x_i)} Pa(x_j)$$

ההורים של הילדים של x_i.

טענה: S הינה ה-MB של x_i ב-G.

לפני הוכחת הטענה, נוכיח כמה טענות עזר.

למה 1: תהי B רשת ביסיאנית ויהי Y עלה ב-B (כלומר ל-Y אין ילדים)
תהי B' הרשת המתקבלת מ-B אחרי הסרת Y (והקשתות הנכנסות אליו). נסמן ב- X את כל הקדקודים ב-B'. אזי:

$$P_B(X) = P_{B'}(X)$$

הוכחת למה 1:

$$P_B(X) = \sum_y P_B(X,y) = \sum_y \left(\left[\prod_{w\in X} P(w|Pa(w))\right]\cdot P(y|Pa(y))\right) =$$

סכימה על כל הערכים האפשריים של Y

התפלגות ברשת ביסיאנית

$$= \prod_{w\in X} P(w|Pa(w)) \cdot \underbrace{\sum_y P(y|Pa(y))}_{=1} = \prod_{w\in X} P(w|Pa(w)) =$$

לכל $w\in X$, מתקיים $y\notin Pa(w)$ כי Y הוא עלה וגם $Pa(y)\subseteq X$

$$= P_{B'}(X)$$

לפי הגדרה של התפלגות ברשת ביסיאנית

מסקנה: ניתן להסיר עלים והתפלגות ברשת עבור הקדקודים שנותרו תישאר זהה

לפני למה 2, נגדיר: עבור קבוצת קדקודים X, נסמן ב- $an(X)$ את קבוצת הצמתים הקדמונים של X, כולל קדקודי X עצמם.

נגדיר גם: קבוצת קדקודים X תקרא **סגורה** אם מתקיים: $X = an(X)$.

כעת נוכיח את למה 2 שתשמש אותנו בהמשך.

למה 2: תהא X קבוצת קודקודים סגורה ברשת בייסיאנית B
תהא 'B רשת בייסיאנית המתקבלת מ-B ע"י הסרת כל הקודקודים ב-B
שאינם חלק מ-X. אז: $P_B(X) = P_{B'}(X)$

הוכחה: נסתכל על התהליך הבא (בו מסירים קודקודים מ-B עד לקבלת 'B):
1. כל עוד יש קודקוד שאינו ב-X ב-B:
 1.1 - מצא עלה שאינו ב-X ב-B [יש כזה*]
 1.2 - הסר את העלה והמשך ל-1

[* הסבר: נניח שיש קודקוד $v \notin X$ השייך ל-B. אם v עלה - סיימנו.
אם v אינו עלה אז ל-v יש ילד 'v. 'v אינו ב-X כיוון שאם 'v
היה ב-X אז גם v היה ב-X מעצם היותה של X קבוצה סגורה.
אם 'v עלה - סיימנו. אחרת, נמשיך לילד של 'v וכן הלאה. מובטח
שנמצא עלה כי הגרף הוא חסר מעגלים וסופי.]

בסוף התהליך הנ"ל נקבל את הרשת הבייסיאנית 'B ולפי למה 1
ההתפלגות של X לאורך כל התהליך נשארת כפי שהייתה (וכפי
שצריך). מ.ש.ל.

לפני הצגת והוכחת למה 3, נזכיר:

א. נאמר שמסלול מ-X (קודקוד) ל-Y (קודקוד) (לא מכוון) חסום ע"י קבוצת קודקודים Z אם:
1) אם קיים קודקוד $z \in Z$ כך שהחיבור בקודקוד z הוא:
טורי: $\circ \to \underset{z}{\circ} \to \circ$ או מתפצל:

או
2) המסלול מכיל קודקוד w כך ש-w וכל צאצאיו אינם שייכים
ל-Z ו-w מופיע במסלול כמפגש:

ב. שני קודקודים X,Y הם d-Separated ע"י קבוצת קודקודים Z אם
כל מסלול (לא מכוון) בין X ל-Y חסום ע"י Z.

בהמשך נניח שהנ"ל אומר ש- $X \perp Y | Z$.

ג. באופן מתבקש, ניתן להרחיב את ההגדרה לקבוצות קודקודים X ו-Y:

נאמר שקבוצת קודקודים X היא d-separated מקבוצת קודקודים Y ע"י קבוצת קודקודים Z אם כל מסלול מ-$x\in X$ ל-$y\in Y$ חסום ע"י Z, עבור כל $x\in X$ ו-$y\in Y$.

[ראו את ההגדרה שמופיעה ב scribes]

למה 3: יהיו X, Y, Z חלוקה של קודקודי הרשת הבייסיאנית B (איחודם שווה לכל קודקודי הרשת והם זרים בזוגות).
אם X ו-Y הם d-separated ע"י Z אז $X\perp Y|Z$.

הוכחה: נגדיר Z_1 = קבוצת הקודקודים ב-Z עם הורה מ-X.

$Z_2 = Z / Z_1$

נתון ש-Z מפריד (d-separated) בין X ל-Y. לכן:

1) לכל $w\in X\cup Z_1$: $\underbrace{Pa(w)}_{\text{הורי } w}\subseteq X\cup Z$.
כי אם משום שאם ל-$w\in X\cup Z_1$ היה הורה u השייך ל-Y אז Z לא היה d-מפריד בין X ל-Y (ונגיע לסתירה). הסבר: אם $w\in X$ ולו w יש הורה u מ-Y אז w תלוי ב-u בהינתן Z - וסתירה. וגם $w\in Z_1$ אז נקבל מבנה: $x\in X \rightarrow w \leftarrow u\in Y$ ואז שוב נקבל סתירה לכך ש-Z מפריד בין X ל-Y שכן יש קודקוד w ב-Z בתצורה הנ"ל (תצורת "מפגש")

2) לכל $w\in Y\cup Z_2$ מתקיים $Pa(w)\subseteq Y\cup Z$
כלומר לא ייתכן של-w יש הורה ב-X. (נניח בשלילה שיש לו כזה הורה $u\in X$. אם $w\in Y$ אז Z אינו d-מפריד בין X ל-Y. אם $w\in Z_2$ אז בסתירה להגדרת Z_2 ל-w אין הורה מ-X וסתירה.

נכון ש-

$$P(X,Z,Y)\overset{\text{הגדרה}}{=}\prod_{w\in X\cup Z\cup Y}P(w|Pa(w))=$$

$$=\left(\prod_{w\in X\cup Z_1}P(w|Pa(w))\right)\cdot\left(\prod_{w\in Z_2\cup Y}P(w|Pa(w))\right)$$

האבחנה החשובה היא ש-

$$\prod_{w\in X\cup Z_1} P(w|pa(w)) = f(X,Z)$$

כלומר תלוי רק של x ו- Z

$$\prod_{w\in Z_2\cup Y} P(w|pa(w)) = g(Z,Y)$$

כלומר תלוי רק של Z ו- Y

וזאת לפי 1,2 מתחילת ההוכחה.

אם כך,

$$P(X,Y,Z) = f(X,Z)\cdot g(Y,Z)$$

ולכן, לפי משפט: $X \perp Y \mid Z$ כנדרש.

<u>טענת עזר</u>: בהינתן רשת בייסיאנית, נסמן ב- x ו- y שני מ״מ בדידים ו- Z אוסף משתנים כך ש- $x,y \notin Z$.

אם x ו- y הם d-separeted ע״י Z אזי $x \perp y \mid Z$

<u>הוכחה</u>: ניתן להניח ש $an(\{x,y\}\cup Z)$ הם כל הקודקודים ברשת.

לפי למה 2. עדיין מתקיים ש- Z הוא d-sep בין x ל- y ברשת המקורית אמ״מ הוא מפריד ברשת המצומצמת (בגרף הנוצר ע״י אבותיהם).

נסמן ב- X את אוסף הקודקודים שאין d-sep ל- x ע״י Z

וב- Y את כל הקודקודים שאינם ב- Z ואינם ב- X $(Y=\overline{X\cup Z})$

לפי למה 3: $X \perp Y \mid Z$ ולכן קיימות פונקציות $f(X,Z)$ ו- $g(Z,Y)$ כך ש-

$$P(X,Y,Z) = f(X,Z)\cdot g(Z,Y)$$

נגדיר:

$$X' = X \setminus \{x\}$$

$$Y' = Y \setminus \{y\}$$

[מעצם ההגדרה והנתון: $x\in X$ ו- $y\in Y$

ולכן:

$$P(\underbrace{x, X'}_{X}, Z, \underbrace{y, Y'}_{Y}) = f(x, X', Z)\cdot g(Z, y, Y')$$

יעני,

$$P(X,Y,Z) = \sum_{X',Y'} P(X,X',Z,Y,Y') =$$

$$= \sum_{X',Y'} f(X,X',Z)\cdot g(Z,Y,Y') =$$

$$= \underbrace{\sum_{X'} f(X,X',Z)}_{f'(X,Z)} \cdot \underbrace{\sum_{Y'} g(Z,Y,Y')}_{g'(Y,Z)}$$

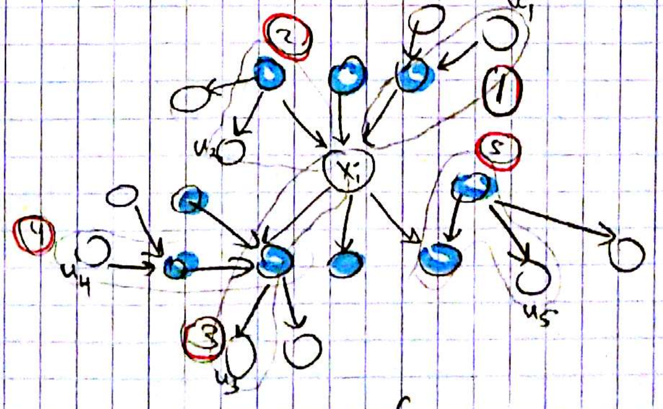
$$\Downarrow$$

$$X \perp Y \mid Z \quad \text{כנדרש.}$$

<u>כעת נוכיח את הטענה המרכזית</u>: S (שהגדרנו בתחילת השאלה) היא ה- M.B של הקודקוד X_i ברשת G.

<u>הוכחה</u>: נבחין שקבוצת הקודקודים S שהגדרנו היא d-מפרידה את X_i מכל קודקוד מחוץ ל-S (ושאינו X_i) זאת משום <u>שבכל מסלול</u> מ-X_i לקודקוד y מצידו השני של S הוא חסום. מדוע? כי הקודקוד האחרון לפני היציאה מ-S הוא סריאלי או מתפצל. נבדוק את כל האפשרויות בדרך הבא:

1. הפרדה סריאלית של u_1 מ-X_i
2. X_i ו-u_2 מופרדים ע"י פיצול
3. X_i ו-u_3 מופרדים סריאלית
4. גם הפרדה סריאלית
5. הפרדה ע"י פיצול



בכחול = S
(M.B)

כאמור = כל האפשרויות

ט)

מתוך ההוכחה ניתן להסיק שבהינתן הוקטור מ-S שהוגרל נוכל לייצר
התפלגות שבה x_i לא מוגרל מ- $\frac{1}{S}\sum x$ בהינתן S חוץ מ היחיד
כי S שהוגרל הוא הכרחי בכל קודקוד של מה שמהווה הפרדה של x_i
מיתר המשתנים. (כלומר שבהינתן הקיודה, x_i ויתר הקודקודים הם בלתי-
תלויים)

④ נתון: $p(x)$ הסתברות חיובית ממש. נבנה גרף G על הצמתים $1,\dots,n$ באופן הבא:

$$(i,j)\in E(G) \iff X_i \perp X_j \mid X_{\{1,\dots,n\}\setminus\{i,j\}} \notin I(p)$$

א. $p(x)$ הסתברות חיובית אז לפי טענה מהכיתה, על מנת להראות ש: $I_{sep}(G)\subseteq I(p)$ מספיק להראות ש: $I_{pair}(G)\subseteq I(p)$.

לכן נניח: $X_i \perp X_j \mid X_{\{1,\dots,n\}\setminus\{i,j\}} \in I_{pair}(G)$ כך ש: $(i,j)\notin E(G)$

מתקיים לפי הבנייה של הגרף ש: $X_i \perp X_j \mid X_{\{1,\dots,n\}\setminus\{i,j\}} \in I(p)$.

לכן באמת מתקיים: $I_{pair}(G)\subseteq I(p)$.

ב. נניח: $(i,j)\in E(G)$ אז נבנה את הגרף G' כך ש: $E(G')=E(G)\setminus\{(i,j)\}$ ונרצה להראות ש: $I_{sep}(G')\not\subseteq I(p)$.

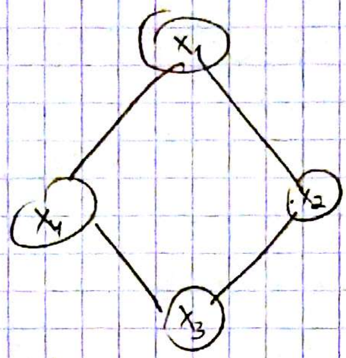
מכיוון ש: $(i,j)\in E(G)$ מתקיים לפי בניית הגרף G ש: $X_i \perp X_j \mid X_{\{1,\dots,n\}\setminus\{i,j\}} \notin I(p)$ אבל מצד שני $X_i \perp X_j \mid X_{\{1,\dots,n\}\setminus\{i,j\}} \in I_{sep}(G')$ כי ב-G' אין קשת בין i ל-j ולכן שאר הגרף כן מפריד ביניהם.

לסיכום כל קשת שנסיר מהגרף G יגרום לכך שהתנאי $I_{sep}(G')\subseteq I(p)$ כבר לא יתקיים, אז: G הוא אכן I-map מינימלי.

שאלה 6

נראה כי ההתפלגות הנתונה מקיימת את $I_{sep}(G)$ (כלומר $I_{sep}(G)\subseteq I(P)$) אך P אינה factorize מעל G.

נסתכל על הגרף G הבא:



אפשר לראות שההתפלגות הנ"ל מקיימת את האילוצים המותנים הנדרשים: למשל $X_2 \perp X_4 \mid X_1, X_3$ כי

$$P(X_2 \mid X_4, X_1, X_3) = P(X_2 \mid X_1, X_3)$$

[לא נחשב כאן את כל ההסתברויות אבל זהו תרגיל פשוט לחשב עבור כל ערך אפשרי ל- X_1, X_2, X_3, X_4 את שתי ההסתברויות המותנות הנ"ל ולהיווכח שהן שוות וכך גם לתלות הנוספת שנמצאת ב- $I_{sep}(G)$: $X_1 \perp X_3 \mid X_2, X_4$]

ניתן להראות ש-P לא מתפלגת לפי G:

נניח בשלילה שכן, כלומר ש-P כן מתפלגת לפי G ולכן ניתן לכתוב את ההתפלגות P כך

$$P(X_1, X_2, X_3, X_4) = \frac{1}{Z}\cdot \sum_{c\in C} \phi_c(x_c)$$

$$= \frac{1}{Z}\cdot \phi_{1,2}\cdot \phi_{1,4}\cdot \phi_{2,3}\cdot \phi_{3,4}$$

C - קבוצת הקליקות המקסימליות בגרף G

לכן בפרט:

$$P(1,0,1,1) = \frac{1}{Z}\cdot \phi_{1,2}(1,0)\cdot \phi_{1,4}(1,1)\cdot \phi_{2,3}(0,1)\cdot \phi_{3,4}(1,1) \overset{\text{מהנתון על } P}{=} 0$$

$$P(1,0,0,0) = \frac{1}{Z}\cdot \phi_{1,2}(1,0)\cdot \phi_{1,4}(1,0)\cdot \phi_{2,3}(0,0)\cdot \phi_{3,4}(0,0) = \frac{1}{8}$$

ולכן כל הגורמים שונים מ-0 ובפרט $\phi_{1,2}(1,0)\neq 0$

באופן דומה:

$$P(1,1,1,1) = \frac{1}{Z} \cdot \phi_{1,2}(1,1)\, \phi_{1,4}(1,1) \cdot \phi_{2,3}(1,1) \cdot \phi_{3,4}(1,1) = \frac{1}{8}$$

ולכן שוב מתקיים כבר ש- $\boxed{\phi_{3,4}(1,1) \neq 0}$ ו- $\boxed{\phi_{1,4}(1,1) \neq 0}$

ואחרון

$$P(0,0,1,1) = \frac{1}{Z} \cdot \phi_{1,2}(0,0) \cdot \phi_{1,4}(0,1) \cdot \phi_{2,3}(0,1)\, \phi_{3,4}(1,1) = \frac{1}{8}$$

ונקבל ש-

$$\boxed{\phi_{2,3}(0,1) \neq 0}$$

סה"כ 4 הגורמים המופיעים ב- $P(1,0,1,1)$ שונים מ-0 אך מכפלתם $= 0$ $\longrightarrow$ סתירה

שאלה 7

נוכיח את הטענה באינדוקציה על מספר הקודקודים בעץ G.

בסיס: קודקוד אחד: טריוויאלי $\left[P(x_1) = P(x_1)\right]$

מעבר: נניח נכונות לעץ בגודל $n-1$.

נוכיח לעץ בגודל n. לכל עץ (עם 2 קודקודים לפחות) קיימים לפחות 2 עלים

נסמן ב- x_n את אחד העלים ב-G

נסיר מ-G את העלה x_n ונקבל עץ G' עם $n-1$ קודקודים. לפי הנחת האינדוקציה:

$$P(x_1 \ldots x_{n-1}) = \prod_{i=1}^{n-1} P(x_i) \cdot \prod_{(i,j)\in E'} \frac{P(x_i, x_j)}{P(x_i)\cdot P(x_j)}$$

לפי טענת עזר שנוכיח בהמשך, גם P על G' היא רשת מרקובית. כמו כן

$$P(x_1 \ldots x_n) = P(x_1 \ldots x_{n-1})\, P(x_n \mid x_1 \ldots x_{n-1}) =$$

$$\overset{(*)}{=} P(x_1 \ldots x_{n-1}) \cdot P(x_n \mid x_{n-1})$$

(*) ראה הסבר בדף הבא

הסבר לצעד האחרון: x_n הוא עלה וכן יחד עם x_{n-1} הוא ההורה של x_n ב-G. לכן בין x_{n-1} ו-x_n מופרד משאר הגרף (הדרך היחידה להגיע לעלה היא דרך ההורה שלו בעצם).

נמשיך:

$$= \left(\prod_{i=1}^{n-1} P(x_i) \cdot \prod_{(i,j)\in E'} \frac{P(x_i,x_j)}{P(x_i)\cdot P(x_j)}\right) \cdot \frac{P(x_{n-1},x_n)}{P(x_{n-1})}$$

$$= \left(\prod_{i=1}^{n-1} P(x_i)\left(\prod_{(i,j)\in E'} \frac{P(x_i,x_j)}{P(x_i)P(x_j)}\right)\right) \frac{P(x_{n-1},x_n)\cdot P(x_n)}{P(x_{n-1})\cdot P(x_n)} =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} P(x_i)\left(\prod_{(i,j)\in E} \frac{P(x_i,x_j)}{P(x_i)\cdot P(x_j)}\right)$$

כנדרש

<u>למת עזר</u>: יהי P רשת מרקוביות על עץ G ו-y עלה ב-G. יהי G' העץ המתקבל מ-G אחרי הסרת הקודקוד y. נסמן ב-X את קודקודי G'. אזי:

$$P_G(X) = P_{G'}(X)$$

<u>הוכחה</u>:

$$P_G(X) = \sum_y P_G(X,y) =$$

$$= \sum_y \frac{1}{Z} \prod_{e=(i,j)\in E(G)} \phi_{i,j}(x_i,x_j) =$$

עבור הקודקודים המקסימליים בגודל 2.

$$= \sum_y \frac{1}{Z}\left(\prod_{\substack{e=(i,j)\in E \\ i,j\neq y}} \phi_{i,j}(x_i,x_j)\right)\cdot \phi_{x_k,y}(x_k,y) =$$

כאשר x_k הוא הקודקוד היחיד המחובר ל-y בעץ G

$$= \frac{1}{Z}\prod_{\substack{e=(i,j)\in E(G) \\ i,j\neq y}} \phi_{i,j}(x_i,x_j) \sum_y \phi_{x_k,y}(x_k,y) \propto \prod_{\substack{e=(i,j)\in \\ E(G')}} \phi_{i,j}(x_i,x_j)$$

כנדרש $\propto P_{G'}(X)$