FYZIKÁLNÍ PRAKTIKUM I
FJFI ČVUT v Praze

Úloha #1
Cavendishův experiment

Datum měření:	15.11.2013	Skupina:	7
Jméno:	David Roesel	Kroužek:	ZS 5
Spolupracovala:	Tereza Schönfeldová	Klasifikace:	

1 Pracovní úkoly

1. V přípravě odvoďte vztah pro maximální odhad relativní chyby měření G. Potřebné informace najdete na *http://praktikum.fjfi.cvut.cz/documents/chybynav/chyby-o.pdf* na straně 1 až 4.
2. Ve spolupráci s asistentem zkontrolujte, zda je torzní kyvadlo horizontálně vyrovnané.
3. Dynamickou metodou změřte časový průběh torzních kmitů v jedné poloze, potom umístěte velké koule m_1 do polohy II a změřte časový průběh v této druhé poloze. U každého měření si poznamenejte i chybu tohoto měření, kterou odhadnete (čím rychleji se světelná značka pohybuje, tím větší bude chyba určení její polohy).
4. Naměřenou závislost nafitujte funkcí (8) ve vhodném programu (kupříkladu Gnuplot) a vykreslete graf naměřených dat včetně odchylek a nafitované funkce.
5. Z výsledku fitu a naměřených hodnot spočtěte gravitační konstantu G i s výslednou chybou měření, kterou spočtěte z Vámi odvozeného vztahu z přípravy (úkol 1). Většina fitovacích programů uvádí parametry funkce i s jejich chybou - tuto chybu potom považujte za chybu měření a dosazujte ji do odvozeného vztahu.
6. Výsledek měření gravitační konstanty G srovnejte s tabulkovou hodnotou G_t a ověřte, jestli se tabulková hodnota vejde do intervalu *naměřená hodnota* $\pm$ *chyba měření*.

2 Vypracování

2.1 Použité přístroje

Torzní kyvadlo, zemnící kabel, He-Ne laser, ochranné brýle (modré), podstavec pod laser, stopky, mobilní telefon, svinovací metr.

2.2 Teoretický úvod

2.2.1 Gravitační konstanta

S gravitační silou se setkáváme neustále. Gravitační síly mají přitažlivý charakter, působí na všechny hmotné částice a Isaac Newton pro ně formuloval zákon

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{1}$$

kde F je velikost gravitační síly a m_1, m_2 hmotnosti těles, mezi kterými tato síla působí. Pomocí torzního kyvadla nalezl metodu vyčíslení gravitační konstanty G v roce 1798 Henry Cavendish.

2.2.2 Torzní kyvadlo

Během torze dochází k rotačnímu pohybu jednotlivých částí lanka a k vyjádření míry zkroucení lanka stačí změřit úhel, o který se otočí jeden konec lanka v porovnání s druhým. K lanku je připevněna činka (jak je znázorněno na Obr. 1) sestávající ze dvou menších koulí (o hmotnostech m_1) a zrcátka, od kterého se odráží laserový paprsek. Pokud se k malým koulím přiloží koule větší (o hmotnostech m_2), vznikne v čince moment sil

$$\tau_f = 2d(F_1 - F_2). \tag{2}$$

Tento moment způsobí zkroucení lanka a pootočení činky a zrcátka o úhel θ. To vyvolá torzní moment $\tau_t = -k\theta$, kde k je konstanta zahrnující ve své hodnotě mechanické vlastnosti lanka. Pokud je systém v rovnováze, platí

$$\begin{aligned} \tau_f &= -\tau_t \\ 2d(F_1 - F_2) &= k\theta, \end{aligned} \tag{3}$$

odkud se úpravami můžeme dostat ke tvaru

$$\frac{2dGm_1m_2}{b^2}(1-\beta) = k\theta, \qquad \beta = \frac{b^3}{(b^2+4d^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{4}$$

přičemž β se nazývá geometrický faktor, G je gravitační konstanta a b, d jsou vzdálenosti vyznačené na Obr. 1. Z Obr. 2a můžeme potom vykoukat další vztahy, které pro systém platí, jako například ten pro výpočet úhlu θ

$$\tan(2\theta) \simeq 2\theta = \frac{S}{2L} = \frac{|S^2 - S^1|}{2L}. \tag{5}$$

Torzní konstantu k určíme z doby kyvu T a ze znalosti momentu setrvačnosti činky

$$T^2 = \frac{4\pi^2 I}{k}, \tag{6}$$

kde I je moment setrvačnosti činky. Za použití Steinerovy věty a nakombinováním všech předchozích vzorců podle [1] dostáváme pro výpočet gravitační konstanty

$$G = \frac{\pi^2 b^2 S}{T^2 m_2 L}\frac{d^2 + \frac{2}{5}r^2}{d(1-\beta)}, \qquad \beta = \frac{b^3}{(b^2+4d^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{7}$$

2.2.3 Tlumené kmity

V rámci analýzy dat zjišťujeme parametry T a S proložením naměřených hodnot funkcí pro tlumené harmonické kmity, která má tvar

$$f(t) = Ae^{-\delta t}\sin\left(\frac{2\pi}{T^{(1,2)}}t + \varphi\right) + S^{(1,2)}. \tag{8}$$

2.2.4 Domácí úkol

Maximální odhad chyby můžeme podle [2] spočítat pomocí vzorce

$$\Delta\omega = \left|\frac{\partial\omega}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial\omega}{\partial y}\right|\Delta y + \dots \tag{9}$$

Pro náš výpočet gravitační konstanty G potom pomocí

$$\Delta G = \left|\frac{\partial G}{\partial S}\right|\Delta S + \left|\frac{\partial G}{\partial T}\right|\Delta T + \left|\frac{\partial G}{\partial L}\right|\Delta L, \tag{10}$$

kde ΔS je součet chyb σ_{S_1} a σ_{S_2}, ΔT chyba spočítaná podle (15) z hodnot T_1, T_2 a jejich chyb a ΔL chyba σ_L.

2.3 Postup měření

Torzní kyvadlo jsme nevyrovnávali, jelikož nám bylo řečeno, že je vyrovnané dobře. V případě, že by nebylo, bychom to poznali na křivosti pohybu laseru po stěně a vzhledem k tomu, že se odraz laseru pohyboval pouze po měřítku, můžeme říct, že bylo vyrovnané dostatečně. Vyrovnání provádíme proto, aby na námi měřené hodnoty nemělo vliv gravitační pole Země. Dalším z externích vlivů, který jsme museli před začátkem měření eliminovat, byla možnost působení elektrostatické síly. Toho jsme dosáhli uzemněním aparatury k tomu určeným vodičem.

Během měření zaznamenáváme výchylku činky v čase a proložením funkcí pro tlumené harmonické kmity (8) určíme parametry S_1, S_2, T_1 a T_2, tedy hodnoty rovnovážných poloh a period při obou dvou polohách velkých koulí. Před měřením bylo potřeba změřit vzdálenost zrcátka od stěny s měřítkem. Vlastní měření jsme prováděli podle následujícího postupu:

1. Odaretujeme kyvadlo, zapneme laser a nasměrujeme ho na zrcátko tak, aby jeho odraz kmital přibližně kolem středu stupnice na protější stěně.
2. Kyvadlo necháme ustálit (řádově desítky minut) a ujistíme se, že v krajních polohách nedochází k odrazu činky od stěn.
3. Na k tomu určené nástavce opatrně umístíme větší koule a jemně je posuneme tak, aby se dotýkaly stěn.
4. Opět se ujistíme, že jsme nijak nenarušili pohyb soustavy a necháme kmity ještě chvíli ustálit.
5. Následně zaznamenáváme každých 20 sekund polohu odrazu laseru na měřítku po dobu zhruba 25 minut.
6. Po naměření hodnot přesuneme těžší koule do druhé polohy a opakujeme předchozí dva body.

Chybu každé naměřené hodnoty určíme z okamžité rychlosti tečky laseru jako dráhu, kterou při ní mohl urazit, za čas, jaký trvá hodnotu odečíst a který jsme určili přibližně na $t_{od} = 1$ s.

2.4 Naměřené hodnoty

Naměřené hodnoty jsou uvedeny v Tab. 1 a vyneseny do grafů na Obr. 3 a 4. V tabulce kromě naměřených hodnot uvádíme hodnoty ze zadání [1], které bereme jako absolutně přesné konstanty. Z těchto zadaných a naměřených hodnot jsme pak podle (7) určili gravitační konstantu s horním odhadem chyby (10) jako

$$G = (6{,}4 \pm 0{,}6) \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}. \tag{11}$$

r [mm]	d [mm]	b [mm]	m_2 [kg]	β [-]	$L \pm \sigma_L$ [m]
9,55	50,7	45	1,24	0,066744	$6{,}00 \pm 0{,}05$

$S_1 \pm \sigma_{S_1}$ [cm]	$S_2 \pm \sigma_{S_2}$ [cm]	$S \pm \Delta_S$ [cm]	$T_1 \pm \sigma_{T_1}$ [s]	$T_2 \pm \sigma_{S_2}$ [s]	$T \pm \Delta_T$ [s]
$104{,}2 \pm 0{,}8$	$114{,}9 \pm 0{,}2$	$10{,}7 \pm 0{,}8$	$498{,}4 \pm 0{,}4$	499 ± 3	499 ± 2

Tab. 1: Tabulka zadaných a naměřených hodnot; r, d, b a m_2 jsou zadané hodnoty [1], β je z nich vypočítaná konstanta, $L \pm \sigma_L$ je vzdálenost zrcátka od měřítka na stěně, S, Δ_S rozdíl rovnovážných poloh S_1 a S_2 se svou chybou a T, Δ_T perioda kmitů se svou chybou spočítaná jako průměr T_1 a T_2.

2.5 Diskuse

Nejméně přesným článkem celého měření bylo asi určování vzdálenosti zrcátka od měřítka na stěně. Vzhledem k tomu, že byl svinovací metr dlouhý pouze pět metrů a vzdálenost ke stěně se pohybovala kolem šesti, bylo nutné použít připravený provázek. Měření jsme prováděli podél stěny, ale provázek nebyl pravděpodobně dokonale napnut, nekončil přesně na úrovni zrcátka a jeho překládáním mohlo dojít k dalším chybám. Stěna, podél které jsme měřili, navíc také nemusela být kolmá na tu s měřítkem.

Gravitační konstanta má podle tabulek [4] vycházet jako $G_t = (6{,}6738 \pm 0{,}0008) \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg}^{-2}$. Nám se ji podařilo určit na $G = (6{,}4 \pm 0{,}6)\ \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg}^{-2}$, což tabulkové hodnotě odpovídá. V případě, že bychom místo horního odhadu chyby (10) použili standardní chybu nepřímého měření (15), tabulková hodnota by už neležela v chybovém intervalu našeho výsledku. Dá se tedy předpokládat, že docházelo k systematickým chybám. Nepřesnost výsledku mohla být způsobena nevyváženou původní pozicí aparatury, kterou jsme nekontrolovali, již zmíněným nepřesným změřením vzdálenosti zrcátka od měřítka nebo systematicky chybným odečítáním jedné sady měření ze stupnice na stěně. Výsledek by se dal dále lehce ovlivnit vybráním jiné podmnožiny výsledků z naměřených dat.

3 Závěr

V přípravě jsme odvodili vztah pro maximální odhad relativní chyby měření G. Asistent nám zaručil, že je torzní kyvadlo horizontálně vyrovnané a pak jsme dynamickou metodou změřili časový průběh torzních kmitů ve dvou různých polohách. Naměřenou závislost jsme nafitovali patřičnou funkcí (8) a vykreslili jsme graf včetně odchylek (Obr. 3, 4). Z výsledků fitů a naměřených hodnot jsme určili gravitační konstantu i s výslednou chybou měření na $G = (6{,}4 \pm 0{,}6)\ \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg}^{-2}$. Námi změřenou hodnotu jsme pak porovnali s tabulkovou a diskutovali její správnost.

4 Použitá literatura

[1] Kolektiv KF, *Návod k úloze: Cavendishův experiment* [Online], [cit. 9. února 2014]
http://praktikum.fjfi.cvut.cz/pluginfile.php/80/mod_resource/content/7/Cavendish_v1.pdf

[2] Petr Chaloupka, *Jak zpracovávat data* [Online], [cit. 9. února 2014]
https://dl.dropboxusercontent.com/u/11296940/zfm/h3.pdf

[3] Kolektiv KF, *Chyby měření* [Online], [cit. 9. února 2014]
http://praktikum.fjfi.cvut.cz/documents/chybynav/chyby-o.pdf

[4] J. Mikulčák a kol., Matematické, fyzikální a chemické tabulky & vzorce. Prometheus, Praha 2009.
ISBN 978-80-7196-264-9

Část I

Přílohy

4.1 Domácí příprava

Domácí příprava je přiložena k protokolu.

4.2 Statistické zpracování dat

Pro statistické zpracování využíváme aritmetického průměru:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \tag{12}$$

jehož chybu spočítáme jako

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}, \tag{13}$$

kde x_i jsou jednotlivé naměřené hodnoty, n je počet měření, $\overline{x}$ aritmetický průměr a σ_0 jeho chyba [3].
Při nepřímém měření počítáme hodnotu s chybou dle následujících vztahů:

$$u = f(x, y, z, \ldots), \tag{14}$$

$$x = (\overline{x} \pm \sigma_x), \qquad y = (\overline{y} \pm \sigma_y), \qquad z = (\overline{z} \pm \sigma_z), \qquad \ldots,$$

kde u je veličina, kterou určujeme nepřímo z měřených veličin $x, y, z, \ldots$
Pak

$$\overline{u} = f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \ldots),$$

$$\sigma_u = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \sigma_z^2 + \ldots}, \tag{15}$$

$$u = (\overline{u} \pm \sigma_u).$$

V případě, že máme několik různě přesných měření stejné veličiny, používáme vztah pro vážený průměr:

$$\bar{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i}, \tag{16}$$

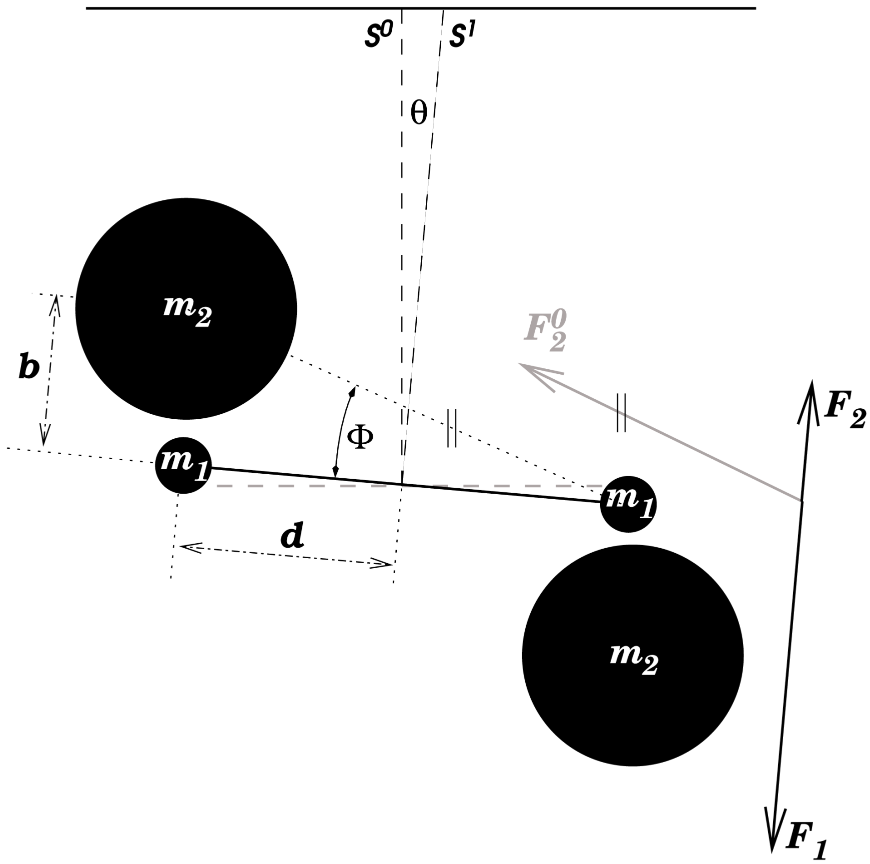
kde $\bar{x}$ je vážený průměr, x_i jsou jednotlivá měření a pro p_i platí

$$p_i = \frac{1}{\sigma_i^2}, \tag{17}$$

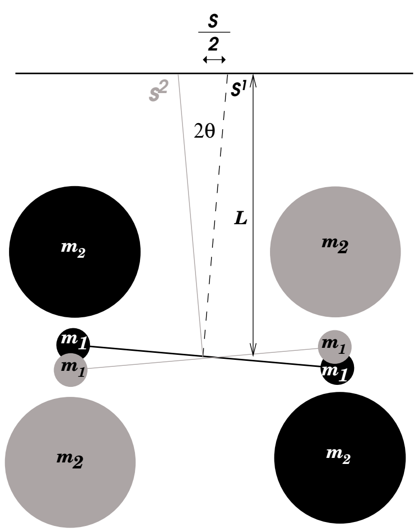
kde σ_i jsou jednotlivé chyby daných měření.
Celkovou chybu tedy vypočítáme ze vztahu

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i}}. \tag{18}$$

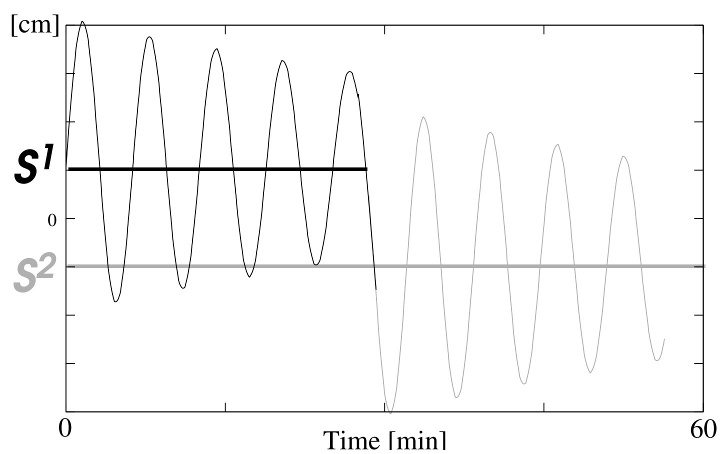
4.3 Schémata



Obr. 1: Schéma zapojení z [1].



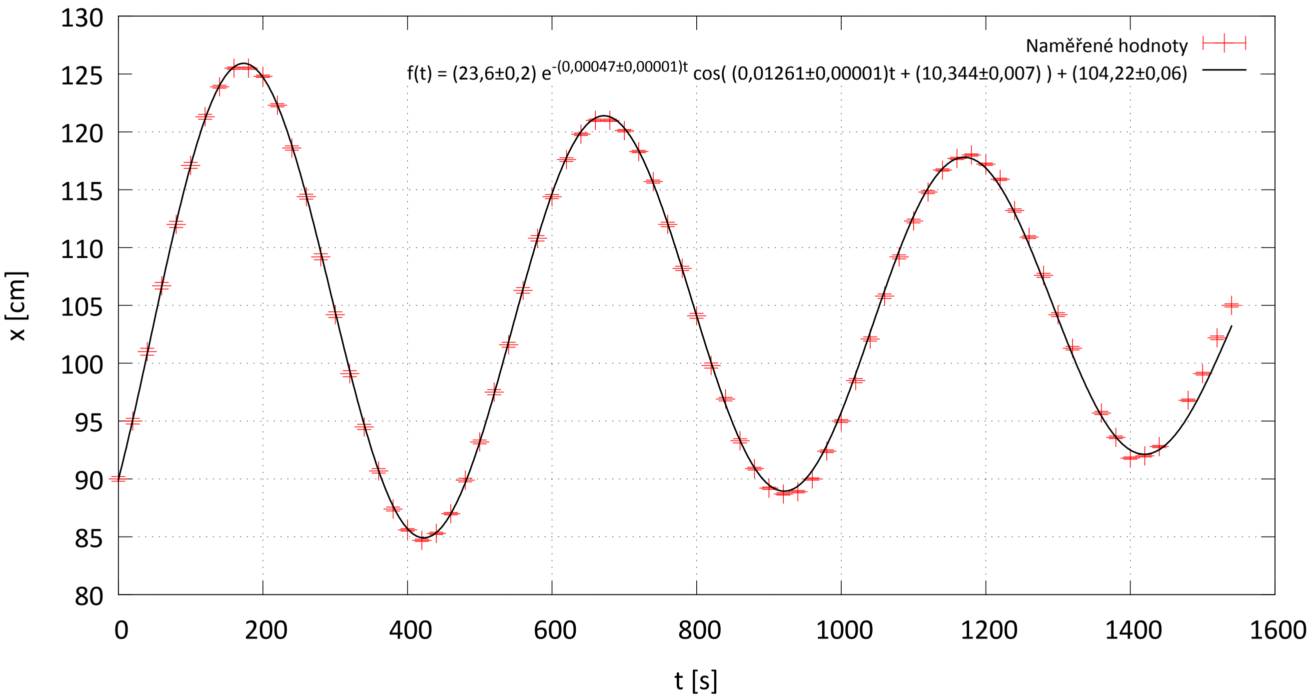
(a) Rozložení koulí



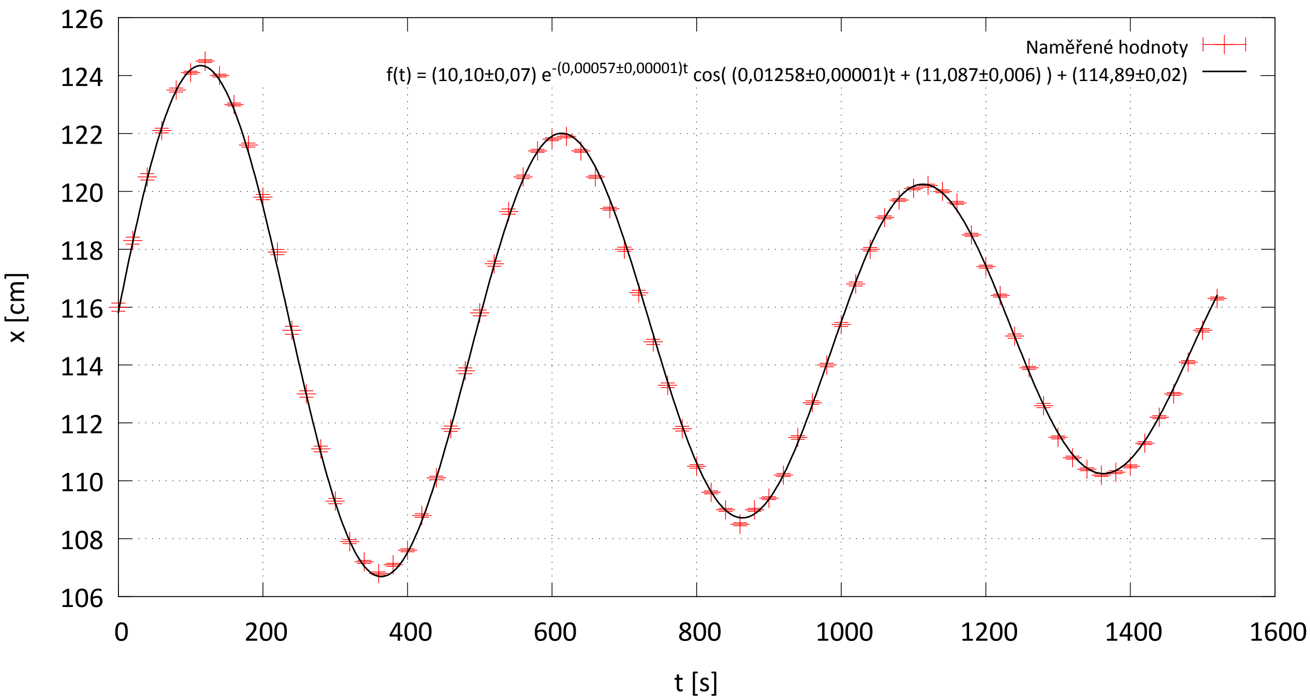
(b) Průběh měření v čase

Obr. 2: Schéma zapojení z [1].

4.4 Grafy



Obr. 3: Graf závislosti pozice x na čase t při měření v první poloze. Proložením funkcí pro tlumené harmonické kmity (8) jsme určili periodu a rovnovážnou polohu.



Obr. 4: Graf závislosti pozice x na čase t při měření v druhé poloze. Proložením funkcí pro tlumené harmonické kmity (8) jsme určili periodu a rovnovážnou polohu.