

Datum měření: 18.10.2013

Skupina: 7

Jméno: David Roesel

Kroužek: ZS 5

Spolupracovala: Tereza Schönfeldová Klasifikace:

1 Pracovní úkoly

- Domácí úkol:** Spočítejte, jakou vlastní a vyšší harmonické frekvence má struna napjatá zátěží 5 kg o délce 1 metr víte-li, že její lineární hustota je $\rho_l = 0,0162 \text{ kgm}^{-1}$.
- Do vzorce z předchozího úkolu dosadte délku struny v praktiku a spočítejte totéž. Ověřte experimentálně pro prvních 10 rezonančních frekvencí. Z naměřených vyšších harmonických frekvencí zpětně dopočítejte lineární hustotu (použijte metodu nejmenších čtverců) a porovnejte s uvedenou konstantou. Dopočítejte rychlost šíření vlnění na struně.
- Pro cca 10 různých frekvencí v rozsahu 2 až 6 kHz hledejte interferenční minima (nebo maxima) prodlužováním a zkracováním Quinckovy trubice. Vyneste do grafu závislost vlnové délky zvuku (prodloužení trubice) na frekvenci. Z naměřených údajů dopočítejte rychlost zvuku proložením naměřených hodnot s errorbary vhodnou funkcí.
- Najděte vlastní frekvence Helmholtzova dutinového rezonátoru. Vyneste závislost vlastní frekvence na objemu rezonátoru (změnu objemu rezonátoru provádějte vléváním vody). Vodu přilévejte po 50 ml a pouze do poloviny objemu. Pro hledání vlastní frekvence využijte Fourierovské frekvenční analýzy. Z naměřených hodnot určete rychlost zvuku proložením naměřených hodnot vhodnou funkcí.

2 Vypracování

2.1 Použité přístroje

Elektronický generátor kmitů s nastavitelnou frekvencí a amplitudou, generátor mechanického vlnění, kovová struna, závaží 5 kg, svinovací metr, vodiče, teploměr, Quinckova trubice, mikrofon, bateriový zesilovač, mikrofon se zesilovačem, reproduktor, osciloskop, Helmholtzův rezonátor (skleněná baňka), rozhraní COBRA, program PHYWE [3], kádinka.

2.2 Teoretický úvod

2.2.1 Stojaté vlnění na struně

K určení lineární hustoty struny využíváme vzorce

$$f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}} = a \cdot n, \quad a = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho}}, \quad (1)$$

kde f_n je frekvence n -tého módu, L délka struny, $T = mg$ napětí na struně a ρ lineární hustota struny. Pomocí lineárního proložení závislosti $f_n(n)$ určíme parametr a a z něj pak podle druhého vzorce lineární hustotu ρ . Pro rychlost šíření platí vztahy

$$v = f_n \lambda_n, \quad \lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad (2)$$

kde v je rychlost šíření vlny na struně, L délka struny, f_n frekvence n -tého módu a λ_n jeho vlnová délka.

2.2.2 Quinckova trubice

Quinckova trubice rozděluje zvuk do dvou různých větví, které spolu na výstupu interferují. Posunem jednoho z ramen můžeme měnit dráhu, kterou zvuk urazí v jedné z trubic, což mění fázi, se kterou interferují (a zároveň dochází k většímu tlumení amplitudy na delším rameni). Minimum naměřené intenzity nastává při podmínce

$$\frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{2n+1}{2} \cdot \pi \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3)$$

což lze vyjádřit jako

$$d_n = \frac{2n+1}{2} \cdot \lambda \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4)$$

Vzdálenost mezi dvěma sousedními minimy odpovídá přesně polovině vlnové délky

$$\Delta d = d_{n+1} - d_n = \frac{\lambda}{2}. \quad (5)$$

Známe-li frekvenci vlnění f (nastavujeme ji na generátoru), bude pro rychlost zvuku platit vztah

$$2\Delta d = \lambda = \frac{v}{f}. \quad (6)$$

2.2.3 Helmholtzovy rezonátory

Helmholtzův rezonátor v obecné podobě je pro nás systém sestávající se z okrouhlé dutiny a dlouhé trubice, která do ní vede. Platí-li předpoklad, že je délka trubice malá ve srovnání s vlnovou délkou zvuku, můžeme základní rezonanční frekvenci vyjádřit jako

$$f = \frac{v}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi r^2}{(l + 1,4 \cdot r)} \frac{1}{V}}, \quad (7)$$

kde v je rychlost zvuku, l délka hrdla baňky, r poloměr hrdla baňky a V objem dutiny. Tento vzorec je však pouze přibližný a platí pouze, je-li objem hrdla mnohem menší, než objem dutiny. Proto pro menší objemy dutiny neplatí moc přesně. Pro 1000ml baňku jsou tyto hodnoty následující: $r = 0,0187$ m, $l = 0,07$ m, $V = 0,00103$ m³.

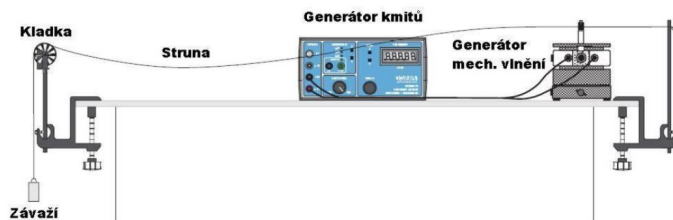
2.3 Postup měření

2.3.1 Stojaté vlnění na struně

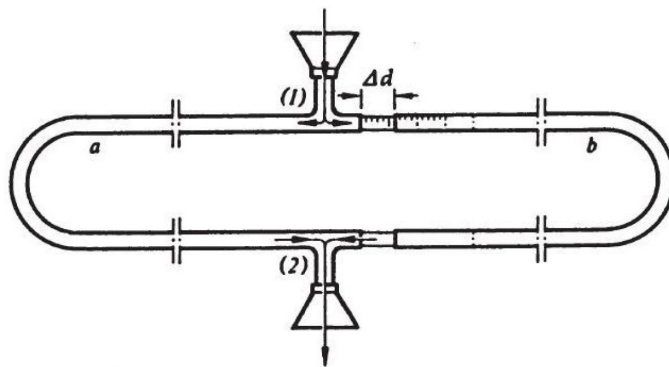
Nejdříve jsme sestavili aparaturu podle obrázku 1 a pak měřili podle následujícího postupu:

1. Změříme délku struny od kladky po místo, kde je zaháknutá do generátoru mechanického vlnění.
2. Na generátoru nastavíme předpokládanou frekvenci (21,26 Hz) prvního módu.
3. Najdeme nejmenší možnou amplitudu, aby byly módy vidět.
4. Ladíme jemněji frekvenci, dokud nenarazíme na další mód a zapíšeme jeho řád a frekvenci.
5. Snížíme amplitudu, zdvojnásobíme frekvenci a znovu amplitudu zvýšíme.
6. Kroky 4 a 5 opakujeme pro všechny hledané módy (6-10).

Při rozpoznávání módu jsme si museli dávat pozor na to, aby se amplituda kmitů periodicky neměnila. Pokud by se tak dělo, docházelo by k tzv. záznějům a bylo by nutné frekvenci dále ladit.



Obr. 1: Experimentální soustava pro pozorování stojatého vlnění na struně [1].



Obr. 2: Schéma Quinckovy trubice [1].

2.3.2 Quinckova trubice

Schéma Quinckovy trubice je vidět na obrázku 2. Měření jsme prováděli pro 10 různých frekvencí a postupovali jsme následovně:

1. Začneme s nulovým rozdílem ramen (tedy $\Delta d = 0$).
2. Na generátoru nastavíme přibližně frekvenci (začínáme na 2,1 kHz, s každým měřením o 0,4 kHz zvýšíme) a ladíme ji tak, aby byl signál na osciloskopu stabilní (nejezdil z jedné strany na druhou).
3. Příslušně nastavíme parametry osciloskopu.
4. Měníme prodloužení jednoho z ramen, dokud nenarazíme na minimum. V té chvíli zapíšeme prodloužení d .
5. Předchozí krok opakujeme, dokud neprodloužíme rameno maximálně.

2.3.3 Helmholtzovy rezonátory

Nastavili jsme aparaturu podle obrázku 9 z dokumentu [1]. Při měření jsme měnili frekvenci na generátoru a v programu PHYWE [3] studovali fourierovskou analýzu signálu. Nedbali jsme na první peak a hledali takovou frekvenci, při které byla amplituda druhého peaku maximální. Frekvenci jsme si v takový moment zapsali jako rezonanční a celý postup opakovali pro různý objem baňky. Vodu jsme dolévali po 50 ml až do 0,5 l a celé měření jsme provedli dvakrát za vystřídání členů skupiny.

2.4 Naměřené hodnoty

2.4.1 Stojaté vlnění na struně

Domácí úkol: podle vzorce 1 jsme pro délku struny $L = 1$ m, závaží o hmotnosti $m = 5$ kg a lineární hustotu $\varrho = 0,0162 \text{ kgm}^{-1}$ spočítali

$$f_n = \frac{1}{2 \cdot 1} \sqrt{\frac{5 \cdot 9,81}{0,0162}} \doteq 27,51 \text{ Hz.} \quad (8)$$

Pro délku struny v praktiku $L = (1,294 \pm 0,001)$ m jsme pak ze stejného vzorce dostali frekvenci $f_t = 21,26$ Hz.

Naměřené hodnoty jsou uvedeny v tabulce 1 a vyneseny do grafu 3, kde jsou lineárně proloženy. Z tohoto proložení dostáváme přímo hodnotu $a = (20,47 \pm 0,01)$. Pomocí druhé části vztahu 1 poté odvodíme lineární hustotu i s chybou na

$$\varrho = (174,8 \pm 0,2) \cdot 10^{-4} \text{ kg/m.} \quad (9)$$

Ze vztahu 2 poté dostáváme pro rychlost

$$v = (52,98 \pm 0,03) \text{ m/s.} \quad (10)$$

n [-]	f [Hz]	f_t [Hz]
1	20,48	21,26
2	40,84	42,52
3	61,53	63,79
4	81,85	85,05
5	102,80	106,31
6	122,73	127,57
7	143,50	148,83
8	163,61	170,09
9	183,75	191,36
10	204,80	212,62

Tab. 1: Hledání vyšších harmonických frekvencí na struně. Počet kmiten je n , naměřená n -tá vyšší harmonická frekvence f , teoretická vyšší harmonická frekvence podle výpočtu z domácího úkolu f_t .

2.4.2 Quinckova trubice

Naměřené hodnoty jsou uvedeny v tabulce 2 a vyneseny do grafu 4, kde jsou lineárně proloženy i s uvažováním chybových intervalů. Za použití vzorců 1 a 2 tak z fitu získáváme velikost rychlosti zvuku jako

$$v = (337 \pm 2) \text{ m/s.} \quad (11)$$

2.4.3 Helmholtzovy rezonátory

Naměřené hodnoty jsou uvedeny v tabulce 3 a vyneseny do grafu 5, kde jsou lineárně proloženy i s uvažováním chybových intervalů. Z tohoto proložení dostáváme přímo hodnotu $a = (5,57 \pm 0,02)$. Pomocí vztahu 7 poté odvodíme rychlost zvuku jako

$$v = (327 \pm 1) \text{ m/s.} \quad (12)$$

f [Hz]	Δd_1 [cm]	Δd_2 [cm]	Δd_3 [cm]	$\overline{\Delta d}$ [cm]	$\sigma_{\Delta d}$ [cm]	λ [cm]	σ_λ [cm]
2100	8,65	8,60	7,50	8,25	0,38	16,50	0,75
2500	6,60	7,00	7,20	6,93	0,18	13,87	0,35
2900	5,60	6,40	6,00	6,00	0,23	12,00	0,46
3300	5,00	4,70	6,10	5,27	0,43	10,53	0,85
3700	4,80	4,70	4,60	4,70	0,06	9,40	0,12
4100	4,25	4,05	4,40	4,23	0,10	8,47	0,20
4500	3,90	3,85	3,75	3,83	0,04	7,67	0,09
4900	3,50	3,50	3,55	3,52	0,02	7,03	0,03
5300	3,30	3,35	3,15	3,27	0,06	6,53	0,12
5700	3,10	2,90	3,20	3,07	0,09	6,13	0,18

Tab. 2: Měření interference zvuku pomocí Quinckovy trubice. f je frekvence nastavovaná na generátoru, $\Delta d_1, \Delta d_2, \Delta d_3$ naměřené hodnoty vzdáleností interferenčních minim, $\overline{\Delta d}$ jejich průměr, $\sigma_{\Delta d}$ chyba tohoto průměru, λ z toho spočítaná vlnová délka a σ_λ její chyba [14].

V [ml]	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	\overline{f} [Hz]	σ_f [Hz]
1030	178,2	177,9	178,1	0,1
980	179,8	181,8	180,8	1,0
930	181,2	186,6	183,9	2,7
880	186,7	191,1	188,9	2,2
830	195,9	196,1	196,0	0,1
780	202,2	200,9	201,6	0,6
730	209,0	206,9	208,0	1,1
680	215,3	213,9	214,6	0,7
630	223,3	220,0	221,7	1,7
580	232,2	228,5	230,4	1,8
530	241,8	236,6	239,2	2,6

Tab. 3: Měření vlastních frekvencí Helmholtzova rezonátoru. V je objem baňky, f_1 a f_2 naměřené frekvence, \overline{f} jejich průměr a σ_f chyba tohoto průměru [14].

2.5 Diskuse

2.5.1 Stojaté vlnění na struně

Od zhruba třetího módu dál začalo být přesnější určovat módy ne hledáním uzlů a kmiten na struně, ale podle tónu struny. Bez metody poslechu by nejspíš nebylo možné určit více než 6 módů. Výsledky by se daly zpřesnit, pokud bychom brali menší ohled na okolní experimenty a využili plného rozsahu amplitudy. Tóny by pak byly hlasitější a zřetelnější a hodnoty by se daly určit s ještě větší přesností. Při malých amplitudách bylo také těžší určovat, kdy velikost výchylky kolísá s časem a dochází tak k záznamům.

2.5.2 Quinckova trubice

Při teplotě 23 °C je tabulková hodnota [5] rychlosti zvuku ve vzduchu 345,5 m/s. Nám se ji podařilo určit pomocí fitu na $v = (345,2 \pm 0,04)$ m/s, což je velmi přesná hodnota. Rozhodli jsme se měřit vzdálenosti interferenčních minim, jelikož se nám zdálo snazší je určovat, při volbě maxim by se ale přesnost příliš nezměnila. Absolutních minim signálu jsme nedosáhli nikdy, jelikož v místnosti nebyl dostatečný klid. Vzhledem k tomu, že se naše frekvence

pohybovaly ve slyšitelném rozsahu, bylo třeba brát ohled na okolí a měření by šlo opět zpřesnit, pokud bychom využili celý rozsah nastavení amplitudy na generátoru. Při příštím měření by stálo za to měřit na úkor počtu frekvencí spíše více vzdáleností minim při každé z nich.

2.5.3 Helmholtzovy rezonátory

Tabulkovou hodnotu rychlosti zvuku ve vzduchu pro změřenou teplotu už jsme uváděli v diskusi metody s Quinckovou trubicí. Hodnota $v = (327 \pm 1)$ m/s se od ní liší ještě více než předchozí měření. Tato nepřesnost byla zapříčiněna více faktory. Hlavním problémem bylo, že jsme provedli pouze dvě sady měření, což sice splňuje zadání, ale nezdá se to být dost. Chyby aritmetických průměrů tohoto měření nejsou směrodatné a statistická chyba i díky tomu vychází zanedbatelně malá. K dalším nepřesnostem vedlo, že mělo zobrazování peaků na počítači značnou setrvačnost a často bylo velmi těžké najít správnou frekvenci. Dále by se hodilo mít možnost přesně určit objem vody a vzduchu v baňce, jelikož nepřesnost každého dolítí se zachovávala a chyby určování objemů dolité vody se tak sčítaly. Nepravděpodobným problémem je pak fakt, že byl mikrofón zapnutý (pravděpodobně od předchozího měření) už když jsme k úloze přišli. Je tedy možné, že v něm docházely baterie.

3 Závěr

Úspěšně jsme zjistili lineární hustotu struny a rychlost šíření vlny měněním frekvence při konstantním zatížení struny. Dále jsme určili přesněji a méně přesně rychlost zvuku pomocí metody Quinckovy trubice a Helmholtzova rezonátoru.

4 Použitá literatura

- [1] Kolektiv KF, *Návod k úloze: Akustika* [Online], [cit. 9. února 2014]
http://praktikum.fjfi.cvut.cz/pluginfile.php/126/mod_resource/content/4/akustika_16_10_12.pdf
- [2] Kolektiv autorů, *Repozitář zdrojů k praktiku* [Online] [cit. 9. února 2014]
<https://github.com/roesel/praktika>
- [3] Společnost PHYWE, *Katalog produktů* [Online], [cit. 9. února 2014]
<http://www.phywe.com/448/Product-Catalogue.htm>
- [4] Kolektiv KF, *Chyby měření* [Online], [cit. 9. února 2014]
<http://praktikum.fjfi.cvut.cz/documents/chybynav/chyby-o.pdf>
- [5] J. Mikulčák a kol., *Matematické, fyzikální a chemické tabulky & vzorce*. Prometheus, Praha 2009.
ISBN 978-80-7196-264-9

5 Přílohy

5.1 Domácí příprava

Domácí příprava je přiložena k protokolu.

5.2 Statistické zpracování dat

Pro statistické zpracování využíváme aritmetického průměru:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (13)$$

jehož chybu spočítáme jako

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (14)$$

kde x_i jsou jednotlivé naměřené hodnoty, n je počet měření, \bar{x} aritmetický průměr a σ_0 jeho chyba [4].

Při nepřímém měření počítáme hodnotu s chybou dle následujících vztahů:

$$u = f(x, y, z, \dots) \quad (15)$$

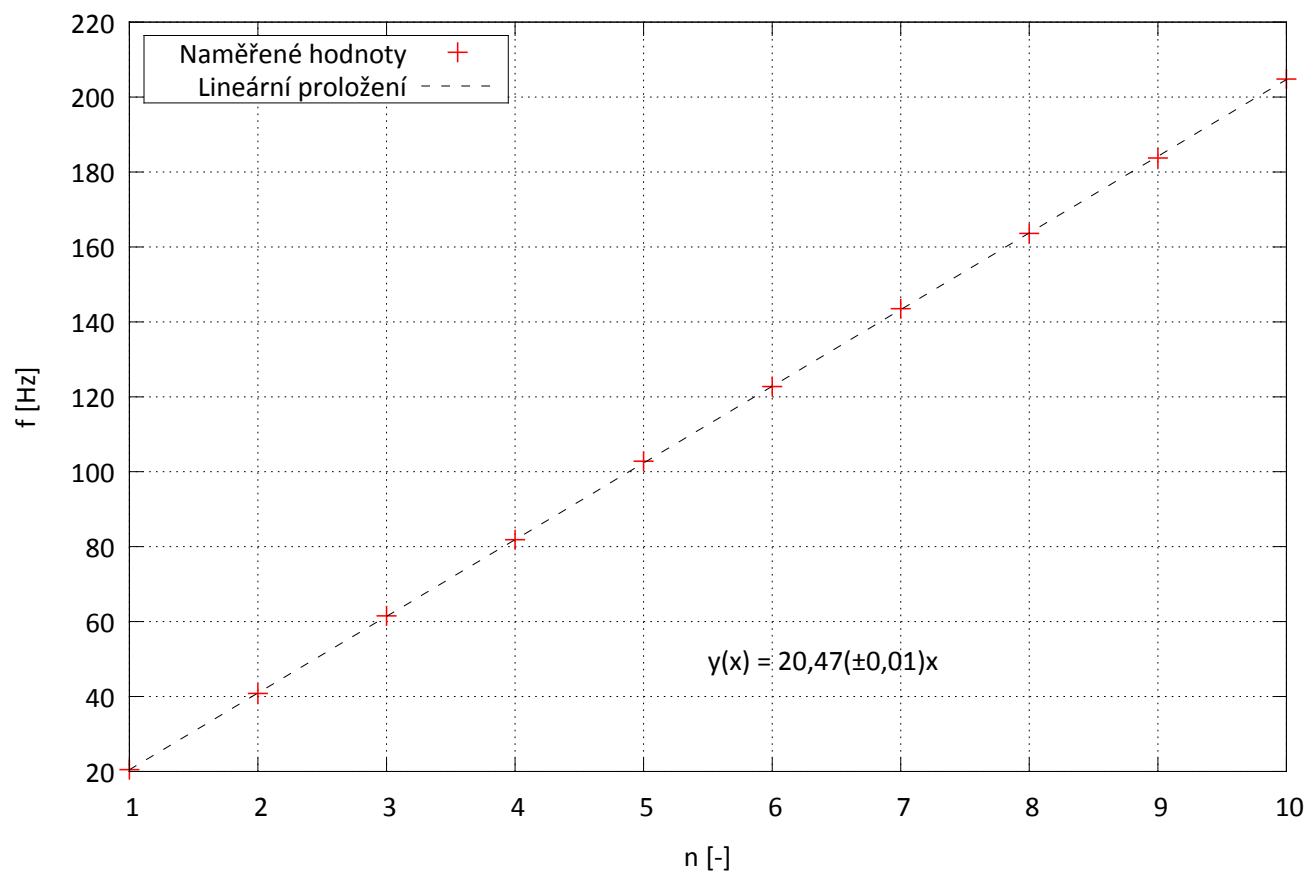
$$x = (\bar{x} \pm \sigma_x), \quad y = (\bar{y} \pm \sigma_y), \quad z = (\bar{z} \pm \sigma_z), \quad \dots,$$

kde u je veličina, kterou určujeme nepřímo z měřených veličin x, y, z, \dots

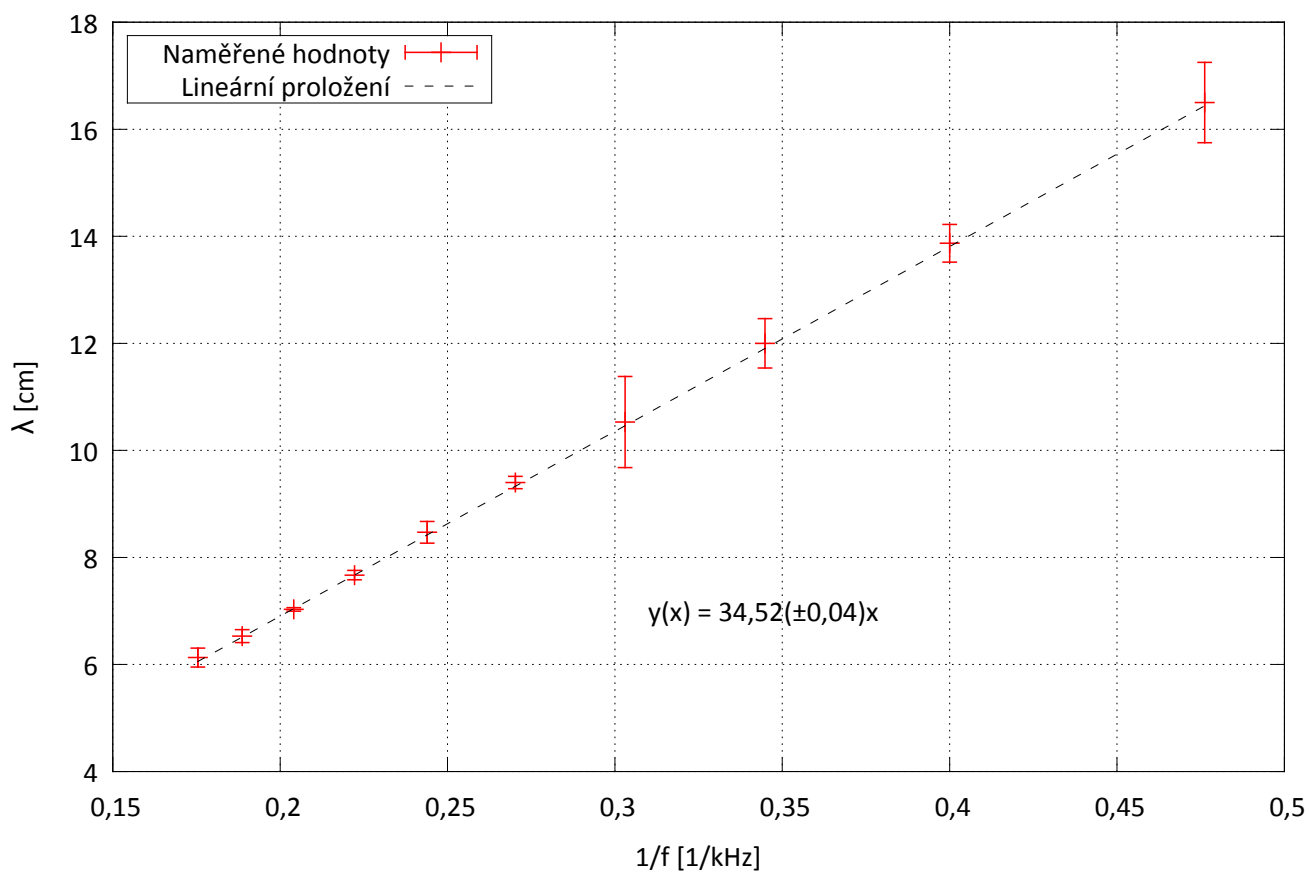
Pak

$$\begin{aligned} \bar{u} &= f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots) \\ \sigma_u &= \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \sigma_z^2 + \dots} \\ u &= (\bar{u} \pm \sigma_u), \end{aligned} \quad (16)$$

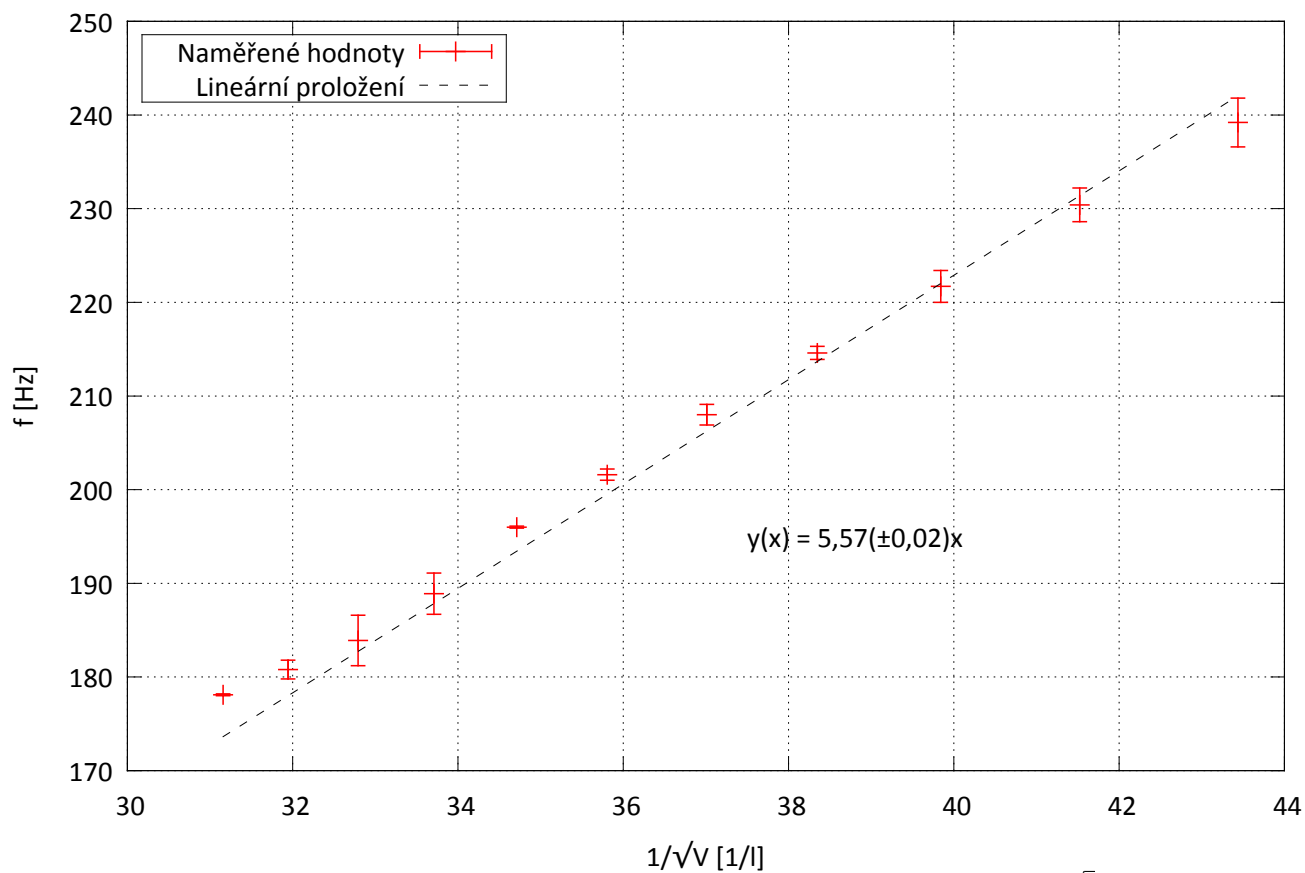
5.3 Grafy



Obr. 3: Graf měření frekvence f kmitání struny v závislosti na počtu kmiten n . Proloženo lineárním fitem.



Obr. 4: Graf měření vlnové délky zvuku λ v závislosti na převrácené hodnotě frekvence $1/f$ a lineárního fitu.



Obr. 5: Graf měření frekvence v závislosti na převrácené hodnotě odmocniny z objemu $1/\sqrt{V}$ a lineárního fitu zohledňujícího chyby jednotlivých hodnot.