Pohlovo torzní kyvadlo

Pomůcky: pomucka,

1 Základní pojmy a vztahy

Při odvození pohybové rovnice torzního kyvadla vyjdeme z Eulerových setrvačníkových rovnic vyjádřených v hlavních osách setrvačnosti (viz rovnice 4.40 v [1]):

$$I_i\,\dot{\Omega}_i + (I_k - I_j)\,\Omega_j\Omega_k = N_i,$$

kde I_i jsou momenty setrvačnosti, Ω_i jsou úhlové rychlosti a N_i jsou výsledné momenty sil působící na setrvačník. Vzhledem k tomu, že osa rotace kyvadla je upevněná, pak máme

$$\Omega_1(t) = \Omega_2(t) \equiv 0.$$

Tato vazba nám zredukuje tři pohybové rovnice na jednu

$$I\,\ddot{\varphi} = N(t, \varphi, \dot{\varphi}, \ldots),$$

kde $I = I_3$, $N = N_3$ a φ je úhel pootočení kolem osy z, tzn. $\dot{\varphi}(t) = \Omega_3(t)$.

Kmity kyvadla zajišťuje pružina, která při vychýlení kyvadla generuje mnohem větší sílu než je síla gravitační. Výsledný moment sil bude tedy potom zahrnovat moment sil generovaných pružinou a případně také moment sil tlumících (disipativních) generovaných cívkami napájených vířivými proudy

$$N = N_{\mathrm{P}} + N_{\mathrm{T}}.$$

Abychom dokázali vyřešit pohybovou rovnici pro netlumené kmity Pohlova kyvadla, musíme vyslovit předpoklad o analytickém vyjádření momentů sil. V našem případě budeme předpokládat, že

- *moment sil generovaných pružinou při vychýlení kyvadla je přímo úměrný odpovídajícímu úhlu pootočení kyvadla*

$$N_{\rm P} = -D\,\varphi(t),$$

kde $D > 0$. Konstantu úměrnosti D pak budeme nazývat tuhostí pružiny torzního kyvadla. Úhel *varphi* je radiánech.

- *moment tlumících sil při pohybu kyvadla je přímo úměrný odpovídající úhlové rychlosti kyvadla*

$$N_{\rm T} = -C\,\dot\varphi(t),$$

kde $C \geq 0$.

Pohybovou rovnice tedy můžeme přepsat do tvaru

$$\ddot\varphi(t) + 2\,\delta\,\dot\varphi(t) + \omega_0^2\,\varphi(t) = 0,$$

kde $\delta = \frac{C}{2\,I}$ a $\omega_0^2 = \frac{D}{I}$. Tato rovnice je analogická s pohybovou rovnicí (tlumeného) oscilátoru (viz kapitola 2.2.2 v [1]).

Protože se jedná o obyčejnou lineární diferenciální rovnici druhého řadu s konstantními koeficienty, její řešení $\varphi(t)$ bude vždy lineární kombinací dvou nezávislých základních řešení. Koeficienty příslušné lineární kombinace získáme naložením vhodných počátečních podmínek pro $\varphi(0)$ a $\dot\varphi(0)$. V naší úloze rozlišíme dva typy počátečních podmínek

podmínka polohová

$$\varphi(0) = \varphi_0 > 0 \quad \& \quad \dot\varphi(0) = 0,$$

podmínka rychlostní

$$\varphi(0) = 0 \quad \& \quad \dot\varphi(0) = \Omega_0 > 0.$$

Polohovou počáteční podmínku realizujeme vychýlením jazýčku kyvadla o úhel φ_0 a následným uvolněním. Rychlostní počáteční podmínku realizujeme ťuknutím do nevychýleného jazýčku kyvadla.

Typy základních řešení závisí na vztahu konstant δ a ω_0. Zde rozlišujeme tři případy: případ malého útlumu ($\omega_0 > \delta \geq 0$), případ kritického útlumu ($\omega_0 = \delta$) a případ silného útlumu ($\omega_0 < \delta$).

1.1 Případ malého útlumu

je řešení pohybové rovnice

$$\varphi(t) = \varphi_{max}\, e^{-\delta\, t}\, \sin\left(\omega\, t + \varphi_0\right)$$

které v případě nulového útlumu ($\delta = 0$) dává řešení netlumeného harmonického oscilátoru

$$\varphi(t) = \varphi_{max}\, \sin\left(\omega_0\, t + \varphi_0\right).$$

a platí

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

1.2 Případ kritického útlumu

V případě ($\omega_0 = \delta$) mají základní řešení tvar $e^{-\delta\, t}$ a $t\, e^{-\delta\, t}$ (ověřte, že skutečně obě tyto funkce vyhovují pohybové rovnici).

Při počáteční **polohové podmínce** řešení pohybové rovnice má tvar

$$\varphi(t) = \varphi_0\ (1 + \delta\, t)\ e^{-\delta\, t},$$

tzn. kyvadlo se bude vracet do nulové polohy bez toho, že by překmitlo na opačnou stranu (do oblasti, kde $\varphi(t) < 0$).

Při počáteční **rychlostní podmínce** řešení pohybové rovnice má tvar

$$\varphi(t) = \Omega_0\, t\, e^{-\delta\, t},$$

1.3 Případ silného útlumu

V případě ($\omega_0 < \delta$) mají základní řešení tvar $e^{-\delta\, t}\,\sinh\,(d\,t)$ a $e^{-\delta\, t}\,\cosh\,(d\,t)$, kde

$$d = \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

Při počáteční **polohové podmínce** řešení pohybové rovnice má tvar

$$\varphi(t) = \varphi_0\, e^{-\delta\, t}\, \left[\cosh\,(d\,t) + \frac{\delta}{d}\sinh\,(d\,t)\right].$$

Při počáteční **rychlostní podmínce** má řešení pohybové rovnice tvar

$$\varphi(t) = \frac{\Omega_0}{d}\, e^{-\delta\, t}\,\sinh\,(d\,t).$$

2 Pracovní úkoly

Změřte tuhost pružiny Pohlova kyvadla.

Naměřte časový vývoj výchylky kmitů kyvadla pro netlumené kmity. Za použití výsledku tohoto a minulého úkolu vypočítejte moment setrvačnosti kyvada I.

Změřte koeficient útlumu pro několik zvolených hodnot tlumícího proudu. Závislost vyneste do grafu.

Extrapolací určete hodnotu tlumícího proudu, při kterém dochází ke kritickému tlumení. Nastavte tuto hodnotu, změřte průběh při rychlostní a polohové počáteční podmínce a ověřte, že je kyvadlo skutečně kriticky tlumeno.

3 Poznámky

1. Pro analýzu pohybu Pohlova kyvadla se používá snímač, který snímá výchylku na obvodu torzního kyvadla. K výpočtu tuhosti potřebujete znát poloměr kyvadla. Ten je napsán na kyvadle u úlohy.

2. Pro hodnoty tlumícího proudu nad 1 A nenechávejte tlumící proud dlouhodobě protékat. Hrozí poškození tlumících cívek. Proud nastavte jen po dobu měření.

Reference

[1] I. Štoll, Mechanika. Vydavatelství ČVUT, 1995.