1 Pracovní úkoly

1. V přípravě odvoďte vztah pro maximální odhad relativní chyby měření G. Potřebné informace najdete na `http://praktikum.fjfi.cvut.cz/documents/chybynav/chyby-o.pdf` na straně 1 až 4.

2. Ve spolupráci s asistentem zkontrolujte, zda je torzní kyvadlo horizontálně vyrovnané.

3. Dynamickou metodou změřte časový průběh torzních kmitů v jedné poloze, potom umístěte velké koule m_1 do polohy II a změřte časový průběh v této druhé poloze. U každého měření si poznamenejte i chybu tohoto měření, kterou odhadnete (čím rychleji se světelná značka pohybuje, tím větší bude chyba určení její polohy).

4. Naměřenou závislost nafitujte funkcí (3) ve vhodném programu (kupříkladu Gnuplot) a vykreslete graf naměřených dat včetně odchylek a nafitované funkce.

5. Z výsledků fitu a naměřených hodnot spočtěte gravitační konstantu G i s výslednou chybou měření, kterou spočtete z Vámi odvozeného vztahu z přípravy (úkol 1). Většina fitovacích programů uvádí parametry funkce i s jejich chybou - tuto chybu potom považujte za chybu měření a dosazujte ji do odvozeného vztahu.

6. Výsledek měření gravitační konstanty G srovnejte s tabulkovou hodnotou G a ověřte, jestli se tabulková hodnota vejde do intervalu *naměřená hodnota* $\pm$ *chyba měření*.

2 Teorie

Jednou z fundamentálních interakcí se kterou se dnes a denně setkáváme, je interakce gravitační. Gravitační síly mají přitažlivý charakter a působí na všechny hmotné částice (hmotné ve smyslu celkové, nikoliv klidové hmotnosti). Ačkoliv se dle našich každodenních zkušeností jeví gravitační síla jako velmi velká, tak si ukážeme, že ve skutečnosti je tato interakce ze všech fundamentálních interakcí (silná jaderná, slabá jaderná, elektromagnetická, gravitační) tou nejslabší.

V roce 1687 Isaac Newton zformuloval ve svém díle *Principia* gravitační zákon

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\ , \tag{1}$$

kde F je velikost gravitační síly působící mezi tělesy o hmotnosti m_1 a m_2, které jsou od sebe vzdáleny o r. G je **gravitační konstanta**, která právě udává velikost gravitační interakce (ve srovnání s ostatními interakcemi). Přímým měřením lze velikost gravitační síly určit pouze pomocí velmi hmotných těles, např. automobil a Země. V Newtonově době bylo vážení jediným způsobem měřením hmotnosti. Při vážení se využíva právě gravitačního působení Země na vážená tělesa. Pokud tedy nebyla známa hmotnost Země, nešlo ze vztahu (1) určit ani gravitační konstatnu G.

Řešení tohoto problému nalezl v roce 1798 Henry Cavendish při experimentech s torzními kyvadly. K torzi (zkroucení) dostatečně tenkého a dlouhého lanka stačí pouze velmi malá síla. Třeba i tak nepatrná, jaká působí mezi koulemi o hmotnostech 1 kg a 100 g na vzdálenost řádově v centimetrech. Toho lze využít při konstrukci torzního kyvadla.

2.1 Torzní kyvadlo

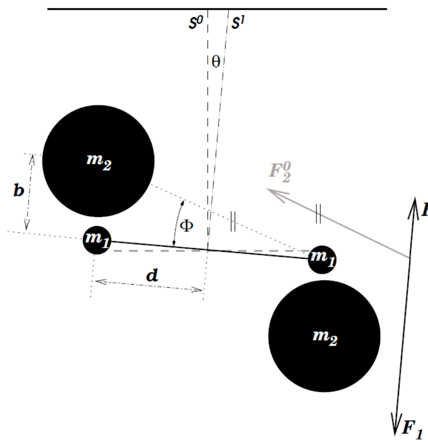
Během torze dochází k rotačnímu pohybu jednotlivých částí lanka. Takže k vyjádření míry zkroucení lanka stačí změřit úhel, o který se stočí jeden konec lanka oproti druhému. Jelikož zde popisujeme rotační pohyb, je vhodné při konstrukci torzního kyvadla převést působící sílu na moment silové dvojice. Příklad torzního kyvadla je schematicky znázorněn na obrázku 1.

K torznímu lanku je připevněna „činka“ ze dvou menších koulí o hmotnostech m_1 a zrcátko, na které dopadá laserový paprsek. Pokud se vhodným způsobem (viz schéma na obrázku (1)) k malým koulím přiloží těžší koule o hmotnostech m_2, vznikne tak v čince moment dvojice sil

$$\vec{\tau}_f = 2d(\vec{F}_1 - \vec{F}_2^0)$$
$$\tau_f = 2d(F_1 - F_2)\ .$$

Tento moment způsobí zkroucení lanka a pootočení činky a tím i zrcátka o úhel θ. Zkroucení lanka vyvolá torzní moment $\tau_t = -k\theta$, kde k je konstanta zahrnující ve své hodnotě mechanické vlastnosti lanka. Pokud je systém v rovnováze, platí

$$
\begin{aligned}
\tau_f &= -\tau_t \\
2d(F_1 - F_2) &= k\theta \\
2d\left(G\frac{m_1 m_2}{b^2} - \underbrace{F_2^0}_{G\frac{m_1 m_2}{b^2+4d^2}} sin\Phi\right) &= k\theta \\
2dGm_1m_2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{b^2+4d^2}\frac{b}{\sqrt{b^2+4d^2}}\right) &= k\theta \qquad (2) \\
2dGm_1m_2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{b}{(b^2+4d^2)^{\frac{3}{2}}}\right) &= k\theta \\
\frac{2dGm_1m_2}{b^2}(1-\beta) &= k\theta \\
\beta &= \frac{b^3}{(b^2+4d^2)^{\frac{3}{2}}} \ ,
\end{aligned}
$$



Obrázek 1: Schéma torzního kyvadla

a β nazveme geometrický faktor. Z obrázku 1 je vidět, že na každou kouli m_1 z „činky" působí obě velké koule m_2, přičemž ta vzdálenější výsledný moment silové dvojice snižuje faktorem $(1-\beta)$. Z rovnice (2) lze určit gravitační konstantu G, pokud známe vlastnosti lanka (torzní konstantu k) a úhel vychýlení „činky" θ, který odpovídá úhlu zkroucení lanka. Obojí (θ i k) lze určit z dynamických měření torzních kmitů kyvadla.

3 Pomůcky

Torzní kyvadlo, zemnící kabel, He-Ne laser, ochranné brýle (modré), podstavec pod laser, stopky, měřicí pásmo.

4 Experimentální sestava

Experimentální sestava se skládá ze dvou menších koulí o hmotnostech 38.3 g spojených tenkou tyčí, takže tvoří jakousi „činku". Tato činka je připojena k torznímu lanku, které je zavěšeno na stojanu, a uzavřena v kovové ochranné krytce. Pod spodní stranou krytky jsou dva malé šrouby, které slouží k aretaci činky. To, jakým způsobem je aretace provedena, je naznačeno na obrázku 3.

Před tím, než začneme měřit, musíme zkontrolovat, jestli je kyvadlo horizontálně vyrovnané. Děláme to kvůli tomu, aby gravitační síla mezi Zemí a malými koulemi byla dokonale vynulována. Kontrola je naznačena na obrázku 2b, kde pohledem z boku vidíme torzní lanko a k němu připojený držák na činku (která na obrázku není zobrazena) se zrcátkem. Na konci tohoto držáku je kulatá destička, která je o něco menší, než optický tubus pod kyvadlem. V tomto tubusu je zrcátko, ve kterém vidíme odraz kulaté destičky a pokud je kyvadlo horizontálně vyrovnané, tak v zrcátku vidíme kolem kulaté destičky světelnou kružnici. Jinými slovy kulatá destička a s ní i torzní lanko tak míří přesně doprostřed tubusu. Pokud není horizontálně vyrovnané, vyrovnáváme ho otáčením šroubu na podstavci.

Dále se musíme vypořádat s elektrostatickou silou, která působí mezi velkými a malými koulemi a je řádově silnější než síla gravitační. K tomu slouží zemnící kabel, který z koulí svede náboj na zem.

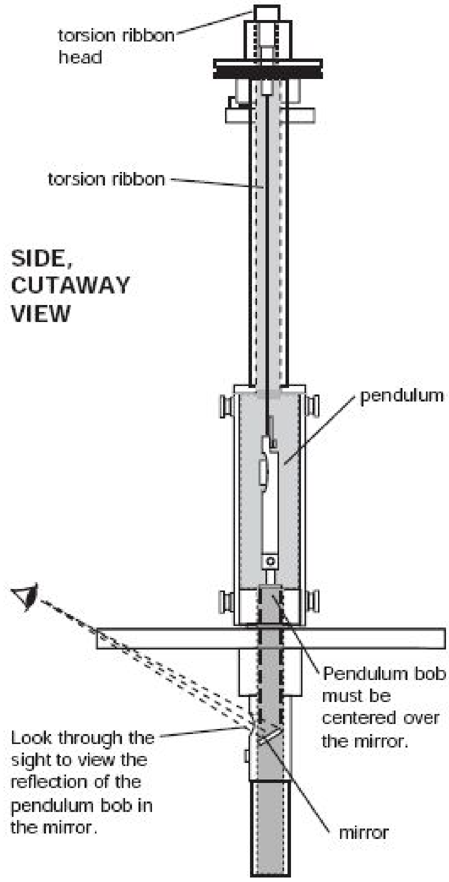
5 Provedení

5.1 Dynamicka metoda

Celé měření v podstatě spočívá v zaznamenávání výchylky „činky" v čase a analýze tohoto časového vývoje k určení hodnot θ a k.

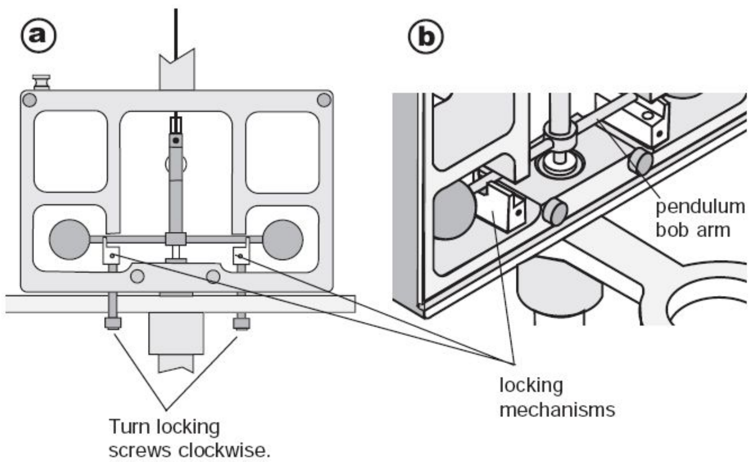
Silový impuls kyvadlu dáme tak, že k malým koulím m_1 přiblížíme (viz obr. 4a – černá část) na otočení držáku velké koule m_2, čímž maximalizujeme sílu (viz obrázek 1) F_1 a minimalizujeme sílu F_2 - silový impuls je roven právě rozdílu těchto sil. Jakmile se kyvadlo rozkmitá, my začneme zaznamenávat se stopkami v ruce polohu světelné značky (odraz laserového paprsku od zrcátka spojeného „činkou") na vodorovném měřítku v čase. Torzní kyvadlo bude kmitat kolem rovnovážné polohy (bod S^1 na obrázku 4), takže nemusíme čekat, až se po rozkmitání ustálí v nové rovnovážné poloze, ale stačí nechat kyvadlo několikrát prokmitnout a

(a) Pohled na torzní kyvadlo.



(b) Řez kyvadlem s naznačením kontroly horizontálního vyrovnání

Obrázek 2: Torzní kyvadlo

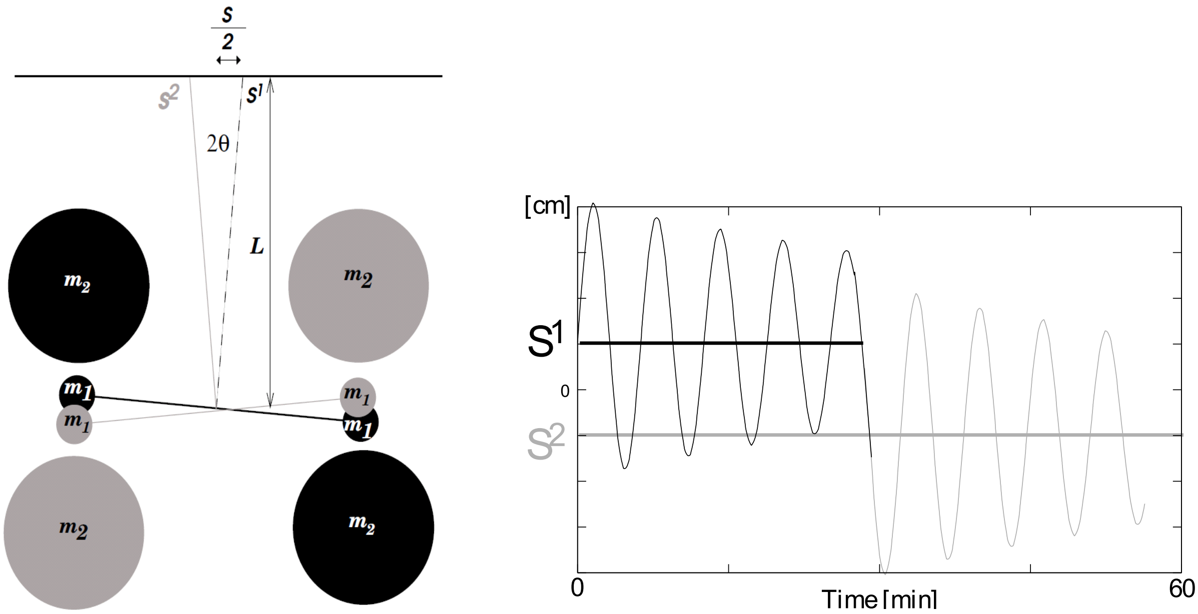


Obrázek 3: Pohled dovnitř ochranné krytky na umístění „činky“ a aretačního mechanismu.

z naměřeného průběhu kmitavého pohybu (závislost výchylky na čase) stanovit rovnovážnou polohu S^1 - jak je naznačeno na obrázku 4b.

Abychom mohli určit úhel zkroucení torzního lanka θ, potřebujeme změřit alespoň dvě rovnovážné polohy. Postup měření je následující:

Opatrně odaretujeme kyvadlo a přiblížíme velké koule k malým koulím (čince). Torzní kyvadlo se odaretováním samo rozkmitá a my začneme zaznamenávat se stopkami v ruce polohy světelné značky v ekvidistantních časových intervalech (stačí každých 20 vteřin, neboť doba kyvu je několik minut). Jak je znázorněno na obrázku 4, torzní kyvadlo začne kmitat kolem rovnovážné polohy S^1. Necháme ho zakmitat několik kyvů a potom velké koule přemístíme do druhé polohy, která je na obrázku 4a znázorněna šedou barvou. V této druhé poloze začne kyvadlo kmitat kolem rovnovážné polohy S^2.



(a) Rozložení koulí

(b) Průběh měření v závislosti na čase

Obrázek 4: Dynamická metoda měření rovnovážných poloh : Černá barva odpovídá poloze 1 a šedá poloze 2.

5.2 Analýza naměřených dat

Na konci odstavce 2.1 byl odvozen vztah (2), ze kterého lze vypočítat gravitační konstantu G. Ve vztahu (2), vystupují dvě neznámé veličiny (θ a k), které lze určit z dynamických měření torzních kmitů kyvadla. V grafu na obrázku 4b vidíme závislost výchylky torzního kyvadla na čase. Tuto závislost naměříme. Kyvadlo vykonává tlumený harmonický pohyb (podrobnosti viz úloha o harmonickém kmitání [2]), který je popsaný funkcí

$$f(t) = A \exp^{-\delta t} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi\right) + S^{1(2)} \tag{3}$$

kde t je čas (ten je jedinou proměnnou, ostatní jsou konstanty), A amplituda výchylky, T perioda kmitu, φ počáteční fáze, δ je dekrement útlumu a S je rovnovážná poloha. Konstanty ze vztahy (3) určíme nafitováním naměřených dat funkcí (3). Fitování dat je proložení naměřených dat nějakou hladkou funkcí, který má oporu v teorii, za účelem získání parametrů té funkce. Hledání parametrů funkce se provádí kupříkladu metodou nejmenších čtverců, kterou provádí počítač obsluhovaný nějakým vhodným programem (Matlab, Origin, ROOT, Gnuplot, Measure a další). My si uvedeme, jak se pracuje s programem Gnuplot.

5.3 Fitování naměřených dat v porgramu Gnuplot

Gnuplot je freeware k dispozici na `www.gnuplot.info`. Existují verze pro operační systémy Windows, Linux a MacOS.

Po spuštění programu si musíme nejdřív zadefinovat funkci, kterou budeme fitovat. V našem případě
`f(x)=a*exp(-d*x)*sin((2*pi/T)*x+fi)+s` ,
což je přepis funkce (3) do Gnuplotu. Potom je nutné si načíst naměřená data z textového souboru, kde jsou x-ové hodnoty uložené v 1. sloupci, y-nové ve 2. a chyby jednotlivých měření ve 3. sloupci (chyby měření budete odhadovat pro každé měření - program pak bude podle chyb přiřazovat jednotlivým bodům váhu). Sloupce musí být odděleny aspoň jednou mezerou nebo tabulátorem. Data z textového souboru lze vykreslit příkazem:
`plot 'textovy_soubor.txt' with yerrorbars` .
Nafitování se provede příkazem:

`fit f(x) 'textovy_soubor.txt' using 1:2:3 via a,d,T,fi,s ,`
který vypíše zjištěné hodnoty parametrů `a,d,T,fi,s` včetně jejich chyb.

Může se stát (zejména u složitých funkcí s mnoha parametry), že při fitování Gnuplot zkonverguje někam jinam, než ke správným hodnotám. To poznáme tím, že při výpisu hodnot parametrů ukáže nesmyslné hodnoty a obrovskou chybu "reduced chi-square", řádově např. 10^8. Potom je nutné nastavit vhodné (přibližně správné) hodnoty parametrů, od kterých začne program fitovat. Hodnota parametru se nastavuje takto: `d=0.005 .`

Nejjednodušší způsob jak zjistit, zda-li fit odpovídá naměřeným hodnotám, je vykreslit si oba grafy najednou. Jednotlivé grafy mezi sebou oddělujeme čárkou:
`plot f(x), 'textovy_soubor.txt' with yerrorbars' .`
Před tím, než vykreslíme graf příkazem `plot`, tak je možné popsat osy a titulek grafu nebo umístit popisek na jakékoliv místo v grafu.

```
set xlabel 'popis osy x'
set ylabel 'popis osy y'
set label 'popisek' at číslo souřadnice x, číslo souřadnice y
set title 'název grafu'
```

Program Gnuplot umožňuje i výstup grafu do obrázku v různých formátech (`png`, `jpg`, `ps`, LaTeX, ...). K tomu se využijí následující příkazy:

```
set terminal png (postscript atd.)
set output 'název souboru.png'
plot f(x), 'textovy soubor.txt' with yerrorbars pt 7
```

5.4 Výpočet gravitační konstanty

Vztah pro výpočet úhlu θ lze určit z obrázku 4a, kde

$$\tan(2\theta) \simeq 2\theta = \frac{S}{2L} = \frac{|S^2 - S^1|}{2L} \,. \tag{4}$$

Torzní konstantu k určíme z doby kyvu T a ze znalosti momentu setrvačnosti „činky“.

$$T^2 = \frac{4\pi^2 I}{k} \,, \tag{5}$$

kde I je moment setrvačnosti „činky“. Ten určíme výpočtem z momentu setrvačnosti dvou koulí o hmotnosti m_1 a poloměru r vzdálených o $2d$ vzhledem k ose kolmé na tyčku spojující tyto koule a procházející uprostřed mezi koulemi. Moment setrvačnosti tyčky a zrcátka můžeme zanedbat. S využitím Steinerovy věty je potom

$$I = 2m_1 \left(d^2 + \frac{2}{5} r^2 \right) \tag{6}$$

Po dosazení (6) do (5) a (5) a (4) do (2), dostaneme finální vztah pro výpočet gravitační konstanty:

$$G = \frac{\pi^2 b^2 S}{T^2 m_2 L} \frac{d^2 + \frac{2}{5} r^2}{d(1-\beta)} \,, \quad \text{kde } \beta = \frac{b^3}{(b^2 + 4d^2)^{\frac{3}{2}}} \,. \tag{7}$$

Všimněme si na závěr, že ke stanovení gravitační konstanty vůbec nepotřebujeme znát hmotnost malých koulí m_1.

Hodnoty konstant jsou v tab 1. Tyto hodnoty budete ve výpočtech považovat za přesné.

r	=	9,55 mm
d	=	50,7 mm
b	=	45 mm
m_2	=	1,24 kg

Tabulka 1: Tabulka konstant

Reference

[1] I. Štoll, *Mechanika*, VŠ skriptum, Vydavatelství ČVUT, Praha 1994

[2] Kolektiv praktik FJFI, *Uloha 10: Lineární harmonický oscilátor*, http://praktikum.fjfi.cvut.cz/pluginfile.php/129/mod_resource/content/4/10-LHO-2012-09.pdf, cit. září 2013