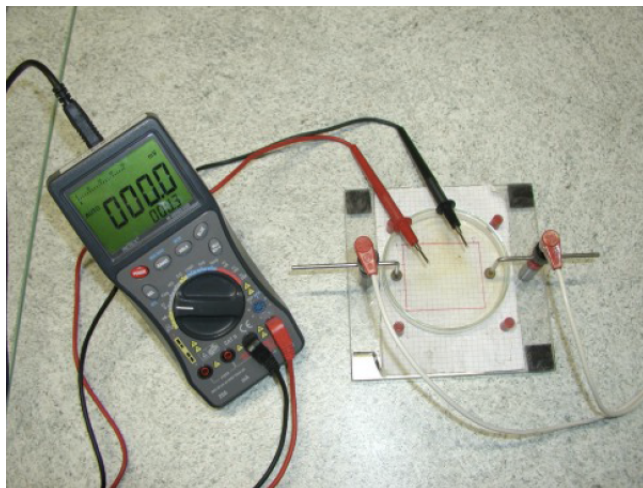


Úloha č. 1: Kondenzátor, mapování elektrostatického pole



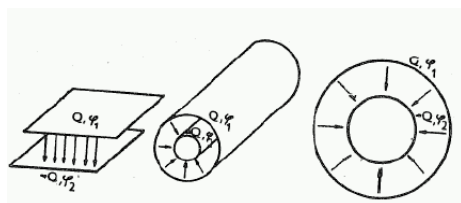
Obr. 1: Mapování elektrostatického pole.

Pomůcky: Wimshurstova elektrika, váhy, deskový kondenzátor, podstavec, vodiče, sada distancí, zkratovač, regulovatelný zdroj 12V, souprava pro mapování elektrostatického pole, voltmetr, PC.

1 Základní pojmy a vztahy

1.1 Kapacita kondenzátoru

Mějme soustavu dvou elektrod nabitých stejně velikými náboji opačného znamení tak, že všechny siločáry elektrického pole vycházejí z kladné elektrody a končí na záporné. Elektrody mohou mít libovolnou geometrii, např. jako dvě rovinné rovnoběžné desky, koaxiální válce či koncentrické koule. Napětí U mezi elektrodami je dáno nábojem Q na



Obr. 2: Různé geometrické konfigurace kondenzátorů.

elektrodách, geometrii soustavy (velikost, tvar a vzájemná poloha elektrod Obr. 2) a vlastnostmi prostředí mezi nimi (permitivita ϵ). V elektrostatickém případě vyjdeme z Maxwellových rovnic pro stacionární elektrostatické pole¹

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0. \quad (1)$$

Druhá z rovnic vyjadřuje, že pole je potenciální a dovoluje nám zavést skalární *elektrostatický potenciál* φ vztahem

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi. \quad (2)$$

¹v případě elektrostatického pole v dielektriku $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$

Napětí mezi elektrodami 1 a 2 je pak určeno rozdílem jejich potenciálů φ_1 a φ_2

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}. \quad (3)$$

Pokud má naše soustava symetrickou geometrii, můžeme potřebné elektrické pole určit následujícím způsobem, kdy vycházíme z první rovnice soustavy (1) a převedeme ji do integrálního tvaru přes vhodně zvolený objem V

$$\int_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV. \quad (4)$$

Pomocí Gaussovy věty vektorové analýzy převedeme levou část rovnice na plošný integrál $\oint_S \vec{E} \cdot \vec{dS}$. Integrujeme přes plochu S , uzavírající objem V . V pravé straně rozeznáváme výraz pro celkový náboj Q uzavřený zvolenou plochou. Takto dostáváme formulaci obecného Gaussova zákona

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (5)$$

Tok intenzity elektrického pole libovolnou uzavřenou plochou je roven celkovému náboji obklopenému touto plochou dělenému ϵ_0 . Pokud máme vhodně² symetrickou konfiguraci kondenzátoru a dobře zvolenou plochu (Gaussovu), může se stát, že vektor intenzity elektrického pole na takovéto ploše je konstantní a navíc k ní kolmý. Pak se vztah redukuje následovně

$$ES = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad (6)$$

což symbolicky můžeme zapsat ve tvaru $E = Q \cdot f(G, \epsilon_0)$, vyjadřující skutečnost, že elektrické pole je zde určeno nábojem Q násobeným určitou konkrétní funkcí geometrie a vlastností prostředí mezi elektrodami. Vztah (3) pak můžeme přepsat do tvaru

$$U = Q \int_1^2 f(G, \epsilon_0) dl. \quad (7)$$

Napětí U na kondenzátoru je úměrné přivedenému náboji Q a pro danou konfiguraci a prostředí dané konstantě $\frac{1}{C}$, zahrnující geometrii soustavy a elektrické vlastnosti prostředí mezi elektrodami.

$$U = \frac{Q}{C}, \quad C = \frac{1}{\int f(G, \epsilon_0) dl}. \quad (8)$$

V konkrétním případě válcového kondenzátoru (dva souosé válce délky L a poloměrech R_1 a R_2), pokud bude geometrie taková, že můžeme zanedbat okrajové efekty, s pomocí Gaussova zákona (Gaussovu plochu volíme ve tvaru válce délky L a poloměru r obklopujícím vnitřní elektrodu, zároveň uvnitř vnější elektrody) $E = \frac{Q}{S\epsilon_0} = \frac{Q}{2\pi r L \epsilon_0}$, pak napětí U spočítáme jako integrál

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi r L \epsilon_0} dr = Q \frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{2\pi \epsilon_0 L} = \frac{Q}{C}, \quad \text{kde } C = \frac{2\pi \epsilon_0 L}{\ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (9)$$

1.2 Energie elektrostatického pole, síly mezi deskami kondenzátoru

Energie nahromaděná v kondenzátoru se spočítá z práce potřebné k jeho nabití. Mějme kondenzátor o kapacitě C , který nese náboj $+q$ na jedné straně a $-q$ na straně druhé. Na přenesení elementárního náboje z jedné desky na druhou proti potenciálovému rozdílu $U = \frac{q}{C}$ potřebujeme práci

$$W = \int_0^Q U dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C U^2. \quad (10)$$

Pro případ deskového kondenzátoru $C = \epsilon \frac{S}{d}$ a s přihlédnutím ke vztahu $U = Ed$ dostáváme

$$W = \frac{1}{2} \epsilon E^2 V = \omega_E V, \quad (11)$$

²např. rovinný, kulový, válcový kondenzátor

kde $V = Sd$ je objem uzavřený mezi deskami kondenzátoru (S je plocha desek kondenzátoru, d jejich vzdálenost) a $\omega_E = \frac{1}{2}\epsilon E^2$ je objemová hustota energie elektrostatického pole.

Sílu, kterou se přitahují desky kondenzátoru, můžeme odvodit z energetické úvahy: *jak se změní energie nahromaděná v kondenzátoru při malé změně vzdálenosti desek d*

$$F = \frac{dW}{dd} = \frac{d}{dd} \left(\frac{1}{2} \epsilon E^2 S d \right) = \frac{1}{2} \epsilon E^2 S = \frac{1}{2} \epsilon \frac{U^2}{d^2} S. \quad (12)$$

1.3 Průraz na kulovém jiskřišti

Kulové jiskřiště je nejjednodušší elektrický přístroj pro měření vysokých napětí, který lze s nepatrnými prostředky sestavit. Jde-li o elektrody geometricky definovatelné, pro něž lze matematicky určit tvar pole, lze průrazné napětí vypočítat a je možno mluvit o absolutní měřicí metodě. Zvláště pro kulové jiskřiště složené ze dvou stejně velkých koulí, z nichž jedna může být uzemněna, byla tato úloha několikrát řešena. Používaný vzorec je

$$U = 27,75 \left(1 + \frac{0,757}{\sqrt{\delta D}} \right) \delta \frac{s}{f(\frac{s}{D})}, \quad \delta = \frac{b}{760} \frac{273 + 20}{273 + t}, \quad (13)$$

kde U je průrazné napětí [kV], s doskok, tedy vzdálenost mezi kuličkami jiskřiště [cm], D průměr koulí jiskřiště [cm], δ relativní hustota vzduchu, b barometrický tlak [mm rtuňového sloupce], t teplota v místnosti [$^{\circ}\text{C}$].

Funkce $f = f(\frac{s}{D})$ je závislá na poměru $\frac{s}{D}$ a na poloze jiskřiště proti zemi, tedy na geometrické pravidelnosti elektrického pole. Obecně platí, že pokud je poměr $\frac{s}{D}$ roven nule, je hodnota funkce rovna jedné

$$f\left(\frac{s}{D} = 0\right) = 1. \quad (14)$$

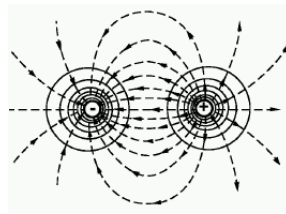
Dále obecně platí, že se vzrůstajícím doskokem s je funkce $f(\frac{s}{D})$ rostoucí.

1.4 Mapování elektrostatického pole

Intenzita elektrostatického pole \vec{E} v daném bodě prostoru je definována jako elektrostatická síla \vec{F} na jednotkový náboj q

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}. \quad (15)$$

Experimentálně nemůžeme mapovat elektrické pole přímo, protože bychom těžko někde umísťovali testovací náboj. Můžeme však použít nepřímé metody stanovením pole z ekvipotenciálních ploch Obr. 3. Potenciálový rozdíl $\Delta U =$



Obr. 3: Ekvipotenciály a siločáry elektrického pole dvou nábojů opačného znaménka.

$\varphi_1 - \varphi_2$ je definován jako práce W potřebná k přemístění jednotkového náboje q_0 z jednoho místa elektrického pole na druhé

$$\Delta U = \frac{W}{q_0}. \quad (16)$$

Stačí nám pak pouze měřit tento potenciálový rozdíl ΔU , protože intenzitu elektrostatického pole můžeme získat jako záporně vzatý gradient potenciálu (2).

2 Pracovní úkoly

1. DÚ: Odvoďte kapacitu deskového kondenzátoru.
2. DÚ (Deskový kondenzátor): Bezpečnostní normy obvykle připouštějí maximální náboj Q_{max} na deskách kondenzátoru, kterému odpovídá určité napětí U_{max} mezi těmito deskami. Stanovte závislost poměru plochy desek kondenzátoru S a vzdálenosti mezi nimi d $\frac{S}{d}$ v případě deskového kondenzátoru jako funkci náboje Q_{max} a napětí U_{max} . Následně spočítejte hodnotu poměru $\frac{S}{d}$ pro vzduchový deskový kondenzátor, kde $Q_{max} = 50\mu C$ a $U_{max} = 100kV$.
3. Změřte průrazné napětí U mezi deskami kondenzátoru pro deset různých vzdáleností desek d . Náboj tedy přivádějte až do průrazu mezi deskami kondenzátoru. Průrazné napětí U určete prostřednictvím silového působení na vahách ve chvíli průrazu a vztahu (12). Z naměřených hodnot průrazného napětí U pro různé vzdálenosti d určete následně dielektrickou pevnost vzduchu a porovnejte s tabulkovou hodnotou pro suchý vzduch. Diskutujte důvod případné odlišnosti hodnot.
[BONUS]: Nalezněte empirický vztah, který popisuje chování hodnoty dielektrické pevnosti vzduchu vůči podmínkám v místnosti (tlak, teplota, vlhkost, atd.) a určete hodnotu dielektrické pevnosti vzduchu pro tyto parametry.
4. Změřte přitažlivé síly mezi deskami kondenzátoru pro tři různé vzdálenosti desek d . Náboj přivádějte až do průrazu na kulovém jiskřišti s mikrometrickým šroubem paralelně připojenému k deskovému kondenzátoru. Ze silového působení spočítejte napětí a ze vztahu v poznámce se pokuste určit neznámou funkci $f(s/d)$ (13) vzhledem k podmínce (14) a monotónnosti funkce u doskoku s . Experimentální data a nalezenou funkci zpracujte do grafu.
[BONUS]: Bonusové body lze získat za volbu tvaru funkce $f(s/d)$, který bude vhodně popisovat chování grafu.
5. Zvolte si dvě konfigurace elektrod, nastavte na nich napětí cca 10V a zmapujte potenciál v síti 14x16 bodů. Data si vyzálohujte a v domácím vyhodnocení proveďte důkladné zpracování. [BONUS]: Zmapujte třetí konfiguraci elektrod.

3 Postup měření

Průraz na deskách kondenzátoru

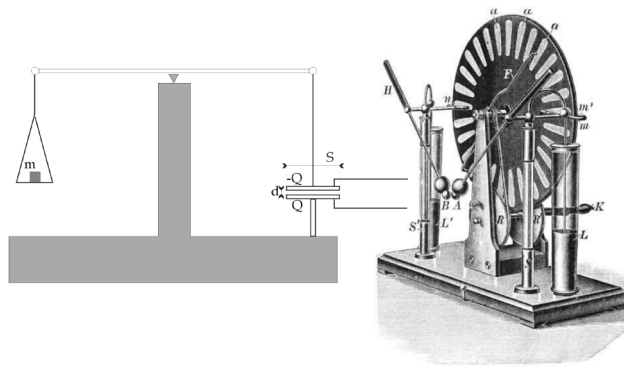
Kulová jiskřiště, která jsou součástí Wimshurstovy električky dáme dostatečně daleko od sebe tak, aby nedocházelo k průrazu vzduchu, popř. úniku akumulovaného náboje na nežádoucích místech. Následně k elektrodám Wimshurstovy električky připojíme paralelně deskový kondenzátor. Při otáčení klikou Wimshurstovy električky, se nám bude na každé z takto zapojených desek kondenzátoru akumulovat náboj opačného znaménka.

Spodní deska kondenzátoru je umístěna na posuvném stojanu a nastavením její pozice lze volit vzájemnou vzdálenost d mezi deskami. Vrchní deska je zavěšena na váze. Jakmile je na desky přiváděn náboj, začne mezi nimi působit přitažlivá síla (12), kterou můžeme měřit prostřednictvím váhy. Na vahách uvidíte stupnici v jednotkách hmotnosti. Pro získání síly je potřeba tuto stupnici přenásobit tíhovou konstantou $g \doteq 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.

Pro výpočet plochy kruhových desek S změřte jejich poloměr r . Následně volte deset různých hodnot vzájemné vzdálenosti desek d . Prostřednictvím Wimshurstovy električky přivádějte na desky náboj a v momentě průrazu odečtěte hodnotu na váze. Před každým měřením se ujistěte, že desky jsou na sebe umístěny paralelně. Vždy při průrazu dojde k jejich mírnému vychýlení.

Průraz na kulovém jiskřišti

Pro pozdější zpracování nejprve určete průměr koulí D kulového jiskřiště s mikrometrickým šroubem. Dále si запиšte barometrický tlak v místnosti b [mm rtuňového sloupce] a teplotu v místnosti t [$^{\circ}C$]. Připojte kulové jiskřiště s mikrometrickým šroubem paralelně k deskovému kondenzátoru. Nastavte vzdálenost d mezi jeho deskami a pro tuto vzdálenost volte deset různých hodnot doskoku s (vzdálenost mezi kuličkami jiskřiště). Pro každou tuto hodnotu doskoku s přivádějte prostřednictvím Wimshurstovy električky náboj až do průrazu na kulovém jiskřišti. Stejně množství náboje je z důvodu paralelního zapojení jiskřiště a kondenzátoru přiváděno taktéž na deskový kondenzátor, kde způsobuje přitažlivou sílu $|\vec{F}|$, kterou můžeme určit prostřednictvím vah.



Obr. 4: Schéma zapojení experimentu měření dielektrické pevnosti vzduchu.

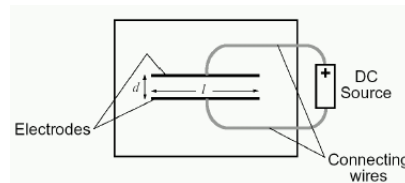
Stejným postupem jako v úkolu 1, určete napětí U mezi deskami kondenzátoru ze znalosti přitažlivé síly $|\vec{F}|$ v momentě průrazu na kulovém jiskřišti. Určené napětí U bude z důvodu paralelního zapojení stejné jako napětí při průrazu na jiskřišti.

Volte tedy postupně tři různé distance d deskového kondenzátoru. Pro každou z distancí d nastavte deset různých hodnot doskoku s a určete průrazné napětí U pro zvolený doskok s . Celkově tedy proveďte 30 měření. Z těchto hodnot určete funkci $f = f(\frac{s}{D})$.

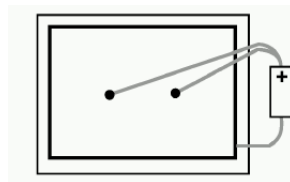
Mapování elektrostatického pole

Do Petriho misky připravte vodní lázeň a vložte dvě elektrody v různých konfiguracích. Následně elektrody připojte k regulovatelnému zdroji stejnosměrného napětí a nastavte hodnotu 12V. Velikost rozdílu potenciálů budeme měřit voltmetrem. Jednu měřicí elektrodu voltmetru trvale připojíme na elektrodu se záporným potenciálem. Tímto je nastavena hladina nulového potenciálu φ_0 . Druhou elektrodou voltmetru budeme provádět měření.

Pod Petriho miskou s vodní lázní je umístěna síť bodů o rozsahu 14x16. Postupujeme tedy tak, že každému bodu přiřadíme souřadnici $[x,y]$, kdy celkově máme $14 \times 16 = 224$ bodů. Do každého bodu přiložíme měřicí elektrodu a přečteme hodnotu na voltmetru, která nám bude udávat hodnotu potenciálu φ v daném bodě $[x,y]$. Máme tak soubor 224 hodnot $[x,y,\varphi]$, které následně zpracujeme.



Obr. 5: Experimentální sestava pro měření elektrického pole v konfiguraci kondenzátor.

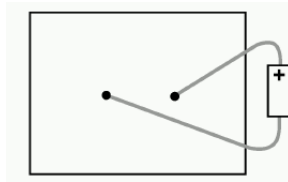


Obr. 6: Experimentální sestava pro měření elektrického pole v konfiguraci dvou bodů stejného znaménka.

4 Zpracování dat

Úkol 3

Ze změřené velikosti síly $|\vec{F}|$, která působí mezi deskami kondenzátoru v momentě průrazu, určete za použití



Obr. 7: Experimentální sestava pro měření elektrického pole v konfiguraci dvou bodů opačného znaménka.

vztahu (12) hodnotu napětí U mezi deskami při průrazu. Dielektrická pevnost vyjadřuje odolnost dielektrika vůči elektrickému poli. Je určena velikostí elektrického napětí na jednotku délky, kterého je nutné mezi dvěma elektrodami dosáhnout, aby se dielektrikum mezi elektrodami stalo vodivé. Pro suchý vzduch je hodnota dielektrické pevnosti $U_d = 30 \text{ kV.cm}^{-1}$.

Pro deset hodnot průrazného napětí U při různých vzdálenostech d určete dielektrickou pevnost vzduchu a následně určete průměr a střední kvadratickou odchylku vámi vypočítané dielektrické pevnosti.

Úkol 4

Při zpracování dat si uvědomte, že průraz probíhá na kulovém jiskřišti a vzhledem k tomu nezávisí na vzdálenosti mezi deskami kondenzátoru d . Ze vztahu (13) si vyjádřete funkci $f(\frac{s}{D})$ a pro třicet hodnot napětí U , dříve určených ze vztahu (12), spočítejte její hodnotu. Pro každé průrazné napětí U , tedy i vámi určenou hodnotu funkce $f(\frac{s}{D})$, jste měli nastavenou určitou hodnotu doskoku s . Vyneste do grafu závislost funkce $f(\frac{s}{D})$ na doskoku s vydělenému průměrem koulí jiskřiště $D \frac{s}{D}$.

Dále si zvolte tvar funkce vzhledem k podmínce (14) a podmínce monotónnosti, který vhodně popisuje chování vašich hodnot. Touto funkcí hodnoty nafitujte a zobrazte v grafu společně s fitovanými hodnotami. Uveďte hodnoty nafitovaných parametrů společně s chybami.

Úkol 5

K zápisu trojice $[x, y, \varphi]$ souřadnic a nameřených hodnot použijte program MS EXCEL nebo textový editor. Pro vizualizaci dat je doporučeno použít program GNU PLOT. Pro tvorbu 3D grafu

```
unset key
set xrange [-4:4]
set yrange [-4:4]
set xlabel "popis osy x"
set ylabel "popis osy y"
set contour
set pm3d
splot "data.txt"
```

Příklady vizualizace můžete vidět na Obr. 8.

5 Poznámky

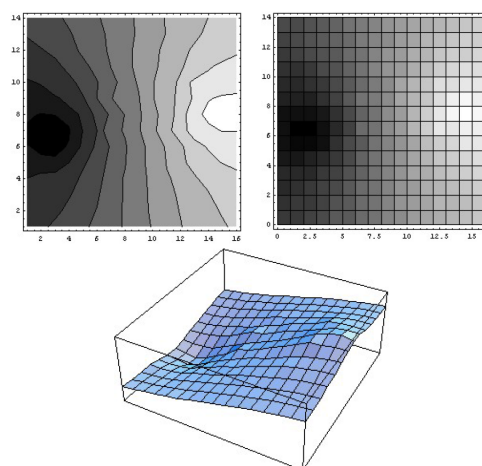
Vyrovňání vah a desek kondenzátoru

Z vašeho pohledu je na pravé straně vah dole skleněná dutina naplněná tekutinou s bublinou. Při správném vyrovňání vah musí být bublina umístěna ve středu kružnice, která je nakreslena na vrchní straně skleněné dutiny. Vyrovňání vah provádíme pomocí šroubů umístěných na předních dvou nožiček váhy.

Kruhové desky kondenzátoru musí být vůči sobě umístěny paralelně. Vyrovňání provádíme prostřednictvím malého závaží umístěného na vrchní desce.

Volba vzdálenosti desek kondenzátoru d

Při práci s deskovým kondenzátorem volte vzdálenost d mezi deskami co nejmenší. Zmenšíte tak rušivý efekt okrajových jevů kondenzátoru. V případě úkolu 4 je volba malé distance d opět platná, ale volíme ji navíc s ohledem na to, že nám průraz vznikl na kulovém jiskřišti a ne mezi deskami kondenzátoru.



Obr. 8: Příklady zpracování dat z mapování elektrostatického pole.

Wimshurstova elektrika

Při práci s Wimshurstovou elektrikou si hlídejte, aby kovové tyče generující náboj na jedné a na druhé straně plastového kotouče byly na sebe vždy kolmé. Kolmý úhel mezi těmito vodivými tyčemi musí půlit sběrače, které jsou na pevně umístěny ke konstrukci Wimshurstovy elektriky. Po každém točení klikou se tyče generující náboj trochu posunou a je nutno je vrátit před dalším použitím Wimshurstovy elektriky do původní pozice. V opačném případě se náboj generuje ve velmi nízkém množství nebo žádný.

Únik generovaného náboje

Vodiče, kterými připojujete elektrody Wimshurstovy elektriky k deskovému kondenzátoru nebo kulovému jiskřišti s mikrometrickým šroubem, se snažte mít uskupené tak, aby nebyly blízko u sebe nebo u kovových předmětů. Přesto, že jsou izolované, velké množství generovaného náboje způsobuje jeho únik přes izolant obalující vodič.

Bezpečnost

Náboj generován prostřednictvím Wimshurstovy elektriky je značný. Při průrazu vzduchu ve vzdálenosti elektrod 1 cm je napětí 30 kV. Dbejte proto zvýšené opatrnosti a před každou manipulací Wimshurstovu elektriku **ZKRA-TUJTE !**

Dále osobám s delšími vlasy nebo volným oděvem je důrazně doporučeno uzpůsobit své chování tak, aby nedocházelo k interakci s nabitým vodičem. I přes zvýšenou pozornost se mohou vlasy samovolně přitáhnout v důsledku náboje k vodiči, mějte je proto svázané gumičkou !

6 Reference

1. Štoll, I.: Elektřina a magnetismus. Ediční středisko ČVUT, Praha 1994.
2. Phywe series of publications: University Laboratory Experiments Physics. Phywe systeme GMBH, 1994.
3. Answers.com: <http://www.answers.com/topic/capacitor> [15.2.2014]
4. Novák, B.: Technika měření vysokých napětí. SNTL Praha, 1954.
5. Paul Falstad: Math and Physics Applets-2D Electrostatics. <http://www.falstad.com/emstatic> [15.2.2014]