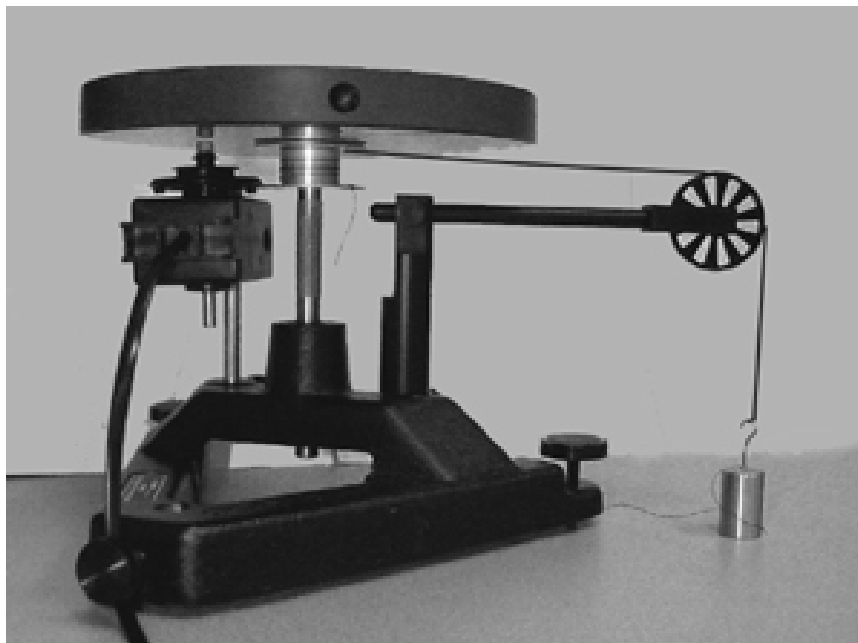


Dynamika rotačního pohybu



Pomůcky: "A" base rotational adapter PASCO CI-6690, přídavný disk a prstenec, rotační dráha s dvěma závažími, Gyroskop PASCO ME-8960, přídavný disk gyroskopu ME-8961, Dva rotační senzory PASCO PS-2120, USB link PASCO 2100, osobní počítač, program pro datový sběr Data Studio, nit, posuvné měřítko, stojan s kladkou, milimetrové měřítko, váhy,

1 Základní pojmy a vztahy

Základní veličinou pro popis rotačních vlastností daného předmětu je moment setrvačnosti \mathbf{I} . Jde o symetrický tenzor, který můžeme vyjádřit pomocí jeho tří diagonálních složek - hlavních momentů setvačnosti. Ty odpovídají třem význačným osám, jež procházejí těžištěm a kolem kterých může objekt rotovat. Pokud je objekt symetrický, můžeme dále zjednodušit výpočet třeba i na jeden vztah. Z fyzikálního hlediska udává moment setrvačnosti rozložení hmotnosti v tělese. Jeho použití je analogické s hmotností v mechanice.

Pro rotující disk

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2}MR^2 \quad (1)$$

Pro rotující prstenec

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2}M(\mathbf{R}_1^2 + \mathbf{R}_2^2), \quad (2)$$

kde \mathbf{R}_1 je vnitřní poloměr a \mathbf{R}_2 je vnější poloměr.

Další významnou vlastností momentu setrvačnosti je jeho aditivita, pokud zachováme stejnou osu rotace.

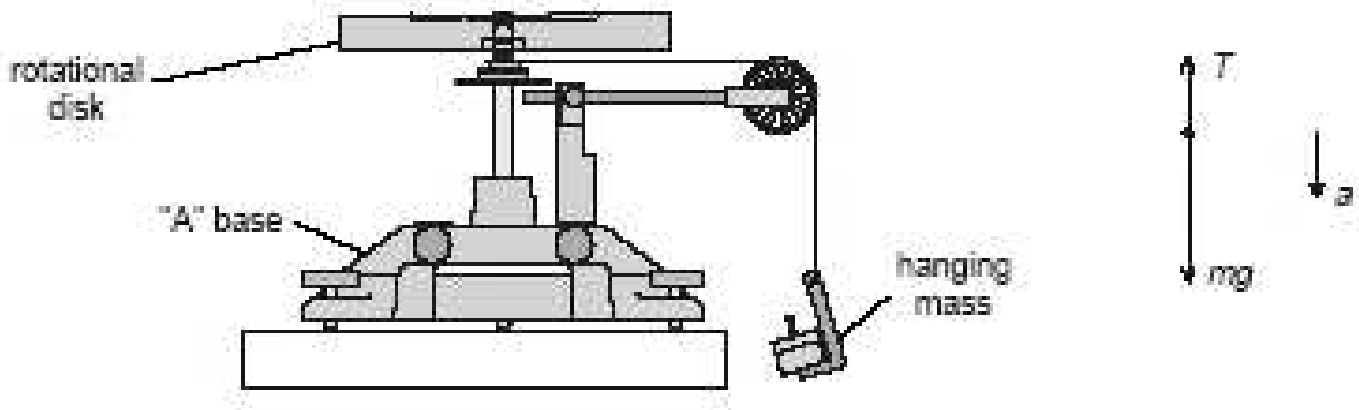
Experimentální stanovení momentu setrvačnosti provedeme podle obr. 1.

Necháme-li působit na kotouč konstantní sílu, prostřednictvím přidružené kladky, kotouč získá úhlové zrychlení ϵ . Platí

$$\mathbf{N} = \mathbf{I}\epsilon \quad (3)$$

Z uspořádání experimentu je patrné, že $\mathbf{N} = \mathbf{r}\mathbf{F}$, kde \mathbf{r} je poloměr roztáčené kladky spojené s kotoučem a \mathbf{F} je síla napínající vlákno. Jelikož pro vztah lineárního a úhlového zrychlení platí $\mathbf{a} = \epsilon\mathbf{r}$, získáme vyjádření pro moment síly působící na kotouč

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}m(\mathbf{g} - \epsilon\mathbf{r}), \quad (4)$$



Obrázek 1: Experimentální uspořádání měření momentu setrvačnosti

kde m je hmotnost roztáčecího závaží.

Tedy výsledný vzorec je

$$I = mr \left(\frac{g}{\epsilon} - r \right). \quad (5)$$

Pokud těleso nerotuje kolem osy, procházející těžištěm, můžeme použít Steinerovu větu

$$I = I_0 + Ma^2, \quad (6)$$

kde I_0 je moment setrvačnosti vzhledem k ose, procházející těžištěm a a je kolmá vzdálenost těžiště od osy rotace. Moment hybnosti můžeme definovat

$$L = I\omega. \quad (7)$$

Pokud na soustavu nepůsobí nějaké vnější momenty síly, pak se moment hybnosti zachovává. Změníme-li tedy rozložení hmotnosti v tělese, musí se změnit i rychlost rotace.

K seznámení s vlastnostmi setrvačnicku můžeme použít gyroskop. V našem případě se jedná o horizontální setrvačnick, upevněný na kolmé pohyblivé ose. Takovýto bezsilový setrvačnick zachovává rovinu rotace. Tohoto efektu se využívá například v letadlech. Vyvedeme-li ho z rovnováhy přidáním závaží, začne vykonávat precesi a nutaci, jejichž frekvenci můžeme měřit.

Předpokládejme, že gyroskop je vyvážen v horizontální poloze. Umístěním přídavného závaží o hmotnosti m_p do vzdálenosti d od osy gyroskopu začne působit moment síly, který setrvačnick vyvede z rovnováhy. Velikost momentu síly je dána $N = mgd$, kde g je tíhové zrychlení. Pro moment síly zároveň platí

$$N = \frac{dL}{dt}, \quad (8)$$

kde L je moment setrvačnosti disku, který se točí s úhlovou rychlostí ω . Pro malé výchylky $d\phi$ platí dle obr. 2

$$dL = Ld\phi. \quad (9)$$

Dosazením za dL dostaneme pro moment síly vztah

$$N = L \frac{d\phi}{dt}. \quad (10)$$

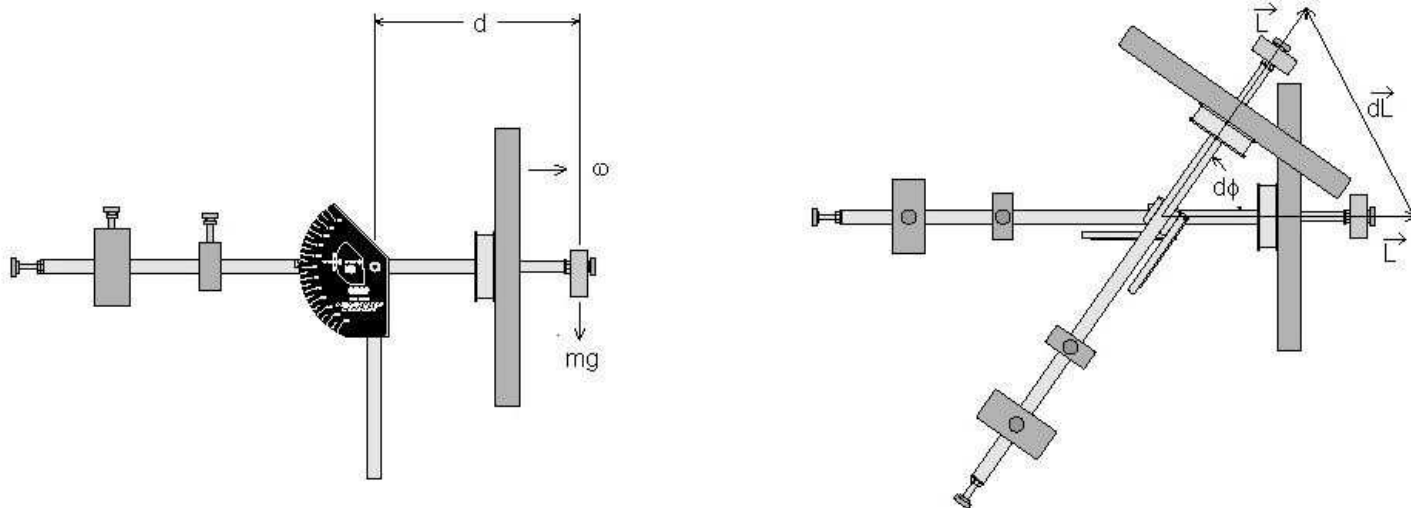
Velikost $\Omega = \frac{d\phi}{dt}$ je hledaná precesní rychlost. Tedy hledaný vzorec pro teoretický výpočet úhlové rychlosti precese je

$$\Omega = \frac{m_p g d}{I\omega}, \quad (11)$$

kde I je moment setrvačnosti rotujícího kotouče. Moment setrvačnosti kotouče získáme experimentálně (viz úkol 2).

2 Pracovní úkoly

1. V domácí přípravě odvoďte vzorec pro výpočet momentu setrvačnosti válce a dutého válce. Vyjděte z definice a odvoďte vztahy (1) i (2).

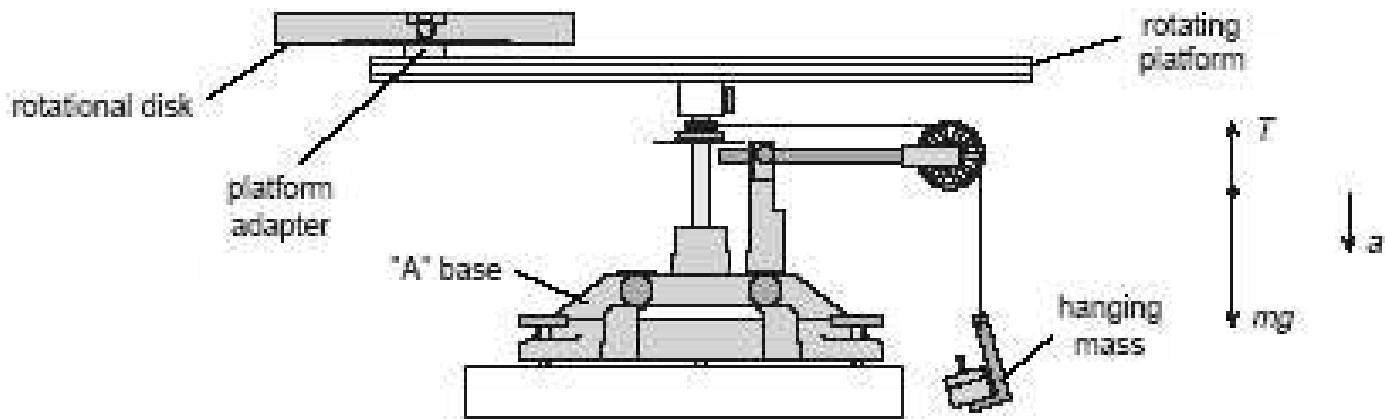


Obrázek 2: Působení momentu síly na gyroskop

2. Změřte momenty setrvačnosti přiložených rotačních objektů experimentálně a porovnejte je s hodnotami z teoretických vzorců. Měření proveďte alespoň pětikrát. Použijte disk, disk + prstenc a pomocí nich stanovte moment setrvačnosti samotného prstence.
3. Změřte moment setrvačnosti disku, umístěného na dráze mimo osu rotace a pomocí výsledků z předchozího úkolu ověřte platnost Steinerovy věty.
4. Ověřte zákon zachování momentu hybnosti. Do protokolu přiložte graf závislosti úhlové rychlosti rotace na čase.
5. Změřte rychlost precese gyroskopu jak přímo senzorem, tak i nepřímo z měření rychlosti rotace disku. Měření proveďte alespoň pětikrát. Obě hodnoty porovnejte.

3 Postup měření

1. Budeme určovat moment setrvačnosti disku, disku s prstencem a potom pomocí aditivity stanovíme moment setrvačnosti prstence. Pro určení momentu setrvačnosti použijeme dvě metody. Nejprve použijeme odvozené teoretické vzorce. Potom sestavíme aparaturu podle obr. 1 a stanovíme moment setrvačnosti výše uvedeným způsobem. Nejprve změřte poloměr roztáčecí kladky (na níž je namotaná nit) a zvažte roztáčecí těleso. Zavěste těleso na nit a přes kladku ho nechte viset tak, aby mohlo volně padat až na zem. Nit musí mířit ve směru tečny ke kladce. Rotačním senzorem budeme měřit závislost úhlové rychlosti na čase a jeho proložením stanovíme úhlové zrychlení. Pusťte tedy snímání a nechte těleso volně padat. Ukončete snímání dřív než těleso dopadne na zem. Měření opakujte alespoň pětikrát pro každé těleso. Srovnajte výsledky obou metod.
2. Umístěte rotační dráhu na podstavu a pomocí nástavce přidejte v nějaké vzdálenosti od osy rotace disk (viz obr. 3). Nejprve určíme moment setrvačnosti disku pomocí Steinerovy věty. Použijte přitom výsledky z úkolu 2. Potom stanovíme moment setrvačnosti celé sestavy experimentálně postupem z úkolu 2. Je ovšem nutné odečíst od tohoto výsledku moment setrvačnosti samotné dráhy, protože nás zajímá samotný disk. Výsledky z obou metod porovnejte.
3. Umístěte rotační dráhu na podstavu a přidejte doprostřed sloupek s kolečkem. Umístěte symetricky na dráze dvě zarážky, které vám budou fixovat polohu. Mezi každou dvojici umístěte čtvercové závaží, spojené s druhým provázkem. Ten protáhněte přes kolečko na centrálním sloupku oběma dírkami. Ve výsledku by mělo být možno zatáhnutím za provázek posunout obě závaží z jedné polohy do druhé. Abychom mohli ověřit zákon zachování momentu hybnosti, musíme v nějakých dvou polohách určit jak úhlovou rychlost, tak moment setrvačnosti. Nejprve tedy určete momenty setrvačnosti obou poloh experimentálně podle úkolu 2. Potom celou sestavu roztočte a vyčkejte až bude rotovat s konstantní úhlovou rychlostí. Závaží musí být ve vzdálenější poloze. Potom zatáhnutím za provázek změňte rozložení hmotnosti a počkejte, až se ustálí úhlová rychlost. Další možnost je držet závaží pomocí provázku v bližší poloze a po roztočení nechat závaží "odjet" do druhé polohy pomocí odstředivé síly. Potom z grafu odečtete obě hodnoty a ověřte platnost zákona zachování momentu hybnosti. Graf závislosti úhlové rychlosti na čase z počítače přiložte k protokolu.
4. Pro určení rychlosti precese použijeme dvě metody. První metodou měříme precesi pomocí rotačního senzoru připevněného k ose gyroskopu. Druhá metoda využívá vztahy odvozené v teoretické části a určuje rychlost precese nepřímo určením



Obrázek 3: Experimentální uspořádání ověření Steinerovy věty

úhlové rychlosti a zrychlení rotujícího kotouče. Pro určení rychlosti precese ze vztahu (11) potřebujete znát poloměr roztáčecí kladky r a vzdálenost přídatného závaží od rotační osy gyroskopu d . Rychlost ω odečteme z grafu. Umístíte protizávaží na osu gyroskopu tak aby byl v rovnováze, tedy aby jeho osa zůstala vodorovná. Za rotační disk umístíte přídatné závaží. Namotejte nit na roztáčecí kladku a roztočte kotouč na konstantní úhlovou rychlost. Zároveň držte osu gyroskopu. Odstartujte snímání dat v programu DataStudio a pusťte osu gyroskopu. Gyroskop začne vykonávat precesi. Precese se v důsledku tření rychle utlumí, proto přizpůsobte dobu měření.

4 Poznámky

1. Před vlastním měřením vyrovnejte podstavu gyroskopu postupem uvedeným v návodu. Je důležité, aby byl celý gyroskop vyvážen a nevznikaly tak na osách silové momenty ovlivňující výsledek. Kontrolujte proto vyrovnaní podstavu po několika měřeních. To platí i pro rotační podstavu.
2. Pro měření s programem DataStudio jsou na ploše počítače přednastavené šablony. Pro měření s rotační podstavou otevřete šablonu ROTACE a pro měření s gyroskopem otevřete šablonu GYROSKOP. V těchto šablonách jsou již senzory správně nastaveny, proto ignorujte všechna další hlášení programu DataStudio o nepřítomnosti některých senzorů.
3. !!!Jen pro gyroskop!!! Protože kladka detektoru má jiný poloměr než kladka disku, musíme získanou rychlost a zrychlení přepočítat. Na počítači stanovíme úhlovou rychlost detektoru ω_{det} a pomocí poloměrů kladek stanovíme úhlovou rychlost kotouče ω ze vztahu

$$\omega = \frac{R_{\text{det}}}{R} \omega_{\text{det}}$$

5 Literatura

Reference

- [1] doc. Ing. Ivan Štoll, CSc., Mechanika, Vydavatelství ČVUT Praha, 2003
- [2] doc. Ing. Ivan Štoll, CSc., doc. Ing. Jiří Tolar, CSc., Teoretická fyzika, Vydavatelství ČVUT Praha, 1984
- [3] <http://fyzika.fjfi.cvut.cz>