Lineární harmonický oscilátor

Abstrakt

Harmonický oscilátor je jednou z nejjednodušších úloh klasické mechaniky na lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty. V přírodě existuje mnoho systémů řídících se analogickými diferenciálními rovnicemi, jako například oscilace náboje v elektrickém obvodu, generování zvuku kmitáním tělesa, vibrace elektronů v atomovém obalu nebo vibrace molekul a interakce v chemických reakcích. V technické praxi jsou oscilace často nežádoucí, například při odpružení automobilu, termostatické regulaci teploty nebo v časovém vývoji neutronového toku v jaderném reaktoru.

1 Pracovní úkoly

- Změřte tuhost pružiny statickou metodou a vypočtěte vlastní úhlovou frekvenci pro dvě různá závaží.
- Změřte časový průběh tlumených kmitů pro dvě závaží, ověřte platnost rovnice (14) proložením dat a z parametrů proložení vypočtěte vlastní frekvenci volného oscilátoru.
- Změřte závislost amplitudy vynucených kmitů na frekvenci vnější síly v okolí rezonance pro dvě závaží a proložením dat ověřte platnost vztahu (19), z parametrů proložení vypočtěte vlasní frekvenci volného oscilátoru.
- Porovnejte výsledky vlastní frekvence ze všech tří předchozích úkolů.

1.1 Poznámky k pracovním úkolům

- Závaží volte stejná pro všechny pracovní úkoly.
- Tlumení oscilátoru je realizováno vířivými proudy indukovanými magnety v hliníku, rozestup magnetů volte $\sim$3 cm.
- Ověřením platnosti rovnice proložením se rozumí vizuální kontrola průběhu funkce vzhledem ke vstupním datům a diskuse chyb parametrů proložení.
- Prokládání dat proveďte v programu gnuplot, návod k jeho použití je v poslední části dokumentu.

2 Pomůcky

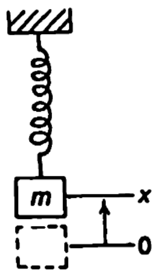
Experimentální stojan s pružinou a motorkem, tlumící magnety, rotační pohybové senzory Pasco, sada závaží, regulovatelný zdroj 0-20V, PC, programy DataStudio a gnuplot.

3 Potenciál harmonického oscilátoru

Stabilní poloha mechanického oscilátoru odpovídá stavu s minimální potenciální energií $U(q)$, kde q je zobecněná souřadnice. Jakákoliv výchylka vytvoří sílu $-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}q}$. Pro malé posunutí z q_0 je síla výchylce přímo úměrná a pro potenciál platí $U(q) - U(q_0) = \frac{1}{2}k(q-q_0)^2$ kde k je kladná konstanta mající význam druhé derivace potenciálu $U''(q)$. Potenciální energii je vhodné měřit z rovnovážné hodnoty ($U(q_0) = 0$), pak lze výchylku označit jako $x = q - q_0$ a potenciál lineárního harmonického oscilátoru má tvar

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2. \tag{1}$$

V našem případě bude harmonický oscilátor realizován pružinou se zavěšeným závažím, viz obr. 1. Konstanta k pak má význam tuhosti pružiny, pro kterou platí Hookův zákon $F = -kx$, kde x je prodloužení pružiny vyvolané působením síly F.



Obrázek 1: Harmonický oscilátor s pružinou a závažím

4 Pohybová rovnice harmonického oscilátoru

Pohybová rovnice pro těleso hmotnosti m příslušná potenciálu (1) má tvar

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{2}$$

nebo

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{3}$$

kde $\omega = \sqrt{k/m}$.

Obecné řešení rovnice (3) je

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) \tag{4}$$

nebo v jiném tvaru

$$x(t) = a \cos(\omega t + \alpha), \tag{5}$$

přičemž pro konstanty c_1 a c_2 z obecného řešení (4) platí $a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ a $\tan\alpha = -c_2/c_1$. V řešení (5) má konstanta a význam amplitudy oscilací, α je počáteční fáze oscilátoru a ω je úhlová frekvence. V případě parabolického potenciálu (1) úhlová frekvence nezávisí na počátečních podmínkách a je dána výhradně vlastnostmi oscilátoru.

5 Vynucené kmity

Uvažujme oscilace systému, na který působí časově proměnná vnější síla $F(t)$. Příslušná pohybová rovnice nabývá tvar

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F(t)/m \tag{6}$$

kde ω je frekvence volného kmitání jako v rovnici (3). Řešením rovnice (6) je součet obecného řešení homogenní rovnice a partikulárního řešení nehomogenní rovnice, pro periodickou sílu s frekvencí γ

$$F(t) = f \cos(\gamma t + \beta) \tag{7}$$

máme partikulární řešení $x_1 = b \cos(\gamma t + \beta)$, kde pro b platí $b = f/m(\omega^2 - \gamma^2)$ dosazením x_1 do (6).

Pro řešení rovnice (6) dostaneme

$$x(t) = a \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)} \cos(\gamma t + \beta) \tag{8}$$

Řešení (8) zřejmě neplatí při rezonanci, kdy $\gamma = \omega$. Pokud přepíšeme (8) na tvar s jiným významem parametru a

$$x(t) = a \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)} [\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega t + \beta)], \tag{9}$$

kde při $\gamma \to \omega$ dostaneme limitu typu 0/0 a smíme použít l'Hospitalovo pravidlo. Řešením pohybové rovnice vynuceného kmitání (6) v oblasti rezonance $\gamma = \omega$ je pak funkce

$$x(t) = a\cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{2m\omega} t\sin(\omega t + \beta) \tag{10}$$

Snadno nahlédneme, že amplituda oscilací *netlumeného* systému při rezonanci lineárně roste s časem.

6 Tlumené kmity

Vzájemné působení kmitajícího systému s okolním homgenním prostředím zavádí do pohybové rovnice třecí sílu, která závisí výhradně na rychlosti kmitání.

V základním přiblížení je třecí síla přímo úměrná rychlosti a pohybová rovnice je

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x}, \tag{11}$$

kde po vydělení hmotností m označíme $k/m = \omega_0^2$ a $\alpha/m = 2\lambda$, přičemž ω_0 je frekvence volného oscilátoru bez tření a λ je dekrement útlumu. V tomto značení má pohybová rovnice tlumeného oscilátoru tvar

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \tag{12}$$

Z charakteristické rovnice $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2$ příslušné rovnici (12) máme $r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda_2 - \omega_0^2}$ a obecné řešení (12) je

$$x(t) = c_1 \mathrm{e}^{r_1 t} + c_2 \mathrm{e}^{r_2 t}, \tag{13}$$

které se dále rozkládá na tři případy podle odmocniny v $r_{1,2}$.

Při $\lambda < \omega_0$ má řešení rovnice (12) tvar

$$x(t) = a\mathrm{e}^{-\lambda t}\cos(\omega t + \alpha), \tag{14}$$

kde $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ a a a α jsou reálné konstanty. V systému dochází k tlumeným periodickým kmitům s exponencielně klesající amplitudou a sníženou frekvencí.

Při $\lambda > \omega_0$ je obecným řešením (12) funkce

$$x(t) = c_1 \mathrm{e}^{-[\lambda - \sqrt{\lambda_2 - \omega_0^2}]t} + c_2 \mathrm{e}^{-[\lambda + \sqrt{\lambda_2 - \omega_0^2}]t}, \tag{15}$$

což odpovídá silnému útlumu, výchylka systému klesá jako $|x|$ a asymptoticky $(t \to \infty)$ se blíží rovnovážné poloze. Tento režim se označuje jako aperiodický útlum.

Při $\lambda = \omega_0$ dochází ke kritickému útlumu, což je zvláštní případ aperiodického tlumení a odpovídající řešení (12) je

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)\mathrm{e}^{-\lambda t}. \tag{16}$$

7 Vynucené kmity s tlumením

Přidáním vnější periodické síly $f\cos(\gamma t)$ do rovnice tlumeného oscilátoru (12) dostaneme pohybovou rovnici

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m}\cos(\gamma t). \tag{17}$$

Pomocí přeznačení vnější síly na komplexní tvar ($\cos(\gamma t) \to \mathrm{e}^{\imath\gamma t}$) a využitím partikulárního řešení $x(t) = B\mathrm{e}^{\imath\gamma t}$ máme pro B

$$B = \frac{f}{m(\omega_0^2 - \gamma^2 + 2\imath\lambda\gamma)}. \tag{18}$$

Přepsáním B do formy $B = b\mathrm{e}^{\imath\delta}$ dostaneme

$$b(\gamma) = \frac{f}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}}, \tan\delta = \frac{2\lambda\gamma}{\gamma^2 - \omega_0^2}. \tag{19}$$

Partikulární řešení tvoří reálná část z $B\mathrm{e}^{\imath\gamma t} = b\mathrm{e}^{\imath(\gamma t + \delta)}$ a společně s řešením homogenní rovnice pro $\lambda < \omega_0$ máme

$$x(t) = a\mathrm{e}^{-\lambda t}\cos(\omega t + \alpha) + b\cos(\gamma t + \delta). \tag{20}$$

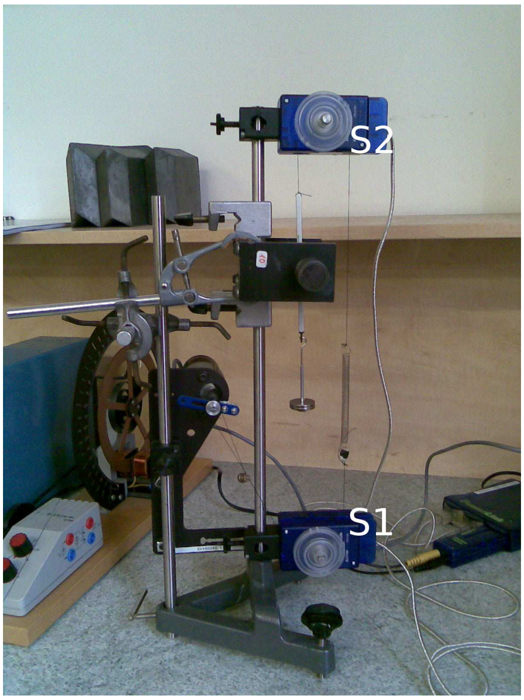
První člen exponencielně klesá s rostoucím časem, takže po dostatečně dlouhé době zůstane jen druhý člen a řešením rovnice (17) je

$$x(t) = b\cos(\gamma t + \delta). \tag{21}$$

Při rezonanci nabývá amplituda b (19) maxima, ale už není nekonečná a maximum má v bodě $\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$.

8 Experimentální sestava

Aparatura pro měření kmitání pružiny je zobrazena na obr. 2. Senzor S1 měří časový průběh vnější síly a oscilace měří senzor S2. Vnější periodickou sílu vyrábí otáčení motorku, tlumení oscilátoru je realizováno vířivými proudy indukovanými magnety v hliníku a na hliníkovém tělese je zavěšen držák závaží. Třetí připojený senzor se používá pro měření Pohlova torzního kyvadla ve druhé části úlohy. Vyčítání senzorů se provádí v programu DataStudio.



Obrázek 2: Experimentální aparatura

8.1 Kalibrace senzorů

V programu DataStudio v nabídce nastavení *Setup* pro oba poziční senzory nastavíme pouze měření lineární polohy *Linear Position*, pro lineární stupnici *Linear Scale* vybereme *Other* a nastavíme obvod kladky. Obvod je výhodné zadat v milimetrech bez ohledu na přednastavené jednotky programu. Automatické nulování polohy *Zero sensor* vypneme a ruční nulování provedeme bez zavěšených závaží. Vzorkovací frekvenci nastavíme na 25 Hz.

Pokud DataStudio po spuštění vyžaduje ruční zadání typu senzoru, vybereme *Rotary Motion Senzor*.

8.2 Měření časového průběhu tlumených kmitů

Na držák umístíme zvolené závaží, symbol grafu *Graph* v DataStudiu tažením přesuneme na senzor oscilací S2, spustíme nabírání dat *Start*, krátkým tahem za závaží systému udělíme počáteční výchylku a necháme volně kmitat do zastavení. Poté nabírání dat ukončíme, levým tlačítkem označíme část průběhu před volným kmitáním a vybranou oblast odebereme v nabídce pravého tlačítka, analogicky můžeme odebrat oblast po ukončení kmitání. Editovaný graf uložíme do textového souboru jako *File* → *Export data*.

8.3 Měření závislosti amplitudy vynucených kmitů na frekvenci vnější síly

Nejprve měříme amplitudu oscilací v závislosti na napájecím napětí motorku v oblasti okolo rezonance pro ∼10 hodnot napětí. Aplitudu odečítáme z grafu senzoru S2, do kterého pro dané napětí zaznamenáme 10∼20 period a tlačítkem Σ zobrazíme minimum a maximum, amplituda je pak rozdíl maxima a minima. Předchozí měření nejrychleji smažeme označením příslušného *run#* a stiskem kláves Delete a Enter.

Dále měříme frekvenci budící síly pro ∼5 různých napětí v rozsahu použitém v předchozí části. Lineárním proložením závislosti frekvence f na napětí U $f(U) = aU + b$ vznikne fukce pro převod napětí na frekvenci. Během měření odečítáme frekvenci pomocí grafu senzoru vnější síly S1, do kterého pro každé napětí nabereme ∼10 period a pomocí nástroje pro odečítání souřadnic v horní části grafu zaznamenáme počáteční a konečný čas t_1 a t_2 pro n period. Frekvence f je pak $f = n/(t_2 - t_1)$. Odečítáním souřadnic změříme také amplitudu budící síly.

8.4 Měření tuhosti pružiny statickou metodou

Z grafu senzoru oscilací S2 odečteme prodloužení x, které způsobí zavěšení závaží hmotnosti m. Tuhost pružiny k získáme z rovnice $mg = -kx$, kde g je tíhové zrychlení.

8.5 Technické poznámky

- Amplituda vnější síly by neměla přesáhnout 1 mm, v opačném případě při rezonanci hrozí vypadnutí lanka pružiny z kladky.

- Program DataStudio ukládá data s desetinnou čárkou, pro práci s programem *gnuplot* je třeba v souboru čárky nahradit za tečky a odstranit první dvě řádky úvodního textu. Nahrazení umí libovolný textový editor.

9 Prokládání dat v programu gnuplot

Gnuplot je výkonný nástroj pro analýzu dat, bezplatně dostupný pro Linux i Windows.

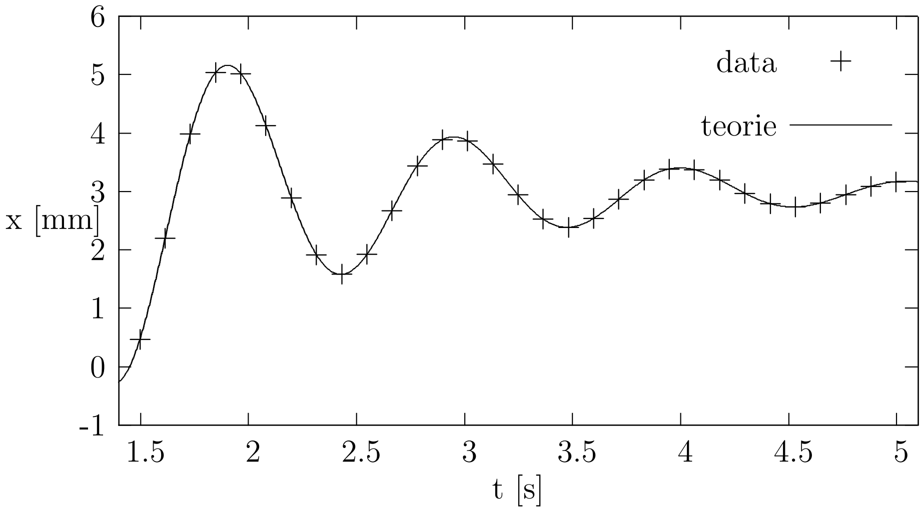
Příklad proložení časového průběhu tlumených kmitů rovnicí (14) je v oddílu Listing 1. Makro *dump.gp* je přílohou tohoto návodu, stejně jako zdrojová data v souboru *x3.txt*. Makro spustíme buď jako parametr spuštění gnuplotu v terminálu (*$ gnuplot dump.gp*), nebo v gnuplotu příkazem > *load "dump.gp"*.

Řádky 2-6 určují výstup na obrazovku nebo do souboru s obrázkem, funkce na řádku 7 odpovídá rovnici (14), přičemž d je technický parametr k odstranění konstantního posunutí dat. Řádek 15 provede proložení pro všechny parametry a řádky 22 a 23 vykreslí výsledek. Znak "\"rozděluje řádek zdrojového kódu, pokud je nevhodně dlouhý.

```
1  #komentar zacina dvojitym krizkem
2  set terminal x11 size 800,600 persist     #nastavi vystup na obrazovku
3  #set terminal windows size 800,600        #vystup na obrazovku ve windows
4
5  #set terminal png size 800,600            #vystup do obrazku .png
6  #set output "fig1.png"
7  f(x)=a*exp(-1*l*x)*cos(o*x+h)+d           #funkce kterou chceme prolozit data
8  a=1                                       #pocatecni hodnoty parametru funkce
9  l=1
10 o=3
11 h=1
12 d=1
13 set xrange [1.4:5.1]                      #volitelne lze nastavit
14                                           #povoleny rozsah osy
15 fit f(x) "x3.txt" via a,l,o,h,d           #spusti prokladani dat v souboru x3.txt
16 set samples 1000                          #hladsi vykresleni funkce f
17 set pointsize 4                           #velikost bodu v grafu
18 set xlabel "t [s]"                        #popisky os
19 set ylabel "x [mm]"
20
21 #vykresli funkci a data
22 plot "x3.txt" with points lc rgb "black" title "data", \
23   f(x) lc rgb "black" title "teorie"
```

Listing 1: dump.gp - proložení tlumených kmitů v programu gnuplot

Na obrázku obr. 3 je uveden příklad proložení tlumeného kmitání oscilátoru z makra 1. Data byla vygenerována podle rovnice (14) a parametry proložení se s nastavením generování shodují se zanedbatelnou chybou řádu $10^{-5}\%$.



Obrázek 3: Tlumené oscilace

Proměnná ω v rovnici (14) je úhlová rychlost v rad/s. S periodou oscilací T je vztažena rovnicí $\omega T = 2\pi$, takže pro frekvenci oscilací f v Hz platí $f = \omega/2\pi$.

Úspěšnost proložení velmi závisí na počátečním nastavení hodnot parametrů. Výhodné je také sloučení několika konstant rovnice substitucí do jedné proměnné makra nebo jako proměnnou použít přímo mocninu konstanty. V rovnici (19) lze použít jednu proměnnou pro f/m a proměnnou přímo pro λ^2.

V případě, že je dosaženo nejlepšího možného proložení, ale funkce stále lehce prochází okolo dat, lze použít jednoduchý trik ve zvětšení datových bodů grafu.

Reference

[1] Lev D. Landau, Mechanics, 1976

[2] Richard P. Feynman, Feynmanovy přednášky z fyziky, 2000