

# Měření modulu pružnosti v tahu a modulu pružnosti ve smyku

**Pomůcky:** Stojan s indikátorovými hodinkami a ocelovým drátem, zařízení na měření modulu pružnosti v tahu z průhybu nosníku, zařízení na měření modulu pružnosti ve smyku z torze drátu statickou a dynamickou metodou, mikrometr, kontaktní měřítko, dvouručkové stopky, závaží,

## 1 Základní pojmy a vztahy

Pružné vlastnosti homogenního izotropního tělesa při malých deformacích plně určují dvě nezávislé materiálové konstanty, za které mohou být zvoleny např. modul pružnosti v tahu (Youngův modul)  $E$  a Poissonovo číslo  $\mu$  nebo modul pružnosti v tahu  $E$  a modul pružnosti ve smyku  $G$ . Jejich význam si vysvětlíme na dvou základních experimentech.

1) Mějme z materiálu, jehož elastické vlastnosti chceme měřit, hranol nebo válec o průřezu  $S$  a délce  $l$ . Jedna podstava je upevněna, ve směru podélné osy působí síla  $F$ , která vyvolá prodloužení délky  $l$  o  $\Delta l$ . Mezi napětím  $F/S$  a deformací (relativním prodloužením)  $\Delta l/l$  platí vztah

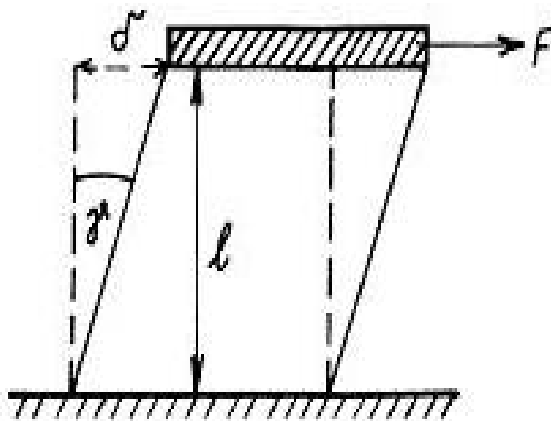
$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l}, \quad (1)$$

zvaný Hookův zákon. Konstanta  $E$  je určena jen vlastnostmi materiálu a nazývá se modul pružnosti v tahu nebo Youngův modul.

Jestliže hranol protahujeme v jednom směru, pak v pravém úhlu k protahování se jeho rozměry (např.  $a$ ,  $b$  resp.  $r$ ) zkracují podle zákona

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b} = \mu \frac{\Delta l}{l}, \text{ resp. } \frac{\Delta r}{r} = \mu \frac{\Delta l}{l}, \quad (2)$$

kde  $\mu$  je Poissonovo číslo, které charakterizuje novou vlastnost materiálu (nezávislou na  $E$ ). Poissonovo číslo  $\mu$  je v intervalu  $(0, 1/2)$ ; hodnotu  $1/2$  nabývá pro nestlačitelné materiály



Obrázek 1: Smyk

2) Mějme z materiálu, jehož elastické vlastnosti zkoumáme, krychli o hraně  $l$ . Dolní podstava je upevněná a v horní podstavě, rovnoběžně s dolní podstavou, působí síla  $F$ , která horní podstavu posune o malou délku  $\delta$  (viz obrázek 1). Úhel původně pravý se změní o úhel  $\gamma$ . Mezi smykovým napětím  $F/S$  a smykovou deformací charakterizovanou úhlem smyku (zkosem)  $\gamma$  platí vztah

$$\frac{F}{S} = G \frac{\delta l}{l}, \quad (3)$$

resp. pro malé posunutí  $\delta$  ( $\tan \gamma \approx \gamma$ )

$$\frac{F}{S} = G \gamma, \quad (4)$$

kde  $G$  je konstanta určená jen vlastnostmi materiálu a nazývá se modul pružnosti ve smyku.

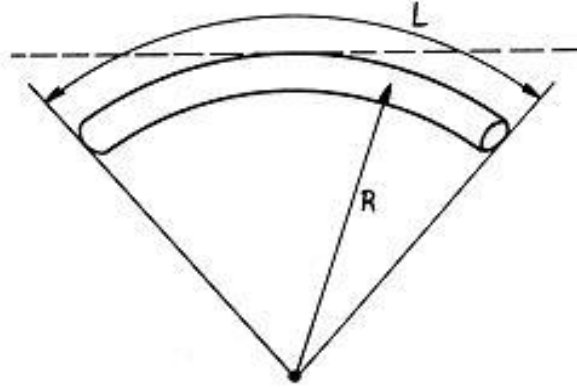
Působením tečné síly  $F$  změní krychle svůj tvar, ale původní objem se nezmění. Modul pružnosti ve smyku popisuje tedy tvarovou deformaci.

Poznámka: Jak jsme již uvedli, jen dvě ze tří materiálových konstant  $E$ ,  $\mu$  a  $G$  jsou pro homogenní izotropní těleso nezávislé. Platí mezi nimi vztah

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (5)$$

Ze složitějších deformací si probereme ohyb nosníku a torzi vále kruhového průřezu, které nám umožní ze změření průhybu trámku upevněného na dvou břítech stanovit modul pružnosti v tahu a ze změření úhlu stočení drátu kruhového průřezu či doby kyvu torzního kyvadla stanovit modul pružnosti ve smyku.

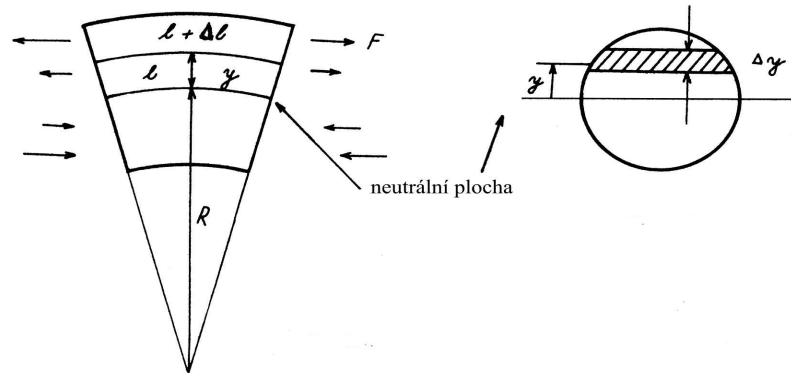
#### Ohyb nosníku (tyče kruhového průřezu, hranolu)



Obrázek 2: Ohyb nosníku

Mějme přímý nosník délky  $l$  a libovolného průřezu (kruhového, obdélníkového, tvaru „I“ apod.) ohnutý do tvaru nakresleného na obrázku 2. Chceme stanovit vztah mezi silami působícími na nosník, vztah mezi rozměry a tvarem nosníku a konstantami charakterizujícími pružné vlastnosti materiálu. Výsledek nezávisí na tvaru, a proto výklad provedeme pro kruhový průřez. Úlohu si ještě zjednodušíme tím, že budeme uvažovat případ, kdy poloměr ohybu bude mnohem větší než tlouška nosníku. Popíšeme si nyní, jak to vypadá uvnitř nosníku. Materiál na vnitřní straně nosníku je stlačen, na vnější straně roztážen a uvnitř nosníku je plocha, která není ani stlačena, ani roztážena. Nazývá se neutrální plocha. Dá se ukázat, že tato plocha prochází „těžištěm“ průřezu, jestliže se nosník neprotahuje nebo nestlačuje jako celek (čistý ohyb).

Představme si krátký, příčný úsek nosníku délky  $l$  (viz obrázek 3). Při čistém ohybu se tento kousek nosníku deformuje. Materiál pod neutrální plochou se stlačí.



Obrázek 3: Ohyb nosníku

Deformace stlačením je úměrná vzdálenosti od neutrální plochy. Materiál nad neutrální plochou se protáhne, což je rovněž úměrné vzdálenosti od neutrální plochy. Prodloužení  $\Delta l$  je tedy úměrné  $y$  (viz obrázek 3). Konstanta úměrnosti je rovna délce  $l$ , vydělené poloměrem křivosti nosníku, tedy

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{y}{R}. \quad (6)$$

Také napětí, tj. síla působící na jednotku plochy v některém malém pásu v blízkosti  $y$  je úměrná vzdálenosti od neutrální plochy

$$\frac{\Delta F}{\Delta S} = E \frac{y}{R}. \quad (7)$$

Nyní si odvodíme, jak vypadají síly, které takovouto deformaci způsobí. Síly působící na část nosníku zobrazenou na obrázku 3a jsou na tomto obrázku nakresleny. Jestliže budeme uvažovat síly působící na libovolný příčný průřez, pak na něj působí

síly namířené na jednu stranu nad neutrální plochou a na opačnou stranu pod neutrální plochou. Dostaneme tak dvojice sil, které mají „ohybový“ moment. Velikost momentu dvojice sil je rovna momentu jedné ze sil vzhledem k neutrálnímu vláknu.

Integrujeme-li součin síly a vzdálenosti od neutrální plochy, můžeme vypočítat celkový moment  $M$  sil působící na jednom průřezu námi uvažované části nosníku:

$$M = \int_{\text{pricnyprurez}} y dF. \quad (8)$$

Podle rovnice (7) je  $dF = E y dS / R$ , takže

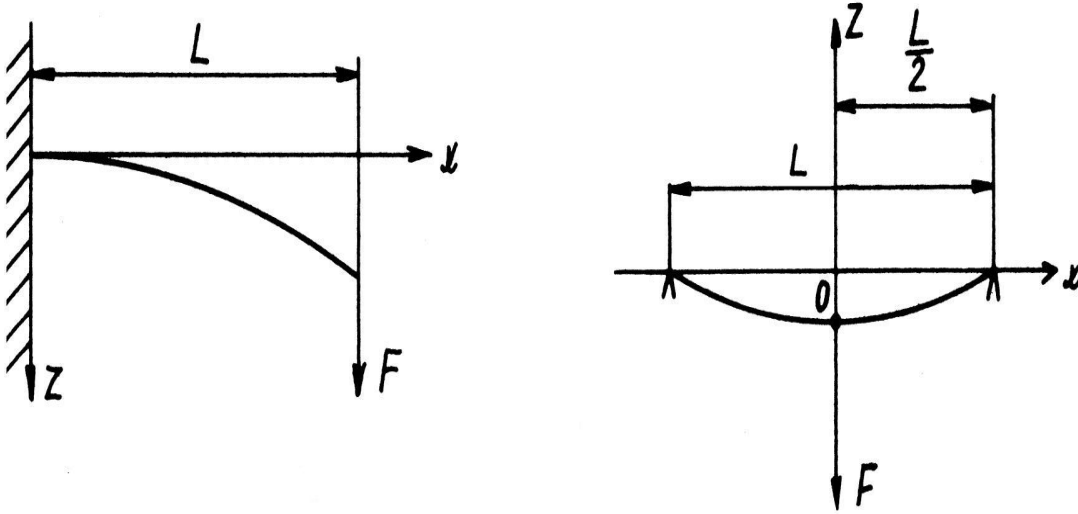
$$M = \frac{E}{R} \cdot \int_{\text{pricnyprurez}} y^2 dS. \quad (9)$$

Výraz  $\int y^2 dS$  můžeme nazvat „momentem setrvačnosti“ geometrického příčného průřezu vzhledem k vodorovné ose procházející jeho „těžištěm“ a dále jej budeme označovat písmenem  $I$ . Dosadíme-li za něj do rovnice (9), dostaneme

$$M = \frac{EI}{R}. \quad (10)$$

Rovnice (10) udává vztah mezi ohybovým momentem  $M$  a křivostí nosníku  $1/R$ .

Jako příklad na použití rovnice (10) vypočítáme průhyb nosníku délky  $L$ , který má jeden konec pevný a na druhý působí síla  $F$  obrázek 4a a průhyb nosníku, který je podepřený na dvou břitech a uprostřed působí síla  $F$  obrázek 4b.



Obrázek 4: Průhyb nosníku s jedním koncem volným a s oběma konci na břitech

Nejprve budeme řešit případ zobrazený na obrázku 4a. Označme si  $z$  průhyb ve vzdálenosti  $x$  od upevněného konce. Chceme nalézt  $z(x)$  pro malé  $z$  (malý průhyb). Z kurzu matematiky víte, že křivost  $1/R$  libovolné křivky  $z(x)$  je dána výrazem

$$\frac{1}{R} = \frac{\frac{d^2 z}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (11)$$

Poněvadž nás zajímají jen malé průhyby, zanedbáme  $(dz/dx)^2$  ve srovnání s jedničkou a pro křivost  $1/R$  dostaneme

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2 z}{dx^2}. \quad (12)$$

Dále potřebujeme znát ohybový moment  $M$ , který je funkcí  $x$ , protože v libovolném příčném průřezu se rovná momentu sil působících na tento průřez vzhledem k neutrálnímu vláknu. Vlastní tíhu nosníku zanedbáme a budeme uvažovat jen sílu  $F$ , působící směrem dolů na volný konec. Ohybový moment ve vzdálenosti  $x$  je roven

$$M(x) = F(L - x). \quad (13)$$

Dosadíme-li za  $M$  do rovnice (10), dostaneme po úpravě

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{F}{EI}(L - x). \quad (14)$$

Integrací této rovnice dostaneme

$$z(x) = \frac{W}{EI} \left( \frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right), \quad (15)$$

použijeme-li předpokladu, že v bodě  $x = 0$  je  $z = 0$  a  $dz/dx = 0$ . Průhyb konce je dán vztahem

$$z(L) = \frac{F}{EI} \frac{L^3}{3}, \quad (16)$$

tj. průhyb konce tyče roste s třetí mocninou délky nosníku.

Pro rozřešení případu zobrazeného na obrázku 4b si uvědomíme, že účinek síly  $F$ , působící ve středu nosníku, je stejný, jaký by vyvolaly síly opačného směru o velikosti  $F/2$  na obou koncích nosníku, kdyby byl nosník upevněn uprostřed. Dosadíme tedy do rovnice (10) za  $M(x)$ , máme

$$M(x) = \frac{F}{2} \left( \frac{L}{2} - x \right) \quad (17)$$

a po úpravě dostaneme

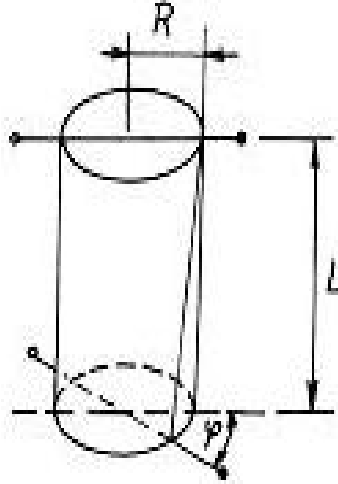
$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{F}{2EI} \left( \frac{L}{2} - x \right). \quad (18)$$

Integrací této rovnice, použijeme-li předpokladu, že pro  $x = 0$  je  $dz/dx = 0$  a pro  $x = L/2$  je  $z = 0$  (okrajové podmínky), dostaneme

$$z(x) = \frac{F}{2EI} \left( \frac{Lx^2}{4} - \frac{x^3}{6} \right) - \frac{FL^3}{48EI}. \quad (19)$$

Průhyb uprostřed nosníku, tj. pro  $x = 0$  je tedy

$$z(0) = -\frac{FL^3}{48EI}. \quad (20)$$



Obrázek 5: Torze válce kruhového průřezu

### Torze válce kruhového průřezu

Na obrázku 5 je nakreslen válec kruhového průřezu o délce  $L$  a poloměru  $R$ , jehož horní podstava je upevněna a spodní je vůči ní stočena o úhel  $\varphi$ . Tato deformace se nazývá torze. Mírou torze je úhel stočení dvou průřezů kolmých k ose válce, vzdálených od sebe o jednotkovou délku; označme si ho  $\alpha$ . Je-li délka válce  $L$ , je úhel  $\varphi$ , o který se stočí spodní podstava vůči vrchní dán výrazem  $\varphi = L\alpha$ .

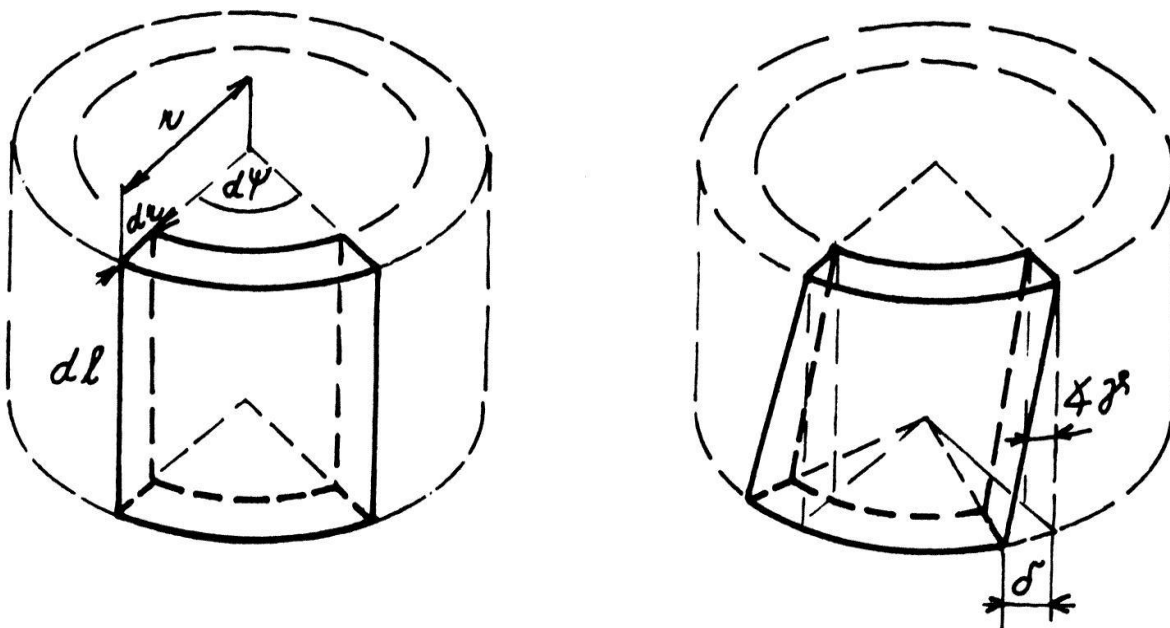
Představme si elementární hranol vyříznutý z válce o délce  $r d\psi$ , šířce  $dr$  a výšce  $dl$  (viz 6a). Ten je při torzi posunut, otočen a zdeformován. Neuvažujeme-li posunutí a otočení kolem podélné osy válce, prodělá každý elementární hranol smyk (viz obrázek 6b).

Pootočení spodní podstavy elementárního hranolu vůči vrchní podstavě elementárního hranolu je  $\alpha dl$ . Pro elementární hranol vzdálený o  $r$  od osy válce je posunutí spodní podstavy vůči horní

$$\delta = r \alpha dl \text{ a pro úhel smyku } \gamma \text{ pak dostaneme vztah } \gamma = \delta / dl = r \alpha.$$

Nyní, podobně jako v případě ohybu, budeme hledat silové působení, které výše popsanou deformaci vyvolá. To dostaneme z Hookova zákona pro smyk (viz (??)). Pro smykové napětí  $\tau$ , které působí na podstavě elementárního hranolu tak dostaneme  $\gamma = G r \alpha$ . Síla, která vyvolává toto smykové napětí, je kolmá k poloměru válce, proto její příspěvek k výslednému momentu sil  $M$  je dán výrazem

$$dM = r \tau dS, \quad (21)$$



Obrázek 6: Smyk elementárního hranolu vyříznutého z válce

kde  $dS$  je plocha podstavy elementárního hranolu;  $dS = r d\psi dr$ . Všechny tyto elementární momenty mají směr osy válce. Pro celkový moment sil  $M$  vyvolávajících torzi válce charakterizovanou úhlem  $\alpha$  pak platí

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^R r \tau r d\psi dr = G\alpha \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 d\psi dr = G\alpha \frac{\pi R^4}{2}. \quad (22)$$

Zavedeme-li do vzorce (5.21) místo úhlu  $\alpha$  úhel  $\varphi$ , o který se stočí spodní podstava válce vůči horní (viz obrázek 5), dostaneme pro hledaný moment sil vyvolávajících torzi výraz

$$M = G \frac{\pi R^4}{2L} \varphi. \quad (23)$$

Tento výraz ukazuje, že mezi úhlem stočení  $\varphi$  a momentem sil  $M$  vyvolávajících toto stočení je přímá úměra

$$M = K\varphi. \quad (24)$$

Konstanta úměrnosti  $K$ , nazývaná **direkční moment**, je závislá jednak na materiálové konstantě  $G$  (modul pružnosti ve smyku) a jednak na rozměrech válce (poloměr  $R$  (všimněte si, že je ve čtvrté mocnině) a délka  $L$ ).

Znalosti závislosti mezi momentem sil  $M$  a úhlem stočení  $\varphi$  můžeme užít jak k měření modulu pružnosti ve smyku, tak k měření silových momentů. Jestliže je  $R$  malé a  $L$  velké (dráty, vlákna), může být i pro malý moment sil úhel  $\varphi$  značně velký. To se využívá např. v torzních vahách (měření gravitační konstanty) a v citlivých galvanometrech.

### Experimentální uspořádání:

#### 1. Měření modulu pružnosti v tahu (Youngova modulu $E$ ) z prodloužení drátu

Modul pružnosti v tahu ocelového drátu budete měřit přímou metodou, tj. budete měřit délkové prodloužení  $\Delta l$  v závislosti na napětí. Drát je napínán silou  $F$  realizovanou vahou závaží zavěšeného na volném konci drátu, druhý konec drátu je pevně uchycen. Podélná vlákna drátu musí tvořit svazek rovnoběžných přímek, proto drát musíte předem vypnout závažím o hmotnosti 0,5 kg až 1 kg. Prodloužení drátu  $\Delta l$  změříte indikátorovými hodinkami, délku drátu  $l$  pásovým měřítkem, průměr drátu  $2r$  mikrometrickým šroubem.

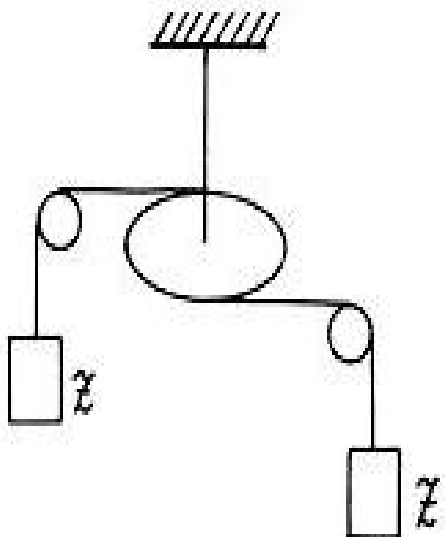
Odhadněte, jak se bude v závislosti na zatížení měnit průřez drátu a uvažte, zda při daném experimentálním uspořádání musíte tuto změnu brát v úvahu.

#### 2. Měření modulu pružnosti v tahu z průhybu nosníku

Pro toto měření máte k dispozici podepřenou tyč na dvou vodorovných břitech vzájemně od sebe vzdálených o délku  $L$ . Břity jsou kolmé k podélné ose tyče. Zatížíme-li tuto tyč uprostřed silou  $F$ , pak je průhyb tyče  $z$  v místě působení síly dán vzorcem (20).

Sílu  $F$  budete realizovat tíhou závaží, šířku a výšku hranolku změříte mikrometrickým šroubem (z těchto údajů spočítáte plošný moment setrvačnosti  $I$ , vzorec pro jeho výpočet odvodíte v přípravě), vzdálenost břítů změříte pásovým měřítkem a průhyb  $z$  mikroskopem s okulárním mikrometrem. Průhyb nosníku o 1 mm odpovídá v zorném poli mikroskopu posun jeho obrazu o 39,5 dílků na okulárovém mikrometru. Průhyb o jeden dílek tedy odpovídá 0,0253 mm.

### 3. Měření modulu pružnosti ve smyku $G$ torzí drátu

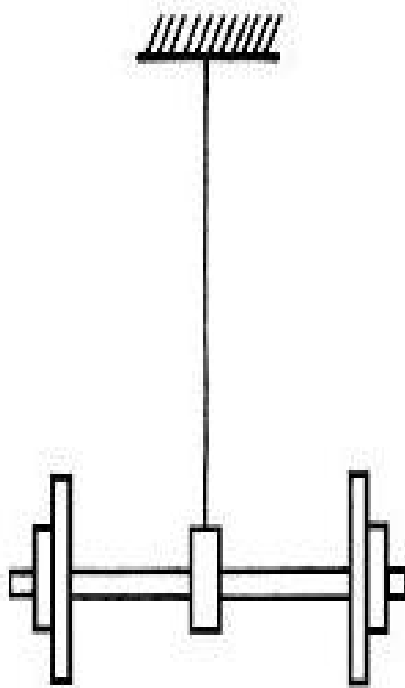


Obrázek 7: Zařízení pro měření modulu pružnosti va smyku metodou statickou

#### a) Metoda statická

Modul pružnosti ve smyku drátu délky  $L$  a poloměru  $R$  stanovíte ze vztahu  $G = (2ML/\pi R^4\varphi)$ , kde  $\varphi$  je úhel stočení spodní části drátu a  $M$  je moment sil, které toto stočení vyvolávají (viz (23)). Experimentální uspořádání je nakresleno na obrázku 7. Na spodním konci drátu je vodorovně upevněna kruhová deska se žlábkem a na obvodu opatřená stupnicí. Na desku jsou navinuta dvě vlákna, která vedou přes kladky a mohou být na volných koncích zatížena dvěma stejnými závažími o hmotnosti  $Z$ . Je-li poloměr desky  $a$ , má moment tíhy obou závaží velikost  $2Zga$  ( $g$  je tíhové zrychlení) a směr osy drátu. Úhel stočení  $\varphi$  změříte buď pomocí stupnice na desce (změříte její otočení vůči pevnému ukazateli) nebo metodou zrcátka a stupnice.

#### b) Metoda dynamická



Obrázek 8: Zařízení pro měření modulu pružnosti va smyku metodou dynamickou

Na spodní konec drátu délky  $L$  a poloměru  $R$  je upevněna tyč, na kterou se mohou přidávat do různých vzdáleností závaží válcového tvaru. Nech  $I$  je moment setrvačnosti tyče a přídatných závaží. Stočíme-li drát v rovině kolmé k ose drátu, budou na tyč působit síly momentu o velikosti  $M = K\varphi$  (viz (24) a směru osy drátu. Tento moment bude stáčet tyč zpět do

rovnovážné polohy. Uvolníme-li tyč, bude vykonávat kmity kolem rovnovážné polohy. Proto se toto zařízení nazývá torzní kyvadlo. Pro pohyb tyče můžeme psát pohybovou rovnici (pohybová rovnice tělesa otáčejícího se kolem pevné osy)

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -K\varphi, \quad (25)$$

kde  $K = G\pi R^4/2L$  (viz (23) a (23)). Tato rovnice má obecné řešení tvaru

$$\varphi = \Phi_0 \sin \left( \sqrt{\frac{K}{I}} t + \varphi_0 \right), \quad (26)$$

$\Phi_0$  a  $\varphi_0$  jsou integrační konstanty. Je zřejmé, že doba kmitu  $T$  torzního kyvadla je dána vztahem  $T = 2\pi\sqrt{I/K}$ .

Ze znalosti doby kyvu torzního kyvadla, momentu setrvačnosti tyče a přídavných závaží a rozměrů drátu tedy můžeme vypočítat modul pružnosti ve smyku materiálu, ze kterého je drát vyroben.

Neznáme-li moment setrvačnosti  $I_0$  samotné tyče, můžeme změřit doby kyvu  $T_1, T_2$  pro dvě různé polohy přídavných závaží, jejichž momenty setrvačnosti známe. Získáme tak dvě rovnice pro výpočet modulu pružnosti ve smyku a momentu setrvačnosti základního systému.

Moment setrvačnosti dutého válce o poloměrech  $r_1, r_2$ , hmotnosti  $m$  a výšce  $v$  vzhledem k ose kolmé k ose rotace válce, která prochází hmotným středem válce je

$$I = (M/4)(r_1^2 + r_2^2 + v^2/3). \quad (27)$$

Vzorec pro výpočet modulu pružnosti ve smyku  $G$  a momentu setrvačnosti základního systému  $I_0$  odvoďte v přípravě. Délku ocelového drátu změřte pásovým měřítkem, jeho průměr mikrometrickým šroubem, vzdálenost přídavných kotoučů od osy otáčení a rozměry kotoučů kontaktním měřítkem a jejich hmotnost stanovte zvážením na analytických vahách. Doby kyvu torzního kyvadla změřte omezovací metodou.

## 2 Pracovní úkoly

1. Změřte závislost relativního délkového prodloužení  $\Delta l/l$  ocelového drátu na napětí při zatěžování a odlehčování drátu a sestrojte graf této závislosti. Vypočítejte metodou nejmenších čtverců modul pružnosti v tahu ocelového drátu.
2. Změřte závislost průhybu  $z$  na velikosti síly  $F$  při zatěžování i odlehčování ocelového nosníku a narýsujte graf této závislosti. Metodou nejmenších čtverců vypočítejte modul pružnosti v tahu. O způsobu zpracování výsledků metodou nejmenších čtverců se dočtete v příloze tohoto dokumentu, která je přejatá z knihy [1], (str. 72 - 74).
3. V přípravě odvoďte vzorec pro plošný moment setrvačnosti obdélníkového průřezu šířky  $a$  a výšky  $b$ .
4. Změřte závislost úhlu zkroucení  $\varphi$  ocelového drátu na velikosti kroutícího momentu při postupném zvětšování a postupném zmenšování tohoto momentu. Výsledky měření vynesete do grafu. Metodou nejmenších čtverců vypočítejte modul pružnosti ve smyku  $G$  drátu.
5. Na torzním kyvadle změřte moment setrvačnosti základního systému  $I_0$  a modul pružnosti ve smyku  $G$  ocelového drátu. Doby torzních kmitů změřte postupnou metodou.
6. V přípravě odvoďte vzorce pro výpočet modulu pružnosti ve smyku  $G$  a momentu setrvačnosti základního systému torzního kyvadla  $I_0$ .

## 3 Poznámky

### 1. Metoda nejmenších čtverců

Nejnámější vyrovnávací metodou je metoda nejmenších čtverců. Její podstata spočívá v tom, že pro nejpravděpodobnější a zároveň nejsprávnější výsledek řady opakovaných měření je součet čtverců odchylek od měřených hodnot minimální, tj. že platí

$$\sum_i^n \Delta y_i^2 = \text{minimum}. \quad (28)$$

Nyní si ukážeme, jak se postupuje, máme-li použít metody nejmenších čtverců k vyrovnání měření lineární závislosti  $y = f(x)$ .

Budeme předpokládat, že z počtu  $n$  stejně přesných měření závislosti typu

$$y = ax + b \quad (29)$$

bylo získáno  $n$  dvojic hodnot - bodů  $(x_i, y_i)$ ;  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ . Dosadíme-li do vzorce (29) postupně všechny hodnoty veličin  $x$  a  $y$ , které poskytla měření, a připojíme-li pro každé měření příslušnou odchylku  $\Delta y_i$ , dostaneme po úpravě těchto  $n$  rovnic:

$$\begin{aligned} ax_1 + b - y_1 &= \Delta y_1 \\ ax_2 + b - y_2 &= \Delta y_2 \\ ax_3 + b - y_3 &= \Delta y_3 \\ &\dots\dots\dots \\ ax_n + b - y_n &= \Delta y_n \end{aligned} \quad (30)$$

Abychom vyhověli podmínce (28), umocníme každou z těchto rovnic na druhou a sečteme je. Takto dojdeme k rovnici

$$\begin{aligned} &a^2x_1^2 + b^2 + y_1^2 + 2abx_1 - 2ax_1y_1 - 2by_1 + \\ &+ a^2x_2^2 + b^2 + y_2^2 + 2abx_2 - 2ax_2y_2 - 2by_2 + \\ &+ a^2x_3^2 + b^2 + y_3^2 + 2abx_3 - 2ax_3y_3 - 2by_3 + \\ &\dots\dots\dots \\ &+ a^2x_n^2 + b^2 + y_n^2 + 2abx_n - 2ax_ny_n - 2by_n = \\ &= \Delta y_1^2 + \Delta y_2^2 + \Delta y_3^2 + \dots + \Delta y_n^2 = \\ &= \sum_i^n \Delta y_i^2 = \text{minimum}, \end{aligned} \quad (31)$$

kterou musíme pro koeficienty  $a$  a  $b$  jako proměnné veličiny řešit tak, aby její levá strana (kterou níže označujeme  $A$ ) měla minimální hodnotu. Řešení předpokládá nalézt parciální derivace výrazu  $A$  podle koeficientů  $a$  a  $b$ , tyto derivace položit rovné nule a z takto získaných dvou rovnic vypočítat koeficienty  $a$  a  $b$ .

Pro parciální derivace výrazu  $A$  podle  $a$  a  $b$  dostaneme

$$\frac{\partial A}{\partial a} = 2ax_1^2 + 2bx_1 - 2x_1y_1 + 2ax_2^2 + 2bx_2 - 2x_2y_2 + 2ax_3^2 + 2bx_3 - 2x_3y_3 + \dots + 2ax_n^2 + 2bx_n - 2x_ny_n, \quad (32)$$

$$\frac{\partial A}{\partial b} = 2b + 2ax_1 - 2y_1 + 2b + 2ax_2 - 2y_2 + 2b + 2ax_3 - 2y_3 + \dots + 2b + 2ax_n - 2y_n. \quad (33)$$

Sloučíme-li v každé z těchto rovnic pravé strany a položíme-li je rovné nule, dojdeme k dvěma rovnicím

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2) a + (x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) b - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + \dots + x_ny_n) = 0, \quad (34)$$

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n) a + nb - (y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n) = 0, \quad (35)$$

jež můžeme psát jednodušeji

$$a \sum_i^n x_i^2 + b \sum_i^n x_i - \sum_i^n x_iy_i = 0, \quad (36)$$

$$a \sum_i^n x_i + nb - \sum_i^n y_i = 0.$$

Jejich řešením pak dostaneme

$$a = \frac{n \sum_i^n x_iy_i - \sum_i^n x_i \sum_i^n y_i}{n \sum_i^n x_i^2 - \left( \sum_i^n x_i \right)^2}, \quad (37)$$

$$b = \frac{\sum_i^n x_i^2 \sum_i^n y_i - \sum_i^n x_i \sum_i^n x_iy_i}{n \sum_i^n x_i^2 - \left( \sum_i^n x_i \right)^2}. \quad (38)$$

Řešení je jednodušší, jde-li o vyrovnaní měření přímé úměrnosti  $y = cx$ . Postup je analogický předchozímu případu s tím rozdílem, že řešení nakonec vede k jediné rovnici, jejímž výsledkem je

$$c = \frac{\sum_i^n x_iy_i}{\sum_i^n x_i^2}. \quad (39)$$

Jestliže bychom měli metodou nejmenších čtverců vyrovnat např. závislost elektrického odporu  $R$  na teplotě  $t$  zobrazenou přímkou v grafu na obrázku 10, které přísluší hodnoty uvedené v *tabulce 1*, použijeme výsledků shora předvedeného řešení. Přímka vyjadřující závislost  $R = f(t)$  je dána rovnicí

$$R = R_0 + kt. \quad (40)$$



Koeficienty  $k$  a  $R_0$  stanovíme na základě rovnic 37 a 38. Bude tedy

$$k = \frac{n \sum t_i R_i - \sum t_i \sum R_i}{n \sum t_i^2 - (\sum t_i)^2}, \quad (41)$$

$$R_0 = \frac{\sum t_i^2 \sum R_i - \sum t_i \sum t_i R_i}{n \sum t_i^2 - (\sum t_i)^2}. \quad (42)$$

Z *tabulky 1* plyne  $n = 11$ ,  $\sum t_i = 550$ ,  $\sum t_i^2 = 38\,500,000$ ,  $\sum R_i = 9831,900$  a  $\sum t_i R_i = 493\,905,000$ . Dosadíme-li tyto hodnoty do výše uvedených rovnic, obdržíme  $k = 0,210$  a  $R_0 = 883,310$ . Pro teplotní součinitel odporu  $\alpha$ , který je rovný  $\frac{k}{R_0}$ , pak dostaneme  $\alpha = 2,377 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ .

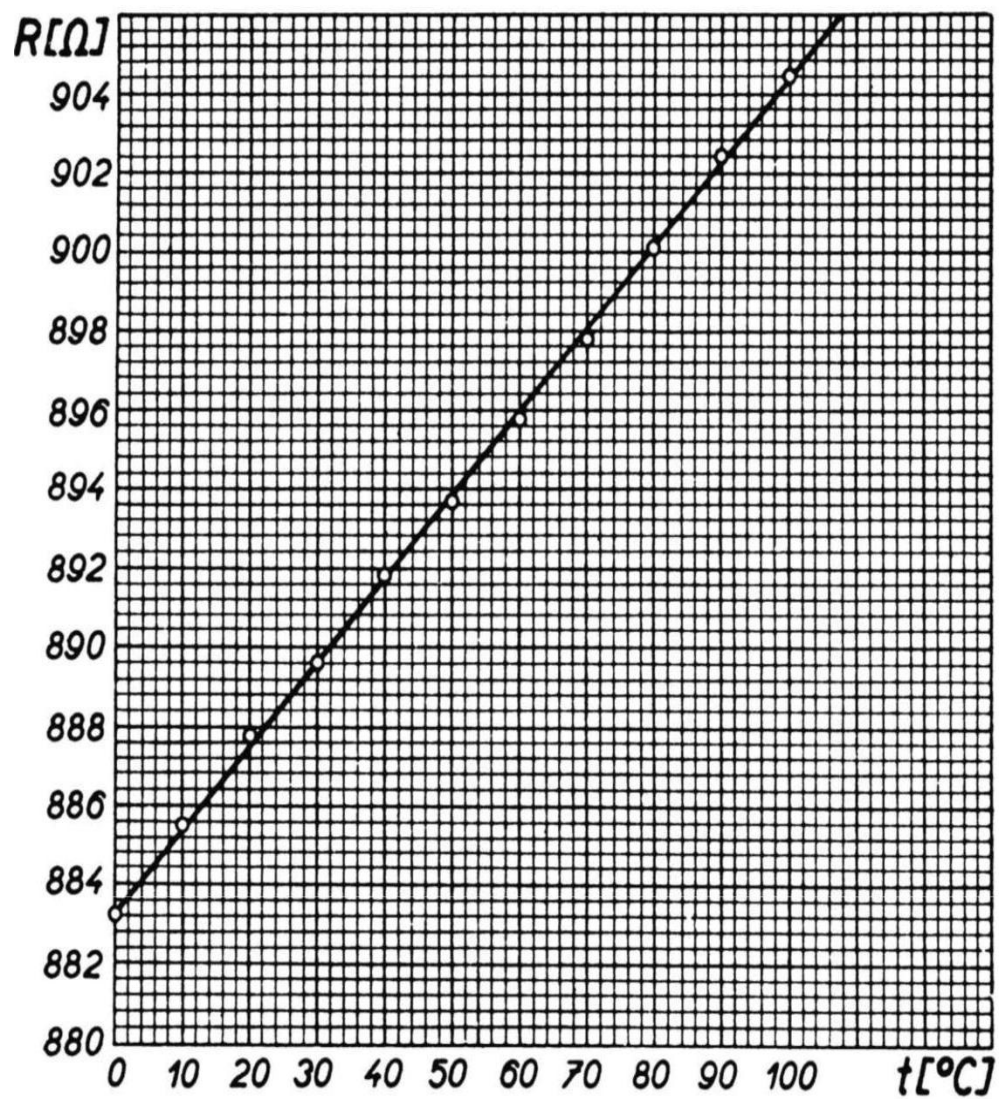
| $t$<br>(°C) | $R$<br>(Ω) |
|-------------|------------|
| 0           | 883,2      |
| 10          | 885,5      |
| 20          | 887,8      |
| 30          | 889,6      |
| 40          | 891,7      |
| 50          | 893,6      |
| 60          | 895,8      |
| 70          | 897,8      |
| 80          | 900,1      |
| 90          | 902,4      |
| 100         | 904,4      |

Tab. 1  
Měřené hodnoty elektrického  
odporu  $R$  v závislosti na teplotě  $t$

Obrázek 9: Měřené hodnoty elektrického odporu  $R$  v závislosti na teplotě  $t$

## Reference

- [1] Brož, J.: Základy fyzikálních měření I, SPN, Praha, 1983, str. 120 až 127.



Obrázek 10: Graf závislosti elektrického odporu  $R$  na teplotě  $t$