Aufgabe 1

a) Für die Basiszustände $|♠\rangle$, $|★\rangle$, $|♦\rangle$ gilt:
$\langle ♠|♠\rangle = 1$, $\langle ★|★\rangle = 1$, $\langle ♦|♦\rangle = 1$

$\langle x|x\rangle = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\langle ♠|♠\rangle + (-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{1}{2})\cdot\langle ★|★\rangle + \frac{1+i}{2}\cdot\frac{1-i}{2}\cdot\langle ♦|♦\rangle = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1-i^2}{4} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$
$\langle y|y\rangle = \frac{i}{2}\cdot(\frac{-i}{2}) + (\frac{-i}{2})\frac{i}{2} + \frac{1-i}{2}\cdot\frac{1+i}{2} = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2} = 1$
$\langle w|w\rangle = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + (\frac{-2i}{3})\cdot(\frac{2i}{3}) + (\frac{-2i}{3})\cdot(\frac{2i}{3}) = \frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9} = 1$

$\langle x|y\rangle = \frac{1}{2}\cdot(\frac{-i}{2}) + (\frac{-1}{2})\cdot\frac{i}{2} + \frac{1+i}{2}\cdot\frac{1+i}{2} = \frac{-i}{4} - \frac{i}{4} + \frac{2i}{4} + \frac{i^2}{4} = \frac{-2i}{4} + \frac{2i}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$
$\Rightarrow |x\rangle$ und $|y\rangle$ sind orthogonal.

$\langle w|y\rangle = \frac{1}{3}\cdot(\frac{-i}{2}) + (\frac{-2i}{3})\cdot\frac{i}{2} + \frac{2i}{3}\cdot\frac{1+i}{2} = \frac{-i}{6} + \frac{2}{6} + \frac{2i}{6} - \frac{2}{6} = \frac{i}{6} \neq 0$
$\Rightarrow |w\rangle$ und $|y\rangle$ sind nicht orthogonal, daher bilden $|x\rangle$, $|y\rangle$ und $|w\rangle$ kein Orthonormalsystem.

b) $\langle x|z\rangle = 0 \land \langle y|z\rangle = 0$ mit $|x\rangle = a\cdot|♠\rangle + b\cdot|★\rangle + c\cdot|♦\rangle$
$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot a - \frac{1}{2}\cdot b + \frac{1+i}{2}c = \frac{i}{2}\cdot a - \frac{i}{2}\cdot b + \frac{i-1}{2}\cdot c$
$\Leftrightarrow \frac{1-i}{2}\cdot a - \frac{1-i}{2}\cdot b + i\cdot c = 0$
Lösung für diese Gleichung: $a = b \land c = 0$
Da $|z\rangle$ ebenfalls ein Einheitsvektor sein muss, muss gelten:
$\langle z|z\rangle = a^*\cdot a + b^*\cdot b + c^*\cdot c = 1$, wobei a^*, b^*, c^* jeweils für das komplex konjugierte steht
Wenn nun a und b aus $\mathbb{R}$ gewählt werden, gilt:
$a\cdot a + b\cdot b = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1 \Leftrightarrow 2a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\Rightarrow |z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|♠\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|★\rangle$

c) $|\frac{i}{2}|^2 = (\frac{1}{2}\cdot 1)^2 = \frac{1}{4} = 25\% \Rightarrow |♦\rangle$ wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 25% gemessen.

d)
  i. $|x\rangle = \frac{1}{2}|♠\rangle - \frac{1}{2}|★\rangle + \frac{1-i}{2}|♦\rangle$
  ii. $|y\rangle = \frac{-i}{2}|♠\rangle + \frac{i}{2}|★\rangle + \frac{1+i}{2}|♦\rangle$
  iii. $|z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|♠\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|★\rangle \Leftrightarrow |♠\rangle = \sqrt{2}|z\rangle - |★\rangle$

$\Rightarrow i\cdot|x\rangle = \frac{i}{2}|♠\rangle - \frac{i}{2}|★\rangle + \frac{1+i}{2}|♦\rangle$
$\Leftrightarrow i\cdot|x\rangle - |y\rangle = i|♠\rangle - i|★\rangle$ Nun wird Gleichung iii. eingesetzt.
$\Leftrightarrow i\cdot|x\rangle - |y\rangle = i\cdot\sqrt{2}\cdot|x\rangle - i\cdot|★\rangle - i\cdot|★\rangle = i\cdot\sqrt{2}\cdot|x\rangle - i\cdot 2\cdot|★\rangle$
$\Leftrightarrow 2\cdot i\cdot|★\rangle = -i\cdot|x\rangle + |y\rangle + i\cdot\sqrt{2}\cdot|z\rangle$
$\Leftrightarrow |★\rangle = \frac{-1}{2}|x\rangle - \frac{i}{2}|y\rangle + \sqrt{2}\cdot|z\rangle \Rightarrow$
Warhscheinlichkeit das $|y\rangle$ gemessen wird: $|\frac{-i}{2}|^2 = \frac{1}{4} = 25\%$

Aufgabe 2

a)