2,5 + 3 + 5 + ~~12~~ 3 + 4 = 17,5

Nils Werner 108012219293 · *Paul Rösler 108012225686* · *Daniel Teuchert 108012214552*

Aufgabe 1

$|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \wedge |\beta\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle$
$\Leftrightarrow |1\rangle = \sqrt{2}|\alpha\rangle - |0\rangle \wedge |0\rangle = \frac{\sqrt{2}}{i}|\beta\rangle + |1\rangle = \frac{\sqrt{2}}{i}|\beta\rangle + \sqrt{2}|\alpha\rangle - |0\rangle$
$\Leftrightarrow |1\rangle = \sqrt{2}|\alpha\rangle - \frac{\sqrt{2}}{i}|\beta\rangle - |1\rangle \wedge |0\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2i}|\beta\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\alpha\rangle$ ✓
$\Leftrightarrow |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\alpha\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|\beta\rangle \wedge |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\alpha\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|\beta\rangle$
$\Rightarrow |z\rangle = \frac{1+i}{2}|0_1 0_2 0_3\rangle + \frac{1}{2}|1_1 1_2 0_3\rangle + \frac{i}{2}|1_1 0_2 1_3\rangle$
$= \frac{1+i}{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}|\alpha_1\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|\beta_1\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}|\alpha_2\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|\beta_2\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}|\alpha_3\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|\beta_3\rangle)$
$+\frac{1}{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}|\alpha_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|\beta_1\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}|\alpha_2\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|\beta_2\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}|\alpha_3\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|\beta_3\rangle)$ ...
$+\frac{i}{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}|\alpha_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|\beta_1\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}|\alpha_2\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|\beta_2\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}|\alpha_3\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|\beta_3\rangle)$
$= \cancel{\frac{1+i}{\sqrt{2}}|\alpha_1\rangle \otimes (\frac{1+i}{\sqrt{2}}|\alpha_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\beta_2\rangle) \otimes \frac{1+i}{\sqrt{2}}|\alpha_3\rangle}$ Verrechnet!

⊗ vor +/− (ähnlich)
~> Klammern
(fehlen überall)

Wsk, bei $|z\rangle$ im 1. Qubit $|\alpha\rangle$ zu messen: $|\frac{1+i}{\sqrt{2}}| = 1$
Zustand danach: $\frac{1+i}{\sqrt{2}}|\alpha_1\rangle \otimes (\frac{1+i}{\sqrt{2}}|\alpha_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\beta_2\rangle) \otimes \frac{1+i}{\sqrt{2}}|\alpha_3\rangle$

Wsk, bei $|z\rangle$ im 1. Qubit $|\beta\rangle$ zu messen: 0
Zustand danach kann nicht angegeben werden, da das Ereignis nicht eintritt.

Wsk, bei $|z\rangle$ im 3. Qubit $|\alpha\rangle$ zu messen: $|\frac{1+i}{\sqrt{2}}| = 1$
Zustand danach: $\frac{1+i}{\sqrt{2}}|\alpha_1\rangle \otimes (\frac{1+i}{\sqrt{2}}|\alpha_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\beta_2\rangle) \otimes \frac{1+i}{\sqrt{2}}|\alpha_3\rangle$

Folgefehler.

Wsk, bei $|z\rangle$ im 3. Qubit $|\beta\rangle$ zu messen: 0
Zustand danach kann nicht angegeben werden, da das Ereignis nicht eintritt.

2,5/4

Aufgabe 2

$$P_{n,n} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n,1} & p_{n,2} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix} \text{ mit } P^\dagger_{n,n} = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{2,1} & \cdots & p_{n,1} \\ p_{1,2} & p_{2,2} & \cdots & p_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1,n} & p_{2,n} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix}$$

Z.z: $P^\dagger_{n,n} = P^{-1}_{n,n} \Leftrightarrow P_{n,n} \cdot P^\dagger_{n,n} = E_n$:

$$\begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n,1} & p_{n,2} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{2,1} & \cdots & p_{n,1} \\ p_{1,2} & p_{2,2} & \cdots & p_{n,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1,n} & p_{2,n} & \cdots & p_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p_{1,1}^2 + p_{1,2}^2 + ... + p_{1,n}^2 & p_{1,1}p_{2,1} + p_{1,2}p_{2,2} + ... + p_{1,n}p_{2,n} & \cdots & p_{1,1}p_{n,1} + p_{1,2}p_{n,2} + ... + p_{1,n}p_{n,n} \\ p_{2,1}p_{1,1} + p_{2,2}p_{1,2} + ... + p_{2,n}p_{1,n} & p_{2,1}^2 + p_{2,2}^2 + ... + p_{2,n}^2 & \cdots & p_{2,1}p_{n,1} + p_{2,2}p_{n,2} + ... + p_{2,n}p_{n,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n,1}p_{1,1} + p_{n,2}p_{1,2} + ... + p_{n,n}p_{1,n} & p_{n,1}p_{2,1} + p_{n,2}p_{2,2} + ... + p_{n,n}p_{2,n} & \cdots & p_{n,1}^2 + p_{n,2}^2 + ... + p_{n,n}^2 \end{pmatrix}$$

$p_{i,1}^2 + p_{i,2}^2 + ... + p_{i,n}^2 = 1 \ \forall i \in \{1, ..., n\}$ da hier jeweils die Quadrate aller Einträge einer Zeile summiert werden. Da in einer Zeile nur an einer Stelle eine 1 steht, ergibt das Quadrat nur an dieser Stelle eine 1, sonst eine 0. ✓
$p_{i,1}p_{j,1} + p_{i,2}p_{j,2} + ... + p_{i,n}p_{j,n} = 0 \ \forall i \neq j \in \{1, ..., n\}$ da hier jeweils zwei Einträge aus einer Spalte miteinander multipliziert werden, die nicht in der gleichen Zeile stehen. Da die Faktoren ungleich sind und damit einer der beiden 0 sein muss, ist das Produkt jeweils 0. Die Summe über diese Produkte ist damit 0.

$$\Rightarrow P_{n,n} \cdot P^\dagger_{n,n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = E_n$$

$\Rightarrow P_{n,n}$ ist eine unitäre Matrix.

3/3

Nils Werner 108012219293 Paul Rösler 108012225686 Daniel Teuchert 108012214552

Aufgabe 3

$|y\rangle = |y_1 y_2 ... y_n\rangle = |y_1\rangle \bigotimes ... \bigotimes |y_n\rangle$
$H_n|y\rangle = \bigotimes_{i=1}^{n} W_2|y\rangle = (W_2 \bigotimes W_2 \bigotimes ... \bigotimes W_2)(|y_1\rangle \bigotimes |y_2\rangle \bigotimes ... \bigotimes |y_n\rangle) = (W_2|y_1) \bigotimes (W_2|y_2\rangle) \bigotimes ... \bigotimes (W_2|y_n\rangle)$
Es gilt: $W_2|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ und $W_2|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$
$\Rightarrow (\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + (-1)^{y_1}|1\rangle)) \bigotimes (\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + (-1)^{y_2}|1\rangle)) \bigotimes ... \bigotimes (\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + (-1)^{y_n}|1\rangle))$
$= 2^{-\frac{n}{2}}(|00...0\rangle + (-1)^{y_n}|00...01\rangle + (-1)^{y_{n-1}}|00...010\rangle + (-1)^{y_n + y_{n-1}}|00....011\rangle + ... + (-1)^{\sum_{i=1}^{n} y_i}|11...1\rangle$
$= 2^{-\frac{n}{2}}((-1)^{\cancel{|0...0\rangle}\cdot y}|00...0\rangle + (-1)^{\cancel{|00...01\rangle}\cdot y}|00...01\rangle + (-1)^{\cancel{|00...010\rangle}\cdot y}|00...010\rangle$
$+(-1)^{|00...011\rangle\cdot y}|00...011\rangle + ... + (-1)^{|11...1\rangle\cdot y}|11...1\rangle$
$= 2^{\frac{n}{2}} \sum_{x=0^n \in \{0,1\}^n}^{1^n} (-1)^{x\cdot y}|x\rangle = H_n|y\rangle$ (✓)

Das im Exponenten ist das Sk.-Prod. von Bit-Vektoren. Da steht kein Ket!

5/5

Aufgabe 5

a) Zu Beginn ist das System im Zustand $|x\rangle = |x_1 x_2 ... x_{n+m}\rangle$.
Fall 1: Alice führt zuerst ihre Operation durch. Zustand danach:
$|x_{zwischen}\rangle = (U_A \bigotimes E_m)|x\rangle = (U_A|x_1...x_n\rangle) \bigotimes (E_m|x_{n+1}...x_{n+m}\rangle)$
Nun führt Bob seine Operation durch. Zustand danach:
$|x'\rangle = (E_n \bigotimes U_B)|x_{zwischen}\rangle = (E_n \bigotimes U_B)((U_A|x_1...x_n\rangle) \bigotimes (E_m|x_{n+1}...x_{n+m}\rangle))$
$= (E_n U_A|x_1...x_n\rangle) \bigotimes (E_m U_B|x_{n+1}...x_{n+m}\rangle) = (U_A|x_1...x_n\rangle) \bigotimes (U_B|x_{n+1}...x_{n+m}\rangle)$

Hier wird implizit angenommen, dass $|x\rangle$ separabel wäre! Das ist i.A. nicht der Fall

Fall 2: Bob führt zuerst seine Operation durch. Zustand danach:
$|x_{zwischen}\rangle = (E_n \bigotimes U_B)|x\rangle = (E_n|x_1...x_n\rangle) \bigotimes (U_B|x_{n+1}...x_{n+m}\rangle)$
Nun führt Alice ihre Operation durch. Zustand danach:
$|x'\rangle = (U_A \bigotimes E_m)|x_{zwischen}\rangle = (U_A \bigotimes E_m)((E_n|x_1...x_n\rangle) \bigotimes (U_B|x_{n+1}...x_{n+m}\rangle))$
$= (E_n U_A|x_1...x_n\rangle) \bigotimes (E_m U_B|x_{n+1}...x_{n+m}\rangle) = (U_A|x_1...x_n\rangle) \bigotimes (U_B|x_{n+1}...x_{n+m}\rangle)$
Wie zu erkennen ist, hängt der Zustand $|x'\rangle$ nicht davon ab ob Bob oder Alice zuerst ihre Operation durchführt. (✓)

b) Zu Beginn ist das System im Zustand $|y\rangle = |y_1 y_2 ... y_{n+m}\rangle$. s.o.
Fall 1: Alice misst bevor Bob seine Operation durchführt:
Wahrscheinlichkeit bei $|y\rangle$ in den ersten n Qubits $|v\rangle$ zu messen: $|(|v\rangle\langle v| \bigotimes E_m)|y\rangle|^2$

Fall 2: Alice misst nachdem Bob seine Operation durchgeführt hat:
Das System ist nun in dem Zustand $|y'\rangle = (E_n \bigotimes U_B)|y\rangle$
Wahrscheinlichkeit bei $|y'\rangle$ in den ersten n Qubits $|v\rangle$ zu messen:
$|(|v\rangle\langle v| \bigotimes E_m)|y'\rangle|^2 = |(|v\rangle\langle v| \bigotimes E_m)((E_n \bigotimes U_B)|y\rangle)|^2$
$= |(|v\rangle\langle v| \bigotimes U_B)|y\rangle|^2$ Da U_B unitäre Abbildung und für unitäre Abbildungen gilt: $||y\rangle| = |U|y\rangle|$ (s. S. 4 Script)
$\Rightarrow |(|v\rangle\langle v| \bigotimes U_B)|y\rangle|^2 = |(|v\rangle\langle v| \bigotimes E_m)|y\rangle|^2$
$\Rightarrow$ Die Wahrscheinlichkeit ist unabhängig von der Reihenfolge. (✓)

c) Zu Beginn ist das System im Zustand $|y\rangle = |y_1 y_2 ... y_{n+m}\rangle$. s.o.
Fall 1: Alice misst bevor Bob seine Operation durchführt:
Zustand nach dem in den ersten n Qubits $|v\rangle$ gemessen wurde: $|y_{zwischen}\rangle = \frac{(|v\rangle\langle v| \bigotimes E_m)|y\rangle}{||(|v\rangle\langle v| \bigotimes E_m)|y\rangle||}$
Nun führt Bob seine Operation durch:
$|y'\rangle = (E_n \bigotimes U_B)|y_{zwischen}\rangle = (E_n \bigotimes U_B)\frac{(|v\rangle\langle v| \bigotimes E_m)|y\rangle}{||(|v\rangle\langle v| \bigotimes E_m)|y\rangle||} = \frac{((|v\rangle\langle v|) \bigotimes U_B)|y\rangle}{||(|v\rangle\langle v| \bigotimes E_m)|y\rangle||}$

Fall 2: Alice misst nachdem Bob seine Operation durchgeführt hat:
Zustand nach dem Bob seine Operation durchgeführt hat:
$|y_{zwischen}\rangle = (E_n \bigotimes U_B)|y\rangle$
Nun misst Alice den Zustand $|v\rangle$ an den ersten n Qubits. Zustand danach:
$|y'\rangle = \frac{(|v\rangle\langle v| \bigotimes E_m)|y_{zwischen}\rangle}{||(|v\rangle\langle v| \bigotimes E_m)|y_{zwischen}\rangle||} = \frac{(|v\rangle\langle v| \bigotimes E_m)(E_n \bigotimes U_B)|y\rangle}{||(|v\rangle\langle v| \bigotimes E_m)(E_n \bigotimes U_B)|y\rangle||} = \frac{((|v\rangle\langle v|) \bigotimes U_B)|y\rangle}{||(|v\rangle\langle v| \bigotimes E_m)(E_n \bigotimes U_B)|y\rangle||}$
Wie bereits in Aufgabenteil b) gezeigt gilt: $||(|v\rangle\langle v| \bigotimes E_m)|y\rangle||^2 = ||(|v\rangle\langle v| \bigotimes E_m)(E_n \bigotimes U_B)|y\rangle||^2$
Und somit auch $||(|v\rangle\langle v| \bigotimes E_m)|y\rangle|| = ||(|v\rangle\langle v| \bigotimes E_m)(E_n \bigotimes U_B)|y\rangle||$
$\Rightarrow \frac{((|v\rangle\langle v|) \bigotimes U_B)|y\rangle}{||(|v\rangle\langle v| \bigotimes E_m)|y\rangle||} = \frac{((|v\rangle\langle v|) \bigotimes U_B)|y\rangle}{||(|v\rangle\langle v| \bigotimes E_m)(E_n \bigotimes U_B)|y\rangle||}$
$\Rightarrow$ Der Gesamtzustand des Systems nach der Messung von $|v\rangle$ und Anwenden von U_B hängt nicht davon ab, ob Alice ihre Messung vor oder nach Bobs Operation durchführt. ✓

4/5

Nils Werner 108012219293 Paul Rösler 108012225686 Daniel Teuchert 108012214552

Aufgabe 4

a) Es muss gelten: $U|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = |\beta_{00}\rangle$

Des weiteren gelte: $U|01\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) = |\beta_{01}\rangle$, $U|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) = |\beta_{10}\rangle$, $U|11\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) = |\beta_{11}\rangle$

$\Rightarrow U = |\beta_{00}\rangle\langle 00| + |\beta_{01}\rangle\langle 01| + |\beta_{10}\rangle\langle 10| + |\beta_{11}\rangle\langle 11|$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&-1&0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&1&0&-1\\1&0&-1&0\end{pmatrix}$$

Z.z: $U^\dagger = U^{-1} \Leftrightarrow U \cdot U^\dagger = E_4$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&1&0&-1\\1&0&-1&0\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&1&0\\1&0&0&-1\\0&1&-1&0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix} = E_4$$

unnötig! β_{ij} sind Orthonormalbasis $\Rightarrow U$ unitär

b) Nein, da:

$(U' \otimes U')|00\rangle = |ERP\rangle$

$\Leftrightarrow (U'|0_1\rangle) \otimes (U'|0_2\rangle) = |ERP\rangle$

$\Leftrightarrow |ERP_1\rangle \otimes |ERP_2\rangle = |ERP\rangle$ ↯

Da $|ERP\rangle$ verschränkt ist, kann es nicht als Tensorprodukt zweier Vektoren berechnet werden. ✓

3/3