

## Aufgabe 1

a) Für die Basiszustände  $|\spadesuit\rangle, |\star\rangle, |\diamond\rangle$  gilt:

$$\langle\spadesuit|\spadesuit\rangle = 1, \langle\star|\star\rangle = 1, \langle\diamond|\diamond\rangle = 1$$

$$\langle x|x\rangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \langle\spadesuit|\spadesuit\rangle + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \langle\star|\star\rangle + \frac{1+i}{2} \cdot \frac{1-i}{2} \cdot \langle\diamond|\diamond\rangle = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1-i^2}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\langle y|y\rangle = \frac{i}{2} \cdot \left(\frac{-i}{2}\right) + \left(\frac{-1}{2}\right) \cdot \frac{i}{2} + \frac{1-i}{2} \cdot \frac{1+i}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\langle w|w\rangle = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{-2i}{3}\right) \cdot \left(\frac{2i}{3}\right) + \left(\frac{-2i}{3}\right) \cdot \left(\frac{2i}{3}\right) = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = 1$$

$$\langle x|y\rangle = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-i}{2}\right) + \left(\frac{-1}{2}\right) \cdot \frac{i}{2} + \frac{1+i}{2} \cdot \frac{1+i}{2} = \frac{-i}{4} - \frac{i}{4} + \frac{2i}{4} + \frac{i^2}{4} = \frac{-2i}{4} + \frac{2i}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

$\Rightarrow |x\rangle$  und  $|y\rangle$  sind orthogonal.

$$\langle w|y\rangle = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-i}{2}\right) + \left(\frac{-2i}{3}\right) \cdot \frac{i}{2} + \frac{2i}{3} \cdot \frac{1+i}{2} = \frac{-i}{6} + \frac{2}{6} + \frac{2i}{6} - \frac{2}{6} = \frac{i}{6} \neq 0$$

$\Rightarrow |w\rangle$  und  $|y\rangle$  sind nicht orthogonal, daher bilden  $|x\rangle, |y\rangle$  und  $|w\rangle$  kein Orthonormalsystem.

b)  $\langle x|z\rangle = 0 \wedge \langle y|z\rangle = 0$  mit  $|x\rangle = a \cdot |\spadesuit\rangle + b \cdot |\star\rangle + c \cdot |\diamond\rangle$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot a - \frac{1}{2} \cdot b + \frac{1+i}{2} c = \frac{i}{2} \cdot a - \frac{i}{2} \cdot b + \frac{i-1}{2} \cdot c$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-i}{2} \cdot a - \frac{1-i}{2} \cdot b + i \cdot c = 0$$

Lösung für diese Gleichung:  $a = b \wedge c = 0$

Da  $|z\rangle$  ebenfalls ein Einheitsvektor sein muss, muss gelten:

$\langle z|z\rangle = a^* \cdot a + b^* \cdot b + c^* \cdot c = 1$ , wobei  $a^*, b^*, c^*$  jeweils für das komplex konjugierte steht

Wenn nun  $a$  und  $b$  aus  $\mathbb{R}$  gewählt werden, gilt:

$$a \cdot a + b \cdot b = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1 \Leftrightarrow 2a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow |z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\spadesuit\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\star\rangle$$

c)  $|\frac{i}{2}|^2 = (\frac{1}{2} \cdot 1)^2 = \frac{1}{4} = 25\% \Rightarrow |\diamond\rangle$  wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 25% gemessen.

d)  $|x\rangle = \frac{1}{2}|\spadesuit\rangle - \frac{1}{2}|\star\rangle + \frac{1-i}{2}|\diamond\rangle$

$$|y\rangle = \frac{-i}{2}|\spadesuit\rangle + \frac{i}{2}|\star\rangle + \frac{1+i}{2}|\diamond\rangle$$

$$|z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\spadesuit\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\star\rangle$$

## Aufgabe 2

a)