Nils Werner 108012219293 Paul Rösler 108012225686 Daniel Teuchert 108012214552

Aufgabe 1

Zu zeigen: $\{nor, c\}$ ist universell, zeige: $nand$ kann durch nor dargestellt werden, da $\{nand, c\}$ universell ist (siehe Vorlesung), ist dann auch $\{nor, c\}$ universell.

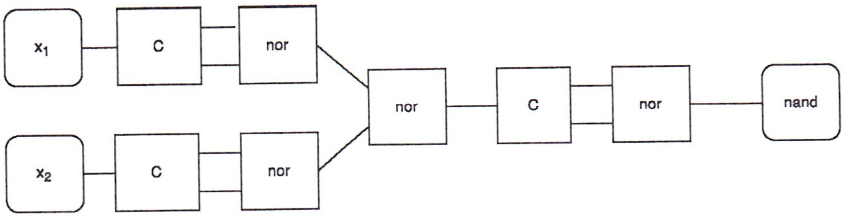

Abbildung 1: Schaltkreis $nand$ aus nor

$$nand = \overline{\overline{\overline{\overline{x_1 \vee x_1} \vee \overline{x_2 \vee x_2}}} \vee \overline{\overline{\overline{x_1 \vee x_1} \vee \overline{x_2 \vee x_2}}}}$$
$$= \overline{\overline{\overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2}}} \vee \overline{\overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2}}}}$$
$$= \overline{(x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_2)}$$
$$= \overline{x_1 \wedge x_2} \wedge \overline{x_1 \wedge x_2}$$
$$= \overline{x_1 \wedge x_2} = nand(x_1, x_2)$$ ✓

3/3

Aufg.	1	2	3	4	Σ
	3	1,5	2,5	5	12

Aufgabe 2

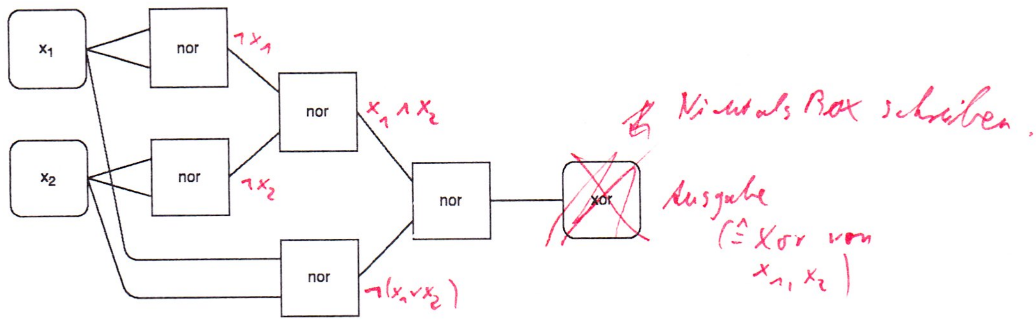

Abbildung 2: Schaltkreis *xor* aus *nor*

Schaltkreis korrekt,
Begründung für Korrektheit?

1,5/3

Nils Werner 108012219293 *Paul Rösler 108012225686* *Daniel Teuchert 108012214552*

Aufgabe 3

Beschreibung einer Funktion $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^m$ als $f((x_1, ..., x_n)) = (y_1, ..., y_m)$ mit Disjunktiver Normalform: $y_j = ((\neg)x_1 \wedge (\neg)x_2 \wedge ... \wedge (\neg)x_n) \vee ... \vee ((\neg)x_1 \wedge (\neg)x_2 \wedge ... \wedge (\neg)x_n)$ mit $1 \leq j \leq m$ und $(\neg)$ symbolisiert eine mögliche Negierung.
Der Term $((\neg)x_1 \wedge (\neg)x_2 \wedge ... \wedge (\neg)x_n)$ existiert maximal $\cancel{\lfloor n/2 \rfloor}$ $\lfloor 2^n/2 \rfloor$ Mal in einer Gleichung, sonst wird die Konjunktive Normalform verwendet, die dann maximal $\lfloor \cancel{n}/2 \rfloor$ Terme mit n Variablen enthält.
Unter der Annahme, dass die Operationen nur zwei Eingänge haben, sieht die Gleichung für jedes y_j unter Verwendung der Disjunktiven Normalform wie folgt aus:

max. Anzahl an Termen in KNF/DNF ist 2^n, nicht n!

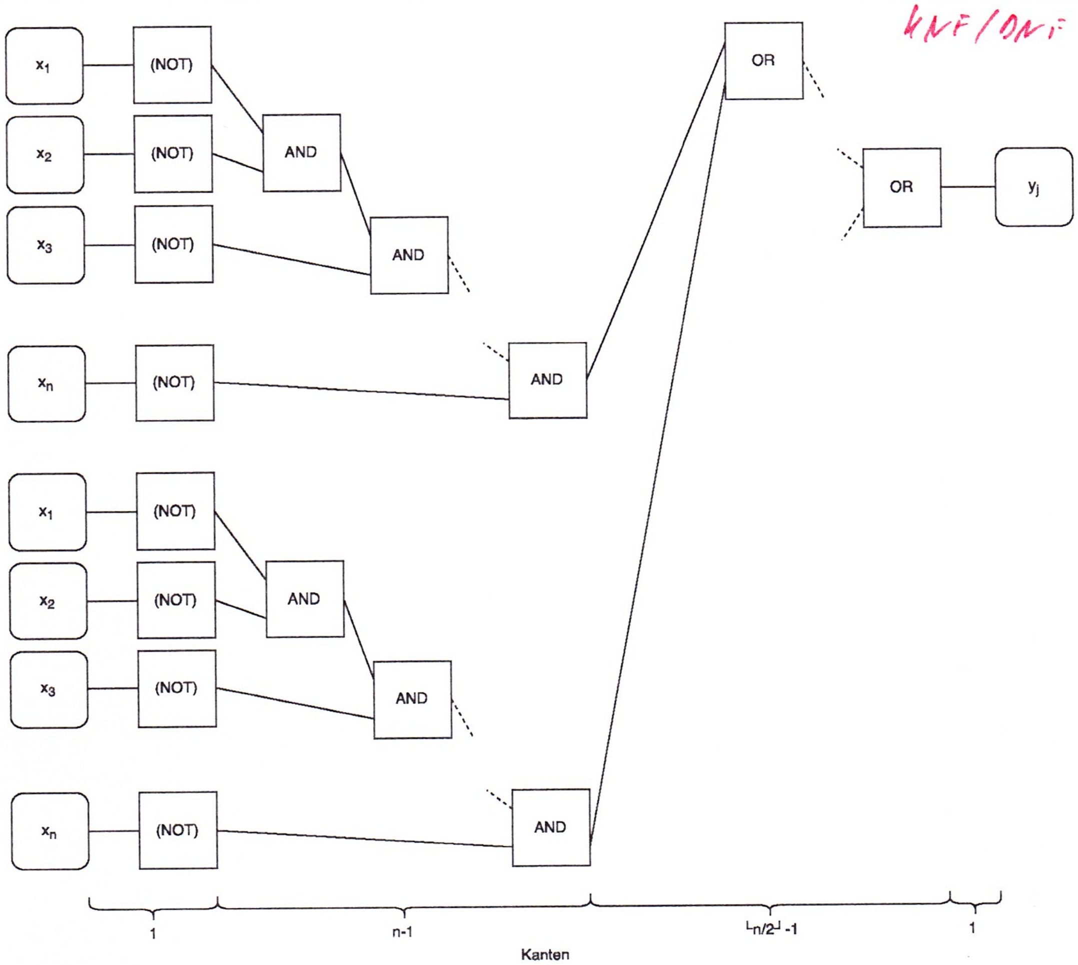

Abbildung 3: Disjunktive Normalform für Funkion $f((x_1, ..., x_n)) = (y_1, ..., y_m)$

Die Tiefe für y_j ergibt der Weg zu x_1. Zwischen x_1 und y_j befinden sich maxmial eine Negierung, $n-1$ AND und $\lfloor n/2 \rfloor - 1$ OR Operationen. Da die Schaltkreise für alle anderen y_k mit $1 \leq k \leq m \wedge j \neq k$ parallel zu dem Schaltkreis für y_j verlaufen und das gleiche Maximum besitzen, hat der Weg zwischen einem Eingabeknoten und einem Ausgabeknoten in dieser Darstellung einer Funktion f die maximale Länge $1 + (n-1) + (\lfloor n/2 \rfloor - 1) + 1 \leq \frac{3}{2}n \in O(n)$.
Da jede Funktion in der Disjunktiven bzw. Konjunktiven Normalform beschrieben werden kann und die Anzahl der Ausgabebits m keinen Einfluss auf die Tiefe des Schaltkreises hat, gilt die Tiefe entsprechend für alle Funktionen $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^m$. (✓)

[illegible]

1,5/4

Aufgabe 4

a) $M_C^{|a\rangle,|b\rangle}(|d\rangle)$ ist der ~~Erwartungswert des~~ Zustand~~s~~ nach der Messung durch C in der Basis mit $|a\rangle, |b\rangle$ von $|d\rangle$.
(als Zufallsvariable) 2/5
$|y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$

$$P[b=0] = P[M_B^{|0\rangle,|1\rangle}(|z'\rangle) = |0\rangle \mid a'=0]\ P[a'=0] + P[M_B^{|x\rangle,|y\rangle}(|z'\rangle) = |x\rangle \mid a'=1]\ P[a'=1]$$
$$= P[M_B^{|0\rangle,|1\rangle}(M_E^{|\alpha\rangle,|\beta\rangle}(|z\rangle)) = |0\rangle \mid a'=0]\ \tfrac{1}{2} + P[M_B^{|x\rangle,|y\rangle}(M_E^{|\alpha\rangle,|\beta\rangle}(|z\rangle)) = |x\rangle \mid a'=1]\ \tfrac{1}{2}$$
$$= \tfrac{1}{2}(P[M_B^{|0\rangle,|1\rangle}(M_E^{|\alpha\rangle,|\beta\rangle}(|0\rangle)) = |0\rangle \mid a'=0 \wedge a=0]\ P[a=0]$$
$$+P[M_B^{|0\rangle,|1\rangle}(M_E^{|\alpha\rangle,|\beta\rangle}(|x\rangle)) = |0\rangle \mid a'=0 \wedge a=1]\ P[a=1])$$
$$+\tfrac{1}{2}(P[M_B^{|x\rangle,|y\rangle}(M_E^{|\alpha\rangle,|\beta\rangle}(|0\rangle)) = |x\rangle \mid a'=1 \wedge a=0]\ P[a=0]$$
$$+P[M_B^{|x\rangle,|y\rangle}(M_E^{|\alpha\rangle,|\beta\rangle}(|x\rangle)) = |x\rangle \mid a'=0 \wedge a=1]\ P[a=1])$$
$$= \tfrac{1}{4}(P[M_B^{|0\rangle,|1\rangle}((\langle\alpha|0\rangle\langle 0|\alpha\rangle\ |\alpha\rangle + \langle\beta|0\rangle\langle 0|\beta\rangle\ |\beta\rangle) = |0\rangle] + P[M_B^{|0\rangle,|1\rangle}((\langle\alpha|x\rangle\langle x|\alpha\rangle\ |\alpha\rangle + \langle\beta|x\rangle\langle x|\beta\rangle\ |\beta\rangle) = |0\rangle]$$
$$+P[M_B^{|x\rangle,|y\rangle}((\langle\alpha|0\rangle\langle 0|\alpha\rangle\ |\alpha\rangle + \langle\beta|0\rangle\langle 0|\beta\rangle\ |\beta\rangle) = |x\rangle] + P[M_B^{|x\rangle,|y\rangle}((\langle\alpha|x\rangle\langle x|\alpha\rangle\ |\alpha\rangle + \langle\beta|x\rangle\langle x|\beta\rangle\ |\beta\rangle) = |x\rangle])$$

Gilt weil: $M_C^{|a\rangle,|b\rangle}(|d\rangle) = |\langle a|d\rangle|^2\ |a\rangle + |\langle b|d\rangle|^2\ |b\rangle = \langle a|d\rangle\langle d|a\rangle\ |a\rangle + \langle b|d\rangle\langle d|b\rangle\ |b\rangle$

$M_B^{|\alpha\rangle,|\beta\rangle} \neq \langle\alpha|0\rangle\langle 0|\alpha\rangle\ |\alpha\rangle$ (*) Konzeptioneller Fehler!
$\sum 0|\alpha\rangle \cdot \langle\alpha|0\rangle$ (Quadrieren!)

$\hat{=}$ bitte ~~sind~~ dieselbe Wsk. (s. unten: Mit diesen Wsk. ~~Koeffizienten vergessen~~) ist der Term $= |\alpha\rangle$
$\Rightarrow$ beim Ausmultiplizieren darf man den nur 1x nehmen. korrekt: Mit Wsk. $\langle\alpha|0\rangle\langle 0|\alpha\rangle$ ergibt sich Beitrag $\langle\alpha|0\rangle\langle 0|\alpha\rangle$ zur Summe.

$$= \tfrac{1}{4}(P[\cancel{\langle 0|}(\langle\alpha|0\rangle\langle 0|\alpha\rangle\ \cancel{|\alpha\rangle} + \langle\beta|0\rangle\langle 0|\beta\rangle\ |\beta\rangle)(\langle\alpha|\ \langle\alpha|0\rangle\langle 0|\alpha\rangle + \langle\beta|\ \langle\beta|0\rangle\langle 0|\beta\rangle)|0\rangle|0\rangle$$
$$+\langle 1|(\langle\alpha|0\rangle\langle 0|\alpha\rangle\ |\alpha\rangle + \langle\beta|0\rangle\langle 0|\beta\rangle\ |\beta\rangle)(\langle\alpha|\ \langle\alpha|0\rangle\langle 0|\alpha\rangle + \langle\beta|\ \langle\beta|0\rangle\langle 0|\beta\rangle)|1\rangle|1\rangle = |0\rangle]$$
$$+P[\langle 0|(\langle\alpha|x\rangle\langle x|\alpha\rangle\ |\alpha\rangle + \langle\beta|x\rangle\langle x|\beta\rangle\ |\beta\rangle)(\langle\alpha|\ \langle\alpha|x\rangle\langle x|\alpha\rangle + \langle\beta|\ \langle\beta|x\rangle\langle x|\beta\rangle)|0\rangle|0\rangle$$
$$+\langle 1|(\langle\alpha|x\rangle\langle x|\alpha\rangle\ |\alpha\rangle + \langle\beta|x\rangle\langle x|\beta\rangle\ |\beta\rangle)(\langle\alpha|\ \langle\alpha|x\rangle\langle x|\alpha\rangle + \langle\beta|\ \langle\beta|x\rangle\langle x|\beta\rangle)|1\rangle|1\rangle = |0\rangle]$$
$$+P[\langle x|(\langle\alpha|0\rangle\langle 0|\alpha\rangle\ |\alpha\rangle + \langle\beta|0\rangle\langle 0|\beta\rangle\ |\beta\rangle)(\langle\alpha|\ \langle\alpha|0\rangle\langle 0|\alpha\rangle + \langle\beta|\ \langle\beta|0\rangle\langle 0|\beta\rangle)|x\rangle|x\rangle$$
$$+\langle y|(\langle\alpha|0\rangle\langle 0|\alpha\rangle\ |\alpha\rangle + \langle\beta|0\rangle\langle 0|\beta\rangle\ |\beta\rangle)(\langle\alpha|\ \langle\alpha|0\rangle\langle 0|\alpha\rangle + \langle\beta|\ \langle\beta|0\rangle\langle 0|\beta\rangle)|y\rangle|y\rangle = |x\rangle]$$
$$+P[\langle x|(\langle\alpha|x\rangle\langle x|\alpha\rangle\ |\alpha\rangle + \langle\beta|x\rangle\langle x|\beta\rangle\ |\beta\rangle)(\langle\alpha|\ \langle\alpha|x\rangle\langle x|\alpha\rangle + \langle\beta|\ \langle\beta|x\rangle\langle x|\beta\rangle)|x\rangle|x\rangle$$
$$+\langle y|(\langle\alpha|x\rangle\langle x|\alpha\rangle\ |\alpha\rangle + \langle\beta|x\rangle\langle x|\beta\rangle\ |\beta\rangle)(\langle\alpha|\ \langle\alpha|x\rangle\langle x|\alpha\rangle + \langle\beta|\ \langle\beta|x\rangle\langle x|\beta\rangle)|y\rangle|y\rangle = |x\rangle])$$

$$= \tfrac{1}{4}(((\langle\alpha|0\rangle^2\langle 0|\alpha\rangle^2 + \langle\beta|0\rangle^2\langle 0|\beta\rangle^2)(\langle\alpha|0\rangle^2\langle 0|\alpha\rangle^2 + \langle\beta|0\rangle^2\langle 0|\beta\rangle^2)$$
$$+(\langle\alpha|x\rangle\langle x|\alpha\rangle\langle 0|\alpha\rangle^2 + \langle\beta|x\rangle\langle x|\beta\rangle\langle 0|\beta\rangle)(\langle\alpha|0\rangle\langle\alpha|x\rangle\langle x|\alpha\rangle + \langle\beta|0\rangle\langle\beta|x\rangle\langle x|\beta\rangle) \ldots$$
$$+(\langle\alpha|0\rangle\langle 0|\alpha\rangle\langle x|\alpha\rangle + \langle\beta|0\rangle\langle 0|\beta\rangle\langle x|\beta\rangle)(\langle\alpha|x\rangle\langle\alpha|0\rangle\langle 0|\alpha\rangle + \langle\beta|x\rangle\langle\beta|0\rangle\langle 0|\beta\rangle)$$
$$+(\langle\alpha|x\rangle\langle x|\alpha\rangle^2 + \langle\beta|x\rangle\langle x|\beta\rangle^2)(\langle\alpha|x\rangle^2\langle x|\alpha\rangle + \langle\beta|x\rangle^2\langle x|\beta\rangle))$$

etc.

$$= \tfrac{1}{4}(\langle\alpha|0\rangle^3\langle 0|\alpha\rangle^3 + \langle\beta|0\rangle^3\langle 0|\beta\rangle^3 + \langle\beta|0\rangle\langle 0|\beta\rangle^2\langle\alpha|0\rangle^2\langle 0|\alpha\rangle + \langle\alpha|0\rangle\langle 0|\alpha\rangle^2\langle\beta|0\rangle^2\langle 0|\beta\rangle$$
$$+\langle\alpha|x\rangle^2\langle x|\alpha\rangle^2\langle 0|\alpha\rangle\langle\alpha|0\rangle + \langle\beta|x\rangle^2\langle x|\beta\rangle^2\langle 0|\beta\rangle\langle\beta|0\rangle + \langle\alpha|x\rangle\langle x|\alpha\rangle\langle 0|\alpha\rangle\langle\beta|0\rangle\langle\beta|x\rangle\langle x|\beta\rangle + \langle\alpha|0\rangle\langle\alpha|x\rangle\langle x|\alpha\rangle\langle\beta|x\rangle\langle x|\beta\rangle\langle 0|\beta$$
$$+\langle\alpha|0\rangle^2\langle 0|\alpha\rangle^2\langle x|\alpha\rangle\langle\alpha|x\rangle + \langle\beta|0\rangle^2\langle 0|\beta\rangle^2\langle x|\beta\rangle\langle\beta|x\rangle + \langle\alpha|0\rangle\langle 0|\alpha\rangle\langle x|\alpha\rangle\langle\beta|x\rangle\langle\beta|0\rangle\langle 0|\beta\rangle + \langle\alpha|x\rangle\langle\alpha|0\rangle\langle 0|\alpha\rangle\langle\beta|0\rangle\langle 0|\beta\rangle\langle x|\beta\rangle$$
$$+\langle\alpha|x\rangle^3\langle x|\alpha\rangle^3 + \langle\beta|x\rangle^3\langle x|\beta\rangle^3 + \langle\beta|x\rangle\langle x|\beta\rangle^2\langle\alpha|x\rangle^2\langle x|\alpha\rangle + \langle\alpha|x\rangle\langle x|\alpha\rangle^2\langle\beta|x\rangle^2\langle x|\beta\rangle)$$

Tut uns Leid für die unkompakte Form aber es war bis hier hin schon sehr viel Arbeit und zumindest die b) lässt sich damit gut berechnen.. :)

Korrektes Ergebnis hat Grad 4, nicht 6. (wegen falscher Modellierung von Wsk.)

b) Für $|\alpha\rangle = |0\rangle, |\beta\rangle = |1\rangle$ gilt:

$$\tfrac{1}{4}(\langle\alpha|0\rangle^3\langle 0|\alpha\rangle^3 + \langle\beta|0\rangle^3\langle 0|\beta\rangle^3 + \langle\beta|0\rangle\langle 0|\beta\rangle^2\langle\alpha|0\rangle^2\langle 0|\alpha\rangle + \langle\alpha|0\rangle\langle 0|\alpha\rangle^2\langle\beta|0\rangle^2\langle 0|\beta\rangle$$
$$+\langle\alpha|x\rangle^2\langle x|\alpha\rangle^2\langle 0|\alpha\rangle\langle\alpha|0\rangle + \langle\beta|x\rangle^2\langle x|\beta\rangle^2\langle 0|\beta\rangle\langle\beta|0\rangle + \langle\alpha|x\rangle\langle x|\alpha\rangle\langle 0|\alpha\rangle\langle\beta|0\rangle\langle\beta|x\rangle\langle x|\beta\rangle + \langle\alpha|0\rangle\langle\alpha|x\rangle\langle x|\alpha\rangle\langle\beta|x\rangle\langle x|\beta\rangle\langle 0|\beta$$
$$+\langle\alpha|0\rangle^2\langle 0|\alpha\rangle^2\langle x|\alpha\rangle\langle\alpha|x\rangle + \langle\beta|0\rangle^2\langle 0|\beta\rangle^2\langle x|\beta\rangle\langle\beta|x\rangle + \langle\alpha|0\rangle\langle 0|\alpha\rangle\langle x|\alpha\rangle\langle\beta|x\rangle\langle\beta|0\rangle\langle 0|\beta\rangle + \langle\alpha|x\rangle\langle\alpha|0\rangle\langle 0|\alpha\rangle\langle\beta|0\rangle\langle 0|\beta\rangle\langle x|\beta\rangle$$
$$+\langle\alpha|x\rangle^3\langle x|\alpha\rangle^3 + \langle\beta|x\rangle^3\langle x|\beta\rangle^3 + \langle\beta|x\rangle\langle x|\beta\rangle^2\langle\alpha|x\rangle^2\langle x|\alpha\rangle + \langle\alpha|x\rangle\langle x|\alpha\rangle^2\langle\beta|x\rangle^2\langle x|\beta\rangle)$$
$$= \tfrac{1}{4}(1+0+0+0\ +\tfrac{1}{2}+0+0+0\ +\tfrac{1}{2}+0+0+0\ +1+0+0+0)$$
$$= \tfrac{3}{4}$$

Folgefehler. 3/3

(*): $\langle\alpha|0\rangle\langle 0|\alpha\rangle\ |\alpha\rangle + \langle\beta|0\rangle\langle 0|\beta\rangle\ |\beta\rangle$ ist ein (fester) Zustand ~~beide~~ (Überlagerung). Wenn man an ihm misst erhält man $|\alpha\rangle$ oder $|\beta\rangle$ mit Wsk. $|\langle\alpha|0\rangle|^2$ bzw. $|\langle\beta|0\rangle|^2$.

Eves Messung liefert aber mit Wsk. $|\langle\alpha|0\rangle|^2$ den Zustand $|\alpha\rangle$ / $|\langle\alpha|0\rangle|$ $|\beta\rangle$

Diese Wahrscheinlichkeiten entsprechen nicht Amplituden: $z' = |\alpha\rangle$ oder $|\beta\rangle$, keine Überlagerung.