

Aufgabe 1

a) Für die Basiszustände $|\spadesuit\rangle, |\star\rangle, |\diamond\rangle$ gilt:

$$\langle\spadesuit|\spadesuit\rangle = 1, \langle\star|\star\rangle = 1, \langle\diamond|\diamond\rangle = 1$$

$$\begin{aligned}\langle x|x\rangle &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \langle\spadesuit|\spadesuit\rangle + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \langle\star|\star\rangle + \frac{1+i}{2} \cdot \frac{1-i}{2} \cdot \langle\diamond|\diamond\rangle = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1-i^2}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\ \langle y|y\rangle &= \frac{i}{2} \cdot \left(\frac{-i}{2}\right) + \left(\frac{-1}{2}\right) \cdot \frac{i}{2} + \frac{1-i}{2} \cdot \frac{1+i}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1 \\ \langle w|w\rangle &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{-2i}{3}\right) \cdot \left(\frac{2i}{3}\right) + \left(\frac{-2i}{3}\right) \cdot \left(\frac{2i}{3}\right) = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle x|y\rangle &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-i}{2}\right) + \left(\frac{-1}{2}\right) \cdot \frac{i}{2} + \frac{1+i}{2} \cdot \frac{1+i}{2} = \frac{-i}{4} - \frac{i}{4} + \frac{2i}{4} + \frac{i^2}{4} = \frac{-2i}{4} + \frac{2i}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \\ \Rightarrow |x\rangle \text{ und } |y\rangle &\text{ sind orthogonal.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle w|y\rangle &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{-i}{2}\right) + \left(\frac{-2i}{3}\right) \cdot \frac{i}{2} + \frac{2i}{3} \cdot \frac{1+i}{2} = \frac{-i}{6} + \frac{2}{6} + \frac{2i}{6} - \frac{2}{6} = \frac{i}{6} \neq 0 \\ \Rightarrow |w\rangle \text{ und } |y\rangle &\text{ sind nicht orthogonal, daher bilden } |x\rangle, |y\rangle \text{ und } |w\rangle \text{ kein Orthonormal-} \\ \text{system.}\end{aligned}$$

b) $\langle x|z\rangle = 0 \wedge \langle y|z\rangle = 0$ mit $|x\rangle = a \cdot |\spadesuit\rangle + b \cdot |\star\rangle + c \cdot |\diamond\rangle$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot a - \frac{1}{2} \cdot b + \frac{1+i}{2} c = \frac{i}{2} \cdot a - \frac{i}{2} \cdot b + \frac{1-i}{2} \cdot c$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-i}{2} \cdot a - \frac{1-i}{2} \cdot b + i \cdot c = 0$$

Lösung für diese Gleichung: $a = b \wedge c = 0$

Da $|z\rangle$ ebenfalls ein Einheitsvektor sein muss, muss gelten:

$\langle z|z\rangle = a^* \cdot a + b^* \cdot b + c^* \cdot c = 1$, wobei a^*, b^*, c^* jeweils für das komplex konjugierte steht

Wenn nun a und b aus \mathbb{R} gewählt werden, gilt:

$$a \cdot a + b \cdot b = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1 \Leftrightarrow 2a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow |z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\spadesuit\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\star\rangle$$

c) $|\frac{i}{2}|^2 = (\frac{1}{2} \cdot 1)^2 = \frac{1}{4} = 25\% \Rightarrow |\diamond\rangle$ wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 25% gemessen.

d) i. $|x\rangle = \frac{1}{2}|\spadesuit\rangle - \frac{1}{2}|\star\rangle + \frac{1-i}{2}|\diamond\rangle$

ii. $|y\rangle = \frac{-i}{2}|\spadesuit\rangle + \frac{i}{2}|\star\rangle + \frac{1+i}{2}|\diamond\rangle$

iii. $|z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\spadesuit\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\star\rangle \Leftrightarrow |\spadesuit\rangle = \sqrt{2}|z\rangle - |\star\rangle$

$$\Rightarrow i \cdot |x\rangle = \frac{i}{2}|\spadesuit\rangle - \frac{i}{2}|\star\rangle + \frac{1-i}{2}|\diamond\rangle$$

$$\Leftrightarrow i \cdot |x\rangle - |y\rangle = i|\spadesuit\rangle - i|\star\rangle \text{ Nun wird Gleichung iii. eingesetzt.}$$

$$\Leftrightarrow i \cdot |x\rangle - |y\rangle = i \cdot \sqrt{2} \cdot |x\rangle - i \cdot |\star\rangle - i \cdot |\star\rangle = i \cdot \sqrt{2} \cdot |x\rangle - i \cdot 2 \cdot |\star\rangle$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot i \cdot |\star\rangle = -i \cdot |x\rangle + |y\rangle + i \cdot \sqrt{2} \cdot |z\rangle$$

$$\Leftrightarrow |\star\rangle = \frac{-1}{2}|x\rangle - \frac{i}{2}|y\rangle + \sqrt{2} \cdot |z\rangle \Rightarrow$$

Wahrscheinlichkeit das $|y\rangle$ gemessen wird: $|\frac{-i}{2}|^2 = \frac{1}{4} = 25\%$

Aufgabe 2

Eine Matrix U ist unitär $\Leftrightarrow U \cdot U^\dagger = E$, wobei E die Einheitsmatrix ist.

$$M_{\neg} \cdot M_{\neg}^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

$$\sqrt{M_{\neg}} \cdot \sqrt{M_{\neg}}^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \\ \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2i-\frac{1}{2}+\frac{1}{2} & 1+2i-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-2i-1 \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

$$\sqrt{M_{\neg}}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i-2i & \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & 2i-2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = M_{\neg}$$

Aufgabe 3

a)