Aufgabe 1

a) Für die Basiszustände $|\spadesuit\rangle$, $|\bigstar\rangle$, $|\blacklozenge\rangle$ gilt:
$\langle\spadesuit|\spadesuit\rangle = 1$, $\langle\bigstar|\bigstar\rangle = 1$, $\langle\blacklozenge|\blacklozenge\rangle = 1$

$\langle x|x\rangle = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\langle\spadesuit|\spadesuit\rangle + (-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{1}{2})\cdot\langle\bigstar|\bigstar\rangle + \frac{1+i}{2}\cdot\frac{1-i}{2}\cdot\langle\blacklozenge|\blacklozenge\rangle = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1-i^2}{4} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$
$\langle y|y\rangle = \frac{i}{2}\cdot(\frac{-i}{2}) + (\frac{-i}{2})\frac{i}{2} + \frac{1-i}{2}\cdot\frac{1+i}{2} = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2} = 1$
$\langle w|w\rangle = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + (\frac{-2i}{3})\cdot(\frac{2i}{3}) + (\frac{-2i}{3})\cdot(\frac{2i}{3}) = \frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9} = 1$

$\langle x|y\rangle = \frac{1}{2}\cdot(\frac{-i}{2}) + (\frac{-1}{2})\cdot\frac{i}{2} + \frac{1+i}{2}\cdot\frac{1+i}{2} = \frac{-i}{4} - \frac{i}{4} + \frac{2i}{4} + \frac{i^2}{4} = \frac{-2i}{4} + \frac{2i}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$
$\Rightarrow |x\rangle$ und $|y\rangle$ sind orthogonal.

$\langle w|y\rangle = \frac{1}{3}\cdot(\frac{-i}{2}) + (\frac{-2i}{3})\cdot\frac{i}{2} + \frac{2i}{3}\cdot\frac{1+i}{2} = \frac{-i}{6} + \frac{2}{6} + \frac{2i}{6} - \frac{2}{6} = \frac{i}{6} \neq 0$
$\Rightarrow |w\rangle$ und $|y\rangle$ sind nicht orthogonal, daher bilden $|x\rangle$, $|y\rangle$ und $|w\rangle$ kein Orthonormalsystem.

b)

Aufgabe 2

a)