Nils Werner 108012219293 Paul Rösler 108012225686 Daniel Teuchert 108012214552

Aufgabe 1

$|z\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} z_j|j\rangle$ mit $N = 8,\ z_k = \frac{1}{2}cos(\frac{2\pi k}{8}) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}(e^{\frac{2\pi ik}{8}} + e^{-\frac{2\pi ik}{8}}) = \frac{1}{4}(e^{\frac{2\pi ik}{8}} + e^{-\frac{2\pi ik}{8}})$ ✓

4/4

$QFT(|z\rangle) = \sum_{j=0}^{N-1} y_j|j\rangle$ mit $y_j = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1} z_k e^{2\pi i\frac{jk}{N}}$

$= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1} z_k e^{2\pi i\frac{jk}{N}}|j\rangle$

$= \frac{1}{\sqrt{8}}\frac{1}{4}\sum_{j=0}^{7}\sum_{k=0}^{7}(e^{\frac{2\pi ik}{8}} + e^{-\frac{2\pi ik}{8}})e^{j\frac{2\pi ik}{8}}|j\rangle$

$= \frac{1}{4\sqrt{8}}\sum_{j=0}^{7}\sum_{k=0}^{7}(e^{(j+1)\frac{2\pi ik}{8}} + e^{(j-1)\frac{2\pi ik}{8}})|j\rangle$

$= \frac{1}{4\sqrt{8}}(0|0\rangle + 8|1\rangle + 0|2\rangle + 0|3\rangle + 0|4\rangle + 0|5\rangle + 0|6\rangle + 8|7\rangle)$

$= \frac{2}{\sqrt{8}}(|1\rangle + |7\rangle)$ ✓ $\frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Aufg.	1	2	3	4	Σ
	4	4	4,5	5	~~18~~ 17,5

Nils Werner 108012219293 Paul Rösler 108012225686 Übungsgruppe: Mo. 16:00 Daniel Teuchert 108012214552

Aufgabe 2

4/5

a) R_2, R_3 :

$$R_2 = F_{2\pi 2^{-2}} = F_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\pi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

$$R_3 = F_{\frac{\pi}{4}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\pi}{4}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Eigentlich werden kontrollierte R_k^{-1} für die $\mathrm{QFT}_{2^n}^{-1}$ benötigt.

b) Für $|z\rangle = |z_1 z_2 z_3\rangle = (\frac{|0\rangle + e^{2\pi i 0.x_3}|1\rangle}{\sqrt{2}}) \bigotimes (\frac{|0\rangle + e^{2\pi i 0.x_2 x_3}|1\rangle}{\sqrt{2}}) \bigotimes (\frac{|0\rangle + e^{2\pi i 0.x_1 x_2 x_3}|1\rangle}{\sqrt{2}})$ gilt:

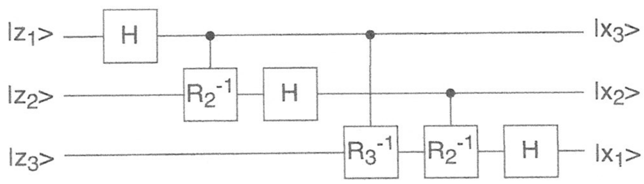


Abbildung 1: Quantenschaltkreis für QFT_8^{-1}

c) Die Matrizen der folgenden unitären Abbildungen sind bekannt oder können wie folgt berechnet werden:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$R_k^{-1} = (R_k^*)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\pi}{2^{k-1}}} \end{pmatrix} \text{ da unitäre Abbildung.}$$

Kontrolliertes R_k^{-1} nach gleichem Schema wie $CNOT$:

$$CR_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}, CR_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$QFT_8^{-1} = (H \bigotimes I_2)(CR_2^{-1} \bigotimes I_1)(I_1 \bigotimes H \bigotimes I_1) CR_3^{-1} (I_1 \bigotimes CR_2^{-1})(I_2 \bigotimes H)$$
$$= ((H \bigotimes I_1) CR_2^{-1} (I_1 \bigotimes H)) \bigotimes I_1) CR_3^{-1} (I_1 \bigotimes (CR_2^{-1} (I_1 \bigotimes H))$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2^3}} (\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -i & i \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & i & -i \end{pmatrix} \bigotimes I_1) CR_3^{-1} (I_1 \bigotimes \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -i & i \end{pmatrix})$$

A2
1/2

$$= \frac{1}{\sqrt{2^3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -i & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -i & 0 & i \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & i & 0 & -i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & i & 0 & -i \end{pmatrix} CR_3^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & i \end{pmatrix}$$

Nicht zu Ende gerechnet.

~~Ha~~ Muss/ Sollte man nicht so machen.

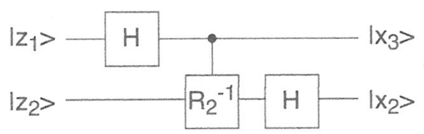
~~ki~~

A2

2/2

Aufgabe 3

4,5 / 5



← Notation (Copy & Paste, nehme ich an)

Abbildung 2: Quantenschaltkreis für QFT_4^{-1}

$$|z\rangle = \tfrac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle - |2\rangle - |3\rangle) = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{H \otimes I_1} \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{CR_2^{-1}} \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{I_1 \otimes H} \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1-i\\1+i\end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\1-i\\1+i\end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}((1-i)|\cancel{2}^{\,1}\rangle + (1+i)|3\rangle)$$

entspricht $|1\rangle$, da Bits in falscher Reihenfolge ausgegeben werden.

Nils Werner 108012219293 Paul Rösler 108012225686 Daniel Teuchert 108012214552

Aufgabe 4

5/6

a) Zeige: $|x_j| = |x'_j|$
$\Leftrightarrow |\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} z_k e^{2\pi i \frac{jk}{N}}| = |\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} z_{k+b \ mod \ N} e^{2\pi i \frac{j(k\cancel{+b} \ mod \ N)}{N}}|$ (siehe A.1)
dadurch etwas komplizierter.
Da $\frac{1}{\sqrt{N}}$ unabhängig von b und $|e^{ix}| = 1$, gilt:
$\Leftrightarrow |\sum_{k=0}^{N-1} z_k| = |\sum_{k=0}^{N-1} z_{k+b \ mod \ N}|$
Da das jeweils die Summe über alle Amplituden $z_i, 0 \leq i < N = 2^n$ ist, gilt diese Gleichheit.

b) $|z'\rangle = \sum_{j=0}^{16-1} z'_j |j\rangle$ mit $z'_0 = z'_5 = z'_{11} = \frac{1}{\sqrt{3}},\ z'_k = 0\ \forall 0 < k < 16 \wedge i \notin \{5, 11\}$

$QFT(|z'\rangle) = \frac{1}{\sqrt{16}} \sum_{j=0}^{15} \sum_{k=0}^{15} z_k e^{2\pi i \frac{jk}{16}} |j\rangle$
$= \frac{1}{\sqrt{16}} \sum_{j=0}^{15} (\frac{1}{\sqrt{3}} e^{2\pi i \frac{j0}{16}} + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{2\pi i \frac{j5}{16}} + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{2\pi i \frac{j11}{16}}) |j\rangle$
$= \frac{1}{4\sqrt{3}} \sum_{j=0}^{15} (1 + e^{5\pi i \frac{j}{8}} + e^{11\pi i \frac{j}{8}}) |j\rangle$
$\approx \frac{1}{4\sqrt{3}} (3|0\rangle + 0,235|1\rangle - 0,414|2\rangle + 2,848|3\rangle + 1|4\rangle - 0,848|5\rangle + 2,414|6\rangle + 1,765|7\rangle - 1|8\rangle + 1,765|9\rangle + 1,414|10\rangle - 0,848|11\rangle + 1|12\rangle + 2,848|13\rangle - 0,414|14\rangle + 0,235|15\rangle)$

$\Rightarrow |x\rangle = |0\rangle, |x\rangle = |3\rangle, |x\rangle = |13\rangle$ sind die drei wahrscheinlichsten Messergebnisse mit Wahrscheinlichkeiten $|x'_0|^2 = |x_0|^2 = \frac{3}{16}$, $|x_3|^2 = |x_{13}|^2 \approx 0,169$ ✓