Aufgabe 1

a) Für die Basiszustände $|\spadesuit\rangle$, $|\bigstar\rangle$, $|\blacklozenge\rangle$ gilt:
$\langle\spadesuit|\spadesuit\rangle = 1$, $\langle\bigstar|\bigstar\rangle = 1$, $\langle\blacklozenge|\blacklozenge\rangle = 1$

$\langle x|x\rangle = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\langle\spadesuit|\spadesuit\rangle + (-\frac{1}{2})\cdot(-\frac{1}{2})\cdot\langle\bigstar|\bigstar\rangle + \frac{1+i}{2}\cdot\frac{1-i}{2}\cdot\langle\blacklozenge|\blacklozenge\rangle = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1-i^2}{4} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$
$\langle y|y\rangle = \frac{i}{2}\cdot(\frac{-i}{2}) + (\frac{-i}{2})\frac{i}{2} + \frac{1-i}{2}\cdot\frac{1+i}{2} = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2} = 1$
$\langle w|w\rangle = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + (\frac{-2i}{3})\cdot(\frac{2i}{3}) + (\frac{-2i}{3})\cdot(\frac{2i}{3}) = \frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9} = 1$

$\langle x|y\rangle = \frac{1}{2}\cdot(\frac{-i}{2}) + (\frac{-1}{2})\cdot\frac{i}{2} + \frac{1+i}{2}\cdot\frac{1+i}{2} = \frac{-i}{4} - \frac{i}{4} + \frac{2i}{4} + \frac{i^2}{4} = \frac{-2i}{4} + \frac{2i}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$
$\Rightarrow |x\rangle$ und $|y\rangle$ sind orthogonal.

$\langle w|y\rangle = \frac{1}{3}\cdot(\frac{-i}{2}) + (\frac{-2i}{3})\cdot\frac{i}{2} + \frac{2i}{3}\cdot\frac{1+i}{2} = \frac{-i}{6} + \frac{2}{6} + \frac{2i}{6} - \frac{2}{6} = \frac{i}{6} \neq 0$
$\Rightarrow |w\rangle$ und $|y\rangle$ sind nicht orthogonal, daher bilden $|x\rangle$, $|y\rangle$ und $|w\rangle$ kein Orthonormalsystem.

b) $\langle x|z\rangle = 0 \wedge \langle y|z\rangle = 0$ mit $|x\rangle = a\cdot|\spadesuit\rangle + b\cdot|\bigstar\rangle + c\cdot|\blacklozenge\rangle$
$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot a - \frac{1}{2}\cdot b + \frac{1+i}{2}c = \frac{i}{2}\cdot a - \frac{i}{2}\cdot b + \frac{i-1}{2}\cdot c$
$\Leftrightarrow \frac{1-i}{2}\cdot a - \frac{1-i}{2}\cdot b + i\cdot c = 0$
Lösung für diese Gleichung: $a = b \wedge c = 0$
Da $|z\rangle$ ebenfalls ein Einheitsvektor sein muss, muss gelten:
$\langle z|z\rangle = a^*\cdot a + b^*\cdot b + c^*\cdot c = 1$, wobei a^*, b^*, c^* jeweils für das komplex konjugierte steht
Wenn nun a und b aus $\mathbb{R}$ gewählt werden, gilt:
$a\cdot a + b\cdot b = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1 \Leftrightarrow 2a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\Rightarrow |z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\spadesuit\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\bigstar\rangle$

c) $|\frac{i}{2}|^2 = (\frac{1}{2}\cdot 1)^2 = \frac{1}{4} = 25\% \Rightarrow |\blacklozenge\rangle$ wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 25% gemessen.

d)
i. $|x\rangle = \frac{1}{2}|\spadesuit\rangle - \frac{1}{2}|\bigstar\rangle + \frac{1-i}{2}|\blacklozenge\rangle$
ii. $|y\rangle = \frac{-i}{2}|\spadesuit\rangle + \frac{i}{2}|\bigstar\rangle + \frac{1+i}{2}|\blacklozenge\rangle$
iii. $|z\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\spadesuit\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\bigstar\rangle \Leftrightarrow |\spadesuit\rangle = \sqrt{2}|z\rangle - |\bigstar\rangle$

$\Rightarrow i\cdot|x\rangle = \frac{i}{2}|\spadesuit\rangle - \frac{i}{2}|\bigstar\rangle + \frac{1+i}{2}|\blacklozenge\rangle$
$\Leftrightarrow i\cdot|x\rangle - |y\rangle = i|\spadesuit\rangle - i|\bigstar\rangle$ Nun wird Gleichung iii. eingesetzt.
$\Leftrightarrow i\cdot|x\rangle - |y\rangle = i\cdot\sqrt{2}\cdot|x\rangle - i\cdot|\bigstar\rangle - i\cdot|\bigstar\rangle = i\cdot\sqrt{2}\cdot|x\rangle - i\cdot 2\cdot|\bigstar\rangle$
$\Leftrightarrow 2\cdot i\cdot|\bigstar\rangle = -i\cdot|x\rangle + |y\rangle + i\cdot\sqrt{2}\cdot|z\rangle$
$\Leftrightarrow |\bigstar\rangle = \frac{-1}{2}|x\rangle - \frac{i}{2}|y\rangle + \sqrt{2}\cdot|z\rangle \Rightarrow$
Warhscheinlichkeit das $|y\rangle$ gemessen wird: $|\frac{-i}{2}|^2 = \frac{1}{4} = 25\%$

Aufgabe 2

Eine Matrix U ist unitär $\Leftrightarrow U \cdot U^\dagger = E$, wobei E die Einheitsmatrix ist.

$$M_\neg \cdot M_\neg^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

$$\sqrt{M_\neg} \cdot \sqrt{M_\neg}^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \\ \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & 1 + 2i - 1 + 1 - 2i - 1 \\ 1 + 2i - 1 + 1 - 2i - 1 & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

$$\sqrt{M_\neg}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2i - 2i & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} & 2i - 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = M_\neg$$

Aufgabe 3

a) $|v_{zwischen}\rangle = \sqrt{M_\neg} \cdot |v_{init}\rangle$
$|v_{final}\rangle = \sqrt{M_\neg} \cdot |v_{zwischen}\rangle = \sqrt{M_\neg}^2 \cdot |v_{init}\rangle$ Es gilt: $\sqrt{M_\neg}^2 = M_\neg$
$\Rightarrow |v_{final}\rangle = M_\neg \cdot |v_{init}\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot |0\rangle + 1 \cdot |1\rangle$
$\Rightarrow$ Ws das $|0\rangle$ gemessen wird: $|0|^2 = 0\%$ $\Rightarrow$ Ws das $|1\rangle$ gemessen wird: 100%

b)