

# Tutorial 7 MA1202 Matematika 2B, Semester 2 tahun 2020/2021

## Sekolah Ilmu Teknologi Hayati & Sekolah Farmasi

### Institut Teknologi Bandung

Pokok bahasan: Masalah Nilai Eigen, Iterasi Matriks Model (Bab 8.7-8.8).

1. **Telaah konsep.** Lingkari huruf B jika pernyataan bernilai benar atau huruf S jika bernilai salah.

- (B/S) Jika  $A$  adalah matriks persegi dan  $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$  maka  $\mathbf{x}$  adalah vektor eigen dari  $A$ .
- (B/S) Jika  $\lambda$  adalah nilai eigen dari matriks  $A$  maka SPL  $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$  hanya mempunyai solusi trivial.
- (B/S) Jika polinom karakteristik dari  $A$  adalah  $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$  maka  $A$  mempunyai invers.
- (B/S) Jika 0 adalah nilai eigen dari  $A$  maka  $\det(A) = 0$ .
- (B/S) Jika  $A$  dapat didiagonalkan maka terdapat matriks  $P$  sehingga  $P^{-1}AP$  matriks diagonal.
- (B/S) Jika  $A$  dapat didiagonalkan maka terdapat matriks  $P$  secara tunggal sehingga  $P^{-1}AP$  matriks diagonal.
- (B/S) Jika  $\det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$  maka  $A$  dapat didiagonalkan.
- (B/S) Jika  $\det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$  maka  $A$  dapat didiagonalkan.
- (B/S) Jika matriks  $A$  primitif dan nilai eigen  $A$  semuanya real maka  $A$  memiliki nilai eigen yang positif.
- (B/S) Jika matriks  $A$  primitif dan  $A = PDP^{-1}$  maka entri-entri matriks  $P$  semuanya positif.
- (B/S) Diberikan sistem persamaan beda  $\mathbf{n}_t = A\mathbf{n}_{t-1}$ . Jika matriks  $A$  primitif maka terdapat pasangan nilai eigen dan vektor eigen dari  $A$  yaitu  $\lambda_1$  dan  $\mathbf{v}_1$  sehingga untuk jangka waktu yang panjang,  $\mathbf{n}_t$  sebanding dengan  $\mathbf{v}_1$ .

2. **Isian Singkat.**

- Nilai eigen dari  $A = \begin{bmatrix} a & a & a \\ 0 & b & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$  adalah ...
- Nilai eigen dari  $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & c & c \end{bmatrix}$  adalah ...
- Jika  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$  maka salah satu kemungkinan untuk  $P^{-1}AP$  adalah..
- Diberikan  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ . Jika  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  adalah vektor eigen dari  $A$  maka nilai eigen yang berkaitan adalah  $\lambda = \dots$
- Diberikan  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$ . Jika  $\lambda = 4$  adalah nilai eigen dari  $A$  maka vektor eigen yang berkaitan adalah...

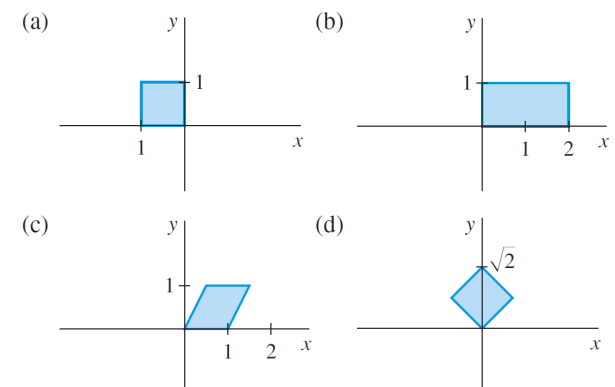
3. **Pilihan Ganda** Diberikan sistem persamaan beda  $\mathbf{n}_t = A\mathbf{n}_{t-1}$  dengan  $\mathbf{n}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ . Jika  $A = PDP^{-1}$  dengan  $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$  dan  $D = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  maka solusi sistem persamaan beda adalah

- $\mathbf{n}_t = -3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$
- $\mathbf{n}_t = (-3)^t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + (2)^t \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$
- $\mathbf{n}_t = (-3)^t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + (2)^{t+1} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$
- $\mathbf{n}_t = (-3)^t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + (2)^{t+1} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

4. Gambarkan vektor  $\vec{u} = [0, 2]$ ,  $\vec{v} = [1, 0]$ ,  $A\vec{u}$ , dan  $A\vec{v}$  untuk matriks  $A$  berikut:

- $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

5. Diketahui persegi dengan titik-titik sudut  $(0,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(1,0)$ ,  $(1,1)$ . Tentukan matriks  $A_{2 \times 2}$  yang mentransformasikan persegi tersebut menjadi bentuk-bentuk di bawah ini:



6. Periksa apakah  $\lambda$  merupakan nilai eigen dari matriks berikut:

- $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\lambda = 3$
- $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $\lambda = 1 + \sqrt{a}$

7. Tentukan apakah  $\vec{x}$  merupakan vektor eigen bagi matriks yang diberikan:

- $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$   $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} -9 & 4 & 6 \\ -6 & 3 & 4 \\ -9 & 4 & 6 \end{bmatrix}$   $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$

8. Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks berikut:

(a)  $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$                       (b)  $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

9. Tuliskan matriks berikut dalam bentuk perkalian matriks  $PDP^{-1}$  dengan  $P$  matriks yang berisi vektor-vektor eigen, dan  $D$  matriks diagonal yang berisi nilai-nilai eigen dari  $\mathbf{A}$ . Tentukan pula  $A^5$  dan  $A^{10}$

(a)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$                       (b)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

10. Tuliskan solusi dari model pertumbuhan  $\vec{n}_{t+1} = A\vec{n}_t$  dengan nilai awal  $\vec{n}_0 = [1, 1]^T$ .

(a)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$                       (b)  $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$                       (c)  $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$

11. **Vectorcardiography** Perubahan vektor voltage jantung dapat dimodelkan oleh persamaan rekursif  $\mathbf{v}_{t+1} = A\mathbf{v}_t$  dengan

$$\mathbf{v}_{t+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{v}_t.$$

(a) Apakah Teorema Perron-Frobenius berlaku pada model ini?

- (b) Dengan kondisi awal  $\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ -0.2 \end{bmatrix}$ , tentukan solusi persamaan rekursi yang dinyatakan dalam nilai-nilai eigen dan vektor-vektor eigen dari  $A$ .
- (c) Tentukan bagaimana kelakuan jangka panjang dari  $\mathbf{v}_t$ .

12. **Leslie matrices** Perhatikan model populasi berukuran  $\mathbf{n}_t$  yang terbagi dalam dua kelompok umur sehingga dinamika populasi dimodelkan oleh persamaan rekursif  $\mathbf{n}_{t+1} = L\mathbf{n}_t$ , dengan

$$L = \begin{bmatrix} b & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad b > 0.$$

- (a) Periksa bahwa Teorema Perron-Frobenius berlaku pada model ini.
- (b) Tentukan semua nilai eigen dari  $L$ .
- (c) Berdasarkan jawab pada (a) dan (b), tentukan vektor kelakuan jangka panjang  $\mathbf{n}_t$  sebagai fungsi dari  $b$ .
- (d) Dengan kondisi awal  $\mathbf{n}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ , tentukan solusi persamaan rekursi yang dinyatakan dalam nilai eigen dan vektor eigen dari  $L$ .
- (e) Periksa jawab pada (c) dengan menggunakan jawab pada (d).