Mathematische Annalen

Band 225 1977

Begründet 1868 durch Alfred Clebsch · Carl Neumann
Fortgeführt durch Felix Klein · David Hilbert
Otto Blumenthal · Erich Hecke · Heinrich Behnke

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York

Mathematische Annalen

Begründet 1868 durch *Alfred Clebsch* und *Carl Neumann*, früher herausgegeben von *Alfred Clebsch* (1869—1872), *Carl Neumann* (1869—1876), *Felix Klein* (1876—1924), *Adolph Mayer* (1876—1901), *Walther v. Dyck* (1888—1921), *David Hilbert* (1902 bis 1939), *Otto Blumenthal* (1906—1938), *Albert Einstein* (1920—1928), *Constantin Carathéodory* (1925—1928), *Erich Hecke* (1929—1947), *Bartel L. van der Waerden* (1934 bis 1968), *Franz Rellich* (1947—1955), *Kurt Reidemeister* (1947—1963), *Richard Courant* (1947—1968), *Heinz Hopf* (1947—1968), *Gottfried Köthe* (1957—1971), *Heinrich Behnke* (1938—1972), *Konrad Jörgens* (1972—1974), *Max Koecher* (1968—1976). Band 1—80 Leipzig, B.G.Teubner, ab Band 81 (1920) Berlin, Springer.

Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Printers: Brühlsche Universitätsdruckerei, Gießen

Inhalt/Contents

Covered by Zentralblatt für Mathematik and Contents of Mathematical Publications

Mathematische Annalen

Band 225 Heft 1 1977

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York

ISSN 0025-5831 Math. Ann. — MAANA 3 225 (1) 1-98 (1977) 3. I. 1977

Mathematische Annalen

Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingesandt werden, die nicht gleichzeitig an anderer Stelle zur Veröffentlichung eingereicht oder bereits veröffentlicht worden sind. Der Autor verpflichtet sich, seinen Beitrag auch nachträglich nicht an anderer Stelle zu publizieren. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag geht das Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder einschließlich des Rechts der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung, auch in Mikroform, an den Verlag über. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart worden ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0,40 pro Seite zu verwenden. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.*

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 100 Sonderdrucke unentgeltlich.

Die Manuskripte müssen nach den in jedem Band erscheinenden „Hinweise für die Autoren" vorbereitet sein.

Die Reihenfolge der Veröffentlichungen behält sich die Redaktion vor.

Arbeiten werden nicht vom geschäftsführenden Herausgeber entgegengenommen, sie sollen an den Herausgeber gesandt werden, dessen Gebiet dem der Arbeit am nächsten steht.

* * *

It is a fundamental condition that submitted manuscripts have not been, and will not simultaneously be submitted or published elsewhere. With the acceptance of a manuscript for publication, the publishers acquire full and exclusive copyright for all languages and countries. Unless special permission has been granted by the publishers, no photographic reproductions, microform or any other reproductions of a similar nature may be made of the journal, of individual contributions contained therein or of extracts therefrom.

100 offprints of each paper are provided free of charge; additional copies may be ordered at cost price.

Manuscripts must be prepared according to the "Instructions to Authors" printed in every volume.

The editors reserve the right to publish manuscripts in any order they think fit.

Papers must not be sent to the managing editor; they should only be submitted to the editor whose field is nearest to that of the paper.

* * *

Subscription information

Volumes 225—230 (3 issues each) will appear in 1977. The publisher reserves the right to issue additional volumes during the calendar year. Information about obtaining back volumes and microform editions available upon request.

All Countries (Except North America). Subscription rate: DM 948,— plus postage and handling. Orders can either be placed with your bookdealer or sent directly to: Springer-Verlag, Heidelberger Platz 3, D-1000 Berlin 33.

North America. Subscription rate: $ 398,90, including postage and handling. Subscriptions are entered with prepayment only. Orders should be addressed to: Springer-Verlag New York Inc., 175 Fifth Avenue, New York, N.Y. 10010.

Springer-Verlag

Postfach 105280 D-6900 Heidelberg 1 Telefon (06221) 487-1 Telex 04—61690	Heidelberger Platz 3 D-1000 Berlin 33 Telefon (030) 822001 Telex 01—83319	Springer-Verlag New York Inc. 175 Fifth Avenue New York, N.Y. 10010

Math. Ann. 225, 1—20 (1977)

Quadratic Relations for Generators of Units in the Modular Function Field

Dan Kubert*
Department of Mathematics, Cornell University, New York, USA

In [KL I] we found it convenient for the diophantine applications to work with differences and quotients of the Weierstrass elliptic functions in order to obtain units in the modular function field. For the multiplicative theory of [KL II], it was more convenient to deal with the Siegel functions (quotients of Klein forms). We shall now investigate the relations between these, and determine when a product of Klein forms is a modular function of the given level. At the same time, it is also natural to express modular functions whose divisor is at infinity as a product of Weierstrass σ-functions which differ from the Klein forms by an exponential factor. Thus we also give the conditions that a product of such Weierstrass σ-functions is a modular function. We shall also see that all these functions essentially generate the same group of units in $\boldsymbol{Q}R_N$, where R_N is the integral closure of $\boldsymbol{Z}[j]$ in the modular function field F_N of level N, over the constant field of N-th roots of unity.

Contents

§ 1. Recall of Some Formulas

For the convenience of the reader we recall some definitions and formulas, handled in detail in [KL II].

A **form of degree** k is a function

$$h\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}, \quad \mathrm{Im}(\omega_1/\omega_2)>0,$$

* Supported by NSF grant

satisfying the homogeneity property

MF 1. $h\left(\lambda\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}\right)=\lambda^k h\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}, \quad \lambda\in \boldsymbol{C}^\star.$

Let Γ be, say, a subgroup of $\mathrm{SL}_2(\boldsymbol{Z})$. We say that a form as above is **modular with respect to Γ** if it satisfies the additional property

MF 2. $h\left(\gamma\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}\right)=h\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}, \quad \gamma\in\Gamma.$

Let η_1, η_2 be the corresponding quasi-periods of the Weierstrass zeta function associated with the period lattice $[\omega_1, \omega_2]$. Let N be an integer >1, let r, s be integers not both congruent to 0 mod N. We define the **Klein forms**

$$\begin{aligned}\mathfrak{k}_{r,s}(\omega_1,\omega_2)&=\mathfrak{k}\left(\frac{r}{N},\frac{s}{N};\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}\right)\\ &=\exp\left(-\frac{r\eta_1+s\eta_2}{N}\frac{r\omega_1+s\omega_2}{2N}\right)\sigma\left(\frac{r\omega_1+s\omega_2}{N};\omega_1,\omega_2\right).\end{aligned}$$

If the integer N is fixed throughout a discussion, we index the Klein form $\mathfrak{k}$ just with (r, s). When we deal with relations between Klein forms of various levels, however, it is necessary to keep the N in the notation. Other possibilities which may also be convenient are

$$\mathfrak{k}\left(\frac{r\omega_1+s\omega_2}{N};\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}\right).$$

Since the sigma function is homogeneous of degree 1, and the quasi periods are homogeneous of degree -1, it follows that the Klein form is homogeneous of degree 1 in $[\omega_1, \omega_2]$, that is

$$\mathfrak{k}_{r,s}(\lambda\omega_1,\lambda\omega_2)=\lambda\mathfrak{k}_{r,s}(\omega_1,\omega_2), \quad \lambda\in\boldsymbol{C}^\star.$$

The Klein forms satisfy the following properties.

K 1. *If* $\alpha=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ *is in* $\mathrm{SL}_2(\boldsymbol{Z})$, *then*

$$\mathfrak{k}_{r,s}\left(\alpha\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}\right)=\mathfrak{k}_{(r,s)\alpha}\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}.$$

We recall the standard transformation property of the sigma function with respect to the periods, namely

$$\begin{aligned}&\sigma(z+m_1\omega_1+m_2\omega_2)\\ &=(-1)^{m_1m_2+m_1+m_2}e^{(m_1\eta_1+m_2\eta_2)\,(z+\frac{1}{2}(m_1\omega_1+m_2\omega_2))}\sigma(z).\end{aligned}$$

From this we obtain at once for arbitrary integers a, b:

K 2. $\mathfrak{k}_{r+aN,s+bN}=(-1)^{ab+a+b}e^{-2\pi i(as-br)/2N}\mathfrak{k}_{r,s}.$

(Of course, one uses the Legendre relation.)

Now suppose that

$$\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (\operatorname{mod} N),$$

and $\alpha \in \mathrm{SL}_2(\boldsymbol{Z})$, so $\alpha \in \Gamma(N)$. Then

$$a-1 \equiv d-1 \equiv c \equiv b \equiv 0 \,(\operatorname{mod} N).$$

We write

$$ar+cs = r + \left(\frac{a-1}{N} r + \frac{c}{N} s\right) N$$

$$br+ds = s + \left(\frac{b}{N} r + \frac{d-1}{N} s\right) N.$$

If $\alpha \in \Gamma(N)$ we therefore find

K 3. $$\mathfrak{k}_{r,s}\left(\alpha \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}\right) = \varepsilon(\alpha) \mathfrak{k}_{r,s}$$

where $\varepsilon(\alpha)$ is a $(2N)$-th root of unity, namely

$$\varepsilon(\alpha) = -(-1)^{\left(\frac{a-1}{N} r + \frac{c}{N} s + 1\right)\left(\frac{b}{N} r + \frac{d-1}{N} s + 1\right)} e^{2\pi i (br^2 + (d-a)rs - cs^2)/2N^2}.$$

It follows that $\mathfrak{k}_{r,s}^{2N}$ is invariant under $\Gamma(N)$, and satisfies the first two conditions of a modular form, of weight $2N$.

§ 2. The Weierstrass Forms

For notation, we let

$$r = (r_1, r_2) \in \boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}$$

denote pairs of integers, not both equal to 0. We fix a positive integer N throughout, $N > 1$. If not both r_1, r_2 are $\equiv 0 \,(\operatorname{mod} N)$ then we define

$$\sigma_r(\tau, 1) = \sigma_r(\tau) = \sigma\left(\frac{r_1 \tau + r_2}{N}; [\tau, 1]\right)$$

where σ is the Weierstrass sigma function, whose addition formula was already recalled in §1. We call σ_r a **Weierstrass form.**

Theorem 1. *Let $\{m(r)\}$ be a family of integers, associated with pairs of integers $r = (r_1, r_2)$ not both $\equiv 0 \,(\operatorname{mod} N)$, and such that almost all $m(r)$ are equal to 0. The form*

$$f = \prod_r \sigma_r^{m(r)}$$

is modular with respect to $\Gamma(N)$ if and only if

QUAD 1. $\sum m(r) r_1^2 = \sum m(r) r_2^2 = \sum m(r) r_1 r_2 = 0$.

Proof. Let

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

be an element of $\Gamma(N)$, so that we can write

$$a-1 = xN \qquad b = yN$$
$$c = zN \qquad d-1 = wN$$

with integers x, y, z, w. We use the addition formula of σ to see that for any given choice of exponents $m(r)$, the function f transforms under γ by picking up an exponential factor and a power of -1. We use the Legendre relation

$$\eta_2 \tau = \eta_1 + 2\pi i$$

once on the exponential factor. We see immediately that this factor is equal to 1 for all $\gamma \in \Gamma(N)$ if and only if the three relations among the coordinates r_i, r_j are satisfied. Observe also that the first relation mod 2 is equivalent to

$$\sum m(r_i) r_i \equiv 0 \pmod 2,$$

because $r_i^2 \equiv r_i \pmod 2$. The explicit computation of the power of -1 shows that it also disappears under the stated conditions.

We recognize the conditions **QUAD 1** as being the relations satisfied by quadratic forms, in the following sense. Let $(\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z})/\pm$ be the set obtained from $\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}$ by deleting $(0, 0)$, and by identifying an element r with $-r$. Let F be the free abelian group generated by the elements of $(\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z})/\pm$. We call F the group of **divisors.** If $r \in \boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}$ we denote by (r) the divisor having $\pm r$ with multiplicity 1, and all other elements of $(\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z})/\pm$ with multiplicity 0. Viewing τ as a variable, we sometimes write

$$r = r_1 \tau + r_2,$$

in which case we also write $(r) = (r_1 \tau + r_2)$. In other words, we identify $\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}$ with $\boldsymbol{Z}\tau + \boldsymbol{Z}$, as a 2-dimensional free module. Of course, it is in the τ-context that we shall apply the following formal lemmas. For each pair of elements $r, s \in \boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}$ not both zero, we let the **parallelogram** associated with r, s be the element of F given by

$$p(r, s) = (r+s) + (r-s) - 2(r) - 2(s).$$

We let K be the subgroup of F generated by the parallelogram elements and elements of the form

$$x^2(r) - (xr), \qquad x \in \boldsymbol{Z}.$$

QUAD 2. *The subgroup K is the same as the subgroup of divisors $\sum m(r)(r)$ satisfying conditions* **QUAD 1**.

This is essentially standard linear algebra. We can give a characterization of the subgroup K in the language of quadratic forms. A quadratic form Q on $\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}$ (with values, say, in a field of characteristic 0) can be extended by linearity to the group of divisors, and vanishes on K. Conversely, if α is an element of F such that $Q(\alpha)=0$ for every quadratic form Q on $\boldsymbol{Z} \times \boldsymbol{Z}$, then α lies in K.

The characterizations **QUAD 1** and **QUAD 2** allow us to translate properties of modular forms with respect to $\Gamma(N)$ into combinatorial statements about divisors, and the subgroup K.

If $\sum m(r)(r)$ is a divisor, we define as usual $\sum m(r)$ to be its **degree.** We denote by F^+ the subgroup of F consisting of those divisors of even degree, and we let K^+ be the subgroup $K \cap F^+$, i.e. the subgroup of K consisting of divisors of even degree.

Theorem 2. *The subgroup K^+ is precisely equal to the subgroup generated by the parallelogram elements.*

Proof. Let K_0^+ be the subgroup of K^+ generated by the parallelogram elements. We have to show that $K_0^+=K^+$. We define the height

$$h(r_1, r_2)=|r_1|+|r_2| \,; \qquad h(\Sigma m(r)(r))=\max(h(r), m(r) \neq 0)\,.$$

Given an element $\beta \in K^+$, we first show that we can find $\alpha \in K_0^+$ such that

$$h(\beta-\alpha) \leqq 2\,.$$

Write the element β in the form $\beta=r\tau+s$, where r, s are integers, and suppose $h(\beta) \geqq 3$. We find integers (r', s') such that

$$|r-r'|+|s-s'|<|r|+|s|$$

$$|r-2r'|+|s-2s'|<|r|+|s|$$

$$|r'|+|s'|<|r|+|s|$$

$$(r', s') \neq (r-r', s-s')\,.$$

This is trivially done. We then let $a=(r\tau+s')$ and

$$b=(r-r')\tau+s-s'\,.$$

Then $a+b=r\tau+s$, and $\beta-p(a, b)$ has lower height than β. This reduces the proof to the case when $h(\beta) \leqq 2$, and therefore to a finite number of explicit cases, which can be handled explicitly one at a time, as follows.

We note that the elements $(\tau+1)$ and $(\tau-1)$ are congruent modulo K_0^+, as one sees by using the parallelogram $p(a, b)$, where

$$a=(\tau) \quad \text{and} \quad b=(1).$$

Similarly, the elements (2τ) and (2) are congruent modulo K_0^+, as one sees by using the parallelogram $p(a, b)$, where

$$a=(\tau-1) \quad \text{and} \quad b=(\tau+1).$$

Considering all possible cases of height $\leqq 2$, we are therefore reduced to proving that

$$(\tau), \quad (1), \quad (\tau+1), \quad (2\tau)$$

lie in K_0^+. To do this we need a lemma.

Lemma. *The element* $(8\tau)-2(2\tau)$ *is in* K_0^+.

Proof. We can write this element in the form

$$\alpha-\beta+2\gamma,$$

where:

$$\alpha=(5\tau)+(\tau)-2(2\tau)-2(3\tau)-[(5\tau)+(3\tau)-2(\tau)-2(4\tau)]$$
$$\beta=(3\tau)+(\tau)-2(\tau)-2(2\tau)$$
$$\gamma=(4\tau)+(2\tau)-2(\tau)-2(3\tau),$$

and α, β, γ obviously lie in K_0^+.

Now suppose that we have an element $\xi \in K^+$, written in the form

$$\xi=m_1(\tau)+m_2(1)+m_3(2\tau)+m_4(\tau+1).$$

By definition,

$$m_1+4m_3+m_4=0, \quad m_2+m_4=0, \quad \text{and} \quad m_4=0.$$

It follows that $m_2=0$, so that m_1 is even. Hence

$$m_1+4m_3=0.$$

But m_1+m_3 is even by assumption, so m_3 is even, $m_3=2n_3$, and $m_1=-8n_3$. We can now use the lemma to conclude the proof.

§ 3. The Even Primitive Elements

We want a theorem also giving various generators for the group generated by primitive elements. Thus we are led to making further definitions.

Let $\alpha \in K$. We shall say that α is **primitive** (of level N) if any element $r\tau+s$ occurring with non-zero multiplicity in α is primitive mod N, that is has period N in $\boldsymbol{Z}^2/N\boldsymbol{Z}^2$. We let $K_{\mathrm{pr}}^+(N)$ be the subgroup of K^+ consisting of primitive elements.

We let $K_{sp}(N)$ be the subgroup generated by primitive parallelograms, i.e. parallelograms

$$(r+s)+(r-s)-2(r)-2(s)$$

such that $r+s$, $r-s$, r, s are primitive. For simplicity of notation, we omit the N, and write simply K_{pr}^{+} and K_{sp}. We call the elements of K_{sp} **special,** and call K_{sp} the **special subgroup,** with respect to N. Obviously K_{sp} is contained in K_{pr}^{+}.

Theorem 3. *We have* $K_{sp}(N)=K_{pr}^{+}(N)$.

It is obvious that this theorem implies the previous one, by considering primitive elements with respect to all divisors of N.

The desired inclusion $K_{pr}^{+}\subset K_{sp}$ will be proved by a recursive procedure, depending on a descent with respect to two norms. We work with both coordinates of an element of $\boldsymbol{Z}\times\boldsymbol{Z}$, and to omit indices, it is now convenient to let r, s denote integers. We also write our "elementary" divisors in the form $r\tau+s$. We define

$$h(r\tau+s)=|r|+|s| \quad \text{and} \quad h_2(r\tau+s)=|s|\,.$$

Lemma 1. *Let β be primitive in F, such that $h_2(\beta)\geqq 2$. Then there exists a special element α such that*

$$h_2(\beta-\alpha)=0 \quad \text{or} \quad 1\,.$$

Proof. We may assume that β consists of a single element, say

$$\beta=(r\tau+s)\,, \quad \text{with} \quad |s|\geqq 2\,.$$

We may assume that $h_2(\beta)=s>0$. (Remember that an element is identified with its negative.) We shall use a special element α of the form

$$(r\tau+s)+((r-2x)\tau+(s-2))-2(x\tau+1)-2((r-x)\tau+(s-1))\,.$$

where x is to be determined, in order to insure primitivity. Once we have found x, it is then clear that we have achieved our purposes since $h_2(\beta-\alpha)$ has decreased by at least one unit, and we can repeat the procedure to obtain the statement of the lemma.

Write $N=\prod p^{n(p)}$. To achieve the desired primitivity of the elements occurring in α, it suffices to do so $\bmod p^{n(p)}$ for each p dividing N.

If $p=2$ and r is even (the worst case), we let $x_p=r-1$. Since s must be odd, each one of our elements has the period $2^{n(2)} \bmod 2^{n(2)}$.

In all other cases, the equation

$$(r-x_p)(r-2x_p)\equiv 0 \pmod p$$

has at most two solutions, so we can find x_p which is not a solution.

Finally, we pick $x\equiv x_p (\bmod p^{n(p)})$ for all p, thereby finishing the proof of the lemma.

We have therefore reduced the proof of the theorem to the cases when $s=0$ or $s=\pm 1$.

Lemma 2. *For any $r \in \mathbf{Z}$ we have*

$$(r\tau \pm 1) \equiv 0 \bmod K_{\mathrm{sp}}, \quad (\tau), \quad (\tau+1), \quad (1).$$

The congruence on the right is of course meant modulo the group generated by K_{sp} and the indicated elements.

Proof. Since elements of $(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z})/\pm$ are identified mod ± 1, we may assume without loss of generality that $r > 0$. We shall prove that if $r \geqq 2$, then there exists a special α such that

$$h(\beta - \alpha) < h(\beta).$$

Indeed, we take

$$\alpha = (r\tau \pm 1) + ((r-2)\tau \pm 1) - 2(\tau) - 2((r-1)\tau \pm 1).$$

We may therefore proceed again recursively to prove our lemma, using the element

$$(\tau+1) + (\tau-1) - 2(\tau) - 2(1)$$

to show that $(\tau - 1)$ lies in K_{sp}, (τ), $(\tau+1)$, (1).

Lemma 3. *Let $(r\tau)$ be primitive.* (i) *If N is even or if r is odd, then*

$$(r\tau) \equiv 0 \bmod K_{\mathrm{sp}}(N), \quad (\tau), \quad (\tau+1), \quad (1).$$

(ii) *If N is odd and r is even, then*

$$(r\tau) \equiv 0 \bmod K_{\mathrm{sp}}(N), \quad (\tau), \quad (\tau+1), \quad (1), \quad (2).$$

Proof. Let $\beta = (r\tau)$. If r is odd, $|r| > 3$, we write $r = 2x + 1$. We take the special element

$$\alpha = (r\tau) + (\tau+2) - 2(-x\tau - 1) - 2((x+1)\tau - 1).$$

Then $h(\beta - \alpha) < h(\beta)$. Recursively, we can therefore show that

$$\beta \equiv 0 \bmod K_{\mathrm{sp}}, \quad (\tau), \quad (\tau+1), \quad (1), \quad (\tau+2).$$

However, the fact that

$$(\tau+2) + (\tau) - 2(\tau+1) - 2(1)$$

is special shows that the preceding congruence reduces to the one specified in the lemma, as was to be shown, in case (i).

Suppose next that r is even. Then N is odd because $r\tau$ is assumed primitive. Write $r = 2x$, and let

$$\alpha = (r\tau) + (2) - 2(x\tau + 1) - 2(x\tau - 1).$$

The same type of argument as before concludes the proof.

Putting the three lemmas together, we have shown:

Theorem 4. *If β is primitive of level N in F, then*

(i) $\beta \equiv 0 \bmod K_{\mathrm{sp}}(N)$, (τ), $(\tau+1)$, (1) *if N is even*

(ii) $\beta \equiv 0 \bmod K_{\mathrm{sp}}(N)$, (τ), $(\tau+1)$, (1), (2) *if N is odd.*

Observe that this theorem applies to any primitive element of F. In order to get a proof of Theorem 3, we must of course start using particular properties of K_{pr}^{+}, which we now do.

Suppose given an element

$$m_1(1)+m_2(\tau)+m_3(\tau+1),$$

of which we need only assume that it satisfies the quadratic relations **QUAD 1**. Then

$$m_1+m_3=0, \quad m_2+m_3=0, \quad m_3=0.$$

Therefore all $m_i=0$ and we are done in the first case of Theorem 4, applied to our special situation.

In the second case, assume that we have an element

$$m_1(1)+m_2(2)+m_3(\tau)+m_4(\tau+1)$$

which satisfies the quadratic relations, and whose degree $\sum m_i$ is even. The third quadratic relation shows that $m_4=0$. Furthermore,

$$m_1+4m_2=0 \quad \text{and} \quad m_3=0.$$

Therefore m_1 is even, and it follows that m_2 is even because the degree is even. It will therefore suffice to prove the next lemma.

Lemma 4. *The element* $2(2)-8(1)$ *lies in the group generated by the primitive parallelograms.*

Proof. We can write

$$8(1)-2(2)=p(\tau-2,1)+2p(\tau-1,1)+p(\tau,1)-p(\tau-1,2).$$

Let $\alpha=\sum m(r)(r)$ be an element of K. We call α **non-trivial** $\bmod N$ if for every (r) such that $m(r)\neq 0$, we have

$$r=(r_1,r_2)\not\equiv 0 \pmod N.$$

We let $K_{\mathrm{nt}}(N)$ be the subgroup of K consisting of all non-trivial elements. We let $K_{\mathrm{nt}}^{+}(N)$ be the subgroup of non-trivial elements of even degree.

Corollary. *The group $K_{\mathrm{nt}}^{+}(N)$ is generated by the non-trivial parallelograms* mod N, *i.e. the parallelograms $p(r,s)$ with*

$$r+s,\ r-s,\ r,\ s\not\equiv 0 \pmod N.$$

Proof. This is immediate from the theorem, because for non-trivial $r \bmod N$, $r_1\tau+r_2$ is primitive for some m dividing N, and the two cases apply, and the argument of Theorem 4 applies.

We let $\mathfrak{S}(N)$ be the subgroup of the group generated by the Weierstrass forms, consisting of all the elements which are modular with respect to $\Gamma(N)$. In other words, it is the group of all forms expressed as products in Theorem 1, satisfying the quadratic relations **QUAD 1.** We let $\mathfrak{S}^+(N)$ be the subgroup of elements of even weight. We want to translate Theorem 3 and the corollary into statements about forms. We introduce some notation. To each form

$$f = \prod \mathfrak{k}_r^{m(r)} \quad \text{or} \quad \prod \sigma_r^{m(r)}$$

we associate its divisor

$$(f) = \sum m(r)\,(r).$$

Conversely, if

$$\alpha = \sum m(r)\,(r)$$

is a divisor, we let

$$\sigma^{(\alpha)} = \prod \sigma_r^{m(r)} \quad \text{and} \quad \mathfrak{k}^{(\alpha)} = \prod \mathfrak{k}_r^{m(r)}.$$

We let $\mathfrak{S}_{\mathrm{pr}}^+(N)$ be the group generated by the elements $\sigma^{(\alpha)}$, where $\alpha \in K_{\mathrm{pr}}^+(N)$. The translation into forms then reads:

Theorem 5. *The group $\mathfrak{S}^+(N)$ is generated by the forms*

$$\wp_r - \wp_s = \frac{\sigma_{r+s}\sigma_{r-s}}{\sigma_r^2 \sigma_s^2}.$$

The group $\mathfrak{S}_{\mathrm{pr}}^+(N)$ is generated by these expressions where $r, s, r+s, r-s$ are primitive.

§ 4. The Klein Forms

Let $\mathfrak{K}(N)$ be the group of forms which are generated by Klein forms, and are modular with respect to $\Gamma(N)$, or as we also say, on $\Gamma(N)$. We want to know when a product

$$f = \prod \mathfrak{k}_r^{m(r)}$$

is in $\mathfrak{K}(N)$. This is the case if and only if the following conditions are satisfied.

N odd.

QUAD 1N odd. $\sum m(r)\,r_1^2 \equiv \sum m(r)\,r_2^2 \equiv \sum m(r)\,r_1 r_2 \equiv 0 \pmod N$

N even.

QUAD 1N even.

$$\sum m(r)\,r_1^2 \equiv \sum m(r)\,r_2^2 \equiv 0 \pmod{2N}$$
$$\sum m(r)\,r_1 r_2 \equiv 0 \pmod N.$$

It is easily checked from **K3** that the relations **QUAD 1N** in both cases imply that f is on $\Gamma(N)$.

Conversely, we shall leave the case N odd to the reader. Suppose that N is even. For any

$$\alpha=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$$

we have

$$\frac{f\left(\alpha\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}\right)}{f\begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix}}=\varepsilon^{\pi i\sum E(r_1,r_2;a,b,c,d)}$$

where $E(r_1, r_2; a, b, c, d)$ is a simple expression easily calculated from **K 3**, namely:

$$\begin{aligned}E(r_1,r_2;a,b,c,d)=m(r_1,r_2)\Bigg[&\frac{ab}{N^2}r_1^2+\frac{c(d-1)-c}{N^2}r_2^2+\left(\frac{b}{N}+\frac{a-1}{N}\right)r_1\\ &+\left(\frac{d-1}{N}+\frac{c}{N}\right)r_2+\left(\frac{cb}{N^2}+\frac{(a-1)(d-1)}{N^2}\right)r_1r_2\\ &+\frac{d-a}{N}r_1r_2\Bigg].\end{aligned}$$

If f is on $\Gamma(N)$, then $\sum E(r_1, r_2; a, b, c, d)$ is an even integer, for all $\alpha\in\Gamma(N)$. We shall use special values of α. First use

$$\alpha=\begin{pmatrix} 1 & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\quad\text{and}\quad\alpha=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ N & 1 \end{pmatrix}.$$

Then we find

$$\sum m(r_1,r_2)(r_1N+r_1^2)\equiv 0 \pmod{2N}$$
$$\sum m(r_1,r_2)(r_2N+r_2^2)\equiv 0 \pmod{2N}.$$

Since N is even, we get

$$\sum m(r_1,r_2)r_1^2\equiv 0 \pmod 2,$$

and since $r_1^2\equiv r_1 \pmod 2$, we also get

$$\sum m(r_1,r_2)r_1\equiv 0 \pmod 2.$$

Hence

$$\sum m(r_1,r_2)r_1^2\equiv 0 \pmod{2N}.$$

The same goes for r_2^2 replacing r_1^2, so that two of the three desired relations are proved.

For the cross term involving r_1r_2, we observe that in the sum

$$E(r_1, r_2; a, b, c, d)$$

the sum of all the terms, except possibly for the r_1r_2 terms, are even integers, by using what we have just proved, so for instance

$$\frac{ab}{N^2}\sum m(r_1, r_2)r_1^2 \quad \text{is an even integer},$$

and similarly for the other terms. To deal with the r_1r_2 terms, we use a third element α, namely

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-N & N \\ -N & 1+N \end{pmatrix}$$

Then

$$\sum m(r_1, r_2)\left(\frac{cb}{N^2} + \frac{(a-1)(d-1)}{N^2}\right) r_1r_2 \quad \text{is an even integer}.$$

Hence

$$\sum m(r_1, r_2)\frac{(d-a)}{N^2} r_1r_2 = \text{even integer},$$

so that

$$\sum m(r_1, r_2)\frac{2}{N} r_1r_2 = \text{even integer},$$

and finally

$$\sum m(r_1, r_2)r_1r_2 \equiv 0 \,(\operatorname{mod} N),$$

as was to be shown.

Theorem 6. $\mathfrak{S}(N) \subset \mathfrak{K}(N)$.

Proof. Suppose

$$f = \prod \sigma_r^{m(r)} \in \mathfrak{S}(N).$$

Then

$$f = \prod \mathfrak{k}_r^{m(r)},$$

because the quadratic relations **QUAD 1** show that the extra exponential factor introduced to get the Klein forms from the Weierstrass forms will disappear under those conditions. This proves the desired inclusion.

More substantially, we have the converse for elements of even degree.

Theorem 7. *$\mathfrak{K}^+(N) \subset \mathfrak{S}^+(N)$, and therefore $\mathfrak{K}^+(N) = \mathfrak{S}^+(N)$.*

Proof. To begin, we observe that

$$\wp_r - \wp_s = \frac{\mathfrak{k}_{r+s}\mathfrak{k}_{r-s}}{\mathfrak{k}_r^2\mathfrak{k}_s^2}.$$

(The extra factors distinguishing the Klein forms from the Weierstrass forms cancel.) Thus the "parallelograms" built out of Klein forms or Weierstrass forms coincide.

Lemma 4. *If α satisfies the quadratic relations* **QUAD 1**, *then*

$$\sigma^{(\alpha)}=\mathfrak{k}^{(\alpha)}.$$

Proof. Obvious, because the Klein forms and Weierstrass forms differ by a term which is quadratic in the exponent.

Let $f\in\mathfrak{R}^+(N)$. Then Theorem 4 shows that

$$(f)\equiv 0 \bmod \sum_{D|N} K_{\mathrm{sp}}(D), \quad (\tau), \quad (\tau+1), \quad (1) \quad \text{if} \quad N=2$$

$$(f)\equiv 0 \bmod \sum_{D|N} K_{\mathrm{sp}}(D), \quad (\tau), \quad (\tau+1), \quad (1), \quad (2) \quad \text{if} \quad N\neq 2$$

Therefore, to prove the theorem, it suffices to prove the next lemma.

Lemma 5. *Let $f\in\mathfrak{R}^+(N)$. If $N\neq 2$, and*

$$(f)\equiv 0 \bmod (\tau), \quad (\tau+1), \quad (1), \quad (2),$$

then f lies in $\mathfrak{S}^+(N)$. If $N=2$, then $(f)\equiv 0 \bmod (\tau)$, $(\tau+1)$, (1).

Proof. Write

$$(f)=m_1(1)+m_2(2)+m_3(\tau)+m_4(\tau+1),$$

such that $\sum m_i$ is even, and satisfy **QUAD 1N.**

Since f has even weight, it suffices to prove $f\in\mathfrak{S}(N)$. We distinguish cases. **N odd.** The quadratic relations **QUAD 1N** give us

$$\begin{aligned} m_1+4m_2 &\equiv 0 \pmod N\\ m_3 &\equiv 0 \pmod N\\ m_4 &\equiv 0 \pmod N. \end{aligned}$$

We can therefore rewrite

$$(f)=(m_1+4m_2)(1)+m_2((2)-4(1))+m_3(\tau)+m_4(\tau).$$

Let $n=m_1+4m_2$. Then $n\equiv 0 \pmod N$. By Lemma 4, the second term above is in $\mathfrak{S}(N)$. We now show that $N(1)$ is in $\mathfrak{S}(N)$. If we can show the existence of integers q_1, q_2 such that

$$\alpha=q_1(1)+(N-q_1)(1+N)+q_2(2)-q_2(2+N)$$

and q_1, q_2 satisfy the quadratic relations, then

$$\mathfrak{k}^{N(1)}=\mathfrak{k}^{\alpha}\in\mathfrak{S}(N) \qquad \text{by Lemma 4}$$

and we have what we want. The quadratic relations amount to

$$q_1+(N-q_1)(N+1)^2+4q_2-q_2(N+2)^2=0,$$

i.e.

$$q_1(N+2)+q_2(N+4)=(N+1)^2,$$

which can be solved with $q_1, q_2 \in \boldsymbol{Z}$ since N is odd.

By symmetry, it also follows that $N(\tau)$, $N(\tau+1)$ are in $\mathfrak{S}(N)$, thereby concluding the odd case.

N even, N ≠ 2. We write again

$$(f)=m_1(1)+m_2(2)+m_3(\tau)+m_4(\tau+1).$$

Then

$$\begin{aligned} n_1 &= m_1+4m_2+m_4 \equiv 0 \pmod{2N} \\ n_3 &\equiv \qquad\quad m_3+m_4 \equiv 0 \pmod{2N} \\ n_4 &= \qquad\qquad\quad m_4 \equiv \pmod{N}. \end{aligned}$$

We also put $n_2=m_2$. We rewrite (f) in the form

$$\begin{aligned} (f) &= (m_1+4m_2+m_4)(1)+m_2((2)-4(1))+(m_3+m_4)(\tau)+m_4((\tau+1)-(1)-(\tau)) \\ &= n_1(1)+n_2((2)-4(1))+n_3(\tau)+n_4((\tau+1)-(1)-(\tau)). \end{aligned}$$

By Lemma 4, the second term lies in $\mathfrak{S}(N)$, actually in $\mathfrak{S}^+(N)$ because m_4 is even, so m_1 is even, m_3 is even, and since

$$m_1+\ldots+m_4 \quad \text{is even},$$

we get $m_2=n_2$ is even and the second term has even weight.

It now suffices to show that $2N(1)$, $2N(\tau)$, $N((\tau+1)-(1)-(\tau))$ are in $\mathfrak{S}^+(N)$, or in other words

$$\mathfrak{k}_{0,1}^{2N}, \quad \mathfrak{k}_{1,0}^{2N}, \quad \left(\frac{\mathfrak{k}_{1,1}}{\mathfrak{k}_{0,1}\mathfrak{k}_{1,0}}\right)^N$$

are in $\mathfrak{S}^+(N)$. We first do this for $\mathfrak{k}_{0,1}^{2N}$. We let

$$\alpha=q_1(1)+(2N-q_1)(1+N)+q_2(2)-q_2(2+N),$$

where we select q_1, q_2 to satisfy the quadratic relations, that is

$$q_1+(2N-q_1)(N+1)^2+4q_2-q_2(N+2)^2=0,$$

or equivalently

$$q_1(N+2)+q_2(N+4)=2(N+1)^2.$$

We distinguish the cases when $N \equiv 0 \pmod{4}$ and $N \equiv 2 \pmod{4}$, but we can again find a solution in the same trivial way. Then using the basic property **K2** of the Klein forms, we see at once that

$$\sigma^{(\alpha)}=\mathfrak{k}^{(\alpha)}=(-1)^{q_1+q_2}\mathfrak{k}_{0,1}^{2N}.$$

Furthermore, the divisor

$$(1)-(-1)$$

satisfies the quadratic relations, and

$$\frac{\sigma_{0,1}}{\sigma_{0,-1}}=-1\,.$$

If necessary we multiply $\sigma^{(\alpha)}$ by this last factor to get the desired expression of $\mathfrak{k}_{0,1}^{2N}$ in $\mathfrak{S}^+(N)$. This proves in the case $N \neq 2$ that $\mathfrak{k}_{0,1}^{2N}$ lies in $\mathfrak{S}^+(N)$.

The other form $\mathfrak{k}_{1,0}^{2N}$ can be handled in the same way, or by observing that their expressions can be obtained by applying a suitable element of $GL_2(\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z})$ to the expression for $\mathfrak{k}_{0,1}^{2N}$, i.e. making a conjugation by an element of the Galois group.

We now handle

$$\left(\frac{\mathfrak{k}_{1,1}}{\mathfrak{k}_{0,1}\mathfrak{k}_{1,0}}\right)^N.$$

It suffices to show that there exist integers q_1, q_2 such that

$$\begin{aligned}\alpha=(N+1)(\tau+1)-(\tau+1+N)-q_1(1)-(N-q_1)(1+N)\\ -N(\tau)+q_2(2)-q_2(2+N)\end{aligned}$$

satisfies the quadratic relations, because this expression mod N is just

$$N((\tau+1)-(1)-(\tau)),$$

and then by **K2**, we get

$$\sigma^{(\alpha)}=\pm\mathfrak{k}^{(\alpha)}$$

is the desired form up to a sign, which we have seen can be taken care of.

To satisfy the desired conditions on q_1, q_2 we note that

$$\sum m(r_1,r_2)r_1^2=0$$
$$\sum m(r_1,r_2)r_1r_2=0$$

are satisfied for any choice of q_1, q_2.

Expanded out, the third quadratic condition amounts to solving

$$q_1(N+2)-(N+4)q_2=(1+N)(N+2)\,.$$

One has to consider the cases $N\equiv 2 \pmod 4$ and $N\equiv 0 \pmod 4$, which is easy and left to the reader.

N = 2. In this case, one checks that

$$\wp_1-\wp_\tau,\qquad \wp_1-\wp_{\tau+1},\qquad \wp_\tau-\wp_{\tau+1}$$

generate $\mathfrak{R}^+(N)$. This concludes the proof in all cases.

Remark. One observes that the above proof in the case when N is a prime power actually allows us to obtain a free basis for $\mathfrak{R}^+(N)$.

§ 5. The Siegel Group

We recall that η is defined to be $\Delta^{1/24}$ where

$$\Delta = (2\pi i)^{12} q_\tau \prod (1-q_\tau^n)^{24}.$$

If $a=(a_1, a_2)=(r/N, s/N)$, we let $k_a = k_{r,s}$ and we define

$$g_a = \mathfrak{k}_a \eta^2.$$

This is a modular function, i.e. it has weight 0. Let U be the group generated by the functions g_a, $a \in \boldsymbol{Q}^2$, $a \neq 0$. For any positive integer N, we let U_N be the subgroup of U generated by the functions g_a such that $Na \in \boldsymbol{Z}^2$. We set

$$U(N) = U \cap F_N,$$

where F_N is the modular function field of level N. In this section we wish to determine explicitly when an element of U_N belongs to $U(N)$. We use formula **K3** of §1, together with **QUAD 1N** of §4. What we have to check is when $\prod g_a^{m(a)}$ is modular with respect to $\Gamma(N)$. We first establish the modularity of the powers of η^2. From **K3** and **QUAD 1N** we easily see the following.

Lemma 1. *η^2 is modular with respect to $\Gamma(12)$, and in fact*

$$\eta^2 = \lambda [\mathfrak{k}_{(\frac{1}{2},0)} \mathfrak{k}_{(0,\frac{1}{2})} \mathfrak{k}_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}] [\mathfrak{k}_{(\frac{1}{3},0)} \mathfrak{k}_{(0,\frac{1}{3})} \mathfrak{k}_{(\frac{1}{3},\frac{1}{3})} \mathfrak{k}_{(\frac{1}{3},-\frac{1}{3})}]^{-1}$$

for some constant λ.

$\eta^4 = (\eta^2)^2$ *is modular with respect to* $\Gamma(6)$.

η^6 *is modular with respect to $\Gamma(3)$, and in fact*

$\eta^6 = \lambda_1 [\mathfrak{k}_{(\frac{1}{2},0)} \mathfrak{k}_{(0,\frac{1}{2})} \mathfrak{k}_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}]^{-1}$ *for some constant* λ_1.

$\eta^{12} = (\eta^2)^6$ *is modular with respect to* $\Gamma(2)$.

$\eta^{24} = \Delta$ *is modular with respect to* $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\boldsymbol{Z})$.

We associate to η^2 a 1-dimensional character of Γ. If $\alpha \in \Gamma$ we have

$$\eta^2 \left(\alpha \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \right) = \psi(\alpha) \eta^2 \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}$$

where ψ is a character whose image is contained in μ_{12} (the group of 12-th roots of unity). Moreover,

$$\psi\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = e^{2\pi i/12} \quad \text{and} \quad \psi\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) = e^{2\pi i/4} = i.$$

Since $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ generate Γ, we see that ψ is determined completely by these values. We have the exact sequence

$$0 \to \operatorname{Ker} \psi \to \Gamma \to \mu_{12} \to 0.$$

Since μ_{12} is abelian, $\Gamma' = [\Gamma, \Gamma] \subset \operatorname{Ker} \psi$. But we know that

$$(\Gamma : \Gamma') = 12,$$

so $\Gamma' = \operatorname{Ker} \psi$. From Lemma 1 we have that $\Gamma(12) \subset \Gamma'$.

Suppose now that we are given $g \in U_N$ and

$$g = \prod g_a^{m(a)}, \quad a \in \frac{1}{N} \boldsymbol{Z}^2, \quad a \neq 0.$$

If $\alpha \in \Gamma(N)$, then

$$g(\alpha\tau) = \prod_a \varepsilon_a(\alpha)^{m(a)} \psi(\alpha)^{\Sigma m(a)} g(\tau),$$

where ε_a is the root of unity defined in **K3**. Let

$$\varepsilon_{g,a} = \prod_a \varepsilon_a(\alpha)^{m(a)} \psi(\alpha)^{\Sigma m(a)}.$$

We note that $g \in U(N)$ is equivalent to the statement that for each $\alpha \in \Gamma(N)$ we have $\varepsilon_{g,\alpha} = 1$.

Theorem 1. *g is modular of level N if and only if:*

1) $(N, 12) = 1$, $\prod \mathfrak{k}_a^{m(a)}$ *is modular of level N and* $12 | \sum m(a)$

or

2) $(N, 12) = 3$, $\prod \mathfrak{k}_a^{m(a)}$ *is modular of level N and* $4 | \sum m(a)$

or

3) $(N, 12) = 4$, $\prod \mathfrak{k}_a^{m(a)}$ *is modular of level N and* $3 | \sum m(a)$

or

4) $(N, 12) = 2$, $\prod \mathfrak{k}_a^{m(a)}$ *is modular of level N and* $6 | \sum m(a)$

or

5) $(N, 12) = 2$, $(\sum m(a), 6) = 3$,

$N | \sum m(a) (Na_i)^2$ *for* $i = 1, 2$ *and* $\frac{1}{N} \sum m(a) (Na_i)^2$ *is odd.*

$N | \sum 2m(a) (Na_1)(Na_2)$ *and* $\frac{1}{N} \sum 2m(a) (Na_1)(Na_2)$ *is odd*

or

6) $(N, 12) = 12$ *and* $\prod \mathfrak{k}_a^{m(a)}$ *is modular of level N*

or

7) $(N, 12) = 6$, $\prod \mathfrak{k}_a^{m(a)}$ *is modular of level N and* $2 | \sum m(a)$

or

8) $(N, 12)=6, \quad (\sum m(a), 2)=1,$

$$N|\sum m(a)(Na_i)^2 \quad \text{and} \quad \frac{1}{N}\sum m(a)(Na_i)^2 \quad \text{is odd}$$

$$N|\sum 2m(a)(Na_1)(Na_2) \quad \text{and} \quad \frac{1}{N}\sum 2m(a)(Na_1)(Na_2) \quad \text{is odd}.$$

We divide the proof into cases. We put $r=\sum m(a)$.

Case 1. $(N, 6)=1$. Then N is odd. To kill the N-part of $\varepsilon_{g,\alpha}$ we must kill the N-part of

$$\prod \varepsilon_a(\alpha)^{m(a)}$$

since $\psi(\alpha)$ has no N-part. But from the argument given in **QUAD 1N odd,** we see that

$$\sum m(a)(Na_1)^2 \equiv \sum m(a)(Na_2)^2 \equiv \sum m(a)(Na_1)(Na_2) \equiv 0 \pmod N$$

for this to occur. Then according to **QUAD 1N odd,** it follows that $\prod \mathfrak{k}_a^{m(a)}$ is modular with respect to $\Gamma(N)$. So η^{2r} must be modular with respect to $\Gamma(N)$. Since $(N, 6)=1$, we can find $\gamma \in \Gamma(N)$ such that

$$\gamma \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{12}.$$

But then

$$\psi(\gamma)=\psi\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)=e^{2\pi i/12},$$

so $12|r$, and η^{2r} is modular with respect to Γ.

Case 2. $(N, 6)=3$. We note first that if N is odd, then ε_a has no 2-component by immediate inspection. So ψ^r restricted to $\Gamma(N)$ must have no 2-component. We may find $\gamma \in \Gamma(N)$ such that

$$\gamma \equiv \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{12}.$$

Then $\psi^r(\gamma)=e^{2\pi i r/4}$. So $4|r$ and η^{2r} is modular with respect to $\Gamma(3)$. Therefore η^{2r} is modular with respect to $\Gamma(N)$, so

$$\prod \mathfrak{k}_a^{m(a)}$$

is also modular with respect to $\Gamma(N)$.

Case 3. $(N, 6)=2$. Then $\prod \varepsilon_a^{m(a)}$ has no 3-component, so ψ^r restricted to $\Gamma(N)$ must have no 3-component. Suppose $4|N$. We may then find $\gamma \in \Gamma(N)$ such that

$$\gamma \equiv \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{12}.$$

Then $\psi^r(\gamma)=e^{2\pi i/3}$. Hence $3|r$ and η^{2r} is modular with respect to $\Gamma(4)$, hence with respect to $\Gamma(N)$. So

$$\prod \mathfrak{k}_a^{m(a)}$$

is also modular with respect to $\Gamma(N)$. If $4\nmid N$ we may find $\gamma\in\Gamma(N)$ such that

$$\gamma\equiv\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}(\mathrm{mod}\,12)\,.$$

Thus $3|r$ again. If $6|r$ then η^{2r} is modular with respect to $\Gamma(2)$, hence with respect to $\Gamma(N)$. Otherwise, up to a constant factor,

$$\eta^6=[\mathfrak{k}_{(\frac{1}{2},0)}\mathfrak{k}_{(0,\frac{1}{2})}\mathfrak{k}_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}]^{-1}$$

and $\prod g_a^{m(a)}$ is modular with respect to $\Gamma(N)$ is equivalent to:

$$\sum m(a)\,(Na_i)^2-\frac{r}{3}\frac{N^2}{2}\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2N)\quad\text{for}\quad i=1,2$$

$$\sum m(a)\,(Na_1)\,(Na_2)-\frac{r}{3}\frac{N^2}{4}\equiv 0(\mathrm{mod}\,N)\,.$$

So

$$N|\sum m(a)\,(Na_i)^2\quad\text{and}\quad\sum m(a)\,(Na_i)^2/N+1\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2)\,,$$

whence $\sum m(a)\,(Na_i)^2/N$ is odd, and

$$\frac{N}{2}\Big|\sum m(a)\,(Na_1)\,(Na_2)\quad\text{and}\quad\sum 2m(a)\,(Na_1)\,(Na_2)/N+1\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2)\,,$$

whence $\sum 2m(a)\,(Na_1)\,(Na_2)/N$ is odd.

Case 4. $(N,6)=6$. If $12|N$ then η^2 is $\Gamma(N)$-modular, and

$$\prod \mathfrak{k}_a^{m(a)}$$

is also $\Gamma(N)$-modular. If $2|r$ then η^{2r} is $\Gamma(N)$-modular, and so is $\prod \mathfrak{k}_a^{m(a)}$. Suppose then $12\nmid N$ and $2\nmid r$. We check the condition for modularity from **QUAD 1N,** and find that

$$\sum m(a)\,(Na_i)^2+rN^2/6\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2N)$$
$$\sum m(a)\,(Na_1)\,(Na_2)+rN^2/4\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,N)\,.$$

So

$$N|\sum m(a)\,(Na_i)^2\quad\text{and}\quad\sum m(a)\,(Na_i)^2/N+1\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2)\,,$$

whence $\sum m(a)\,(Na_i)^2/N$ is odd, and

$$\frac{N}{2}\Big|\sum m(a)\,(Na_1)\,(Na_2)\quad\text{and}\quad\sum 2m(a)\,(Na_1)\,(Na_2)/N+1\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2)\,,$$

whence $\sum 2m(a)\,(Na_1)\,(Na_2)/N$ is odd. The theorem follows.

We note that in all cases above except in Case 1, the function η^{2r} may be expressed by Klein forms with level dividing N. In Case 1, the function η^{2r} is a power of Δ which may not necessarily be expressed by Klein forms with level dividing N.

References

[KL I] Kubert, D., Lang, S.: Units in the modular function field. I: Diophantine applications. Math. Ann.

[KL II] Kubert, D., Lang, S.: Idem. II: A full set of units. Math. Ann. to appear

Received July 4, 1976

Math. Ann. 225, 21—32 (1977)

A General Character Formula for Irreducible Projections on L^2 of a Nilmanifold

Lawrence Corwin*
Department of Mathematics, Yale University, New Haven, Connecticut 06520, USA

Frederick P. Greenleaf
Courant Institute, New York University, 251 Mercer Street, New York, 10012, USA

Richard Penney
Department of Mathematics, Purdue University, West Lafayette, Indiana 47907, USA

1. Introduction

Let N be a connected simply connected Lie group with Lie algebra $\mathfrak{n}$, and Γ a co-compact discrete subgroup. Then $\Gamma\backslash N$ carries a unique N-invariant probability measure. Under the right action of N, $L^2(\Gamma\backslash N)$ decomposes into an orthogonal direct sum $\bigoplus_{i\in I} H_i$ of primary subspaces; each H_i is in turn a direct sum with finite multiplicity of irreducible subspaces associated with a single representation $\sigma_i \in \hat{N}$. Two central problems in harmonic analysis on nilmanifolds over the past decade have been:

(i) With what multiplicity does a given irreducible representation $\sigma \in \hat{N}$ occur in the regular representation on $L^2(\Gamma\backslash N)$?

(ii) How can we explicitly decompose a function $f \in L^2(\Gamma\backslash N)$ into its primary or irreducible components?

Part (i) was first considered by Moore [10] in 1965, and finally answered in 1971 by Richardson [16] and Howe [7] independently. Later Ol'shanskii [11] and Corwin-Greenleaf [3] gave another way of computing multiplicities. Part (ii) was considered to some extent in Brezin [2], Richardson [17], and Corwin-Greenleaf [5]. In each of these papers a complete family of irreducible invariant subspaces, and the corresponding irreducible projections, are described for primary subspaces of L^2 corresponding to representations $\sigma \in \hat{N}$ induced from *normal* subgroups. As explained in Auslander-Brezin [1], these projections are associated with right Γ-invariant Schwartz distributions on $\Gamma\backslash N$ via certain integral formulas; the results in [2], [5], [17] provide explicit character formulas for these distributions.

We start by briefly recalling the Howe-Richardson multiplicity formulas, which may be summarized as follows (after [8]). We say that (χ, M) is a *maximal character* if there is an $l \in \mathfrak{n}^*$ and a subordinate subalgebra $\mathfrak{m}$ of maximal dimension

Research carried out with partial support from NSF Research Grants GP-30673, GP-19258, and 7509697 respectively.

* Current address: Department of Mathematics, University College, Rutgers University, New Brunswick, New Jersey 08903, USA

such that $M=\exp(\mathfrak{m})$ and $\chi=e^{2\pi i l}|M$. Such a character is *maximal integral* if in addition, $\Gamma\cap M\backslash M$ is compact ($\Leftrightarrow \Gamma M$ closed) and $\chi|\Gamma\cap M=1|\Gamma\cap M$.

Theorem A (Multiplicity formula). *A representation $\sigma\in N\hat{}$ occurs in $L^2(\Gamma\backslash N)$ $\Leftrightarrow \sigma=U^\chi=\mathrm{Ind}(M\uparrow N,\chi)$ for some maximal integral character (χ, M). The multiplicity of σ is just the number of closed double cosets $Mx\Gamma$ for which $\chi|M\cap x\Gamma x^{-1}=1|M\cap x\Gamma x^{-1}$. (Call these the integral double cosets.)*

In [16] Richardson proved a slightly weaker theorem in that he required that M satisfy certain rather technical "speciality" conditions. For any σ appearing in $L^2(\Gamma\backslash N)$ there always are "special" maximal integral characters such that $\sigma=U^\chi$, but there are other non-special characters and speciality can be hard to verify. On the other hand, Richardson went on to discuss the construction of explicit intertwining operators between $H(U^\chi)$ and L^2, thereby making substantial steps toward resolving question (ii).

Let (M,χ) be a maximal integral character. We realize $\sigma=U^\chi=\mathrm{Ind}(M\uparrow N,\chi)$ in the usual way, modeled in the space $H(U^\chi)$ of functions $f:N\to C$ such that

(i) $f(mn)=\chi(m)f(n)$, all $m\in M$

(ii) $\int_{M\backslash N}|f(n)|^2 d\dot{n}<+\infty$.

Let $H(U^\chi)_{00}$ be the dense subspace of such functions which are continuous and compactly supported mod M. Richardson's work (when viewed in light of Howe's work) shows that the following result is true for "special" maximal integral characters.

Theorem B (Intertwining operators). *Let (χ, M) be any maximal integral character for N,Γ. The following sum has only finitely many nonzero terms*

$$BF(\Gamma n)=\sum_{\gamma\in\Gamma\cap M\backslash\Gamma}F(\gamma n)\quad \textit{(sum over coset representatives)} \tag{1}$$

if $F\in H(U^\chi)_{00}$, and the map $B:H(U^\chi)_{00}\to L^2(\Gamma\backslash N)$ extends uniquely to an intertwining isometry from $H(U^\chi)$ to an irreducible invariant subspace $H_{(\chi,M)}\subseteq L^2(\Gamma\backslash N)$.

Each $x\in N$ acts on (χ, M) to give a new maximal character $(\chi,M)\cdot x=(\chi^x, M^x)$ defined by

$$\chi^x(s)=\chi(xsx^{-1})\quad \textit{for all}\quad s\in M^x=x^{-1}Mx.$$

Let $((\chi,M)\cdot N)_\#$ be the set of integral maximal characters in the orbit $(\chi,M)\cdot N$. Then

(i) *For two integral points in $((\chi,M)\cdot N)_\#$, the range spaces $H_{(\chi,M)\cdot x}$ and $H_{(\chi,M)\cdot y}$ are equal if $Mx\Gamma=My\Gamma$ and are orthogonal otherwise.*

(ii) *An element $x\in N$ gives an integral point $(\chi,M)\cdot x\Leftrightarrow Mx\Gamma$ is an integral double coset. Furthermore, distinct integral double cosets correspond to distinct maximal integral characters.*

(iii) *The orthogonal sum*

$$\oplus\{H_{(\chi',M')}:(\chi',M')\in((\chi,M)\cdot N)_\#\}=\oplus_{x\in(M\backslash N/\Gamma)^*}H_{(\chi,M)\cdot x}$$

where $(M\backslash N/\Gamma)^*=$ the integral double cosets, is precisely the primary subspace of L^2 corresponding to $\sigma=U^\chi$.

Later, Corwin-Greenleaf [4] made a direct study of intertwining operators which showed that Theorem B in fact holds for all maximal integral characters, not just the "special" ones.

Theorem B answers question (ii) to a certain extent. First note that action of Γ permutes integral points, so $((\chi, M)\cdot N)_\#$ splits into a finite number of Γ-orbits; these correspond precisely to the distinct double cosets in $(M\backslash N/\Gamma)^*$, so if we take representatives for these Γ-orbits, $(\chi_1, M_1)=(\chi, M), \ldots, (\chi_q, M_q)=(\chi, M)\cdot x_q$, we get a decomposition of the primary space H_σ

$$H_\sigma = H_{(\chi, M)} \oplus \ldots \oplus H_{(\chi_q, M_q)}.$$

The projection P_σ onto H_σ is determined by the irreducible projections P_i onto $H_{(\chi_i, M_i)}$; to determine the latter it suffices to describe the projection $P=P_{(\chi, M)}$ onto $H_{(\chi, M)}$ for a typical maximal integral character. Note that $P=BB^*$ where B is the operator determined as in (1). Auslander and Brezin [1] showed that all projections E in $L^2(\Gamma\backslash N)$ commuting with the action of N map $C^\infty(\Gamma\backslash N)$ into itself and are determined by right Γ-invariant Schwartz distributions D_E on $\Gamma\backslash N$ via integral formulas

$$Ef(\Gamma n) = \langle D_E, n\cdot f\rangle \quad \text{all} \quad f\in C^\infty(\Gamma\backslash N)$$

where $n\cdot f(\Gamma x) = f(\Gamma x n)$; the distribution is recovered from E by taking $\langle D_E, f\rangle = Ef(\Gamma e)$. Our main result here is a formula expressing $D = D_{(\chi, M)}$ as a sum of "characters".

1.1. Theorem (The character formula). *Let (χ, M) be any maximal integral character. Then the distribution D associated with the irreducible projection $P=P_{(\chi, M)}$ is given by*

$$\langle D, f\rangle = \textstyle\sum_{\gamma\in\Gamma\cap M\backslash\Gamma} \left(\int_{\Gamma\cap M\backslash M} \overline{\chi(m)}\, f(\Gamma m\gamma)\, d\dot{m}\right)$$

for all $f\in C^\infty(\Gamma\backslash N)$, where $d\dot{m}$ = normalized invariant measure on $\Gamma\cap M\backslash M$. The sum is absolutely convergent.

As explained in [5; Section 2] each term $(\ldots)$ in the sum can be interpreted, after a change of variable, as integration of f against $\overline{\chi^\gamma(m')}$ weighting the normalized invariant measure $d\dot{m}'$ on $\Gamma\cap M^\gamma\backslash M^\gamma$. Indeed, every character $(\chi', M')\in((\chi, M)\cdot N)_\#$ can be regarded as a measure supported on $\Gamma\backslash\Gamma M' \approx \Gamma\cap M'\backslash M'$; this makes sense due to integrality. Then $D_{(\chi, M)}$ is just the sum over all characters in the Γ-orbit $(\chi, M)\cdot\Gamma$ which determines the irreducible projection $P_{(\chi, M)}$; and the primary distribution $D=D_\pi$ is the sum over *all* integral characters in the orbit $(\chi, M)\cdot N$. This theorem differs from previous versions of the character formula in its method of proof, and in its generality: M need not be normal. The proof is effected following the idea noted independently in [5] and [13]: starting with (1) we compute B^*f and BB^*f, verifying that the pointwise formula for BB^*f makes sense if $f\in C^\infty(\Gamma\backslash N)$. This latter point causes all the trouble.

2. Proof of the Character Formula

If a unitary representation U is modeled in Hilbert space $H(U)$, the C^∞ vectors $H^\infty(U)\subsetneqq H(U)$ defined in the usual way form a Frechet space when equipped with the C^∞ topology, determined by taking a basis $X_1, \ldots, X_n$ for the Lie algebra and forming the seminorms

$$p_a(\xi) = \|X^a\xi\| = \|X_1^{a_1}\ldots X_n^{a_n}\xi\|\,, \qquad a=(a_1, \ldots, a_n)\in \boldsymbol{Z}_+^n\,,$$

see [6]. The action of N on $L^2(\Gamma\backslash N)$ has $C^\infty(\Gamma\backslash N)$ for its C^∞ vectors, and the C^∞ topology is just the Schwartz topology determined by the seminorms

$$q_a(f) = \|\bar{X}^a f\|_\infty = \|\bar{X}_1^{a_1}\ldots\bar{X}_n^{a_n} f\|_\infty$$

where

$$\bar{X}f(\zeta) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\{f(\zeta\cdot\exp(tX)) - f(\zeta)\} \quad \text{all} \quad \zeta\in\Gamma\backslash N\,.$$

From the C^∞ vector point of view there is a simple idea behind the proof of the character formula. It is not hard to show by direct calculation, [5; Section 2] or [13], that the adjoint B^* of the Richardson map (1) is

$$B^*f(n) = \int_{\Gamma\cap M\backslash M}\overline{\chi(m)}n\cdot f(m)d\dot{m} \quad \text{all} \quad f\in C^\infty(\Gamma\backslash N)\,. \tag{2}$$

Formally computing $Pf = B(B^*f)$ we get the character formula, modulo the problem of showing that the pointwise formula (1) applies to functions $F = B^*f$; so far (1) is known to hold only if F has compact support modulo M, or vanishes rapidly at infinity transverse to M cosets.

Since B^* commutes with the actions of N it preserves C^∞ vectors, mapping $C^\infty(\Gamma\backslash N)$ continuously into $H^\infty(U^\chi)$, see [14; Theorem 3.1]. There are various natural ways to identify $H(U^\chi)$ isometrically with $L^2(\boldsymbol{R}^k)$, $k=n-m$.

Definition. If $\mathfrak{h}$ is a subalgebra of $\mathfrak{n}$, a *weak basis* through $\mathfrak{h}$ is an $\boldsymbol{R}$-basis $X_1, \ldots, X_m, \ldots, X_n$ such that (i) $\mathfrak{n}_i = \boldsymbol{R}\text{-span}\,\{X_1, \ldots, X_i\}$ is a subalgebra, (ii) $\mathfrak{n}_{i-1}\lhd\mathfrak{n}_i$ and $\mathfrak{n}_{i-1}\backslash\mathfrak{n}_i\cong\boldsymbol{R}$, all i, (iii) $\mathfrak{n}_m=\mathfrak{m}$. A weak basis gives us coordinates on N: $n=g(\boldsymbol{t}) = \exp(t_1X_1)\ldots\exp(t_nX_n)$, all $\boldsymbol{t}\in\boldsymbol{R}^n$. If Γ is a discrete uniform subgroup in N and H a connected rational subgroup ($\Gamma\cap H\backslash H$ compact), a *weak Malcev basis* through H is any weak basis through $\mathfrak{h}$ such that $\exp(\boldsymbol{Z}X_1)\cdot\ldots\cdot\exp(\boldsymbol{Z}X_i) = N_i\cap\Gamma$ all i; for a self contained discussion of these bases see [3; Section 3].

Taking any weak basis through M we get a natural isometry $I: L^2(\boldsymbol{R}^k)\to H(U^\chi)$,

$$If(g(t_1, \ldots, t_n)) = \chi(g(t_1, \ldots, t_m, 0, \ldots, 0))f(t_{m+1}, \ldots, t_{m+k})\,;$$

this gives a linear bijection $C^\infty(\boldsymbol{R}^k)\to C^\infty(M\backslash N, \chi)$ = all χ-covariant C^∞ functions on N. It is not hard to see that I maps the Schwartz functions $S(\boldsymbol{R}^k)$ continuously into $H^\infty(U^\chi)$. Given (χ, M) and any weak basis through M it seems likely that, under this isometry, C^∞ vectors are precisely the Schwartz functions:

$$H^\infty(U^\chi)\equiv S(\boldsymbol{R}^k)\,. \tag{3}$$

Once this is proved one can go on to show that

The series

$$Tf(\Gamma n) = \sum_{\gamma\in\Gamma\cap M\backslash\Gamma} f(\gamma n) \qquad f\in H^\infty(U^\chi) \tag{4}$$

converges absolutely and uniformly on compacta in N, giving a continuous map $T: H^\infty(U^\chi) \to C^\infty(\Gamma\backslash N)$.

Obviously $Tf = Bf$ for $f \in H^\infty(U^\chi)$ having compact support modulo M. Since $B: H(U^\chi) \to L^2(\Gamma\backslash N)$ is bounded and commutes with the actions of N it gives a continuous map $B: H^\infty(U^\chi) \to C^\infty(\Gamma\backslash N)$. Since $H^\infty(U^\chi) \cap H(U^\chi)_{00}$ is dense in $H^\infty(U^\chi)$, $T = B|H^\infty(U^\chi)$. Thus the distribution D associated with $P = BB^*$ satisfies

$$\langle D, n\cdot f\rangle = Pf(\Gamma n) = B(B^* f)(\Gamma n) = T(B^* f)(\Gamma n) \quad \text{all} \quad n \in N\,,$$

and

$$\langle D, f\rangle = T(B^* f)(\Gamma e)$$

as desired.

Two details remain: the proofs of (3) and (4) which, though quite plausible statements, do not seem to be completely straightforward.

3. Proof of (3)

We prove (3) as a corollary of a more interesting, and perhaps useful, result concerning concrete realizations of the enveloping algebra $U(\mathfrak{n})$ as polynomial coefficient differential operators on $\boldsymbol{R}^k$.

If $X \in \mathfrak{n}$ is regarded as a differential operator on $C^\infty(N)$, it preserves (M, χ) covariance, and so induces a linear operator $D(X)$ on $C^\infty(\boldsymbol{R}^k)$ which turns out to be a differential operator with polynomial coefficients. Fxplicitly: if we write

$$g^{-1}(g(\boldsymbol{t})\cdot g(\boldsymbol{s})) = (P_1(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{s}), \ldots, P_n(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{s})) \quad \text{for} \quad \boldsymbol{t}, \boldsymbol{s} \in \boldsymbol{R}^n\,, \tag{5}$$

the P_i are polynomials with $P_n(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{s}) = t_n + s_n$, and for each basis vector X_q we have $(\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{R}^k)$

$$\begin{aligned} D(X_q) f(\boldsymbol{r}) = {} & \textstyle\sum_{j=1}^m 2\pi i \langle l, X_j\rangle \dfrac{\partial P_j}{\partial s_q}(0\ldots r_1, \ldots, r_k; \boldsymbol{0}) f(\boldsymbol{r}) \\ & + \textstyle\sum_{j=m+1}^n \dfrac{\partial P_j}{\partial s_q}(0\ldots r_1, \ldots, r_k; \boldsymbol{0}) \dfrac{\partial f}{\partial r_{j-m}}(\boldsymbol{r})\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Obviously D extends to an associative homomorphism $D: U(\mathfrak{n}) \to \mathscr{P}(\boldsymbol{R}^k) =$ operators with polynomial coefficients. This representation of $U(\mathfrak{n})$ depends on l, $\mathfrak{m}$, and the particular weak basis used to identify $M\backslash N \approx \boldsymbol{R}^k$.

3.1. Theorem. *Let $l \in \mathfrak{n}^*$, let $\mathfrak{m}$ be any subordinate subalgebra of maximal dimension, and take any weak basis passing through $\mathfrak{m}$. Then $D: U(\mathfrak{n}) \to \mathscr{P}(\boldsymbol{R}^k)$ is surjective.*

Notes. It has long been known that every irreducible representation of N can be realized isometrically in $L^2(\boldsymbol{R}^k)$ so that $U(\mathfrak{n})$ acts on the Schwartz functions $S(\boldsymbol{R}^k)$ as the full algebra of operators $\mathscr{P}(\boldsymbol{R}^k)$. However, the best result one can extract from the discussion in Kirillov [9], or its elaboration by Pukanszky [15; II.II.5], is that for some choice of $\mathfrak{m}$ and some choice of weak basis through this $\mathfrak{m}$, $U(\mathfrak{n})$ maps onto $\mathscr{P}(\boldsymbol{R}^k)$. It is natural to suspect that for all l, $\mathfrak{m}$ as above the action of $U(\mathfrak{n})$ on $S(\boldsymbol{R}^k)$ already produces such a model. We prove that this is so, and use the result to characterize the C^∞ vectors in $H(U^\chi)$.

Corollary. *If σ is as above, and we use any weak basis through $\mathfrak{m}$ to identify $M\backslash N \approx \boldsymbol{R}^k$ and $H(\sigma)=L^2(\boldsymbol{R}^k)$, then the C^∞ vectors $H^\infty(\sigma)\subseteqq H(\sigma)$ are precisely the Schwartz functions $S(\boldsymbol{R}^k)$.*

Proof. It is fairly obvious that $I(S(\boldsymbol{R}^k))\subseteqq H^\infty(\sigma)$. In [14; Theorem 5.1] it is shown that $\tilde{f}=If\in H^\infty(\sigma)\Leftrightarrow \tilde{f}\in C^\infty(N;M,\chi)$ and $A\tilde{f}$ is square summable:

$$\int_{M\backslash N}|A\tilde{f}|^2 d\dot{n}=\int_{\boldsymbol{R}^k}|D(A)f|^2 d\boldsymbol{t}<\infty\,,\quad \text{all}\quad A\in U(\mathfrak{n})\,.$$

QED.

Proof of Theorem. Up to a point the proof is reminiscent of that in Theorem 1 [15; II.II.5]; then, in Case 2 below, some new ideas are needed. We first observe that if l, $\mathfrak{m}$ are fixed, validity of the theorem for one weak basis $X_1, \ldots, X_n$ through M implies validity for any other basis $Y_1, \ldots, Y_n$ through M. Let $g_X, g_Y:\boldsymbol{R}^n\to N$ be the coordinate maps and D_X, D_Y the corresponding representations of $U(\mathfrak{n})$ in $\mathscr{P}(\boldsymbol{R}^k)$. Define polynomial maps $P:\boldsymbol{R}^k\to\boldsymbol{R}^k$, $P':\boldsymbol{R}^k\to\boldsymbol{R}^m$ via

$$\boldsymbol{s}\to g_X(0,\ldots,0,s_1,\ldots,s_k)=g_Y(u_1,\ldots,u_m,u_{m+1},\ldots,u_n)=g_Y(P'(\boldsymbol{s}),P(\boldsymbol{s}))\,.$$

Clearly $\boldsymbol{t}=P(\boldsymbol{s})$ is *invertible* with polynomial inverse. Define a new polynomial $Q:\boldsymbol{R}^k\to\boldsymbol{R}$ such that $e^{2\pi iQ(\boldsymbol{s})}=\chi(g_Y(P'(\boldsymbol{s}),0,\ldots,0))$. The two sets of coordinates give us distinct identification maps $I_X, I_Y: C^\infty(\boldsymbol{R}^k)\to C^\infty(M\backslash N,\chi)$, which induce an isomorphism $A=I_Y^{-1}\circ I_X: C^\infty(\boldsymbol{R}^k)\to C^\infty(\boldsymbol{R}^k)$. This map is easily seen to have the form

$$Af(\boldsymbol{s})=e^{2\pi iQ(\boldsymbol{s})}f(P(\boldsymbol{s}))\quad\text{all}\quad f\in C^\infty(\boldsymbol{R}^k)\,.$$

Furthermore A intertwines the representations D_X, D_Y: if $T\in U(\mathfrak{n})$ then $D_Y(T)f=A\circ D_X(T)\circ A^{-1}(f)$, a conjugate of $D_X(T)$. We know that $D_X(U(\mathfrak{n}))=\mathscr{P}(\boldsymbol{R}^k)$; it would follow immediately that this conjugation process is bijective on $\mathscr{P}(\boldsymbol{R}^k)$, so that $D_Y(U(\mathfrak{n}))=\mathscr{P}(\boldsymbol{R}^k)$, if A had one of the special forms

(i) $Af(\boldsymbol{s})=f(P(\boldsymbol{s}))$ $\quad P$ a polynomial map with polynomial inverse

or

(ii) $Af(\boldsymbol{s})=e^{2\pi iQ(\boldsymbol{s})}f(\boldsymbol{s})$ $\quad Q$ any polynomial on $\boldsymbol{R}^k$.

But the A we are interested in is a composite of such maps. Now we turn to comparison of different choices of M.

Working by induction on $n=\dim N$ (the result being trivial if $n=1$) we reduce to the case when the center $\mathfrak{z}$ is 1-dimensional and $l(\mathfrak{z})\neq 0$. Take $\mathfrak{i}=\boldsymbol{R}X_1$ to be any one-dimensional ideal in $\mathfrak{z}\cap\operatorname{Ker}(l)\subseteqq\mathfrak{m}$, and form a weak basis $X_1,\ldots,X_n$ passing through M. In $\mathfrak{n}'=\mathfrak{i}\backslash\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}'$ is maximal subordinate to the induced functional l', and $X_i'=X_i+\mathfrak{i}$, $2\leqq i\leqq n$, is a weak basis for $\mathfrak{n}'$ passing through $\mathfrak{m}'$. If $I': C^\infty(\boldsymbol{R}^k)\to C^\infty(N';M',\chi')$ and $D': U(\mathfrak{n}')\to\mathscr{P}(\boldsymbol{R}^k)$ are the maps determined by this basis, then D' is surjective by hypothesis. But the canonical map $\pi:N\to N'$ is a *homomorphism*, so routine calculations yield

$$D'(d\pi(X))f=D(X)f,\quad\text{all}\quad X\in\mathfrak{n}\,,\qquad f\in C^\infty(\boldsymbol{R}^k)\,,$$

where $D: U(\mathfrak{n}) \to \mathscr{P}(\boldsymbol{R}^k)$ is the representation associated with $X_1, \ldots, X_n$ in N. Thus $D(U(\mathfrak{n})) = \mathscr{P}(\boldsymbol{R}^k)$ for this (hence any) basis.

Assuming $\dim(\mathfrak{z}) = 1$ and $l(\mathfrak{z}) \neq 0$ we can also assume $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{n}$, or there is nothing to prove. Let $\mathfrak{z}^2 =$ second center of $\mathfrak{n} = \{X \in \mathfrak{n} : [X, \mathfrak{n}] \subseteq \mathfrak{z}\}$. Take $Z \in \mathfrak{z}$ so $l(Z) = 1$. Take $Y \in \mathfrak{z}^2 \sim \mathfrak{z}$ so $l(Y) = 0$ (adjust by a scalar multiple of Z as necessary). We distinguish two cases.

Case 1: Y can be chosen in $\mathfrak{m}$. Let $\mathfrak{n}_1 =$ centralizer of Y, an ideal of codimension one; by subordination of $\mathfrak{m}$, we have $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{n}_1$. Take an X_n such that $l(X_n) = 0$, $\mathfrak{n} = \boldsymbol{R}X_n \oplus \mathfrak{n}_1$, $[X_n, Y] = Z$. By induction hypothesis, any weak basis $X_1, \ldots, X_m, \ldots, X_{n-1}$ for $\mathfrak{n}_1$ passing through $\mathfrak{m}$ gives a surjective homomorphism $D' : U(\mathfrak{n}_1) \to \mathscr{P}(\boldsymbol{R}^{k-1})$. Adjoining X_n gives us a basis for $\mathfrak{n}$; write $(\boldsymbol{u}, v) = (u_1, \ldots, u_{n-1}, v) \in \boldsymbol{R}^k$ for the corresponding coordinates on $M \diagdown N$. For any $X \in \mathfrak{n}_1$ it is not hard to see (using formula (6)) that there is a simple relationship between $D'(X)$ acting on the coordinates $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_{k-1}) \in \boldsymbol{R}^{k-1}$ and $D(X)$ acting on $\boldsymbol{R}^k$:

$$D(X) f(\boldsymbol{u}, v) = D'(g(v)X) f_v(\boldsymbol{u}) \quad \text{all} \quad f \in C^\infty(\boldsymbol{R}^k), \tag{7}$$

where $f_v(\boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{u}, v)$ and $g(v) = Ad(\exp(vX_n)) \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{n}_1)$. Furthermore, (6) shows directly that

$$D(X_n) = \frac{\partial}{\partial v}.$$

Since $C^\infty(\boldsymbol{R}^k)$ identifies with χ-covariant functions on N it is readily seen that

$$D(Z) = I = \text{identity operator (a scalar)}.$$

Since $Y \in \mathfrak{m}$ centralizes $\mathfrak{n}_1$ and $l(Y) = 0$ it follows that $D'(Y) = 0$; thus by (7),

$$D(Y) f(\boldsymbol{u}, v) = D'(g(v)Y) f_v(\boldsymbol{u}) = D'(Y + vZ) f_v(\boldsymbol{u}) = v f(\boldsymbol{u}, v),$$

so that $D(Y) = vI$. From these facts we now conclude that all operators of the form $D'(X) \otimes I (X \in \mathfrak{n}_1)$,

$$(D'(X) \otimes I) f(\boldsymbol{u}, v) = D'(X) f_v(\boldsymbol{u}),$$

appear in $D(U(\mathfrak{n}))$ which will complete the proof in this case since $D'(U(\mathfrak{n}_1)) = \mathscr{P}(\boldsymbol{R}^{k-1})$. In fact, the matrix of the linear transformation $g(v) = \mathrm{Ad}(\exp(vX_n))$ has polynomial coefficients in v and $\det g(v) \equiv 1$, so if $X \in \mathfrak{n}_1$ there are polynomials $Q_j(v)$, $1 \leq j \leq n-1$, such that

$$X = \textstyle\sum_{j=1}^{n-1} Q_j(v) \,\mathrm{Ad}(\exp(vX_n)) X_j, \quad \text{all} \quad v \in \boldsymbol{R}.$$

But $Q_j(v) I = D(A_j)$ where $A_j \in U(\mathfrak{n}_1)$ is a suitable polynomial in Y. Thus

$$D(\textstyle\sum_j A_j \otimes X_j) f(\boldsymbol{u}, v) \doteq D'(X) f_v(\boldsymbol{u}),$$

as required.

Case 2: Y cannot be chosen in $\mathfrak{m}$ *(i.e.* $\mathfrak{z}^2 \cap \mathfrak{m} = \mathfrak{z}$). Take any $Y \in \mathfrak{z}^2 \sim \mathfrak{z}$ so $l(Y) = 0$. The centralizer $C(Y)$ cannot contain $\mathfrak{m}$ due to maximality of $\mathfrak{m}$. Take $X \in \mathfrak{m}$ so $l(X) = 0$, $\mathfrak{m} = (C(Y) \cap \mathfrak{m}) \oplus \boldsymbol{R}X$. Choose $\mathfrak{w} = (C(Y) \cap \mathfrak{m}) \cap \mathrm{Ker}(l)$, so $\mathfrak{w}$ is a subspace such that $C(Y)\cap\mathfrak{m}=\mathfrak{w}\oplus\boldsymbol{R}Z$, and $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}_I=\mathfrak{w}\oplus\boldsymbol{R}Z\oplus\boldsymbol{R}X$. It is not hard to check (following arguments in [9; pp. 73–74]) that

(i) $\mathfrak{m}_{II}=\mathfrak{w}\oplus\boldsymbol{R}Z\oplus\boldsymbol{R}Y$ is maximal subordinate to l

(ii) $\mathfrak{h}=\mathfrak{w}\oplus\boldsymbol{R}Z\oplus\boldsymbol{R}Y\oplus\boldsymbol{R}X$ is a subalgebra of $\mathfrak{n}$

(iii) $\mathfrak{w}$ is normal in $\mathfrak{h}$ and $\mathfrak{w}\backslash\mathfrak{h}\cong$ a Heisenberg algebra.

Now we set up two weak bases for $\mathfrak{n}$ passing through $\mathfrak{m}_I$ (resp. $\mathfrak{m}_{II}$) and $\mathfrak{h}$:

$$X_1,\ldots,X_{m-2},Z\begin{array}{l}\nearrow X\\ \searrow Y\end{array}\left|\begin{array}{l}Y\searrow\\ X\nearrow\end{array}\right. Y_2,\ldots,Y_k\qquad(k=n-m).$$

Here $X_1,\ldots,X_{m-2}$ is any weak basis for $\mathfrak{w}$ and the $Y_2,\ldots,Y_k$ fill in a weak basis from $\mathfrak{h}$ to $\mathfrak{n}$. Define coordinate maps $g_I,g_{II}:\boldsymbol{R}^n\to N$ for these bases and define $\varrho:\boldsymbol{R}^{k-1}\to N$ via

$$\varrho(y_2,\ldots,y_k)=\exp(y_2Y_2)\cdot\ldots\cdot\exp(y_kY_k),$$

so that $\Sigma=\varrho(\boldsymbol{R}^{k-1})\approx H\backslash N$ in either case. The characters χ_I, χ_{II} on M_I, M_{II} corresponding to l are

$$\chi_I(g_I(x_1,\ldots z,x,0\ldots0))=e^{2\pi iz}=\chi_{II}(g_{II}(x_1,\ldots z,y,0\ldots0)).$$

Define the following induced representations

$$\sigma_I=\operatorname{Ind}(M_I\uparrow N,\chi_I)\cong\sigma_I'=\operatorname{Ind}(H\uparrow N,\pi_I)$$
$$\pi_I=\operatorname{Ind}(M_I\uparrow H,\chi_I)$$

realized on concrete spaces of (possibly vector valued) functions on N and H; similarly in Situation II.

Regard σ_I as acting on $L^2(\boldsymbol{R}^k)$ via the isometry $I_I:L^2(\boldsymbol{R}^k)\to H(\sigma_I)$

$$I_If(m_I\exp(tY)\varrho(\boldsymbol{y}))=\chi_I(m_I)f(t,\boldsymbol{y})$$

if $m_I\in M_I$, $t\in\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}^{k-1}$; similarly define I_{II}. Our basic observation is the following:

There exists an equivariant isometry $V:H(\sigma_I)\to H(\sigma_{II})$ which on $S_I=I_I(S(\boldsymbol{R}^k))$ takes the form of a partial Fourier transform in the first variable,

$$\mathscr{F}_1\phi(x,y_2,\ldots,y_k)=\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(y,y_2,\ldots,y_k)e^{2\pi ixy}dy.\tag{8}$$

In particular, V induces a bijection from S_I to S_{II}.

With (8) in hand we may procede as follows. Set up the homomorphisms $D_I,D_{II}:U(\mathfrak{n})\to\mathscr{P}(\boldsymbol{R}^k)$. In situation II, the argument in Case 1 applies to show that D_{II} is surjective. Equivariance of V means that the induced isometry $\tilde V:L^2(\boldsymbol{R}^k)\to L^2(\boldsymbol{R}^k)$ satisfies

$$\tilde V(D_I(X)f)=D_{II}(X)(\tilde Vf)\quad\text{all}\quad X\in\mathfrak{n},\qquad f\in S(\boldsymbol{R}^k).$$

Hence the same is true for all $A\in U(\mathfrak{n})$, so that

$$D_I(A)=\tilde V^{-1}\circ D_{II}(A)\circ\tilde V=\mathscr{F}_1^{-1}\circ D_{II}(A)\circ\mathscr{F}_1\quad\text{on}\quad S(\boldsymbol{R}^k).$$

Regarding $\mathscr{P}(\boldsymbol{R}^k)$ as operators on $S(\boldsymbol{R}^k)$, we get $D_I(U(\mathfrak{n}))=\mathscr{F}_1^{-1}\circ\mathscr{P}(\boldsymbol{R}^k)\circ\mathscr{F}_1=\mathscr{P}(\boldsymbol{R}^k)$, which completes the proof in Case 2.

Proof of (8). We first show that the one-variable Fourier transform $\mathscr{F}:L^2(\boldsymbol{R})\to L^2(\boldsymbol{R})$,

$$\mathscr{F}\phi(s)=\int\phi(t)e^{2\pi ist}dt$$

is an equivariant isometry $T: H(\pi_I) \to H(\pi_{II})$ when we identify these spaces with $L^2(\boldsymbol{R})$ in the usual way via maps J_I, J_{II} from $L^2(\boldsymbol{R})$ to $H(\pi_I)$, $H(\pi_{II})$,

$$J_I\phi(m_I \exp(tY)) = \chi_I(m_I) J_I \phi(\exp(tY)) = \chi_I(m_I)\phi(t)$$

and similarly for J_{II}; that is,

$$T(J_I\phi) = J_{II}(\mathscr{F}\phi) \quad \text{all} \quad \phi \in L^2(\boldsymbol{R}). \tag{9}$$

Since $W = \exp(\mathfrak{w}) \subsetneq \operatorname{Ker}(\chi_I) \cap \operatorname{Ker}(\chi_{II})$ the calculations underlying (9) reduce to more or less known computations in the Heisenberg group using the respective weak bases $\{Z, X, Y\}$ and $\{Z, Y, X\}$. We sketch the details for the sake of completeness. First calculate the product in the Heisenberg group in terms of the coordinates corresponding to these bases. If $\boldsymbol{s} * \boldsymbol{t} = g^{-1}(g(\boldsymbol{s}) \cdot g(\boldsymbol{t}))$ we get

$$(a, b, c) *_I (a', b', c') = (a + a' - cb', b + b', c + c')$$

$$(a, b, c) *_{II} (a', b', c') = (a + a' + cb', b + b', c + c').$$

Identifying $H(\pi_I) = L^2(\boldsymbol{R})$ under J_I, we find that

$$\pi_I(g_{II}(a, b, c)) f(t) = e^{2\pi i(a - c(b+t))} f(b + t)$$

$$\pi_{II}(g_{II}(a, b, c)) f(t) = e^{2\pi i(a + tb)} f(c + t).$$

Now if $h(t) = \pi_{II}(g_{II}(a, b, c)) f(t)$, direct calculations show that

$$\mathscr{F} h(u) = \pi_I(g_{II}(a, b, c)) \mathscr{F} f(u) \quad \text{for} \quad f \in S(\boldsymbol{R}),$$

so that $\mathscr{F} \circ \pi_{II}(n) = \pi_I(n) \circ \mathscr{F}$ for all $n \in N$, as required.

Clearly $T: H(\pi_I) \to H(\pi_{II})$ induces an equivariant isometry $\tilde{T}$ between σ_I' and $\sigma_{II}': F \in H(\sigma_I')$ goes to $G = \tilde{T}F \in H(\sigma_{II}')$ where $G(n) = T[F(n)]$. Let K_I, K_{II} be the natural isomorphisms between $H(\sigma_I), H(\sigma_{II})$ and $H(\sigma_I'), H(\sigma_{II}'): K_I$ maps functions on N, covariant along M_I-cosets, to vector fields on N covariant along H-cosets,

$$K_I F = \{F_n \in H(\pi_I): n \in N\}$$

where $F_n(h) = F(hn)$ all $h \in H$, a.e. $n \in N$. Due to covariance like π_I along H-cosets, the field of vectors $K_I F$ is completely determined by its values $\{F_{\varrho(\boldsymbol{y})}: \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^{k-1}\}$ on the transversal $\Sigma \approx H \backslash N$. Similar remarks hold for K_{II}.

If $f \in S(\boldsymbol{R}^k)$ and $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^{k-1}$, write $f_{\boldsymbol{y}}(t) = f(t, \boldsymbol{y})$, a field of vectors in $S(\boldsymbol{R})$ defined on $\boldsymbol{R}^{k-1}$. We assert that

$$(I_I f)_{\varrho(\boldsymbol{y})} = J_I(f_{\boldsymbol{y}}) \quad \text{all} \quad \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{R}^{k-1}, \quad \text{all} \quad f \in S(\boldsymbol{R}^k), \tag{10}$$

and likewise in situation II. To prove (10) we compare functions in $H(\pi_I)$ for each $\boldsymbol{y}$. If $h = m_I \exp(tY) \in H$, then

$$\begin{aligned}(I_I f)_{\varrho(\boldsymbol{y})}(m_I \exp(tY)) &= \chi_I(m_I) \cdot I_I f(\exp(tY) \cdot \varrho(\boldsymbol{y})) \\ &= \chi_I(m_I) f(t, \boldsymbol{y}) \\ &= \chi_I(m_I) f_{\boldsymbol{y}}(t) \\ &= \chi_I(m_I) J_I(f_{\boldsymbol{y}})(\exp(tY)) \\ &= J_I(f_{\boldsymbol{y}})(m_I \exp(tY)).\end{aligned}$$

Our final computation considers the equivariant isometry $\tilde{V}: L^2(\boldsymbol{R}^k) \to L^2(\boldsymbol{R}^k)$, which is obviously given by the equivariant isometries:

$$L^2(\boldsymbol{R}^k) \xrightarrow{I_I} H(\sigma_I) \xrightarrow{K_I} H(\sigma'_I) \xrightarrow{\tilde{T}} H(\sigma'_{II}) \xleftarrow{K_{II}} H(\sigma_{II}) \xleftarrow{I_{II}} L^2(\boldsymbol{R}^k).$$

We prove (8) by showing that

$$\tilde{V} f = \mathscr{F}_1 f \quad \text{all} \quad f \in S(\boldsymbol{R}^k), \tag{11}$$

or equivalently: $\tilde{T} K_I I_I(f) = K_{II} I_{II}(\mathscr{F}_1 f)$. Write $F = \tilde{T} K_I I_I(f)$, $G = K_{II} I_{II}(\mathscr{F}_1 f)$ and show these vector fields on N agree on the cross section $\varrho(\boldsymbol{R}^{k-1})$. If $x = \varrho(y)$, $y \in \boldsymbol{R}^{k-1}$, and if $h = m_{II} \exp(tX) \in H$ we get, by definition of $\tilde{T}$ and (9), (10):

$$\begin{aligned}
F_x(h) &= \chi_{II}(m_{II}) F_x(\exp(tX)) \\
&= \chi_{II}(m_{II}) \cdot T[(I_I f)_{\varrho(y)}] (\exp(tX)) \\
&= \chi_{II}(m_{II}) \cdot T[J_I(f_y)] (\exp(tX)) \\
&= \chi_{II}(m_{II}) J_{II}(\mathscr{F}(f_y)) (\exp(tX)) \\
&= \chi_{II}(m_{II}) J_{II}[(\mathscr{F}_1 f)_y] (\exp(tX)),
\end{aligned}$$

while

$$\begin{aligned}
G_x(h) &= \chi_{II}(m_{II}) G_x(\exp(tX)) \\
&= \chi_{II}(m_{II}) (I_{II}(\mathscr{F}_1 f))_{\varrho(y)} (\exp(tX)) \\
&= \chi_{II}(m_{II}) J_{II}[(\mathscr{F}_1 f)_y] (\exp(tX))
\end{aligned}$$

as required. QED.

Note. It is not generally true that $D(U(\mathfrak{n})) = \mathscr{P}(\boldsymbol{R}^k)$ if $\mathfrak{m}$ is merely subordinate to l (not maximal dimension) and we set up the homomorphism D with respect to a weak basis through $\mathfrak{m}$. Nor do the C^∞ vectors equal the Schwartz functions; just consider the left regular representation of $N = \boldsymbol{R}$, induced from $M = \{0\}$. It may be true that $S(\boldsymbol{R}^k) \equiv H^\infty(U^\chi) \Leftrightarrow U^\chi$ is irreducible, but we have not pursued this question.

We wish to thank J. Dixmier and C. Moore for their comments on the relationship of Theorem 3.1 to the existing literature.

4. Proof of (4)

Let $X_1, \ldots, X_n$ be any weak *Malcev* basis through M, and describe group multiplication by polynomials as in (5). There are constants C_1, C_2 and an integer $d > 0$ such that $|P_i(s, t)| \leqq C_1(\|s\| + \|t\|)^d + C_2$ all $s, t \in \boldsymbol{R}^n$, where $\|s\| = \sum_i |s_i|$. For $x \in N$ let $\|x\| = \|t\|$ if $x = g(t)$; it follows that

$$\|xy\| \leqq C'_1(\|x\| + \|y\|)^d + C'_2 \quad \text{all} \quad x, y \in N.$$

Define $\|Mx\| = \inf\{\|mx\| : m \in M\}$; this is easy to compute. For $x = g(t)$ let

$$\tilde{x} = g(0, \ldots, 0, t_{m+1}, \ldots, t_n).$$

Then $Mx = M\tilde{x}$, $\|m\tilde{x}\| = \|m\| + \|\tilde{x}\|$ for $m \in M$, so that $\|Mx\| = \|\tilde{x}\|$.

In view of the fact that $x \to \|\tilde{x}\|$ is bounded by a polynomial constant on cosets of M, there are constants $C_r (r=0, 1, 2, \ldots)$ such that $|f(x)| \cdot \|Mx\|^r \leqq C_r$ all $x \in N$. Hence if $E \subsetneqq \Gamma$,

$$\sum_{\gamma \in E} |f(\gamma x)| \leqq \sum_{\gamma \in E} \frac{C_r}{\|M\gamma x\|^r} \leqq +\infty, \quad \text{all} \quad x \in N. \tag{12}$$

Later on we will make particular choices for E which give a convergent sum. If we wish we can get (12) to hold simultaneously for all functions in a suitably chosen neighborhood U_r of f in $S(\boldsymbol{R}^k)$. Now for all $m \in M$,

$$\|m\gamma\|^{1/d} = \|m\gamma x x^{-1}\|^{1/d} \leqq C_1(\|m\gamma x\| + \|x^{-1}\|) + C_2$$
$$\|M\gamma\|^{1/d} \leqq C_1(\|M\gamma x\| + \|x^{-1}\|) + C_2 ;$$

changing constants if necessary, we get

$$C_1 \|M\gamma\|^{1/d} - \|x^{-1}\| - C_2 \leqq \|M\gamma x\| \quad \text{all} \quad x \in N, \quad \gamma \in \Gamma.$$

If $\|M\gamma\|$ is large enough we may take r^{th} powers and conclude that

$$0 \leqq [C_1 \|\tilde{\gamma}\|^{1/d} - \|x^{-1}\| - C_2]^r \leqq \|M\gamma x\|^r. \tag{13}$$

Now take $E = \{g(0, \ldots, 0, n_1, \ldots, n_k) : n_i \in \boldsymbol{Z}\}$, a set of representatives for $\Gamma \cap M \backslash \Gamma$. Given a compact set $K \subsetneqq N$ we may combine (12) and (13) to see that r may be fixed large enough that there is a uniform bound

$$\sum_{\gamma \in E} |f(\gamma x)| \leqq A < +\infty \quad \text{all} \quad x \in K,$$

so the series (4) converges absolutely and uniformly on compacta (for all functions in a suitable neighborhood of f in $H^\infty(U^\chi)$, if we wish). Similarly, the series converges if we replace f by Wf, $W \in U(\mathfrak{n})$. Thus by standard arguments on interchanging sums and derivatives,

$$Tf(\Gamma n) = \sum_{\gamma \in E} f(\gamma n) \qquad n \in N, \quad f \in H^\infty(U^\chi)$$

maps $H^\infty(U^\chi)$ into $C^\infty(\Gamma \backslash N)$ with $T(Wf) = W(Tf)$ for $W \in U(\mathfrak{n})$. But T is everywhere defined and closed with respect to the C^∞ topologies (if $f_n \to 0$ in $S(\boldsymbol{R}^k)$ and $Tf_n \to h$, then $h(\Gamma x) = 0$ all x), hence continuous by the closed graph theorem. This completes the proof.

References

1. Auslander, L., Brezin, J.: Uniform distribution on solvmanifolds. Adv. in Math. **7**, 111—144 (1971)
2. Brezin, J.: Note on harmonic analysis on nilmanifolds. To appear in proceedings of a conference held at Marseilles-Luminy, August 1974, Springer Lecture Notes 466.
3. Corwin, L., Greenleaf, F. P.: Character formulas and spectra of compact nilmanifolds. J. Fctnl. Analysis. **21**, 123—154 (1976)
4. Corwin, L., Greenleaf, F. P.: Intertwining operators for representations induced from uniform subgroups. Acta Math. (Scand.) **136**, 275—301 (1976)
5. Corwin, L., Greenleaf, F. P.: Integral formulas with distribution kernels for irreducible projections in L^2 of a nilmanifold. To appear
6. Goodman, R.: Analytic and entire vectors for representations of Lie groups. Trans. Amer. Math. Soc. **143**, 55—76 (1969)

7. Howe, R.: On Frobenius reciprocity for unipotent algebraic groups over Q. Amer. J. Math. **93**, 163—172 (1971)
8. Howe, R.: On the spectrum of a compact solvmanifold. To appear in proceedings of AMS Summer Conference: Harmonic analysis on Lie Groups and homogeneous spaces, Williamstown, 1972
9. Kirillov, A. A.: Unitary representations of nilpotent Lie groups. Uspekhi Matem. Nauk **17**, 57—110 (1972)
10. Moore, C. C.: Decomposition of unitary representations defined by discrete subgroups of nilpotent groups. Annals of Math. **82**, 141—182 (1965)
11. Ol'shanskii, G. I.: On the duality theorem of Frobenius. Fctnl. Analysis and its Applns. **3**, 49—58 (1969)
12. Penney, R.: Entire vectors and holomorphic extension of representations II. Trans. Amer. Math. Soc. **191**, 195—207 (1974)
13. Penney, R.: Rational subspaces of induced representations and nilmanifolds. To appear
14. Poulsen, N. S.: On C^∞ vectors and intertwining bilinear forms for representations of Lie groups. J. Fctnl. Anal. **9**, 87—120 (1972)
15. Pukanszky, L.: Lecons sur les representations des groupes. Paris: Dunod 1967
16. Richardson, L.: Decomposition of the L^2 space of a general compact nilmanifold. Amer. J. Math. **93**, 173—190 (1971)
17. Richardson, L.: A class of idempotent measures on compact nilmanifolds. Acta Math. (Scand.) **135**, 129—154 (1975)

Received October 10, 1975

Math. Ann. 225, 33—55 (1977)

Isomorphie harmonischer Räume

Ursula Schirmeier
Math. Institut der Universität, Bismarckstr. $1^1/_2$, D-8520 Erlangen, Bundesrepublik Deutschland

Ziel der vorliegenden Arbeit ist eine Übertragung des Satzes von Banach-Stone in die axiomatische Potentialtheorie. Dieser Satz besagt, daß zwei kompakte Räume X und $\tilde{X}$ schon dann homöomorph sind, wenn die Ringe der stetigen Funktionen auf X und $\tilde{X}$ isomorph sind.

Seit langem sind in der Funktionentheorie analoge Aussagen bekannt: Nach einem Satz von Bers sind zwei Gebiete in $\mathbb{C}$ (bis auf Konjugation) konform äquivalent, wenn die zugehörigen Ringe der holomorphen Funktionen isomorph sind. Ein Isomorphismus φ zwischen den Algebren $\mathscr{K}(X)$ und $\mathscr{K}(\tilde{X})$ aller meromorphen Funktionen auf zwei kompakten Riemannschen Flächen X und $\tilde{X}$ mit $\varphi(1)=1$ induziert eine biholomorphe Abbildung $\psi:\tilde{X}\to X$ mit $\varphi(h)=h\circ\psi$ für alle $h\in\mathscr{K}(X)$.

In der Theorie der harmonischen Räume erweist es sich als zweckmäßig, die Rolle der Funktionenalgebren geeigneten Unterkegeln der Potentialkegel zuzuweisen. An die Stelle der Homöomorphie bzw. biholomorphen Abbildung tritt dann eine biharmonische Abbildung [vgl. Definition (1.4)].

In § 1 beweisen wir ein entsprechendes Ergebnis für σ-kompakte, $\mathfrak{P}$-harmonische Räume in dem folgenden, etwas allgemeineren Rahmen: Ausgehend von einem Kegelepimorphismus φ [vgl. Definition (1.1)] des Kegels $\mathscr{P}^c$ aller stetigen, reellwertigen Potentiale des harmonischen Raumes $(X,\mathscr{H}^*)$ auf den entsprechenden Kegel $\tilde{\mathscr{P}}^c$ des Raumes $(\tilde{X},\tilde{\mathscr{H}}^*)$, wird der harmonische Raum $(\tilde{X},\tilde{\mathscr{H}}^*_{\tilde{f}})$ in den Raum $(X,\mathscr{H}^*)$ eingebettet. Dabei bezeichnet $\tilde{f}$ eine geeignete, strikt positive, stetige Funktion auf $\tilde{X}$; das Garbendatum $\tilde{\mathscr{H}}^*_{\tilde{f}}$ entsteht aus $\tilde{\mathscr{H}}^*$ durch Division mit $\tilde{f}$.

Der zweite Paragraph beschreibt die Struktur dieser Einbettung genauer; im dritten Paragraphen werden Differenzierbarkeitseigenschaften von harmonischen Abbildungen zwischen offenen Mengen $X\subset\mathbb{R}^n$ und $\tilde{X}\subset\mathbb{R}^m$ $(n,m\in\mathbb{N})$ unter Heranziehung der Ergebnisse von J.-M. Bony bewiesen, sofern alle auftretenden harmonischen Funktionen genügend oft differenzierbar sind.

Schließlich wenden wir uns in §4 wieder der ursprünglichen Aufgabenstellung zu – diesmal für den Fall der Kegel aller reellwertigen Potentiale bzw. aller reellwertigen feinen Potentiale eines harmonischen Raumes mit Dominationsaxiom. Dabei besteht der entscheidende Schritt in dem Nachweis, daß der Kegel der (feinen) Potentiale eines solchen harmonischen Raumes $(X, \mathscr{H}^*)$ nicht nur die feine, sondern sogar die Ausgangstopologie von X eindeutig bestimmt. Insbesondere wird hieraus folgen, daß die feine harmonische Struktur den harmonischen Raum selbst eindeutig kennzeichnet.

§ 1. Einbettung harmonischer Räume

Im folgenden bezeichnen $(X, \mathscr{H}^*)$ und $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{H}}^*)$ zwei harmonische Räume.

Die hier verwendeten Bezeichnungen und Begriffe sind – wenn nichts Gegenteiliges gesagt ist – die des Buches [6]; einige Symbole [wie zum Beispiel $\mathscr{P}(X)$, μ_x^V, $\hat{R}_f^A$] werden jedoch, wenn sie sich auf den Raum $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{H}}^*)$ beziehen, mit einer ~ versehen [$\tilde{\mathscr{P}}(\tilde{X})$, $\tilde{\mu}_x^V$, $\hat{\tilde{R}}_f^A$].

(1.1) *Definition. Seien P bzw. $\tilde{P}$* inf-*stabile, konvexe Unterkegel der Potentialkegel $\mathscr{P}(X)$ bzw. $\tilde{\mathscr{P}}(\tilde{X})$ von $(X, \mathscr{H}^*)$ bzw. $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{H}}^*)$.*

Ein Kegelepimorphismus von P auf $\tilde{P}$ ist eine additive, positiv-homogene Surjektion

$$\varphi: P \to \tilde{P}$$

mit $\varphi(\inf(p,q)) = \inf(\varphi(p), \varphi(q))$ für alle $p, q \in P$. Ist φ zusätzlich injektiv, so heißt φ ein Kegelisomorphismus.

(1.2) *Bemerkungen.* (1) Als Unterkegel P und $\tilde{P}$ werden im folgenden hauptsächlich die Kegel $\mathscr{P}_{\mathbb{R}}$ bzw. $\tilde{\mathscr{P}}_{\mathbb{R}}$ aller reellwertigen Potentiale, die Kegel $\mathscr{P}^c := \mathscr{P}_{\mathbb{R}} \cap \mathscr{C}(X)$ bzw. $\tilde{\mathscr{P}}^c := \tilde{\mathscr{P}}_{\mathbb{R}} \cap \mathscr{C}(\tilde{X})$ aller stetigen, reellwertigen und die Kegel $\mathscr{P}^f$ bzw. $\tilde{\mathscr{P}}^f$ aller feinen, reellwertigen Potentiale auf X bzw. $\tilde{X}$ auftreten.

(2) Enthalten die Kegel P und $\tilde{P}$ nur reellwertige Potentiale, so sind $E := P - P$ und $\tilde{E} := \tilde{P} - \tilde{P}$ Vektorverbände bezüglich der punktweisen Ordnung. Der Kegelepimorphismus φ läßt sich dann durch die Festsetzung

$$\varphi'(p-q) := \varphi(p) - \varphi(q) \quad \text{für} \quad p, q \in P$$

zu einer linearen Surjektion

$$\varphi': E \to \tilde{E}$$

fortsetzen, welche ein linearer Verbandshomomorphismus ist.

(3) Mit φ ist auch φ^{-1} ein Kegelisomorphismus.

(4) $\varphi: P \to \tilde{P}$ ist genau dann ein Kegelisomorphismus, wenn φ bijektiv, additiv, positiv-homogen und isoton bezüglich der natürlichen Ordnung ist.

(5) Für jede aufsteigend filtrierende Familie $(p_i)_{i \in I}$ in P mit $p := \sup_{i \in I} p_i \in P$ ist $\sup_{i \in I} \varphi(p_i) \leqq \varphi(p)$. Gleichheit gilt hierbei sicher dann, wenn φ bijektiv ist. Mit nicht-algebraischen Hilfsmitteln kann – wie sich aus (1.12) ergeben wird – in obiger Situation $\sup_{i \in I} \varphi(p_i) = \varphi\left(\sup_{i \in I} p_i\right)$ auch für nicht-injektive Abbildungen φ erreicht werden, falls $P = \mathscr{P}^c$ und $\tilde{P} = \tilde{\mathscr{P}}^c$ ist.

Das folgende Beispiel soll zeigen, welche Ergebnisse bei nicht-injektivem φ erwartet werden können; in Satz (1.12) werden wir sehen, daß die Situation des Beispiels typisch ist.

(1.3) *Beispiel.* Seien $X :=]-\infty, 1[$, $\tilde{X} := [0, 1[$. $(X, \mathscr{H}^*)$ bezeichne den $\mathfrak{P}$-harmonischen Raum der Lösungen der Laplace-Gleichung. Für jede offene, zusammenhängende Menge $U \subset [0, 1[$ mit $0 \in U$ bzw. $0 \notin U$ sei $\tilde{\mathscr{H}}^*(U)$ die Menge aller antitonen, konkaven Funktionen $f: U \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ [d.h. $\tilde{\mathscr{H}}(U)$ enthält nur die Konstanten] bzw. $\tilde{\mathscr{H}}^*(U) = \mathscr{H}^*(U)$.

Die Restriktionsabbildung

$$\varphi: \mathscr{P}^c \to \tilde{\mathscr{P}}^c$$

ist surjektiv. $\tilde{\mathscr{P}}^c$ besteht nämlich aus den stetigen, antitonen, konkaven Funktionen $\tilde{p}: [0, 1[\to \mathbb{R}_+$ mit $\lim_{x \to 1} \tilde{p}(x) = 0$. Jedes solche Potential $\tilde{p}$ ist Restriktion des durch

$$p(x) := \begin{cases} \tilde{p}(x) & \text{für} \quad x \in [0, 1[\\ \tilde{p}(0) & \text{für} \quad x \in]-\infty, 0[\end{cases}$$

definierten Potentials $p \in \mathscr{P}^c$.

$(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{H}}^*)$ kann jedoch nicht als Unterraum von $(X, \mathscr{H}^*)$ aufgefaßt werden, wohl aber $(\mathring{\tilde{X}}, \tilde{\mathscr{H}}^*|_{\mathring{\tilde{X}}})$; d.h. es ist

$$\tilde{\mathscr{H}}^*|_{]0,1[} = \mathscr{H}^*|_{]0,1[}\,.$$

Insbesondere ist die natürliche Einbettungsabbildung $j: (]0, 1[, \tilde{\mathscr{H}}^*|_{]0,1[}) \to (X, \mathscr{H}^*)$ eine harmonische Abbildung im Sinne der folgenden

(1.4) *Definition. Seien $(X, \mathscr{H}^*)$ und $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{H}}^*)$ zwei harmonische Räume. Eine stetige Abbildung $\psi: X \to \tilde{X}$ heißt harmonische Abbildung, falls für jede offene Menge $\tilde{U} \subset \tilde{X}$*

$$\tilde{\mathscr{H}}^*(\tilde{U}) \circ \psi := \{h \circ \psi|_{\psi^{-1}(\tilde{U})} : h \in \tilde{\mathscr{H}}^*(\tilde{U})\} \subset \mathscr{H}^*(\psi^{-1}(\tilde{U}))$$

gilt.

Falls ψ bijektiv ist und sowohl ψ als auch die Umkehrabbildung ψ^{-1} harmonische Abbildungen sind, so heißt ψ eine biharmonische Abbildung.

(1.5) *Bemerkungen.* (1) In obiger Definition genügt es, sich auf Mengen $\tilde{U}$ einer topologischen Basis $\tilde{\mathscr{B}}$ von $\tilde{X}$ zu beschränken.

(2) Eine Abbildung $\psi: X \to \tilde{X}$ ist genau dann biharmonisch, wenn ψ eine offene, bijektive harmonische Abbildung ist [vgl. [6], Theorem 2.1.1].

(3) Harmonische Abbildungen ψ „transportieren" die harmonischen Funktionen; d.h. für jede offene Menge $\tilde{U} \subset \tilde{X}$ und jedes

$$\tilde{h} \in \tilde{\mathscr{H}}(\tilde{U}) \quad \text{ist} \quad \tilde{h} \circ \psi|_{\psi^{-1}(\tilde{U})} \in \mathscr{H}(\psi^{-1}(\tilde{U}))\,.$$

Umgekehrt ist jede stetige Abbildung ψ mit dieser Eigenschaft harmonisch, sofern nur $(X, \mathscr{H}^*)$ und $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{H}}^*)$ eine Basis regulärer Mengen besitzen [vgl. [5], Theorem 3.1]. Unsere Definition einer harmonischen Abbildung verträgt sich also mit der in [5].

(4) Sei nun speziell $\tilde{X} := \mathbb{R}$, versehen mit der klassischen, zur Laplace-Gleichung gehörigen harmonischen Struktur. Die harmonischen Abbildungen $\psi: X \to \tilde{X}$

stimmen genau dann mit den global definierten harmonischen Funktionen auf X überein, wenn $\mathscr{H}$ die Konstanten enthält.

Ist nämlich ψ eine harmonische Abbildung im Sinne unserer Definition, so ist nach (3) die Funktion $\psi = \mathrm{id} \circ \psi \in \mathscr{H}(X)$, sowie $1 = 1 \circ \psi \in \mathscr{H}(X)$.

Sei umgekehrt ψ eine global definierte harmonische Funktion auf X. Jede hyperharmonische Funktion $\tilde{h} \neq \infty$ auf einem offenen Intervall $\tilde{U} \subset \mathbb{R}$ ist Infimum einer Familie $(\tilde{h}_a)_{a \in I}$ von affin-linearen Funktionen auf $\tilde{U}$. Falls nun $\mathscr{H}$ die Konstanten enthält, ist für jedes $a \in I$ dann $\tilde{h}_a \circ \psi|_{\psi^{-1}(\tilde{U})} \in \mathscr{H}(\psi^{-1}(\tilde{U}))$, d.h.

$$\tilde{h} \circ \psi|_{\psi^{-1}(\tilde{U})} = \inf_{a \in I} \tilde{h}_a \circ \psi|_{\psi^{-1}(\tilde{U})} \in \mathscr{H}^*(\psi^{-1}(\tilde{U})).$$

Dies bedeutet gerade, daß ψ eine harmonische Abbildung ist.

Wir gehen nun aus von einem Kegelepimorphismus φ zwischen den Kegeln $\mathscr{P}^c$ und $\tilde{\mathscr{P}}^c$ aller stetigen, reellwertigen Potentiale zweier σ-kompakter, $\mathfrak{P}$-harmonischer Räume $(X, \mathscr{H}^*)$ und $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{H}}^*)$ mit $1 \in \mathscr{P}^c$ und $\varphi(1) = 1$.

Die gesuchte, zu φ gehörige Einbettungsabbildung $\psi: \tilde{X} \to X$ [d.h. ψ soll mit φ durch die Eigenschaft $\varphi(p) = p \circ \psi$ für alle Potentiale $p \in \mathscr{P}^c$ verknüpft sein] wird sich als Restriktion der transponierten Abbildung

$$\varphi^*: \tilde{F} \to F$$

auf den Zustandsraum $\varepsilon(\tilde{X}) := \{\varepsilon_{\tilde{x}} : \tilde{x} \in \tilde{X}\}$ herausstellen. Dabei bezeichnet $\tilde{F}$ bzw. F den Ordnungsdualraum von $\tilde{\mathscr{P}}^c - \tilde{\mathscr{P}}^c$ bzw. von $\mathscr{P}^c - \mathscr{P}^c$.

Zum Nachweis, daß φ^* die Menge $\varepsilon(\tilde{X})$ in die entsprechende Menge $\varepsilon(X)$ abbildet, wird die Theorie der adaptierten Räume herangezogen. Es gilt nämlich das

(1.6) **Lemma.** *$E := \mathscr{P}^c - \mathscr{P}^c$ ist ein adaptierter Raum [vgl. [4] Définition p. 4].*

Beweis. Die Behauptung folgt leicht aus der σ-Kompaktheit und $\mathfrak{P}$-Harmonizität des Raumes $(X, \mathscr{H}^*)$ mit [6] Proposition 2.2.4.

Nach Bemerkung (1.2.2) ist E mit der natürlichen Ordnung ein Vektorverband. Auf E sind alle Funktionale der Form $\beta \cdot \varepsilon_x$ mit $x \in X$, $\beta \in \mathbb{R}_+$ lineare Verbandshomomorphismen. Mit Hilfe von (1.6) läßt sich umgekehrt zeigen:

(1.7) **Lemma.** *Zu jedem linearen Verbandshomomorphismus $\neq 0$*

$$\lambda: \mathscr{P}^c - \mathscr{P}^c \to \mathbb{R}$$

existiert genau ein $\beta > 0$ und genau ein $x \in X$ mit $\lambda = \beta \cdot \varepsilon_x$.

Beweis. Nach [8] Theorem 1.8.1 liegt jeder von Null verschiedene Verbandshomomorphismus $\lambda: \mathscr{P}^c - \mathscr{P}^c \to \mathbb{R}$ auf einem Extremalstrahl des positiven Kegels des Dualraumes $(\mathscr{P}^c - \mathscr{P}^c)^*_+$; wegen (1.6) und [4] Proposition 3, ist λ dann aber von der Form $\lambda = \beta \cdot \varepsilon_x$ mit $\beta > 0$ und $x \in X$. Da die Funktionen in $\mathscr{P}^c$ die Punkte von X verschränkt trennen, folgt die Eindeutigkeit der Darstellung von λ.

(1.8) **Lemma.** *Ist $p \in \mathscr{P}^c$ strikt positiv, so auch $\varphi(p)$.*

Beweis. Nach (1.7) ist ein Potential $p \in \mathscr{P}^c$ genau dann strikt positiv, wenn für jeden von Null verschiedenen linearen Verbandshomomorphismus $\lambda: \mathscr{P}^c - \mathscr{P}^c \to \mathbb{R}$ der Wert $\lambda(p) > 0$ ist.

Für jedes $\tilde{x} \in \tilde{X}$ ist nach (1.2.2) $\lambda_{\tilde{x}} := \varepsilon_{\tilde{x}} \circ \varphi'$ ein solcher linearer Verbandshomomorphismus, wenn φ' wieder die lineare Fortsetzung von φ auf $\mathscr{P}^c - \mathscr{P}^c$ bezeichnet. Für jedes $\tilde{x} \in \tilde{X}$ gilt daher $\varphi(p)(\tilde{x}) = \lambda_{\tilde{x}}(p) > 0$.

(1.9) **Lemma.** *Sei $p_0 \in \mathscr{P}^c$ strikt positiv. Für je zwei Potentiale $p, q \in \mathscr{P}^c$ mit $p \geqq q$ sind äquivalent:*

(1) $p - q \in \mathscr{H}(X)$.

(2) *Zu jedem $u \in \mathscr{P}^c$ existiert ein $\beta \geqq 0$ derart, daß für alle natürlichen Zahlen n gilt*

$$\inf(n \cdot q + u, n \cdot p) \leqq \beta \cdot p_0 + n \cdot q \,.$$

Beweis. Für jedes $u \in \mathscr{P}^c$ sei $f_u : X \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$x \mapsto \sup\{\inf(n \cdot q + u, n \cdot p)(x) - n \cdot q(x) : n \in \mathbb{N}\},$$

d.h. es ist $f_u = 1_{\{p \neq q\}} \cdot u$.

(1)$\Rightarrow$(2). Aus (1) folgt, daß die Menge $L := \{x \in X : p(x) \neq q(x)\}$ relativ-kompakt ist. Daher ist für jedes $u \in \mathscr{P}^c$ die Funktion f_u nach oben beschränkt, etwa $f_u \leqq M \in \mathbb{R}_+$, und $b := \inf p_0(L)$ ist strikt positiv.

Für $\beta := \dfrac{M}{b} \in \mathbb{R}_+$ gilt dann $f_u \leqq \beta \cdot p_0$, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\inf(n \cdot q + u, n \cdot p) \leqq \beta \cdot p_0 + n \cdot q \,.$$

(2)$\Rightarrow$(1). Nach (1.6.3) existiert zu p_0 ein Potential $u \in \mathscr{P}^c$ derart, daß für jedes $\alpha > 0$ die Menge $\{x \in X : u(x) < \alpha \cdot p_0(x)\}$ relativ-kompakt ist.

Sei nun β gemäß (2) so gewählt, daß $f_u \leqq \beta \cdot p_0$, also $X = \{f_u < (\beta + 1) \cdot p_0\}$ gilt.

Wegen $\{p \neq q\} \subset \{f_u = u\} \subset K := \{u < (\beta + 1) \cdot p_0\}$ und der relativen Kompaktheit von K ergibt sich die Behauptung.

(1.10) **Lemma.** *Für alle Potentiale $p, q \in \mathscr{P}^c$ mit $p - q \in \mathscr{H}(X)_+$ ist $\varphi(p) - \varphi(q) \in \mathscr{H}(\tilde{X})_+$.*

Beweis. Da X σ-kompakt ist, existiert [z.B. wegen [6] Prop. 2.2.2] ein strikt positives Potential $p_0 \in \mathscr{P}^c$, dessen Bild $\varphi(p_0)$ wegen Lemma (1.8) ebenfalls strikt positiv ist.

Die Behauptung folgt dann aus Lemma (1.9) und der Surjektivität von φ.

(1.11) *Bemerkungen.* (1) Sei f eine strikt positive, stetige Funktion auf X. Mit $\mathscr{H}_f^*$ bezeichnen wir das Garbendatum

$$U \mapsto \mathscr{H}_f^*(U) := \left\{\frac{h}{f|_U} : h \in \mathscr{H}^*(U)\right\} \qquad (U \text{ offen in } X),$$

mit $\mathscr{P}_f^c$ den zu $(X, \mathscr{H}_f^*)$ gehörigen Kegel aller stetigen, reellwertigen Potentiale.

Mit $(X, \mathscr{H}^*)$ ist auch $(X, \mathscr{H}_f^*)$ ein $\mathfrak{P}$-harmonischer Raum und

$$\begin{aligned} \varphi : \mathscr{P}^c &\to \mathscr{P}_f^c \\ p &\mapsto \frac{p}{f} \end{aligned}$$

ein Kegelisomorphismus.

Es existiert aber im Falle $\mathscr{H}_f^* \neq \mathscr{H}^*$ keine biharmonische Abbildung zwischen $(X, \mathscr{H}^*)$ und $(X, \mathscr{H}_f^*)$.

(2) In einem σ-kompakten, $\mathfrak{P}$-harmonischen Raum $(X, \mathscr{H}^*)$ existiert stets ein strikt positives, stetiges Potential p. Indem man zu dem Raum $(X, \mathscr{H}_p^*)$ übergeht, kann man immer erreichen, daß die positiven Konstanten Potentiale sind.

Im Hinblick auf (1) erscheint es nötig, den auftretenden Kegelepimorphismus zu normieren, etwa durch die Forderung, daß er die 1 auf die 1 abbildet.

Da nach (1.8) mit $p \in \mathscr{P}^c$ auch $\varphi(p)$ strikt positiv ist, ist die Voraussetzung $1 \in \mathscr{P}^c$ und $\varphi(1)=1$ in dem folgenden Satz keine Einschränkung der Allgemeinheit.

(1.12) **Satz.** *Seien* $(X, \mathscr{H}^*)$ *und* $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{H}}^*)$ *zwei* σ*-kompakte,* $\mathfrak{P}$*-harmonische Räume und sei*

$$\varphi: \mathscr{P}^c \to \tilde{\mathscr{P}}^c$$

ein Kegelepimorphismus mit $1 \in \mathscr{P}^c$ *und* $\varphi(1)=1$. *Dann existiert genau eine stetige, injektive Abbildung*

$$\psi: \tilde{X} \to X$$

mit $\varphi(p) = p \circ \psi$ *für alle* $p \in \mathscr{P}^c$.

Ferner gilt:

1) ψ *ist eine Homöomorphie von* $\tilde{X}$ *auf* $\psi(\tilde{X})$.

2) $\psi(\tilde{X})$ *ist abgeschlossen in* X.

3) *Sei* X' *das Innere von* $\psi(\tilde{X})$*; dann vermittelt*

$$\psi|_{\psi^{-1}(X')}: \psi^{-1}(X') \to X'$$

eine biharmonische Abbildung zwischen den Räumen $(\psi^{-1}(X'), \tilde{\mathscr{H}}^*|_{\psi^{-1}(X')})$ *und* $(X', \mathscr{H}^*|_{X'})$.★

Beweis. 1. Schritt: Existenz und Eindeutigkeit der Injektion ψ.

Seien F bzw. $\tilde{F}$ die Ordnungsdualräume von $E := \mathscr{P}^c - \mathscr{P}^c$ bzw. von $\tilde{E} := \tilde{\mathscr{P}}^c - \tilde{\mathscr{P}}^c$, d.h. $F = E_+^* - E_+^*$. Versieht man F und $\tilde{F}$ mit den (automatisch Hausdorffschen) schwachen Topologien $\sigma(F, E)$ und $\sigma(\tilde{F}, \tilde{E})$, so ist die transponierte Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi^*: \tilde{F} &\to F \\ \lambda &\mapsto \lambda \circ \varphi' \end{aligned}$$

stetig und injektiv. Dabei bezeichnet wieder φ' die Fortsetzung von φ auf E.

Zudem ist φ^* als Abbildung von $\tilde{F}$ auf $\varphi^*(\tilde{F})$ offen, also eine Homöomorphie. Wegen der Surjektivität von φ' bilden nämlich die Mengen

$$U := \bigcap_{i=1}^{n} \{\tilde{\lambda} \in \tilde{F} : \tilde{\lambda}(\varphi'(p_i)) > a_i\}$$

★ Wie (1.13) zeigen wird, kann auch der Fall $X' = \emptyset$ eintreten

($n\in\mathbb{N}$, $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$, $p_1,\dots,p_n\in E$) eine Basis der Topologie von $\tilde{F}$; für jede solche Menge U aber ist

$$\begin{aligned}\varphi^*(U) &= \bigcap_{i=1}^{n} \varphi^*(\{\tilde{\lambda}\in\tilde{F}:\tilde{\lambda}(\varphi'(p_i))>a_i\}) \\ &= \bigcap_{i=1}^{n} \{\lambda\in F:\lambda(p_i)>a_i\}\cap\varphi^*(\tilde{F})\end{aligned}$$

offen in $\varphi^*(\tilde{F})$.

Da mit $\tilde{\lambda}\in\tilde{F}$ auch $\varphi^*(\tilde{\lambda})=\tilde{\lambda}\circ\varphi'$ ein linearer Verbandshomomorphismus ist, gilt wegen $\varphi(1)=1$ und Lemma (1.7)

$$\varphi^*(\varepsilon(\tilde{X}))\subset\varepsilon(X).$$

Nun aber sind $\varepsilon(\tilde{X})$ bzw. $\varepsilon(X)$ homöomorph zu $\tilde{X}$ bzw. X, weil wegen der $\mathfrak{P}$-Harmonizität der Raum $\tilde{E}\cap\mathscr{K}(\tilde{X})$ bzw. $E\cap\mathscr{K}(X)$ bezüglich der Supremumsnorm dicht in $\mathscr{K}(\tilde{X})$ bzw. $\mathscr{K}(X)$ liegt, und daher die Topologie von $\tilde{X}$ bzw. von X die initiale Topologie bezüglich $\tilde{E}$ bzw. E ist.

Aus diesen Überlegungen folgt die Existenz einer stetigen Injektion

$$\psi:\tilde{X}\to X,$$

welche als Abbildung von $\tilde{X}$ auf $\psi(\tilde{X})$ eine Homöomorphie darstellt und die Eigenschaft

$$\varphi(p)=p\circ\psi$$

für alle Potentiale $p\in\mathscr{P}^c$ besitzt.

Die Abbildung ψ ist dadurch eindeutig bestimmt, da für jede weitere Abbildung ψ' mit $\varphi(p)=p\circ\psi'$ ($p\in\mathscr{P}^c$) die Gleichung $p\circ\psi=p\circ\psi'$, also wegen der Punktetrennung von $\mathscr{P}^c$ sogar $\psi'=\psi$ gilt.

2. Schritt: $\psi(\tilde{X})$ ist abgeschlossen in X.

Zu jedem $x\in X\setminus\psi(\tilde{X})$ existieren Potentiale $p,q\in\mathscr{P}^c$ derart, daß $f:=p-q$ in $\mathscr{K}(X)_+$ liegt und $f(x)$ strikt positiv ist. Dann aber ist nach Lemma (1.10) $f\circ\psi\in\mathscr{K}(\tilde{X})_+$, also $U:=\{f>0\}\setminus\psi(\mathrm{Supp}(f\circ\psi))$ eine offene Umgebung von x mit $U\cap\psi(\tilde{X})=\emptyset$.

Auf Grund der ersten beiden Schritte können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\tilde{X}$ als eine abgeschlossene Teilmenge von X, ψ als die natürliche Injektion von $\tilde{X}$ in X und φ als die Restriktionsabbildung

$$\begin{aligned}\varphi:\mathscr{P}^c &\to \tilde{\mathscr{P}}^c \\ p &\mapsto p|_{\tilde{X}}\end{aligned}$$

annehmen.

3. Schritt:

(a) Für jedes $h\in\mathscr{H}_+^*(X)$ ist $h|_{\tilde{X}}\in\tilde{\mathscr{H}}_+^*(\tilde{X})$.

(b) Für jedes $f\in\mathscr{K}(X)_+$ mit $f|_{X\setminus\tilde{X}}=0$ ist $(Rf)|_{\tilde{X}}=\tilde{R}(f|_{\tilde{X}})$.

(c) Zu jedem $h\in\tilde{\mathscr{H}}_+^*(\tilde{X})$ existiert ein $h'\in\mathscr{H}_+^*(X)$ mit $h'|_{X'}=h|_{X'}$.

Denn: Jedes $h\in\mathscr{H}_+^*(X)$ ist Supremum einer aufsteigend filtrierenden Teilmenge $\mathscr{F}$ von $\mathscr{P}^c$. Demnach ist $h|_{\tilde{X}}=\sup\mathscr{F}|_{\tilde{X}}\in\tilde{\mathscr{H}}_+^*(\tilde{X})$, also (a) richtig.

Zum Beweis von (b) sei $f \in \mathscr{K}(X)_+$ mit $f|_{X \setminus \tilde{X}} = 0$. Dann ist wegen (a)

$$\begin{aligned}\tilde{R}(f|_{\tilde{X}}) &= \inf\{\tilde{u} \in \tilde{\mathscr{H}}_+^*(\tilde{X}) : \tilde{u} \geqq f|_{\tilde{X}}\} \\ &\leqq \inf\{u|_{\tilde{X}} : u \in \mathscr{H}_+^*(X) \wedge u \geqq f\} = (Rf)|_{\tilde{X}}.\end{aligned}$$

Andrerseits ist $\tilde{R}(f|_{\tilde{X}}) \in \tilde{\mathscr{P}}^c$, also Restriktion eines Potentials $p \in \mathscr{P}^c$. Wegen $f|_{X \setminus \tilde{X}} = 0$ ist $f \leqq p$, also $(Rf)|_{\tilde{X}} \leqq p|_{\tilde{X}} = \tilde{R}(f|_{\tilde{X}})$.

Wir zeigen nun (c). Für jedes $h \in \tilde{\mathscr{H}}_+^*(\tilde{X})$ ist die Funktion

$$h_1 : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

$$x \mapsto \begin{cases} h(x) & \text{falls} \quad x \in X' \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

nach unten halbstetig, also Supremum eines aufsteigend filtrierenden Netzes $(f_a)_{a \in I}$ in $\mathscr{K}_+(X)$. Dann aber ist $(Rf_a)_{a \in I}$ aufsteigend filtrierend in $\mathscr{P}^c$, also

$$h' := \sup_{a \in I} Rf_a \in \mathscr{H}_+^*(X).$$

Wegen $f_a|_{\tilde{X}} \leqq h$ und (b) ist auf $\tilde{X}$ $f_a \leqq Rf_a = \tilde{R}(f_a|_{\tilde{X}}) \leqq h$ für jedes $a \in I$, d.h. h' stimmt auf X' mit h überein.

4. Schritt: Sei $X' \neq \emptyset$. Wir zeigen nun, daß für jede offene, relativ-kompakte Menge U, deren Abschluß (bezüglich X) $\bar{U}$ in X' enthalten ist, die harmonischen Maße $(\mu_x^U)_{x \in U}$ bezüglich des harmonischen Raumes $(X', \mathscr{H}^*|_{X'})$ mit den harmonischen Maßen $(\tilde{\mu}_x^U)_{x \in U}$ bezüglich $(X', \tilde{\mathscr{H}}^*|_{X'})$ übereinstimmen.

Dann sind nämlich auf X' die Garbendaten $\mathscr{H}^*$ und $\tilde{\mathscr{H}}^*$ identisch, d.h.

$$\psi|_{\psi^{-1}(X')} : \psi^{-1}(X') \to X'$$

ist tatsächlich eine biharmonische Abbildung.

Sei also U eine offene, relativ-kompakte Menge mit $\bar{U} \subset X'$ und sei $x \in U$. Für jedes $p \in \mathscr{P}^c$ ist nach [6] Proposition 5.3.3 und nach dem 3. Schritt (a)

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_x^U(p) &= \tilde{R}_{(p|_{\tilde{X}})}^{\tilde{X} \setminus U}(x) = \inf\{\tilde{u}(x) : \tilde{u} \in \tilde{\mathscr{H}}_+^*(\tilde{X}) \wedge \tilde{u} = p \ \text{ auf } \ \tilde{X} \setminus U\} \\ &\leqq \inf\{u(x) : u \in \mathscr{H}_+^*(X) \wedge u = p \ \text{ auf } \ X \setminus U\} = R_p^{X \setminus U}(x) \\ &= \mu_x^U(p).\end{aligned}$$

Andrerseits existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $\tilde{u}_n \in \tilde{\mathscr{H}}_+^*(\tilde{X})$ mit $\tilde{u}_n = p$ auf $\tilde{X} \setminus U$ und

$$\tilde{u}_n(x) \leqq \tilde{R}_{(p|_{\tilde{X}})}^{\tilde{X} \setminus U}(x) + \frac{1}{n},$$

sowie wegen 3. Schritt (c) ein $u_n' \in \mathscr{H}_+^*(X)$ mit

$$u_n'|_{X'} = \tilde{u}_n|_{X'}.$$

Wir erhalten somit wegen $u_n'|_{\partial U} = \tilde{u}_n|_{\partial U} = p|_{\partial U}$ weiter

$$\begin{aligned}\mu_x^U(p) &= \mu_x^U(u_n') \leqq u_n'(x) = \tilde{u}_n(x) \leqq \tilde{R}_{(p|_{\tilde{X}})}^{\tilde{X} \setminus U}(x) + \frac{1}{n} \\ &= \tilde{\mu}_x^U(p) + \frac{1}{n},\end{aligned}$$

d.h.

$$\mu_x^U(p) \leqq \tilde{\mu}_x^U(p).$$

Weil aber $(\mathscr{P}^c - \mathscr{P}^c)|_{\partial U}$ dicht in $\mathscr{C}(\partial U)$ bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz ist, ergibt sich

$$\mu_x^U = \tilde{\mu}_x^U,$$

und damit die Behauptung.

Daß der Fall $X' = \emptyset$ vorkommen kann, zeigt das folgende

(1.13) *Beispiel.* Sei $\tilde{X}$ das Intervall $]0, 1[\subset \mathbb{R}$. Für jede offene Teilmenge U des Raumes $X := \tilde{X} \times \mathbb{R}$ bezeichne $\mathscr{H}^*(U)$ die Menge aller nach unten halbstetigen Funktionen $u: U \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, deren Restriktion auf $U \setminus (\tilde{X} \times \{0\})$ hyperharmonisch bezüglich der klassischen harmonischen Struktur der Lösungen der Laplace-Gleichung, und deren Restriktion auf jede Zusammenhangskomponente von $U \cap (\tilde{X} \times \{0\})$ konkav ist. Der Raum $\mathscr{H}(U) := \mathscr{H}^*(U) \cap (-\mathscr{H}^*(U))$ aller harmonischen Funktionen besteht dann gerade aus allen stetigen Funktionen auf U, welche auf $U \setminus (\tilde{X} \times \{0\})$ zweimal stetig differenzierbar sind und dort die Laplace-Gleichung lösen, und welche auf $U \cap (\tilde{X} \times \{0\})$ lokal affin-linear sind.

Wie sich aus (2.5) unmittelbar ergeben wird, ist $(X, \mathscr{H}^*)$ ein harmonischer Raum.

Die Menge $\mathscr{B}_r$ aller achsenparallelen, in X offenen, relativ-kompakten Rechtecke bildet eine starke Basis regulärer Mengen.

In der Tat: Setzt man zur Abkürzung $H_1 := \tilde{X} \times \mathbb{R}_+^*$, $H_2 := \tilde{X} \times \mathbb{R}_-^*$, $T := \tilde{X} \times \{0\}$, so existieren zu jedem $U \in \mathscr{B}_r$ mit $U \cap T \neq \emptyset$ und zu jeder stetigen Randfunktion $f \in \mathscr{C}(\partial U)$ für $i = 1, 2$ Funktionen $f_i \in \mathscr{C}(\partial(U \cap H_i))$ derart, daß f_i auf $\partial U \cap H_i$ mit f übereinstimmt und auf $\bar{U} \cap T$ die Funktion f_1 gleich f_2 und zudem affin-linear ist. Sind dann h_i die Lösungen des (üblichen) Dirichletproblems von $(U \cap H_i, f_i)$, so ist die zu (U, f) gehörige harmonische Lösung H_f^U gegeben durch

$$H_f^U := \begin{cases} h_1 & \text{auf} \quad U \cap H_1 \\ f_1 & \text{auf} \quad U \cap T \\ h_2 & \text{auf} \quad U \cap H_2 . \end{cases}$$

Das Intervall $\tilde{X} :=]0, 1[$, versehen mit der harmonischen Struktur $\tilde{\mathscr{H}}^*$ der Lösungen der Laplace-Gleichung auf dem $\mathbb{R}^1$, ist durch die Abbildung

$$\psi: \tilde{X} \to X$$
$$x \mapsto (x, 0)$$

so in X eingebettet, daß die Restriktionsabbildung

$$\varphi: \mathscr{P}^c \to \tilde{\mathscr{P}}^c$$
$$p \mapsto p(\cdot, 0)$$

einen Kegelepimorphismus von $\mathscr{P}^c$ auf $\tilde{\mathscr{P}}^c$ darstellt. In der Tat: Da $\tilde{X} \times \{0\}$ eine Absorptionsmenge von X ist, wird durch φ der Kegel $\mathscr{P}^c$ wirklich in $\tilde{\mathscr{P}}^c$

abgebildet. Zum Beweis der Surjektivität von φ sei $\tilde{p} \in \tilde{\mathscr{P}}^c$. Die Fortsetzung

$$p: X \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto \tilde{p}(x)$$

auf X ist sicher superharmonisch, da für jedes $U \in \mathscr{B}_r$ die Ungleichung $\mu_x^U(p) \leqq p(x)$ für alle $x \in U$ gilt. Zudem ist p ein Potential bezüglich der klassischen harmonischen Struktur ${}^{\triangle}\mathscr{H}^*$ der Lösungen der Laplace-Gleichung auf X: Die größte harmonische Minorante h von p auf X ist konstant auf den Geraden $\{\beta\} \times \mathbb{R}, 0 < \beta < 1$ [Man beachte, daß mit h auch die Funktion $h_t : (x, y) \mapsto h(x, y+t)$ für $t \in \mathbb{R}$ eine harmonische Minorante von p ist!]. Wegen $\Delta h = 0$ ist h dann von der Form

$$(x, y) \mapsto a \cdot x + b \qquad (a, b \in \mathbb{R});$$

wegen $0 \leqq h \leqq p$ bleibt nur noch die Möglichkeit $h = 0$.

Da die kompakten Mengen $W_n = \left\{\tilde{p} \geqq \frac{1}{n}\right\} \times [-n, n]$ $(n \in \mathbb{N})$ eine Ausschöpfung des Raumes X bilden, gilt für das klassische Potential p die Gleichung

$$0 = \lim_{n \to \infty} {}^{\triangle}\hat{R}_p^{\complement W_n}.$$

Dabei ist ${}^{\triangle}\hat{R}_p^{\complement W_n}$ die Gefegte von p auf $\complement W_n$ bezüglich ${}^{\triangle}\mathscr{H}^*$. Nun aber gilt nach Definition von $\mathscr{H}^*$

$$\hat{R}_p^{\complement W_n} \leqq {}^{\triangle}\hat{R}_p^{\complement W_n},$$

so daß

$$0 = \lim_{n \to \infty} \hat{R}_p^{\complement W_n},$$

also $p \in \mathscr{P}(X)$ folgt.

Schließlich ergibt sich aus diesen Überlegungen weiter, daß auch auf X ein strikt positives, stetiges Potential existiert (nämlich zum Beispiel $p : (x, y) \mapsto x \cdot (1 - x)$).

Wir haben hier also tatsächlich die Situation von Satz (1.12) vorliegen. In diesem Fall aber ist das Innere der eingebetteten Menge $\psi(\tilde{X})$ leer; d.h. Satz (1.12) macht keine weiteren Angaben über die Beziehung der beiden harmonischen Strukturen zueinander.

Besonders übersichtlich wird die Situation dann, wenn der Kegelepimorphismus φ bijektiv ist. Wir erhalten als Korollar zu Satz (1.12) mit den Bezeichnungen von (1.11):

(1.14) **Korollar.** *Zu jedem Kegelisomorphismus*

$$\varphi : \mathscr{P}^c \to \tilde{\mathscr{P}}^c$$

zwischen den Kegeln der stetigen, reellwertigen Potentiale zweier σ-kompakter, $\mathfrak{P}$-harmonischer Räume $(X, \mathscr{H}^*)$ und $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{H}}^*)$ existiert eine strikt positive Funktion $\tilde{f} \in \mathscr{C}(\tilde{X})$ und eine biharmonische Abbildung

$$\psi : (\tilde{X}, \tilde{\mathscr{H}}^*_{\tilde{f}}) \to (X, \mathscr{H}^*).$$

Für jedes Potential $p \in \mathscr{P}^c$ ist dabei

$$\varphi(p) = \tilde{f} \cdot (p \circ \psi).$$

Beweis. Sei $p_0 \in \mathscr{P}^c$ strikt positiv. Nach Lemma (1.8) ist dann auch das Potential $\varphi(p_0)$ strikt positiv.

Anwendung von Satz (1.12) auf die Räume $(X, \mathscr{H}^*_{p_0})$, $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{H}}^*_{\varphi(p_0)})$ und den Kegelisomorphismus

$$\varphi' : \mathscr{P}^c_{p_0} \to \tilde{\mathscr{P}}^c_{\varphi(p_0)}$$

$$p \mapsto \frac{\varphi(p \cdot p_0)}{\varphi(p_0)}$$

bzw. auf $(\varphi')^{-1}$ liefert eine Homöomorphie

$$\psi : \tilde{X} \to X,$$

welche eine biharmonische Abbildung zwischen den Räumen $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{H}}^*_{\varphi(p_0)})$ und $(X, \mathscr{H}^*_{p_0})$, also auch zwischen den harmonischen Räumen $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{H}}^*_{\tilde{f}})$ und $(X, \mathscr{H}^*)$ mit $\tilde{f} = \dfrac{\varphi(p_0)}{p_0 \circ \psi} \in \mathscr{C}(\tilde{X})$ vermittelt.

Daß es nicht möglich ist, ähnliche Ergebnisse wie in Satz (1.12) zu erhalten, wenn man auf die Surjektivität von φ verzichtet und sie durch Injektivität ersetzt, zeigt das folgende

(1.15) *Beispiel.* Sei $(X, \mathscr{H}^*)$ der harmonische Raum der Lösungen der Laplace-Gleichung auf $X :=]-\infty, 1[$.

Ferner sei für jede offene, zusammenhängende Menge $U \subset X$ $\bar{\mathscr{H}}^*(U)$ die Menge aller nach unten halbstetigen Funktionen $u : U \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, deren Restriktion auf $U \cap]0, 1[$ und auf $U \cap]-\infty, 0[$ konkav und – falls $0 \in U$ – deren Restriktion auf $U \cap [0, 1[$ antiton ist.

Durch $\bar{\mathscr{H}}^*$ wird auf X eine zweite harmonische Struktur definiert. Der zu dem $\mathfrak{P}$-harmonischen Raum $(X, \bar{\mathscr{H}}^*)$ gehörige Kegel $\bar{\mathscr{P}}^c$ aller stetigen, reellwertigen Potentiale enthält den Kegel $\mathscr{P}^c$. Für die harmonischen Funktionen aber gelten weder die Inklusion $\mathscr{H}(X) \subset \bar{\mathscr{H}}(X)$ noch die Inklusion $\bar{\mathscr{H}}(X) \subset \mathscr{H}(X)$: Die Funktion $x \mapsto \inf(x, 0)$ gehört nämlich zu $\bar{\mathscr{H}}(X) \setminus \mathscr{H}(X)$, die Funktion $x \mapsto x$ dagegen zu $\mathscr{H}(X) \setminus \bar{\mathscr{H}}(X)$.

Bleibt noch die Frage: Lassen sich ähnliche Sätze beweisen, wenn die Kegel $\mathscr{P}^c$ und $\tilde{\mathscr{P}}^c$ durch andere (Unterkegel der Potential-) Kegel ersetzt werden? In §4 werden wir sehen, daß an die Stelle der Kegel $\mathscr{P}^c$, $\tilde{\mathscr{P}}^c$ die Kegel aller reellwertigen (feinen) Potentiale treten können. Andrerseits zeigt das folgende Beispiel von C. Constantinescu, daß es zwischen zwei $\mathfrak{P}$-harmonischen Räumen keine biharmonische Abbildung geben muß, wenn die Kegel *aller* Potentiale oder die Kegel der global definierten superharmonischen Funktionen isomorph sind.

(1.16) *Beispiel.* Seien $X = [0, 1[$, $\tilde{X} =]0, 1[$. Für jedes in X offene Intervall V setzen wir $m_V := \sup\left\{m \in \mathbb{N} : \frac{1}{m} \in V\right\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, falls $V \cap \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ nicht leer ist, andernfalls $m_V := 1$.

Eine stetige Funktion h auf V gehöre genau dann zu $\mathscr{H}(V)$ $(=\tilde{\mathscr{H}}(V)$, falls $0 \notin V)$, wenn h auf $V \cap \left[\frac{1}{m_V}, 1\right[$ konstant und auf $V \cap \left[0, \frac{1}{m_V}\right]$ affin-linear ist $\left(\frac{1}{\infty} := 0\right)$.

Bezüglich der dadurch definierten Garbendaten $\mathscr{H}$ auf X und $\tilde{\mathscr{H}}$ auf $\tilde{X}$ sind alle Intervalle $]a, b[$ mit $0 < a < b < 1$, sowie (für $\mathscr{H}$) die Intervalle $[0, a[$, $0 < a < 1$, regulär.

Eine nach unten halbstetige, nach unten endliche Funktion auf einer in X bzw. in $\tilde{X}$ offenen, zusammenhängenden Menge V ist genau dann hyperharmonisch, wenn sie auf allen Intervallen $V \cap \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[$, $n \in \mathbb{N}$, konkav und auf $V \cap \left[\frac{1}{m_V}, 1\right]$ monoton fallend ist.

Die Potentialkegel bestehen daher aus allen positiven superharmonischen Funktionen u mit $\lim\limits_{t \to 1} u(t) = 0$; die Restriktionsabbildungen

$$\varphi : \mathscr{P}(X) \to \tilde{\mathscr{P}}(\tilde{X})$$

bzw.

$$\varphi : \mathscr{S}(X) \to \tilde{\mathscr{S}}(\tilde{X})$$

vermitteln daher eine Isomorphie der Kegel $\mathscr{P}(X)$ und $\tilde{\mathscr{P}}(\tilde{X})$ bzw. $\mathscr{S}(X)$ und $\tilde{\mathscr{S}}(\tilde{X})$, obwohl die Grundräume X und $\tilde{X}$ nicht homöomorph sind.

Hier wird durch

$$p \mapsto p|_{]0,1[}$$

kein Kegelepimorphismus von $\mathscr{P}^c$ auf $\tilde{\mathscr{P}}^c$ definiert: Zum Beispiel besitzt die Funktion $\tilde{p} \in \tilde{\mathscr{P}}^c$ mit

$$\tilde{p}(x) := 2 \cdot n - n \cdot (n+1) \cdot x \quad \text{für} \quad \frac{1}{n+1} \leqq x < \frac{1}{n}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

kein φ-Urbild in $\mathscr{P}^c$.

§ 2. Struktur der Einbettung

In diesem Paragraphen beschäftigen wir uns zunächst mit der Frage, wie sich in der Situation von Satz (1.12) der eingebettete Raum $\psi(\tilde{X})$ in den harmonischen Raum $(X, \mathscr{H}^*)$ einfügt. Wie die Beispiele (1.3) und (1.13) schon vermuten lassen, gilt der folgende

(2.1) **Satz.** *Seien $(X, \mathscr{H}^*)$ und $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{H}}^*)$ zwei $\mathfrak{P}$-harmonische Räume mit abzählbarer Basis und sei ψ eine Injektion von $\tilde{X}$ in X derart, daß durch die Zuordnung*

$$\varphi : p \mapsto p \circ \psi$$

ein Kegelepimorphismus von $\mathscr{P}^c$ auf $\tilde{\mathscr{P}}^c$ definiert wird.

Dann ist jeder Punkt $x \in \partial(\psi(\tilde{X}))$ ein regulärer Randpunkt der offenen Menge $X \setminus \psi(\tilde{X})$.

Beweis. Da die beiden harmonischen Räume und der Kegelepimorphismus φ die Voraussetzungen von (1.12) erfüllen, ist $\psi(\tilde{X})$ abgeschlossen in X.

Nach dem 3. Schritt (a) des Beweises von Satz (1.12) gilt $\mathscr{H}_+^*(X)\circ\psi\subset\tilde{\mathscr{H}}_+^*(\tilde{X})$; mit anderen Worten: ψ ist stetig bezüglich der feinen Topologien auf $\tilde{X}$ und X.

Weil es in der feinen Topologie keine isolierten Punkte gibt, ist für Randpunkte x von $\psi(\tilde{X})$ die einpunktige Menge $\psi^{-1}(\{x\})$ nicht fein offen, also $(X\setminus\psi(\tilde{X}))\cup\{x\}$ keine feine Umgebung von x. Dies bedeutet, daß x im feinen Abschluß von $\complement((X\setminus\psi(\tilde{X}))\cup\{x\})=\psi(\tilde{X})\setminus\{x\}$ liegen muß, $\psi(\tilde{X})$ also in x nicht dünn sein kann.

(2.2) **Korollar.** $\mathscr{H}_+^*(X)\circ\psi=\tilde{\mathscr{H}}_+^*(\tilde{X})$.

Beweis. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß sich jede Funktion $\tilde{h}\in\tilde{\mathscr{H}}_+^*(\tilde{X})$ faktorisieren läßt als $\tilde{h}=h\circ\psi$ mit $h\in\mathscr{H}_+^*(X)$. In der Tat ist $\tilde{h}\in\tilde{\mathscr{H}}_+^*(\tilde{X})$ Supremum einer aufsteigend filtrierenden Familie $(\tilde{p}_a)_{a\in I}$ von Potentialen in $\tilde{\mathscr{P}}^c$. Jedes dieser Potentiale $\tilde{p}_a$ läßt sich darstellen als

$$\tilde{p}_a=\hat{R}_{f_a}^{\psi(\tilde{X})}\circ\psi\,.$$

mit $f_a\in\varphi^{-1}(\tilde{p}_a)\subset\mathscr{P}^c$; denn wegen Satz (2.1) gilt $\hat{R}_{f_a}^{\psi(\tilde{X})}=R_{f_a}^{\psi(\tilde{X})}=f_a$ auf $\psi(\tilde{X})$, also $\hat{R}_{f_a}^{\psi(\tilde{X})}\circ\psi=\tilde{p}_a$. Dann aber erhalten wir mit $h:=\sup\limits_{a\in I}\hat{R}_{f_a}^{\psi(\tilde{X})}\in\mathscr{H}_+^*(X)$ die gewünschte Faktorisierung $\tilde{h}=h\circ\psi$.

(2.3) **Korollar.** *Jede superharmonische Funktion $\tilde{s}\in\tilde{\mathscr{S}}(\tilde{U})$ auf einer offenen Teilmenge $\tilde{U}$ von $\tilde{X}$ besitzt „lokal eine hyperharmonische Fortsetzung auf X"; d.h., zu jeder offenen, relativ-kompakten Menge $\tilde{V}$, deren Abschluß $\bar{\tilde{V}}$ in $\tilde{U}$ enthalten ist, existiert eine hyperharmonische Funktion s auf $V:=\psi(\tilde{V})\cup(X\setminus\psi(\tilde{X}))$ mit*

$$s\circ\psi=\tilde{s}\quad \textit{auf}\quad \tilde{V}.$$

Ist $\tilde{s}\in\tilde{\mathscr{S}}(\tilde{U})$ stetig und reellwertig, so kann auch s stetig, reellwertig und somit superharmonisch gewählt werden.

Wir werden später sehen [Beispiel (2.6)], daß es (mit den obigen Bezeichnungen) zu einer beliebigen superharmonischen Funktion $\tilde{s}\in\tilde{\mathscr{S}}(\tilde{U})$ im allgemeinen keine *super*harmonische Funktion s auf V gibt mit $s\circ\psi|_{\tilde{V}}=\tilde{s}|_{\tilde{V}}$. Insbesondere ist auch die wegen (2.2) naheliegende Vermutung, daß die Kegel $\tilde{\mathscr{S}}_+(\tilde{X})$ und $\mathscr{S}_+(X)\circ\psi$ übereinstimmen, falsch.

Beweis von (2.3). Nach dem Fortsetzungssatz von Hervé gibt es Potentiale $\tilde{p}\in\tilde{\mathscr{P}}^c$ und $\tilde{q}\in\tilde{\mathscr{P}}(\tilde{X})$ mit

$$\tilde{q}=\tilde{s}+\tilde{p}\quad \text{auf}\quad \tilde{V}\,.$$

Dabei kann – wie zum Beispiel der Beweis von [6] Theorem 2.3.2 zeigt – das Potential $\tilde{p}$ so gewählt werden, daß $\tilde{p}=\tilde{R}(\tilde{g}\cdot\tilde{p})$ ist mit einer Funktion $\tilde{g}\in\mathscr{K}(\tilde{X})$, $0\leqq\tilde{g}\leqq 1$, deren Träger zu $\bar{\tilde{V}}$ fremd ist. Nach Voraussetzung und Korollar (2.2) gibt es ein Potential $p\in\mathscr{P}^c$ und eine Funktion $q\in\mathscr{H}_+^*(X)$ mit $p\circ\psi=\tilde{p}$, $q\circ\psi=\tilde{q}$, sowie eine stetige Funktion $g\in\mathscr{K}_+(X)$ mit $g=0$ auf $X\setminus\psi(\tilde{X})$ und $g\circ\psi=\tilde{g}$. Durch

$$s:=q|_V-R(g\cdot p)|_V$$

wird daher eine hyperharmonische Funktion s auf V definiert, die – wie der 3. Schritt (b) des Beweises von Satz (1.12) zeigt – auf $\tilde{V}$ die Bedingung

$$s\circ\psi=q\circ\psi-R(g\cdot p)\circ\psi=\tilde{q}-\tilde{R}((g\circ\psi)\cdot(p\circ\psi))=\tilde{s}$$

erfüllt.

Falls $\tilde{s}$ stetig und endlich ist, kann auch $\tilde{q}$ stetig und endlich und damit $q\in\mathscr{P}^c$ gewählt werden, was $s\in\mathscr{S}(V)\cap\mathscr{C}(V)$ nach sich zieht.

Das eben bewiesene Korollar besagt, daß mit den obigen Bezeichnungen $\mathscr{S}(\tilde{U})|_{\tilde{V}}\subset\mathscr{H}^*(V)\circ\psi|_{\tilde{V}}$ ist. Gleichheit gilt hier im allgemeinen sicher nicht, denn in Beispiel (1.3) ist

$$h:]-1,1[\to\mathbb{R}$$
$$x\mapsto 1+x$$

in $\mathscr{H}(]-1,1[)$, jedoch $h|_{[0,1[}$ nicht in $\tilde{\mathscr{S}}([0,1[)$ enthalten.

Dieses Beispiel zeigt weiter, daß die Abbildung ψ des Satzes (1.12) nicht notwendig eine harmonische Abbildung sein muß.

Genauer kennzeichnet der folgende Satz die Harmonizität von ψ.

(2.4) **Satz.** *In der Situation von Satz* (2.1) *ist ψ genau dann eine harmonische Abbildung, wenn $\psi(\tilde{X})$ eine Absorptionsmenge von X ist.*

Beweis. Wir können wieder ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $\tilde{X}\subset X$ und ψ die natürliche Einbettungsabbildung ist.

Sei zunächst $\psi:\tilde{X}\to X$ harmonisch.

In dem $\mathfrak{P}$-harmonischen Raum $(X,\mathscr{H}^*)$ gibt es ein strikt positives Potential $p\in\mathscr{P}^c$. Für jede kompakte Menge $K\subset X\setminus\tilde{X}$ ist die Restriktion h_K von $\hat{R}_p^K$ auf $X\setminus K$ harmonisch, also gehört nach Voraussetzung und (1.5.3) $h_K|_{\tilde{X}}$ zu $\tilde{\mathscr{H}}_+(\tilde{X})$. Da h_K auf $\tilde{X}$ von dem Potential $p|_{\tilde{X}}\in\tilde{\mathscr{P}}^c$ majorisiert wird, ist $\hat{R}_p^K=h_K=0$ auf $\tilde{X}$. Folglich stellt $\tilde{X}$ das Nullstellengebilde einer positiven, hyperharmonischen Funktion, nämlich der Funktion

$$q:=\hat{R}_p^{X\setminus\tilde{X}}=\sup\{\hat{R}_p^K:K\subset X\setminus\tilde{X}\text{ kompakt}\}$$

dar, ist also eine Absorptionsmenge von X.

Wir setzen nun umgekehrt voraus, daß $\tilde{X}$ Absorptionsmenge von X ist.

Nach [6] Example 6.1.8 induziert $(X,\mathscr{H}^*)$ durch Restriktion des Garbendatums $\mathscr{H}^*$ auf $\tilde{X}$ eine harmonische Struktur $\tilde{\tilde{\mathscr{H}}}{}^*$ mit $\tilde{\tilde{\mathscr{H}}}{}^*_+(\tilde{X})=\mathscr{H}^*_+(X)|_{\tilde{X}}$, welche die Einbettungsabbildung $\psi:(\tilde{X},\tilde{\tilde{\mathscr{H}}}{}^*)\to(X,\mathscr{H}^*)$ harmonisch macht.

Wegen Korollar (2.2) ist daher $\tilde{\tilde{\mathscr{H}}}{}^*_+(\tilde{X})=\tilde{\mathscr{H}}^*_+(\tilde{X})$, so daß ähnliche Überlegungen wie im 4. Schritt des Beweises zu Satz (1.12) auf die Gleichheit der harmonischen Strukturen $\tilde{\tilde{\mathscr{H}}}{}^*$ und $\tilde{\mathscr{H}}^*$ führen.

Damit ist die Harmonizität der Abbildung

$$\psi:(\tilde{X},\tilde{\mathscr{H}}^*)\to(X,\mathscr{H}^*)$$

nachgewiesen.

(2.5) *Bemerkung.* Wie wir schon gesehen haben, ist die Einbettungsabbildung $i:(\tilde{X},\tilde{\mathscr{H}}^*)\to(X,\mathscr{H}^*)$ der harmonischen Räume $(X,\mathscr{H}^*)$ und $(\tilde{X},\tilde{\mathscr{H}}^*)$ aus Beispiel

(1.3) nicht harmonisch. Ersetzt man jedoch den Zielraum $(X, \mathscr{H}^*)$ durch den harmonischen Raum $(X, \bar{\mathscr{H}}^*)$ aus Beispiel (1.15) (dessen harmonische Struktur auf $\tilde{X}$ mit $\tilde{\mathscr{H}}^*$ und auf $X \setminus \tilde{X}$ mit $\mathscr{H}^*|_{X \setminus \tilde{X}}$ übereinstimmt), so wird $\tilde{X}$ eine Absorptionsmenge von $(X, \bar{\mathscr{H}}^*)$; jetzt ist die Abbildung

$$i:(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{H}}^*) \to (X, \bar{\mathscr{H}}^*)$$

harmonisch.

Dieses Beispiel ist ein Spezialfall des folgenden, allgemeinen Vorgehens: Seien $(X, \mathscr{H}^*)$ und $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{H}}^*)$ zwei $\mathfrak{P}$-harmonische Räume derart, daß der Grundraum $\tilde{X}$ eine abgeschlossene Teilmenge von X und jeder Randpunkt von $\tilde{X}$ regulärer Randpunkt von $X \setminus \tilde{X}$ ist. Insbesondere sind diese Voraussetzungen nach (1.12) und (2.1) dann erfüllt, wenn X ein $\mathfrak{P}$-harmonischer Raum mit abzählbarer Basis und die Restriktionsabbildung auf $\tilde{X}$ ein Kegelepimorphismus von $\mathscr{P}^c$ auf $\tilde{\mathscr{P}}^c$ ist.

Für jede offene Menge $U \subset X$ bezeichnen wir mit $\bar{\mathscr{H}}^*(U)$ die Menge aller nach unten halbstetigen Funktionen $u: U \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, deren Restriktion auf $U \cap \tilde{X}$ zu $\tilde{\mathscr{H}}^*(U \cap \tilde{X})$ und deren Restriktion auf $U \setminus \tilde{X}$ zu $\mathscr{H}^*(U \setminus \tilde{X})$ gehört. Dann lassen sich folgende Aussagen beweisen:

1. $(X, \bar{\mathscr{H}}^*)$ ist ein harmonischer Raum.
2. $\tilde{X}$ ist Absorptionsmenge von $(X, \bar{\mathscr{H}}^*)$ und die natürlichen Einbettungsabbildungen

$$i:(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{H}}^*) \qquad \to (X, \bar{\mathscr{H}}^*),$$
$$i':(X \setminus \tilde{X}, \mathscr{H}^*|_{X \setminus \tilde{X}}) \to (X, \bar{\mathscr{H}}^*)$$

sind harmonische Abbildungen.

3. $\bar{\mathscr{H}}^*$ stimmt genau dann mit $\mathscr{H}^*$ überein, wenn die Einbettungsabbildung i des Raumes $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{H}}^*)$ in den Ausgangsraum $(X, \mathscr{H}^*)$ schon harmonisch war.
4. Wenn die Räume $(X, \mathscr{H}^*)$ und $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{H}}^*)$ eine Basis regulärer Mengen besitzen, so trifft dies auch für den Raum $(X, \bar{\mathscr{H}}^*)$ zu.

Mit Hilfe dieser Bemerkung läßt sich nun leicht das angekündigte (Gegen-) Beispiel zu Korollar (2.3) angeben:

(2.6) *Beispiel.* Sei $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{H}}^*)$ der in Beispiel (1.16) mit $(X, \mathscr{H}^*)$ bezeichnete harmonische Raum (mit $\tilde{X} = [0, 1[$).

Versieht man $X :=]-\infty, 1[$ mit der klassischen harmonischen Struktur $\mathscr{H}^*$, so erfüllen die beiden harmonischen Räume $(X, \mathscr{H}^*)$ und $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{H}}^*)$ die Voraussetzungen der obigen Bemerkung.

Der zugehörige, oben definierte harmonische Raum $(X, \bar{\mathscr{H}}^*)$ ist ein $\mathfrak{P}$-harmonischer Raum, dessen Kegel $\bar{\mathscr{P}}^c$ aller stetigen, reellwertigen Potentiale durch die Restriktionsabbildung

$$p \to p|_{\tilde{X}}$$

surjektiv auf den entsprechenden Potentialkegel $\tilde{\mathscr{P}}^c$ abgebildet wird.

Wir haben also hier die Ausgangssituation von (2.3) vorliegen.

Die Funktion $\tilde{s}$, definiert durch

$$\tilde{s}(x) := \begin{cases} 2n - n(n+1)x & \text{für} \quad \frac{1}{n+1} \leqq x < \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N} \\ \infty & \text{für} \quad x = 0 \end{cases},$$

ist superharmonisch auf $\tilde{X}$; ihre Restriktion auf ein Intervall $[0, a[$ $(0 < a \leqq 1)$ besitzt jedoch keine $\bar{\mathscr{H}}^*$-superharmonische Fortsetzung auf eine $[0, a[$ umfassende offene Menge $V \subset X$; die einzige $\tilde{s}$ fortsetzende Funktion $s \in \bar{\mathscr{H}}^*(X)$ ist konstant $= \infty$ auf $X \setminus \tilde{X}$.

§ 3. Differenzierbarkeit einer harmonischen Abbildung

In den Anwendungen auftretende harmonische Räume sind meistens durch Lösungsräume von Differentialgleichungen gegeben [vgl. die Beispiele (1.3), (1.13) und (1.15)].

Die den harmonischen Räumen $(X, \mathscr{H}^*)$, $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{H}}^*)$ zugrundeliegenden topologischen Räume X, $\tilde{X}$ müssen daher eine zusätzliche „Differenzierbarkeitsstruktur" tragen.

Um Differenzierbarkeitseigenschaften einer „abstrakten" offenen harmonischen Abbildung untersuchen zu können, treffen wir daher die zusätzlichen Voraussetzungen, daß X eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $\tilde{X}$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m (n, m \in \mathbb{N})$ ist mit solchen harmonischen Strukturen $\mathscr{H}^*$, $\tilde{\mathscr{H}}^*$, daß jeweils eine Basis regulärer Mengen existiert.
Zur Vorbereitung des Hauptergebnisses beweisen wir zunächst das folgende

(3.1) **Lemma.** *Enthält das Garbendatum $\mathscr{H}$ der harmonischen Funktionen auf X „genügend viele" $\mathscr{C}^2$-Funktionen im Sinne von* [3] p. 80, *so existiert eine dichte offene Teilmenge X_0 von X derart, daß zu jedem $x_0 \in X_0$ eine offene Umgebung U von x_0 und Funktionen $h_1, \ldots, h_n \in \mathscr{H}(U)$ existieren mit*

$$\det\left(\left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x_0)\right)_{1 \leqq i, j \leqq n}\right) \neq 0 .$$

Beweis. Nach [3] Théorèmes 1.2 und 2.2 existieren eine dichte offene Teilmenge X'_0 von X und ein nicht vollständig ausgearteter elliptischer Differentialoperator ([3] p. 75)

$$L : u \mapsto \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} + a \cdot u$$

auf X'_0 mit stetigen Koeffizientenfunktionen a_{ij}, a_i, a $(1 \leqq i, j \leqq n)$, so daß für jede offene Teilmenge U von X'_0

$$\mathscr{H}(U) \cap \mathscr{C}^2(U) = \{h \in \mathscr{C}^2(U) : L(h) = 0\}$$

ist.

Für jedes $x \in X'_0$, jede offene Umgebung U von x und je n Funktionen $h_1, \ldots, h_n \in \mathscr{H}(U) \cap \mathscr{C}^1(U)$ bezeichne $p(x; U; h_1, \ldots, h_n)$ den Rang der Matrix

$$\left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(x)\right)_{1 \leqq i, j \leqq n}$$

und $N(x)$ das Maximum aller Werte $p(x; U; h_1, \ldots, h_n)$, wenn U alle offenen Umgebungen von x durchläuft und $h_1, \ldots, h_n$ Funktionen in $\mathscr{H}(U) \cap \mathscr{C}^1(U)$ sind.

Die so definierte Abbildung

$$N: X_0' \to \mathbb{N} \cup \{0\}$$

ist nach unten halbstetig, da für jede Zahl β die Menge $\{N > \beta\}$ offen ist.

Um zu beweisen, daß die offene Menge

$$X_0 := \{N = n\} = \{N > n-1\}$$

dicht in X_0' (und damit in X) ist, zeigen wir, daß das Innere der in X_0' abgeschlossenen Menge

$$X_1 := \{N \leqq n-1\}$$

leer ist.

Andernfalls gäbe es eine offene, nicht-leere Teilmenge U_1 von X_1. Die Funktion N nimmt in einem Punkt $x \in U_1$ ihr Supremum $m \in \{0, \ldots, n-1\}$ auf U_1 an. Nach Definition von N existieren demnach eine offene Menge $U \subset U_1$ mit $x \in U$ und $h_1', \ldots, h_n' \in \mathscr{H}(U) \cap \mathscr{C}^1(U)$ mit

$$m = N(x) = \operatorname{rang}\left(\left(\frac{\partial h_i'}{\partial x_j}(x)\right)_{1 \leqq i, j \leqq n}\right).$$

Wählt man U genügend klein, so gibt es also $h_1, \ldots, h_m \in \mathscr{H}(U) \cap \mathscr{C}^1(U)$, sowie eine Indexauswahl

$$\pi: \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$$

(π injektiv) mit

$$(*) \quad \det\left(\left(\frac{\partial h_i}{\partial x_{\pi(j)}}(y)\right)_{1 \leqq i, j \leqq m}\right) \neq 0$$

für alle $y \in U$. Insbesondere ist $N = m$ auf U.

Wieder nach Definition von N ist nun für jede offene Menge $V \subset U$, jedes $h \in \mathscr{H}(V) \cap \mathscr{C}^1(V)$ und jedes $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \pi(\{1, \ldots, m\})$

$$D_i(h) := \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial x_{\pi(1)}} & \cdots & \dfrac{\partial h_1}{\partial x_{\pi(m)}} & \dfrac{\partial h_1}{\partial x_i} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial h_m}{\partial x_{\pi(1)}} & \cdots & \dfrac{\partial h_m}{\partial x_{\pi(m)}} & \dfrac{\partial h_m}{\partial x_i} \\ \dfrac{\partial h}{\partial x_{\pi(1)}} & \cdots & \dfrac{\partial h}{\partial x_{\pi(m)}} & \dfrac{\partial h}{\partial x_i} \end{pmatrix}$$

$$= 0 \quad \text{auf} \quad V.$$

Die Zuordnung

$$u \mapsto D_i(u)$$

beschreibt einen linearen Differentialoperator erster Ordnung auf U mit stetigen Koeffizientenfunktionen. Wegen $(*)$ ist $D_i \neq 0$, für jede offene Teilmenge V von U und jedes $h \in \mathscr{H}(V) \cap \mathscr{C}^2(V)$ aber

$$L(h) = (L + D_i)(h) = 0,$$

was nach [3] Théorème 2.3 (Eindeutigkeit von L) unmöglich ist.

(3.2) **Satz.** *Seien $(X, \mathscr{H}^*)$ und $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{H}}^*)$ zwei harmonische Räume mit einer Basis regulärer Mengen auf den offenen Teilmengen X des $\mathbb{R}^n$ und $\tilde{X} \subset \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N})$. Sind für ein $k \in \mathbb{N}$ alle auftretenden harmonischen Funktionen k-mal stetig differenzierbar und gibt es im Falle $k=1$ auf X „genügend viele" harmonische $\mathscr{C}^2$-Funktionen, so ist jede offene harmonische Abbildung*

$$\psi: \tilde{X} \to X$$

auf einer dichten Teilmenge $\tilde{X}_0$ von $\tilde{X}$ k-mal stetig differenzierbar.

Beweis. Sei X_0 wie in (3.1), $\tilde{X}_0 := \psi^{-1}(X_0)$. Wegen der Stetigkeit und Offenheit von ψ ist $\tilde{X}_0$ eine dichte offene Teilmenge von $\tilde{X}$.

Nach Definition von X_0 gibt es zu jedem Punkt $x_0 \in \tilde{X}_0$ eine offene Umgebung U von $\psi(x_0)$ und n Funktionen $h_1, \ldots, h_n \in \mathscr{H}(U)$ mit

$$\det\left(\left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(y)\right)_{1 \leq i, j \leq n}\right) \neq 0$$

für alle $y \in U$.

Wählt man U genügend klein, so definiert

$$\begin{aligned} H: U &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto (h_1(x), \ldots, h_n(x)) \end{aligned}$$

einen $\mathscr{C}^k$-Diffeomorphismus auf U mit ebenfalls k-mal stetig differenzierbarer Umkehrabbildung $H': H(U) \to U$. Auf der offenen Menge $\tilde{U} := \psi^{-1}(U)$ ist

$$\psi = H' \circ H \circ \psi = H' \circ (h_1 \circ \psi, \ldots, h_n \circ \psi),$$

d.h. ψ ist nach Voraussetzung auf $\tilde{U}$ k-mal stetig differenzierbar.

(3.3) *Bemerkung.* Im allgemeinen ist in der Situation von Satz (3.2) die Abbildung ψ nicht auf ganz $\tilde{X}$ (sondern eben nur auf der dichten Teilmenge $\tilde{X}_0$) differenzierbar.

Dies zeigt das Beispiel von J.-M. Bony [vgl. [3] p. 78] eines harmonischen Raumes auf $X = \mathbb{R}$, dessen harmonische Funktionen von der Form $x \mapsto a \cdot f(x) + b$ sind. Dabei ist f eine streng isotone $\mathscr{C}^\infty$-Funktion auf $\mathbb{R}$.

Versieht man die offene Menge $\tilde{X} = f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ mit der harmonischen Struktur der Lösungen der Laplace-Gleichung, so ist

$$f: X \to \tilde{X}$$

eine biharmonische Abbildung. Die Umkehrabbildung

$$f^{-1}: \tilde{X} \to X$$

erfüllt also alle Voraussetzungen von (3.2); sie ist aber nur in den Punkten $\tilde{x} \in \tilde{X}$ differenzierbar, für die $f'(f^{-1}(\tilde{x})) \neq 0$ ist.

§ 4. Isomorphie der Kegel der (feinen) reellwertigen Potentiale

Im folgenden seien $(X, \mathscr{H}^*)$ und $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{H}}^*)$ zwei σ-kompakte, $\mathfrak{P}$-harmonische Räume, P und $\tilde{P}$ inf-stabile, konvexe Unterkegel der Kegel $\mathscr{P}_{\mathbb{R}}$ bzw. $\tilde{\mathscr{P}}_{\mathbb{R}}$ aller reellwertigen Potentiale auf X bzw. $\tilde{X}$ mit $\mathscr{P}^c \subset P$, $\tilde{\mathscr{P}}^c \subset \tilde{P}$ und sei

$$\varphi: P \to \tilde{P}$$

ein Kegelisomorphismus mit $1 \in P$ und $\varphi(1) = 1$.

Wieder läßt sich φ zu einer Isomorphie φ' der Rieszschen Räume $E := P - P$ und $\tilde{E} := \tilde{P} - \tilde{P}$ fortsetzen; die zu φ' gehörige transponierte Abbildung φ^* ist ein Isomorphismus des Ordnungsdualraumes $\tilde{F} := \tilde{E}_+^* - \tilde{E}_+^*$ von $\tilde{E}$ auf den Ordnungsdualraum $F := E_+^* - E_+^*$ von E.

Wie in §1 ist $\lambda_{\tilde{x}} := \varphi^*(\varepsilon_{\tilde{x}})$ für jedes $\tilde{x} \in \tilde{X}$ ein linearer Verbandshomomorphismus, die Restriktion von $\lambda_{\tilde{x}}$ auf $\mathscr{P}^c$ also nach Lemma (1.7) ein Punktauswertungsfunktional ε_x mit $x =: \psi(\tilde{x}) \in X$. Da aber jedes Potential $p \in P$ Supremum einer aufsteigend filtrierenden Familie $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}^c$ ist, erhalten wir mit (1.2.5) die Gleichung

$$\lambda_{\tilde{x}}(p) = \varphi(p)(\tilde{x}) = \sup_{q \in \mathscr{F}} \varphi(q)(\tilde{x}) = \sup_{q \in \mathscr{F}} \varphi^*(\varepsilon_{\tilde{x}})(q) = \sup_{q \in \mathscr{F}} q(x) = \varepsilon_x(p),$$

also $\varphi^*(\varepsilon_{\tilde{x}}) = \varepsilon_{\psi(\tilde{x})}$ auf ganz P.

Die Abbildung φ^* bildet daher die Menge $\{\varepsilon_{\tilde{x}} : \tilde{x} \in \tilde{X}\}$ in die Menge aller Punktauswertungsfunktionale $\{\varepsilon_x : x \in X\}$ ab. Da diese Überlegungen auch auf die Umkehrabbildung φ^{-1} anwendbar sind, existiert eine Bijektion

$$\psi: \tilde{X} \to X$$

mit $\varphi(p) = p \circ \psi$ für alle $p \in P$.

Wir können daher für die folgenden Überlegungen zur Vereinfachung der Schreibweise $X = \tilde{X}$ (als Mengen), $\psi = \mathrm{id}$ und $P = \tilde{P}$ annehmen.

Die nächsten Hilfssätze dienen dem Nachweis, daß die Topologie $\mathscr{T}$ des Raumes $(X, \mathscr{H}^*)$ und die Topologie $\tilde{\mathscr{T}}$ von $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{H}}^*)$ identisch sind. Dann ist nämlich $\mathscr{P}^c = \tilde{\mathscr{P}}^c$, so daß aus Korollar (1.14) die Biharmonizität von ψ folgt.

(4.1) **Lemma.** *Es existiert eine Ausschöpfung $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von $(X, \mathscr{T})$ mit $\mathscr{T}$-kompakten Mengen und eine Ausschöpfung $(\tilde{K}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{T}})$ mit $\tilde{\mathscr{T}}$-kompakten Mengen derart, daß auf $G_n := K_n \cap \tilde{K}_n$ die Topologien $\mathscr{T}$ und $\tilde{\mathscr{T}}$ übereinstimmen ($n \in \mathbb{N}$).*

Jedes G_n ist sowohl $\mathscr{T}$- als auch $\tilde{\mathscr{T}}$-kompakt; die Mengen G_n, $n \in \mathbb{N}$, überdecken den Raum X.

Beweis. Da $\mathscr{P}^c$ und $\tilde{\mathscr{P}}^c$ adaptierte Kegel sind, existieren ein Potential $u \in \mathscr{P}^c$ und ein Potential $\tilde{u} \in \tilde{\mathscr{P}}^c$ derart, daß die Mengen $K_n := \{u \leqq n\}$ bzw. $\tilde{K}_n := \{\tilde{u} \leqq n\}$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{T}$- bzw. $\tilde{\mathscr{T}}$-kompakt sind.

Nach Voraussetzung ist $u \in P = \tilde{P}$, $\tilde{u} \in P = \tilde{P}$, daher u $\tilde{\mathscr{T}}$-nach unten halbstetig und $\tilde{u}$ $\mathscr{T}$-nach unten halbstetig, was zur Folge hat, daß K_n $\tilde{\mathscr{T}}$-abgeschlossen und $\tilde{K}_n$ $\tilde{\mathscr{T}}$-abgeschlossen, die Menge G_n also für jedes $n\in\mathbb{N}$ sowohl $\mathscr{T}$- als auch $\tilde{\mathscr{T}}$-kompakt ist.

Wegen der Stetigkeit von u bzw. von $\tilde{u}$ ist für jedes $n\in\mathbb{N}$ die Menge K_n im $\mathscr{T}$-Innern von K_{n+1} bzw. $\tilde{K}_n$ im $\tilde{\mathscr{T}}$-Innern von $\tilde{K}_{n+1}$ enthalten; die Folgen $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(\tilde{K}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind also tatsächlich eine Ausschöpfung der Räume $(X,\mathscr{T})$ bzw. $(\tilde{X},\tilde{\mathscr{T}})$. Ferner ist $X=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$.

Bleibt noch die Gleichheit der Topologien $\mathscr{T}$ und $\tilde{\mathscr{T}}$ auf G_n zu zeigen.

Wir beweisen dazu zunächst, daß die Restriktion eines jeden Potentials $p\in\mathscr{P}^c$ auf G_n auch $\tilde{\mathscr{T}}$-stetig ist. In der Tat: Das Potential p gehört nach Voraussetzung zu $\tilde{P}$; es läßt sich also darstellen als Supremum einer aufsteigend filtrierenden Familie $\mathscr{F}\subset\tilde{\mathscr{P}}^c$. Da p $\mathscr{T}$-stetig, G_n $\mathscr{T}$-kompakt und jedes $q\in\mathscr{F}$ $\mathscr{T}$-nach unten halbstetig ist, konvergiert nach dem Satz von Dini $\mathscr{F}$ gleichmäßig gegen p auf G_n, was die $\tilde{\mathscr{T}}$-Stetigkeit von $p|_{G_n}$ nach sich zieht.

Damit haben wir die Inklusion $\mathscr{P}^c|_{G_n}\subset\mathscr{C}((G_n,\tilde{\mathscr{T}}))$ nachgewiesen.

Nun aber ist wegen der $\mathfrak{P}$-Harmonizität von $(X,\mathscr{H}^*)$ die Topologie $\mathscr{T}$ auf G_n gerade die initiale Topologie bezüglich $\mathscr{P}^c|_{G_n}$, was zur Folge hat, daß $\mathscr{T}$ auf G_n gröber als $\tilde{\mathscr{T}}$ ist.

Aus Symmetriegründen stimmen daher die beiden Topologien auf G_n überein.

(4.2) **Lemma.** 1) *Es ist* $\mathscr{H}^*_+(X)=\tilde{\mathscr{H}}^*_+(\tilde{X})$.

2) *Die feine Topologie von* $(X,\mathscr{H}^*)$ *ist gleich der feinen Topologie von* $(\tilde{X},\tilde{\mathscr{H}}^*)$.

3) *Für jede Teilmenge* $\mathscr{F}$ *von* $\mathscr{H}^*_+(X)=\tilde{\mathscr{H}}^*_+(\tilde{X})$ *ist die Regularisierte* $\wedge\mathscr{F}$ *von* $p:=\inf\mathscr{F}$ *bezüglich beider Topologien* $\mathscr{T}$ *und* $\tilde{\mathscr{T}}$ *gleich.*

4) *Für jede numerische Funktion* $f\geqq 0$ *auf* X *stimmen die Reduzierten* Rf *und* $\tilde{R}f$, *sowie die Gefegten* $\hat{R}f$ *und* $\hat{\tilde{R}}f$ *von* f *bezüglich der beiden harmonischen Strukturen überein.*

Beweis. Die global definierten, positiven hyperharmonischen Funktionen beider Räume sind genau die punktweisen Suprema beliebiger aufsteigend filtrierender Teilfamilien von $P=\tilde{P}$. Daher ist die Behauptung 1) richtig.

Da in den $\mathfrak{P}$-harmonischen Räumen X und $\tilde{X}$ die feinen Topologien gerade die initialen Topologien bezüglich $\mathscr{H}^*_+(X)=\tilde{\mathscr{H}}^*_+(\tilde{X})$ sind, ergibt sich 2) aus 1).

Schließlich ist – unabhängig von den Topologien $\mathscr{T}$ und $\tilde{\mathscr{T}}$ – die Regularisierte von p in 3) das Infimum von $\mathscr{F}$ in dem vollständigen Verband $\mathscr{H}^*_+(X)=\tilde{\mathscr{H}}^*_+(\tilde{X})$, versehen mit der natürlichen Ordnung.

Die Behauptung 4) ist dann eine unmittelbare Folge von 1) und 3).

Wir zeigen nun stufenweise, daß gewisse ausgezeichnete Unterkegel der Kegel P und $\tilde{P}$ übereinstimmen. Dazu erinnern wir an die folgende

(4.3) *Definition. Ein Potential* p *heißt semi-beschränkt, wenn es sich darstellen läßt als eine abzählbare Summe von lokal-beschränkten Potentialen.*

Nach [7] 2.1 mit 2.4 stellt die Menge $\mathscr{P}_b$ aller semi-beschränkten Potentiale ein Band dar [vgl. [6] Definition p. 184]. Ein Potential p ist genau dann semibeschränkt, wenn es die Bedingung

$$\bigwedge_{\lambda\in\mathbb{R}} \hat{R}_p^{\{p>\lambda\}}=0$$

erfüllt. (Die in [7] generell getroffenen einschränkenden Voraussetzungen werden zum Beweis der obigen Aussagen nicht benötigt).

Mit dieser Kennzeichnung und Lemma (4.2) erhalten wir

(4.4) **Lemma.** *Die Menge $\mathscr{P}'_b := \mathscr{P}_b \cap P$ aller semi-beschränkten Potentiale $p \in P$ stimmt überein mit der Menge $\tilde{\mathscr{P}}'_b := \tilde{\mathscr{P}}_b \cap \tilde{P}$ aller bezüglich $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{H}}^*)$ semi-beschränkten Potentiale in $\tilde{P}$.*

Ein Unterkegel von $\mathscr{P}_b$ ist der Kegel $\mathscr{M}$ aller Potentiale p, welche sich als Summe von Potentialen aus $\mathscr{P}^c$ darstellen lassen. Es gilt das

(4.5) **Lemma.** *Die Menge $\mathscr{M}' := \mathscr{M} \cap P$ aller Potentiale in P, welche sich als Summe von $\mathscr{T}$-stetigen, reellwertigen Potentialen darstellen lassen, ist gleich der entsprechenden Menge $\tilde{\mathscr{M}}' := \tilde{\mathscr{M}} \cap \tilde{P}$.*

Beweis. Da für jede Familie $\tilde{\mathscr{F}} \subset \tilde{\mathscr{M}}'$ mit $\tilde{p}_0 := \sum_{\tilde{p} \in \tilde{\mathscr{F}}} \tilde{p} \in \tilde{P}$ die Summe $\tilde{p}_0$ sogar wieder in $\tilde{\mathscr{M}}'$ liegt, genügt es aus Symmetriegründen zu zeigen, daß der Kegel $\mathscr{P}^c$ in $\tilde{\mathscr{M}}'$ enthalten ist.

Sei also $u \in \mathscr{P}^c \subset P = \tilde{P}$. Nach [1] Korollar 2.4.5 ist mit den Bezeichnungen von Lemma (4.1) für jedes semi-beschränkte Potential $p \in \mathscr{P}'_b = \tilde{\mathscr{P}}'_b$ [man beachte (4.2.4)]

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} R_p^{\complement K_n} = 0 = \inf_{n \in \mathbb{N}} R_p^{\complement \tilde{K}_n}.$$

Nach (4.1) enthält das System $\tilde{\mathfrak{K}}(u)$ aller $\tilde{\mathscr{T}}$-kompakten Mengen $\tilde{K} \subset \tilde{X}$ mit der Eigenschaft, daß die Restriktion von u auf $\tilde{K}$ $\tilde{\mathscr{T}}$-stetig ist, jede der Mengen G_n. Daher gilt

$$0 = \inf_{n \in \mathbb{N}} (R_p^{\complement K_n} + R_p^{\complement \tilde{K}_n}) \geqq \inf_{n \in \mathbb{N}} R_p^{\complement K_n \cup \complement \tilde{K}_n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} R_p^{\complement G_n} \geqq \bigwedge_{\tilde{K} \in \tilde{\mathfrak{K}}(u)} R_p^{\complement \tilde{K}} \geqq 0.$$

Die Gültigkeit von $\bigwedge_{\tilde{K} \in \tilde{\mathfrak{K}}(u)} R_p^{\complement \tilde{K}} = 0$ für jedes $p \in \mathscr{P}'_b = \tilde{\mathscr{P}}'_b$ besagt, daß das Potential u quasi-stetig ist bezüglich $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{H}}^*)$ ([6] Definition §8.4, Prop. 8.4.1). Nun aber ist $\tilde{\mathscr{M}}'$ gerade die Menge aller quasi-stetigen, semi-beschränkten Potentiale $\tilde{p} \in \tilde{P}$ in $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{H}}^*)$ ([6] Cor. 8.4.1), so daß wegen Lemma (4.4) das Potential u tatsächlich in $\tilde{\mathscr{M}}'$ enthalten ist.

(4.6) **Lemma.** *Der Kegel $Q := \mathscr{P}^c \cap \tilde{\mathscr{P}}^c$ aller reellwertigen Potentiale, die sowohl bezüglich der Topologie $\mathscr{T}$ als auch bezüglich der Topologie $\tilde{\mathscr{T}}$ stetig sind, trennt die Punkte von X und enthält die positiven Konstanten.*

Beweis. Da $(X, \mathscr{H}^*)$ ein $\mathfrak{P}$-harmonischer Raum ist, existiert zu $x, y \in X$, $x \neq y$, ein Potential $p \in \mathscr{P}^c$ mit $p(x) \neq p(y)$. Wegen $\mathscr{P}^c \subset \tilde{P}$ und Lemma (4.5) ist $p \in \tilde{\mathscr{M}}'$, also darstellbar als $p = \sum_{\tilde{p} \in \tilde{\mathscr{F}}} \tilde{p}$ mit $\tilde{\mathscr{F}} \subset \tilde{\mathscr{P}}^c$.

Jedes $\tilde{p} \in \tilde{\mathscr{F}}$ ist aber wegen $\tilde{p} \prec p$ auch $\mathscr{T}$-stetig, also in Q enthalten. Aus $p(x) \neq p(y)$ folgt $\tilde{p}(x) \neq \tilde{p}(y)$ für mindestens ein $\tilde{p} \in \tilde{\mathscr{F}}$.

(4.7) **Lemma.** *Für jede $\tilde{\mathscr{T}}$-kompakte Menge K ist die Spurtopologie $\tilde{\mathscr{T}}|_K$ von $\tilde{\mathscr{T}}$ auf K gröber als die Spurtopologie $\mathscr{T}|_K$ von $\mathscr{T}$ auf K. Ferner ist K $\mathscr{T}$-abgeschlossen in X.*

Beweis. Nach Lemma (4.6) ist $(Q-Q)|_K$ ein punktetrennender Untervektorverband von $\mathscr{C}((K,\tilde{\mathscr{T}}))$, welcher die Konstanten enthält; $(Q-Q)|_K$ liegt also dicht in $\mathscr{C}((K,\tilde{\mathscr{T}}))$ bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz. Nach Definition von Q ist $\mathscr{C}((K,\tilde{\mathscr{T}}))$ daher enthalten im Raum $\mathscr{C}((K,\mathscr{T}))$ aller $\mathscr{T}$-stetigen Funktionen auf K, woraus wegen der vollständigen Regularität der Topologie $\tilde{\mathscr{T}}|_K$ die erste Behauptung folgt.

Angenommen, K wäre nun nicht $\mathscr{T}$-abgeschlossen. Dann existiert ein Punkt $x\in X\setminus K$, der im $\mathscr{T}$-Abschluß von K liegt. Wir wenden jetzt den ersten Teil des Satzes auf die $\tilde{\mathscr{T}}$-kompakte Menge $K':=K\cup\{x\}$ an. Da K $\tilde{\mathscr{T}}$-kompakt ist, ist $\{x\}$ offen in der Topologie $\tilde{\mathscr{T}}|_{K'}$, also erst recht in der Topologie $\mathscr{T}|_{K'}$. Dies aber steht im Widerspruch zur Wahl von x.

(4.8) **Lemma.** *Q enthält den Kegel $\tilde{\mathscr{P}}_0^c$ aller stetigen, reellwertigen Potentiale von $(\tilde{X},\tilde{\mathscr{H}}^*)$, welche außerhalb einer kompakten Menge harmonisch sind.*

Beweis. Sei $p\in\tilde{\mathscr{P}}_0^c$ mit einem $\tilde{\mathscr{T}}$-kompakten superharmonischen Träger $\tilde{S}(p)$. Ferner sei $\tilde{f}$ eine $\tilde{\mathscr{T}}$-stetige Funktion mit $\tilde{\mathscr{T}}$-kompaktem Träger K und den Eigenschaften $0\leqq\tilde{f}\leqq p$, $\tilde{f}=p$ auf $\tilde{S}(p)$.

Die Potentiale in $\tilde{\mathscr{P}}_0^c$ genügen dem Dominationsprinzip, d.h. es ist

$$p=\hat{R}_p^{\tilde{S}(p)},$$

und damit wegen $\hat{R}_p^{\tilde{S}(p)}\leqq R\tilde{f}\leqq p$

$$p=R\tilde{f}.$$

Da $\tilde{f}$ auf dem Komplement von K die Nullfunktion ist, und da K wegen Lemma (4.7) $\mathscr{T}$-abgeschlossen ist, gehört $p|_{\complement K}$ zu $\mathscr{H}(\complement K)$. Insbesondere enthält K also auch den superharmonischen Träger $S(p)$ von p bezüglich des harmonischen Raumes $(X,\mathscr{H}^*)$. Wiederum nach Lemma (4.7) ist die Restriktion von p auf K und damit auf $S(p)$ $\mathscr{T}$-stetig. Wegen $p\in\mathscr{M}'$ und [6] Corollary 8.3.1 folgt hieraus die $\mathscr{T}$-Stetigkeit von p auf ganz X. Damit ist $p\in Q$ nachgewiesen.

Wegen der $\mathfrak{P}$-Harmonizität des Raumes $(\tilde{X},\tilde{\mathscr{H}}^*)$ ist seine Topologie die initiale Topologie bezüglich $\tilde{\mathscr{P}}_0^c$. Lemma (4.8) besagt, daß diese Topologie $\tilde{\mathscr{T}}$ gröber als die initiale Topologie $\mathscr{T}_Q$ bezüglich Q ist. Die Topologie $\mathscr{T}_Q$ ihrerseits ist nach Definition von Q gröber als die Topologie $\mathscr{T}$ von $(X,\mathscr{H}^*)$, so daß aus Symmetriegründen $\tilde{\mathscr{T}}=\mathscr{T}$ gilt. Insbesondere erhalten wir damit

(4.9) **Lemma.** *Es ist $\mathscr{P}^c=\tilde{\mathscr{P}}^c$.*

Wenden wir nun die Ergebnisse des §1 auf unsere Situation an, so ergibt sich

(4.10) **Satz.** *Zu jedem Kegelisomorphismus $\varphi: P\to\tilde{P}$ mit $1\in P$ und $\varphi(1)=1$ existiert genau eine biharmonische Abbildung $\psi:\tilde{X}\to X$ mit $\varphi(p)=p\circ\psi$ für alle $p\in P$.*

Insbesondere sind also zwei σ-kompakte, $\mathfrak{P}$-harmonische Räume dann biharmonisch aufeinander abbildbar, wenn es einen Kegelisomorphismus φ zwischen den Kegeln $\mathscr{P}_{\mathbb{R}}$ und $\tilde{\mathscr{P}}_{\mathbb{R}}$ aller endlichen Potentiale gibt mit $\varphi(1)=1$.

Allerdings ist die Voraussetzung $\varphi(1)=1$ ziemlich unnatürlich. In §1 konnte sie für einen beliebigen Kegelisomorphismus zwischen den Kegeln $\mathscr{P}^c$ und $\tilde{\mathscr{P}}^c$

immer durch Division des Garbendatums $\mathscr{H}^*$ mit einem strikt positiven, stetigen Potential p und durch Division von $\tilde{\mathscr{H}}^*$ mit $\varphi(p)$ herbeigeführt werden.

Bei einem Kegelisomorphismus $\varphi: P \to \tilde{P}$ zwischen zwei Kegeln P und $\tilde{P}$ mit den zu Beginn des §4 genannten Eigenschaften ist ein analoges Vorgehen genau dann möglich, wenn es ein strikt positives, stetiges Potential $p \in P$ gibt, dessen Bild $\varphi(p)$ ebenfalls stetig ist.

In einem Spezialfall läßt sich die Existenz eines solchen Potentials nachweisen:

(4.11) **Satz.** *Sei φ ein Kegelisomorphismus zwischen den Kegeln aller feinen reellwertigen Potentiale zweier $\mathfrak{P}$-harmonischer Räume $(X, \mathscr{H}^*)$ und $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{H}}^*)$ mit Axiom (D) und abzählbarer Basis.*

Dann existiert eine strikt positive, stetige Funktion $\tilde{f}$ auf $\tilde{X}$ und eine biharmonische Abbildung ψ zwischen den harmonischen Räumen $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{H}}^*_{\tilde{f}})$ und $(X, \mathscr{H}^*)$ mit $\varphi(p) = \tilde{f} \cdot (p \circ \psi)$ für jedes feine reellwertige Potential p.

Beweis. Die Menge aller feinen reellwertigen Potentiale auf X bzw. auf $\tilde{X}$ ist nach [7] Corollary, p. 111 gerade gleich $\mathscr{P}_b \cap \mathscr{P}_{\mathbb{R}}$ bzw. $\tilde{\mathscr{P}}_b \cap \tilde{\mathscr{P}}_{\mathbb{R}}$, enthält also insbesondere die Kegel $\mathscr{P}^c$ bzw. $\tilde{\mathscr{P}}^c$.

Sei nun $p \in \mathscr{P}^c$ ein strikt positives, stetiges Potential. Da $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{H}}^*)$ das Dominationsaxiom erfüllt und $\varphi(p)$ semi-beschränkt ist, erhalten wir $\varphi(p) \in \tilde{\mathscr{M}}$. Es existiert demnach eine Folge $(\tilde{p}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\tilde{\mathscr{P}}^c$ mit $\varphi(p) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \tilde{p}_n$. Entsprechend läßt sich p schreiben als $p = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n$ mit $p_n = \varphi^{-1}(\tilde{p}_n)$.

Die Gültigkeit von Axiom (D) impliziert die Elliptizität der beiden harmonischen Räume, so daß jedes der Potentiale p_n entweder verschwindet oder strikt positiv ist. Zudem ist jedes Potential p_n wegen $p_n \prec p$ stetig und wird durch φ auf das stetige Potential $\tilde{p}_n$ abgebildet. Wegen $p \neq 0$ ist mindestens ein $p_n \neq 0$. Aus der Bijektivität von φ ergibt sich dann $\varphi(p_n) \neq 0$.

Analoge Schlüsse wie im Beweis von (1.14) führen nun unter Beachtung von (4.10) zum Ziel.

Literatur

1. Bauer, H.: Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1966
2. Bony, J.-M.: Détermination des axiomatiques de théorie du potentiel dont les fonctions harmoniques sont différentiables. Ann. Inst. Fourier, Grenable **17**, 353—382 (1967)
3. Bony, J.-M.: Opérateurs elliptiques dégénérés associés aux axiomatiques de la théorie du potentiel; Potential theory, pp. 69—119 (CIME, 1°, Stresa 2—10 Luglio 1969). Roma: Edizioni Cremonese 1970
4. Choquet, G.: Le problème des moments. Séminaire Choquet, 1ère année, No. 4, 1962
5. Constantinescu, C., Cornea, A.: Compactifications of harmonic spaces. Nagoya Math. J. **25**, 1—57 (1965)
6. Constantinescu, C., Cornea, A.: Potential Theory on Harmonic Spaces. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1972
7. Fuglede, B.: Finely harmonic functions. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1972
8. Jameson, G.: Ordered linear spaces. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1970
9. Schirmeier, U.: Isomorphie harmonischer Räume. Dissertation, Erlangen (1976)

Angenommen am 2. April 1976

Math. Ann. 225, 57—67 (1977)

C^k and Analytic Equivalence of Complex Analytic Varieties

Joseph Becker
Department of Mathematics, Purdue University, West Lafayette, Indiana 47907, USA

It is well known that if V and V' are two germs of real analytic varieties which are C^∞ equivalent, then they are real analytically equivalent. This is a simple consequence of the fact that [2, Cor. 1.6] real analytic germs are isomorphic if and only if the completions of their local analytic rings are isomorphic and the fact that [12, Theorem 3.5, page 90] that the image under the Taylor series map of the C^∞ functions on V is just the completion of the local analytic ring of V.

By using [18, 1.1.5] one may improve the above result by weakening the hypothesis to only require that V and V' be C^k equivalent for all k. One would like to improve such results to require only a finite degree of differentiability. This paper is a step in this direction. There are clearly going to be some difficulties in such attempts. For instance, Tougeron [20, page 219] has given an example of a germ of a real analytic hypersurface V in $\mathbb{R}^3$ with isolated singularity such that for every k, V is C^k equivalent to the germ of a real algebraic variety, but V is not C^∞ equivalent to the germ of a real algebraic variety. This example is not formally smooth over Spec $\mathbb{R}$ outside its closed point. In fact any such example must not be formally smooth outside the origin or else it would contradict Artin's theorem [2, 1.6] and [3, 3.8] that isolated singularities are analytically equivalent to an algebraic variety.

If we consider only complex analytic varieties we can dispense with problems of coherence and formal smoothness since over an algebraically closed field, the geometry always agrees with the algebra. Furthermore Ephraim [8] has shown that if V and V' are germs irreducible complex analytic hypersurfaces which are real analytically equivalent, then V' is complex analytically equivalent to either V or $\bar{V}$, where $\bar{V}$ denotes conjugation. (For generalizations to higher codimension see [6, 9]). Hence we need only study real analytic equivalences of complex analytic varieties.

In this paper, we study the following question: If V is a complex analytic variety and $p \in V$ is an isolated singular point, does there exist $k>0$ so that if (V', p') is C^k equivalent to (V, p) then are they real analytically equivalent? We show this is true if V is a hypersurface. In fact if V is a curve, it is enough to let $k \geqq 3\delta + E + 1$, where $\delta =$ length of the conductor, and $E =$ exponent of the conductor. An essential tool here is an analogous theorem of Hironaka about isomorphisms of the local rings up to order k. In section 5 we give for each $k>0$ an example of complex analytic varieties V, V' which have a C^k weakly holomorphic equivalence, but no C^∞ equivalence.

1. Definitions and Preliminaries

From [16] we have all of the following: Let V be a complex analytic variety in $\mathbb{C}^n$, $p\in V$, C_p^k the ring of germs at p of k times continuously differentiable complex valued functions on $\mathbb{C}^n$, $k=1,2,\dots,\infty$, and $I(V, C_p^k)$ the ideal of functions in C_p^k vanishing identically on V. Then

$$T(V, C_p^k)=\{a\in\mathbb{C}^n=\mathbb{R}^{2n}\colon \sum_{j=1}^{n} a_j\frac{\partial f}{\partial z_j}(p)+\bar{a}_j\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}(p)=0 \quad \text{for all} \quad f\in I(V, C_p^k)\}$$
$$=\{(r_1,\dots,r_{2n})\in\mathbb{R}^n\colon \sum_{i=1}^{2n} r_i\frac{\partial f}{\partial x_i}=0 \quad \text{for all} \quad f\in I(V, C_p^k)\}$$

where we identify $\mathbb{C}^n=\mathbb{R}^{2n}$ by $a_k=r_{2k-1}+ir_{2k}$. This is clearly a vector space over the field of real numbers but not necessarily over the complexes: Write $\mathbb{C}^n=\mathbb{R}^n\oplus i\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}=\mathbb{R}\oplus i\mathbb{R}$

$$a=a_x+ia_y \qquad f=f_x+if_y \qquad df=df_x+idf_y$$
$$a=a+ia_x \qquad if=-f_y+if_x \qquad d(if)=-df_y+idf_x=idf$$
$$a\in T\Leftrightarrow 0=a_x(d_xf_x+id_xf_x)+a_y(d_yf_x+id_yf_y)$$
$$=a_xd_xf_x+a_yd_yf_x+i(a_xd_xf_y+a_yd_yf_y)$$
$$\Leftrightarrow a_xd_xf_x+a_yd_yf_x=0=a_xd_xf_y+a_yd_yf_y$$

Hence it is sufficient to consider only the real valued f_x and f_y in computing the tangent space.

By $T(V, \mathcal{O}_p)$, we will mean the usual Zariski tangent space, sixth tangent cone of Whitney $C_6(V,p)=\{a\in\mathbb{C}^n\colon ad_pf=0$ for all $f\in I(V,\mathcal{O}_p)\}$. Other useful tangent cones are the third, fourth, and fifth of Whitney:

$$C_3(V,P)=\{a\in\mathbb{C}^n\colon\ \exists \text{ sequences } \ q_i\in V, \lambda_i\in\mathbb{C}, q_i\to p, \lambda_i(p-q_i)\to a\}$$
$$C_4(V,p)=\{a\in\mathbb{C}^n\colon\ \exists \text{ sequences } \ q_i\in Reg(V), q_i\to p, v_i\in T(V,\mathcal{O}_{q_i}) \text{ with } v_i\to a\}$$
$$C_5(V,P)=\{a\in\mathbb{C}^n\colon\ \exists \text{ sequences } \ q_i, p_i\in V, \lambda_i\in\mathbb{C}.\ q_i, p_i\to p, \lambda_i(p_i-q_i)\to a\}$$

We have the following sequence of strong inclusions

$$C_3(V,p)\subset C_4(V,p)\subset C_5(V,p)\subset T(V,C_p^1)\subset\ldots\subset T(V,C_p^k)$$
$$T(V,C_p^{k+1})\subset\ldots\subset T(V,C_p^\infty)\subset T(V,\mathcal{A}_p)\subset T(V,\mathcal{O}_p)$$

Definition. Let C be one of the following categories: germs of real or complex analytic varieties with structure sheaf of either complex analytic $\mathcal{O}$, real analytic $\mathcal{A}$, infinitely differentiable C^∞, k times continuously differentiable C^k, or continuous C, functions. Two germs V, W are said to be equivalent if there exist

$\phi, \psi \in C$, $\phi: V \to W$, $\psi: W \to V$ such that $\phi\psi = 1_W$, $\psi\phi = 1_V$. This is the same as saying that the respective local rings (stalks of the sheaf) are isomorphic.

Remark. It is clear that two topologically equivalent varieties have the same dimension.

2. Approximation

Throughout this section V will be a one dimensional complex analytic subvariety of $\mathbb{C}^n$ with the origin as a singular point. If V is irreducible, $\phi: \mathbb{C} \to V$ will denote its normalization. Unless otherwise stated, V will be assumed to be holomorphically imbedded in its minimal possible dimension, that is $T(V, \mathcal{O}_0) = \mathbb{C}^n$. We begin with some rather technical results, the first similar to paragraph 2.2 of [15].

Lemma 1. *If $f \in I(V, C_0^k)$, there is a holomorphic polynomial $P_k(z) = \sum_{|\alpha| \leqq k} a_\alpha z^\alpha$, with $D^\alpha f(o) = \alpha! a_\alpha$ such that $P_k(z) = o(|z|^k)$ on V.*

Proof. By appropriate choice of coordinates, the normalization ϕ can be written as $\phi(t) = (t^{q_1}, t^{q_2}u_2(t), \ldots, t^{q_n}u_n(t))$ where $q = q_1 \leqq q_2 \leqq \ldots \leqq q_n$ and the u_i's are units; hence $o(|z|) = o\left(\sum_{i=1} |z_i|\right) = o(|z_1|)$. There exists a polynomial $A_k(z, \bar{z}) = kth$ order Taylor expansion of f about the origin such that

$$f - A_k = \sum_{|\beta+\gamma| = k} z^\beta \bar{z}^\gamma g_{\beta\gamma}(z, \bar{z}) = o(|z|^k),$$

where the $g_{\beta\gamma}$ are continuous functions such that $g_{\beta\gamma}(0) = 0$. Let $A_k = P_k + Q_k$ be the sum of polynomials with P_k holomorphic and Q_k having no holomorphic terms. Now composing with the normalization and writing holomorphic polynomial $P(t) = P_k(\varphi(t))$, polynomial $Q(t, \bar{t}) = Q_k(\varphi(t))$ with no holomorphic terms, and $l = qk$, we have:

$$P(t) + Q(t, \bar{t}) = t^l g(t) + \bar{t}^l h(t) = o(|t|^l)$$

where g and h are continuous functions such that $g(0) = h(0) = 0$. Hence neither P not Q can have any terms of degree l or less and we conclude that $P(t) = o(t^l)$. Thus $P_k(z) = o(|z|^k)$ on V. So far V has been assumed to be irreducible; but if V is reducible the argument given is valid on each component and the lemma as stated clearly holds if it holds for z in each component.

Lemma 2. *There is a biholomorphic change of coordinates in $\mathbb{C}^n$ so that the normalization has the form $\phi(t) = (t^{q_1}u_1(t), \ldots, t^{q_n}u_n(t))$ where the u_i are units, $q_1 < q_2 < \ldots < q_n$, and there is no polynomial in $\phi_1(t), \ldots, \phi_{k-1}(t)$ whose order is precisely q_k.*

Proof. By induction on k; first given a normalization $\phi(t)$ rearrange the variables $z_1, \ldots, z_n$ so that the lowest q_i is first — this completes the first step of the induction. Now suppose no polynomial in $\phi_1(t), \ldots, \phi_{k-1}(t)$ has order q_k, $q_1 < \ldots < q_k$, and $q_k \leqq q_l$ for all $l \geqq k$. Then rearrange the variables $z_{k+1}, \ldots, z_n$ so $\phi_{k+1}(t)$ has lowest order. If there is a polynomial $h(z_1, \ldots, z_k)$ such that $h(\phi_1(t), \ldots, \phi_k(t))$ has same leading term as $\phi_{k+1}(t)$, make the change of coordinates:

$$(z_1, \ldots, z_n) \to (z_1, \ldots, z_k, z_{k+1} - h(z_1, \ldots, z_k), z_{k+2}, \ldots, z_n),$$

eliminating the leading term of $\phi_{k+1}(t)$. Repeat the process. If the process terminates after finitely many steps the induction is completed.

But the process must terminate or else you formally transform off one of the coordinates contradicting the fact that the embedding dim of a local ring and its completion are the same [23]; the natural Krull topology on $\mathcal{O}(V, 0)$ agrees with that induced from $\mathbb{C}\{t\}$ as $\mathcal{O}(V, 0) \subset \mathbb{C}\{t\}$ is a finite integral extension.

Proposition 1. *Let V be irreducible, then there exists $k>0$ such that $T(V, C_0^k)=T(V, \mathcal{O}_0)$.*

Proof. Since V is imbedded in minimal dimension, coordinates on $\mathbb{C}^n$ can be chosen so that the conclusion of Lemma 2 holds. Then it is sufficient to pick $k=[q_n/q_1]+1$ where $[r]$ for any real number r is the greatest integer less than or equal to r. Given $f \in I(V, C_0^k)$, need to show $d_0 f=0$. Now $f(z)-P_k(z)=o(|z|^k)$ on V. Write

$$P_k=L_k+H_k,\ L_k=\sum_{i=1}^{n} a_i z_i,\ a_i=\frac{\partial f}{\partial z_i}(o)\,,$$

$$H_k=\sum_{2\leqq|\alpha|\leqq k} a_\alpha z^\alpha,\ \sum_{i=1}^{n} a_i t^{q_i}+\sum_{2\leqq|\alpha|\leqq k} a_\alpha \phi(t)^\alpha=o(t^{q_1 k})\,.$$

Let a_j be first nonzero coefficient in sum: if it exists we have a contradiction since $q_j \leqq q_n < q_1 k$ and $a_j t^{q_j}$ cannot be cancelled by one of the higher order terms since $H_k(\varphi(t))$ cannot have leading term order equal to q_j.

Second proof. Let $\mathcal{O}_p$ be the germs at the point p of weakly holomorphic functions. An element $u \in \mathcal{O}$ is said to be a universal denominator if $u\tilde{\mathcal{O}}_p \subset \mathcal{O}_p$. Let I be the ideal of $\mathcal{O}_p$ of all functions vanishing on Sing (V) and J be the ideal of universal denominators at p. Then locus$(J) \subset \operatorname{Sing} V$, so by the Hilbert Nullstellensatz there is a positive integer E called the exponent of the conductor, such that $I^E \subset J$. I will show $k \leqq E+1$.

Let $f \in I(V, C^k)$, then $f(z)-P_k(z)=o(|z|^k)$. Pick coordinates so that $o(|z|)=o(|z_1|)$, then $P_k(z)=o(|z_1|^k)$ on V. Hence $P_k(z)/z_1^k$ is weakly hol on V. But z_1^E is a universal denominator so $z_1^E P_k(z)/z_1^k$ is hol. Letting $k=E+1$, we see that $P_k(z)$ has no first order terms: suppose z_1 divides $P_k(z)$ in $\mathcal{O}(V)$, then $\psi(z)=P_k(z)-z_1 g(z) \in I(V, \mathcal{O})$ so ord $\psi \geqq 2$ as V embedded in min dim. Only possible first order term of $z_1 g(z)$ is just z_1, and $P_k(z)$ has no z_1 term as z_1 direction spans $C_3(V)$ and $C_3(V) \subset C_5(V) \subset T(V, C^1)$.

A similar analysis can be done for the antiholomorphic terms of the Taylor series of f, by considering $\bar{f} \in I(V, C^k)$.

Remark. The above argument can easily be generalized to show that if $f(z) \in I(V, C^k)$ and $k=E+j$, then the Taylor series of f has no nonzero terms of order $\leqq j$.

Definition. Let A be a set in $\mathbb{R}^n$ and $f: A \to \mathbb{R}^d$. f is called O^N approximable at $p \in A$ with respect to zero if there is a constant $K \in \mathbb{R}$ so that

$$\limsup_{x \in A,\, x \to p} \frac{|f(x)|}{|x-p|^N} \leqq K\,.$$

Lemma 3A. [16, 1.1.5] *Let A be a complex analytic set. Then there is a locally bounded map $n: A \times \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ with the property that given $z \in A, g: A \to \mathbb{C}$ real analytic and $g|A$ is $O^{N(z,m)}$ approximable at z with respect to 0, then the holomorphic part of $g \in I(z)^m + I(A)$, where $I(A)$ is the ideal of A.*

Lemma 3B. *The same result holds for real analytic sets A and real analytic functions g, without taking the holomorphic part of g. This can be proven by arguments similar to those used in* [16] *— this proof will be omitted. (Perhaps the easiest method is to prove the result for curves and then use the fact that through any point of a variety A there is a curve C_k in A which is isomorphic to A up to order k).*

Remark. It is clear that 2 analytically equivalent singularities have the same $N(z, m)$ function.

Lemma 3C. *When A is a curve, one easily sees by the arguments of Proposition 1 that $N(m)$ can be picked $\leqq E+m$.*

Corollary of lemmas 3A, 3B. *Proposition 1 in general: that is if V is a real analytic variety, there exists $k>0$ such that $T(V, C_p^k) = T(V, \mathcal{O}_p)$.*

Proof. Let $m=2$.

Theorem of Hironaka

In [10] Hironaka and Rossi have proven:

Lemma 4A. *If $\mathcal{O}_p(V)$ is the local ring of a pure dimensional complex analytic variety V at an isolated singular point p, then there is an integer v so that if V' is any other pure* dim *analytic variety of the same* dim *with isolated singularity and the local rings of V at p and V' at p' are isomorphic up to order v, that is $\mathcal{O}_p(V)/M^v \simeq \mathcal{O}_p(V')/M^v$, then $\mathcal{O}_p(V)$ is isomorphic to $\mathcal{O}_p(V')$.*

In [11] Hironaka has obtained a far reaching generalization of this result, whose exact statement goes as follows [11, p. 156]:

Definition. Let Y be a Noetherian scheme and y_0 a closed point of Y. Let $\mathscr{C}$ be a category of schemes over Y. (For instance, the category of Y schemes of finite type). Let us a triple (π, X, ε) such that

a) X is a Y scheme with morphism $\pi: X \to Y$ and $\varepsilon: Y \to X$ is a Y morphism so that $\pi \cdot \varepsilon = id_Y$, all belonging to $\mathscr{C}$.

b) X is flat over Y.

c) For every point y in some neighborhood of y_0 in Y, the fibre $\pi^{-1}(y)$ is reduced, equidimensional, and its dimension is independent of y.

d) There is given a coherent sheaf of ideals H on X, such that H is contained in the sheaf of ideals of $\varepsilon(Y)$ and such that $\pi: X \to Y$ is formally smooth at every point of X outside the closed subscheme X_0 defined by H. Then a pair of non-negative integers (t, r) will be called an H adic TR-index of (Y, y_0, X, ε) with respect to the category $\mathscr{C}$ if the integers have the following property. Let v be any integer with $v \geqq t$. Let $(\pi'; x', \varepsilon')$ be any triple satisfying the conditions a, b, and c, and let H' be any coherent sheaf of ideals on X'. Let us denote X_α(resp. X'_α) the closed subscheme of X/(resp. X') defined by the ideal sheaf $H^{\alpha+1}$(resp. $H'^{\alpha+1}$), for each nonnegative integer α. Suppose $\dim \pi^{-1}(y_0)=\dim \pi'^{-1}(y_0)$, and there is given a Y isomorphism $\phi_v: X_v \to X'_v$ within a neighborhood of the point $\varepsilon(y_0)$ in X which induces Y isomorphism $\phi_u: X_u \to X'_u$ for every integer u with $0 \leqq u \leqq v$. Then the Y isomorphism $\phi_{v-r}: X_{v-r} \to X'_{v-r}$ induced by ϕ_v, extends to a Y isomorphism $\hat{\phi}: \hat{X} \to \hat{X}'$ within a neighborhood of $\varepsilon(y_0)$ in X where $\hat{X}$ (resp. $\hat{X}$) denotes the Hadic (resp. H'adic) completion of X (resp. X'). Here, of course, ϕ_{v-r} extends to $\hat{\phi}$, means that $\hat{\phi}$ induces ϕ_{v-r}.

Main Theorem I. *There exists an Hadic TR index in the category of Y schemes of finite type.*

The above tells us that the result of lemma 4A also holds for isolated singular points of pure dimensional algebraic varieties over an arbitrary field, (and the induced isomorphisms being in the completed rings), provided the local algebra is formally smooth outside the closed point y_0.

Remarks. In characteristic zero, a local ring is formally smooth if and only if it is a regular local ring. Over a nonalgebraically closed field, formal smoothness is not the same as being geometrically smooth. (The origin in $\mathbb{R}^2$ may be defined by the ideal (x, y) or the ideal (x^2+y^2), but the latter is not formally smooth). The ideal sheaf of a real analytic set with isolated singular point p might not be formally smooth outside p. A germ of a complex analytic set is coherent when considered as a real analytic set if and only if [8, Cor. 2.2] it is everywhere locally irreducible. The above main theorem does not explicitly apply to real analytic varieties but in fact does, because of Artin's theorem [3] that any complete ring over a field which is formally smooth outside its closed point is isomorphic to an algebraic variety.

Now a complex analytic variety may be considered as a real analytic variety. If V is irreducible at p, $I(V, \mathscr{A})$ is generated by $I(V, \mathcal{O})$ and $\overline{I(V, \mathcal{O})}$. However even if V has an isolated singular point, its associated real analytic variety might not be formally smooth outside its closed point because the complexification of the real variety doesn't have an isolated singular point. It will require additional work to apply lemma 4A.

For the special curves we have [11, Theorem B].

Lemma 4B. *For curves over an algebraically closed field k, we may pick the TR index to be* $(3\delta+1, 3\delta)$, *where* $\delta =$ *length of the conductor* $=\dim_k \tilde{\mathcal{O}}_p(V)/\mathcal{O}_p(V)$, *and* $\tilde{\mathcal{O}}_p(V)$ *is the algebra of weakly holomorphic functions on V, (integral closure in full quotient ring).*

4

Remark. If two germs of varieties are isomorphic are isomorphic up to high order then they have the same multiplicity u (geometrically) because the multiplicity can be read off from the first coefficient of the Hilbert Samuel polynomial of the local ring. For hypersurfaces the multiplicity can be read off from the first $u+d$ terms of the Hilbert function, where $d=$ Krull dim because the function becomes a polynomial after the $u-1$ *th* stage. It is not at all clear that varieties which are C^k equivalent for some k have the same multiplicity.

Proposition 2. *Let V be an irreducible complex analytic hypersurface with isolated singularity at p and multiplicity μ. Then there is an integer $k>\mu$ such that if V' is any complex analytic hypersurface with same multiplicity as V and C^k equivalent to V, then V' is real analytically equivalent to V.*

Proof. Let $g: V \to V'$ be a C^k equivalence, where $k=N(p,\mu)$, v be as in lemma 4A applied to V and $v>\mu$. Since a C^1 equivalence preserves regular points and a complex variety is irreducible iff its regular points are connected, we clearly have V' is irreducible. Let T_g be the *kth* order Taylor series of g and $W=T_g(V)$. Then W is a real analytic variety with isolated singularity, $\sigma=g(T_g^{-1})$ is a C^k equivalence: $W \to V'$ whose *kth* order Taylor series is just the identity. We will first show that $\mathscr{A}(V')/M^v \simeq \mathscr{A}(W)/M^v$, and hence $\mathscr{A}(V')/M^v \simeq \mathscr{A}(V)/M^v$.

Clearly σ induces a mapping $\mathscr{A}(V')/M^v \to \mathscr{A}(W)/M^v$.

Now $\phi \in I(V',\mathscr{A}) \Rightarrow \phi(\sigma) \in I(W, C^k) \Rightarrow \phi(\sigma) - T_{\phi(\sigma)} = o(|w|^k)$ on W and $\phi(\sigma) - T_{\phi(\sigma)} = \phi(\sigma) - T_\phi \circ T_\sigma = 0 - \phi(\text{Identity})$ on $W \Rightarrow \phi(Id) = o(|w|^k)$ on $W \Rightarrow \phi(Id) \in I(W,\mathscr{A}) + M_p^v$ by lemma 3B. Hence $I(V',\mathscr{A}) + M^v \subset I(W,\mathscr{A}) + M^v$ and σ induces a surjection $\mathscr{A}(V')/M^v \to (W)/M^v$. To see that it is an injection we must show $I(W,\mathscr{A}) \subset I(V',\mathscr{A}) + M^v$. Let f generate $I(V',\mathcal{O})$ over $\mathcal{O}$, ord $f=\mu, f=h+R, h$ homogeneous polynomial of degree μ and R a power series of order $>\mu$. Then $f, \bar{f}$ generate $I(V',\mathscr{A})$ over $\mathscr{A}$. By the above there exist $g_1, g_2 \in \mathscr{A}$ or order $>\operatorname{ord} f$ so that, $f+g_1, \bar{f}+g_2 \in I(W,\mathscr{A})$: since $v>\mu$, $\operatorname{ord}(f+g_1) = \operatorname{ord} f = \operatorname{ord}(\bar{f}+g_2)$ and the initial terms of $f+g_1, \bar{f}+g_2$ are h, $\bar{h}$ respectively. Since the multiplicity of $W=\mu$, the generators for $I(W,\mathscr{A})$ also have order μ and it follows easily by comparing initial terms that $f+g_1, \bar{f}+g_2$ generate $I(W,\mathscr{A})$. Hence $I(W,\mathscr{A}) \subset I(V',\mathscr{A}) + M^v$.

Remark. The argument of the first part of the above paragraph shows that $\mu(V,p) \leqq \mu(V',p')$ because a surjection $\mathscr{A}(V')/M^v \to \mathscr{A}(V)/M^v$ for all $\mu \leqq v \leqq \mu^2+2r$, $r=\dim V$, implies that $\mu(V,p) \leqq \mu(V',p')$, since for hypersurfaces the Hilbert polynomial has a particularly simple form which enables one to read off the multiplicity. (The map of $\mathscr{A}(V') \to \mathscr{A}(V)$ induces a complex map of the complexifications $\mathcal{O}(V' \times \bar{V}') \to \mathcal{O}(V \times \bar{V})$ from which we can read off the multiplicities, $\mu(V' \times V') = \mu(V')^2$, $\mu(V \times \bar{V}) = \mu(V)^2$).

Now returning to the proof of proposition 2, we need to improve the above to say $\mathcal{O}(V')/M^v \simeq \mathcal{O}(V)/M^v$ or $\mathcal{O}(\bar{V})/M^v$ so we can apply lemma 4A. This argument proceeds as in Ephraim's paper [8]. We subject T_g to a complex linear change of coordinates to make its linear form of either pure z terms or pure $\bar{z}$ terms. I will not carry this out in detail here because it would just be a duplication of [8]. Instead a sketch of the proof is given below:

Ephraim shows that $\mathscr{A}$ equiv. of complex varieties V, V' implies V' is $\mathcal{O}$ equiv. to V or $\bar{V}$. I want to show the same thing up to order v for large v. This statement would be vacuous (its well known that formal power series equations can be solved if they can be solved up to order n for each n) except for the fact that I want the v to depend only on V, not on V'. Ephraim's proof consists of 3 parts, theorem 3.2, lemma 4.1, and theorem 4.2. Theorem 3.2 states that if f generates $I(V,\mathcal{O})$, σ is the germ of a complex analytic mapping whose initial form has nonmaximal rank, $u(z)$ is a unit in $\mathcal{O}$, and $f(\sigma(z)) = u(z) f(z)$, then V has a nonvanishing holomorphic vector field and hence is isomorphic to a product. This refers only to V

and not to V' so we may simply repeat the inductive argument up to order ν, a step at a time, to prove V has a nonvanishing holomorphic vector field δ up to order ν. (See the claim on p. 25 of [8]). The existence of $\delta = \sum_{i=1} a_i(z) \frac{\partial}{\partial z_i}$ on V can be restated as a problem in solving the polynomial equation: $a_1 \partial_1 f + \dots + a_n \partial_n f + bf = 0$, where f generates $I(V, \mathcal{O})$ and $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ are all unknowns in $\mathcal{O}_n$. By Wavrik's [21] generalization of Artin's theorem, given any polynomial equation with coefficients in a ring of convergent power series there is a ν such that if the equations have a solution up to order ν, then they have a solution with prescribed agreement up to some lower order.

Hence there is a ν depending only on ν such that if $f(\sigma(z)) = u(z) f(z) \bmod M^\nu$ then f is a product. If f has isolated singularity it can not be a product so we have a ν such that $f(\sigma(z)) = u(z) f(z) \bmod M^\nu$ is impossible. (For planar curves it is easy to see that $\nu \geqq E$ is sufficient).

For a C^k function, let T denote the Taylor series up to order k, HT denote the holomorphic terms of T, and AT denote the pure antiholomorphic terms of T. The proofs of theorems 4.1 and 4.2 of [8] go through without change to give a $\bmod M^\nu$ version to yield the following result:

Modified 4.1 and 4.2. *Suppose V is not a product up to order ν and $g: V \to V'$, $h: V \to V'$, $g(0) = 0$, $h(0) = 0$, be a real analytic equivalence up to order ν, $gh = id$, $hg = id$. Then either $(HT_g)(HT_h) \neq 0$ or $(AT_g)(AT_h) \neq 0$ and V' is holomorphic equivalent up to order ν to either V or $\bar{V}$, according to which of the above is nonzero.*

Combining the above results, proposition 2 is now proven. Note that we never used any of lemmas 3A or 3B applied to V' so the k, ν depend only on V.

Remark. If in proposition 2, V is a curve, by lemmas 3C and 4B, k can be picked to be $E + \max\{\mu + 1, 3\delta + 1\}$.

Remark. In proposition 2, if $\dim V > 1$ the hypothesis of irreducible is redundant as we have assumed V has isolated singularity.

Lemma 5. [13] If V and V' are topological equivalent complex analytic planar curves, then V and V' have the same multiplicity.

Proposition 3. *Let C be a complex analytic planar curve, and $k_0 = E + \max\{\mu + 1, 3\delta + 1\}$. Then any complex analytic planar curve C' which is C^k equivalent to C, $k > k_0$, is real analytic equivalent to C.*

Proof. Obvious.

Lemma 6. [14] *If V and V' are C^1 equivalent, germs of complex analytic hypersurfaces, then V and V' have the same multiplicity.*

Lemma 7. [4] *Let V be a complex analytic variety such that $\mathcal{O}_p(V)$ is a Cohen McCauley ring (for instance any curve or complete intersection) and let E be the exponent of the conductor at p. Then $C^E_p(V) \cap \hat{\mathcal{O}}_p(V) = \mathcal{O}_p(V)$.*

Lemma 8. *If V' is a complex analytic hypersurface which is real analytically equivalent to V at p and $C^N_p(V) \cap \tilde{\mathcal{O}}_p(V) = \mathcal{O}_p(V)$, then $C^N_p(V') \cap \tilde{\mathcal{O}}_p(V') = \mathcal{O}_p(V')$.*

Proof. By [8], *V' is complex analytic equivalent to V or $\bar{V}$, so the result is clear.*

In the following Lemmas 9–12, V is always a complex analytic variety in $\mathbb{C}^n$ of dim r and $p \in V$.

Lemma 9. [7, 2.4+3.1]: $C_5(V, p) \subset T(V, C_p^1)$.

Lemma 10. [19]. *If V is singular at p,* $\dim C_5(V, p) > \dim_p V$.

Lemma 11. [19]. *If $\pi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{r+i}$, $i > 0$, is a projection transversal to $C_5(V, p)$, i.e. $\pi^{-1}(0) \cap C_5(V, p) = (0)$, then $\pi | V$ is one to one and has no branching points in Reg V.*

Lemma 12. [21]. *A projection $\pi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^r$ inducing a branched covering of V has the minimal sheeting multiplicity at p if and only if π is transversed to the tangent cone, i.e. $\pi^{-1}(0) \cap C_3(V, p) = (0)$.*

Theorem. *Let V be an irreducible complex analytic hypersurface with isolated singularity at p. Then there is an integer $k > 0$ such that for any complex analytic variety Z which is C^k equivalent to V at p, is real analytically equivalent to V, and complex analytically equivalent to V or $\bar{V}$.*

Proof. Clearly $\dim Z = \dim V$. If V is nonsingular, the result is trivial so we assume that V is singular at p. By lemma 10, $\dim C_5(V, p) > \dim_p V = r$. Since $V \subset \mathbb{C}^{r+1}$ and $C_5(V, p) \subset T(V, C_p^1)$, we have $T(V, C_p^1) = \mathbb{C}^{r+1}$. Hence $T(V, C_p^k) = \mathbb{C}^{r+1}$ for all k. Now a C^k equivalence $f : V \to Z$ induces an isomorphism of tangent spaces $f^* : T(V, C_p^k) \to T(Z, C_q^k)$. Let $Z \subset \mathbb{C}^n$ and π be the restriction of the projection of $\mathbb{C}^n$ to $T(Z, C_q^k) = \mathbb{C}^{r+1}$ and $Z' = \pi(Z)$. Clearly Z' is an irreducible hypersurface with isolated singularity at $q' = \pi(f(p))$. We now show that $\mu(Z, q) = \mu(Z', q')$.

Let $\pi' : Z' \to \mathbb{C}^r$ be any branched covering of Z' near q'. Then $\pi' \circ \pi : Z \to \mathbb{C}^r$ is a branched cover of Z near p and $\mu(Z, \pi'\pi) = \mu(Z', \pi')$ because $\pi | Z$ is one to one. Hence $\mu(Z, q) \leqq \mu(Z', q')$. On the other hand $C_3(Z, q) \subset C_5(Z, q)$, and $\pi(C_3(Z, q))$ is an r dim analytic set in $\mathbb{C}^{r+1}$ so there exist a projection $\pi' : Z' \to \mathbb{C}^r$ transversal to $\pi(C_3(Z, q))$. Then by lemma 12, $\mu(Z, q) = \mu(Z, \pi\pi') = \mu(Z', \pi') \geqq \mu(Z', q')$.

Since π is transversal to $T(Z, C_q^k)$, it induces an isomorphism $\pi^* : T(Z, C_q^k) \to T(Z', C_{q'}^k)$. Hence $\pi(f) : V \to Z'$ is a C^k equivalence of irreducible hypersurfaces with isolated singularity. By proposition 2, V is real analytically equivalent to Z'. It remains to show Z is real analytically equivalent to Z'. By lemmas 7 and 8, $C_{q'}^E(Z') \cap \tilde{\mathcal{O}}_{q'}(Z') = \mathcal{O}_{q'}(Z')$. Now $f = (f_1, f_2, \ldots f_n)$ and we can choose coordinates so that $\pi(f) = (f_1, f_2, \ldots, f_{r+1})$. Then for $i \geqq r+2$, $g_i = f_i((\pi \circ f)^{-1}) \in C_{q'}^k(Z')$. Furthermore since π is one to one on Z, $g_i = \pi_i(\pi^{-1}) \in \tilde{\mathcal{O}}_{q'}(Z')$, where π_i is the projection to the *ith* coordinate. Since $k \geqq E$, $g_i \in C_{q'}^E(Z') \cap \tilde{\mathcal{O}}_{q'}(Z') = \mathcal{O}_{q'}(Z')$ and π^{-1} is holomorphic. Q.E.D.

Corollary. *Let C be a complex analytic planar curve and $k_0 = E + 3\delta + 1$. Then for any complex analytic curve C' which is C^k equivalent to C, $k \geqq k_0$, is complex analytically equivalent to C or $\bar{C}$.*

Proof. By the proof of the theorem and proposition 3, we have $k_0 = E + \max\{\mu + 1, 3\delta + 1\}$. But it is trivial to see that $\delta \geqq \mu$ so $k_0 = E + 3\delta + 1$.

5. Examples

As pointed out be Ephraim [8], real analytic equivalence of 2 complex analytic germs does not imply complex analytic equivalence.

Example. Let V be the image in $\mathbb{C}^2$ of $t \to (t^{12}, t^{18}+t^{27}+2it^{28})$, then $\bar{V}$ is the image in $\mathbb{C}^2$ of $t \to (t^{12}, t^{18}+t^{27}-2it^{28})$. The map $(z, w) \to (\bar{z}, \bar{w})$ is a real analytic equivalence of V and $\bar{V}$ but an elementary computation using the parametrizations shows that V and $\bar{V}$ are not complex analytic equivalent.

Example. Let $k>0, q>k+1, r=(k+1)(q+1)-q$, C_1 be the complex analytic curve in $\mathbb{C}^2$ given by $t \to (t^q, t^{q+1})$ and let C_2 be complex analytic curve in $\mathbb{C}^3$ given by $t \to (t^q, t^{q+1}, t^r)$. Now t^r is a weakly holomorphic function on C_1 which has C^k extension h to $\mathbb{C}^2$ [5], so that all partial derivatives of h vanish at the origin. Hence the C^k map given by $(z, w) \to (z, w, h(z, w))$ has Jacobian matrix equal to the identity at the origin so by the inverse function theorem C_1 and C_2 are C^k equivalent. Furthermore C_1 and C_2 can not be C^∞ equivalent, or else $\mathbb{C}^2 = T(C_1, \mathcal{O}) = T(C_1, C^\infty) = T(C_2, C^\infty) = T(C_2, \mathcal{O}) = \mathbb{C}^3$, a contradiction.

Example. We can also give higher dimensional examples that are C^k equivalent but not C^∞ equivalent, that even have the same holomorphic embedding dimension. Let q, r, and $h(z, w)$ be as in the previous example. Let V_1 be the complex variety in $\mathbb{C}^3$ given by the image of $\mathbb{C}^2$ under the map $(s, t) \to (s, t^q, t^{q+1}) = (y, z, w)$ and V_2 be the image of $(s, t) \to (s, t^q, t^{q+1}+st^r)$. Clearly V_1 and V_2 are C^k equivalent by $(y, z, w) \to (y, z, w+yh(z, w))$. V_1 and V_2 are not C^∞ equivalent, because if they were it would follow that they are complex analytically equivalent: but V_1 is a product in the category of analytic spaces and an elementary computation shows that V_2 is not an analytic product.

Remark. One can give a detailed analysis of the C^k weakly holomorphic equivalences of planar curves by utilizing the following result [5]: Let C be the curve $Z^p = W^q$ in $\mathbb{C}^2$, where $p>q$ and p and q are relatively prime, then w^μ/z^ν has an extension which is precisely k times continuously differentiable, but no C^{k+1} extension

$$\text{where} \quad k = \begin{cases} [\sigma/p] & \text{for} \quad [\sigma/p] < q-\mu \\ q-\mu+\left[\dfrac{\sigma-p(q-\mu)}{q}\right] & \text{for} \quad [\sigma/p] \geqq q-\mu \end{cases}$$

where $\sigma = p\mu - q\nu$ and $[x]$ is the greatest integer less than or equal to x.

References

1. Abhyankar, S., Vander Put, M.: Homomorphisms of analytic local rings. Creille's J. **242**, 26—60 (1970)
2. Artin, M.: On the solutions of analytic equations. Inven. Math. **5**, 277—291 (1968)
3. Artin, M.: Algebraic approximation of structures over complete local rings. Publ. Math. IHES **36**, 23—58 (1969)
4. Becker, J.: C^k weakly holomorphic functions on an analytic set. Proc. Amer. Math. Soc. **39**, 89—93 (1973)

5. Becker, J., Polking, J.: C^k weakly holomorphic functions on an analytic curve. Proceedings of the conference on complex analysis. Rice university studies **59**, 1—12
6. Becker, J., Ephraim, R.: Cartesian products of analytic and complete rings. in preparation
7. Bloom, T.: C^1 functions on a complex analytic variety. Duke Math. J. **36**, 283—296 (1969)
8. Ephraim, R.: C^∞ and analytic equivalence of singularities. Proceedings of Conference on Complex Analysis 1972, Rice
9. Ephraim, R.: Cartesian product structure and C^∞ equivalences of singularities. Trans. Amer. Math. Soc. to appear
10. Hironaka, H., Rossi, H.: On the equivalence of embeddings of exceptional complex spaces. Math. Ann. **156**, 313—333 (1964)
11. Hironaka, H.: On the equivalence of singularities I, p. 153—202. Conference on arithmetical algebraic geometry, Pardue 1963
12. Malgrange, B.: Ideals of differentiable functions. Tata institute of fundamental research studies in mathematics. Oxford: Oxford University Press 1966
13. Milnor, J.: Singular points of complex hypersurfaces, Annals of Mathematical Studies No. 61. New York: Princeton University Press 1968
14. Ephraim, R.: C^1 Presentation of Multiplicity, preprint
15. Spallek, K.: Differierbare und holomorphe Funktionen auf analytischen Mengen. Math. Ann. **161**, 143—162 (1965)
16. Spallek, K.: Über Singularitäten analytischer Mengen. Math. Ann. **172**, 249—268 (1967)
17. Spallek, K.: Differenzierbare Kurve analytischer Mengen. Math. Ann. **177**, 54—66 (1968)
18. Spallek, K.: Zum Satz von Osgood und Hartogs für analytische Moduln II. Math. Ann. **182**, 77—94 (1969)
19. Stutz, J.: Analytic sets as branched covers. Trans. Amer. Math. Soc. **166**, 241—259 (1972)
20. Tougeron, J. A.: Ideaux de functions differentiables, I. Ann. Inst. Fourier **18**, 177—240 (1968)
21. Wavrik, J. J.: A theorem on solutions of Analytic Equations with Applications to Deformations of Complex Structures. Math. Ann. **216**, 127—142 (1975)
22. Whitney, H.: Tangents to an Analytic Variety. Ann. Math. **78**, (1975)
23. Zariski, O., Samuel, P.: Commutative Algebra Vols. I and II. Princeton–Toronto–London: Van Nostrand 1960

Received May 31, 1976

Math. Ann. 225, 69—76 (1977)

Deformation Retracts with Lowest Possible Dimension of Arithmetic Quotients of Self-Adjoint Homogeneous Cones

Avner Ash*
The Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey 08540, USA

§1. Introduction

Let G be a reductive affine algebraic group defined over $\mathbb{Q}$ and let Γ be a torsion-free arithmetic subgroup of G. If K is a maximal compact subgroup of G, let N denote the dimension of the symmetric space G/K, and set $\ell=\mathbb{Q}$-rank of G. Then Borel and Serre proved in [1] that the cohomological dimension of Γ is $N-\ell$. That means that for any Γ-module M, $H^q(\Gamma, M)=0$ for $q>N-\ell$. This leads one to suspect that the locally symmetric space $\Gamma\backslash G/K$ might contain a deformation retract of dimension $N-\ell$. My main purpose is to show that this is indeed true if G is the group of linear automorphisms of a self-adjoint homogeneous cone. (See below for definitions. A special case is when G is the connected component of the identity in $GL(n, \mathbb{R})$.)

This is not difficult if $G=SL(2,\mathbb{R})$, and for $G=SL(3,\mathbb{R})$ the problem was solved by Soulé in [2]. Soulé used the triangulation of G/K given by the Minkowski reduction theory for quadratic forms, but his method doesn't generalize, even to $SL(4,\mathbb{R})$. My method uses the triangulations I constructed in [3], and my retraction is a simplicial map, unlike Soulé's.

The contents of this paper are as follows. In §2, I recall the necessary results about self-adjoint homogeneous cones from [3]. Also, I prove some lemmas. In §3, the desired deformation retract is constructed along with the retraction.

Theoretically, the retract could help in the computation of the cohomology groups of Γ, since it naturally comes with the structure of a finite simplicial complex. This is how Soulé computes the cohomology of $SL(3,\mathbb{Z})$. However, it seems to be too complicated to do this in the higher dimensional cases.

I am grateful to A. Borel for suggesting this problem, and to the referee for his helpful comments.

§2. Summary of the Structure of Self-Adjoint Homogeneous Cones

Proofs of the material in this section may be found in Chapter II of [3]. If G is a real Lie group, G^0 will denote the connected component of the identity.

* Supported in part by National Science Foundation grant MPS 72-05055 A 03.

Let V be a real vector space of finite dimension N, and defined over $\mathbb{Q}$. An open subset C of V is called a *cone* if $x \in C$, $\lambda > 0$ imply $\lambda x \in C$ and C contains no straight line. A cone C is called *self-adjoint* if there exists a scalar product $<,>$ on V such that

$$C = \{x \in V : \langle y, x \rangle > 0 \quad \text{for} \quad y \in \bar{C}, y \neq 0\}.$$

A self-adjoint cone is necessarily convex.

Set $G = \mathrm{Aut}^0(C, V) = \{g \in GL(V) : gC = C\}^0$. The cone C is called *homogeneous* if G acts transitively on C. In this case, we can naturally identify C with the space G/K, where K is the isotropy subgroup of a point in C. If in addition C is self-adjoint, G is reductive and C is a riemannian symmetric space.

Throughout, we make the following rationality assumption: $(*)$ G is cut out of $GL(V)$ by rational equations, so that G has a $\mathbb{Q}$-structure compatible with that of V. In this case, we may also assume the inner product making C self-adjoint to be defined over $\mathbb{Q}$.

A Jordan algebra J is a finite-dimensional algebra satisfying the two identities:

(i) $ab = ba$, $a, b \in J$;

(ii) $a^2(ba) = (a^2 b)a$, $a, b \in J$.

Note that J is not associative in general. If J is defined over $\mathbb{R}$, it is called *formally real* if $a^2 + b^2 = 0$ implies $a = b = 0$.

Let us choose and fix a rational base-point $p \in C \cap V(\mathbb{Q})$. It turns out that $(*)$ holds if and only if V can be given the structure of a formally real Jordan algebra defined over $\mathbb{Q}$ with identity element p, such that C is the set of invertible squares in V. This is the case precisely when $V(\mathbb{Q})$ is "rational" in the terminology of Helwig [5].

An example the reader may keep in mind:
$V = n \times n$ symmetric matrices with entries in $\mathbb{R}$.
$C = n \times n$ positive definite symmetric matrices.
$G = GL^0(n, \mathbb{R})$.

If $A, B \in V$, the scalar product $\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(AB)$ makes C self-adjoint. The corresponding Jordan multiplication is $A \circ B = \frac{1}{2}(AB + BA)$, with ordinary matrix multiplication on the right.

From now on, we view V as a Jordan algebra over $\mathbb{Q}$ with identity p. If $e \in V(\mathbb{Q})$ and $e^2 = e$, we say e is a *rational idempotent* and write $V(e) = \{x \in V : xe = x\}$. Then $V(e)$ is a formally real sub Jordan algebra defined over $\mathbb{Q}$. The set $C(e)$ of invertible squares in $V(e)$ is a self-adjoint homogeneous cone, and $C(e) \subseteq \bar{C}$. We call $C(e)$ a *rational boundary component* of C. Every rational point in $\bar{C}$ is contained in some rational boundary component.

If $D = C(e)$ is a rational boundary component, let $\bar{D}$ denote the closure of D in V. It is clear that $\bar{D} = \{z \in \bar{C} : ze = z\}$.

Two idempotents e and f are *orthogonal* if $ef = 0$. A rational idempotent is *minimal* if it can't be written as the sum of two orthogonal nonzero rational idempotents. Any rational idempotent e can be written as a sum of mutually orthogonal minimal rational idempotents. The number of minimal rational idempotents needed doesn't depend on the particular expression and is by definition the $\mathbb{Q}$-rank of e. We set the $\mathbb{Q}$-rank of $C(e)$ to be the $\mathbb{Q}$-rank of e.

In our example above, if H is a fixed rational k-dimensional subspace of $\mathbb{R}^n$, then the set of all positive semi-definite symmetric matrices with null space exactly H makes up a rational boundary component of C, of $\mathbb{Q}$-rank $n-k$.

From the definition one sees that the rational boundary component of a rational boundary component of C is itself a rational boundary component of C.

Definition. Let $C_i = \cup$ (all rational boundary components of rank $\leqq i$).

This is a disjoint union. If $m \geqq n = \mathbb{Q}$-rank C, C_m is the union of C and all the rational boundary components. Note that from p. 83 and Proposition 11, p. 100 in [3], C_i depends only upon the set of $\mathbb{Q}$-split one-parameter subgroups of G and hence only upon C and $V(\mathbb{Q})$, but not upon the chosen base-point p.

I will prove several lemmas needed later that are not proved in [3].

Lemma 1. *If $z \in C \cap V(\mathbb{Q})$, then $z \in$ closed convex hull of $C_1 \cap V(\mathbb{Q})$.*

Proof. Think of z as a new base-point of the cone C. Then it will be the identity of a new rational Jordan algebra structure of V (a *mutation* of the old one). Then $z = \sum_{i=1}^{n} e_i$, where each e_i is a minimal rational idempotent, and so in $C_1 \cap V(\mathbb{Q})$. Q.E.D.

If $Y \subset V$ and $z \in V$, write $\langle z, Y\rangle = 0$ if $\langle z, y\rangle = 0$ for all y in Y.

Lemma 2. *If $w \in \bar{C}$ and $z \in D$ a rational boundary component of C, and $\langle w, z\rangle = 0$, then $\langle w, D\rangle = 0$.*

Proof. Since the cone C is self-adjoint, we have that w is on the boundary of C and that the hyperplane $H = \{t \in V : \langle w, t\rangle = 0\}$ supports C. If H did not contain D, z would be in the boundary of D relative to its linear span. But a rational boundary component is open in its linear span.

Once we have fixed a base-point p and resulting Jordan structure in V, there is a canonical inner product making C self-adjoint, namely, $\langle x, y\rangle = \mathrm{Trace}\, L(xy)$.

Here $x, y \in V$, xy is their Jordan product, and $L(a)$ is the operator of multiplication by a on V, for any a in V. We always will use this inner product.

Lemma 3. *Given a rational idempotent e,*

$$V(p-e) = \{x \in V : \langle x, e\rangle = 0\}.$$

Proof. This follows from Satz 7.2, p. 335 and Satz 7.3, p. 337 in [6]. Since $px = x$, we have

Corollary. *Given e as above and $x \in V$, $\langle x, e\rangle = 0$ if and only if $xe = 0$.*

Lemma 4. *Let D, E be rational boundary components. Suppose $D \subset C_i$ and $E \subset C_j$. Then $D + E \subset C_{i+j}$.*

To illustrate this lemma, let C be the cone of all $n \times n$ positive definite symmetric matrices. If D is the set of semi-definite matrices with null space (as quadratic form) $H \subset \mathbb{R}^n$ and E the set with null space $W \subset \mathbb{R}^n$, then $D+E$ will be contained in the set with null space $H \cap W$. Now if H and W have codimension i and j respectively in $\mathbb{R}^n$, codimension $H \cap W$ is at most $i+j$.

Proof of Lemma 4. Since the statement is vacuously true when $\mathbb{Q}$-rank $C=1$, we may prove it by induction on $\mathbb{Q}$-rank $C=n$. It suffices therefore to prove that if $i+j<n$, then there exists a rational boundary component F different from C such that $D, E\subset \bar{F}$.

So suppose $i+j<n$. Let $D=C(d)$ and $E=C(e)$. As $d+e\in V(\mathbb{Q})\cap\bar{C}$, $d+e$ is contained in some rational boundary component, say $F=C(f)$. We want to show that $f\neq p$.

Write $d'=p-d$ and $e'=p-e$. By our hypothesis, $\mathbb{Q}$-rank $d'\geqq(n-i)$ and $\mathbb{Q}$-rank $e'\geqq(n-j)$. If $d'e'=0$, then $d'+e'$ is a rational idempotent of $\mathbb{Q}$-rank $\geqq(n-i)+(n-j)>n=\mathbb{Q}$-rank p. This being impossible, we have $d'e'\neq 0$.

Write $d'=d'_1+d'_{\frac{1}{2}}+d'_0$ in the Peirce decomposition for d' relative to e, so that $ed'_k=kd'_k$, $k=1,\frac{1}{2},0$. (See p. 155 [6]). Then $e'd'=d'_1+\frac{1}{2}d'_{\frac{1}{2}}$. By Satz 5.7, p. 155 [6], $\operatorname{Tr} L(d'_{\frac{1}{2}})=0$. By the corollary to Lemma 3, $\operatorname{Tr}(d'e)\neq 0$. We conclude that $d'_0\neq 0$.

But now, using the "associativity" of the inner product (cf. (b) p. 75 [3]) and the fact $ed'_0=0$, we get $\langle f, d'_0\rangle=\langle ef, d'_0\rangle=\langle f, ed'_0\rangle=0$. Thus, $fd'_0=0$ and $f\neq p$.

So $F\neq C$ and $e, d\in\bar{F}$. Using Lemma 2 and the corollary to Lemma 3, one concludes that $E, D\subset\bar{F}$. This completes the proof.

To conclude this section, *I* must describe the part of reduction theory that *I* need.

Let $L\subset V(\mathbb{Q})$ be a lattice, that is, a discrete subgroup of $V(\mathbb{Q})$ so that $L\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}=V(\mathbb{Q})$. We will always write $L'=L-\{0\}$.

An *arithmetic subgroup* of G is a subgroup commensurate with $\operatorname{Aut}(C, V, L)=\{g\in G: gL=L\}$. The letter Γ will always denote a torsion-free arithmetic subgroup of G. Then Γ acts properly and freely on C. Reduction theory concerns finding a useful fundamental domain for Γ.

Definition. If $x_1,\dots,x_s\in V(\mathbb{Q})$, the convex hull σ of the rays $\mathbb{R}_+x_1,\dots,\mathbb{R}_+x_s$ is a *rational polyhedral cone* in V. Here $\mathbb{R}_+$ denotes the positive reals. We call $x_1,\dots,x_s$ *vertices* spanning σ. If $x_1,\dots,x_s$ are linearly independent we say σ is a *simplicial cone*. In this case the convex hull A of $x_1,\dots,x_s$ is a simplex and σ is "the cone over A". If we take the cones over all the simplices in the barycentric subdivision of A, we get a *barycenter subdivision* of σ. The ray $\mathbb{R}_+\left(\sum_{i=1}^{s} x_i\right)$ is the *barycenter*.

The following definition comes from Chapter II of [3]:

Definition. A set of closed polyhedral cones $\{\sigma_\alpha\}$ is called a *Γ-admissible decomposition* of C when the following hold:

1) For each α, $\sigma_\alpha\subset\bar{C}$ and σ_α is the span of a finite number of *rational* vertices (σ_α is "*rational polyhedral*").

2) *A* face of a σ_α is some σ_β.

3) $\sigma_\alpha\cap\sigma_\beta$ is a common face of σ_α and σ_β.

4) For any $\gamma\in\Gamma$, $\gamma\sigma_\alpha$ is some σ_β.

5) Modulo Γ, there are only a *finite* number of σ_α's.

6) $C=\bigcup_\alpha(\sigma_\alpha\cap C)$.

Remarks. We have each $\sigma_\alpha \subset C_n$ = union of all rational boundary components. Suppose $C_n = \bigcup_\alpha \sigma_\alpha$, *This will be the case in our construction below.* If for some σ_α of top dimension and $\gamma \in \Gamma$ we had $\gamma\sigma_\alpha = \sigma_\alpha$, then γ fixes some point of σ_α which is in C. Since Γ is torsion free, $\gamma = 1$. Thus, going to the quotient space, we see that a Γ-admissible decomposition provides a pseudo-dissection of the topological space C_n/Γ, which is a compactification of C/Γ. Of course C_n/Γ has singularities on the boundary. If we take the barycentric subdivision of all the maximal σ_α's and their faces, we get a true triangulation of C_n/Γ.

2) One easily checks from the definition that the set of cones in the barycentric subdivisions of all of the cones in a Γ-admissible decomposition yields again a Γ-admissible decomposition.

3) If B is any compact set contained in C, B meets only a finite number of the σ_α's. This follows immediately from property 5) in the definition and the fact that the set $\{\gamma \in \Gamma : \gamma B \cap \sigma_\alpha \neq \phi\}$ is finite. This latter facts is a consequence of "the property of Siegel" for rational polyhedral cones. (Corollary, p. 116 in [3]. Since B is compact it is contained in some rational polyhedral cone in C).

Here is a way to construct Γ-admissible decompositions. The idea goes back to Voronoï and was revived by Koecher in [4]. See §5, Chapter II, [3], for more details. We may assume that the lattice is chosen so that $\gamma L = L$ for every $\gamma \in \Gamma$.

A subset $K \subset \bar{C}$ is called a *kernel* if $0 \notin \bar{K}$, $C \subset \mathbb{R}_+ K$ and $\lambda K \subset K$ for $\lambda \geqq 1$. If K_1 and K_2 are two kernels, we say they are *comparable* if for some $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_+$ we have $\lambda_1 K_1 \subset K_2 \subset \lambda_2 K_1$. Thus every ray in C eventually enters K, but K stays away from the origin.

Let K_0 denote the closed convex hull of $\bar{C} \cap L'$. It is easy to see that K_0 is a kernel. Then a *co-core* is by definition a closed convex kernel comparable to K_0. Note that if K is a co-core, $\mathbb{R}_+ K \subset C_n$, by Proposition 6, p. 132 [3]. Then in fact $\mathbb{R}_+ K = C_n$, as one sees by applying the following lemma to each rational boundary component:

Lemma 5. *If $y \in C$ there exists $\lambda \in \mathbb{R}_+$ such that λy is in the convex hull of $C \cap L$.*

Proof. By forming a small box around y with rational vertices, one sees that y is in the convex hull of $C \cap V(\mathbb{Q})$. Now choose λ to be the greatest common denominator of the coordinates of the vertices of the box with respect to a lattice basis of L.

We call the convex kernel K *Γ-polyhedral* if

1. for any $\gamma \in \Gamma$, $\gamma K = K$;
2. for any rational polyhedral cone Π with vertices in C_n, $\Pi \cap K$ is cut out of Π by a finite number of supporting hyperplanes of K.

Proposition. *The cones over the maximal-dimensional faces of a Γ-polyhedral co-core, yield, along with their faces, a Γ-admissible decomposition of C.*

This is Proposition 8, §5, Chapter II, [3].

§3. A Good Subspace for the Action of Γ

Keep the notations of the preceding paragraph. In particular, $C \subset V$ is a self-adjoint homogeneous cone, $\dim V = N$, $\mathbb{Q}$-rank $C = n$, $L \subset V$ a lattice giving the $\mathbb{Q}$-structure, and $\Gamma \subset G$ a torsion-free arithmetic group leaving L invariant. We shall prove the following:

Theorem. *C contains a subcone X with the following properties:*

(i) *X is Γ-invariant.*

(ii) *$X/\Gamma \cdot \mathbb{R}_+$ is compact.*

(iii) $\dim X = N - n + 1$.

(iv) *X is a deformation retract of C via a Γ-invariant retraction.*

Since $H^q(\Gamma, M) = H^q(C/\Gamma \cdot \mathbb{R}_+, \tilde{M})$ for any Γ-module M and corresponding local system $\tilde{M}$ on $C/\Gamma \cdot \mathbb{R}_+$, the theorem implies that $H^q(\Gamma, M) = 0$ for $q > N - n$. This result was proven by Borel and Serre in [1] in much greater generality, and it is the motivation for the theorem.

The idea of the proof involves constructing a Γ-admissible decomposition $\{\sigma_\alpha\}$ of C such that every vertex in each σ_α is contained in a minimal rational boundary component. After refining this decomposition, we may assume each σ_α is a simplex. After barycentric subdivision, we may assume each σ_α has a face of at least dimension $n-1$ lying in the *boundary* of C. It is then simple to retract by projecting in each simplex from the boundary-face to the opposite face. Since the original decomposition was Γ-invariant, so is this retraction.

Notice that this construction automatically endows X with a triangulation. We proceed with the proof.

Proof. a) Let K be the closed convex hull of $C_1 \cap L'$. Recall that C_1 is the union of all minimal proper rational boundary components and that $L' = L - \{0\}$. We want to show that K is a Γ-polyhedral co-core.

First, we show that K is a kernel. Clearly, $K \subset \bar{C}$ since $\bar{C}$ is convex. If $\lambda \geqq 1$ and $x \in C_1 \cap L'$, then obviously $\lambda x \in K$, and therefore $\lambda K \subset K$ for $\lambda \geqq 1$.

The inner product in V is defined over $\mathbb{Q}$, so if $y \in C \cap L$ is fixed, the set $\{\langle y, x \rangle : x \in C_1 \cap L'\}$ is bounded below away from zero. (Don't forget that C is self-adjoint). Thus, $0 \notin K$.

It remains to show that $C \subset \mathbb{R}_+ K$. By Lemma 5, this reduces to showing the convex hull of $C \cap L$ is in $\mathbb{R}_+ K$. As the latter is convex, all we need is to prove $C \cap L \subset \mathbb{R}_+ K$. This follows from Lemma 1.

Thus K is a closed convex kernel, obviously Γ-invariant. By Propositions 1, 9, and 10 of §5, Chapter II, [3], it follows easily that K is a Γ-polyhedral kernel. We must next show that K is comparable to K_0 = closed convex hull of $C_n \cap L'$. Of course, $K \subset K_0$. We must find a positive number λ such that $\lambda K_0 \subset K$. From [3] we know that K_0 is Γ-polyhedral and itself gives a Γ-admissible decomposition of C. Thus modulo Γ, K_0 is the union of a finite number of truncated rational polyhedral cones in $\bar{C}$. As K is Γ-invariant, it now suffices to show that some multiple of each of the vertices of these truncated cones is in K. This follows from Lemma 1 applied to the various rational boundary components.

b) Now we may apply the proposition quoted at the end of §2 to get a Γ-admissible decomposition $\{\sigma_\alpha\}$ of C. Note that since K was a co-core, $\bigcup_\alpha \sigma_\alpha = C_n$.

Lemma. *For each α, the vertices of σ_α are contained in $C_1 \cap L$.*

Proof. The point is, we must check no new vertices crept in when we took the closure of the convex hull of $C_1 \cap L'$. It suffices to prove the lemma for top-dimensional σ_α's, because the others are faces of these.

Suppose σ_α is the cone over the face F of $K: F = \{x \in K : \langle x, y\rangle = 1\}$. Here y is a fixed point in $C \cap V(\mathbb{Q})$ (see Proposition 7, §5, Chapter II, [3]). Let $\{z_1, \ldots, z_s\}$ be the set of $z \in C_1 \cap L'$ such that $\langle z, y\rangle = 1$. It is finite since C is self-adjoint. We will show that F is the convex hull of $\{z_1, \ldots, z_s\}$.

We have that $\langle w, y\rangle \geqq 1$ for $w \in K$. Since the inner product is defined over $\mathbb{Q}$, and $y \in C \cap V(\mathbb{Q})$, the set

$$\{\langle w, y\rangle : w \in C_1 \cap L', w \neq z_1, \ldots, z_s\}$$

is bounded below away from 1.

Say $x \in F$. Then x is the limit of a sequence of points x_i in the convex hull of $C_1 \cap L'$. Write each x_i as $x_i = a_i t_i + b_i w_i$ where $t_i \in$ convex hull of $\{z_1, \ldots, z_s\}$; $w_i \in$ convex hull of $C_1 \cap L' - \{z_1, \ldots, z_s\}$; $a_i + b_i = 1$; $a_i, b_i \geqq 0$.

Note that $\langle w_i, y\rangle$ is bounded away from 1 from below. Now

$$\begin{aligned} 1 = \langle x, y\rangle &= \lim_{i \to \infty} (a_i + b_i \langle w_i, y\rangle) \\ &= \lim_{i \to \infty} (1 + b_i \lambda_i) \end{aligned}$$

where $\lambda_i = \langle w_i, y\rangle - 1$ is bounded below away from zero. Therefore, the b_i must tend to zero, and so the limit of the a_i is 1. Passing to a subsequence if necessary, we get $x = t + \lim b_i w_i$, where $t \in$ convex hull of $\{z_1, \ldots, z_s\}$.

So $\lim b_i w_i = u = x - t$. Since $b_i w_i \in \bar{C}$, also $u \in \bar{C}$. But $\langle u, y\rangle = 0$ and $y \in C$, so by the self-adjointess of C, $u = 0$ and $x = t$. Q.E.D.

c) Any convex polyhedron can be written as the union of simplices. Do this to each of the top-dimensional σ_α's. To do it in a Γ-invariant way, simply pick a set of representatives of the Γ-orbits of top-dimensional σ_α's, divide each of them into simplices, and carry the division to other σ_α's by Γ. This is well defined since $\gamma\sigma_\alpha = \sigma_\alpha$ implies $\gamma = 1$ for $\gamma \in \Gamma$. Thus we may assume each σ_α is a simplicial cone.

Now replace each σ_α be the $N!$ subcones of a barycentric subdivision of σ_α. Call this set of cones $\{\tau_\beta\}$. It is also a Γ-admissible decomposition. Let T be the family of top-dimensional simplicial cones in $\{\tau_\beta\}$. Clearly $C_n = \cup(\tau : \tau \in T)$.

If $y_1, \ldots, y_N$ are the vertices of σ_α and φ is a permutation of $(1, \ldots, N)$, the points $y_{\varphi 1}, y_{\varphi 1} + y_{\varphi 2}, \ldots, y_{\varphi 1} + y_{\varphi 2} + \ldots + y_{\varphi N}$ will be the vertices of some τ, and every τ in T arises in this way. For brevity, write $x_i = y_{\varphi 1} + \ldots + y_{\varphi i}$.

By Lemma 4, since each y_j was in C_1, x_i is in C_i. Furthermore, if x_i is in the rational boundary component $D = C(d)$, then for $j \leqq i$, by Lemma 3, $\langle p - d, x_j + y_{\varphi(j+1)} + \ldots + y_{\varphi i}\rangle = 0$. By self-adjointness, $\langle p - d, x_j\rangle = 0$ and so $x_j \in \bar{D}$ by Lemma 3 again. On the other hand, again by self-adjointness, once $x_i \in C$, also $x_k \in C$ for $k \geqq i$.

Hence there is a rational boundary component D and an integer r such that $x_1, \ldots, x_r \in \bar{D}$ and $x_{r+1}, \ldots, x_N \in C$. Since $\dim \tau = \dim V = N$, not all of τ can be in a proper boundary component, so $r < N$. However, $x_i \in C_i$, so that $r \geqq n - 1$.

Let $P(z_1, \ldots, z_s)$ denote the polyhedral cone spanned by the vertices $z_1, \ldots, z_s$. Since $\bar{D}$ and C are convex, we have that $P(x_1, \ldots, x_r) \subset \bar{D} \subset$ boundary of C and $P(x_{r+1}, \ldots, x_N) \subset C$, and $n-1 \leqq r \leqq N-1$, where $\tau = P(x_1, \ldots, x_N)$. This is true for any τ in T.

d) Let $X = \bigcup_{\tau \in T} P(x_{r+1}, \ldots, x_N)$. Here the integer r is understood to depend on τ. I claim X is our sought-after retract of C. We will define a retraction as follows. If $y \in \tau \cap C$, write

$$(*) \quad y = \sum_1^r a_i x_i + \sum_{r+1}^N b_j x_j, \qquad a_i, b_j \geqq 0, \quad \text{some} \quad b_j > 0.$$

Define a map from $(\tau \cap C) \times [0, 1]$ to C by

$$\pi(y, s) = s \sum a_i x_i + \sum b_j x_j.$$

1) Since τ is a simplicial cone and has the properties outlined above, π is well-defined and continuous on $(\tau \cap C) \times [0, 1]$.

2) If $y \in \tau \cap \tau'$, then y is in a common face of τ and τ', and so $\pi(y, s)$ doesn't depend on whether τ or τ' is taken in $(*)$. Thus π is well-defined on $C \times [0, 1]$.

3) If $B \subset C$ is relatively compact, $\pi^{-1}(B) \subset \bigcup_{B \cap \tau \neq \phi} (\tau \cap C) \times [0, 1]$. This is a *finite* union because of Remark 3 to the definition of a Γ-admissible decomposition.

4) By 1) and 3), π is continuous on $C \times [0, 1]$.

5) Since $\{\tau_\beta\}$ is a Γ-invariant set and each $\gamma \in \Gamma$ is a linear transformation, X and π are Γ-invariant.

6) $\pi(y, 1) = y$ and $\pi(y, 0) \in X$ for any $y \in C$.
Also $\pi(x, 0) = x$ for any $x \in X$.

Thus X is a Γ-invariant deformation retract of C, and X/Γ is a deformation retract of C/Γ.

Modulo Γ there are only finitely many τ's, and $P(x_{r+1}, \ldots, x_N)$ doesn't meet the boundary of C, so $X/\Gamma \cdot \mathbb{R}_+$ is compact. Finally, $\dim X = \sup_\tau \{N - r\}$ and $r \geqq n-1$, so $\dim X \leqq N - n + 1$. However, Borel and Serre in [1] showed that for some module M, $H^{N-n}(\Gamma, M) \neq 0$. Thus we must have $\dim X = N - n + 1$. Q.E.D.

Remark. It may actually happen for some τ that $r > n-1$, as an example with $SL(3, \mathbb{Z})$ shows.

References

1. Borel, A., Serre, J. P.: Corners and arithmetic groups. Comm. Math. Helv. **48**, 436—491 (1973)
2. Soulé, C.: Cohomologie de $SL_2(\mathbb{Z})$. C. R. Acad. Sc. Paris, **280** 251—254 (1975)
3. Ash, A., Mumford, D., Rapaport, M., Tai, Y.: Smooth compactifications of the locally symmetric varities. Brookline, Mass.: Math. Sci. Press, 1975
4. Koecher, M.: Beiträge zu einer Reduktionstheorie in Positivitätsbereichen I. Math. Ann. **141**, 384—432 (1961)
5. Helwig, K.-H.: Zur Koecherischen Reduktionstheorie in Positivitätsbereichen II. Math. Zeitschr. **91**, 169—178 (1966)
6. Braun, H., Koecher, M.: Jordan-Algebren. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1966

Received June 14, 1976

Math. Ann. 225, 77—88 (1977)

Semicontinuity of L-Dimension

David Lieberman[1] and Edoardo Sernesi[2]*

[1] Department of Mathematics, Brandeis University, Waltham, Mass. 02154, U.S.A.
[2] Istituto Matematico, Università degli Studi, I-44100 Ferrara, Italia

§ 1. Introduction

Let X be a compact complex space and L and invertible sheaf. The notion of *L-dimension* of X, denoted $k(X, L)$, was introduced by Iitaka in [4] (for the definition see § 3). When X is a compact manifold and $L = \omega_X$ the canonical invertible sheaf, $k(X, \omega_X)$ is the *canonical dimension* of X, or the *Kodaira dimension* of X, sometimes denoted $k\dim(X)$; it is the fundamental invariant in the Enriques-Kodaira classification of surfaces.

An important open question is the behaviour of Kodaira dimension under deformation. Not much is known about it. One knows that the canonical dimension is a deformation invariant for curves and surfaces. In the former case the result is trivial, in the latter it has been proved by Iitaka [3] using the classification of surfaces. It is also known that for higher dimensional manifolds the canonical dimension is not a deformation invariant: Nakamura has produced an example of a family of threefolds $\{\mathfrak{X}_t\}_{t\in\Delta}$ over a disc Δ such that $k\dim(\mathfrak{X}_0)=0$ and $k\dim(\mathfrak{X}_t) = -\infty$ if $t \neq 0$ (cf. [8]).

We investigate the behaviour of L-dimension under deformation. Our main results are the following.

Theorem. *Let $\mathfrak{L}$ be an invertible sheaf on a complex space $\mathfrak{X}$ and $\mathfrak{X} \xrightarrow{\pi} S$ a proper and flat morphism onto an irreducible complex space S. There is a constant k and a set $W \subseteq S$, which is the complement of the union of a countable number of proper closed subvarieties, such that*

$$k(\mathfrak{X}_s, \mathfrak{L}_s) = k \quad \text{if } s \in W,$$
$$k(\mathfrak{X}_s, \mathfrak{L}_s) > k \quad \text{if } s \in S \setminus W.$$

Theorem. *Let L be an invertible sheaf on a compact, reduced, irreducible complex space X such that the following condition is satisfied for some $n > 0$:*

---

* To whom offprint requests should be sent

(α) *if* $k(X,L) \neq -\infty$ *there is a polynomial* $Q(T)$ *with rational coefficients, of degree less than* $k(X,L)$, *such that*

$$\dim_{\mathbb{C}} H^1(X, L^{\otimes in}) \leqq Q(i) \quad \textit{for all } i \gg 0.$$

Then for every deformation (X', L') *of* (X, L) (*over an irreducible base space*) *we have* $k(X', L') \geqq k(X, L)$.

Condition (α) is satisfied in the important case when $k(X,L) = \dim X$ and $L^{\otimes n}$ is spanned by its global sections for some $n > 0$ (see Corollary (4.3)). This gives in particular that if X is a compact manifold of general type and if $\omega_X^{\otimes n}$ is generated by its global sections for some $n > 0$, then every deformation of X (over an irreducible base space) is again a manifold of general type; this result has also been proved by H. Kurke using different methods. Since Mumford has proved [5] that for surfaces of general type $\omega_X^{\otimes n}$ is generated by global sections when $n \gg 0$, we get as a particular case the result of Iitaka [3] that deformations of surfaces of general type are of general type.

The techniques used are developed in § 2; they are based on strong finiteness theorems (cf. [2] and [6]) and consist of a detailed analysis of the projective data of the problem via graded and homological algebra.

In § 3 we introduce the basic notions; the first theorem is proved and a class of examples is described.

In § 4 we prove the second main result and some corollaries.

§ 2. Preliminaries and Notations

(2.1) Let $R = \sum_{i \geqq 0} R_i$ be a graded $\mathbb{C}$-algebra. If n is a positive integer denote $R^{(n)} = \sum_{i \geqq 0} R_{in}$; then one has a natural identification of schemes $\operatorname{Proj}(R) = \operatorname{Proj}(R^{(n)})$.

If $R = \mathbb{C}[T_0, \ldots, T_N]/H$, where H is a homogeneous ideal in the polynomial ring $\mathbb{C}[T_0, \ldots, T_N]$, we say that R is a *homogeneous* $\mathbb{C}$*-algebra*; if moreover R is an integral domain we say that R is a *homogeneous* $\mathbb{C}$*-domain.*

If $R = \sum_{i \geqq 0} R_i$ is a graded $\mathbb{C}$-algebra and n is a positive integer we denote $R^{[n]} = R_0[R_n]$, the graded subalgebra generated by R_n over R_0.

(2.2) **Lemma.** *Let* $R = \sum_{i \geqq 0} R_i$ *be a homogeneous* $\mathbb{C}$*-domain and let* $P(T)$ *be its characteristic polynomial* [9]. *Suppose that* $\hat{R} = \sum_{i \geqq 0} \hat{R}_i$ *is a graded sub* $\mathbb{C}$*-algebra of* R *such that* $\hat{R}_i \times R_i$ *for all* i, *satisfying the following condition:*

(C) *There is a polynomial* $\hat{P}(T)$ *with rational coefficients, having the same degree and the same leading coefficient as* $P(T)$, *such that*

$$\dim_{\mathbb{C}} \hat{R}_i \geqq \hat{P}(i) \quad \text{for all } i \gg 0.$$

Then R *and* $\hat{R}$ *have the same quotient field.*

Proof. It suffices to prove that given any nonzero $y \in R_j$, $j>0$, there is an $\hat{x} \in \hat{R}_i$ for some $i>0$, such that $\hat{x}\, y \in \hat{R}_{i+j}$. Suppose not. Then for all $i>0$ $y\hat{R}_i \cap \hat{R}_{i+j}=0$ so that we have an inclusion $y\hat{R}_i \times R_{i+j}/\hat{R}_{i+j}$. Therefore by condition (C) for all $i \gg 0$ we have

$$\hat{P}(i) \leqq \dim_{\mathbb{C}} \hat{R}_i \leqq \dim_{\mathbb{C}} R_{i+j} - \dim_{\mathbb{C}} \hat{R}_{i+j} \leqq P(i+j) - \hat{P}(i+j).$$

But since $P(T)$ and $\hat{P}(T)$ have same degree and leading coefficient, degree $\hat{P}(T)$ $>$ degree$(P(T+j)-\hat{P}(T+j))$ and this is a contradiction.

(2.3) All complex spaces will be assumed to be connected and not necessarily reduced.

Let $\mathfrak{X} \xrightarrow{\pi} S$ be a proper holomorphic map between complex spaces and $\mathfrak{F}$ a coherent sheaf on $\mathfrak{X}$; denote by $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ and $\mathcal{O}_S$ the structure sheaves of $\mathfrak{X}$ and S respectively. For each point $s \in S$ let $\mathfrak{X}_s$ be the fibre $\pi^{-1}(s)$, $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_s}$ its structure sheaf, and $\mathfrak{F}_s = \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_s} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathfrak{F}|_{\mathfrak{X}_s}$, the sheaf theoretic restriction of $\mathfrak{F}$ to $\mathfrak{X}_s$ (we view $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_s}$ as an $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-module after extending by zero outside $\mathfrak{X}_s$). In a well known way [6] one defines natural homomorphisms of $\mathbb{C}$-vector spaces

$$\mathbf{t}_s^q \colon (R^q\pi_*(\mathfrak{F}))_s/m(s)(R^q\pi_*(\mathfrak{F}))_s \to H^q(\mathfrak{X}_s, \mathfrak{F}_s), \qquad q=0,1,\ldots$$

where $(R^q\pi_*(\mathfrak{F}))_s$ is the stalk at s of the higher direct image sheaf $R^q\pi_*(\mathfrak{F})$ and $m(s)$ is the maximal ideal of the local ring $\mathcal{O}_{S,s}$.

(2.4) **Proposition.** *Let $\mathfrak{X} \xrightarrow{\pi} S$ be a proper morphism of complex spaces, $\mathfrak{F}$ a coherent sheaf on $\mathfrak{X}$ which is $\mathcal{O}_S$-flat. Assume that S is a nonsingular curve. Then $\pi_*\mathfrak{F}$ is a locally free sheaf of finite rank and at each $s \in S$ the following are true:*

(a) $\mathbf{t}_s^0 \colon (\pi_*\mathfrak{F})_s/m(s)(\pi_*\mathfrak{F})_s \to \mathrm{H}^0(\mathfrak{X}_s, \mathfrak{F}_s)$ is injective.

(b) $\operatorname{rank}_{\mathcal{O}_S}(\pi_*\mathfrak{F}) \geqq \dim_{\mathbb{C}} H^0(\mathfrak{X}_s, \mathfrak{F}_s) - \dim_{\mathbb{C}} H^1(\mathfrak{X}_s, \mathfrak{F}_s)$.

Proof. Let $s \in S$ be any point. One can prove [6] that there is a complex of finite free $\mathcal{O}_{S,s}$-modules

$$K^\bullet \colon K^0 \xrightarrow{\delta^0} K^1 \xrightarrow{\delta^1} K^2 \xrightarrow{\delta^2} \cdots$$

such that

$$H^p(K^\bullet) = (R^p\pi_*(\mathfrak{F}))_s,$$
$$H^p(K^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_{S,s}} \mathbb{C}) = H^p(\mathfrak{X}_s, \mathfrak{F}_s).$$

By standard homological arguments one can moreover assume that $\delta^{p-1}(K^{p-1}) \times m(s)K^p$ for all p.

We have that $(\pi_*\mathfrak{F})_s = H^0(K^\bullet)$ is a submodule of K^0, so it is free and finite because K^0 is and $\mathcal{O}_{S,s}$ is a one-dimensional regular local ring. This is true for all $s \in S$, hence $\pi_*\mathfrak{F}$ is locally free of finite rank.

Now consider the exact sequence of $\mathcal{O}_{S,s}$-modules

$$0 \to (\pi_*\mathfrak{F})_s \to K^0 \to B^1 \to 0$$

where $B^1=\delta^0(K^0)$. After tensoring by $\mathbb{C}$ over $\mathcal{O}_{S,s}$ we get an exact sequence

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{O}_{S,s}}(B^1,\mathbb{C})\to(\pi_*\mathfrak{F})_s\otimes\mathbb{C}\xrightarrow{\mathbf{t}}K^0\otimes\mathbb{C}\to B^1\otimes\mathbb{C}\to 0.$$

The $\mathcal{O}_{S,s}$-module B^1 is a submodule of the free module K^1, so it is free and therefore $\mathrm{Tor}_1(B^1,\mathbb{C})=0$. Hence $\mathbf{t}$ is injective. Moreover, since $\delta^p(K^p)\times m(s)K^{p+1}$, the coboundary maps in $K^{\cdot}\otimes C$ are zero; hence $K^p\otimes C=H^p(\mathfrak{X}_s,\mathfrak{F}_s)$ for all p. In particular $K^0\otimes C$ is identified with $H^0(\mathfrak{X}_s,\mathfrak{F}_s)$ and the map $\mathbf{t}$ with $\mathbf{t}_s^0$. This proves (a).

All the K^p's are free and finite and

$$\mathrm{rank}_{\mathcal{O}_{S,s}}K^p=\dim_{\mathbb{C}}K^p\otimes C=\dim_{\mathbb{C}}H^p(\mathfrak{X}_s,\mathfrak{F}_s).$$

From the exact sequence of free $\mathcal{O}_{S,s}$-modules

$$0-(\pi_*\mathfrak{F})_s\to K^0\to K^1$$

we get

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}_{\mathcal{O}_S}\pi_*\mathfrak{F}&=\mathrm{rank}_{\mathcal{O}_{S,s}}(\pi_*\mathfrak{F})_s\geqq\mathrm{rank}_{\mathcal{O}_{S,s}}K^0-\mathrm{rank}_{\mathcal{O}_{S,s}}K^1\\&=\dim_{\mathbb{C}}H^0(\mathfrak{X}_s,\mathfrak{F}_s)-\dim_{\mathbb{C}}H^1(\mathfrak{X}_s,\mathfrak{F}_s)\end{aligned}$$

and this proves (b).

(2.5) Consider a compact complex space X and an invertible sheaf L on X. If i, j, p, q are nonnegative integers one has the cup product

$$H^p(X,L^{\otimes i})\times H^q(X,L^{\otimes j})\to H^{p+q}(X,L^{\otimes(i+j)})$$

induced by the pairing $L^{\otimes i}\times \mathrm{L}^{\otimes j}\to \mathrm{L}^{\otimes(i+j)}$. In particular

$$R=\sum_{i\geqq 0}R_i=:\sum_{i\geqq 0}H^0(X,L^{\otimes i})$$

is a graded $\mathbb{C}$-algebra and each of the groups

$$\sum_{i\geqq 0}H^q(X,L^{\otimes i}),\qquad q=1,2,\ldots$$

is a graded R-module. If X is reduced and irreducible $R_0=\mathbb{C}$ and R is an integral domain.

If $H^0(X,L^{\otimes i})$ contains a section which is not identically zero we denote

$$\Phi_{i,L}\quad(\text{or }\Phi_i)\colon\quad X\dashrightarrow P(H^0(X,L^{\otimes i}))$$

the meromorphic map from X to the projective space of hyperplanes in $H^0(X,L^{\otimes i})$ defined by the sections of $L^{\otimes i}$.

For later use we give a basic criterion of finite generation for rings and modules of the type we are considering.

(2.6) **Proposition.** *Let X be a compact complex space, L an invertible sheaf on X generated by its global sections. Then $R=\sum_{i\geqq 0}H^0(X,L^{\otimes i})$ is a $\mathbb{C}$-algebra of finite type and the modules*

$$\sum_{i\geqq 0}H^q(X,L^{\otimes i}),\qquad q=1,2,\ldots$$

are finite over R. Moreover there are polynomials $P_0(T)$, $P_1(T)$, ... with rational coefficients such that

$$\dim_{\mathbb{C}} H^q(X, L^{\otimes i}) = P_q(i) \quad \textit{for all } i \gg 0,$$

and

$$\textit{degree } P_q(T) = \dim \operatorname{Supp}(R^q \Phi_{1*}(\mathcal{O}_X)).$$

Proof. By assumption $L = \Phi^* \mathcal{O}_{P^n}(1)$, where $\Phi = \Phi_1 \colon X \to P^n$. For each $i \geqq 0$ we may consider the Leray spectral sequence of $(L^{\otimes i}, \Phi)$:

$$H^{\cdot}(X, L^{\otimes i}) \Leftarrow E_2^{a,b}(i) = H^a(P^n, R^b \Phi_*(L^{\otimes i})).$$

One easily checks that $R^b \Phi_*(L^{\otimes i}) = R^b \Phi_*(\mathcal{O}_X) \otimes \mathcal{O}_{P^n}(i)$ and all the sheaves $R^b \Phi_*(\mathcal{O}_X)$ are coherent by Grauert's theorem [2]. Therefore by a well known result of Serre [7] for each b we have that

$$H^a(P^n, R^b \Phi_*(L^{\otimes i})) = 0 \quad \text{if } a > 0 \text{ and } i \gg 0.$$

Since only a finite number of values of b are involved, we conclude that there is a uniform i_0 such that for $i \geqq i_0$

$$H^a(P^n, R^b \Phi_*(L^{\otimes i})) = 0 \quad \text{for all } a > 0 \text{ and all } b,$$

and therefore the Leray spectral sequence of $(L^{\otimes i}, \Phi)$ degenerates, giving

$$H^q(X, L^{\otimes i}) = H^0(P^n, R^q \Phi_*(L^{\otimes i})) \quad \text{for } i \geqq i_0. \tag{1}$$

Now recall from [7] the well known fact that for all coherent sheaves F on P^n the modules $\sum_{i \in \mathbb{Z}} H^0(P^n, F(i))$ are (TF)-finite over $S = C[T_0, \dots, T_n]$. Therefore, since R has a natural structure of graded S-algebra and this induces a structure of S-module on each $\sum_{i \geqq 0} H^q(X, L^{\otimes i})$, $q = 1, 2, \dots$, from (1) we deduce

an isomorphism of R with $\sum_{i \in \mathbb{Z}} H^0(P^n, \Phi_* L^{\otimes i})$; therefore R is (TF)-finite as an S-module, hence finite because all R_i's are finite dimensional $\mathbb{C}$-vector spaces and R is graded in positive degrees. Therefore R is an algebra of finite type over $\mathbb{C}$;

a (TF)-isomorphism of $\sum_{i \geqq 0} H^q(X, L^{\otimes i})$ with $\sum_{i \in \mathbb{Z}} H^0(P^n, R^q \Phi_*(\mathcal{O}_X) \otimes \mathcal{O}_{P^n}(i))$ for each q. Again we get that all modules $\sum_{i \geqq 0} H^q(X, L^{\otimes i})$ are finite over S (because graded in positive degrees and $\dim_{\mathbb{C}} H^q(X, L^{\otimes i}) < \infty$), hence they are finite over R. Finally the isomorphisms (1) give, for $i \gg 0$,

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} H^q(X, L^{\otimes i}) &= \dim_{\mathbb{C}} H^0(P^n, R^q \Phi_*(\mathcal{O}_X) \otimes \mathcal{O}_{P^n}(i)) \\ &= \chi(R^q \Phi_*(\mathcal{O}_X) \otimes \mathcal{O}_{P^n}(i)), \end{aligned}$$

the Euler-Poincarè characteristic of the coherent sheaf $R^q \Phi_*(\mathcal{O}_X) \otimes \mathcal{O}_{P^n}(i)$. It is well known [7] that

$$\chi(R^q \Phi_*(\mathcal{O}_X) \otimes \mathcal{O}_{P^n}(i)) = P_q(i) \quad \text{for all } i$$

where $P_q(T)$ is a polynomial with rational coefficients and

$$\text{degree } P_q(T) = \dim \operatorname{Supp} (R^q \Phi_*(\mathcal{O}_X)).$$

§ 3. L-Dimension and Relative $\mathfrak{L}$-Dimension

(3.1) Let X be a compact complex space and L an invertible sheaf on X; let

$N(X,L)=\{i>0$: there exist $x\in X$ and $f\in H^0(X,L^{\otimes i})$ s.t. $f(x)\neq 0\}$.

If $i\in N(X,L)$ one has the meromorphic map

$\Phi_i\colon X \dashrightarrow P(H^0(X,L^{\otimes i}))$

defined by the sections of $L^{\otimes i}$; let $I(\Phi_i)$ be the indeterminacy locus of Φ_i.

Definition. The *L-dimension of X* is

$$k(X,L)\begin{cases} = \sup\limits_{i\in N(X,L)} \dim \overline{\Phi_i(X\setminus I(\Phi_i))}, & \text{if } N(X,L)\neq\emptyset \\ = -\infty, & \text{if } N(X,L)=\emptyset \end{cases}$$

($\overline{}$ denotes closure in the ambient space).

(3.2) *Remarks.* (a) If X is nonsingular and $L=\omega_X$ is the canonical sheaf on X, $k(X,\omega_X)$ is frequently denoted $k\dim(X)$ and it is called the *Kodaira dimension of* X, or the *canonical dimension of* X.

(b) If $k(X,L)\geq 0$ it follows directly from the definition that $k(X,L)=\sup\limits_{i>0}\dim \operatorname{Proj}(R^{[i]})$, where $R^{[i]}$ is the graded subalgebra of $R=\sum\limits_{j\geq 0} H^0(X,L^{\otimes j})$ generated by $R_i=H^0(X,L^{\otimes i})$ over $R_0=H^0(X,\mathcal{O}_X)$.

(c) If X is reduced and irreducible then

$k(X,L)=k(X,L^{\otimes n})$ for every $n>0$.

In fact it is clear that $k(X,L^{\otimes n})\leq k(X,L)$ for all $n>0$. Conversely for all $h,n>0$, $0\neq\tau\in H^0(X,L^{\otimes h})$, the map $\sigma\mapsto\sigma\otimes\tau^{\otimes n-1}$ is an inclusion

$H^0(X,L^{\otimes h})\hookrightarrow H^0(X,L^{\otimes nh})$

(because the ring R is an integral domain), and therefore $k(X,L)\leq k(X,L^{\otimes n})$ also.

(3.3) Let $\mathfrak{X}\xrightarrow{\pi} S$ be a proper and flat morphism of complex spaces and $\mathfrak{L}$ an invertible sheaf on $\mathfrak{X}$. One can introduce a notion of relative $\mathfrak{L}$-dimension, generalizing the previous definition. For each positive integer i we have a canonical homomorphism of coherent sheaves on $\mathfrak{X}$ $\pi^*\pi_*\mathfrak{L}^{\otimes i}\to\mathfrak{L}^{\otimes i}$; put

$N(\mathfrak{X}/S,\mathfrak{L})=\{i>0$: there exists $x\in\mathfrak{X}$ s.t. $(\pi^*\pi_*\mathfrak{L}^{\otimes i})_x\to(\mathfrak{L}^{\otimes i})_x$ is surjective$\}$.

If $i\in N(\mathfrak{X}/S,\mathfrak{L})$, a meromorphic S-map

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X} \arrow[rr, dashed, "f_i"] \arrow[dr] & & P(\pi_*\mathfrak{L}^{\otimes i}) \arrow[dl, "p_i"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

is defined by the homomorphism $\pi^*\pi_*\mathfrak{L}^{\otimes i}\to\mathfrak{L}^{\otimes i}$. Denote by $I(f_i)$ the proper closed subvariety of $\mathfrak{X}$ where f_i is not defined and put

$$k(\mathfrak{X}/S, \mathfrak{L}) \begin{cases} = \sup\limits_{i \in N(\mathfrak{X}/S, \mathfrak{L})} \dim \overline{f_i(\mathfrak{X} \setminus I(f_i))} - \dim S & \text{if } N(\mathfrak{X}/S, \mathfrak{L}) \neq \emptyset \\ = -\infty & \text{if } N(\mathfrak{X}/S, \mathfrak{L}) = \emptyset. \end{cases}$$

We call $k(\mathfrak{X}/S, \mathfrak{L})$ the *$\mathfrak{L}$-dimension of $\mathfrak{X}/S$* (or the *relative $\mathfrak{L}$-dimension of* $\mathfrak{X}$).

(3.4) **Theorem.** *Let $\pi\colon \mathfrak{X} \to S$ be a proper and flat morphism of complex spaces, with S irreducible, and $\mathfrak{L}$ an invertible sheaf on $\mathfrak{X}$. There is a subset $W \times S$ which is the complement of the union of countably many proper closed subvarieties, such that*

(i) $k(\mathfrak{X}_s, \mathfrak{L}_s) = k(\mathfrak{X}'/S_{\mathrm{red}}, \mathfrak{L}')$ if $s \in W$

(ii) $k(\mathfrak{X}_s, \mathfrak{L}_s) > k(\mathfrak{X}'/S_{\mathrm{red}}, \mathfrak{L}')$ if $s \in S \setminus W$

where $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X} \times_S S_{\mathrm{red}}$ and $\mathfrak{L}'$ is the pullback of $\mathfrak{L}$ on $\mathfrak{X}'$.

Proof. Without loss of generality we may assume S reduced. We start by constructing a set $W_0 \times S$ which is the complement of a countable number of proper closed subvarieties of S and such that the following two conditions hold:

(i)′ $k(\mathfrak{X}_s, \mathfrak{L}_s) = k(\mathfrak{X}/S, \mathfrak{L})$ if $s \in W_0$,

(ii)′ $k(\mathfrak{X}_s, \mathfrak{L}_s) \geqq k(\mathfrak{X}/S, \mathfrak{L})$ if $s \in S \setminus W_0$.

Take $S \setminus W_0$ to be the set of points s such that at least one of the following occurs for some $i > 0$:

(a) one of the $\mathcal{O}_{S,s}$-modules

$(\pi_* \mathfrak{L}^{\otimes i})_s, (R^1 \pi_* (\mathfrak{L}^{\otimes i}))_s, \ldots$

is not free.

(b) $i \in N(\mathfrak{X}/S, \mathfrak{L})$ and

$\dim \overline{f_i(\mathfrak{X} \setminus I(f_i))}_s > \dim \overline{f_i(\mathfrak{X} \setminus \mathrm{I}(f_i))} - \dim S$.

In (b) we have denoted by $\overline{f_i(\mathfrak{X} \setminus I(f_i))}_s$ the fibre at s of the map $p_i\colon \overline{f_i(\mathfrak{X} \setminus I(f_i))} \to S$ induced by the projection from $P(\pi_* \mathfrak{L}^{\otimes i})$; since $I(f_i)$ is a proper closed subvariety of $\mathfrak{X}$, the commutative diagram

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X} \setminus I(f_i) \arrow[rr, "f_i"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \overline{f_i(\mathfrak{X} \setminus I(f_i))} \arrow[dl, "p_i"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

implies that p_i is surjective (because π is dominant). Therefore

$$\dim p_i^{-1}(s) \geqq \dim \overline{f_i(\mathfrak{X} \setminus I(f_i))} - \dim S \qquad \text{for each } s \in S$$

and strict inequality holds only on a proper closed subvariety of S (by semicontinuity of dimension of the fibres of a map between complex spaces). The set where (a) occurs for a fixed $i > 0$ is also a proper closed subvariety of S because S is reduced [1], therefore we see that W_0 is the complement of a countable union of proper closed subvarieties of S.

Notice that if $s\in W_0$ $\pi_*\mathfrak{L}^{\otimes i}$ commutes with base change at s for each $i>0$, i.e. given a diagram of complex spaces and holomorphic maps of the form

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}\times_S T & \xrightarrow{b'} & \mathfrak{X} \\ {\scriptstyle\pi'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ T & \xrightarrow{b} & S \end{array}$$

if $b(t)=s$ for some $t\in T$, then $(b^*\pi_*\mathfrak{L}^{\otimes i})_t=(\pi'_*b'^*\mathfrak{L}^{\otimes i})_t$; this is true because all $\mathcal{O}_{S,s}$-modules $(R^j\pi_*\mathfrak{L}^{\otimes i})_s$ are free [6].

If $k(\mathfrak{X}/S,\mathfrak{L})=-\infty$ then $H^0(\mathfrak{X}_s,\mathfrak{L}_s^{\otimes i})=(\pi_*\mathfrak{L}^{\otimes i})_s\otimes_{\mathcal{O}_{S,s}}\mathbb{C}=0$ for all $i>0$ and all $s\in W_0$ (because $\pi_*\mathfrak{L}^{\otimes i}$ commutes with base change at all $s\in W_0$), hence $k(\mathfrak{X}_s,\mathfrak{L}_s)=-\infty$ for all $s\in W_0$ and $(i)'$ and $(ii)'$ follow in this case.

Therefore we may assume that $k(\mathfrak{X}/S,\mathfrak{L})\geqq 0$. At each point $s\in S$ consider the graded $\mathbb{C}$-algebra

$$P_s=\sum_{i\geqq 0}(\pi_*\mathfrak{L}^{\otimes i})_s\otimes_{\mathcal{O}_{S,s}}\mathbb{C};$$

from the definition of the maps f_i it follows that for each $i\in N(\mathfrak{X}/S,\mathfrak{L})$

$$\operatorname{Proj}(P_s^{[i]})=\overline{f_i(\mathfrak{X}\setminus I(f_i))}_s.$$

If $s\in W_0$, $P_s\cong R_s=\sum_{i\geqq 0}H^0(\mathfrak{X}_s,\mathfrak{L}_s^{\otimes i})$ (because all $\pi_*\mathfrak{L}^{\otimes i}$ commute with base change at s) and

$$\dim\operatorname{Proj}(P_s^{[i]})=\dim\overline{f_i(\mathfrak{X}\setminus I(f_i))}-\dim S \qquad \text{for all } i\in N(\mathfrak{X}/S,\mathfrak{L})$$

because at $s\in W_0$ (b) does not occur. Therefore at every $s\in W_0$

$$k(\mathfrak{X}/S,\mathfrak{L})=\sup_{i>0}\dim\operatorname{Proj}(P_s^{[i]})=\sup_{i>0}\dim\operatorname{Proj}(R_s^{[i]})=k(\mathfrak{X}_s,\mathfrak{L}_s).$$

This proves (i)'.

To prove (ii)'[1] assume first that S is a nonsingular curve. In this case if $i\in N(\mathfrak{X}/S,\mathfrak{L})$ all fibres of $p_i\colon\overline{f_i(\mathfrak{X}\setminus I(f_i))}\to S$ have the same dimension and since p_i is surjective

$$\dim\overline{f_i(\mathfrak{X}\setminus I(f_i))}_s=\dim\overline{f_i(\mathfrak{X}\setminus I(f_i))}-1$$

for all $s\in S$. Therefore for every $s\in S$ if we consider the graded $\mathbb{C}$-algebra $P_s=\sum_{i\geqq 0}(\pi_*\mathfrak{L}^{\otimes i})_s\otimes_{\mathcal{O}_{S,s}}\mathbb{C}$ we have

$$\begin{aligned} k(\mathfrak{X}/S,\mathfrak{L}) &= \sup_{i\in N(\mathfrak{X}/S,\mathfrak{L})}\dim\overline{f_i(\mathfrak{X}\setminus I(f_i))}-1=\sup_{i\in N(\mathfrak{X}/S,\mathfrak{L})}\dim\overline{f_i(\mathfrak{X}\setminus I(f_i))}_s \\ &= \sup_{i>0}\dim\operatorname{Proj}(P_s^{[i]}). \end{aligned} \tag{1}$$

Moreover by (2.4) the map $\mathrm{t}^0_{s,i}\colon(\pi_*\mathfrak{L}^{\otimes i})_s\otimes\mathbb{C}\to H^0(\mathfrak{X}_s,\mathfrak{L}_s^{\otimes i})$ is injective for all $i>0$ and $s\in S$, hence for all $s\in S$ we have an inclusion $P_s\subseteq R_s=\sum_{i\geqq 0}H^0(\mathfrak{X}_s,\mathfrak{L}_s^{\otimes i})$. Therefore

$$k(\mathfrak{X}/S,\mathfrak{L})=\sup_{i>0}\dim\operatorname{Proj}(P_s^{[i]})\leqq\sup_{i>0}\dim\operatorname{Proj}(R_s^{[i]})=k(\mathfrak{X}_s,\mathfrak{L}_s)$$

[1] Our thanks to J. Carlson for correcting our initial erroneous proof of this fact

for all $s\in S$ and this proves (ii)' in case S is a nonsingular curve. In the general case consider any $s\in S\setminus W_0$ and fix a holomorphic map $f: \tilde{S}\to S$, where $\tilde{S}=\{z\in C: |z|<1\}$, such that $f(0)=s$ and $f(\tilde{S})\nsubseteq S\setminus W_0$. Let $\tilde{\mathfrak{X}}=\mathfrak{X}\times_S \tilde{S}\xrightarrow{\tilde{\pi}}\tilde{S}$ be the induced flat family over $\tilde{S}$ and let $\tilde{\mathfrak{L}}$ be the pullback of $\mathfrak{L}$ over $\tilde{\mathfrak{X}}$. One has $k(\tilde{\mathfrak{X}}_{\tilde{s}}, \tilde{\mathfrak{L}}_{\tilde{s}})=k(\mathfrak{X}_{f(\tilde{s})}, \mathfrak{L}_{f(\tilde{s})})$ for all $\tilde{s}\in\tilde{S}$. In particular $k(\mathfrak{X}_s, \mathfrak{L}_s)=k(\tilde{\mathfrak{X}}_0, \tilde{\mathfrak{L}}_0)\geqq k(\tilde{\mathfrak{X}}/\tilde{S}, \tilde{\mathfrak{L}})$ because S is a nonsingular curve. Therefore it suffices to show that $k(\tilde{\mathfrak{X}}/\tilde{S}, \tilde{\mathfrak{L}})=k(\mathfrak{X}/S, \mathfrak{L})$. Letting $\tilde{s}\in\tilde{S}$ be such that $f(\tilde{s})\in W_0$, we have

$$P_{\tilde{s}}=\sum_{i\geqq 0}(\tilde{\pi}_*\mathfrak{L}^{\otimes i})_{\tilde{s}}\otimes_{\mathcal{O}_{S,\tilde{s}}}\mathbb{C}=\sum_{i\geqq 0}(\pi_*\mathfrak{L}^{\otimes i})_{f(\tilde{s})}\otimes\mathbb{C}=P_{f(\tilde{s})} \tag{2}$$

because all $\pi_*\mathfrak{L}^{\otimes i}$ commute with base change at $f(\tilde{s})$. Therefore we have

$$k(\tilde{\mathfrak{X}}/\tilde{S}, \tilde{\mathfrak{L}})=\sup_{i>0}\dim\operatorname{Proj}(P_{\tilde{s}}^{[i]})=\sup_{i>0}\dim\operatorname{Proj}(P_{f(\tilde{s})}^{[i]})=k(\mathfrak{X}/S, \mathfrak{L})$$

where the first equality is a consequence of (1), the second is (2) and the last equality holds by part (i)' because $f(\tilde{s})\in W_0$.

To conclude the proof of the theorem we proceed by induction on $\dim S$. If $\dim S=0$ the theorem is trivially true.

Suppose $\dim S>0$ and let $\times$ be an irreducible component of $S\setminus W_0$. Let $k_\alpha=\inf_{s\in V^\alpha}k(\mathfrak{X}_s, \mathfrak{L}_s)$. If $k_\alpha=k(\mathfrak{X}/S,\mathfrak{L})$ apply the induction hypothesis to the family $\mathfrak{X}_{|V^\alpha}\to V^\alpha$ (V^α lis a closed subvariety of S) to find a countable family $\{V^\alpha_{i(\alpha)}\}_{i(\alpha)\in I(\alpha)}$ of proper closed subvarieties $V^\alpha_{i(\alpha)}$ of V^α such that

$$k(\mathfrak{X}_s, \mathfrak{L}_s)=k(\mathfrak{X}/S, \mathfrak{L}) \quad \text{if } s\in V^\alpha\setminus\bigcup_{i(\alpha)}V^\alpha_{i(\alpha)},$$

$$k(\mathfrak{X}_s, \mathfrak{L}_s)>k(\mathfrak{X}/S, \mathfrak{L}) \quad \text{if } s\in\bigcup_{i(\alpha)}V^\alpha_{i(\alpha)}.$$

If $k_\alpha>k(\mathfrak{X}/S, \mathfrak{L})$ take $I(\alpha)=\{1\}$ and $V^\alpha_1=V^\alpha$. Now let

$$W=S\setminus\bigcup_{\substack{\alpha\in A\\ i(\alpha)\in I(\alpha)}}V^\alpha_{i(\alpha)}$$

(here A is the countable set indexing the irreducible components of $S\setminus W_0$). It is clear from the construction that W satisfies all the conditions of the theorem.

(3.5) *Remark.* The set $S\setminus W$ can actually be dense (in the analytic topology). Here is an example.

Let X be a compact Riemann surface of genus $g\geqq 1$, $S=J(X)$ the jacobian variety of X, and $\mathfrak{P}$ the Poincarè sheaf on $X\times S$; recall that for each $s\in S$ $\mathfrak{P}$ restricts on $X\times s$ to the invertible sheaf $\mathfrak{P}_s$ of degree zero corresponding to s. For a fixed integer $r\geqq 0$, take $\mathfrak{X}=P^r\times X\times S$, π: $\mathfrak{X}\to S$ the projection onto the last factor; this is the trivial family of deformations of $P^r\times X$ over S. Moreover let

$$\mathfrak{L}=[\pi_1^*\mathcal{O}(1)]\otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}[(\pi_2\times\pi_3)^*\mathfrak{P}],$$

where π_1: $\mathfrak{X}\to P^r$ and $\pi_2\times\pi_3$: $\mathfrak{X}\to X\times S$ are the projections. For each $s\in S$ and for each $i\geqq 0$ we have

$$\mathfrak{L}_s^{\otimes i}=p_1^*\mathcal{O}(i)\otimes p_2^*\mathfrak{P}_s^{\otimes i}=p_1^*\mathcal{O}(i)\otimes p_2^*\mathfrak{P}_{is}$$

where $p_1\colon P^r \times X \to P^r$ and $p_2\colon P^r \times X \to X$ are the projections. Using Kunneth's formula we see that

$$H^0(P^r \times X, \mathfrak{L}_s^{\otimes i}) = H^0(P^r, \mathcal{O}(i)) \otimes H^0(X, \mathfrak{P}_{is}) \begin{cases} = 0 & \text{if } is \neq 0 \in S \\ = H^0(P^r, \mathcal{O}(i)) & \text{if } is = 0 \in S. \end{cases}$$

If $is=0$ and $i \geqq 1$, $\mathfrak{L}_s^{\otimes i}$ is generated by its sections and the map

$$\Phi_{\mathfrak{L}_s, i}\colon P^r \times X \to P(H^0(P^r, \mathcal{O}(i)))$$

is the composition of p_1 with the i-th Veronese embedding of P^r. Therefore

$$\dim \Phi_{\mathfrak{L}_s, i}(P^r \times X) = r \qquad \text{when } is = 0 \in S \quad \text{and} \quad i > 0.$$

We conclude that

$$k(P^r \times X, \mathfrak{L}_s) \begin{cases} = r & \text{if } s \text{ is a point of finite order} \\ = -\infty & \text{if } s \text{ is not of finite order} \end{cases}$$

and we see that in this case $W = S \setminus \{\text{points of finite order}\}$ so that $S \setminus W$ is a dense subset of S.

§ 4. Variation of L-Dimension: A Cohomological Condition

The following theorem gives sufficient conditions on $\mathfrak{X}_0$ and $\mathfrak{L}_0$ for a point 0 to be in W (with the notations of (3.4)).

(4.1) **Theorem.** *Let X be a reduced, irreducible, compact complex space, L an invertible sheaf such that the following condition is satisfied for some $n>0$:*

(α) *if $k(X, L) \neq -\infty$ there is a polynomial $Q(T)$ with rational coefficients such that degree $(Q(T)) < k(X, L)$ (if $k(X, L) = 0$ $Q(T) \equiv 0$) and*

$$\dim_{\mathbb{C}} H^1(X, L^{\otimes in}) \leqq Q(i) \qquad \text{for } i \gg 0.$$

Then for each flat family $\mathfrak{X} \to S$ of deformations of $X = \mathfrak{X}_0$ and invertible sheaf $\mathfrak{L}$ on $\mathfrak{X}$ such that $\mathfrak{L}_0 = L$, $o \in S$ any irreducible space, we have

$$k(\mathfrak{X}_s, \mathfrak{L}_s) \geqq k(X, L) \qquad \text{for all } s \in S.$$

Proof. We may assume that $k(X, L) \geqq 0$. We must prove that $o \in W$, where W is the subset of S whose existence is proved in Theorem (3.4). As in the proof of (3.4) we may restrict to the case when S is a nonsingular curve. Moreover by (3.2) (c) we may replace L and $\mathfrak{L}$ by suitable tensor powers such that $\dim \Phi_1(X \setminus I(\Phi_1)) = k(X, L)$, where $\Phi_1\colon X \dashrightarrow P(H^0(X, L))$, and such that condition (α) is satisfied with $n=1$. Therefore $k(X, L) = \dim \operatorname{Proj}(R^{[1]})$, where $R = \sum_{i \geqq 0} H^0(X, L^{\otimes i})$.

Consider the graded $\mathbb{C}$-algebra $P_0 = \sum_{i \geqq 0} P_{0,i} = \sum_{i \geqq 0} (\pi_* \mathfrak{L}^{\otimes i})_0 \otimes_{\mathcal{O}_{S,0}} \mathbb{C}$; we will prove that $\sup_{i>0} \dim \operatorname{Proj}(P_0^{[i]}) = k(X, L)$ and this will give the theorem because from the equalities (1) in the proof of (3.4) we see that $\sup_{i>0} \dim \operatorname{Proj}(P_0^{[i]}) = k(\mathfrak{X}/S, \mathfrak{L})$.

Since S is a nonsingular curve, P_0 injects into R, by Proposition (2.4) (a). Consider the graded subring $\hat{R}=R^{[1]}\cap P_0$. For each $i>0$ we have $\hat{R}_i=R_i^{[1]}\cap P_{0,i}\subseteq R_i$ and therefore

$$\dim \hat{R}_i \geqq \dim R_i^{[1]}+\dim P_{0,i}-\dim R_i,$$

and from Proposition (2.4) (b) we get

$$\dim R_i^{[1]}+\dim P_{0,i}-\dim R_i \geqq \dim R_i^{[1]}-\dim H^1(X, L^{\otimes i}).$$

When $i \gg 0$ we obtain

$$\dim \hat{R}_i \geqq P(i)-Q(i)$$

where $P(T)$ is the characteristic polynomial of $R^{[1]}$ and $Q(T)$ is given by condition (α). Since

$$\text{degree}\,(Q(T))<\text{degree}\,(P(T))$$

we see that $P(T)$ and $P(T)-Q(T)$ have same degree and same leading coefficient, so that by Lemma (2.2) $\hat{R}$ and $R^{[1]}$ have the same quotient field. This implies that for some $j>0$

$$\dim \operatorname{Proj}(\hat{R}^{[j]})=\dim \operatorname{Proj}(R^{[1]})=k(X, L)$$

and since $\hat{R}\subseteq P_0$ a fortiori

$$\dim \operatorname{Proj}(P_0^{[j]})=k(X, L).$$

(4.2) **Corollary.** *Let X be a reduced, irreducible, compact complex space and L an invertible sheaf on X such that the following conditions are satisfied:*

(i) *for some positive integer m, $L^{\otimes m}$ is spanned by its sections;*

(ii) $\dim \operatorname{Supp}(R^1\Phi_{mi*}(\mathcal{O}_X))<\dim \Phi_{mi}(X)$ *when $i\gg 0$ and m as in* (i).

Then for each flat family $\mathfrak{X}\to S$ of deformations of $X=\mathfrak{X}_0$ and invertible sheaf $\mathfrak{L}$ on $\mathfrak{X}$ such that $\mathfrak{L}_0=L$, $0\in S$ an irreducible space, we have

$$k(\mathfrak{X}_s, \mathfrak{L}_s)\geqq k(\mathfrak{X}_0, \mathfrak{L}_0) \quad \textit{for all } s\in S.$$

Proof. Note that condition (ii) makes sense because by (i) all the rational maps $\Phi_{mi}\colon X \dashrightarrow P(H^0(X, L^{\otimes mi})$ are everywhere defined on X. When $i\gg 0$ $\dim \Phi_{mi}(X)=k(X,L)$; therefore proposition (2.6) applied to $L^{\otimes n}$, $n=mi$ for an $i\gg 0$, shows that (i) and (ii) imply condition (α) of the theorem, with $Q(T)=P_1(T)$. Therefore (4.2) follows from (4.1).

(4.3) **Corollary.** *Let X be a reduced, irreducible, compact complex space, L an invertible sheaf on X such that $k(X,L)=\dim X$, and suppose that condition* (i) *of* (4.2) *is satisfied.*

Then for each flat family $\mathfrak{X}\to S$ of deformations of $X=\mathfrak{X}_0$ and invertible sheaf $\mathfrak{L}$ on $\mathfrak{X}$ such that $\mathfrak{L}_0=L$, $0\in S$ an irreducible space, we have

$$k(\mathfrak{X}_s, \mathfrak{L}_s)=k(\mathfrak{X}_0, \mathfrak{L}_0) \quad \textit{for all } s\in S.$$

Proof. It suffices to show that condition (ii) of (4.2) is satisfied. Since

$$\dim X = \dim \Phi_{mi}(X) + \dim(\text{generic fibre of } \Phi_{mi})$$

and

$$\dim \Phi_{mi}(X) = k(X, L) = \dim X \qquad \text{when } i \gg 0$$

we see that

$$\dim(\text{generic fibre of } \Phi_{mi}) = 0 \qquad \text{when } i \gg 0.$$

Hence $\dim \operatorname{Supp}(R^1 \Phi_{mi*}(\mathcal{O}_X)) < \dim \Phi_{mi}(X)$ when $i \gg 0$.

References

1. Frisch, J.: Points de platitude d'un morphism d'espaces analytiques. Inventiones math. **4**, 118–138 (1967)
2. Grauert, H.: Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen. Publ. Math. IHES **5** (1960)
3. Iitaka, S.: Deformations of compact complex surfaces, I, II and III. Global Analysis, papers in honor of Kodaira, Princeton Univ. Press and Tokyo Univ. Press (1969), p. 267–272; J. Math. Soc. Japan **22**, 247–261 (1970); ibid. **23**, 692–705 (1971)
4. Iitaka, S.: On D-dimensions of algebraic varieties. J. Math. Soc. Japan **23**, 356–373 (1971)
5. Mumford, D.: The canonical ring of an algebraic surface. Appendix to Zariski's paper "The theorem of Riemann-Roch for high multiples of an effective divisor on an algebraic surface". Ann. of Math. **76**, 612–615 (1962)
6. Riemenschneider, O.: Über die Anwendung algebraischer Methoden in der Deformationstheorie komplexer Räume. Math. Ann. **187**, 40–55 (1970)
7. Serre, J.-P.: Fasceaux Algebriques Coherents. Ann. of Math. **61**, 197–278 (1955)
8. Ueno, K.: Introduction to classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces. Lecture Notes in Math. **412**, pp. 288–332. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1974
9. Zariski, O., Samuel, P.: Commutative Algebra, Vol. II. New York: Van Nostrand 1960

Math. Ann. 225, 89—97 (1977)

Conformally Flat Submanifolds of Euclidean Space*

John Douglas Moore
Department of Mathematics, University of California, Santa Barbara, CA 93106, USA

1. Introduction

A Riemannian manifold is called *conformally flat* if every point of the manifold lies in a local coordinate system $(x^1, \ldots, x^n)$ with respect to which the Riemannian metric takes the form $e^\lambda \sum (dx^i)^2$, for some real-valued function λ. An immersed submanifold of Euclidean space is *conformally flat* if it is a conformally flat Riemannian manifold when it is given the induced submanifold Riemannian metric. In this article, we will show that the second fundamental form of such a submanifold has a particularly simple structure, when the codimension is low. By means of Morse theory, the structure of the second fundamental form will lead us to the following theorem:

Theorem. *Let M^n be an n-dimensional compact conformally flat (immersed) submanifold of $(n+N)$-dimensional Euclidean space E^{n+N}. Then M^n possesses a CW decomposition with no cells of dimension k, where*

$$N < k < n - N . \tag{1}$$

Thus the homology groups of M^n must satisfy the condition: $H_k(M^n; G) = 0$ for those integers k satisfying (1), where G is any coefficient group.

In the theorem, the ambient Euclidean space E^{n+N} can be replaced by an $(n+N)$-dimensional constant curvature sphere S^{n+N} or an $(n+N)$-dimensional hyperbolic space H^{n+N}, by making minor modifications in the proof. Moreover, the hypothesis that M^n be compact can be weakened somewhat: it suffices to assume that M^n is a proper submanifold of E^{n+N}, i.e. that the set of points of M^n which lie within any closed ball of E^{n+N} is compact in the topology of M^n.

An immersion f from a Riemannian manifold M^n into some Euclidean space is said to be a *conformal immersion* if the given Riemannian metric $\langle\, , \rangle$ on M^n is conformally equivalent to the Riemannian metric induced on M^n by f, i.e. if $\langle\, , \rangle = e^\lambda f^*$ (dot product), where λ is some real-valued function. Since any Riemannian space form is conformally flat, the above theorem gives topological con-

* This research was partially supported by NSF Grant No. MPS 74-06843 A 01 and "Sonderforschungsbereich Theoretische Mathematik" (SFB 40) at the University of Bonn.

ditions necessary for the conformal immersion of space forms into Euclidean spaces of certain dimensions. For example, the theorem implies that the n-dimensional flat torus T^n and the n-dimensional constant curvature real projective space P^n possess no conformal immersion in E^{n+N}, when $N \leqq \frac{n}{2} - 1$. More generally, we have the following corollary:

Corollary. *Let M^n be a compact connected n-dimensional Riemannian manifold of nonnegative constant sectional curvature, which possesses a conformal immersion in E^{n+N}, where $N \leqq \frac{n}{2} - 1$. Then M^n is simply connected, hence isometric to some constant curvature sphere.*

To prove the corollary (assuming the theorem), suppose first that M^n has constant curvature zero. It is well-known that in this case the n-dimensional flat torus T^n can be regarded as a finite Riemannian covering of M^n. (This fact is due to Bieberbach; compare [8, Vol. 1, Theorem 4.2 of Chapter V and Note 5].) If f is a conformal immersion from M^n into E^{n+N} with $N \leqq \frac{n}{2} - 1$, then $f \circ \pi$ is a conformal immersion of T^n, where $\pi: T^n \to M^n$ is the covering map. But the theorem implies that such a conformal immersion of T^n cannot exist, since $H_k(T^n; \mathbb{Z}) \neq 0$ for $0 < k < n$.

Suppose now that M^n has constant positive curvature and that the fundamental group of M^n is nonzero. Since the fundamental group is finite, it must contain a subgroup isomorphic to $\mathbb{Z}_p$, for some prime p. Let $\tilde{M}^n$ be a Riemannian covering of M^n whose fundamental group is isomorphic to $\mathbb{Z}_p$. As before, a conformal immersion of M^n in E^{n+N}, $N \leqq \frac{n}{2} - 1$, induces a conformal immersion of the covering space $\tilde{M}^n$. But a standard argument, based on the spectral sequence of the covering $S^n \to \tilde{M}^n$, shows that $H_k(\tilde{M}^n; \mathbb{Z}_p) = H_k(\mathbb{Z}_p; \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p$ for $0 < k < n$. (Compare [7, p. 288, Theorem 17.1].) Hence the theorem again implies that such a conformal immersion cannot exist.

Thus the only possibility is that M^n be simply connected, and the corollary is proven.

Of course the corollary also holds when E^{n+N} is replaced by S^{n+N} or H^{n+N}. However, I don't know how to extend the above argument to the case where M^n is assumed to have constant *negative* curvature.

The corollary compares favorably with theorems on the nonexistence of conformal immersions obtained previously by means of the Chern-Simons invariants [5, Theorem 5.14], [3, § 6]. The Chern-Simons method gives results for certain positive-curvature space forms which are dimensionwise a little better $\left(N = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \text{ when } n \equiv 3 \pmod 4\right)$. On the other hand, our approach seems to yield consequences not attainable by straightforward application of [3] and [5]. For example, consider the special case of our corollary: P^6 possesses no conformal immersion in E^8. (It is known that P^6 possesses a topological immersion in E^7.)

The first step in studying conformally flat submanifolds of Euclidean space should consist of a thorough investigation of the algebraic structure of the second fundamental form. The theory of flat symmetric bilinear forms, described in § 2 of this article, will give us considerable insight into the structure of the second fundamental form of an n-dimensional conformally flat submanifold M^n of E^{n+N}, so long as $N \leqq n-3$. Geometrically, this second fundamental form structure has the following interpretation (which we will not prove here in detail): M^n is locally foliated by $(n-N)$-dimensional constant curvature submanifolds, totally umbilic in both M^n and E^{n+N}, if we stay away from "singular points" of M^n, where the ranks of various differential systems change. Thus some of the structure of conformally flat hypersurfaces, discovered by Cartan [1, § 24] and others, appears to carry over in some form to n-dimensional conformally flat submanifolds of codimension $\leqq n-3$ in Euclidean space.

The proof of the theorem will be completed in § 3 by applying Morse theory to an appropriate height function on a given conformally flat submanifold.

The main ideas of this article originated from an investigation we made of *isometric* immersions from spheres into Euclidean space. Flat symmetric bilinear forms also arise quite naturally in this isometric immersion problem, and lead to an understanding of the structure of the second fundamental form of a submanifold of constant positive curvature. (Compare Theorem 1 of O'Neill [10].) By modifying the argument in § 3 of this article, it is not difficult to prove that the above theorem remains true when the words "conformally flat submanifold" are replaced by "submanifold of constant positive curvature" and the bounds (1) on the dimensions of the cells are strengthened to $N \leqq k \leqq n-N$. Thus the only compact n-dimensional positive curvature space form which can be isometrically immersed in E^{n+N} with $N \leqq \frac{n}{2}$ is the n-sphere[1]. Perhaps it is not too surprising that some of the theory of constant curvature submanifolds can be extrapolated to the more general context of conformally flat submanifolds. After all, constant curvature submanifolds are the "simplest" conformally flat submanifolds.

Throughout this article, all manifolds, functions, etc. will be of class C^∞.

2. Flat Symmetric Bilinear Forms

Let V and W be finite-dimensional real vector spaces with $\dim V = n$ and $\dim W = m$. Suppose that V possesses a W-valued symmetric bilinear form

$$\beta: V \times V \to W$$

and that W possesses a nondegenerate real-valued symmetric bilinear form

$$\langle\, ,\rangle: W \times W \to R\,.$$

Then we will say that β is *flat* (with respect to $\langle\, ,\rangle$) iff

$$\langle \beta(x,z), \beta(y,w)\rangle - \langle \beta(x,w), \beta(y,z)\rangle = 0, \quad \text{for all} \quad x, y, z, w \in V.$$

[1] This extends a recent result of W. Henke, see Math. Ann. **222**, 89—95 (1976)

If $(e,\dots,e_m)$ is a basis for W, we can write

$$\beta=\sum_{i=1}^m e_i\varphi^i,$$

where each φ^i is an ordinary real-valued symmetric bilinear form. If $a_{ij}=\langle e_i, e_j\rangle$, then the condition for β to be flat becomes

$$\sum_{i,j=1}^m a_{ij}[\varphi^i(x,z)\varphi^j(y,w)-\varphi^i(x,w)\varphi^j(y,z)]=0, \quad \text{for all} \quad x,y,z,w\in V.$$

In the terminology of Cartan [2, § 22], symmetric bilinear forms which satisfy this condition are called *exteriorly conjugate* with respect to $\langle\,,\rangle$. In the case where $\langle\,,\rangle$ is positive-definite and $(e_1,\dots,e_m)$ is an orthonormal basis, the φ^i's are said to be *exteriorly orthogonal.*

In this article we are concerned mostly with the case where $\langle\,,\rangle$ is Lorentzian. We say that $\langle\,,\rangle$ is a *Lorentzian* inner product if there is a basis $(e_1,\dots,e_m)$ for W such that

$$\langle e_i, e_j\rangle=0 \quad \text{for} \quad i\neq j.$$
$$\langle e_1, e_1\rangle=-1, \langle e_2, e_2\rangle=\dots=\langle e_m, e_m\rangle=1.$$

A vector $e\in W$ is *null* if $\langle e, e\rangle=0$. Note that if e and $\tilde{e}$ are null vectors in a Lorentzian inner product space $(W,\langle\,,\rangle)$, then

$$\langle e,\tilde{e}\rangle=0\Leftrightarrow e \text{ and } \tilde{e} \text{ are linearly dependent}.$$

If $\beta: V\times V\to W$ is a symmetric bilinear form and $x\in V$, we define a linear map $\beta(x): V\to W$ by $\beta(x)(y)=\beta(x,y)$. Let $q=\max\{\dim\beta(z)(V): z\in V\}$. We will say that an element $x\in V$ is *regular* if $\dim\beta(x)(V)=q$.

Lemma. *Suppose that $\beta: V\times V\to W$ is a symmetric bilinear form, flat with respect to a nondegenerate real-valued symmetric bilinear form $\langle\,,\rangle$ on W. If x is a regular element of V, and $N(\beta,x)=\{n\in V:\beta(n,x)=0\}$, then*
(i) $\langle\beta(n,y),\beta(x,z)\rangle=0,$ *for all* $n\in N(\beta,x),\ y,z\in V.$
(ii) $\beta(n,y)\in\beta(x)(V),$ *for all* $n\in N(\beta,x),\ y\in V.$

Proof. Item (i) follows immediately from the flatness of β:

$$\langle\beta(n,y),\beta(z,x)\rangle=\langle\beta(n,x),\beta(z,y)\rangle=0.$$

The proof of (ii) is a little more involved. The central observation is that the function $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ defined by $t\mapsto\dim\beta(x+ty)(V)$ is lower semicontinuous, when y is any fixed element of V. This is proven by noting that

$$\beta(x+t_0y,z_1),\dots,\beta(x+t_0y,z_k) \text{ are linearly independent}$$
$$\Rightarrow\beta(x+ty,z_1),\dots,\beta(x+ty,z_k) \text{ are also linearly independent}$$
$$\text{for } t \text{ in some neighborhood of } t_0.$$

When $t=0$, our function assumes its maximum value, namely q, since x is regular. Hence when t is sufficiently close to zero, $\beta(x+ty)(V)$ will be a q-dimensional subspace of W. Since $\beta(x+ty,n)=t\beta(y,n)$, we see that $\beta(n,y)\in\beta(x+ty)(V)$ for all $t\neq 0$. Since $\beta(x+ty)(V)$ is a continuously varying q-plane when t is sufficiently small, we see that $\beta(n,y)\in\beta(x)(V)$, and (ii) is proven. q.e.d.

Associated with any symmetric bilinear form $\beta: V \times V \to W$ is its *nullity space*

$$N(\beta) = \{y \in V : \beta(y, x) = 0 \text{ for all } x \in V\}.$$

Note that $N(\beta) \subseteq N(\beta, x)$ for every $x \in V$.

Proposition 1. *If $(W, \langle\,,\rangle)$ is a positive-definite inner product space and $\beta: V \times V \to W$ is a symmetric bilinear form, flat with respect to $\langle\,,\rangle$, then* $\dim N(\beta) \geqq \dim V - \dim W$.

Proof. Let x be a regular element of V. Since $\langle\,,\rangle$ is positive-definite, it follows from (i) and (ii) in the preceding lemma that $N(\beta, x) \subseteq N(\beta)$. But $N(\beta, x)$ is the nullity space of the linear operator $\beta(x): V \to W$. Hence $\dim N(\beta) \geqq \dim N(\beta, x) \geqq \dim V - \dim W$. q.e.d.

Proposition 1 is well-known. It follows quickly from the algebraic version of Theorem 2 in Chern and Kuiper [4], and also implies this theorem by a short argument. Alternatively, Proposition 1 can be regarded as an immediate consequence of the theorem in § 20 of Cartan [2].

Using the lemma, we can derive various propositions similar to Proposition 1 in cases where the inner product $\langle\,,\rangle$ is not assumed to be positive-definite. The following proposition may be regarded as something like a "Lorentzian analogue" of Proposition 1, but the hypotheses have been designed to correspond quite closely to the geometric situation we will encounter in § 3.

Proposition 2. *Suppose that $(W, \langle\,,\rangle)$ is a Lorentzian inner product space and that $\beta: V \times V \to W$ is a symmetric bilinear form, flat with respect to $\langle\,,\rangle$. If* $\dim V > \dim W$ *and $\beta(x, x) \neq 0$ for all nonzero $x \in V$, then there is a nonzero null vector $e \in W$ and a nonzero symmetric bilinear form $\varphi: V \times V \to \mathbb{R}$ such that* $\dim N(\beta - e\varphi) \geqq \dim V - \dim W + 2$.

Proof. As in the proof of Proposition 1, we let x be a regular element of V. We claim that the restriction of $\langle\,,\rangle$ to $\beta(x)(V)$ is degenerate. Indeed, if this restriction were nondegenerate, (i) and (ii) of the lemma would imply that $N(\beta, x) \subseteq N(\beta)$ just as in the proof of Proposition 1, hence that $\dim N(\beta) \geqq \dim V - \dim W \geqq 1$. But $\beta(x, x) \neq 0$ for all nonzero $x \in V \Rightarrow N(\beta) = 0$, a contradiction.

Since the restriction of $\langle\,,\rangle$ to $\beta(x)(V)$ is degenerate, there is a nonzero null vector $e_1 \in \beta(x)(V)$. Since $\langle\,,\rangle$ is Lorentzian, we can extend (e_1) to a basis $(e_1, \dots, e_m)$ for W such that the matrix equation

$$(\langle e_i, e_j\rangle) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ . & . & . & & & & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

is satisfied. The lemma tells us that

$$\langle \beta(n, y), \beta(x)(V)\rangle = 0, \quad \beta(n, y) \in \beta(x)(V), \quad \text{for} \quad n \in N(\beta, x),\ y \in V.$$

Hence $\beta(n,y)$ must be a null vector in $\beta(x)(V)$, and since $\langle\,,\rangle$ is Lorentzian, $\langle\beta(n,y),e_1\rangle=0\Rightarrow\beta(n,y)$ must be a multiple of the null vector e_1. Now let n be a fixed nonzero element of $N(\beta,x)$. Since $\beta(n,n)\neq 0$, $\beta(n,n)$ must be a *nonzero* multiple of e_1. Thus the equation

$$\langle\beta(n,n),\beta(y,z)\rangle=\langle\beta(n,y),\beta(n,z)\rangle=(\text{something})\langle e_1,e_1\rangle=0,\quad\text{for}\quad y,z\in V,$$

implies that

$$\langle\beta(y,z),e_1\rangle=0,\quad\text{for}\quad y,z\in V.$$

Next we write

$$\beta=\textstyle\sum_{i=1}^m e_i\varphi^i,$$

where each φ^i is an ordinary real-valued symmetric bilinear form. Since $\langle\beta,e_1\rangle=0$, it follows from (2) that $\varphi^2=0$. Let $\tilde W$ be the subspace of W spanned by $(e_3,\dots,e_n)$, $\tilde\beta=\beta-e_1\varphi^1$. Then $\tilde\beta(V\times V)\subseteqq\tilde W$. Since β and $e_1\varphi^1$ are both flat, and

$$\langle\beta(y,z),e_1\varphi^1(u,v)\rangle=0,\quad\text{for all}\quad y,z,u,v\in V,$$

we conclude that $\tilde\beta$ is also flat. The restriction of $\langle\,,\rangle$ to $\tilde W$ is positive-definite, and hence Proposition 1 implies that $\dim N(\tilde\beta)\geqq\dim V-\dim\tilde W=\dim V-\dim W+2$. Set $e=e_1$, $\varphi=\varphi^1$. Then $\dim N(\beta-e\varphi)=\dim N(\tilde\beta\geqq\dim V-\dim W+2$, and we are done. q.e.d.

3. Proof of the Theorem

Our setup is this: We have an n-dimensional Riemannian manifold M^n isometrically immersed in $(n+N)$-dimensional Euclidean space E^{n+N}. If p is a point of M^n, we let T_pM and N_pM denote the tangent space and normal space to M^n at p. The second fundamental form at p is a certain symmetric bilinear form,

$$\alpha: T_pM\times T_pM\to N_pM,$$

which roughly speaking, describes the "shape" of the submanifold at p. (For a precise definition, see [8, Vol. 2, Chap. 7].) Geometric interpretation of α: If $\gamma:\mathbb{R}\to M^n$ is a unit speed curve with tangent vector $\gamma'(o)$ at p, then $\alpha(\gamma'(o),\gamma'(o))$ is the normal component of the curvature of γ at p.

The second fundamental form α is related to the curvature of the Riemannian manifold M^n by means of the Gauss equation

$$R(x,y,z,w)=\langle\alpha(x,z),\alpha(y,w)\rangle-\langle\alpha(x,w),\alpha(y,z)\rangle,\quad\text{for}\quad x,y,z,w\in T_pM. \tag{3}$$

Here R is the Riemann-Christoffel curvature tensor of M^n. In the case where M^n is conformally flat, the curvature tensor R must take the special form

$$R(x,y,z,w)=\psi(x,z)\langle y,w\rangle-\psi(x,w)\langle y,z\rangle+\psi(y,w)\langle x,z\rangle-\psi(y,z)\langle x,w\rangle,$$
$$\text{for}\quad x,y,z,w\in T_pM, \tag{4}$$

where $\langle\,,\rangle: T_pM\times T_pM\to\mathbb{R}$ is the Riemannian metric and $\psi: T_pM\times T_pM\to\mathbb{R}$ is a certain symmetric bilinear form closely related to the Ricci curvature tensor.

To show that R has the special form (4), simply write out the equation: Weyl conformal curvature tensor $=0$. (The definition of the Weyl conformal curvature tensor can be found in [6, pp. 89–92], together with a proof that it must vanish when the Riemannian manifold is conformally flat.)

We now discuss the relationship between height functions and the second fundamental form. Suppose that we have chosen an origin 0 for E^{n+N}, so that we can identify points of E^{n+N} with vectors, take the "dot products" of points, etc. If u is a unit-length vector in E^{n+N}, we define the corresponding height function

$$h_u: M^n \to \mathbb{R} \quad \text{by} \quad h_u(p) = u \cdot p .$$

If p is a critical point for a height function h_u, the Hessian of h_u at p,

$$(d^2 h_u)(p): T_p M \times T_p M \to \mathbb{R} ,$$

is related to the second fundamental form α by the equation

$$(d^2 h_u)(p)(x, y) = \langle \alpha(x, y), u \rangle, \quad \text{for} \quad x, y \in T_p M . \tag{5}$$

We say that a function $h: M^n \to \mathbb{R}$ is *nondegenerate* if its Hessian at each critical point is a nondegenerate symmetric bilinear form. By applying Sard's theorem to the Gauss map (from the unit normal bundle of M^n to the unit sphere S^{n+N-1}), we can show that for almost every unit vector u, the corresponding height function h_u is nondegenerate.

When the codimension N is sufficiently low, Equations (3) and (4) yield strong restrictions on the second fundamental form α, which can be used to estimate the index of height functions by means of (5). In fact, this is the main idea behind the proof of the following proposition, which together with the fundamental theorem of Morse theory [9, Theorem 3.5, p. 20], immediately implies the theorem stated in the introduction:

Proposition 3. *If M^n is an n-dimensional compact conformally flat submanifold of E^{n+N} and $h: M^n \to \mathbb{R}$ is a nondegenerate height function on M^n, then the index of h at any critical point is either $\leqq N$ or $\geqq n - N$.*

Remark. This proposition also holds if instead of the height function h, we use a function

$$g: M^n \to \mathbb{R}, \ \text{defined by } g(p) = (\text{distance from } 0 \text{ to } p)^2 ,$$

for some suitable choice of origin $0 \in E^{n+N}$. (For almost all choices of the origin 0, g will be a smooth nondegenerate function on M^n.) This viewpoint has the advantage that it extends quite naturally to the case where E^{n+N} is replaced by a space form S^{n+N} or H^{n+N}, or to the case where M^n is a proper submanifold, but not compact.

So it remains only to prove Proposition 3. We let $V = T_p M$, $W = N_p M \oplus \mathbb{R}^2$, and define a Lorentzian inner product $\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle$ on W by

$$\langle\!\langle (x, (s_1, s_2)), (y, (t_1, t_2)) \rangle\!\rangle = \langle x, y \rangle + s_1 t_2 + s_2 t_1 ,$$
$$\text{for } x, y \in N_p M, \ s_1, s_2, t_1, t_2 \in \mathbb{R} .$$

On the right-hand side of this equation, $\langle\,,\rangle$ stands for the usual inner product in N_pM. Define a symmetric bilinear form $\beta: V\times V\to W$ by

$$\beta(x,y)=(\alpha(x,y),\langle x,y\rangle,-\psi(x,y)),$$

where ψ is the symmetric bilinear form appearing in (4).

We claim that β is flat with respect to $\langle\!\langle\,,\rangle\!\rangle$. To see this, we need only eliminate the curvature tensor R from Equations (3) and (4) to obtain:

$$\langle\alpha(x,z),\alpha(y,w)\rangle-\psi(x,z)\langle y,w\rangle-\langle x,z\rangle\psi(y,w)-\langle\alpha(x,w),\alpha(y,z)\rangle$$
$$+\psi(x,w)\langle y,z\rangle+\langle x,w\rangle\psi(y,z)=0,\quad\text{for } x,y,z,w\in V.$$

This equations says that β is flat.

We can assume without loss of generality that $\dim W<\dim V$ (since the conclusion of the proposition holds trivially when $\dim N_pM+2\geqq\dim T_pM$). Moreover, $\beta(x,x)\neq 0$ for all $x\in V$. Hence Proposition 2 implies there is a nonzero null vector e and a real-valued symmetric bilinear form $\varphi: V\times V\to\mathbb{R}$ such that $\dim N(\beta-e\varphi)\geqq\dim V-\dim W+2=n-N$.

We normalize the null vector e as that $e=(n,(1,t))$, where $n\in N_pM$ and $t\in\mathbb{R}$. If $x\in N(\beta-e\varphi)$, we have

$$\beta(x,y)=(\alpha(x,y),\langle x,y\rangle,-\psi(x,y))=e\varphi(x,y),\quad\text{for all}\quad y\in V.$$

It follows immediately that

$$\alpha(x,y)=n\varphi(x,y)=n\langle x,y\rangle,\quad\text{for}\quad x\in N(\beta-e\varphi),\qquad y\in V.$$

Hence when u is any unit-length normal vector,

$$\langle\alpha(x,y),u\rangle=\langle x,y\rangle\langle n,u\rangle,\quad\text{for}\quad x\in N(\beta-e\varphi),\ y\in V.$$

If p is a critical point for a height function h in the direction of u, it follows from (5) that

$$(d^2h)(p)(x,y)=c\langle x,y\rangle,\quad\text{for}\quad x\in N(\beta-e\varphi),\ y\in V,$$

where $c=\langle n,u\rangle$. Choose a basis $(v_1,\dots,v_n)$ for $V=T_pM$ such that $v_{N+1},\dots,v_n\in N(\beta-e\varphi)$. With respect to this basis, the Hessian of h takes the form

$$\begin{array}{r c}
 & \begin{array}{cc}\overbrace{\qquad\qquad}^{N} & \overbrace{\qquad\qquad}^{n-N}\end{array} \\
\begin{array}{r} N\,\{ \\ n-N\,\{ \end{array} & \left(\begin{array}{c|c}\text{something} & 0 \\ \hline 0 & cI\end{array}\right)
\end{array}$$

It follows that the index must be $\leqq N$ or $\geqq n-N$. q.e.d.

References

1. Cartan, É.: La déformation des hypersurfaces dans l'espace conforme réel à $n\geq 5$ dimensions. Bull. Soc. Math. France **45**, 57—121 (1917)
2. Cartan, É.: Sur les varietés de courbure constante d'un espace euclidien ou non-euclidien. Bull. Soc. Math. France **47**, 125—160 (1919) and **48**, 132—208 (1920)

3. Cheeger, J., Simons, J.: Differential characters and geometric invariants. Manuscript from Stanford conference (1973)
4. Chern, S. S., Kuiper, N. S.: Some theorems on the isometric imbedding of compact Riemannian manifolds in Euclidean space. Annals Math. **56**, 422—430 (1952)
5. Chern, S. S., Simons, J.: Characteristic forms and geometric invariants. Annals Math. **99**, 48—69 (1974)
6. Eisenhart, L. P.: Riemannian geometry. Princeton, N. J.: Princeton University Press 1926
7. Hu, S. T.: Homotopy theory. New York: Academic Press 1959
8. Kobayashi, S., Nomizu, K.: Foundations of differential geometry. (2 vols.) New York: Wiley-Interscience 1963—1969
9. Milnor, J.: Morse Theory. Annals of Math. Studies **51**, Princeton, N. J.: Princeton University Press 1963
10. O'Neill, B.: Umbilics of constant curvature immersions. Duke Math. J. **32**, 149—160 (1965)

Received February 2, 1976, and in revised form April 15, 1976

Math. Ann. 225, 99—114 (1977)

Über die Existenz harmonischer Minoranten von superharmonischen Funktionen

Hermann Hueber

Universität Bielefeld, Fakultät für Mathematik, Kurt-Schumacher-Str. 6, D-4800 Bielefeld, Bundesrepublik Deutschland

§ 0. Einleitung

In [3] zeigten Gauthier und Hengartner, daß eine im Einheitskreis D des $\mathbb{R}^2$ definierte superharmonische Funktion s genau dann eine harmonische Minorante besitzt, wenn zu jedem $x \in \partial D$ eine Umgebung V von x existiert derart, daß s in $V \cap D$ eine harmonische Minorante besitzt.

Im ersten Paragraphen untersuchen wir, inwieweit Gebiete in einem beliebigen harmonischen Raum eine solche lokale Minoranteneigenschaft haben. Wir zeigen, daß ein relativkompaktes Gebiet D diese Eigenschaft besitzt, wenn zu jedem $x \in \partial D$ ein Fundamentalsystem von offenen Umgebungen V von x existiert derart, daß jedes Potential auf $V \cap D$ dessen Träger in V relativkompakt ist, zu einem Potential auf D „fortgesetzt" werden kann. Im elliptischen Fall ist diese Fortsetzungseigenschaft nicht nur hinreichend, sondern sogar notwendig. Damit ist insbesondere ein gewisser lokaler Zusammenhang von D in der Nähe des Randes notwendig, so daß also diese Bedingung bereits im $\mathbb{R}^2$ Gegenbeispiele liefert.

In Paragraph zwei wird gezeigt, daß in selbstadjungierten Räumen diese topologische Bedingung zusammen mit einer bestimmten Vergleichbarkeit der Greenfunktionen von V und D zur Fortsetzungseigenschaft äquivalent ist. Diese Äquivalenz beruht im wesentlichen darauf, daß eine superharmonische Funktion s auf D genau dann eine harmonische Minorante besitzt, wenn für das zu s kanonisch assoziierte Maß μ die Funktion $U_D^\mu = \int G^D(\cdot, y)\, d\mu(y)$ ein Potential ist. Dafür geben wir noch einige Kriterien an, die Resultate von Ü. Kuran [8] verallgemeinern und verbessern.

Im dritten Paragraphen beweisen wir zunächst für Gebiete mit genügend glattem Rand eine gewisse Vergleichbarkeit von positiven harmonischen Funktionen, die auf Teilmengen des Rands gegen Null konvergieren. Unser Resultat ist eine abgeschwächte Version von Theorem 2.2 aus [7] (der Beweis dieses Theorems enthält leider eine bis jetzt noch nicht behobene Lücke). Mit Hilfe der Ergebnisse des zweiten Paragraphen wird dann gezeigt, daß Gebiete D mit $\partial D \in \mathscr{C}^1$, für die die äußeren Normalen einer Lipschitzbedingung genügen, die lokale Minoranteneigenschaft besitzen. Beispiele zeigen, daß für die lokale Minoranteneigenschaft die Regularität weder notwendig noch hinreichend ist. Auch ergibt sich die Vergleichbarkeit der Greenfunktionen nicht zwangsläufig aus der oben erwähnten topologischen Bedingung.

Diese Arbeit entstand aus einer Anregung von Herrn Prof. Dr. W. Hansen, bei dem ich mich an dieser Stelle für die Förderung, die er mir und dieser Arbeit angedeihen ließ, herzlich bedanken möchte. Auch bei Herrn Prof. Dr. J. Bliedtner möchte ich mich für viele, für mich sehr nützliche Gespräche bedanken.

§ 1. Allgemeine Betrachtungen

Im folgenden sei X immer ein $\mathscr{P}$-harmonischer Raum im Sinne von Constantinescu-Cornea [2]. Die Bezeichnungen in diesem Paragraphen lehnen sich an [2] an. Insbesondere bezeichnen wir für eine offene Menge $U \subset X$ mit $\mathscr{H}(U)$ die Menge der harmonischen Funktionen, mit $\mathscr{S}(U)$ die Menge der positiven superharmonischen Funktionen und mit $\mathscr{P}(U)$ die Menge der Potentiale auf U. Ist $p \in \mathscr{P} = \mathscr{P}(X)$ und f eine beschränkte, p-meßbare Funktion auf X, so sei $f \cdot p$ definiert wie in Theorem 8.2.1 in [2].

Für $x \in X$ sei $\mathfrak{V}(x)$ die Menge der offenen Teilmengen von X, die x enthalten. X_0 bezeichne die Alexandroffkompaktifizierung von X. Falls X bereits kompakt ist, so entstehe X_0 aus X durch Hinzunahme eines isolierten Punktes. Die topologischen Notationen bezüglich X_0 werden durch Anhängen einer Null an die üblichen Notationen gekennzeichnet.

1.1. Definition. Sei D eine offene Teilmenge von X. Wir sagen, D besitzt die lokale Minoranteneigenschaft (LM), falls für jede in D superharmonische Funktion s gilt: s besitzt genau dann eine harmonische Minorante, wenn zu jedem $x \in \partial_0 D$ ein $V \in \mathfrak{V}_0(x)$ existiert derart, daß s in $V \cap D$ eine harmonische Minorante besitzt.

Offensichtlich besitzt eine offene Menge genau dann die lokale Minoranteneigenschaft, wenn dies für jede ihrer Zusammenhangskomponenten der Fall ist.

1.2. Definition. Sei D eine offene Teilmenge von X und seien V, W offene Teilmengen von X_0. Es gelte $\overline{W}^0 \subset V$ und $W \cap D \neq \emptyset$. Wir sagen, (D, V, W) besitzt die Fortsetzungseigenschaft (FE), wenn zu jedem $p \in \mathscr{P}(V \cap D)$ ein $q \in \mathscr{P}(D)$ existiert, welches in $W \cap D$ gleichen Potentialteil hat.

1.3. Bemerkungen. 1. In 1.2 kann das Symbol $\mathscr{P}$ durch das Symbol $\mathscr{S}$ ersetzt werden, ohne daß die Eigenschaft geändert wird.

2. Ist $\overline{W}$ eine kompakte Teilmenge von D, so besitzt (D, V, W) die Fortsetzungseigenschaft.

3. Besitzt ein Tupel (D, V, W) die Fortsetzungseigenschaft, so existiert zu jedem $p \in \mathscr{P}(V \cap D)$ ein $q \in \mathscr{P}(D)$, welches in $D \setminus \overline{W}$ harmonisch ist und in $W \cap D$ gleichen Potentialteil hat.

1.4. Lemma. *Sei D eine offene Teilmenge von X und seien p, q Potential auf X, mit gleichem Potentialteil in D.*
Dann gilt:

$$1_D \cdot p = 1_D \cdot q .$$

Beweis. [2], Exercise 8.2.7. ||

1.5. Lemma. *Sei s eine superharmonische Funktion auf X. Dann sind äquivalent:*

a) s hat eine harmonische Minorante.

b) Es existiert ein $p \in \mathscr{P}(X)$ und eine offene Überdeckung $(\omega_i)_{i \in I}$ von X mit $p|_{\omega_i} \in s|_{\omega_i} + \mathscr{H}(\omega_i)$ für alle $i \in I$.

c) Es existiert eine endliche Indexmenge I, eine offene Überdeckung $(\omega_i)_{i \in I}$ von X und eine Familie $(p_i)_{i \in I}$ von Potentialen auf X mit $p_i|_{\omega_i} \in s|_{\omega_i} + \mathscr{H}(\omega_i)$.

Beweis. (b) und (c) folgen unmittelbar aus (a). Umgekehrt ergibt sich (a) sofort aus (b) ([2], Korollar 6.3.4). Wir zeigen noch, daß (b) aus (c) folgt:

Sind $(\omega_i)_{i \in I}$ und $(p_i)_{i \in I}$ wie in (c), so sei $\delta_k := \omega_k \setminus \bigcup_{i<k} \omega_i$ für $k \in I = \{1, \ldots, n\}$. Das Potential $p := \sum_{k=1}^{n} 1_{\delta_k} \cdot p_k$ besitzt dann die in (b) verlangte Eigenschaft, wie man mit Lemma 1.4 leicht einsehen kann. ||

1.6. Satz. *D sei eine offene Teilmenge von X mit der Eigenschaft, daß zu jedem $x \in \partial_0 D$ und zu jedem $V \in \mathfrak{V}_0(x)$ ein $W \in \mathfrak{V}_0(x)$ mit $\bar{W}^0 \subset V$ existiert derart, daß (D, V, W) die Fortsetzungseigenschaft besitzt. Dann hat D die lokale Minoranteneigenschaft.*

Beweis. Sei s eine superharmonische Funktion in D und zu jedem $x \in \partial_0 D$ existiere ein $V_x \in \mathfrak{V}_0(x)$ so, daß s in $V_x \cap D$ eine harmonische Minorante besitzt.

Nach Annahme existiert zu jedem $x \in \partial_0 D$ ein $W_x \in \mathfrak{V}_0(x)$ mit $\bar{W}_x^0 \subset V_x$ so, daß (D, V_x, W_x) die Fortsetzungseigenschaft besitzt. Da $\partial_0 D$ kompakt ist, existieren endlich viele Punkte $x_1, \ldots, x_n \in \partial_0 D$ mit $\bigcup_{i=1}^{n} W_{x_i} \supset \partial_0 D$. Sei q_i jeweils der Potentialteil von s im harmonischen Raum $V_{x_i} \cap D$. Wegen (FE) existiert zu jedem $i \in \{1, \ldots n\}$ ein Potential p_i auf D, welches in $W_{x_i} \cap D$ gleichen Potentialteil wie q_i und damit auch gleichen Potentialteil wie s hat. Sei W_0 eine offene, in D relativkompakte Umgebung der kompakten Menge $D \setminus \bigcup_{i=1}^{n} W_{x_i}$. Da ∂W_0 kompakt ist, existiert nach dem Fortsetzungssatz ([2], Theorem 2.3.2) ein Potential p_0 auf D mit

$$p_0|_{W_0} \in s|_{W_0} + \mathscr{H}(W_0) .$$

Die Behauptung folgt jetzt aus Lemma 1.5. ||

1.7. Korollar. *Für jede superharmonische Funktion s auf X gilt: s besitzt genau dann eine harmonische Minorante, wenn eine kompakte Menge $K \subset X$ existiert derart, daß s in $\complement K$ eine harmonische Minorante besitzt.*

Insbesondere besitzt also jede superharmonische Funktion mit kompaktem potentialtheoretischem Träger eine harmonische Minorante.

Beweis. Wegen Satz 1.6 genügt es nachzuweisen, daß es zu jeder im Komplement einer kompakten Menge K_1 definierten positiven superharmonischen Funktion t eine kompakte Umgebung K_2 von K_1 und ein $p \in \mathscr{P}(X)$ gibt, mit

$$p|_{\complement K_2} \in t|_{\complement K_2} + \mathscr{H}(\complement K_2) .$$

Dies ergibt sich aber aus dem Beweis von Theorem 2.3.2 in [2]. ||

1.8. Satz. *D sei eine σ-kompakte offene Teilmenge von X. Die Garbe der harmonischen Funktionen auf D sei elliptisch und besitze die Doob-Konvergenzeigenschaft. Dann sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:*

1. D besitzt die lokale Minoranteneigenschaft.

2. Zu jedem $x\in\partial_0 D$ und zu jedem $V\in\mathfrak{V}_0(x)$ existiert ein $W\in\mathfrak{V}_0(x)$ mit $\bar{W}^0\subset V$ so, daß (D, V, W) die Fortsetzungseigenschaft besitzt.

3. Ist $x\in\partial_0 D$ und sind $V, W\in\mathfrak{V}_0(x)$ mit $\bar{W}^0\subset V$, so besitzt (D, V, W) die Fortsetzungseigenschaft.

Beweis. (3)$\Rightarrow$(2): Klar.

(2)$\Rightarrow$(1): Satz 1.6.

(1)$\Rightarrow$(3): Sei (3) nicht wahr. Dann gibt es ein $x_0\in\partial_0 D$ und $V, W\in\mathfrak{V}_0(x_0)$ mit $\bar{W}^0\subset V$, für welche (D, V, W) die Fortsetzungseigenschaft nicht besitzt. Also gibt es ein $s\in\mathcal{S}(V\cap D)$ für welches kein $p\in\mathcal{P}(D)$ existiert mit

$$p|_{W\cap D}\in s|_{W\cap D}+\mathcal{H}(W\cap D).$$

Man sieht leicht, daß dann eine Zusammenhangskomponente Z von D existieren muß so, daß kein $p\in\mathcal{P}(Z)$ existiert mit

$$p|_{W\cap Z}\in s|_{W\cap Z}+\mathcal{H}(W\cap Z).$$

Dann ist $V\cap Z$ nicht leer und nach dem Rieszschen Zerlegungssatz folgt auch, daß $V\cap Z\neq Z$. Sei also $y_0\in Z\setminus V$ im folgenden fest gewählt.

Sei $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge offener, relativ-kompakter Mengen mit: $y_0\in Z_1$; $\bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i=Z$; $\bar{Z}_n\subset Z_{n+1}$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Für $n\in\mathbb{N}$ sei $\tilde{p}_n$ ein Potential auf Z, welches in $Z_n\cap W$ gleichen Potentialteil wie s besitzt. Sei $\bar{p}_n:=1_{Z_n\cap W}\cdot p_n$. Lemma 1.4 zeigt, daß $\bar{p}_n$ nicht mehr von der Wahl von $\tilde{p}_n$ abhängt, für $m\geqq n$ gilt also $\bar{p}_n=1_{Z_n\cap W}\cdot\tilde{p}_m$. Sei $p_n:=1_{Z_n\setminus Z_{n-1}}\cdot\bar{p}_n$ $(Z_0:=\emptyset)$.

Dann gilt $\sum_{n=1}^{\infty} p_n(y_0)=\infty$: Falls $\sum_{n=1}^{\infty} p_n(y_0)$ konvergent wäre, so folgte mit den Propositionen 6.1.3 und 6.1.5 aus [2], daß $\sum_{n=m+1}^{\infty} p_n$ für jedes m eine in Z_m lokal gleichmäßig konvergente Reihe harmonischer Funktionen wäre. Also wäre $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ eine superharmonische Funktion und damit sogar ein Potential auf Z. Dieses Potential besäße in jedem $Z_m\cap W$ den gleichen Potentialteil wie $\sum_{n=1}^{m} p_n$ und damit denselben Potentialteil wie s. Also hätte man

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n|_{Z\cap W}\in s|_{Z\cap W}+\mathcal{H}(Z\cap W),$$

was nicht möglich ist.

Da $p_i(y_0)$ für jedes $i\in\mathbb{N}$ reell ist, gibt es eine strikt isotone Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ der natürlichen Zahlen mit

$$\alpha_k:=\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} p_i(y_0)>1.$$

Wir definieren $q_k := \frac{1}{\alpha_k} \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} p_i \; (k \in \mathbb{N})$.

Nach Konstruktion gilt $q_k(y_0)=1$ für jedes $k\in\mathbb{N}$ und für jedes $m\in\mathbb{N}$ sind schließlich alle q_k harmonisch in Z_m. Nach dem Satz von Azela-Ascoli gibt es also eine Funktion h_1 aus $\mathscr{H}(Z_1)$ und eine Teilfolge von $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$, welche auf Z_1 lokal gleichmäßig gegen h_1 konvergiert. Zu dieser Teilfolge existiert ein $h_2\in\mathscr{H}(Z_2)$ und eine weitere Teilfolge, welche auf Z_2 lokal gleichmäßig gegen h_2 konvergiert. Insbesondere gilt $h_2|_{Z_1}=h_1$.

Führt man dieses Verfahren induktiv fort und geht dann zur Diagonalfolge über, so findet man: Es existiert ein $h\in\mathscr{H}(Z)$ und eine Teilfolge von $(q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ derart, daß $(q_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen h konvergiert. O.B.d.A. sei $(k_i)_{i\in\mathbb{N}}$ bereits so gewählt, daß $|q_{k_i}-h|<2^{-i}$ auf $\bar{Z}_i$ gilt. Definiere jetzt:

$$s_1 := \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} (q_{k_i}-h) & \text{auf } Z \\ 0 & \text{auf } D\setminus Z\,. \end{cases}$$

Wir beenden den Beweis mit dem Nachweis folgender Eigenschaften von s_1:
a) s_1 ist superharmonisch in D.
b) s_1 hat keine harmonische Minorante in D.
c) Zu jedem $x\in\partial_0 D$ existiert ein $V\in\mathfrak{B}_0(x)$ so, daß s_1 in $V\cap D$ eine harmonische Minorante besitzt.

Zu (a): Es genügt nachzuweisen, daß s_1 in Z superharmonisch ist. Auf Z gilt:

$$s_1 = \sum_{i=1}^{n} (q_{k_i}-h) + \sum_{i=n+1}^{\infty} (q_{k_i}-h)\,.$$

Dabei ist der erste Summand auf der rechten Seite superharmonisch in Z und der zweite Summand harmonisch in Z_n, da es sich ja dabei um eine gleichmäßig konvergente Reihe harmonischer Funktionen handelt. Also ist s_1 superharmonisch in jedem Z_n und damit auch in Z.

Zu (b): Falls s_1 in D eine harmonische Minorante h_0 besitzt, so folgt auf Z:

$$0 \leqq s_1 - h_0 = \sum_{i=1}^{j} q_{k_i} + \left(-jh - h_0 + \sum_{i=j+1}^{\infty} (q_{k_i}-h)\right)$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung ist die Summe eines Potentials und einer superharmonischen Funktion. Nach einem allgemeinen Minimumprinzip ([2], Proposition 2.2.1) folgt damit:

$$-jh - h_0 + \sum_{i=j+1}^{\infty} (q_{k_i}-h) \geqq 0\,.$$

Damit gilt für alle $j\in\mathbb{N}$:

$$s_1(y_0) - h_0(y_0) \geqq \sum_{i=1}^{j} q_{k_i}(y_0) = j\,.$$

Da aber s_1 nach Konstruktion im Punkt y_0 den Wert 0 annimmt, haben wir den gesuchten Widerspruch.

Zu (c): Sei $x\in\partial_0 D$.

Ist $x \in \partial_0 D \setminus \bar{W}^0$, so gilt $X \setminus \bar{W}^0 \in \mathfrak{V}_0(x)$, und da s_1 in $D \setminus \bar{W}^0$ harmonisch ist, besitzt s_1 in $(X \setminus \bar{W}^0) \cap D = D \setminus \bar{W}^0$ trivialerweise eine harmonische Minorante.

. Ist $x \in \partial_0 D \cap \bar{W}^0$, so gilt $V \in \mathfrak{V}_0(x)$. Es genügt also, im Unterraum $D \cap V$ eine harmonische Minorante anzugeben, und hier genügt es, $Z \cap V$ zu betrachten. Unsere Ausgangsfunktion s ist positiv, besitzt also in $D \cap Z$ eine Rieszzerlegung $s = p_s + h_s$.

Der Potentialteil von q_i im Unterraum $V \cap Z$ werde mit r_i bezeichnet. Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann ist $\sum_{i=1}^{m} r_i$ der Potentialteil von $\sum_{i=1}^{m} q_i$ im Raum $V \cap Z$. Nach Konstruktion der q_i ist damit das Potential $\sum_{i=1}^{m} r_i$ bezüglich der spezifischen Ordnung im Unterraum $V \cap Z$ kleiner als der Potentialteil von

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=n_i+1}^{n_i+1} p_j \right) = \sum_{j=1}^{n_m+1} p_j ,$$

wobei natürlich dieser Potentialteil ebenfalls in $V \cap Z$ zu bilden ist. Nach Konstruktion der p_j ist aber der Potentialteil von $\sum_{j=1}^{n_m+1} p_j$ im Raum $V \cap Z$ gleich $1_{Z_{n_m+1} \cap W} \cdot p_s$. Aus diesen Betrachtungen kann man ersehen, daß $\sum_{i=1}^{m} r_i$ im Raum $V \cap Z$ spezifisch kleiner ist als p_s. Da dies für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt, ist $\sum_{i=1}^{\infty} r_i$ ein Potential auf $V \cap Z$, also auch $r := \sum_{i=1}^{\infty} r_{k_i}$. Für jedes $j \in \mathbb{N}$ gilt damit:

$$\begin{aligned} r|_{Z_j \cap V} &= \sum_{i=1}^{j} r_{k_i}|_{Z_j \cap V} + \sum_{i=j+1}^{\infty} r_{k_i}|_{Z_j \cap V} \\ &\in \sum_{i=1}^{j} r_{k_i}|_{Z_j \cap V} + \mathscr{H}(Z_j \cap V) \\ &= \sum_{i=1}^{j} q_{k_i}|_{Z_j \cap V} + \mathscr{H}(Z_j \cap V) \\ &= s_1|_{Z_j \cap V} + \mathscr{H}(Z_j \cap V) . \end{aligned}$$

Nach Lemma 1.5 besitzt also s_1 in $V \cap Z$ eine harmonische Minorante. ||

Der folgende Satz ermöglicht in Verbindung mit dem vorangehenden die Angabe von Beispielen, in denen die lokale Minoranteneigenschaft nicht erfüllt ist (vgl. Bemerkung 3.6).

1.9. Satz. *Sei D ein Gebiet in X derart, daß der harmonische Unterraum D elliptisch ist. V, W seien offen in X_0 mit $\bar{W}^0 \subset V$ und $W \cap D \neq \emptyset$. (D, V, W) besitze die Fortsetzungseigenschaft. Dann besitzen nur endlich viele Zusammenhangskomponenten von $V \cap D$ einen nichtleeren Durchschnitt mit W.*

Beweis. Wir nehmen an, es existiert eine Folge $(Z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ paarweise verschiedener Zusammenhangskomponenten von $V \cap D$, welche alle nichtleeren Durchschnitt mit W haben. Da D zusammenhängend ist, existiert dann ein Punkt $x_0 \in D \setminus V$.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei p_n ein von Null verschiedenes Potential auf D, dessen potentialtheoretischer Träger eine kompakte Teilmenge von $W \cap Z_n$ ist. Da D elliptisch ist, dürfen wir $p_n(x_0)=1$ annehmen. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei q_n der Potentialteil von p_n im Raum Z_n. Weiter sei q das Potential auf $V \cap D$, welches auf jedem Z_n mit q_n übereinstimmt und ansonsten identisch Null ist. Wegen (FE) existiert ein $p \in \mathscr{P}(D)$, welches in $W \cap D$ denselben Potentialteil besitzt wie q. Offenbar können wir p so wählen, daß es im Komplement von $\overline{W \cap D}$ harmonisch ist (vgl. Bemerkung 1.3.3). Mit Hilfe von [2], Proposition 2.2.1. (a)⇒(c) weist man jetzt nach, daß $p \geqq \sum_{i=1}^{n} p_i$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Insbesondere gilt also $p(x_0)>n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, was einen Widerspruch dazu darstellt, daß p im Komplement von $\overline{W \cap D}$ harmonisch ist. ||

1.10. Bemerkung. Die Beweise in diesem Paragraphen zeigen, daß man auch dann noch alle Sätze erhalten kann, wenn man mit anderen Kompaktifizierungen von X oder sofort mit Kompaktifizierungen von D arbeitet.

§ 2. Harmonische Minoranten von superharmonischen Funktionen in selbstadjungierten Räumen

In diesem Paragraphen sei $(X, \mathscr{H})$ ein selbstadjungierter harmonischer Raum, wie er zum Beispiel in [9] betrachtet wird. $G: X \times X \to \overline{\mathbb{R}}$ sei eine, im folgenden fest vorgegebene, Greenfunktion auf X. Insbesondere ist also X ein lokalkompakter, nicht kompakter, zusammenhängender $\mathscr{P}$-Brelotraum mit abzählbarer Basis, auf dem das Proportionalitätsaxiom gilt. Für jedes $x \in X$ ist $G_x := G(x, \cdot)$ ein Potential auf X mit $S(G_x)=\{x\}$, und für alle $x, y \in X$ gilt $G(x, y)=G(y, x)$. Weiter wollen wir annehmen, daß die konstante Funktion 1 superharmonisch ist.

Ist jetzt D eine offene Teilmenge von X, so ist jede stetige Funktion auf $\partial_0 D$ resolutiv. Für jedes $x \in D$ haben wir damit das harmonische Maß μ_x^D auf $\partial_0 D$, welches gegeben ist durch

$$\int \varphi d\mu_x^D = H_\varphi^D(x)$$

für alle $\varphi \in \mathscr{C}(\partial_0 D)$. Dabei ist H_φ^D das Infimum über alle nach unten beschränkten, in D superharmonischen Funktionen s, für die $\liminf_{y \to z, y \in D} s(y) \geqq \varphi(z)$ für alle $z \in \partial_0 D$ gilt.

Für jede offene Menge D sei G^D die Funktion auf $D \times D$, die gegeben ist durch

$$G(x, y) = G^D(x, y) + \int_{\partial D} G(z, y) d\mu_x^D(z)$$

für alle $x, y \in D$. Für jedes $x \in D$ ist $G_x^D := G^D(x, \cdot)$ ein Potential auf D mit $S(G_x^D)=\{x\}$. Ist Z eine Zusammenhangskomponente von D, so ist Z ein selbstadjungierter Raum mit Greenschem Kern $G^Z = G^D|_{Z \times Z}$.

Sind D, W offene Teilmengen von X mit $W \subset D$, so definieren wir ${}^D h^W: W \times W \to \mathbb{R}^+$ durch

$${}^D h^W(x, y) := \int_{\partial_D W} G^D(z, y) d^D\mu_x^W(z)$$

für alle $x, y \in W$. Dabei sei $\partial_D W$ der Rand von W im Unterraum D und ${}^D\mu_x^W$ das harmonische Maß im Unterraum D. Man beachte, daß für jedes $x \in W$ die Funktion ${}^Dh_x^W := {}^Dh^W(x, \cdot)$ in W harmonisch ist. Außerdem gilt auf $W \times W$

$$G = G^D + {}^Xh^D \quad \text{und} \quad G^D = G^W + {}^Dh^W,$$

insgesamt also $G = G^W + {}^Dh^W + {}^Xh^D$.

Ist μ ein Maß auf der offene Menge D, so sei U_D^μ diejenige numerische Funktion auf D, die definiert ist durch

$$U_D^\mu(x) = \int_D G^D(x, y) d\mu(y) \quad \text{für alle} \quad x \in D.$$

Ist $D = X$, so lassen wir in den Bezeichnungen den Index D im allgemeinen weg, also ${}^Xh^W = h^W$ und $U_X^\mu = U^\mu$.

Die eben gemachten Darlegungen finden sich in etwas ausführlicherer Form in §1 von [9]. Dort stehen auch Beweise für die ersten vier der folgenden Lemmata.

2.1. Lemma. *Ist D ein Gebiet in X und μ ein Maß auf D, so ist U_D^μ entweder ein Potential oder aber konstant ∞.*

2.2. Lemma. *Ist μ ein Maß auf der offenen Menge D mit $\mu(D) < \infty$, so ist U_D^μ ein Potential auf D. Insbesondere ist also für jedes Maß μ mit kompaktem Träger in D die Funktion U_D^μ ein Potential.*

2.3. Lemma. *Ist μ ein Maß auf der offenen Menge D, für welches U_D^μ ein Potential ist, so gilt $S(U_D^\mu) = \mathrm{Supp}(\mu)$.*

2.4. Lemma. *Zu jeder superharmonischen Funktion s auf einer offenen Menge D existiert genau ein Radonmaß μ auf D (das zu s „assoziierte" Maß) derart, daß für jedes relativ-kompakte Gebiet W mit $\bar{W} \subset D$ die Funktion U_W^μ der Potentialteil von s in W ist. Ist s positiv, so ist U_D^μ der Potentialteil von s.*

2.5. Lemma. *Ist D ein Gebiet in X und μ ein Maß auf D, so sind äquivalent:*

1. U_D^μ ist ein Potential auf D.

2. Für jede offene, nichtleere, in D relativ-kompakte Menge W ist $U_D^{1_{D \setminus W}\mu}$ endlich in W.

3. Es existiert eine offene, nichtleere, in D relativ-kompakte Menge W so, daß $U_D^{1_{D \setminus W}\mu}$ in W endlich ist.

Dabei kann in 2. und 3. „endlich in W" durch „harmonisch in W" oder durch „endlich in einem Punkt von W" ersetzt werden.

Beweis. Lemma 2.1, 2.2 und 2.3. ||

2.6. Satz (vg. [1], Theorem 8). *Ist s eine superharmonische Funktion auf der offenen Menge D, und ist μ das zu s assoziierte Maß, so besitzt s genau dann eine harmonische Minorante in D, wenn U_D^μ ein Potential ist.*

Beweis. Hat s eine harmonische Minorante, so existiert ein Potential p auf D und ein $h \in \mathscr{H}(D)$ mit $s = p + h$. Lemma 2.4 zeigt, daß das zu p assoziierte Maß mit dem zu s assoziierten übereinstimmt. Also ist $p = U_D^\mu$ ein Potential. Ist jetzt umgekehrt U_D^μ ein Potential, so gilt für jedes in D relativ-kompakte Gebiet W

$$U_D^\mu|_W = U_D^{1_W\mu}|_W + U_D^{1_{D \setminus W}\mu}|_W \in s|_W + \mathscr{H}(W).$$

Die Behauptung folgt jetzt mit Lemma 1.5. ||

Die bis jetzt angestellten Überlegungen wollen wir nun verwenden, um eine zu (FE) äquivalente Eigenschaft anzugeben, die im $\mathbb{R}^n$ leichter nachprüfbar ist.

2.7. Satz. *Sei D ein Gebiet in X und V, W seien offene Teilmengen von X_0. Es gelte $\bar{W}^0 \subset V$ und $W \cap D \neq \emptyset$. Falls nur endlich viele Zusammenhangskomponenten $Z_1, \ldots, Z_n$ von $V \cap D$ nichtleeren Durchschnitt mit W besitzen, so sind äquivalent:*

1. (D, V, W) besitzt die Fortsetzungseigenschaft.

2. (D, V, W) besitzt folgende Vergleichbarkeitseigenschaft (VE): *Es existiert ein $C \in \mathbb{R}^+$ derart, daß es zu jedem Z_i ein $x_i \in Z_i$ gibt, mit*

$$G^D_{x_i}|_{W \cap Z_i} \leqq C G^{V \cap D}_{x_i}|_{W \cap Z_i}.$$

3. Zu jedem i und zu jedem $x \in Z_i$ existiert eine Konstante $C = C(x, i)$ mit

$$G^D_x|_{W \cap Z_i} \leqq C G^{V \cap D}_x|_{W \cap Z_i}.$$

Beweis. (3)⇒(2): Klar.

(2)⇒(1): Es gelte (2) und C und $x_1, \ldots, x_n$ seien entsprechend gewählt. Sei $s \in \mathscr{P}(V \cap D)$ und μ sei das zu s assoziierte Maß auf $V \cap D$. Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei U_i eine offene, relativ-kompakte Umgebung von x_i mit $\bar{U}_i \subset Z_i$. Wegen $\bar{W} \subset V$ kann das auf $V \cap D$ definierte Maß $v_i := 1_{(Z_i \cap W) \setminus U_i} \mu$ auch als Maß auf D aufgefaßt werden.

Wegen $U^{v_i}_{V \cap D} \leqq U^{\mu}_{V \cap D}$ ist nach Lemma 2.1 die Funktion $U^{v_i}_{V \cap D}$ ein Potential auf $V \cap D$, wegen Lemma 2.3 also endlich in x_i. Nach Voraussetzung gilt:

$$\begin{aligned} U^{v_i}_D(x_i) &= \int_D G^D(x_i, z) dv_i(z) = \int_{Z_i \cap W} G^D(x_i, z) dv_i(z) \\ &\leqq C \int_{Z_i \cap W} G^{V \cap D}(x_i, z) dv_i(z) = C U^{v_i}_{V \cap D}(x_i) < \infty . \end{aligned}$$

Nach Lemma 2.1 ist daher $U^{v_i}_D$ ein Potential auf D. Für jedes $i \in \mathbb{N}$ ist außerdem $U^{1_{U_i \cap W} \mu}_D$ wegen Lemma 2.2 ein Potential auf D. Insgesamt erhält man, daß

$$U^{1_W \mu}_D = \sum_{i=1}^{n} U^{1_{Z_i \cap W} \mu}_D = \sum_{i=1}^{n} U^{v_i}_D + \sum_{i=1}^{n} U^{1_{U_i} \mu}_D$$

ein Potential auf D ist. Diesem Potential wird auf W dasselbe Maß zugeordnet wie der Funktion s. Dies zeigt, daß s und $U^{1_W \mu}_D$ in W gleichen Potentialteil besitzen. Damit besitzt also (D, V, W) die Fortsetzungseigenschaft.

(1)⇒(3): Sei (3) nicht wahr. Dann existiert eine Komponente Z von $V \cap D$ und ein $x \in Z$ und zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $z_n \in Z \cap W$ mit $z_n \neq x$ und

$$2^n G^{V \cap D}(x, z_n) < G^D(x, z_n).$$

Die Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kann in D keinen Häufungspunkt besitzen: Ist nämlich z ein solcher, so folgt $z \in \partial Z$, da ja $G^{V \cap D}_x$ auf jeder kompakten Teilmenge von Z eine strikt positive untere Schranke hat. Also gilt $z \in \partial(V \cap D)$. Da z in $\bar{W}$ liegt, gilt weiter $z \in V$, insgesamt gilt also $z \in \partial(V \cap D) \cap V$. Damit folgt $z \in \partial D$.

Sei $\mu := \sum_{n=1}^{\infty} (2^n G^{V \cap D}(x, z_n))^{-1} \varepsilon_{z_n}$. μ ist ein Maß auf D mit Träger in $\bar{W}$. μ ist natürlich auch ein Maß auf $V \cap D$. Es gilt:

$$U^{\mu}_{V \cap D}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (2^n G^{V \cap D}(x, z_n))^{-1} \int_{V \cap D} G^{V \cap D}(x, w) d\varepsilon_{z_n}(w) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1 .$$

Da auf den von Z verschiedenen Komponenten von $V \cap D$ die Funktion $U^{\mu}_{V \cap D}$ identisch Null ist, zeigt dies, daß $U^{\mu}_{V \cap D}$ ein Potential auf $V \cap D$ ist. Es gilt weiter:

$$U^{\mu}_{D}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} G^{D}(x, z_n)(2^n G^{V \cap D}(x, z_n))^{-1} \geqq \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty .$$

Da $x \notin \operatorname{Supp}(\mu)$, kann damit U^{μ}_{D} nach Lemma 2.3 kein Potential sein, ist also konstant ∞.

Falls jetzt (D, V, W) die Fortsetzungseigenschaft besitzt, so gibt es ein Potential p auf D, welches in $V \cap D$ denselben Potentialteil wie $U^{\mu}_{V \cap D}$ besitzt. Ist η das zu p assoziierte Maß auf D, so folgt $\eta|_{V \cap D} = \mu|_{V \cap D} = \mu$. Damit hat man $\eta \geqq \mu$, woraus sofort $p = U^{\eta}_{D} \geqq U^{\mu}_{D} = \infty$ folgt. Dies ist aber ein Widerspruch, also besitzt (D, V, W) die Eigenschaft (FE) nicht. ||

2.8. Korollar. *Sei $D \subset X$ ein Gebiet. D besitzt genau dann die lokale Minoranteneigenschaft, wenn zu jedem $x \in \partial_0 D$ ein Fundamentalsystem $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von offenen Umgebungen von x existiert derart, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ nur endlich viele Komponenten von $V_n \cap D$ mit $V_{n+1} \cap D$ nichtleeren Durchschnitt haben und (D, V_n, V_{n+1}) die Vergleichbarkeitseigenschaft besitzt.*

Beweis. Satz 2.7 und Satz 1.8. ||

Gemäß Satz 2.6 hängt die Frage nach der Existenz von harmonischen Minoranten eng mit der Frage zusammen, wann für ein Maß μ auf D die hyperharmonische Funktion U^{μ}_{D} ein Potential ist. Dieser Frage wollen wir zum Abschluß dieser Paragraphen nachgehen.

2.9. Satz. *Sei $D \subset X$ ein Gebiet und $x \in D$ fest gewählt. μ sei ein Maß auf D und für jedes $t \in \mathbb{R}^+$ sei*

$$W_t := \{ y \in D \mid G^D(x, y) \geqq t \} .$$

Für alle $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ mit $0 \leqq b \leqq a \leqq \infty$ gilt dann

$$\int_{W_b \setminus W_a} G^D(x, y) d\mu(y) = b\mu(W_b \setminus W_a) + \int_b^a \mu(W_t \setminus W_a) dt .$$

Insbesondere gilt

$$U^{\mu}(x) = \int_0^{\infty} \mu(W_t) dt .$$

Weiter sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $U^{\mu}_{D} \in \mathscr{P}(D)$.
2. *Für alle $\varepsilon > 0$ gilt* $\int_0^{\varepsilon} \mu(W_t) dt < \infty$.
3. *Für ein $\varepsilon > 0$ gilt* $\int_0^{\varepsilon} \mu(W_t) dt < \infty$.

Beweis. Der erste Teil des Satzes folgt sofort mit dem Satz von Fubini unter Verwendung von $G^D(x,y)=\int_0^\infty 1_{[0,G^D(x,y)]}(t)\,dt$.

(2)$\Leftrightarrow$(3): Konsequenz aus der Antitonie von $t\to\mu(W_t)$.

(1)$\Rightarrow$(3): Man wähle ein $\varepsilon>0$ und eine offene, relativ-kompakte Umgebung W von x derart, daß $\bar{W}$ in W_ε enthalten ist. Mit Lemma 2.5 folgt:

$$\infty>\int_{W_\varepsilon\setminus W} G^D(x,y)\,d\mu(y)\geqq\varepsilon(\mu(W_\varepsilon)-\mu(W)).$$

Also gilt $\varepsilon\mu(W_\varepsilon)<\infty$. Wiederum mit Lemma 2.5 folgt jetzt:

$$\infty>\int_{D\setminus W} G^D(x,y)\,d\mu(y)\geqq\int_{W_0\setminus W_\varepsilon} G^D(x,y)\,d\mu(y)=\int_0^\varepsilon \mu(W_t)\,dt-\varepsilon\mu(W_\varepsilon).$$

(2)$\Rightarrow$(1): Aus (2) folgt $\mu(W_t)<\infty$ für jedes $t>0$. Sei W eine offene, relativ-kompakte Umgebung von x. Da G_x^D in $D\setminus W$ beschränkt ist (siehe [9], Lemma 1.2), existiert ein $a\in\mathbb{R}^+$ derart, daß $W_a\subset W$ gilt. Jetzt folgt mit Hilfe des ersten Teils des Satzes

$$\begin{aligned}\int_{D\setminus W} G^D(x,y)\,d\mu(y)&\leqq\int_{W_0\setminus W_a} G^D(x,y)\,d\mu(y)=\int_0^a(\mu(W_t)-\mu(W_a))\,dt\\&\leqq\int_0^a\mu(W_t)\,dt.\end{aligned}$$

Mit Lemma 2.5 ergibt sich, daß U_D^μ ein Potential ist. ||

2.10. Korollar. *Die Bezeichnungen seien wie in 2.9. Dann gilt:*

$$U_D^\mu\in\mathscr{P}(D)\Rightarrow\lim_{t\to 0}t\mu(W_t)=0.$$

2.11. Bemerkung. In der klassischen Potentialtheorie sind mit $D:=\mathbb{R}^n\,(n\geqq 3)$ die in 2.9 definierten W_t gerade die abgeschlossenen Kugeln $\bar{B}(x,\varrho)$ um x mit Radius $\varrho=\sqrt[n-2]{t^{-1}}$. Mit Hilfe der Transformation $t\to t^{2-n}$ erhalt man dann aus Satz 2.9 das folgende Resultat:

Theorem. *Für jedes Maß μ auf dem $\mathbb{R}^n\,(n\geqq 3)$ sind äquivalent:*

a) $U^\mu\in\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$.

b) *μ ist zu einer positiven, superharmonischen Funktion assoziiert.*

c) *Für mindestens ein $x\in\mathbb{R}^n$ gilt* $\int_1^\infty\varrho^{1-n}\mu(\bar{B}(x,\varrho))\,d\varrho<\infty$.

d) *Für alle $x\in\mathbb{R}^n$ gilt* $\int_1^\infty\varrho^{1-n}\mu(\bar{B}(x,\varrho))\,d\varrho<\infty$.

Dies zeigt, daß der zweite Teil von Satz 2.9 sowohl eine Verbesserung als auch eine Verallgemeinerung von Theorem 1 aus [8] ist. Mit Hilfe von 2.9 kann man auch sofort einsehen, daß in 2.10 die Umkehrung nicht gelten kann. (vergleiche dazu auch [8], §5). Der erste Teil von Satz 2.9 liefert auf dieselbe Weise eine Verbesserung von Theorem 2 aus [8].

§ 3. Anwendungen in der klassischen Theorie

In diesem letzten Paragraphen beschäftigen wir uns ausschließlich mit der von der Laplacegleichung herstammenden klassischen Theorie im $\mathbb{R}^n$ $(n \geqq 2)$.

$B(x,r)$ bezeichne im folgenden die offene Kugel um x mit Radius r. Ihr Abschluß sei $\bar{B}(x,r)$. Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ sei $[x,y]$ die abgeschlossene Verbindungsstrecke von x mit y. Sind A, B Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, so sei $d(A,B)$ der Abstand von A und B. Mit $\sigma_{x,r}$ werde das normierte Haarsche Maß auf $\partial B(x,r)$ bezeichnet.

3.1. Definition. Sei D eine offene Menge im $\mathbb{R}^n$ und sei Γ eine Teilmenge von ∂D. Wir sagen, D erfüllt eine *gleichmäßige innere und äußere Kugelbedingung* (GIAK) auf Γ, falls ein $r>0$ so existiert, daß zu jedem $z \in \Gamma$ ein z_I und ein z_A existiert mit $\bar{B}(z_I, r) \setminus D = \{z\}$ und $\bar{B}(z_A, r) \cap \bar{D} = \{z\}$.

Man beachte, daß z_I und z_A eindeutig bestimmt sind, und z der Mittelpunkt der Strecke $[z_I, z_A]$ ist.

Ist Γ eine relativ-offene Teilmenge von D und erfüllt D eine (GIAK) auf Γ, so kann Γ lokal dargestellt werden durch eine Funktion der Klasse $\mathscr{C}^1$, deren Ableitung einer Lipschitzbedingung mit einer nur von r abhängigen Konstanten genügt. Hat man umgekehrt lokal immer eine Darstellung von Γ durch eine Funktion der Klasse $\mathscr{C}^1$ und genügen die äußeren Normalen einer Lipschitzbedingung, so erfüllt D auf jeder kompakten Teilmenge von Γ eine (GIAK).

3.2. Lemma. *Seien $z, y \in \mathbb{R}^n$ mit $y \neq 0$. Sei $z_I := z - y$; $z_A := z + y$; $r := |y|$; $B_I := B(z_I, r)$; $B_A := B(z_A, r)$; $B_G := B(z_A, 3r)$ und $S := B_G \setminus B_A$. Dann gilt für alle $x \in]z, z_I[$ und für jede meßbare Teilmenge Γ von ∂B_I die Ungleichung*

$$C\mu_x^{B_I}(\Gamma) \geqq \mu_x^S(\partial B_G)\mu_{z_I}^{B_I}(\Gamma)$$

mit einer nur von der Dimension n abhängigen Konstanten C.

Beweis. Zunächst sei $n \geqq 3$. Setze $C := (1-3^{2-n})^{-1} 2^{n-1}$. Sei $x \in [z, z_I]$ und $\Gamma \subset B_I$ meßbar. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
C^{-1}\mu_x^S(\partial B_G) &= C^{-1}(3r)^{n-2} r^{n-2}((3r)^{n-2} - r^{n-2})^{-1}(r^{2-n} - |z_A - x|^{2-n}) \\
&= 2^{1-n}|z_A - x|^{2-n}(|z_A - x|^{n-2} - r^{n-2}) \\
&\leqq 2^{1-n}(2r)^{2-n}(|z_A - x|^{n-2} - r^{n-2}) \\
&= 2^{3-2n} r^{2-n}((r + |z - x|)^{n-2} - r^{n-2}) \\
&= 2^{3-2n} r^{2-n}|z - x| \sum_{k=1}^{n-2} \binom{n-2}{k} |z - x|^{k-1} r^{n-2-k} \\
&\leqq 2^{3-2n} r^{2-n}|z - x| \sum_{k=1}^{n-2} \binom{n-2}{k} r^{n-3} \\
&\leqq 2^{1-n} r^{-1}|z - x| .
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\mu_x^{B_I}(\Gamma) &= r^{n-2}(r^2-|x-z_I|^2)\int_\Gamma |x-t|^{-n} d\sigma_{z_I,r}(t)\\ &\geqq r^{n-2}(r^2-|x-z_I|^2)\int_\Gamma (2r)^{-n} d\sigma_{z_I,r}(t)\\ &= 2^{-n}r^{-2}(2r|z-x|-|z-x|^2)\sigma_{z_I,r}(\Gamma)\\ &\geqq 2^{1-n}r^{-1}|z-x|\sigma_{z_I,r}(\Gamma)\\ &\geqq C^{-1}\mu_x^S(\partial B_G)\sigma_{z_I,r}(\Gamma)\,.\end{aligned}$$

Den Fall $n=2$ behandelt man analog, indem man statt $|z_A-x|^{2-n}$ die Funktion $ln(|z_A-x|^{-1})$ verwendet. ||

Ist Γ eine Teilmenge von B_I, deren Abschluß z nicht enthält, so besitzt $x\to\mu_x^S(\partial B_G)$ auf Γ eine strikt positive untere Schranke. Mit Hilfe des Randminimumprinzips erhält man daher die umgekehrte Ungleichung wie in Lemma 3.2, jetzt allerdings mit einer von Γ abhängigen Konstanten C.

3.3. Satz. *Sei D ein Gebiet im R^n. Weiter sei W eine offene Teilmenge von D und U eine offene, relativ-kompakte Umgebung von $\overline{W}$ derart, daß D auf $U\cap\partial D$ eine* (GIAK) *erfüllt. Dann gilt: Sind h_1, h_2 zwei von Null verschiedene, auf $\overline{U}\cap\partial D$ verschwindende, positive, harmonische Funktionen auf D, so gibt es eine Konstante C derart, daß*

$$Ch_1|_W \geqq h_2|_W$$

gilt.

Beweis. Man wähle ein $r>0$ so, daß D auf $U\cap\partial D$ eine (GIAK) mit $2r$ erfüllt und außerdem $5r<d(\partial U, \overline{W})$ gilt. Sei $K:=\{x\in D|d(x,\partial D)\geqq r\}\cap\overline{U}$; $\alpha:=\inf h_1(K)$ und $\beta:=\sup h_2(\overline{U}\cap D)$. Dann sind α und β strikt positiv und reell. Da h_1 und h_2 auf der kompakten Menge K strikt positiv sind, gibt es eine Konstante $C_1>0$ derart, daß $C_1 h_1|_K\geqq h_2|_K$ gilt.

Es genügt also, eine Konstante C_2 anzugeben so, daß für jedes $x_0\in W$ mit $d(x_0,\partial D)<r$ bereits

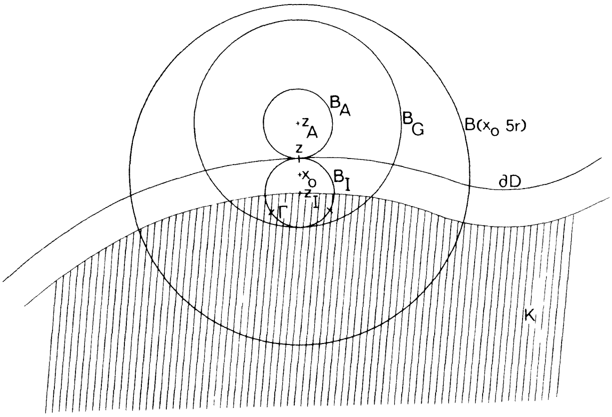
$$C_2 h_1(x_0)\geqq h_2(x_0)$$

gilt.

Sei jetzt $x_0\in W$ mit $d(x_0,\partial D)<r$. Da $B(x_0,5r)\subset U$, sieht man sofort, daß der Abstand von x_0 und D in einem Punkt $z\in\partial D\cap U$ angenommen wird. Sei $y:=r|x_0-z|^{-1}(z-x_0)\cdot z_I, z_A$ usw. seien definiert wie im Lemma. Sei $\Gamma:=\{w\in\partial B_I|\,|z-2y-w|\leqq r\}$. Im folgenden beachte man, daß $B_A\subset\complement D$ und $B_I\subset D$ gilt. Dies kann man so einsehen: Offenbar gilt $B(x_0,|z-x_0|)\subset D$. Wegen $z\in\partial D\cap U$ existiert nach Voraussetzung eine Kugel mit Radius r, die D von außen berührt. Diese muß als Zentrum z_A haben, da sonst ihr Durchschnitt mit $B(x_0,|z-x_0|)$, also auch ihr Durchschnitt mit D nicht leer wäre. Entsprechend folgt dann, daß z_I das Zentrum der z von innen berührenden Kugel mit Radius r ist.

Unser Lemma ergibt jetzt

$$C_2\mu_x^{B_I}(\alpha 1_\Gamma)\geqq\mu_x^S(\beta 1_{\partial B_G})$$



für alle $x \in]z, z_I[$ mit einer nur von α, β und $\sigma_{z_I, r}(\Gamma)$ abhängigen Konstanten C_2. Insbesondere hängt C_2 also nicht von der Wahl von x_0 ab.

Wendet man das Maximumprinzip auf die Menge $B_G \cap D$ an, so findet man $\mu_x^S(\beta 1_{\complement B_G}) \geqq h_2(x)$ für alle $x \in B_G \cap D$, insbesondere also für x_0. Wendet man das Maximumprinzip auf B_I an und beachtet dabei, daß $\Gamma \subset K$ gilt, so erhält man $\mu_x^{B_I}(\alpha 1_\Gamma) \leqq h_1(x)$ für alle $x \in B_I$, insbesondere also für x_0.

Insgesamt hat man

$$h_2(x_0) \leqq \mu_{x_0}^S(\beta 1_{\complement B_G}) \leqq C_2 \mu_{x_0}^{B_I}(\alpha 1_\Gamma) \leqq C_2 h_1(x_0) . \quad ||$$

3.4. Korollar. *D sei eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, auf der ein Greenscher Kern G existiert. W sei eine nichtleere, offene Teilmenge von D und V sei eine offene, relativ-kompakte Umgebung von $\overline{W}$ derart, daß D eine* (GIAK) *auf $\overline{V} \cap \partial D$ erfüllt. Dann besitzt (D, V, W) die Vergleichbarkeitseigenschaft und die Fortsetzungseigenschaft.*

Beweis. Ein einfaches geometrisches Argument zeigt, daß (D, V, W) die topologische Voraussetzung von Satz 2.7 erfüllt. Es genügt also, (VE) nachzuweisen.

Sei Z eine Komponente von $V \cap D$ mit $Z \cap W \neq \emptyset$. Wir müssen einen Punkt $x_0 \in Z$ und ein $C \in \mathbb{R}$ angeben mit

$$C G_{x_0}^{V \cap D}|_{W \cap Z} \geqq G_{x_0}^D|_{W \cap Z} .$$

Sei Z' die Komponente von V, die Z enthält und sei $x_0 \in W \cap Z$. Es ist jetzt möglich, ein $r \in R$ so zu wählen, daß $0 < 2r < d(\overline{W}, \partial V)$ und $\overline{B}(x_0, 4r) \subset W \cap Z$ erfüllt ist. Sei $D_Z := Z \setminus \overline{B}(x_0, r)$; $W_Z := (W \cap Z) \setminus \overline{B}(x_0, 3r)$ und $V_Z := \{x \in Z' | d(x, \partial Z') > r\} \setminus \overline{B}(x_0, 2r)$. Es genügt jetzt, ein $C > 0$ zu finden, für welches

$$C G_{x_0}^{V \cap D}|_{W_Z} \geqq G_{x_0}^D|_{W_Z}$$

gilt. Ein solches existiert aber nach Satz 3.3:

D_Z ist ein Gebiet im R^n, W_Z ist eine offene Teilmenge von D_Z, und V_Z ist eine offene, relativ-kompakte Umgebung von $\overline{W}_Z$. Klar ist auch, daß D_Z auf $V_Z \cap \partial D_Z = V_Z \cap \partial Z$ eine (GIAK) erfüllt. Insbesondere ist damit sowohl $G_{x_0}^{V \cap D}$, als auch $G_{x_0}^D$ eine in D_Z positive und harmonische, auf $\overline{V}_Z \cap \partial D_Z$ verschwindende Funktion, so daß Satz 3.3 angewandt werden kann. $||$

3.5. Korollar. *Ist D ein relativ-kompaktes Gebiet im R^n, welches eine gleichmäßige innere und äußere Kugelbedingung auf ∂D erfüllt, so besitzt D die lokale Minoranteneigenschaft.*

Beweis. Korollar 2.8 und Korollar 3.4. $\|$[1]

3.6. Bemerkungen. 1. Ist D ein Lipschitzgebiet und $z \in D$, so läßt sich mit Hilfe von Lemma 2.2 aus [6] die im Beweis von Satz 3.3 auftretende Zahl β durch $C_0 h(z)$ nach oben abschätzen. Dabei hängt C_0 nur von der geometrischen Gestalt von D ab. Der Beweis von 3.3 zeigt dann, daß Gebiete D, die auf ∂D eine (GIAK) erfüllen, die von J. Kemper in [7] definierte Property III besitzen.

2. Ist D ein Gebiet mit der lokalen Minoranteneigenschaft und sind $x_1, \ldots, x_m$ Punkte aus D, so besitzt auch $D \setminus \{x_1, \ldots, x_m\}$ diese Eigenschaft: Nach Satz 2.7 und Korollar 2.8 genügt es nachzuweisen, daß für genügend kleine ε die Tupel $(D \setminus \{x_1, \ldots, x_m\}, B(x_i, 2\varepsilon), B(x_i, \varepsilon))$ die Fortsetzungseigenschaft besitzen. Dies folgt aber mit Theorem 2.3.2 aus [2] sofort.

Dies zeigt, daß Gebiete mit der lokalen Minoranteneigenschaft nicht notwendig regulär sein müssen.

3. Umgekehrt gibt es auch reguläre Gebiete, die die lokale Minoranteneigenschaft nicht besitzen:

Sei etwa $D :=]0,2[\times]0,2[\setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(1/n, y) | 0 \leqq y \leqq 1\}$. Man sieht, daß der Punkt $(0, 0)$ kein Fundamentalsystem $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Umgebungen besitzt, derart, daß (D, V_n, V_{n+1}) die Fortsetzungseigenschaft hat; für genügend große n haben nämlich immer abzählbar viele Komponenten von $V_n \cap D$ nichtleeren Durchschnitt mit V_{n+1}. Satz 1.8 und Satz 1.9 zeigen, daß (LM) für D nicht gilt.

4. Auch wenn D ein reguläres Gebiet ist, mit der Eigenschaft, daß jedes $x \in \partial D$ ein Fundamentalsystem $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Umgebungen besitzt derart, daß nur endlich viele Komponenten von $V_n \cap D$ nichtleeren Durchschnitt mit V_{n+1} haben, so muß doch D die Eigenschaft (LM) nicht besitzen. Dies zeigt die jetzt folgende Abwandlung des in 3. gegebenen Beispiels.

3.7. Beispiel für ein Gebiet Ω mit folgenden Eigenschaften:

1. Ω ist eine reguläre Teilmenge des $\mathbb{R}^2$.

2. Jedes $x \in \partial\Omega$ besitzt ein Fundamentalsystem $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Umgebungen derart, daß $U_n \cap \Omega$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ zusammenhängend ist.

3. Ω besitzt die lokale Minoranteneigenschaft nicht.

Konstruktion: Sei $D :=]0,1[\times]0,1[$ und G sei ein im folgenden fest vorgegebener Greenscher Kern auf D. Sei $y := (3/4, 1/4)$. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine strikt antitone Folge aus $]0,3/4[$, die gegen Null konvergiert. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n := [a_{3n-1}, a_{3n-2}] \times [0,1/2]$ und $x_n := (a_{3n}, 1/4)$. Sei $W := D \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$.

Es ist leicht einzusehen, daß zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine endliche, disjunkte Vereinigung C_n von abgeschlossenen, im Inneren von A_n liegenden Kreisen existiert derart, daß für $V_n := (]0,1[\times]0,1/2[) \setminus C_n$ die Ungleichung

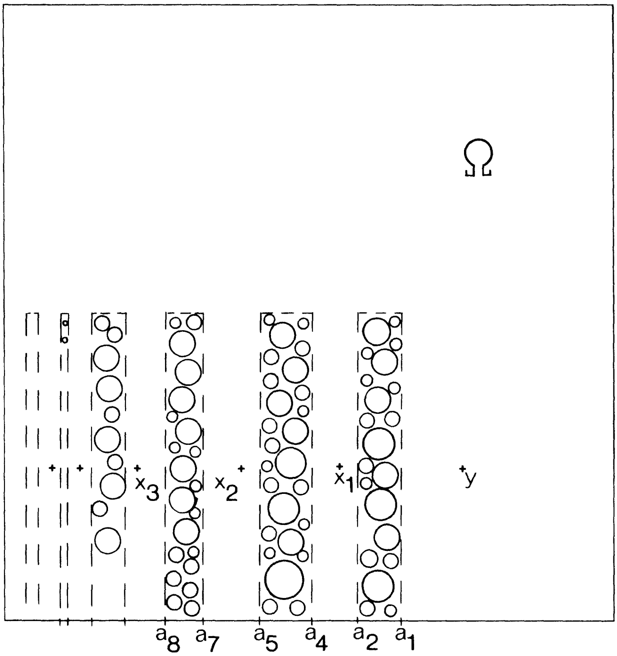
$$nG^{V_n}(y, x_n) \leqq G^W(y, x_n)$$

gilt. Sei $\Omega := D \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} C_i$.

Nachweis der verlangten Eigenschaften: (1) und (2) sind klar. Zu (3): Sei $V := \{(s, t) \in \Omega | t < 2^{-1}\}$. Ist $n \in \mathbb{N}$, so folgt wegen $\Omega \supset W$ und $V_n \supset V$ sofort

$$G^\Omega(y, x_n) \geqq G^W(y, x_n) \geqq nG^{V_n}(y, x_n) \geqq nG^V(y, x_n).$$

[1] Nach Abschluß meiner Untersuchungen erhielt ich ein Preprint von [11]. Hier wird für den Spezialfall, daß D eine kompakte, berandete Riemannsche Fläche ist, die lokale Minoranteneigenschaft nachgewiesen



Ist jetzt U eine offene Umgebung von $(0,1/4)$ mit $V_0 := \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 | t < 2^{-1}\} \supset \bar{U}$, so enthält U fast alle x_n. Die obigen Überlegungen, zusammen mit Satz 2.7, zeigen, daß (Ω, V_0, U) die Fortsetzungseigenschaft nicht besitzt. Mit Satz 1.8 folgt, daß Ω die lokale Minoranteneigenschaft nicht besitzt. ||

Literatur

1. Brelot, M.: Sur le role du point à l'infini dans la thèorie des fonctions harmoniques. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **61**, 301—332 (1944)
2. Constantinescu, C., Cornea, A.: Potential Theory on Harmonic Spaces. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1972
3. Gauthier, P. M., Hengartner, W.: Local harmonic majorants of functions subharmonic in the unit disk. Journal d'anal. math. **26**, 405—412 (1973)
4. Hansen, W.: Cohomology in harmonic spaces. In: Seminar on Potential Theory II, 63—101. Lecture Notes in Mathematics **226**. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1971
5. Helms, L. L.: Introduction to potential theory. New York, London, Sidney, Toronto: Wiley 1969
6. Hunt, R. A., Wheeden, R. L.: Positive harmonic functions on Lipschitz domains. Trans. A.M.S. **147**, 507—527 (1970)
7. Kemper, J. T.: A boundary Harnack principle for Lipschitz domains and the principle of positive singularities. Comm. pure appl. math. **25**, 247—255 (1972)
8. Kuran, Ü.: On measures associated to superharmonic functions. Proc. A.M.S. **36**, 179—186 (1972)
9. Maeda, F.-Y.: Energy of functions on a self-adjoint harmonic space I. Hiroshima math. j. 313—337 (1972)
10. Walter, W.: Einführung in die Potentialtheorie. Mannheim-Wien-Zürich: BI-Hochschulskript 1971
11. Gauthier, P. M., Goldstein, M.: Local harmonic majorants of subharmonic functions. To appear
12. Widman, K. O.: Inequalities for the Green function and boundary continuity of the gradient of solutions of elliptic differential equations. Math. scand. **21**, 17—37 (1967)

Nachtrag bei der Korrektur: Mit Hilfe der in [12] angewandten Methoden läßt sich zeigen, daß Ljapunov-Dini-Gebiete die lokale Minoranteneigenschaft besitzen. Auch die im Beweis von Theorem 2.2 aus [7] auftretende Lücke läßt sich unter Verwendung von [12] zumindest für Ljapunov-Dini-Gebiete schließen.

Angenommen am 24. November 1975, und in überarbeiteter Form 29. März 1976

Math. Ann. 225, 115—122 (1977)

Primitive Ideals of Group Algebras of Supersoluble Groups

Martin Lorenz
Mathematisches Institut der Universität Gießen, Arndtstr. 2, D-6300 Gießen, Federal Republic of Germany

Introduction

A group G (not necessarily finite) is *polycyclic* if G has a subnormal series $\langle 1\rangle = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_{n-1} \subset G_n = G$ such that $G_{i-1} \lhd G_i$ and G_i/G_{i-1} is cyclic ($i = 1, 2, \ldots, n$). If in addition the groups G_i appearing in the above series are normal in the whole group G then G is called *supersoluble*. The group G is *polycyclic-by-finite* if G has a normal polycyclic subgroup of finite index. It is well-known that the group ring $R[G]$ of a polycyclic-by-finite group G over a noetherian ring R is noetherian (Hall [5], Theorem 1).

This note aims to characterize the primitive ideals (i.e. the kernels of the simple left modules) of the group algebra $k[G]$ of a supersoluble group G over a perfect field k. The methods used and the statement of the results have been very much influenced by the great success of Lie algebra theory on this subject, because in a sense, supersoluble groups can be considered as the formal group theoretic analogue of completely solvable finite-dimensional Lie algebras [i.e. Lie algebras $\mathfrak{g}$ having a series $0 = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{g}_{n-1} \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$ of ideals $\mathfrak{g}_i$ such that $\dim(\mathfrak{g}_i) = i$].

Section 1 deals with the group algebra $k[G]$ of a general polycyclic-by-finite group G. Using methods developed by Hall in [6] we prove that the endomorphism ring of a simple $k[G]$-module is finite-dimensional over the ground field k if the latter is perfect. We then give a short proof of the well-known fact that $k[G]$ is a Jacobson ring (i.e. the Jacobson radical of every homomorphic image is nilpotent, cf. [8, 4]).

In Section 2 the notion of the semicentre for factor algebras of group algebras is defined. The corresponding notion has been a very useful tool in the study of enveloping algebras of solvable Lie algebras (cf. [2], § 6). The main result of this section is a version of Smith's Theorem A in [9] and states that: given two ideals $I \subsetneqq J$ in the group algebra of a supersoluble group G over an algebraically closed field k, it is possible to find a homomorphism $\lambda \in \mathrm{Hom}(G, k^{\cdot})$ and an element $\alpha \in J \setminus I$ such that $\lambda(G)$ is finite and $\alpha^x - \lambda(x)\alpha \in I$ for all $x \in G$.

Section 3 uses the above to prove the main result of this note (Theorem 3.3): Let G be a supersoluble group, k a perfect field and I a prime ideal of the group algebra $k[G]$. Then the following are equivalent: (i) I is primitive. (ii) The centre

$Z(k[G]/I)$ of $k[G]/I$ is a finite algebraic field extension of k. (iii) I is maximal. (iv) I is locally closed in $\operatorname{Spec} k[G]$. – Here as usual $\operatorname{Spec} k[G]$ denotes the set of prime ideals in $k[G]$, endowed with the Jacobson topology (see [2], 1.2). I is called locally closed if $\{I\}$ is a locally closed subset of $\operatorname{Spec} k[G]$ in this topology, that is the intersection of all prime ideals strictly containing I is distinct from I. Theorem 3.3 generalizes results of Zalesskij on group algebras of finitely generated nilpotent groups ([10], Theorem 1, Theorem 3).

The final Section 4 gives a method how to construct counterexamples to Theorem 3.3 in the case of general polycyclic-by-finite groups.

I would like to thank Professor G. O. Michler for his constant help and encouragement. I am also indepted to the referee for his valuable suggestions and comments.

1. Endomorphism Rings of Simple Modules

Throughout this note "module" will mean "left module" and "ideal" stands for "two-sided ideal".

(1.1) A suitable adaption of the proof (due to Gabriel) given in ([3], 2.6.9) yields the following technical

Lemma. *Let k be a field and A a k-algebra such that for any extension field K of k the K-algebra $A \bigotimes_k K$ is noetherian. Furthermore let V be a completely reducible A-module of finite length. Then for any separable algebraic field extension K/k the $\left(A \bigotimes_k K\right)$-module $V \bigotimes_k K$ is completely reducible of finite length.*

(1.2) **Theorem.** *Let G be a polycyclic-by-finite group, k a field and V an irreducible $k[G]$-module. Then every element of the endomorphism ring $D := \operatorname{End}_{k[G]}(V)$ is algebraic over k. Furthermore, if k is perfect,* $\dim_k(D) < \infty$.

Proof. (1) Recall the following result of Hall ([6], Lemma 3): Let $J := k[\langle t \rangle]$ be the group algebra of the infinite cyclic group $\langle t \rangle$ over k. Then a finitely generated $J[G]$-module cannot contain a J-submodule which is isomorphic with the field of fractions $Q(J)$ of J.

(2) Let $0 \neq x \in D$. We show that x is algebraic over k. If not, the subalgebra $J := k[x, x^{-1}]$ of the division ring D generated by $1, x, x^{-1}$ can be considered as the group algebra $k[\langle x \rangle]$ of the infinite cyclic group $\langle x \rangle$ over k. The $k[G]$-module V can be viewed as a module over the group ring $J[G] = J \bigotimes_k k[G]$ via the action $(j \otimes \alpha) \cdot v = j(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot j(v)$ $(j \in J, \alpha \in k[G], v \in V)$. The simplicity of ${}_{k[G]}V$ implies V to be a cyclic $J[G]$-module.

The field of fractions $Q(J)$ of J is contained in D and hence acts on V. Let $0 \neq v \in V$. Then $Q(J) \cdot v$ is a J-submodule of V that is isomorphic to $Q(J)$ via the map $q \mapsto q(v)$ $(q \in Q(J))$. This contradicts the result mentioned in (1) and concludes the proof of the first part of the theorem.

(3) As to the second assertion let $\hat{k}$ be an algebraic closure of k. By (1.1) $V \bigotimes_k \hat{k}$ is a direct sum of finitely many irreducible $\hat{k}[G]$-modules $\hat{V}_i$ $(i=1,2,\dots,n)$. Therefore

$$D \bigotimes_k \hat{k} \subset \operatorname{End}_{\hat{k}[G]}\left(V \bigotimes_k \hat{k}\right) = \prod_{i,j=1}^{n} \operatorname{Hom}_{\hat{k}[G]}(\hat{V}_i, \hat{V}_j).$$

Since by (2) endomorphisms of simple $\hat{k}[G]$-modules are scalar, it follows that $\dim_k(D) = \dim_{\hat{k}}\left(D \bigotimes_k \hat{k}\right)$ is finite. Thus the theorem is proved.

(1.3) An ideal I of the ring R is called *semiprime* if $I \neq R$ and the factor R/I has no nonzero nilpotent ideals. I is *primitive* if R/I has a faithful simple module, i.e. a simple module $M \neq 0$ such that $a \cdot M = 0$ for $a \in R/I$ implies $a = 0$. The intersection of all primitive ideals of R containing a given ideal I is just the inverse image in R of the Jacobson radical of R/I. – From (1.2) one derives the following

Corollary. *Let G be a polycyclic-by-finite group and k a field. Then any semiprime ideal of the group algebra $k[G]$ is an intersection of primitive ideals of $k[G]$.*

Proof. Let I be a semiprime ideal of $k[G]$. We have to show that the Jacobson radical J of the algebra $A := k[G]/I$ is zero. Consider the direct product $H := G \times \langle x \rangle$ of G with an infinite cyclic group $\langle x \rangle$ and let $I' := Ik[H]$ be the two-sided ideal of $k[H]$ generated by I. Then the factor $k[H]/I'$ is isomorphic to the group ring $B := A[\langle x \rangle]$. (The isomorphism is given by $\sum \alpha_i x^i + I' \mapsto \sum [\alpha_i + I] x^i, \alpha_i \in k[G]$.) Choose $a \in J$. It will suffice to show that a is nilpotent, for then J is a nil ideal of the semiprime noetherian ring A and hence zero.

Claim. $B(1-ax) = B$.
Pf. If not, $B(1-ax)$ is contained in a maximal left ideal L of B. Let V be the simple B-module $V := B/L$, $v_0 := 1 + L \in V$ and x_V the endomorphism $v \mapsto x \cdot v$ of V. Since x is central in B it follows that $x_V \in \operatorname{End}_B(V)$. Therefore, by (1.2), x_V is algebraic over k. Furthermore being induced by a group element x_V is obviously invertible in $\operatorname{End}_B(V)$. Set $y := x_V^{-1} \in \operatorname{End}_B(V)$. For some polynomial $f \in k[X]$, the polynomial algebra in one indeterminate X over k, one has $x_V = f(y)$. The equation $a \cdot x_V(v_0) = v_0$ gives $a \cdot v_0 = y(v_0)$ and therefore $(1 - af(a)) \cdot v_0 = (1 - yf(y))(v_0) = 0$, a contradiction to the fact that $1 - af(a)$ is contained in $1 + J$ and hence is invertible.

Thus we may write $1 = (a_{-m}x^{-m} + \dots + a_{-1}x^{-1} + a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n)(1 - ax)$ for suitable $a_i \in A$. Comparing degrees one obtains $a_{-m} = a_{-m+1} = \dots = a_{-1} = 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = a$, $a_2 = a^2, \dots, a_n = a^n$, $a^{n+1} = 0$. This finishes the proof.

2. Semicentres

(2.1) Let G be a group, k a field and I an ideal of the group algebra $k[G]$. Then G acts on the factor $A := k[G]/I$ according to $(\alpha + I)^x = \alpha^x + I$ $(x \in G, \alpha \in k[G])$. Set $G^* := \operatorname{Hom}(G, k^{\cdot})$, and for $\lambda \in G^*$ set $A^\lambda := \{a \in A : a^g = \lambda(g) a$ for all $g \in G\}$. In case $A^\lambda \neq \{0\}$ λ is called an *eigenvalue* of G in A and an element $0 \neq a \in A^\lambda$ is called *semiinvariant*. Collect the eigenvalues of G in A in the subset $\mathscr{E}(A)$ of G^* and define the *semicentre* $Sc(A)$ of A to be the sum of the eigenspaces A^λ, $\lambda \in \mathscr{E}(A)$, in A. Using standard arguments one shows that this sum is direct, hence

$$Sc(A)=\sum_{\lambda\in\mathscr{E}(A)}\oplus A^{\lambda}.$$

(2.2) *Remarks.* a) $Sc(A)$ is a subalgebra of A: For $\lambda, \nu\in\mathscr{E}(A)$ one easily verifies the inclusion $A^{\lambda}A^{\nu}\subset A^{\lambda\cdot\nu}$. Here $\lambda\cdot\nu\in G^*$ is defined by $(\lambda\cdot\nu)(x)=\lambda(x)\nu(x)$ $(x\in G)$.

b) Obviously the centre $Z(A)$ of A is just the eigenspace $A^{\mathbb{1}}$ corresponding to the character of G given by $\mathbb{1}(x)=1$ for all $x\in G$. Thus $Z(A)\subset Sc(A)$. In case $G=[G,G]$ one has the equality $Z(A)=Sc(A)$, while in general the semicentre can be strictly greater than the centre of A.

c) For any semiinvariant element $e\in A$ one has $eA=Ae$. If in addition A is prime, e is a regular element of A: $eb=0$ for some $b\in A$ implies $0=Aeb=eAb$ and hence $b=0$. Analoguously $be=0$ implies $b=0$. Thus $\{1, e, e^2, \ldots\}$ is an Ore subset of A (see [2], 2.2). In the same way one shows that a semiinvariant element $e\in A$ is not nilpotent provided I is semiprime.

d) If $k[G]$ is noetherian and I is prime one can form the (classical) quotient ring $Q(A)$ of $A=k[G]/I$. Suppose for some $\lambda\in\mathscr{E}(A)$ elements $a, b\in A^{\lambda}$ are given, with $b\neq 0$. Then by c) b is invertible in $Q(A)$. Furthermore remarks a) and b) show that $ab^{-1}\in Z(Q(A))$ (cf. 3.2b).

(2.3) The following theorem is based on the proof of Smith's result ([9], Theorem A).

Theorem (P. F. Smith). *Let k be an algebraically closed field and G a supersoluble group. If $I\subsetneqq J$ are ideals of the group algebra $k[G]$ then there exists $\lambda\in G^*$ such that $\lambda(G)$ is finite and $J/I\cap(k[G]/I)^{\lambda}\neq 0$.*

Proof. Let $\langle 1\rangle=G_0\subset G_1\subset\ldots\subset G_n=G$ be a series such that the groups G_i are normal in G and the factors G_i/G_{i-1} are cyclic. The proof is by induction on the subscript i of the groups G_i in the above series. For any normal subgroup V of G such that G/V is abelian and any index $i\in\{0, 1, \ldots, n\}$ let (V, i) denote the following statement:

(V, i): If $I\subsetneqq J$ are V-stable ideals of $k[G_i]$ then there exist $\gamma\in J\setminus I$ and $\lambda\in V^*$ such that $\lambda(V)$ is finite, $\lambda|[G,G]=\mathbb{1}$ and $\gamma^x-\lambda(x)\gamma\in I$ for all $x\in V$.

Thus the assertion of the theorem is just (G, n) and our i^{th} induction statement will be:

For every normal subgroup V of G such that G/V is finite abelian the assertion (V, i) is true.

The case $i=0$ being trivial we proceed to prove the induction step. Choose $V\lhd G$ such that G/V in finite abelian and set $U:=V\cap K_i$, where K_i denotes the kernel of the natural map $G\to \mathrm{Aut}(G_{i+1}/G_i)$. Then U is a normal subgroup of G and, since $\mathrm{Aut}(G_{i+1}/G_i)$ is a finite abelian group, the factor G/U is finite abelian. In order to prove $(V, i+1)$ we proceed in two steps

(1) $(U, i+1)$ is true.

(2) If $D\subset E$ are normal subgroups of G such that G/D is finite abelian and E/D is cyclic then $(D, i+1)$ implies $(E, i+1)$.

Consider a series $U=U_0\subset U_1\subset\ldots\subset U_s=V$ of normal subgroups of G such that U_i/U_{i-1} is cyclic. Then $(U, i+1)$ together with (2) finally yields $(V, i+1)$.

Set $R:=k[G_{i+1}]$, $S:=k[G_i]$.

Proof of (1). Let $\{g_l\}_{l\in M}$ be a transversal for G_i in G_{i+1}, M some index set such that $1\in M$, $g_1=1$. The elements of R are uniquely expressible in the form $\alpha=\sum_{l\in M}\alpha_l g_l$, where $\alpha_l\in S$. Set $S(\alpha):=\{g_l: l\in M, \alpha_l\neq 0\}$ and call card $S(\alpha)$ the length of α. Choose an element $\alpha\in J\backslash I$ of minimal length among the elements of $J\backslash I$. Eventually multiplying on the right by a suitable group element we can clearly assume that $1\in S(\alpha)$. Using the definition of U one easily sees that

$$C_\alpha(I):=\left\{\gamma_1\in S: \exists\gamma=\gamma_1+\sum_{1\neq l\in M}\gamma_l g_l\in I, \gamma_l\in S, S(\gamma)\subset S(\alpha)\right\}$$

and the analoguously defined $C_\alpha(J)$ are U-stable ideals of S such that $C_\alpha(J)\supset C_\alpha(I)$. Clearly $\alpha_1\in C_\alpha(J)$, and the minimality of α implies that $\alpha_1\notin C_\alpha(I)$. Therefore by assumption (U, i), there are $\delta_1\in C_\alpha(J)\backslash C_\alpha(I)$ and $\lambda\in U^*$ such that $\lambda(U)$ is finite, $\lambda|[G,G]=\mathbb{1}$ and $\delta_1^x-\lambda(x)\delta_1\in C_\alpha(I)$ for all $x\in U$. Choose $\delta\in J$ such that $\delta=\delta_1+\sum_{1\neq l\in M}\delta_l g_l$, $\delta_l\in S$, $S(\delta)\subset S(\alpha)$ and for each $x\in U$ choose $\gamma_x\in I$ such that $\gamma_x=\delta_1^x-\lambda(x)\delta_1+\sum_{1\neq l\in M}\gamma_{x,l}g_l$, $\gamma_{x,l}\in S$, $S(\gamma_x)\subset S(\alpha)$. Then $\delta\notin I$ since $\delta_1\notin C_\alpha(I)$. For $x\in U$ one obtains

$$\delta^x-\lambda(x)\delta=\gamma_x+\left(-\sum_{1\neq l\in M}\gamma_{x,l}g_l+\sum_{1\neq l\in M}(\delta_l^x[x,g_l^{-1}]-\lambda(x)\delta_l)g_l\right).$$

Since $S(\gamma_x)$, $S(\delta)\subset S(\alpha)$ and $[x,g_l^{-1}]\in G_i$, the term in the brackets has shorter length than α. The minimality of α implies $\delta^x-\lambda(x)\delta\in I$. Thus (1) is proved.

Proof of (2). Write $E=\langle D,e\rangle$, where $e^m\in D$. Consider E-stable ideals $I\subsetneqq J$ of R. In particular I and J are D-stable and hence by the assumption $(D, i+1)$ there exist $\gamma\in J\backslash I$ and $\lambda\in D^*$ such that $\lambda(D)$ is finite, $\lambda|[G,G]=\mathbb{1}$ and $\gamma^x-\lambda(x)\gamma\in I$ for all $x\in D$. Let L be the finite-dimensional k-vector space $L:=(k\gamma+k\gamma^e+k\gamma^{e^2}+\ldots+k\gamma^{e^{m-1}}+I)/I$ and let $\Phi\in\mathrm{End}_k(L)$ be induced by the automorphism $r\mapsto r^e$ of R. Since k is algebraically closed, Φ has an eigenvalue $\xi\in k$. If $0\neq\sum_{i=0}^{m-1}k_i\gamma^{e^i}+I$ $(k_i\in k)$ is a corresponding eigenvector in L, then $\delta:=\sum_{i=0}^{m-1}k_i\gamma^{e^i}\in J\backslash I$ and $\delta^e-\xi\delta\in I$. For $x\in D$ one obtains $\gamma^{e^ix}=\gamma^{[e^{-i},x^{-1}]xe^i}=\gamma^{xe^i}=\lambda(x)\gamma^{e^i} \bmod I$ since $[G,G]\subset\mathrm{Ker}\,\lambda$. Therefore for all $x\in D$: $\delta^x-\lambda(x)\delta\in I$. Thus one obtains a homomorphism $\tilde\lambda\in E^*$ such that $\delta^x-\tilde\lambda(x)\delta\in I$ for all $x\in E$, $\tilde\lambda|D=\lambda$, $\tilde\lambda(e)=\xi$. Since $e^m\in D$ one has $\xi^m\in D$ $\xi^m\in\tilde\lambda(D)=\lambda(D)$ and hence $\xi^n=1$ for a suitable n. It follows that $\tilde\lambda(E)$ is finite. This concludes the proof of (2) and of (2.3).

3. Primitive Ideals

(3.1) **Lemma.** *Let G be a polycyclic-by-finite group, k a perfect field and I an ideal of the group algebra $k[G]$. For an extension field k' of k let $I':=I\bigotimes_k k'$ be the ideal of $k'[G]$ generated by I. If I is semiprime then so is I'.*

Proof. With the obvious notational changes the proof given in [3], 3.4.2 (see also [2], 3.10) carries over.

(3.2) **Proposition.** *Let G be a supersoluble group, k a perfect field and I a semiprime ideal of the group algebra $k[G]$. Set $A := k[G]/I$.*

(a) *If J is an ideal of $k[G]$ strictly containing I then $J/I \cap Z(A) \neq 0$.*

(b) *If in addition I is prime and $Q(A)$ is the (classical) quotient ring of A then $Z(Q(A)) = Q(Z(A))$.*

Proof. (a) First suppose k to be algebraically closed. Then for any ideal J of $k[G]$ strictly containing I there exists $\lambda \in G^*$ such that $\operatorname{card}\lambda(G) =: n < \infty$ and $J/I \cap A^\lambda \neq 0$ (2.3). Choose $0 \neq a \in J/I \cap A^\lambda$. Then $a^n \neq 0$ since I is semiprime (2.2c). Furthermore $\lambda^n(x) = 1$ for all $x \in G$ and hence by (2.2a) $0 \neq a^n \in A^{\mathbb{1}} = Z(A)$ and clearly $a^n \in J/I$.

In the general case let $\hat{k}$ be an algebraic closure of k and let $\hat{I} := I \bigotimes_k \hat{k}$, $\hat{J} := J \bigotimes_k \hat{k}$ be the ideals of $\hat{k}[G]$ generated by I, J. Then $\hat{I} \subsetneq \hat{J}$, and by (3.1), $\hat{I}$ is semiprime. Therefore there exists $0 \neq \hat{a} = \hat{\alpha} + \hat{I} \in \hat{J}/\hat{I} \cap Z(\hat{k}[G]/\hat{I})$ $(\hat{\alpha} \in \hat{J})$. Using a k-basis $\{k_i\}_{i \in M}$ of $\hat{k}$ write $\hat{\alpha}$ in the form $\hat{\alpha} = \sum_{i \in M_0} \alpha_i k_i$, $M_0 \subset M$ a finite set, $\alpha_i \in J \setminus I$. Then obviously for all $i \in M_0$: $0 \neq \alpha_i + I \in J/I \cap Z(A)$.

(b) Let c be a central element of $Q(A)$. The set of all elements $a \in A$ such that $ac \in A$ forms a nonzero two-sided ideal of A. Therefore, by (a), we can find $0 \neq z \in Z(A)$ such that $zc \in A$. Obviously $zc \in Z(A)$. Now since I is prime, z is regular in A and hence invertible in $Q(A)$. Thus $Z(Q(A)) \subset Q(Z(A))$. The other inclusion is trivial.

(3.3) **Theorem.** *Let G be a supersoluble group and k a perfect field. Then for any prime ideal I of the group algebra $k[G]$ the following properties are equivalent:*

(i) *I is primitive.*

(ii) *The centre $Z(k[G]/I)$ of $k[G]/I$ is a finite algebraic field extension of k.*

(iii) *I is maximal.*

(iv) *I is locally closed in* $\operatorname{Spec} k[G]$.

Proof. (i)$\Rightarrow$(ii). Let V be an irreducible $k[G]$-module with kernel I. Then $Z(k[G]/I)$ is in a natural way embedded in $Z(\operatorname{End}_{k[G]}(V))$. Application of (1.2) yields the result. (ii)$\Rightarrow$(iii). This follows immediately from (3.2a). Finally (iii)$\Rightarrow$(iv) is trivial and (iv)$\Rightarrow$(i) is a consequence of (1.3).

4. Counterexamples

(4.1) In the present form (3.3) does not extend to group algebras of general polycyclic-by-finite groups: Let G be a polycyclic group having all nontrivial conjugacy classes of infinite order and let k be an absolute field, i.e. a field that is algebraic over a finite field. Then by a result of Roseblade ([8], Theorem A), $k[G]$ is certainly not primitive. On the other hand $k[G]$ is prime and $Z(k[G]) = k$. Thus the ideal $I = 0$ satisfies (ii) but not (i).

(4.2) Another more interesting example dealing with non absolute fields will be given below. We first state a slightly more general result suggested by the referee. Recall that if H is a group acting on a ring S, then the *crossed product* $S_\alpha[H]$ of S and H with respect to the action $\alpha: H \to \operatorname{Aut}(S)$ is a ring that is free as a right S-module with basis the elements of H. The multiplication is defined distributively extending the rule $xr \cdot ys = xyr^{\alpha(y)}s$ $(x, y \in H, r, s \in S)$.

Proposition. *Let k be an algebraically closed field and let X be an irreducible affine k-variety with coordinate ring S. Furthermore let H be a group acting faithfully on X and let $R:=S_\alpha[H]$ be the crossed product of S and H with respect to the induced action $\alpha: H\to \mathrm{Aut}(S)$ of H on S. Then:*

(a) *R is prime.*

(b) *If X contains a dense H-orbit, then R is primitive.*

(c) *If R is noetherian, then the ideal $I=0$ of R is locally closed in* $\operatorname{Spec} R$ *if and only if the union of all H-orbits that are not dense in X is not dense.*

Proof. (1) *If J is a nonzero ideal of R, then $J\cap S\neq 0$.* Every element $\alpha\in R$ can be written uniquely in the form $\alpha=\sum_{i=1}^{n} h_i s_i$, where $h_i\in H$ are distinct and s_i are nonzero elements of S. Call the number of summands occuring in such an expression the length of α and choose $0\neq\alpha\in J$ of minimal length n among the nonzero elements of J. After multiplying with a suitable element of H if necessary, we may assume that $h_1=1$. The assertion will be proved if we can show that $n=1$. Assume $n>1$. Then $h_n\neq 1$ and there exists an element $s\in S$ such that $s^{h_n}\neq s$. (We write s^h instead of $s^{\alpha(h)}$.) The element $\beta:=s\alpha-\alpha s=\sum_{i=2}^{n} h_i(s^{h_i}-s)s_i\in J$ is nonzero, because $s^{h_n}-s$, $s_n\neq 0$ and S has no zero divisors by the irreducibility of X. Since β has shorter length than α we have the desired contradiction.

(2) *Proof of (a).* If A, B are nonzero ideals of R, then by (1) $A\cap S$ and $B\cap S$ are nonzero. Therefore $(A\cap S)(B\cap S)\neq 0$ and $AB\neq 0$.

(3) *Proof of (b).* The existence of a dense H-orbit is equivalent to the existence of a maximal ideal I of S such that $\bigcap_{h\in H} I^h=0$. Consider the left ideal RI of R. Since R is free over S, it follows that $RI\neq R$. Hence we can choose a maximal left ideal L of R containing RI. Let V be the irreducible R-module $V:=R/L$. Then as S-modules $V\supset S+L/L\cong S/S\cap L=S/I$. Therefore $A\cap S\subset I$, where $A:=\mathrm{Ann}_R(V)$. Since $A\cap S$ is clearly an H-stable ideal of S, it follows that $A\cap S\subset \bigcap_{h\in H} I^h=0$. Finally $A=0$, by (1). Thus V is a faithful irreducible R-module and R is primitive.

(4) *If J is a semiprime ideal of R, then $J\cap S$ is a semiprime ideal of S.* Let $\mathcal{M}:=\{P_1,\ldots,P_n\}$ be the set of minimal prime ideals of S containing $J_S:=J\cap S$. Since J_S is H-stable, H operates on $\mathcal{M}$. It follows that the radical $\sqrt{J_S}=\bigcap_{i=1}^{n} P_i$ of the ideal J_S is H-stable. Hence $R\sqrt{J_S}$ is a two-sided ideal of R. Furthermore there exists an n such that $\sqrt{J_S}^{\,n}\subset J_S$. It follows that $(R\sqrt{J_S})^n=R\sqrt{J_S}^{\,n}\subset RJ_S\subset J$. Therefore, since J is semiprime, $R\sqrt{J_S}\subset J$ and $\sqrt{J_S}\subset J\cap S=J_S$.

(5) *Proof of (c).* First suppose that the union of all H-orbits in X that are not dense is dense, i.e. there are maximal ideals I_α, $\alpha\in A$, of S such that $D(I_\alpha):=\bigcap_{h\in H} I_\alpha^h\neq 0$ for all $\alpha\in A$ but $\bigcap_{\alpha\in A} D(I_\alpha)=0$. Each $D(I_\alpha)$ is a semiprime H-stable ideal of S. Let I'_α be the two-sided ideal $I'_\alpha:=RD(I_\alpha)$ of R and let $J_\alpha:=\sqrt{I'_\alpha}$ be the radical of I'_α. Since R is noetherian, J_α is a semiprime ideal of R such that $J_\alpha^n\subset I'_\alpha$ for some n. Therefore $(J_\alpha\cap S)^n\subset I'_\alpha\cap S=D(I_\alpha)$ and hence $J_\alpha\cap S=D(I_\alpha)$. It follows that $\left(\bigcap_{\alpha\in A} J_\alpha\right)\cap S=\bigcap_{\alpha\in A} D(I_\alpha)=0$ and, by (1), $\bigcap_{\alpha\in A} J_\alpha=0$. Thus the ideal $I=0$ is the intersection of nonzero prime ideals and therefore is not locally closed in $\operatorname{Spec} R$.

Conversely, suppose $\bigcap_{\alpha \in A} J_\alpha = 0$, where $\{J_\alpha\}_{\alpha \in A}$ denotes the set of nonzero prime ideals of R. Then $0 = \bigcap_{\alpha \in A} (J_\alpha \cap S)$ and, by (1) and (4), each $J_\alpha \cap S$ is a nonzero semiprime ideal of S. The Jacobson property of S implies that $J_\alpha \cap S$ is the intersection of all maximal ideals of S containing $J_\alpha \cap S$. Collect these ideals in $\mathscr{V}$. Certainly H operates on $\mathscr{V}$ and hence $J_\alpha \cap S = \bigcap_{M \in \mathscr{V}} \bigcap_{h \in H} M^h$. Let x_M be such that $\{x_M\}$ is the set of zeros of M and let $\mathcal{O}_M$ be the H-orbit $\mathcal{O}_M := x_M^H$. Then $\mathcal{O}_M$ is not dense, since its annihilating ideal $\mathscr{I}(\mathcal{O}_M) = \bigcap_{h \in H} M^h$ is nonzero. But the union $\bigcup_{\alpha \in A} \bigcup_{M \in \mathscr{V}} \mathcal{O}_M$ is dense, because $\mathscr{I}\left(\bigcup_{\alpha \in A} \bigcup_{M \in \mathscr{V}} \mathcal{O}_M\right) = \bigcap_{\alpha \in A} \bigcap_{M \in \mathscr{V}} \mathscr{I}(\mathcal{O}_M) = \bigcap_{\alpha \in A} (J_\alpha \cap S) = 0$.

This finishes the proof.

(4.3) We close with the promised example: Let $A = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$ be a free abelian group of rank 2 and let $z \in \operatorname{Aut}(A)$ be defined by $x^z = x^2 y$, $y^z = xy$. Consider the group algebra $k[G]$ of the semidirect product $G := A \otimes_\sigma \langle z \rangle$ over the algebraically closed field k. Then $k[A]$ can be considered as the coordinate ring S of the variety $X := k^\cdot \times k^\cdot$. If we let $\langle z \rangle$ act on X according to $(c, d)^z := (cd^{-1}, c^{-1} d^2)$ $(c, d \in k^\cdot)$, then $k[G]$ is isomorphic to the crossed product of S and $\langle z \rangle$. The orbits of the action of $\langle z \rangle$ on X are easily described (We omit the verifications):

(1) All infinite $\langle z \rangle$-orbits are dense in X.

(2) If $E \subset k^\cdot$ denotes the set of roots of unity in k then $E \times E$ is the union of all finite $\langle z \rangle$-orbits in X.

Now suppose k to be non absolute. Then $E \neq k^\cdot$ and hence there are infinite $\langle z \rangle$-orbits in X. By (4.2b) together with (1), we conclude that $k[G]$ is primitive. Finally, since $E \times E$ is dense in X, (4.2c) and (2) show that the ideal $I = 0$ is not locally closed in $\operatorname{Spec} k[G]$. – We remark that the primitivity of $k[G]$ also follows from a result of Passman ([7], Corollary 7.9) that is based on Bergman's work in [1].

References

1. Bergman, G. M.: The logarithmic limit set of an algebraic variety. Trans. Amer. Math. Soc. **157**, 459—469 (1971)
2. Borho, W., Gabriel, P., Rentschler, R.: Primideale in Einhüllenden auflösbarer Lie-Algebren. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1973
3. Dixmier, J.: Algèbres enveloppantes. Paris: Gauthiers-Villars 1974
4. Goldie, A. W., Michler, G. O.: Ore extensions and polycyclic group rings. J. London Math. Soc. **9**, 337—345 (1974)
5. Hall, P.: Finiteness conditions for soluble groups. Proc. London Math. Soc. **4**, 419—436 (1954)
6. Hall, P.: On the finiteness of certain soluble groups. Proc. London Math. Soc. **9**, 595—622 (1959)
7. Passman, D. S.: Advances in group rings. Israel J. Math. **19**, 67—107 (1974)
8. Roseblade, J. E.: Group rings of polycyclic groups. J. Pure and Appl. Algebra **3**, 307—328 (1973)
9. Smith, P. F.: Group rings of hypercyclic groups. Math. Zeitschr. **144**, 283—288 (1975)
10. Zalesskij, A. E.: Irreducible representations of finitely generated nilpotent torsion-free groups. Math. Notes **9**, 117—123 (1971)

Received March 4, 1976

Math. Ann. 225, 123—129 (1977)

Endlich präsentierte arithmetische Gruppen und K_2 über Laurent-Polynomringen

Jürgen Hurrelbrink
Math. Institut der Universität, Universitätsstr. 1, D-4800 Bielefeld 1, Bundesrepublik Deutschland

Arithmetische Gruppen über dem Ring der ganzen Zahlen eines Zahlkörpers sind bekanntlich endlich präsentierbar, und es sind z.B. für alle halbeinfachen Chevalley Gruppen über $\mathbb{Z}$ konkrete endliche Präsentationen angegeben worden [3, 4, 7].

Hingegen fehlten im Fall eines Funktionenkörpers sogar noch Beispiele für endlich präsentierte arithmetische Gruppen. Ist k ein endlicher Körper, so ist etwa $\mathrm{SL}_2(k[t])$ nicht einmal endlich erzeugt [10], $\mathrm{SL}_2(k[t, t^{-1}])$ endlich erzeugt, aber nicht durch endlich viele Relationen definierbar [14]. Diese Arbeit entstand aus der Beobachtung, daß für $n>2$ die Gruppen $\mathrm{SL}_n(k[t, t^{-1}])$ bei endlichem Konstantenkörper k endlich präsentierbar sind, was sich auch auf andere Typen von Chevalley-Gruppen übertragen läßt.

Wir leiten zunächst für alle einfach-zusammenhängenden, fast-einfachen Chevalley-Gruppen (vom Typ $\neq G_2$) einheitliche Präsentationen der Gruppen über $k[t, t^{-1}]$ für beliebige Körper k her. Bei endlichem Körper und notwendigerweise Typ $\neq A_1$ können wir hieraus explizite endliche Präsentationen dieser Gruppen gewinnen, und es ergibt sich die *endliche Präsentierbarkeit der arithmetischen Gruppen über* $k[t, t^{-1}]$ *für jede halbeinfache Chevalley-Gruppe ohne einen Faktor vom Typ* A_1 (oder G_2).

Die erhaltenen Präsentationen besagen, daß $K_2(\Phi, k[t, t^{-1}])$ bei beliebigem Wurzelsystem Φ (und bel. Körper k) von Steinberg-Symbolen erzeugt wird, woraus wir Stabilitätsaussagen und eine genaue Beschreibung von $K_2(\Phi, k[t, t^{-1}])$ mittels $K_2(\Phi, k)$ und der Whitehead-Gruppe $K_1(k)$ erhalten.

Während wir hier mit $k[t, t^{-1}]$ den Ring der S-ganzen Elemente des rationalen Funktionenkörpers $k(t)$ für $S=\{\infty, t\}$ behandeln, ergeben sich naheliegende Verallgemeinerungen auf den Fall der arithmetischen Gruppen über den S-Ganzheitsringen für $|S|\geqq 2$, insbesondere auf den Fall der Gruppen über den Laurent-Polynomringen in mehreren Variablen.

1. Endliche Präsentierbarkeit

Sei k ein beliebiger Körper, $k(t)$ der Körper der rationalen Funktionen, $k[t]$ der Ring der Polynome in t über k, $R:=k[t,t^{-1}]$ der Laurent-Polynomring in t,t^{-1} über k.

Die Elemente von R sind von der Form $t^{\nu}\cdot y$ mit $\nu\in\mathbb{Z}$, $y\in k[t]$, und für $x=t^{\nu}\cdot y\in R$ mit nicht durch t teilbarem $y\in k[t]$ setzen wir $|x|:=\operatorname{grad} y$ und $|0|:=-\infty$. Es ist $R^*=\{x\in R:|x|=0\}\cong k^*\oplus\mathbb{Z}$ die Gruppe der Einheiten von R, und R ist bezüglich $|\ |$ ein euklidischer Ring.

Sei Φ ein (reduziertes) irreduzibles Wurzelsystem, $G(\Phi,\ )$ ein einfach-zusammenhängendes Chevalley-Gruppenschema vom Typ Φ über $k(t)$. Φ^+ bezeichne ein Teilsystem positiver, Δ das in Φ^+ enthaltene System einfacher Wurzeln. Wegen der Euklidizität von R wird die R-parametrisierte Untergruppe $G(\Phi,R)$ von $G(\Phi,k(t))$ erzeugt durch

$$E_0:=\{x_\alpha(r):\alpha\in\Phi,\ r\in R\}\,,$$

und in $G(\Phi,R)$ bestehen für $\alpha,\beta\in\Phi$, $r,s\in R$ die bekannten Relationen

$$\begin{array}{lll}
\mathrm{A}: & x_\alpha(r)x_\alpha(s)=x_\alpha(r+s) & \\
\mathrm{B}: & [x_\alpha(r),x_\beta(s)]=\Pi x_{i\alpha+j\beta}(N_{\alpha\beta ij}r^is^j) & (\beta\neq-\alpha)\\
 & w_\alpha(r)x_\alpha(s)w_\alpha^{-1}(r)=x_{-\alpha}(-r^2s) & (r\in R^*)\\
\mathrm{C}: & h_\alpha(r)h_\alpha(s)=h_\alpha(rs) & (r,s\in R^*);
\end{array}$$

hierbei ist $N_{\alpha\beta ij}\in\mathbb{Z}$, das Produkt erstreckt sich über alle Wurzeln der Form $i\alpha+j\beta$ mit $i,j\in\mathbb{N}$ in gewisser (etwa der Höhe der Wurzeln entsprechender) Reihenfolge, und für $r\in R^*$ ist

$$w_\alpha(r)=x_\alpha(r)x_{-\alpha}(-r^{-1})x_\alpha(r)\,,\qquad h_\alpha(r)=w_\alpha(r)w_\alpha(-1)\,.$$

Wegen Folgerelationen aus A, B, C sei z.B. auf [9, 13] verwiesen.

Sei $\Phi\neq G_2$ vorausgesetzt; es gilt

Satz 1. *$G(\Phi,k[t,t^{-1}])$ wird bei Erzeugung durch E_0 definiert durch A, B, C.*

Beweis. Es wird $G(\Phi,R)$ auch erzeugt durch

$$E:=\{x_\gamma(r):\gamma\in\Phi^+,\ r\in R^*\}\cup\{w_\delta(-1),h_\delta(r):\delta\in\Delta,r\in R^*\}\,.$$

Sei zunächst $\Phi=A_1,A_2$ oder C_2; $\Delta=\{\alpha\}$ bzw. $\{\alpha,\beta\}$ mit α kurz für $\Phi=C_2$, G_1 die durch $E\setminus\{w_\alpha(-1)\}$ erzeugte Untergruppe von $G(\Phi,R)=\mathrm{SL}_2(R)$, $\mathrm{SL}_3(R)$ bzw. $\mathrm{Sp}_4(R)$. Bei obiger Wahl des Erzeugendensystems E von $G(\Phi,R)$ gelingt es in diesen Fällen analog zu [8], jede Relation aus $G(\Phi,R)$ mittels Folgerelationen aus A, B, C in endlich vielen Schritten überzuführen in eine Relation zwischen Elementen aus $E\setminus\{w_\alpha(-1)\}$, d.h. eine Relation aus G_1, indem man auf R^n, $n=2,3,4$, die in [8] 1.2. beschriebene Halbordnung mit dem hier definierten „Betrag" $|\ |$ auf R benutzt.

Sicherlich ist das Verfahren auch für $\Phi=G_2$ anwendbar, doch treten dabei größere technische Schwierigkeiten auf als in [7], weshalb wir $\Phi\neq G_2$ vorausgesetzt haben.

Für $\Phi=A_1,A_2,C_2$ bleibt somit nur noch einzusehen, daß G_1 definiert wird durch Folgerelationen von A,B,C. Das ist für $\Phi=A_1$ trivial; für $\Phi=A_2,C_2$ ist $G_1=(T\ltimes H)\ltimes U$ halbdirektes Produkt, wobei T, H, U die von $\{h_\alpha(r):r\in R^*\}$,

$\{x_\beta(r), w_\beta(-1), h_\beta(r): r\in R^*\}$ bzw. $\{x_\gamma(r): \gamma\in\Phi^+\setminus\{\beta\}, r\in R^*\}$ erzeugten Untergruppen von $G(\Phi, R)$ sind. Beachtet man, daß H isomorph zu $\mathrm{SL}_2(R)$ ist, folgt mittels der Gültigkeit von Satz 1 für $\Phi=A_1$ auch die Behauptung für $\Phi=A_2, C_2$.

Sei nun Φ vom Rang >2, Δ' eine zweielementige Teilmenge von Δ, $(\Phi^+)'$ die von Δ' erzeugte Teilmenge von Φ^+. Die zu Δ' gehörige parabolische Untergruppe P von $G(\Phi, R)$ ist halbdirektes Produkt $P=(T'\ltimes H')\ltimes U'$, wobei T', H', U' die von $\{h_\delta(r): \delta\in\Delta\setminus\Delta', r\in R^*\}$, $\{x_\gamma(r): \gamma\in(\Phi^+)', r\in R^*\}\cup\{w_\delta(-1), h_\delta(r): \delta\in\Delta', r\in R^*\}$ bzw. $\{x_\gamma(r): \gamma\in\Phi^+\setminus(\Phi^+)', r\in R^*\}$ erzeugten Untergruppen von $G(\Phi, R)$ sind. Aus der Behandlung von $\Phi=A_1, A_2, C_2$ folgt, daß die zu $\mathrm{SL}_2(R)\times\mathrm{SL}_2(R)$, $\mathrm{SL}_3(R)$ bzw. $\mathrm{Sp}_4(R)$ isomorphen halbeinfachen Gruppen H' durch Folgerelationen von A, B, C definiert werden, und man schließt dann, daß dies auch für P gilt und analog zu [3] auch für $G(\Phi, R)$, da $G(\Phi, R)$ amalgamiertes Produkt seiner parabolischen Standarduntergruppen vom Rang 2 über R ist. Somit folgt Satz 1.

Wir betrachten nun das (für endlichen Körper k endliche) Erzeugendensystem

$$E_1:=\{x_\gamma(a): \gamma\in\Phi^+, a\in k^*\}\cup\{w_\delta(-1), h_\delta(t): \delta\in\Delta\} \quad \text{für} \quad \Phi\neq C_n$$

bzw.

$$E_1:=\{x_\gamma(a), x_\gamma(at): \gamma\in\Phi^+, a\in k^*\}\cup\{w_\delta(-1), h_\delta(t): \delta\in\Delta\} \quad \text{für} \quad \Phi=C_n$$

von $G(\Phi, R)$.

Wie bisher sei $\Phi\neq G_2$ und k nun als endlich vorausgesetzt; es gilt

Satz 2. *$G(\Phi, k[t, t^{-1}])$ ist für Rang $\Phi>1$ (bei Erzeugung durch E_1) durch endlich viele Relationen definierbar.*

Beweis. Wir beschränken uns auf den Hinweis, daß bei Ableitung von Satz 2 aus Satz 1 die einzig wesentliche Schwierigkeit darin besteht nachzuweisen, daß alle Kommutatorrelationen der Form

$$[h_\alpha^\nu(t)x_\alpha(a)h_\alpha^{-\nu}(t), h_\beta^\mu(t)x_\beta(b)h_\beta^{-\mu}(t)]=\Pi h_{i\alpha+j\beta}^{i\nu+j\mu}(t)x_{i\alpha+j\beta}(N_{\alpha\beta ij}a^i b^j)h_{i\alpha+j\beta}^{-i\nu-j\mu}(t)$$

mit $\alpha, \beta\in\Phi^+$, $a, b\in k^*$ und beliebigem $\nu, \mu\in\mathbb{Z}$ aus endlich vielen Relationen ableitbar sind; hierbei ist $h_{i\alpha+j\beta}(t)$ für $i\alpha+j\beta\in\Phi^+\setminus\Delta$ zu verstehen als Abkürzung für ein entsprechendes Produkt von erzeugenden Elementen $h_\delta(t)$, $\delta\in\Delta$ aus E_1.

Diese Deduktion der Serien von Kommutatorrelationen aus nur endlich vielen Relationen verifiziert man explizit für $\Phi=A_2$ und C_2 (sogar auch für $\Phi=G_2$); dagegen ist es nicht möglich für $\Phi=A_1$.

Sei Φ nun vom Rang >2. Ist in der vorgelegten Serie von Kommutatorrelationen $\alpha=\beta$, so kann man sich etwa auf $\Phi=A_2$ zurückziehen. Sei also $\alpha\neq\beta$ und damit α, β linear unabhängig wegen $\alpha, \beta\in\Phi^+$. Nach [5] läßt sich dann jeweils das System Δ einfacher Wurzeln von Φ derart wählen, daß gilt $\beta=c\alpha+d\gamma$ mit $\alpha, \gamma\in\Delta$, $c, d\geqq 0$; dabei erzeugen α und γ ein Wurzelsystem vom Rang 2, also eines vom Typ $A_1\times A_1$, A_2 oder C_2.

Ist dies System vom Typ A_2 oder C_2, so sind wir wieder fertig; ist es vom Typ $A_1\times A_1$, so folgt $\beta=\gamma$, d.h. α, β sind einfach und stehen aufeinander senkrecht. In diesem Fall ist aber $i\alpha+j\beta\notin\Phi$ für alle $i, j\in\mathbb{N}$, die vorgelegte Serie also von der Form

$$[h_\alpha^\nu(t)x_\alpha(a)h_\alpha^{-\nu}(t), h_\beta^\mu(t)x_\beta(b)h_\beta^{-\mu}(t)]=1\,,$$

was wegen des Verschwindens der Cartanzahl von α, β sofort aus

$$[x_\alpha(a), x_\beta(b)] = [h_\alpha(t), x_\beta(b)] = [h_\beta(t), x_\alpha(a)] = [h_\alpha(t), h_\beta(t)] = 1$$

abzuleiten ist, also wieder aus nur endlich vielen Relationen. Somit folgt Satz 2.

Korollar 1. *Ist k ein endlicher Körper, G halbeinfache Chevalley-Gruppe ohne einen Faktor vom Typ A_1 (oder G_2), so ist $G(k[t, t^{-1}])$ endlich präsentierbar.*

Bemerkung. In [12] wird gezeigt, daß Satz 1 auch gilt für $R = k[t]$; hieraus erhält man dort die endliche Präsentierbarkeit von $G(\Phi, k[t])$ bei endlichem k für Rang $\Phi > 2$, kann also das Korollar entsprechend formulieren, wenn man weiterhin voraussetzt, daß G keinen Faktor vom Typ A_1, A_2, C_2 oder G_2 besitzt.

2. Zerfällung von K_2

Sei k wieder ein beliebiger Körper, $R = k[t, t^{-1}]$, $\mathbb{F}_q$ der Körper mit q Elementen, $G(\Phi, \ )$ einfach zusammenhängend mit beliebigem irreduziblen Wurzelsystem Φ.

Eine Gruppe G heißt perfekt, wenn sie (homologisch) zusammenhängend ist, wenn also $\Pi_0(G) := G/[G, G] = \{1\}$ gilt. Satz 1 liefert

Korollar 2.

$$\Pi_0(\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q[t, t^{-1}])) = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \qquad q = 2, 3$$

$$\Pi_0(\mathrm{Sp}_4(\mathbb{F}_2[t, t^{-1}])) = \Pi_0(G_2(\mathbb{F}_2[t, t^{-1}])) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$\Pi_0(G(\Phi, k[t, t^{-1}])) = \{1\} \qquad \textit{sonst.}$$

Bei $\Phi = G_2$ genügt für diese Aussage die Kenntnis, daß alle Relationen A, B, C auch in $G(G_2, R)$ Gültigkeit haben und daß $G(G_2, \mathbb{F}_2)$ einen Normalteiler vom Index 2 enthält.

Es ist somit $G(\Phi, k[t, t^{-1}])$ genau dann perfekt, wenn nicht $\Phi = A_1, A_2, G_2$ und $k = \mathbb{F}_2$ oder $\Phi = A_1$ und $k = \mathbb{F}_3$ ist, also genau dann, wenn die zu (der universellen Gruppe) $G(\Phi, k)$ gehörige adjungierte Gruppe über k einfach ist. Dies gilt genauso für $G(\Phi, k[t])$.

Die Steinberg-Gruppe $St(\Phi, R)$ ist gegeben als die durch E_0 erzeugte und die Relationen A, B definierte Gruppe, $K_2(\Phi, R)$ als Kern des kanonischen (surjektiven) Homomorphismus $St(\Phi, R) \to G(\Phi, R)$. Die Steinberg-Symbole $\langle r, s\rangle_\alpha := h_\alpha(rs) h_\alpha^{-1}(r) h_\alpha^{-1}(s)$ für $\alpha \in \Phi$, $r, s \in R^*$ liegen in $K_2(\Phi, R)$ und sind zentral in $St(\Phi, R)$.

Eine perfekte Gruppe G besitzt eine universelle Überlagerung, und G heißt (homologisch) einfach-zusammenhängend, wenn der Kern der universellen Überlagerung trivial, d.h. $\Pi_1(G) = \{1\}$ ist. Dabei ist $\Pi_1(G)$ kanonisch isomorph zu $H_2(G, \mathbb{Z})$, dem Schur-Multiplikator $M(G)$ von G.

Aus [13], Theorem 5.3 folgt, daß $St(\Phi, R)$ einfach-zusammenhängend ist, falls Rang $\Phi > 2$ und $k \neq \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3$ ist. Da $K_2(\Phi, R)$ nach Satz 1 durch (die zentralen) Steinberg-Symbole erzeugt wird, gilt

Korollar 3. *Für Rang $\Phi > 2$ und $k \neq \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_3$ ist $St(\Phi, k[t, t^{-1}])$ die universelle Überlagerung von $G(\Phi, k[t, t^{-1}])$, und $\Pi_1(G(\Phi, k[t, t^{-1}])) = H_2(G(\Phi, k[t, t^{-1}]), \mathbb{Z}) = M(G(\Phi, k[t, t^{-1}]))$ ist gegeben durch $K_2(\Phi, k[t, t^{-1}])$.*

Sei für einen Ring S wie üblich $K_2(S) = \varinjlim K_2(A_n, S)$, $K_1(S) = \varinjlim K_1(n, S)$ mit $K_1(n, S)$ als Faktorgruppe der $\mathrm{GL}_n(S)$ nach ihrer elementar erzeugten Untergruppe. Es gilt $K_2(R) \cong K_2(k) \oplus K_1(k)$ nach [11], und man kann hierbei k durch einen regulären Ring ersetzen.

Eine entsprechende Zerfällung von K_2 über R ergibt sich aus Satz 1 nicht erst im Limes und auch für andere Wurzelsysteme als A_n. Da jede Wurzel unter der Weylgruppe Bild einer einfachen Wurzel ist, wird $K_2(\Phi, R)$ schon durch die Symbole $\langle r, s\rangle_\alpha$ für $\alpha \in \Delta$ erzeugt. Man weist nach, daß in $St(\Phi, R)$ für im Dynkindiagramm benachbarte einfache Wurzeln α, β gilt $\langle r, s\rangle_\alpha = \langle r, s\rangle_\beta$ bzw. $\langle r, s\rangle_\alpha = \langle r^2, s\rangle_\beta$ bzw. $\langle r, s\rangle_\alpha = \langle r^3, s\rangle_\beta$ für $\overset{\alpha}{\bullet}\!\!-\!\!-\!\!\overset{\beta}{\bullet}$ bzw. $\overset{\alpha}{\bullet}\!\Leftarrow\!\overset{\beta}{\bullet}$ bzw. $\overset{\alpha}{\bullet}\!\Lleftarrow\!\overset{\beta}{\bullet}$.

Gibt es in Δ nur eine Wurzellänge, so nennen wir alle Wurzeln lang. In jedem Fall wird $K_2(\Phi, R)$ erzeugt durch die Symbole $\langle r, s\rangle_{\alpha_0}$, wobei α_0 eine feste lange einfache Wurzel ist. Wir setzen $\langle r, s\rangle := \langle r, s\rangle_{\alpha_0}$. Da $r, s \in R^*$ von der Form at^ν mit $a \in k^*$, $\nu \in \mathbb{Z}$ sind, folgt leicht, daß $K_2(\Phi, R)$ schon erzeugt wird durch $\langle a, b\rangle$, $\langle a, t\rangle$, $\langle t, a\rangle$ und $\langle t^{-1}, t\rangle$ für $a, b \in k^*$. In $St(\Phi, R)$ gilt weiterhin $\langle s^{-1}, s\rangle = \langle -1, s\rangle$ und $\langle r, s\rangle = \langle s, r\rangle \langle s^2, r\rangle^{-1}$. Wir haben (für $\Phi \neq G_2$) aus Satz 1 erhalten

Korollar 4. *$K_2(\Phi, k[t, t^{-1}])$ wird erzeugt durch die Symbole $\langle a, t\rangle$ und (die $K_2(\Phi, k)$ erzeugenden Symbole) $\langle a, b\rangle$ für $a, b \in k^*$.*

Bei endlichem Körper k – $K_2(\Phi, k) = \{1\}$ – ist $K_2(\Phi, R)$ für jedes Wurzelsystem Φ somit endlich erzeugt, für $\Phi \neq C_n$, $n \geqq 1$ wegen der Bimultiplikativität der Symbole sogar endlich zyklisch. Bei $\Phi = C_n$ hat man in $St(\Phi, R)$ zunächst nur $\langle r_1, s\rangle \langle r_2^2, s\rangle = \langle r_1 r_2^2, s\rangle$ und entsprechend im zweiten Argument.

Wegen $K_2(\Phi, k) \cong K_2(\Phi', k)$ für Φ, Φ' beide symplektisch bzw. beide nichtsymplektisch [9] besagt Korollar 4, wenn man beachtet, daß auch $K_2(A_1, k) \to K_2(A_2, k)$ surjektiv ist, für Wurzelsysteme Φ_n, Φ_{n+1} derselben Serie vom Rang n bzw. $n+1$

Korollar 5. *$K_2(\Phi_n, k[t, t^{-1}]) \to K_2(\Phi_{n+1}, k[t, t^{-1}])$ ist surjektiv für $n \geqq 1$.*

Für $\Phi_n = A_n$ folgt diese Surjektivität ab $n = 1$ wegen der Euklidizität von R auch schon aus [6].

Die Injektion $i: k \to k[t, t^{-1}]$ liefert einen Homomorphismus $i^*: K_2(\Phi, k) \to K_2(\Phi, R)$, die durch $t \to 1$ gegebene Surjektion $s: k[t, t^{-1}] \to k$ einen Homomorphismus $s^*: K_2(\Phi, R) \to K_2(\Phi, k)$; es ist $s \circ i$ auf k, somit $s^* \circ i^*$ auf $K_2(\Phi, k)$ die Identität. Für $\Phi \neq C_n$ ist die durch $a \to \langle a, t\rangle$ gegebene Abbildung

$$h: K_1(k) \cong k^* \to K_2(\Phi, R)$$

ein Homomorphismus, nach Korollar 4 somit $i^* \times h: K_2(\Phi, k) \oplus K_1(k) \to K_2(\Phi, R)$ ein surjektiver Homomorphismus. Da i^* einen Schnitt besitzt, bedeutet dies (für $\Phi \neq G_2$)

Satz 3. *Für Φ nicht-symplektisch gilt*

$$K_2(\Phi, k[t, t^{-1}]) \cong K_2(\Phi, k) \oplus h(K_1(k)).$$

Es ist klar, daß diese Isomorphie ebenfalls für $\Phi = C_n$ gilt, falls jedes Element von k ein Quadrat ist.

Für $\Phi = A_n$ ergibt sich aus obigem auch die Injektivität von h, d.h. $i^* \times h$ ist Isomorphismus, und wir erhalten folgende Zerfällung und Stabilität von $K_2(A_n, R)$ schon für $n \geqq 2$

Korollar 6.

$$K_2(A_n, k[t, t^{-1}]) \cong K_2(A_n, k) \oplus K_1(k),$$
$$K_2(A_n, k[t, t^{-1}]) \cong K_2(A_{n+1}, k[t, t^{-1}]) \quad \textit{für} \quad n \geqq 2.$$

Vermutlich ist h auch im allgemeinen Fall für $\Phi \neq C_n$ injektiv, und Satz 3 liefert dann genauso für nicht-symplektische Wurzelsysteme Φ, Φ' die Isomorphien

$$K_2(\Phi, k[t, t^{-1}]) \cong K_2(\Phi', k[t, t^{-1}]).$$

Die genaue Beschreibung der beiden Summanden von $K_2(A_n, R)$ als Erzeugnis der Symbole $\langle a, t \rangle$ bzw. $\langle a, b \rangle$, $a, b \in k^*$ läßt sich ebenfalls vornehmen bei Betrachtung der Ringe

$$R_d := k[t_1, t_1^{-1}, \ldots, t_d, t_d^{-1}] \quad \text{für} \quad d \geqq 1, R_0 := k.$$

Jedes R_d ist regulär und hat Krull-Dimension d. Es ist $K_1(R_d) \cong K_1(R_{d-1}) \oplus K_0(R_{d-1})$ für $d \geqq 1$ nach [2] mit der Grothendieck-Gruppe K_0. Mit $K_0(R_d) \cong K_0(k)$ folgt hieraus

$$K_1(R_d) \cong K_1(k) \oplus K_0(k)^d.$$

Also ist $K_1(R_d) \cong k^* \oplus \mathbb{Z}^d$ isomorph zu der Gruppe R_d^* der Einheiten von R_d und somit für $n \geqq d+1$ nach [1] auch $K_1(n+1, R_d) \cong R_d^*$, was die elementare Erzeugbarkeit von $G(A_n, R_d) = \mathrm{SL}_{n+1}(R_d)$ für $n \geqq d+1$ bedeutet. Wie schon bemerkt gilt $K_2(R_d) \cong K_2(R_{d-1}) \oplus K_1(R_{d-1})$ für $d \geqq 1$, welches liefert

$$K_2(R_d) \cong K_2(k) \oplus K_1(k)^d \oplus K_0(k)^{\frac{1}{2}d(d-1)}.$$

Nach [15] ist $K_2(R_d) \cong K_2(A_n, R_d)$ für $n \geqq d+2$, somit hat man

$$K_2(A_n, R_d) \cong K_2(k) \oplus k^{*d} \oplus \mathbb{Z}^{\frac{1}{2}d(d-1)} \tag{*}$$

für $n \geqq d+2$. (Bei $d=1$ haben wir dies oben auch für $n=2$ eingesehen.) Präsentiert man analog zu Satz 1 die elementar erzeugte Untergruppe von $\mathrm{SL}_n(R_d)$, so erhält man Korollar 4 verallgemeinernd $K_2(A_n, R_d)$ als Erzeugnis der Symbole

$$\begin{array}{lll} \langle a, b \rangle & \text{für} & a, b \in k^* \\ \langle a, t_i \rangle & \text{für} & a \in k^* \quad \text{mit} \quad 1 \leqq i \leqq d \quad \text{und} \\ \langle t_i, t_j \rangle & \text{mit} & 1 \leqq i < j \leqq d, \end{array}$$

was wieder die einzelnen Summanden der Zerfällung (*) genau beschreibt.

Literatur

1. Bass, H.: Algebraic K-theory. New York: Benjamin 1968
2. Bass, H., Heller, A., Swan, R.: The Whitehead group of a polynomial extension. Publ. IHES **22**, 61—79 (1964)
3. Behr, H.: Explizite Präsentation von Chevalley-Gruppen über $\mathbb{Z}$. Math. Z. **141**, 235—241 (1975)

4. Behr, H.: Eine endliche Präsentation der symplektischen Gruppe $Sp_4(\mathbb{Z})$. Math. Z. **141**, 47—56 (1975)
5. Chevalley, C.: Sur certains groupes simples. Tôhoku Math. J. **7**, 14—62 (1955)
6. Dunwoody, M. J.: K_2 of a euclidean ring. J. of pure and appl. Alg. **7**, 53—58 (1976)
7. Hurrelbrink, J., Rehmann, U.: Eine endliche Präsentation der Gruppe $G_2(\mathbb{Z})$. Math. Z. **141**, 243—251 (1975)
8. Hurrelbrink, J., Rehmann, U.: Zur endlichen Präsentation von Chevalley-Gruppen über den euklidischen imaginär-quadratischen Zahlringen. Archiv d. Math. **27**, 123—133 (1976)
9. Matsumoto, H.: Sur les groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés. Ann. sci. Ec. norm. sup. IV. Sér. **2**, 1—62 (1969)
10. Nagao, H.: On $GL(2, K[x])$. J. Inst. Pol. Osaka City Univ. Ser. A **10**, 117—121 (1959)
11. Quillen, D.: Higher K-theory for categories with exact sequences. London Math. Soc. Lect. Note Ser. **11**, 95—103 (1974)
12. Rehmann, U.: Präsentation von Chevalley-Gruppen über $k[t]$. Preprint (1975)
13. Stein, M. R.: Generators, relations and coverings of Chevalley groups over commutative rings. Amer. J. Math. **93**, 965—1004 (1971)
14. Stuhler, U.: Über die endliche Präsentierbarkeit gewisser arithmetischer Gruppen im Funktionenkörperfall. Preprint (1975)
15. Van der Kallen, W.: Injective Stability for K_2. Preprint (1976)

Angenommen am 15. März 1976

Math. Ann. 225, 131—143 (1977)

Elementare Berechnung der Multiplizitäten n-dimensionaler Spitzen

Friedrich W. Knöller

Fachbereich Mathematik der Universität, Saarstr. 21, D-6500 Mainz, Bundesrepublik Deutschland

0. Einleitung

Dank der genauen Kenntnis der Desingularisierung 2-dimensionaler Spitzen [3] gelingt es Karras [4], die Multiplizitäten dieser (singulären) lokalen analytischen Ringe mit Hilfe des Riemann-Roch'schen Satzes zu berechnen.

Andererseits hat Freitag-Kiehl [1] mittels der Spurabbildung die lokalen Ringe $O(M, V)$ der Spitzen (M, V) beliebiger Dimensionen filtriert und gezeigt, daß die m-adische Topologie mit der von der Spur induzierten übereinstimmt. Da jedoch die Spurabbildung mit der Operation der Einheitengruppe V unverträglich ist, scheiterte der Versuch, durch Vergleich dieser beiden Filtrierungen die Multiplizitäten zu berechnen.

Freundlicherweise hat mich Herr Prof. Freitag auf eine andere subadditive Funktion λ aufmerksam gemacht, die ebenfalls die lokalen Ringe der Spitzen filtriert und überdies die angenehme Eigenschaft hat, mit der Operation der Einheitengruppe verträglich zu sein.

Die von λ induzierte Topologie stimmt wieder mit der m-adischen Topologie überein (2.1.9). Darüberhinaus ist die λ-Filtrierung gleich der m-adischen Filtrierung, wenn nur eine gewisse Invariante $p(M, V)>2$ ist (2.2.1). Für genügend kleines V ist diese Bedingung stets erfüllt (1.2.1). Multiplizität und Einbettungsdimension der Spitze (M, V) lassen sich dann auf elementare Weise berechnen.*

In Dimension 2 schließlich gelingt es, die Multiplizitäten (fast) aller Spitzen zu berechnen (3.2.6). Lediglich bei der Spitze mit dem primitiven Zykel $((3, \underbrace{2, \ldots, 2}_{u}))$, $u \geqq 0$, bricht die skizzierte Methode zusammen.

1. λ-Zerlegungen in $\hat{M}_+$

Sei $\mathscr{k}$ ein totalreeller algebraischer Zahlkörper vom Grade $[\mathscr{k}:\mathbb{Q}]=n$, $u \mapsto u^{(i)}$, $1 \leqq i \leqq n$ die n verschiedenen reellen Einbettungen von $\mathscr{k}$, M ein freier $\mathbb{Z}$-Modul vom Range n in $\mathscr{k}$ und U_M^+ die Gruppe der totalpositiven Einheiten ε in $\mathscr{k}$ für die

* Siehe Nachtrag bei der Korrektur

$\varepsilon M = M$ gilt. U_M^+ ist frei vom Range $n-1$. Schließlich sei V eine Untergruppe von U_M^+ mit endlichem Index. V ist ebenfalls frei vom Range $n-1$.

Sei weiter $\hat{M}$ der zu M duale $\mathbb{Z}$-Modul, also die Menge $\{x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{sp} x \cdot y \in \mathbb{Z}$ für alle $y \in M\}$ $(\operatorname{sp} x \cdot y := x^{(1)} y^{(1)} + \ldots + x^{(n)} y^{(n)})$ und $\hat{M}_+$ der totalpositive Kegel in $\hat{M}$, d.h. $x \in \hat{M}_+$ genau dann, wenn $x^{(i)} > 0$ für $1 \leqq i \leqq n$. Für $x \in \hat{M}_+$ sei

$$\lambda(x) := \max \{p \mid \text{es ex. } x_1, \ldots, x_p \in \hat{M}_+ \text{ s.d. } x = x_1 + \ldots + x_p\}.$$

Da es in $\hat{M}_+$ ein Element x_0 mit minimaler Spur gibt ($\hat{M}$ ist ein Gitter), ist $\lambda(x) \leqq \operatorname{sp} x / \operatorname{sp} x_0 < \infty$. Es gilt ($\mathbb{N}^\cdot = \mathbb{N} - \{0\}$):

$$\lambda(x+y) \geqq \lambda(x) + \lambda(y) \qquad x, y \in \hat{M}_+ \tag{1.1.0}$$

$$\lambda(\varepsilon x) = \lambda(x) \qquad x \in \hat{M}_+, \varepsilon \in V \tag{1.1.1}$$

$$\lambda(m \cdot x) = m \cdot \lambda(x) \qquad x \in \hat{M}_+, m \in \mathbb{N}^\cdot \tag{1.1.2}$$

Lediglich (1.1.2) ist nicht trivial (1.3.0ff.).

CX bezeichne die konvexe Hülle von $X \subset \mathbb{R}^n$, EX die Menge der Extremalpunkte von CX. Speziell sei $E_+ = E\hat{M}_+$, $C_+ = C\hat{M}_+$. Sei L_k die Menge $\{x \in \hat{M}_+ \mid \lambda(x) \leqq k\} \cup \{0\}$. V operiert auf L_k (1.1.1). V operiert aber auch auf $\partial C_+ \cap \hat{M}_+$; $\mu_+(M, V) := \# \partial C_+ \cap \hat{M}_+ / V < \infty$ (1.3.0ff.)

Nach dem Elementarteilersatz existiert eine $\mathbb{Z}$-Basis $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ von U_M^+ und $d_1, \ldots, d_{n-1} \in \mathbb{Z}$, s.d. $d_i \mid d_{i+1}$ und $\varepsilon_1^{d_1}, \ldots, \varepsilon_{n-1}^{d_{n-1}}$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von V ist. $i(V) := |d_1|$ ist von der Wahl der Basis unabhängig.

Wir können jetzt die wichtigsten Ergebnisse dieses Paragraphen formulieren:

1.2.0. Satz. $\# L_k/V = \mu_+(M, V) \cdot 1/n!\, k^n + 0(k^{n-1})$.

1.2.1. Satz. *Es existiert eine Invariante $p(M, V) \geqq 1$ mit den folgenden Eigenschaften*:

(i) $p(M, V) \gg 0$ *für* $i(V) \gg 0$.

(ii) *Sei* $k > 1, x_1, \ldots, x_k \in \hat{M}_+, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k \in V$, $\lambda(x_1 + \ldots + x_k) = \lambda(\varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_k x_k) = k$ *und* $x_1 + \ldots + x_k \not\equiv \varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_k x_k \bmod V$. *Dann ist die Invariante* $p(M, V) \leqq 2$.

Vermutung. $p(M, V) \geqq i(V) \cdot p(M, U_M^+)$.*

Im 2-dimensionalen Fall ist $p(M, V) = [U_M^+ : V] \cdot \# E_+/U_M^+$ (3.1.5).

Die Beweise der beiden Sätze setzen eine detailierte Analyse von $\hat{M}_+$ voraus.

1.2.2. Definition. $X \subset \hat{M}_+$ heißt Randkomponente von $\hat{M}_+$, wenn gilt:

(i) $X = CX \cap \hat{M}_+$.

(ii) Es existiert eine Hyperebene $h = h_X$ s.d. $CX = h \cap \partial C_+$.

(iii) $\operatorname{vol}_{n-1}(CX) > 0$.

R_+ sei die Menge der Randkomponenten von $\hat{M}_+$.

1.2.3. Lemma. *Sei $X, Y \in R_+$, $X \neq Y$. Dann gilt:*

(i) $CX \cap (CY)^0 = \emptyset$, $\dim CX \cap CY < n-1$

(ii) $\# X < \infty$, *CX ist kompakt*

(iii) $CX = CEX$, $EX \subset E_+ \subset \hat{M}_+$

(iv) $\partial C_+ = \bigcup_{X \in R_+} CX$.

* Siehe Nachtrag bei der Korrektur

1.2.4. Folgerung. $R_+ \neq \emptyset$, $C_+ = \bar{C}_+$.

Beweis. (i) $CX \cap (CY)^0 \neq \emptyset$ impliziert $\dim h_X \cap h_Y = n-1$, also $h_X = h_Y$. Deshalb ist $X = Y$ [Maximalität 1.2.2 (ii)].

(ii) $CX = \overline{CX}$ 1.2.2 (ii). Wäre CX nicht kompakt, so existierte in X eine Folge x_k paarweise verschiedener Punkte s.d. $\|x_k\| \to \infty$ ($\hat{M}$ diskret). Sei $h = h_X = \{a_1 x^{(1)} + \ldots + a_n x^{(n)} = a_h\}$. Wir können stets $a_h > 0$ annehmen – und wollen dies in Zukunft auch. ($x \in \hat{M}_+ \Rightarrow a_h \neq 0$!). Ist $x \in C_+$, dann ist nach dieser Normierung $h_X(x) \geqq a_h$ (Konvexität), also $\hat{M} \subset C_+ \subset \bar{C}_+ \subset \{a_1 x^{(1)} + \ldots + a_n x^{(n)} \geqq a_h\}$. $\|x_k\| \to \infty$ impliziert $h_X = \{a_1 x^{(1)} = a_h\}$ (ohne Einschränkung). Da mit a_h auch a_1 positiv ist, bedeutet dies, daß für alle $x \in \hat{M}_+ a_1 x^{(1)} \geqq a_h$ ist. Da Rg $V = n-1$, existiert $\varepsilon_k \in V$, s.d. $\varepsilon_k^{(1)} \to 0$. Dann existiert aber in $\hat{M}_+$ ein x_k mit $x_k^{(1)} \to 0$, d.h. $a_h = 0$. Widerspruch.

(iii) Die erste Aussage ist der Satz von Krein-Milman. Es existiert in $\mathbb{R}^n_+$ ein Kegel

$$K = \{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n | v_i \in \mathbb{R}^n_+, \lambda_i > 0\} \text{ s.d. } V \cdot K = \mathbb{R}^n_+$$

(Existenz des Fundamentalbereichs [6]). $K \cap C_+$ ist konvex, $K \cap \hat{M}_+ \subset \{v | Nv := v^{(1)} \cdot \ldots \cdot v^{(n)} \geqq c > 0\}$,* c geeignet. (Existenz eines Elements in $\hat{M}_+$ mit minimaler Spur.) Deshalb ist $\partial(K \cap \bar{C}_+)$ kompakt. Ex existiert eine Kugel S s.d. $\partial(K \cap \bar{C}_+) \subset S$, also $\# \hat{M}_+ \cap K \cap S < \infty$($\hat{M}_+$ diskret), also $E_+ \cap K \subset \hat{M}_+$. Dann ist $E_+ \subset \hat{M}_+$ (V operiert linear, erhält damit die Extremalität).

$EX \subset E_+$ (Maximalität von X, E_+ diskret).

(iv) Da E_+ diskret ist, exstiert eine Familie $\mathscr{F} = \{h\}$ von Hyperebenen s.d. $\partial C_+ = \bigcup_{h \in \mathscr{F}} h \cap \partial C_+$. $h \cap \partial C_+ \cap M_+$ ist dann eine Randkomponente.

Sei $X = \{x_1, \ldots, x_r\} \subset \partial C_+ \cap \hat{M}_+$. $\sigma_X := \langle x_1, \ldots, x_r \rangle := \{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_r x_r | \lambda_i \geqq 0\}$.

Wir formulieren den Begriff des n-Simplexes für unseren Bedarf um [5]:

σ_X heißt n-Simplex, falls $r = n$, $x_1, \ldots, x_r$ linear unabhängig sind und $X \subset \tilde{X} \in R_+$. Die Multiplizität mult σ_X ist der Index von $\oplus \mathbb{Z} x_i$ in $\hat{M}$.

1.2.5. Lemma. *Sei $\sigma = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ ein n-Simplex. Dann gilt:*

(i) mult $\sigma = 1$ *genau dann, wenn $x_1, \ldots, x_n$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von $\hat{M}$ ist.*

(ii) mult $\sigma > 1$ *genau dann, wenn es einen Vektor $x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$ in $\hat{M}_+$ gibt, s.d. $\sum \lambda_i = 1$ und $0 \leqq \lambda_i < 1$. x ist dann notwendig in ∂C_+* [5].

Beweis. Nur die Existenz eines derartigen Punktes ist nicht völlig trivial. Es existiert eine $\mathbb{Z}$-Basis $y_1, \ldots, y_n$ von $\hat{M}$ und $B \in M_n(\mathbb{Z})$ s.d. $|\det B| = \text{mult}\,\sigma > 1$ und ${}^T(x_1, \ldots, x_n) = B^T(y_1, \ldots, y_n)$ (Elementarteilersatz). Sei $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = \text{mult}\,\sigma$, $\lambda_i \in \mathbb{N}$, $\lambda_i < \text{mult}\,\sigma$. Da mult $\sigma \cdot B^{-1} \in GL_n(\mathbb{Z})$ (Cramer'sche Regel), existiert $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$, s.d. $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (a_1, \ldots, a_n)$. mult $\sigma \cdot B^{-1}$. $1/\text{mult}\,\sigma \cdot (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,{}^T(x_1, \ldots, x_n)$ gleich $(a_1, \ldots, a_n)\,B^{-1} \cdot B^T(y_1, \ldots, y_n)$ ist der gesuchte Vektor.

1.2.6. Lemma. *Sei $\sigma = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ ein n-Simplex,* mult $\sigma > 1$, $x = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_k x_k$, $0 < \lambda_i < 1$, $i \leqq k \leqq n$, $\sum \lambda_i = 1$ *und $x \in \hat{M}_+$. Dann ist $\sigma_i = \langle x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n \rangle$ wieder ein n-Simplex für $i \leqq k$ und* mult $\sigma_i = \lambda_i \cdot$ mult σ [5].

---

* v total positiv

Beweis. Wegen $\sum \lambda_i = 1$ ist $x \in \partial C_+$. $x, x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_n$ linear unabhängig (Steinitz). Da x in $\hat{M}$ liegt, ist deshalb σ_i ein n-Simplex. $\operatorname{mult}\sigma$ ist bis auf einen Faktor das Volumen des Paralellotops, das von $x_1, \ldots, x_n$ aufgespannt wird. Aus der Multilinearität und der Schiefsymmetrie der Volumenfunktion folgt dann die Behauptung.

1.2.7. Folgerungen. (i) Ist σ ein n-Simplex, so existieren n-Simplizes $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ s.d. $\operatorname{mult}\sigma_i = 1, \sigma_i \cap \sigma_j^0 = \emptyset$ für $i \neq j, \sigma = \cup \sigma_i$.

(ii) Sei $X \subset \bar{X} \in R_+$, $\operatorname{vol}_{n-1} CX > 0$. Dann existieren n-Simplizes $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ s.d. $\sigma_X = \cup \sigma_i$, $\sigma_i \cap \sigma_j^0 = \emptyset$ für $i \neq j$, $\operatorname{mult}\sigma_i = 1$. (Dies folgt sofort durch Induktion nach $q = \# EX - n$.)

1.3.0. Satz. $\lambda(x) = 1$ *genau dann, wenn* $x \in \partial C_+ \cap \hat{M}_+$.

Beweis. Sei $x \in \partial C_+ \cap \hat{M}_+$ und $\lambda(x) > 1$, etwa $x = y + z$. $y + z$ liegt jedoch wegen der Konvexität in C_+^0.

Sei $x \in \hat{M}_+$, $\lambda(x) = 1$. Es existiert ein $X \in R_+$ s.d. $x \in \sigma_X$. Sei $\sigma_X = \sigma_1 \cup \ldots \cup \sigma_k$ eine simpliziale Zerlegung wie in 1.2.7 (ii). Dann ist sogar $x \in \sigma_i$, $\operatorname{mult}\sigma_i = 1$, $\sigma_i = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, $x_j \in X$. $x = \sum \lambda_i x_i$, $\lambda_i \geqq 0$. Da σ_i die Multiplizität 1 hat, ist $\lambda_i \in \mathbb{N}$, also $1 = \lambda(x) \geqq \sum \lambda_i$, d.h. $x = x_j$ für ein gewisses $1 \leqq j \leqq n$.

1.3.1. Korollar. $\lambda(x_1 + \ldots + x_k) = k$ *genau dann, wenn es eine Randkomponente* $X \in R_+$ *gibt s.d.* $x_1, \ldots, x_k \in X$.

1.3.2. Korollar. $\lambda(m \cdot x) = m \cdot \lambda(x)$ *für alle* $m \in \mathbb{N}^{\cdot}$.

1.3.3. Korollar. *Sei* $X \in R_+$, $1 \neq \varepsilon \in V$. *Dann gilt:*
(i) $\varepsilon \cdot X \in R_+, \varepsilon \cdot EX = E\varepsilon \cdot X, \dim CX \cap C\varepsilon \cdot X < n-1$
(ii) $\# R_+/V < \infty, \mu_+(M, V) = \# \partial C_+ \cap \hat{M}_+/V < \infty$.

1.3.4. Korollar. *Sei* $M^+ := \{y \in M \mid y^{(i)} > 0$ *für alle* $i\}$. *Dann ist* $\lambda(x) = \min\{\operatorname{sp} x \cdot y \mid y \in M^+\}$.

Beweis der Korollare. 1.3.1: Sei $\lambda(x_1 + \ldots + x_k) = k$. Da $\bigcup_{X \in R_+} \sigma_X \supset \mathbb{R}_+^n$, existiert ein n-Simplex $\sigma \subset \sigma_X$ der Multiplizität 1 s.d. $x_1 + \ldots + x_k \in \sigma$. Sei $h = h_X$. Wir wollen in Zukunft h stets normiert annehmen, d.h. $a_h = 1$. h_X ist dann durch X eindeutig bestimmt. Sei $\sigma = \langle u_1, \ldots, u_n \rangle$, $u_i \in X$. Dann ist $x_1 + \ldots + x_k = \sum \lambda_i u_i$, $\lambda_i \in \mathbb{N}$. Wäre ein x_i nicht in X, so wäre (nach unserer Normierung) $h(x_i) > 1$. $h(u_i) = 1$. Deshalb wäre dann $h(x_1 + \ldots + x_k) = \sum \lambda_i > k$, ein Widerspruch.

1.3.2: Dieses Korollar ist eine unmittelbare Folgerung aus 1.3.1.

1.3.3: Da λ mit der V-Operation verträglich ist, operiert V auf $\partial C_+ \cap \hat{M}_+$ (1.3.0). Da V linear operiert, gehen Extremalpunkte in Extremalpunkte über. Sei $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$. $\lambda(x_1 + \ldots + x_k) = \lambda(\varepsilon x_1 + \ldots + \varepsilon x_k)$ hat den Wert k (1.3.1). Es existiert also ein $Y \in R_+$ s.d. $\varepsilon \cdot X \subset Y$. Aus der Maximalitätsforderung an X resultiert $\varepsilon \cdot X = Y$. Wäre $\dim CX \cap C\varepsilon X = n-1$, so hätte $CX \cap C\varepsilon X$ innere Punkte, also $\varepsilon \cdot X = X$. V hat dann einen Fixpunkt (Brouwer'scher Fixpunktsatz, CX Polyeder). V operiert aber frei! Es existiert weiter ein Kegel K gleich $\{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \mid v_i \in \mathbb{R}_+^n, \lambda_i > 0\}$ s.d. $V \cdot K = \mathbb{R}_+^n$ (vgl. Beweis zu 1.2.3). $\partial C_+ \cap K$ ist kompakt. Hieraus folgen die Endlichkeitsaussagen.

1.3.4: Sei $X \in R_+$, h die X assoziierte (normierte) Hyperebene und $\sigma = \langle u_1, \dots, u_n \rangle \subset \sigma_X$ ein n-Simplex der Multiplizität 1, also $h(u_i) = 1$ für alle i. Dann ist aber $h(\hat{M}) \subset \mathbb{Z}$, also $h \in \hat{\hat{M}} \approx M$ (M ist frei von endlichem Rang, daher reflexiv). Deshalb existiert genau ein $y \in M$ s.d. $h(x) = \operatorname{sp} x \cdot y$ für alle $x \in \hat{M}$. Ist insbesondere $x \in \sigma_X \cap \hat{M}_+$, dann ist $h(x) = \lambda(x)$. Da $h(\mathbb{R}^n_+) > 0$ ist, liegt y notwendigerweise in M^+.

Wir können jetzt den Satz 1.2.0 beweisen.

Sei $X_1, \dots, X_s$ ein Repräsentantensystem von R_+/V, $x \in L_k$, $x \neq 0$. Dann existiert ein $1 \leqq i \leqq s$ und ein $\tilde{x} \in \sigma_{X_i} \cap L_k$ s.d. $x \equiv \tilde{x} \mod V$. Elementare kombinatorische Überlegungen zeigen:

$$\# \sigma_{X_i} \cap L_k = \# X_i \cdot 1/n!\, k^n + 0(k^{n-1}).$$

Da $\dim \sigma_{X_i} \cap \sigma_{X_j} \leqq n-1$ für $i \neq j$ ist und lediglich Randpunkte der CX_i kongruent mod V sein können, folgt jetzt unmittelbar die Behauptung aus Satz 1.3.0.

Für $X \in R_+$ sei $X^{(0)} := CX$. Wir definieren jetzt induktiv $X^{(k)}$ als die Vereinigung aller $Y^{(0)}$, $Y \in R_+$, die $X^{(k-1)}$ treffen:

$$X^{(k)} := \cup \{ Y^{(0)} \mid Y \in R_+ \quad \text{und} \quad Y^{(0)} \cap X^{(k-1)} \neq \emptyset \}.$$

Es gilt:

(i) $X^{(k)}$ ist zusammenhängend und kompakt.
(ii) $X^{(k)} \subset X^{(k+1)}$, $(\varepsilon \cdot X)^{(k)} = \varepsilon \cdot X^{(k)}$ für $\varepsilon \in V$.
(iii) $\partial X^{(k)} \cap \partial X^{(k+1)} = \emptyset$, $\partial X^{(k)} \approx S^{n-2}$ für $n > 2$.

Die V-Periode $p(X, V)$ von $X \in R_+$ ist per definitionem $\max \{ p \mid \varepsilon X^{(0)} \cap \mathring{X}^{(p)} = \emptyset$ für alle $\varepsilon \in V, \varepsilon \neq 1 \} + 1$.

Offensichtlich ist $p(\varepsilon \cdot X, V) = p(X, V)$ für alle $\varepsilon \in U_M^+$.

1.4.0. Definition. Die wesentliche Periode der Spitze (M, V) ist die natürliche Zahl $p(M, V) := \min \{ p(X, V) \mid X \in R_+ \}$.

Wir können jetzt die zweite Aussage des Satzes 1.2.1 beweisen. Seien dazu $k > 1$, $x_1, \dots, x_k \in \hat{M}_+$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k \in V$, $x_1 + \dots + x_k \not\equiv \varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_k x_k \mod V$ und $\lambda(x_1 + \dots + x_k) = \lambda(\varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_k x_k) = k$. Wegen der Inkongruenz existiert dann ein $1 \leqq i \leqq k$ s.d. $\varepsilon := \varepsilon_k^{-1} \cdot \varepsilon_i$ ungleich 1 ist. Sei $x := x_i$, $y := x_k$. Da λ subadditiv und mit der V-Operation verträglich ist, gilt: $\lambda(x + y) = \lambda(\varepsilon x + y) = 2$. Dann existieren aber zwei Randkomponenten $X, Y \in R_+$ s.d. $x, y \in X$ und $\varepsilon x, y \in Y$ sind (1.3.1), also $y \in X \cap Y$ und $\varepsilon x \in Y \cap \varepsilon \cdot X$. Deshalb ist $Y \subset X^{(1)}$ und $\varepsilon \cdot X^{(0)} \cap X^{(1)} \neq \emptyset$, d.h. $p(X, V) \leqq 2$.

Bleibt der Beweis von 1.2.1 (i). Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} U_M^+ \times \mathbb{R}^n_+ & \xrightarrow{\ \cdot\ } & \mathbb{R}^n_+ \\ \cong \Big\downarrow \log & \diagup\!\!\!\cdot & \cong \Big\downarrow \log \\ \log U_M^+ \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\ +\ } & \mathbb{R}^n \end{array}$$

$\log x := (\log x^{(1)}, \dots, \log x^{(n)})$ und die Matrix

$$\varrho := \begin{bmatrix} \log \varepsilon_1^{(1)} \dots \log \varepsilon_{n-1}^{(1)} & 1/n \\ \vdots \qquad\quad \vdots & \vdots \\ \log \varepsilon_1^{(n)} \dots \log \varepsilon_{n-1}^{(n)} & 1/n \end{bmatrix}$$

wobei $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ eine $\mathbb{Z}$-Basis von U_M^+ ist.

det $\varrho \neq 0$ und unabhängig von der Basiswahl (Regulator). Sei $y = \varphi(x) := \varrho^{-1} \log x$, $\varepsilon = \varepsilon_1^{v_1} \oplus \ldots \oplus \varepsilon_{n-1}^{v_{n-1}}$. Dann ist $\varphi(\varepsilon x) = \varphi(x) + (v_1, \ldots, v_{n-1}, 0)$, $y^{(n)} = \log Nx$. Sei ψ die Projektion $(y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}) \mapsto (y^{(1)}, \ldots, y^{(n-1)})$ und $\pi\colon \partial C_+ \to \mathbb{R}^{n-1}$, $\pi := \psi \circ \varphi | \partial C_+$. π ist offen und stetig. Sei $x, \tilde{x} \in \partial C_+$ und $\pi x = \pi \tilde{x}$. Nachrechnen: $x = (Nx/N\tilde{x})^{1/n} \cdot \tilde{x}$. Da beide Vektoren auf dem Rand liegen, ist $Nx/N\tilde{x} = 1$, d.h. π ist injektiv.

U_M^+ operiert auf $\partial C_+ = \cup \{X^{(0)} | X \in R_+\}$ und auf R_+. $\pi \varepsilon X^{(0)} = \pi X^{(0)} + (v_1, \ldots, v_{n-1})$. $\pi \partial C_+$ ist zusammenhängend und damit π surjektiv. $\pi X^{(0)} \cap (\pi Y^{(0)})^0 = \emptyset$ für $X \neq Y$. π pflastert also den $\mathbb{R}^{n-1}$ und zwar so, daß diese Pflasterung mit der Operation von $\mathbb{Z}^{n-1} \approx U_M^+$ verträglich ist.

Anstelle von $\pi X^{(k)}$ schreiben wir der Einfachheit halber $X^{(k)}$. $X^{(k)}$ ist kompakt; wähle Quader Q s.d. $X^{(k)} \subset Q$. Sei $q \gg \operatorname{diam} Q$, $1 \neq \varepsilon = \varepsilon_1^{v_1} \oplus \ldots \oplus \varepsilon_{n-1}^{v_{n-1}}$, $v := v(\varepsilon) := (v_1, \ldots, v_{n-1})$. Dann liegt für alle $\varepsilon \in U_M^+$, $\varepsilon \neq 1$, $x \in X^{(0)}$, $\varepsilon^q \cdot x = x + q \cdot v \notin Q$, d.h. $\varepsilon^q X^{(0)} \cap X^{(k)} = \emptyset$, also $p(X, U_M^{+q}) > k$. Da $\# R_+/U_M^+ < \infty$ und $p(X, U_M^{+q}) = p(\varepsilon X, U_M^{+q})$ für alle $\varepsilon \in U_M^+$, findet man ein q s.d. $p(M, U_M^{+q}) > k$. Damit ist $p(M, V) > k$ für alle V mit $i(V) > i_0 = q - 1$.

2. λ-Filtrierungen der lokalen Ringe $0(M, V)$

Sei Γ die Gruppe $\left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon & g \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, \varepsilon \in V, g \in M \right\}$.

Γ operiert durch

$$(\ldots, z^{(i)}, \ldots) \mapsto (\ldots, \varepsilon^{(i)} z^{(i)} + g^{(i)}, \ldots)$$

frei und eigentlich diskontinuierlich auf dem Produkt H^n von oberen Halbebenen $H = \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im} z > 0\}$. H^n/Γ läßt sich durch Addition eines Punktes ∞ so erweitern, daß der Raum $\mathscr{H} := H^n/\Gamma \cup \{\infty\}$ die folgenden Eigenschaften hat [1]:

(i) $\mathscr{H}$ ist lokalkompakt.

(ii) H^n/Γ ist offen in $\mathscr{H}$.

(iii) Die Mengen $U_C/\Gamma \cup \{\infty\}$ mit $U_C = \{z \in H^n | N(\operatorname{Im} z) > C > 0\}$ bilden eine Umgebungsbasis von ∞.

(iv) $\mathscr{H}$ trägt die Struktur eines normalen komplexen Raumes.

Sei $O(M, V)$ der lokale Ring in der Spitze ∞, $\mathcal{O}_{\mathscr{H}, \infty} = O(M, V)$, m sein maximales Ideal. $O(M, V)$ ist der Ring aller Fourierreihen [1]

$$f(z) = a_0 + \sum_{x \in \hat{M}_+} a_x \exp 2\pi i \operatorname{sp} x \cdot z \tag{2.1.0}$$

deren Koeffizienten a_x der Bedingung $a_x = a_{\varepsilon x}$ für alle $\varepsilon \in V$ genügen und die für ein geeignetes C in U_C konvergieren.

$O(M, V)$ ist ein noetherscher lokaler analytischer Ring der Dimension n, deshalb ist $\dim_{\mathbb{C}} O(M, V)/m^k = \mu \cdot 1/n!\, k^n + O(k^{n-1})$ für $k \geqq k_0$ (Hilbert-Samuel-Polynom). $\mu = \mu(M, V)$ ist eine natürliche Zahl $\geqq 1$ und heißt die Multiplizität des lokalen Ringes $O(M, V)$; $\dim_{\mathbb{C}} m/m^2$ heißt die Einbettungsdimension von $O(M, V)$.

Die subadditive Funktion $\lambda: \hat{M}_+ \to \mathbb{N}^\cdot$ induziert eine Filtrierung von $O(M, V)$:

$$I_k = \{f \in O(M,V) \mid a_0(f) = 0 \text{ und } a_x(f) = 0 \text{ für } \lambda(x) < k\}. \tag{2.1.1}$$

I_k ist ein Ideal in $O(M, V)$ und es gilt:

$$I_1 = m \tag{2.1.2}$$

$$I_{k+1} \subset I_k \tag{2.1.3}$$

$$I_s \cdot I_t \subset I_{s+t}. \tag{2.1.4}$$

Insbesondere ist die λ-Filtrierung I_k gröber als die m-adische Filtrierung m^k:

$$m^k \subset I_k. \tag{2.1.5}$$

Sei $f \in I_k$. f gestattet eine Entwicklung nach Poincaréreihen

$$P_x(z) = \sum_{\varepsilon \in V} \exp 2\pi i \operatorname{sp} \varepsilon x \cdot z, \; x \in \hat{M}_+:$$

$$f = \sum_{x \in \hat{M}_+} a_x \cdot P_x, \; a_x = 0 \text{ für } \lambda(x) < k. \tag{2.1.6}$$

$P_{\varepsilon x} = P_x$ impliziert

$$\dim_{\mathbb{C}} O(M, V)/I_k = \# L_{k-1}/V, \tag{2.1.7}$$

und wegen (2.1.5) gilt für die Multiplizität von $O(M, V)$

$$\mu(M, V) \geqq \mu_+(M, V) = \# \partial C_+ \cap \hat{M}_+/V. \tag{2.1.8}$$

2.1.9. Satz. *Sei τ_I bzw. τ_m die von der λ-Filtrierung (I_k) bzw. der m-adischen Filtrierung (m^k) auf $O(M, V)$ induzierte Topologie. Dann ist $\tau_I = \tau_m$.*

Beweis. Wegen 1.2.0, 2.1.7 kann man den Beweis aus [1] wortwörtlich übernehmen, wenn man dort sp durch λ ersetzt.

2.2.0. Lemma. *Sei $p(M, V) > 2$, $x \in \hat{M}_+$ und $\lambda(x) = k$. Dann liegt die Poincaréreihe P_x in $m^k + I_{k+1}$.*

Beweis. Sei $x \in \hat{M}_+$, $\lambda(x) = k$. x läßt sich zerlegen: $x = x_1 + \ldots + x_k$, $x_i \in \hat{M}_+$. Dann ist $P_{x_1} \ldots P_{x_k}$ in m^k und gleich

$$\sum_{q \equiv x \bmod V} c_q \exp 2\pi i \operatorname{sp} qz + \sum_{q \not\equiv x \bmod V} c_q \exp 2\pi i \operatorname{sp} qz.$$

Da $c_q = c_x$ für $q \equiv x \bmod V$ und

$$c_x = \# \{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) \in V^k \mid x = \varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_k x_k\} > 0,$$

gilt:

$$P_{x_1} \ldots P_{x_k} \equiv c_x \cdot P_x + \sum_{\substack{q \not\equiv x \bmod V \\ \lambda(q) = k}} c_q \exp 2\pi i \operatorname{sp} qz$$

modulo dem Ideal I_{k+1}.

Da $p(M, V) > 2$ vorausgesetzt, tritt die Summe auf der rechten Seite der Kongruenz nicht auf, da q notwendig die Form $\varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_k x_k$ hat [1.2.1 (ii)].

2.2.1. Satz. *Sei $p(M, V) > 2$. Dann stimmt die λ-Filtrierung mit der m-adischen Filtrierung überein:*

$$m^k = I_k \;\; \textit{für alle} \;\; k \in \mathbb{N}^\cdot.$$

2.2.2. Korollar. *Sei $p(M, V)>2$. Dann ist die Multiplizität und die Einbettungsdimension des lokalen Ringes $O(M, V)$ gerade*

$$\# \partial C_+ \cap \hat{M}_+/V.$$

Beweis. Sei $f \in I_k$, $f = \sum\limits_{\lambda(x)=k} a_x P_x + \sum\limits_{\lambda(x)>k} a_x P_x$.

Da $P_x = P_{\varepsilon x}$ für alle $\varepsilon \in V$ und $\# L_k/V < \infty$ ist, existieren $x_1, \ldots, x_s \in \hat{M}_+$ s.d. $\lambda(x_i) = k$ und $f \equiv \sum a_{x_i} \cdot P_{x_i} \mod I_{k+1}$. $f \in m^k + I_{k+1}$ (2.2.0). Dann ist aber $m^k \subset I_k \subset m^k + I_{k+1} \subset m^k + I_{k+s}$ für alle $s \geqq 1$ (2.1.2) ff. Andererseits ist $m^k + I_{k+s} \subset I_k$ für $s \geqq 1$, d.h. $I_k = m^k + I_{k+s}$ für alle $s \geqq 1$. Der τ_I-Abschluß von m^k *ist* $\bigcap\limits_{t \geqq 0} (m^k + I_t)$. Dieser Durchschnitt ist aber offensichtlich I_k, wegen $I_k = m^k + I_{k+s}$, $s \geqq 1$ und (2.1.2) ff. Der τ_m-Abschluß von m^k ist m^k selbst. Da die Topologien übereinstimmen, ist $m^k = I_k$. Die Korollare folgen aus (1.2.0) und (2.1.7).

3. 2-dimensionale Spitzen

Sei jetzt $k = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ ein totalreeller (quadratischer) Zahlkörper mit Diskriminante D, $y \mapsto y'$ die Konjugation in k, M ein freier $\mathbb{Z}$-Modul in k vom Rang 2, U_M^+ die Gruppe der totalpositiven Einheiten in k, die M invariant lassen. U_M^+ ist dann frei vom Rang 1. Sei schließlich V eine Untergruppe von U_M^+ mit endlichem Index $a := [U_M^+ : V]$; dann ist V ebenfalls frei vom Rang 1.

Da M ein vollständiger $\mathbb{Z}$-Modul ist [3], existiert eine reduzierte Zahl $w \in k$, d.h. $0 < w' < 1 < w$, mit $M = \mathbb{Z} \cdot w + \mathbb{Z} \cdot 1$. Die reduzierte Zahl w besitzt eine reinperiodische Kettenbruchentwicklung der Form

$$w = [\overline{b_0, \ldots, b_{r-1}}] := b_0 - \cfrac{1}{b_1 - \cfrac{1}{b_2 - \cfrac{1}{\ddots}}} \tag{3.1.0}$$

Dabei sind alle $b_i \geqq 2$ und wenigstens ein $b_k \geqq 3$. In (3.1.0) sei die Zahl r durch die minimale Periodenlänge festgelegt. $e_M := \sum\limits_{i=0}^{r-1} (b_i - 2)$ ist wohldefiniert [3].

Sei $k \geqq 0$. Dann sind auch die Zahlen $w_0 := w$, $w_k := [b_k, b_{k+1}, \ldots]$ reduziert [3]. Es ist $b_{r+k} = b_k$ und $w_{r+k} = w_k$. Man kann deshalb annehmen, daß sowohl b_k als auch w_k für alle $k \in \mathbb{Z}$ definiert ist. Durch $A_0 := 1$, $A_{k+1} := w_{k+1}^{-1} \cdot A_k$ werden für $k \in \mathbb{Z}$ Zahlen definiert mit folgenden Eigenschaften [3]:

(i) $0 < A_{k+1} < A_k, A_k \neq 1$ für $k \neq 0$
(ii) $b_k A_k = A_{k-1} + A_{k+1}$
(iii) $A_{k-1} A'_k - A_k A'_{k-1} = \sqrt{D}$
(iv) A_k, A_{k-1} ist eine $\mathbb{Z}$-Basis von M
(v) $A_{k+r} = A_k A_r$
(vi) $V = \{A_{ar}^s \mid s \in \mathbb{Z}\}$. (3.1.1)

Bezüglich der k-ten Basis A_{k-1}, A_k von M hat $\hat{M}_+$ die Darstellung (Rechnung):

$$\left\{1/\sqrt{D}(m_k A'_k - n_k A'_{k-1}, n_k A_{k-1} - m_k A_k) \,\middle|\, \begin{matrix} n_k, m_k \in \mathbb{N}^{\cdot} \\ w'_k < m_k/n_k < w_k \end{matrix}\right\}. \tag{3.1.2}$$

Da m_k, n_k durch $x \in \hat{M}_+$ eindeutig bestimmt ist, hat man für alle $k \in \mathbb{Z}$ eine injektive Abbildung

$$x \mapsto (m_k(x), n_k(x)).$$

Es sei weiter

$$s_k := 1/\sqrt{D}(A'_k - A'_{k-1}, A_{k-1} - A_k)$$

und

$$T_k := \{1/\sqrt{D}(m_k A'_k - A'_{k-1}, A_{k-1} - m_k A_k) \mid 1 \leqq m_k \leqq [w_k], m_k \in \mathbb{N}\}.$$

Offensichtlich ist $s_k \in T_k \subset \hat{M}_+$, $T_k = \{s_k\}$ falls $b_k = 2$.

3.1.3. Lemma. *Sei $k > i$. Dann gilt:*

(i) *$s_i = s_k$ genau dann, wenn $b_i = \ldots = b_{k-1} = 2$ ist.*

(ii) *$T_i \cap T_k \neq \emptyset$ genau dann, wenn $b_{i+1} = \ldots = b_{k-1} = 2$ oder $k = i+1$ ist. In diesen Fällen besteht der Durchschnitt gerade aus dem Punkt s_k.*

Beweis. (i): $A_{i-1} - A_i \geqq (b_i - 1) A_i - A_{i+1} \geqq \ldots \geqq A_{k-1} - A_k$. (ii): Sei $b_{i+1} = \ldots = b_{k-1} = 2$. Aus (i) folgt: $T_{i+1} = \ldots = T_{k-1} = \{s_{i+1} = \ldots = s_{k-1}\}$. Ist $b_{k-1} = 2$, dann ist $s_{k-1} = s_k \in T_k$. Ist $k = i+1$, so ist $s_k = 1/\sqrt{D}([w_i] A'_i - A'_{i-1}, A_{i-1} - [w_i] A_i) \in T_k \cap T_i$; ist $b_{i+1} = 2$, so ist $T_{i+1} = \{s_{i+1}\}$ und damit die eine Aussage bewiesen.

Sei $k \neq i+1$ und $x \in T_k \cap T_i$, also $n_k(x) = n_i(x) = 1$. Die Beziehung $m_k(x) A_k - A_{k-1} = m_i(x) A_i - A_{i-1}$ führt zu $A_i - A_{i+1} \leqq A_{k-1} - A_k$ (Definition von T_k). Allgemein gilt aber $A_{k-1} - A_k \leqq A_i - A_{i+1}$ falls $k > i+1$, d.h. man hat Gleichheit, also $b_{i+1} = \ldots = b_{k-1} = 2$.

3.1.4. Satz. (i) $E_+ = \{s_k | k \in \mathbb{Z}\}$. (ii) $R_+ = \{T_k | k \in \mathbb{Z}, b_k \neq 2\}$.

3.1.5. Korollar. (i) $\mu_+(M, V) = [U_M^+ : V] \cdot e_M$. (ii) $p(M, V) = [U_M^+ : V] \cdot \# E_+ / U_M^+$.

Beweis 3.1.4. y gehört zu M^+ genau dann, wenn $k \in \mathbb{Z}$ und $m, \tilde{m} \in \mathbb{N}$, $m + \tilde{m} \neq 0$, existieren mit $y = m A_k + \tilde{m} A_{k+1}$ [3]. Deshalb ist $x \in \partial C_+ \cap \hat{M}_+$ genau dann, wenn $\min \operatorname{sp} x \cdot A_k = 1$ (1.3.4), also $\partial C_+ \cap \hat{M}_+ = \bigcup_k T_k$ (rechnen).

Sei $b_k \neq 2$, g_k die Gerade durch s_k, s_{k+1} ($s_k \neq s_{k+1}$!). Offensichtlich ist $C T_k = \overline{s_k, s_{k+1}}$, $E T_k = \{s_k, s_{k+1}\}$, $C T_k \cap \hat{M}_+ = T_k$, $\operatorname{vol}_1 C T_k > 0$. Aus $A_{k+1}/A'_{k+1} > A_k/A'_k$ folgt sehr leicht $C T_k = g_k \cap \partial C_+$. Damit ist der Satz bewiesen.

Beweis 3.1.5. Jedes Element ε aus V hat die Form A_{sar}, $s \in \mathbb{Z}$. Deshalb ist $A_{sar} \cdot T_k = T_{k+sar}$ (3.1.1) und $T_0, \ldots, T_{ar-1}$ ein Repräsentantensystem von R_+/V, wenn man die T_i wegläßt, für die $b_i = 2$ ist. $\# T_k = b_k - 1$. Berücksichtigt man, daß $s_{ar} \in T_{ar-1}$ und $s_{ar} \equiv s_0 \bmod V$ ist, so folgt $\mu_+(M, V) = a \cdot e_M$. Sei ε primitiv in V. Dann ist $\varepsilon \cdot T_k = T_{k \pm ar}$ und $p(M, V) = \# E_+/V = a \cdot \# \{b_i | 0 \leqq i \leqq r-1, b_i \neq 2\}$ (3.1.3).

Für $x \in \hat{M}_+$, $\lambda(x) = k$ sei $\Delta(x)$ das maximale $p \in \mathbb{N}$ s.d. $x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_k \in \hat{M}_+$ existieren mit $x_1, \ldots, x_p \notin E_+$ und $x = \sum x_i$. Man bemerkt:

$$0 \leqq \Delta(x) \leqq \lambda(x), \qquad x \in \hat{M}_+, \tag{3.2.0}$$

$$\Delta(\varepsilon x) = \Delta(x), \qquad x \in \hat{M}_+, \qquad \varepsilon \in V. \tag{3.2.1}$$

Der leichte Beweis des folgenden Lemmas sei dem Leser überlassen.

3.2.2. Lemma. *Sei* $x, y \in T_k$, $x \neq y$.

(i) $b_k \geqq 4$ *impliziert* $\Delta(x+y) \geqq 1$.

(ii) $b_k \geqq 5$ *impliziert* $\Delta(s_k + x) \geqq 2$, *falls* $m_k(x) \geqq b_k/2$ *oder* $\Delta(s_{k+1} + x) \geqq 2$, *falls* $m_k(x) \leqq b_k/2$ *ist.*

(iii) $\Delta(\tilde{x} + \tilde{y}) \geqq \Delta(\tilde{x}) + \Delta(\tilde{y})$ *für alle* $\tilde{x}, \tilde{y} \in \sigma_{T_k} \cap \hat{M}_+$.

Wir können jetzt die Aussagen des Satzes 1.2.1 wesentlich verschärfen:

3.2.3. Satz. *Sei* $k > 1$, $x_1, \ldots, x_k \in \hat{M}_+$, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k \in V$, $x_1 + \ldots + x_k \not\equiv \varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_k x_k$ mod V *und* $\lambda(x_1 + \ldots + x_k) = \lambda(\varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_k x_k) = k$.

(i) *Ist* $p(M, V) = 2$, *dann liegen alle Vektoren* $x_1, \ldots, x_k$ *in* E_+. *Ist in diesem Falle zusätzlich* $a \cdot e_M \geqq 3$, *dann ist* $\Delta(x_1 + \ldots + x_k)$ *oder* $\Delta(\varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_k x_k)$ *größer oder gleich* 1.

(ii) *Ist* $p(M, V) = 1$, *dann liegt wenigstens einer der Vektoren* $x_1, \ldots, x_k$ *in* E_+. *Ist in diesem Falle zusätzlich* $e_M \geqq 3$ *und* $\Delta(x_1 + \ldots + x_k) = t < k$, *dann existiert eine Zerlegung* $x_1 + \ldots + x_k = \tilde{x}_1 + \ldots + \tilde{x}_k$, s.d. $\tilde{x}_1 + \ldots + \tilde{x}_k \not\equiv \varepsilon_1 \tilde{x}_1 + \ldots + \varepsilon_k \tilde{x}_k$ mod V *und* $\lambda(\tilde{x}_1 + \ldots + \tilde{x}_k) = \lambda(\varepsilon_1 \tilde{x}_1 + \ldots + \varepsilon_k \tilde{x}_k) = k$ $\Delta(\varepsilon_1 \tilde{x}_1 + \ldots + \varepsilon_k \tilde{x}_k) > t$ *nach sich zieht.*

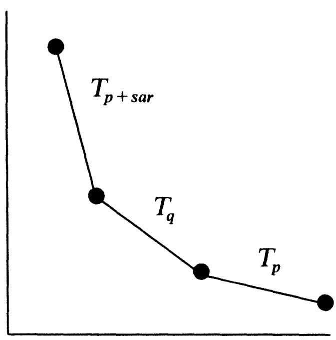
Beweis. Wegen der Inkongruenz finden wir ein $1 \leqq i \leqq k$ s.d. $\varepsilon := \varepsilon_k^{-1} \cdot \varepsilon_i \neq 1$ ist. ε hat die Form A_{sar}. Sei $x := x_i$, $y := x_k$. Da λ subadditiv und mit der V-Operation verträglich ist, können wir $\lambda(x+y) = \lambda(\varepsilon x + y) = 2$ und $s \geqq 1$ annehmen. Dann existieren aber Randkomponenten T_p, T_q (insbesondere also $b_p, b_q \geqq 3$) s.d.

α) $x, y \in T_p$

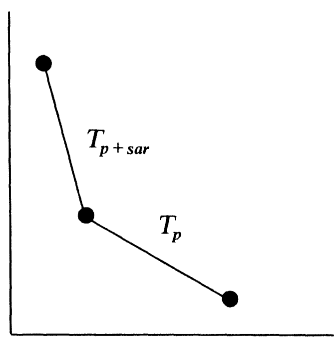
β) $y \in T_p \cap T_q$

γ) $\varepsilon x \in T_q \cap T_{p+sar}$

(1.3.1, 3.1.4).



$p(M, V) = 2$



$p(M, V) = 1$

Da die Zahlen b_j periodisch sind, folgt $p \leqq q \leqq p+ras$, $sa \leqq 2$ (3.1.3).

$sa=1$: V ist die volle Gruppe, ε primitiv. Ist q eine der Grenzen p, $p+r$, so ist entweder $r=1$ oder $b_{p+1}=\ldots=b_{p+r-1}=2$ (3.1.3). In beiden Fällen ist aber dann $p(M, V)=1$ und da dann εx oder y im Durchschnitt $T_p \cap T_{p+r}$ der Randkomponenten $T_p \neq T_{p+r}$ liegt, ist entweder x oder y extremal. Ist $p<q<p+r$, so ist $p(M, V)=2$ und beide Punkte liegen in E_+ (analoges Argument).

$sa=2$: In diesem Fall ist notwendigerweise $q=p+r$ (3.1.3, Periodizität der b_j). x, y sind dann Extremalpunkte.

Deshalb sind für $p(M, V)=2$ die Vektoren x_i, x_k extremal, sofern $\varepsilon_k \neq \varepsilon_i$ ist. Ist aber $\varepsilon_k=\varepsilon_i$, vertauscht man einfach die Rollen von x_i und x_k. Weiter haben wir gesehen, daß für $p(M, V)=1$ wenigstens einer der Vektoren x_i, x_k extremal ist.

Wir beweisen jetzt die zweite Aussage von 3.2.3 (i). $[U_M^+ : V]=1$: Wegen $p(M, V)=2$ und $e_M \geqq 3$ ist $T_q \neq T_p$, b_q oder $b_p \geqq 4$ und $\varepsilon x \neq y$, $x \neq y$, folglich $\Delta(x+y)$ oder $\Delta(\varepsilon x+y) \geqq 1$. $[U_M^+ : V]=2$: Dann ist $e_M \geqq 2$, $b_p=b_q \geqq 4$ und $\Delta(\varepsilon x+y) \geqq 1$ ($\varepsilon x \neq y$!).

Mittels (3.2.1) und 3.2.2 (iii) folgt jetzt die Behauptung.

Bleibt 3.2.3 (ii). Nach Voraussetzung ist $b_p \geqq 5$. Weiter können wir annehmen, daß die Vektoren $x_1, \ldots, x_k$ in T_p liegen. Dann hat $x_1+\ldots+x_k$ eine Δ-Zerlegung der Form

$$z_1+\ldots+z_t+(k-t)\, s_p$$

oder

$$z_1+\ldots+z_t+(k-t)\, s_{p+1}\,,$$

wobei $z_i \notin E_+$, $t<k$. Beachte: Da $b_p \geqq 5$ ist, kann in einer „maximalen" Δ-Zerlegung s_p und s_{p+1} nicht gleichzeitig vorkommen (3.2.2). Sei ohne Einschränkung $\sum x_i = z_1+\ldots+z_t+(k-t)\, s_p$. Dann ist $m_p(z_i) \leqq b_p/2$ (Δ-Maximalität).

Sei $y := \varepsilon_1 z_1+\ldots+\varepsilon_t z_t+\varepsilon_{t+1} s_p+\ldots+\varepsilon_k s_p$ inkongruent $z_1+\ldots+z_t+(k-t)\, s_p$ mod V, aber mit gleichem λ-Wert k. Wir können uns die z_i so angeordnet denken, daß $y \equiv \varepsilon(z_1+\ldots+z_j)+z_{j+1}+\ldots+z_t+\varepsilon \cdot g \cdot s_p+(k-t-g)\, s_p$. Beachte: Es tritt nur ein und diesselbe Einheit auf ($\lambda(y)=k$). Überdies ist ε primitiv (vgl. den ersten Teil des Beweises). $g=0$: Dann ist $j=t$. Es existiert dann wenigstens ein i s. d. $m_p(z_i)<b_p/2$ (Δ-Maximalität). εz_i liegt in $T_{p\pm r}$ und damit $m_p(z_i)=m_{p\pm r}(\varepsilon z_i)<b_{p\pm r}/2=b_p/2$, also $\Delta(\varepsilon z_i+s_p) \geqq 2$.

$g \neq 0, k-t-t \neq 0$: Wegen der Inkongruenz und $\lambda(y)=k$ folgt $j=0$; da $p(M, V)=1$ ist, $\varepsilon s_p=s_{p+1}$ und damit $\Delta(\varepsilon s_p+s_p) \geqq 2$. Andere als die diskutierten Fälle treten nicht auf. Wir führen den Beweis genau wie in dem vorangegangenen Fall zu Ende.

3.2.4. Korollar. *Sei* $p(M, V)=2$, $e_M=1$, $k>1$, $k+1=\lambda(x_1+\ldots+x_{k+1})$, $x_k \neq x_{k+1}$, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k \in V$ *und* $x_1+\ldots+x_{k+1} \not\equiv \varepsilon_1 x_1+\ldots+\varepsilon_k(x_k+x_{k+1})$ mod V. *Dann ist* $\lambda(\varepsilon_1 x_1+\ldots+\varepsilon_k(x_k+x_{k+1}))>k+1$.

3.2.5. Korollar. *Sei* $p(M, V)=1$, $e_M=2$, $k>1$. *Sei weiter* $x=x_1+\ldots+x_{k+1}$ *eine maximale* Δ-*Zerlegung von* x, $\lambda(x)=k+1$, $x_k \in E_+$, $x_{k+1} \notin E_+$, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k \in V$, $x_1+\ldots+x_{k+1} \not\equiv \varepsilon_1 x_1+\ldots+\varepsilon_k(x_k+x_{k+1})$ mod V *und* $\lambda(\varepsilon_1 x_1+\ldots+\varepsilon_k(x_k+x_{k+1}))=k+1$. *Dann ist* $\Delta(x)$ *echt kleiner als* $\Delta(\varepsilon_1 x_1+\ldots+\varepsilon_k(x_k+x_{k+1}))$.

Bemerkung. Da $p(M, V)=1$ und $e_M=2$ ist, gibt es nichtextremale Randpunkte. Die Beweise laufen analog dem Beweis von 3.2.3.

3.2.6. Satz. (i) *Sei* $[U_M^+ : V]\, e_M \geqq 3$. *Dann stimmt die* λ-*Filtrierung* (I_k) *mit der* m-*adischen Filtrierung* (m^k) *des lokalen Ringes* $O(M, V)$ *überein*; $[U_M^+ : V]\, e_M$ *ist die Multiplizität bzw. Einbettungsdimension von* $O(M, V)$.

(ii) *Sei* $[U_M^+ : V]\, e_M = 2$. *Dann ist* $I_{k+1} \subset m^k \subset I_k$ *für* $k > 1$; $[U_M^+ : V]\, e_M$ *ist die Multiplizität von* $O(M, V)$.

(iii) *Sei* $[U_M^+ : V]\, e_M = 1$. *Dann ist die* λ-*Filtrierung nicht* m-*gut.*

Beweis. (i): Wir können zunächst $p(M, V) \leqq 2$ annehmen (2.2.1). Weiter genügt es zu zeigen: Sei $x \in \hat{M}_+$, $\lambda(x) = k$. Dann liegt die Poincaréreihe P_x in $m^k + I_{k+1}$ (vgl. 2.2.1 ff.). Dazu sei wieder $x = x_1 + \ldots + x_k$,

$$P_{x_1} \ldots P_{x_k} \equiv c_x \cdot P_x + \sum c_y \cdot P_y \bmod I_{k+1},$$

wobei

$$y \not\equiv x \bmod V,\ \lambda(x) = \lambda(y) = k,\ c_x \neq 0,\ y = \varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_k x_k$$

und die Summe endlich ist (vgl. 2.2.0).

$p(M, V) = 2$: Ist $\Delta(x) \geqq 1$, so können wir annehmen, daß wenigstens ein x_i nicht extremal ist, die Summe auf der rechten Seite der Kongruenz gar nicht vorkommt [3.2.3 (i)]. Ist aber $\Delta(x) = 0$, dann ist $\Delta(y) \geqq 1$ ($a \cdot e_M \geqq 3$), also nach der obigen Bemerkung $P_y \in m^k + I_{k+1}$.

$p(M, V) = 1$: Ist $\Delta(x) = k$, so können wir annehmen, daß kein x_i extremal ist, die Summe tritt also wieder nicht auf. Sei $\Delta(x) = p < k$. Dann ist $\Delta(y) > p$. Sei $\Delta(x) = k - i$. Die Behauptung folgt jetzt durch Induktion nach i.

(ii): Sei $k > 1$, $x = x_1 + \ldots + x_{k+1}$, $\lambda(x) = k + 1$. Neben der Zerlegung

$$P_{x_1} \ldots p_{x_{k+1}} \equiv c_x \cdot P_x + \sum c_y \cdot P_y \bmod I_{k+2} \tag{1}$$

betrachten wir noch Zerlegungen der Form

$$P_{y_1} \ldots P_{y_{k-1}} \cdot P_{y_k + y_{k+1}} \equiv c_y \cdot P_y + \sum c_{\tilde{y}} \cdot P_{\tilde{y}} \bmod I_{k+2}, \tag{2}$$

wobei wieder $\lambda(y) = \lambda(\tilde{y}) = k + 1$, $y \not\equiv \tilde{y} \bmod V$, $\tilde{y}$ die Form $\varepsilon_1 y_1 + \ldots + \varepsilon_k (y_k + y_{k+1})$ hat und die Summe endlich ist. $c_y \neq 0$.

$p(M, V) = 2$: Kommt ein $y = \varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_{k+1} x_{k+1}$ in der Summe der Zerlegung (1) vor, so können wir ohne Einschränkung annehmen, daß $\varepsilon_k x_k$ und $\varepsilon_{k+1} x_{k+1}$ verschieden sind. Dann ist aber $P_{x_1} \ldots P_{x_{k-1}} \cdot P_{\varepsilon_k x_k + \varepsilon_{k+1} x_{k+1}} \equiv c_y \cdot P_y \bmod I_{k+2}$ (3.2.5).

$p(M, V) = 1$: Hier führen analoge Überlegungen zusammen mit einer Induktion über $i = k + 1 - \Delta(x)$ mit Hilfe von (3.2.5) zu $P_x \in m^k + I_{k+2}$.

Insgesamt folgt: $I_{k+1} \subset m^k$ (vgl. Beweis zu 2.2.1). Dann ist aber $\dim O(M, V)/I_{k+1} \geqq \dim O(M, V)/m^k \geqq \dim O(M, V)/I_k$. Eine Grenzbetrachtung liefert das gewünschte Resultat.

(iii): Wäre die λ-Filtrierung m-gut, so hätte $O(M, V)$ die Multiplizität 1. Da die Komplettierung von $O(M, V)$ nullteilerfrei ist [1], wäre $O(M, V)$ regulär — ein Widerspruch [2].

Bemerkung. Die Singularitäten mit $[U_M^+ : V]\, e_M \leqq 2$ sind gerade die quasiregulären Spitzen. Sie sind dadurch charakterisiert, daß der Translationsmodul M symmetrisch, ihre Symmetrisierung regulär ist [4]. Quasireguläre Spitzen haben die primitiven Zykel [3]:

$$((3, \underbrace{2, \ldots, 2}_{u})) \quad \text{mit} \quad u \geqq 0 \tag{A}$$

$$((4, \underbrace{2, \ldots, 2}_{u})) \quad \text{mit} \quad u \geqq 0 \tag{B}$$

$$((3, \underbrace{2, \ldots, 2}_{u}, 3, \underbrace{2, \ldots, 2}_{v})) \quad \text{mit} \quad u \geqq v \geqq 0 . \tag{C}$$

Die Methode, durch Vergleich der beiden Filtrierungen die Multiplizitäten zu berechnen, bricht also lediglich im Falle (A) zusammen.

Abschließend möchte ich eine andere Methode skizzieren, um den Satz 3.2.6 (i) zu beweisen. Man braucht dazu die Ergebnisse aus [4]. Sei $\varphi\colon \tilde{\mathscr{H}} \to \mathscr{H}$ die (bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte) minimale Desingularisierung von $(\mathscr{H}, \infty)$ und Z ihr Fundamentaldivisor. Ist $a \cdot e_M \geqq 3$, dann ist die negative Selbstschnittzahl $-Z^2 \geqq 3$ und deshalb $m^k \mathcal{O}_{\tilde{\mathscr{H}}} = \mathcal{O}_{\tilde{\mathscr{H}}}(-k \cdot Z)$ [4]. Sei $x \in \hat{M}_+$ und $\lambda(x) = k$. x besitzt eine Zerlegung in k Vektoren: $x = x_1 + \ldots + x_k$, $x_i \in \hat{M}_+$. Mit Hilfe von [3] p. 217 sieht man, daß $(\varphi^\star P_x) \geqq -k \cdot Z$, d.h. $P_x \in m^k$.

Literatur

1. Freitag, E., Kiehl, R.: Algebraische Eigenschaften der lokalen Ringe in den Spitzen der Hilbertschen Modulgruppen. Inventiones math. **24**, 121—148 (1974)
2. Gundlach, K. B.: Some new results in the theory of Hilbert's modular group. Contribution to function theory. International Colloquium Bombay, 165—180 (1960)
3. Hirzebruch, F.: Hilbert modular surfaces. L'Enseignement Mathématique **19**, 183—281 (1973)
4. Karras, U.: Eigenschaften der lokalen Ringe in zweidimensionalen Spitzen. Math. Ann. **215**, 117—129 (1975)
5. Kempf, G. et al.: Toroidal Imbeddings I. Berlin. Heidelberg, New York: Springer 1973
6. Siegel, C. L.: Lectures on advanced analytic number theory. Tata Inst., Bombay 1961

Angenommen am 5. April 1976

Nachtrag bei der Korrektur: Mittlerweile kann ich folgendes beweisen:

(i) Sei $p(M, V) \geqq 2$. Dann ist $I_k \subset m^{k-n+1}$ für $k \geqq n$, also $\mu(M, V) = \mu_+(M, V)$.

(ii) Sei $V \subset U_M^{+2}$. Dann ist $p(M, V) \geqq 2$.

Der Beweisgang enthält im Falle $n > 2$ eine Lücke. Eine Korrektur folgt.

Math. Ann. 225, 145—154 (1977)

Über die Nullstellen meromorpher Funktionen und deren Ableitungen*

Günter Frank, Wilhelm Hennekemper und Gisela Polloczek
Fachbereich Mathematik der Fernuniversität, Roggenkamp 2, D-5800 Hagen, Bundesrepublik Deutschland

1. Einleitung

In [2] wurde folgender Satz bewiesen:

Satz A. *Sei f meromorph und nicht konstant, $k \geqq 2$ eine natürliche Zahl. f und $f^{(k)}$ haben keine Nullstellen in $\mathbb{C}$.*

Dann gilt:

$$f(z) = e^{az+b} \quad \text{oder} \quad f(z) = (Az+B)^{-n}$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $a, b, A, B \in \mathbb{C}$.

Für den Fall, daß f endlich viele Polstellen, f und $f^{(k)}$ endlich viele Nullstellen haben, haben Tumura und Clunie bewiesen [4]:

Satz B. *Sei f meromorph und habe endlich viele Polstellen in der Ebene. f und $f^{(k)}$ haben nur endlich viele Nullstellen für ein $k \geqq 2$. Dann gilt:*

$$f = \frac{P_1}{P_2} e^{P_3},$$

wobei P_1, P_2, P_3 Polynome sind.

In [2] wurde folgende Verschärfung eines Satzes von Hayman [4] angegeben:

Satz C. *Sei f meromorph und nicht konstant, $k \geqq 2$ eine natürliche Zahl. Dann folgt aus:*

$$\bar{N}(r,f) + N\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right) = o\left(T\left(r, \frac{f'}{f}\right)\right), \qquad r \notin E,$$

für f die Gestalt

$$f(z) = e^{az+b}$$

mit $a, b \in \mathbb{C}$.

---

* Herrn Prof. Dr. Hans Wittich zum 65. Geburtstag gewidmet

Dabei ist $E \subset \mathbb{R}^+$ eine Menge mit endlichem linearen Maß. Solche Ausnahmemengen werden wir immer mit E bezeichnen. Verschiedene Mengen mit dieser Eigenschaft werden nicht unterschiedlich gekennzeichnet. Alle auftretenden asymptotischen Beziehungen gelten für $r \to \infty$.

In dieser Arbeit soll ein Satz bewiesen werden, der für $k \geqq 3$ Satz A impliziert, Satz B und Satz C wesentlich verschärft. Für die Verschärfung des Satzes C wird der auch für sich allein interessante Hilfssatz 4 benötigt.

Der Fall $k=2$ wird in einer späteren Arbeit nachgetragen.

Satz 1. *Sei f meromorph in $\mathbb{C}$ und nicht konstant, $k \geqq 3$ eine natürliche Zahl. f und $f^{(k)}$ besitzen die Darstellungen $f=\frac{P}{G}$ bzw. $f^{(k)}=\frac{Q}{G^*}$ mit ganzen Funktionen P, Q, G, G^*. Dabei haben P und G bzw. Q und G^* keine gemeinsamen Nullstellen. Dann gilt:*

$$\bar{N}(r,f) \leqq k_{12} \log r + k_{13} \overset{+}{\log} m\left(r, \frac{P^{k+1}}{Q}\right) + k_{14} \overset{+}{\log} T\left(r, \frac{f'}{f}\right)$$

$$+ k_{15} \left\{\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right)\right\}, \quad r \notin E, \tag{17}$$

wobei k_{12}, k_{13}, k_{14} und k_{15} von k abhängige reelle Zahlen sind. Dabei können P und Q beliebige Weierstraßprodukte sein.

Folgerungen aus Satz 1. A) Für $P=Q=1$ folgt aus der Ungleichung (17) für $k \geqq 3$ der Satz A (vgl. den Beweis in [2]).

B) Sind in (17) P und Q Polynome, so kann damit Satz B für $k \geqq 3$ ohne Bedingungen an die Polstellenanzahl bewiesen werden.

Satz 2. *Sei f meromorph in $\mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ und $k \geqq 3$, f und $f^{(k)}$ haben nur endlich viele Nullstellen. Dann gilt:*

$$f = \frac{P_1}{P_2} e^{P_3} \text{ mit } P_1, P_2 \text{ und } P_3 \text{ Polynome.}$$

C) Mit (17) und Hilfssatz 4 kann eine Verschärfung von Satz C für $k \geqq 3$ bewiesen werden, die keine Voraussetzungen über die Polstellen von f macht:

Satz 3. *Sei f meromorph und nicht konstant, $k \geqq 3$ eine natürliche Zahl. Dann folgt aus*

$$\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right) = o\left(T\left(r, \frac{f'}{f}\right)\right), \quad r \notin E,$$

für f die Gestalt

$$f(z) = e^{az+b} \quad \text{oder} \quad f(z) = \frac{1}{(Az+B)^n}$$

mit $a, b, A, B \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.

Zum Beweis der Sätze 1, 2 und 3 werden Hilfsmittel aus der Theorie linearer Differentialgleichungen, die Nevanlinna-Theorie und eine Abschätzung der

Weierstraßschen Primfaktoren gebraucht. Es werden die üblichen Bezeichnungen der Nevanlinna-Theorie benutzt, also $m(r,f)$, $N(r,f)$, $T(r,f)$, ... (vgl. [4]).

2. Einige Hilfssätze

Die folgenden Aussagen über Wronskideterminanten findet man in [8].

Hilfssatz 1. *Es seien $g_1, g_2, \ldots, g_n$ und h ganze Funktionen. Dann gilt für die Wronskideterminante*

$$W(g_1h, g_2h, \ldots, g_nh) = h^n W(g_1, \ldots, g_n).$$

Damit ergibt sich für die k-te Ableitung einer meromorphen Funktion $f = \frac{h}{g}$ mit g, h ganze Funktionen die Darstellung

$$\begin{aligned} f^{(k)} &= W\left(1, z, \frac{z^2}{2!}, \ldots, \frac{z^{k-1}}{(k-1)!}, \frac{h}{g}\right) \\ &= \frac{1}{C_k g^{k+1}} W(g, zg, \ldots, z^{k-1}g, h) \end{aligned} \tag{1}$$

mit $C_k = 1!2!\ldots(k-1)!$.

In [2] wurde bewiesen:

Hilfssatz 2. *Sei f meromorph und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

$$m\left(r, \frac{f^{(n)}}{f}\right) \leqq k_1 \left\{ m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + \log\left(r \cdot T\left(r, \frac{f'}{f}\right)\right)\right\}, \qquad r \notin E,\ k_1 \in \mathbb{R}.$$

Aus den Untersuchungen von Frei in [3] folgt unmittelbar der Beweis von

Hilfsssatz 3. *Bezeichnen wir mit $w_1, \ldots, w_n$ ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung*

$$L_n(w) = w^{(n)} + a_{n-1}w^{(n-1)} + \ldots + a_0 w = 0$$

mit meromorphen Funktionen als Koeffizienten und mit

$$T(r) = \max_{j=1}^{n} \{T(r, w_j)\},$$

dann gilt für die Koeffizienten a_j der Differentialgleichung $L_n(w) = 0$ die Abschätzung

$$m(r, a_j) \leqq k_2 \log(r \cdot T(r)), \qquad r \notin E,\ k_2 \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Zum Beweis des Satzes 3 brauchen wir den

Hilfssatz 4. *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ ohne Häufungspunkt mit $1 \leqq |a_n| \leqq |a_{n+1}|$ und $p_n = n(|a_n|)$. $n(r)$ und $N(r)$ bezeichnen die Zählfunktionen bezüglich $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann ist das Weierstraßprodukt*

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{a_n}, p_n\right)$$

gleichmäßig konvergent auf jedem Kompaktum, und es gilt

$$T(r, P) \leqq k_3 \exp\{k_4 N(r)\} \quad \textit{für} \quad r \notin E,\ k_3, k_4 \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Beweis des Hilfssatzes 4. Vor dem eigentlichen Beweis leiten wir zwei Hilfsungleichungen her:

Für $r, N(r) > 1$ gilt

$$\log\left(1+\frac{1}{rN(r)}\right) \geqq \frac{1}{2}\frac{1}{rN(r)} \tag{4}$$

und damit

$$N\left(r+\frac{1}{N(r)}\right) \geqq \int_r^{r+\frac{1}{N(r)}} \frac{n(t)}{t}\,dt \geqq n(r)\log\left(1+\frac{1}{rN(r)}\right) \geqq \frac{1}{2}\frac{n(r)}{rN(r)}.$$

Also

$$n(r) \leqq 2rN(r)N\left(r+\frac{1}{N(r)}\right),$$

$$n\left(r+\frac{1}{N(r)}\right) \leqq 2\left(r+\frac{1}{N(r)}\right)N\left(r+\frac{1}{N(r)}\right)N\left(r+\frac{2}{N(r)}\right).$$

Wir wenden ein Lemma von Borel [4, p. 38] an

$$n\left(r+\frac{1}{N(r)}\right) \leqq k_5 r N^2(r),\ r \notin E,\ k_5 \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Mit Ungleichungen von Cohn [1] beginnen wir den eigentlichen Beweis. Für $z \in \mathbb{C}$, $|z| = r > 1$, $R = r + \dfrac{1}{N(r)}$ gilt

$$\tfrac{1}{2}\log|P(z)| \leqq \sum_{|a_n| \leqq R} \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p_n+1} + \sum_{|a_n| > R} \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p_n+1}.$$

Wir schätzen die beiden Summen ab:

$$S_1(r) := \sum_{|a_n| \leqq R} \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p_n+1} \leqq n(R) \max_{|a_n| \leqq R} \left\{\left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{n(|a_n|)+1}\right\}$$

$$\leqq n(R) \max_{|a_n| < r} \left\{\exp\left(2n(|a_n|)\log\left(\frac{r}{|a_n|}\right)\right)\right\} = n(R)\exp\left\{2n(|a_k|)\log\left(\frac{r}{|a_k|}\right)\right\}$$

für $k \in \mathbb{N}$, $|a_k| < r$. Die Gültigkeit der Ungleichungskette

$$N(r) \geqq \int_{|a_k|}^{r} \frac{n(t)}{t}\,dt \geqq n(|a_k|)\log\left(\frac{r}{|a_k|}\right)$$

impliziert

$$2n(|a_k|) \leqq \frac{2N(r)}{\log\left(\dfrac{r}{|a_k|}\right)}.$$

Wegen (5) erhalten wir damit

$S_1(r) \leqq k_5 r N^2(r) \exp\{2N(r)\}, r \notin E$, d. h.

$$S_1(r) \leqq \exp\{k_6 N(r)\}, r \notin E, k_6 \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Die zweite Summe behandeln wir wie folgt:

$$S_2(r) := \sum_{|a_n| > R} \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p_n+1} \leqq \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \text{mit } |a_n| > R}} \exp\left\{-\log\left(1 + \frac{1}{rN(r)}\right) p_n\right\}$$

$$\leqq \int_0^\infty \exp\left\{-\log\left(1 + \frac{1}{rN(r)}\right) x\right\} dx = \frac{1}{\log\left(1 + \frac{1}{rN(r)}\right)} \leqq 2rN(r) \leqq \exp\{k_7 N(r)\},$$

$k_7 \in \mathbb{R}$.

Diese Abschätzung liefert die behauptete Konvergenz, und zusammen mit (6) folgt die Ungleichung

$$T(r, P) \leqq \log M(r, P) \leqq S_1(r) + S_2(r) \leqq k_3 \exp\{k_4 N(r)\}, \quad r \notin E. \tag{3}$$

3. Beweise der Sätze 1, 2 und 3

Beweis des Satzes 1. Wir betrachten f mit der Darstellung $f = \frac{P}{G}$, wobei P und G ganze Funktionen sind, die keine gemeinsamen Nullstellen haben. Wir zerlegen

$$G = g \cdot g_1,$$

wobei g und g_1 ganze Funktionen sind. g enthalte jede Nullstelle von G als einfache Nullstelle und sonst sei g von Null verschieden in $\mathbb{C}$. Wegen (1) gilt:

$$f^{(k)} = \frac{1}{C_k} \frac{W(G, zG, \ldots, z^{k-1}G, P)}{g^{k+1} g_1 g_1^k}.$$

$\dfrac{W(G, zG, \ldots, z^{k-1}G, P)}{g_1^k}$ ist eine ganze Funktion mit den Nullstellen von $f^{(k)}$. Durch geeignete Multiplikation von g und g_1 mit ganzen Funktionen, die in $\mathbb{C}$ nullstellenfrei sind, können wir erreichen, daß gilt:

$$\frac{W(G, zG, \ldots, z^{k-1}G, P)}{g_1^k} = Q \text{ mit } Q \text{ Weierstraßprodukt.}$$

Mit Hilfssatz 1 ergibt sich:

$$\frac{W\left(\frac{G}{P}, z\frac{G}{P}, \ldots, z^{k-1}\frac{G}{P}, 1\right)}{g_1^k} = \frac{Q}{P^{k+1}}.$$

Entwickeln der Wronskideterminante nach der letzten Spalte ergibt:

$$W\left(\frac{\left(\frac{G}{P}\right)'}{g_1}, \frac{\left(z\frac{G}{P}\right)'}{g_1}, \ldots, \frac{\left(z^{k-1}\frac{G}{P}\right)'}{g_1}\right) = \frac{(-1)^k Q}{P^{k+1}}.$$

Wir setzen $hg_1 = \left(\frac{G}{P}\right)'$ mit $h = \left(g' + \frac{g_1'}{g_1} g\right)\frac{1}{P} - g\frac{P^1}{P^2}$ und bezeichnen $F = \frac{g}{P}$. Dann erhalten wir

$$W(h, zh+F, \ldots, z^{k-1}h + (k-1)z^{k-2}F) = \frac{(-1)^k Q}{P^{k+1}}. \tag{7}$$

Dies bedeutet, daß die linear unabhängigen meromorphen Funktionen

$$h, zh+F, \ldots, z^{k-1}h + (k-1)z^{k-2}F$$

ein Fundamentalsystem einer linearen Differentialgleichung

$$L_k(w) = w^{(k)} + a_{k-1}w^{(k-1)} + \ldots + a_1 w' + a_0 w = 0$$

mit meromorphen Funktionen a_j als Koeffizienten darstellen. Wegen der speziellen Gestalt des Fundamentalsystems von $L_k(w)=0$ gilt für $j=0, \ldots, k-1$:

$$\begin{aligned} 0 &= L_k(z^j h + jz^{j-1}F) = L_k(z^j h) + jL_k(z^{j-1}F) \\ &= \sum_{\nu=0}^{j} z^{j-\nu}\binom{j}{\nu} L_{k-\nu}(h) + j\sum_{\nu=0}^{j-1} z^{j-\nu-1}\binom{j-1}{\nu} L_{k-\nu}(F) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} L_{k-\nu}(w) = {} & k(k-1)\ldots(k-\nu+1)w^{(k-\nu)} + (k-1)\ldots(k-\nu)a_{k-1}w^{(k-\nu-1)} \\ & + (k-2)\ldots(k-\nu-1)a_{k-2}w^{(k-\nu-2)} + \ldots + a_\nu \nu! w \end{aligned}$$

für $\nu = 0, 1, \ldots, j$.

Die Darstellung

$$\sum_{\nu=0}^{j} z^{j-\nu}\binom{j}{\nu}\{L_{k-\nu}(h) + \nu L_{k-\nu+1}(F)\} = 0 \quad \text{für} \quad j = 0, 1, \ldots, k-1$$

impliziert unmittelbar das System

$$L_{k-\nu}(h) + \nu L_{k-\nu+1}(F) = 0 \quad \text{für} \quad \nu = 0, 1, \ldots, k-1. \tag{8}$$

Insbesondere gilt für $\nu = k-1$ die Differentialgleichung für h und F

$$\begin{aligned} & k!h' + (k-1)!a_{k-1}h + (k-1)k!\tfrac{1}{2}F'' + (k-1)(k-1)!a_{k-1}F' \\ & \qquad + (k-1)!a_{k-2}F = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Wir eliminieren mit (9) in (8) h' und die Ableitungen von h mit einer Ordnung größer als eins. Wir erhalten Differentialgleichungen der Form

$$\begin{aligned}\Big\{a_\nu \nu! + (\nu+1)!a_{\nu+1}B_{k,1} + \frac{(\nu+2)!}{2}a_{\nu+2}B_{k,2} + \dots \\ +(k-1)\dots(k-\nu)a_{k-1}B_{k,k-\nu-1} \\ +k(k-1)\dots(k-\nu+1)B_{k,k-\nu}\Big\}h + M_{k-\nu+1}(F) = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

für $\nu=0, 1, \dots, k-2$ mit

$$B_{k,1} = -\frac{1}{k}a_{k-1} \qquad B_{k,n+1} = -\frac{1}{k}a_{k-1}B_{k,n} + B'_{k,n}$$

$$M_{k-\nu+1}(w) = C_{k-\nu+1}w^{(k-\nu+1)} + b_{k-\nu,\nu}w^{(k-\nu)} + \dots + b_{0,\nu}w\,,$$

wobei die $C_{k-\nu+1}$ natürliche Zahlen, $b_{j,\nu}$ algebraische Funktionen der $a_{k-1}, \dots, a_\nu$ und der Ableitungen von a_{k-1} und a_{k-2} bis zur Ordnung $k-\nu-1$ mit rationalen Koeffizienten sind. Zur Abkürzung bezeichnen wir die Koeffizienten von h mit $A_{k,\nu}$.

Wir differenzieren (10) und erhalten bei Benutzung von (9) und (10) für F die $k-1$ Differentialgleichungen

$$N_{k+2-\nu}(F) = F^{(k+2-\nu)} + r_{k+1-\nu,\nu}F^{(k+1-\nu)} + \dots + r_{0,\nu}F = 0 \tag{11}$$

für $\nu=0, 1, \dots, k-2$. Die Koeffizienten $r_{j,\nu}$ sind rationale Funktionen der $b_{j,\nu}$, $b'_{j,\nu}$, $A_{k,\nu}$ und $A'_{k,\nu}$ mit ganzzahligen Koeffizienten. Ist einer der Koeffizienten $A_{k,\nu}=0$, so setzen wir

$$N_{k+2-\nu}(F) := \frac{1}{C_{k-\nu+1}}\frac{d}{dz}M_{k+1-\nu}(F)\,.$$

Nach (11) ist F gemeinsame Lösung von $k-1 \geqq 2$ Differentialgleichungen. Nach [7] sind diese Differentialgleichungen reduzibel und nach einem dort angegebenen Verfahren erhalten wir für $\frac{F'}{F}$ die Darstellung

$$\frac{F'}{F} = R\,, \tag{12}$$

wobei R eine rationale Funktion der a_j und deren Ableitungen bis zu einer Ordnung kleiner oder höchstens gleich $k+1$ mit rationalen Koeffizienten ist. Falls alle $a_j=0$ sind, vergleiche man den Beweis in [2].

Das ist richtig, falls F die einzige gemeinsame Lösung der Differentialgleichungen $N_{k+2-\nu}(w)=0$, $\nu=0, 1, \dots, k-2$, ist. Durch Umkehrung des Verfahrens zeigt man mit einfacher Rechnung, daß es keine von F linear unabhängige gemeinsame Lösung geben kann (vgl. [2]). Nach Hilfssatz 3 gilt für die Koeffizienten der Differentialgleichung $L_k(w)=0$ wegen der speziellen Gestalt ihres Fundamentalsystems die Abschätzung

$$\begin{aligned} &m(r, a_j) \leqq k_2 \log(r \cdot T(r, F) \cdot T(r, h)),\ r \notin E,\ k_2 \in \mathbb{R}\,, \\ &T(r, a_j) \leqq N(r, a_j) + k_2\{\log(r \cdot T(r, F) \cdot T(r, h)\},\ r \notin E\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Die Funktionen a_j und die Lösungen der Differentialgleichung $L_k(w)=0$ sind meromorph. Aus der Fuchs'schen Theorie (vgl. [6]) folgt, daß die Polstellen der a_j Stellen der Bestimmtheit sind und folgende Beziehung gilt:

$$N(r, a_j) \leqq (k-j)\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + (k-j)\bar{N}\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right),$$

also

$$\begin{aligned} T(r, a_j) \leqq (k-j)&\left\{\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right)\right\} \\ &+ k_2 \log(r \cdot T(r, F) \cdot T(r, h)),\ r \notin E. \end{aligned} \tag{13}$$

Es gilt: $\bar{N}(r, f) = N\left(r, \frac{F'}{F}\right) - \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right)$.

Wegen (12) und (13) folgt daraus

$$\begin{aligned} \bar{N}(r, f) \leqq T(r, R) \leqq k_8 &\log(r \cdot T(r, F) \cdot T(r, h)) \\ &+ k_9\left\{\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right)\right\},\ r \notin E,\ k_8, k_9 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Zur Abschätzung von $T(r, F)$ schätzen wir $m\left(r, \frac{1}{F}\right)$ ab:

Wegen $\frac{f^{(k)}}{f} = \frac{Q \cdot g \cdot g_1}{g^{k+1} \cdot g_1 \cdot P}$ gilt $\frac{1}{g^k} = \frac{f^{(k)}}{f} \cdot \frac{P}{Q}$.

Aus Hilfssatz 2 folgt dann

$$m\left(r, \frac{1}{F}\right) \leqq \frac{1}{k} m\left(r, \frac{P^{k+1}}{Q}\right) + k_{10} m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + k_{10} \log\left(r \cdot T\left(r, \frac{f'}{f}\right)\right),\ r \notin E,\ k_{10} \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} T(r, F) &= m\left(r, \frac{1}{F}\right) + N\left(r, \frac{1}{F}\right) + k_{11} \\ &= m\left(r, \frac{1}{F}\right) + N\left(r, \frac{(F \cdot g_1)'}{F \cdot g_1}\right) - \bar{N}\left(r, \frac{1}{P}\right) + k_{11} \\ &\leqq \frac{1}{k} m\left(r, \frac{P^{k+1}}{Q}\right) + k_{10} m\left(r, \frac{f'}{f}\right) + k_{10} \log\left(r \cdot T\left(r, \frac{f'}{f}\right)\right) \\ &\quad + N\left(r, \frac{f'}{f}\right) - \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + k_{11},\ r \notin E,\ k_{11} \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{15}$$

Mit

$$h = \frac{g}{P} \cdot \frac{\left(\frac{G}{P}\right)'}{\frac{G}{P}} = F \cdot \frac{(F \cdot g_1)'}{F \cdot g_1}$$

und

$$T(r,h) \leqq T(r,F) + T\left(r, \frac{f'}{f}\right) \tag{16}$$

folgt

$$\begin{aligned}\bar{N}(r,f) \leqq{} & k_{12}\log r + k_{13}\overset{+}{\log} m\left(r, \frac{P^{k+1}}{Q}\right) + k_{14}\overset{+}{\log} T\left(r, \frac{f'}{f}\right) \\ & + k_{15}\left\{\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right)\right\}, r \notin E, k_{12}, k_{13}, k_{14}, k_{15} \in \mathbb{R}.\end{aligned} \tag{17}$$

Beweis des Satzes 2. Nach Voraussetzung besitzen f und $f^{(k)}$ die Darstellungen $f = \frac{P}{G}$ und $f^{(k)} = \frac{Q}{G^*}$ mit P und Q Polynome, G und G^* ganze Funktionen, wobei P und G bzw. Q und G^* keine gemeinsamen Nullstellen haben. Wir schätzen die Anzahlfunktion der Polstellen von f durch die Ungleichung (17) ab:

$$\begin{aligned}\bar{N}(r,f) \leqq{} & k_{12}\log r + k_{13}\overset{+}{\log}\log r + k_{14}\overset{+}{\log} T\left(r, \frac{f'}{f}\right) \\ & + k_{15}\left\{\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right)\right\} + k_{16}, r \notin E, k_{16} \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Ist $\log r = o\left(T\left(r, \frac{f'}{f}\right)\right)$, $r \notin E$, so folgt mit

$$\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) \leqq k_{17}\log r \quad \text{und} \quad \bar{N}\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right) \leqq k_{18}\log r, k_{17}, k_{18} \in \mathbb{R}$$

aus Satz C die Behauptung.

Andernfalls ist $\frac{f'}{f}$ rational. Wegen (17) hat f nur endlich viele Polstellen und aus Satz B folgt die Behauptung.

Beweis des Satzes 3. Wir bemerken zunächst, daß gilt:

$$\begin{aligned}& \bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right) = o\left(T\left(r, \frac{f'}{f}\right)\right), r \notin E \\ \Leftrightarrow{} & N\left(r, \frac{1}{f}\right) + N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right) = o\left(T\left(r, \frac{f'}{f}\right)\right), r \notin E.\end{aligned}$$

Zum Beweis des Satzes 3 wählen wir in (17) P und Q als Weierstraßprodukte, die die Voraussetzungen des Hilfssatzes 4 erfüllen, dabei kann, wie man leicht sieht, auf $|a_n| \geqq 1$ verzichtet werden. Dann folgt aus (17) und (3)

$$\begin{aligned}\bar{N}(r,f) \leqq{} & k_{19}\log r + k_4\overset{+}{\log} T\left(r, \frac{f'}{f}\right) + k_{15}\left\{\bar{N}\left(r, \frac{1}{f}\right) + \bar{N}\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right)\right\} \\ & + k_{20}N\left(r, \frac{1}{f}\right) + k_{21}N\left(r, \frac{1}{f^{(k)}}\right)\end{aligned}$$

mit $k_{19}, k_{20}, k_{21} \in \mathbb{R}$ und $r \notin E$.

Gilt $\log r = o\left(T\left(r, \frac{f'}{f}\right)\right)$, $r \notin E$, dann erhalten wir mit der Voraussetzung von Satz 3

$$\bar{N}(r,f) = o\left(T\left(r, \frac{f'}{f}\right)\right), r \notin E,$$

also mit Satz C die Behauptung. Andernfalls ist $\frac{f'}{f}$ rational und nach der Voraussetzung von Satz 3 haben f und $f^{(k)}$ keine Nullstellen. Durch Anwendung von Satz A folgt in diesem Fall die Behauptung.

Literatur

1. Cohn, J. H. E.: Two primary factor inequalities. Pac. J. Math. **44**, No. 1 (1973)
2. Frank, G.: Eine Vermutung von Hayman über Nullstellen meromorpher Funktionen. Math. Z. **149**, 29—36 (1976)
3. Frei, M.: Über Lösungen linearer Differentialgleichungen mit ganzen Funktionen als Koeffizienten. Comment. math. Helv. **35**, 201—222 (1961)
4. Hayman, W. K.: Meromorphic functions. Oxford: Clarendon Press 1964
5. Hille, E.: Analytic function theory I, II. Ginn 1962
6. Horn, J., Wittich, H.: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Göschens Lehrbücherei Band 10. Berlin: De Gruyter 1960
7. Ince, E. L.: Ordinary differential equations. New York: Dover 1956
8. Polya-Szegö: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis 2. Bd., 3. Aufl. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1964

Angenommen am 20. April 1976

Math. Ann. 225, 155—159 (1977)

On Unirationality of Supersingular Surfaces

Tetsuji Shioda
Department of Mathematics, University of Tokyo, Hongo, Tokyo, Japan

§ 1.

Let X denote a non-singular projective surface defined over an algebraically closed field of characteristic $p \geqq 0$. Recall that X is called *unirational* if its function field $k(X)$ has a finite extension which is a purely transcendental extension of k, and *supersingular* if the Picard number $\varrho(X)$ of X equals the second Betti number $b_2(X)$. As is well-known, we have

$$X\colon \text{unirational} \Rightarrow \begin{cases} \text{(i)}\;\; X\colon \text{supersingular} \\ \text{(ii)}\; \mathrm{Alb}(X)=0\,. \end{cases} \tag{$*$}$$

The assertion (i) is proved in [5] Corollary 2, while (ii) follows from the fact that any rational map of a rational variety into an abelian variety is constant (see [3] p. 25). As to the converse of (*), it is known to be false in char 0 (cf. § 2 below), but no counterexample has been known in char $p>0$. The main purpose of this note is to show:

There exists a surface X in char $p>0$ *with the following properties:*

$$\left.\begin{array}{l} X\colon \textit{supersingular} \\ p_g=q=0 \end{array}\right\}, \textit{ but non-unirational}\,. \tag{$**$}$$

Here p_g or q denote as usual the geometric genus or the irregularity of X:

$$p_g=\dim H^2(X,\mathcal{O})=\dim H^0(X,\Omega^2),\; q=\dim H^1(X,\mathcal{O})\,.$$

When $p_g=0$, q is also equal to the dimension of the Albanese variety of X. The method of our proof is based on our previous work [5], combined with a result of Serre [4].

§ 2.

In char 0, we know the equivalence:

$$X\colon \text{unirational} \Leftrightarrow X\colon \text{rational (Castelnuovo)}\,, \tag{1}$$

$$X\colon \text{supersingular} \Leftrightarrow p_g=0\,. \tag{2}$$

The latter is proved as follows. By the Lefschetz principle, we may assume $k=\mathbb{C}$. Then, look at the exact sequence

$$H^1(X,\mathcal{O}^\times)\xrightarrow{\ \delta\ }H^2(X,\mathbb{Z})\xrightarrow{\ j^*\ }H^2(X,\mathcal{O}) \tag{3}$$

derived from the exact sequence of sheaves on $X:0\longrightarrow\mathbb{Z}\xrightarrow{\ j\ }\mathcal{O}\longrightarrow\mathcal{O}^\times\longrightarrow 0$. Since the image of j^* generates $H^2(X,\mathcal{O})\simeq\mathbb{C}^{p_g}$ over $\mathbb{R}$ (cf. [6] Lemma 3.3), δ is surjective (i.e. X is supersingular) if and only if $p_g=0$, proving (2). [Incidentally we note that no algebraic proof of (2) is known.]

Therefore the converse of $(*)$ in char 0 amounts to asking whether or not the condition $p_g=q=0$ implies the rationality of X. As is well-known, this is not the case, and the simplest example is the so-called *Godeaux surface*. For the later use, we recall its definition.

Take a primitive 5-th root of unity $\zeta\in k$. Then the cyclic group G of order 5 generated by ζ acts freely on the Fermat surface X_5 of degree 5:

$$x_1^5+x_2^5+x_3^5+x_4^5=0 \tag{4}$$

by the action $\zeta:(x_\nu)\mapsto(\zeta^\nu x_\nu)$. The quotient $X=X_5/G$ is called the Godeaux surface, which is a non-singular algebraic surface of general type (hence non-rational) with numerical characters:

$$p_g=q=0,\quad \varrho=b_2=9\,. \tag{5}$$

§ 3.

Now assume that char $k=p>0$. In this case however there is a big difference between rational and unirational surfaces, and that makes the question more delicate. First we remark the following:

Lemma 1. *If a non-singular projective surface X with $p_g=0$ lifts to* char 0, *then X is supersingular.*

Proof. Let X^* be a non-singular projective surface in char 0 which reduces to X (mod some valuation). Then we have $p_g(X^*)\leqq p_g(X)=0$ by the semi-continuity, and this implies $b_2(X^*)=\varrho(X^*)$ by (2). Further we have

$$\varrho(X^*)\leqq\varrho(X)\leqq b_2(X)=b_2(X^*)\,,$$

which proves the assertion.

Now the above definition of the Godeaux surface makes sense in every char p such that $p\neq 5$. To specify p, we denote it by $X(p)$. Obviously $X(p)$ can also be obtained as the reduction mod p of the Godeaux surface in char 0. We denote by $X_5(p)$ the Fermat surface in char p.

Lemma 2. *$X(p)$ is supersingular, and has $p_g=q=0$.*

Proof. First we have $p_g=0$, because there exists no G-invariant holomorphic 2-form on $X_5(p)$. Then $q=0$ follows from the invariance of the arithmetic genus p_g-q under specialization. Finally Lemma 1 implies that $X(p)$ is supersingular.

q.e.d.

Lemma 3. *$X_5(p)$ is unirational if and only if $p \not\equiv 1 \pmod 5$.*

Proof. The if-part is a special case of [5] Proposition 1. To prove the only if-part, we assume that $Y = X_5(p)$ is unirational. Then Y is also supersingular [by (*) (i)], and we can find a sufficiently large finite subfield $k_0 = \mathbb{F}_q$ of k such that the Néron-Severi group of Y (over k) has a basis consisting of k_0-rational divisors. Therefore the zeta function of Y over k_0 is given by

$$Z(Y/k_0, T) = 1/(1-T)(1-qT)^{b_2}(1-q^2T) \qquad (b_2 = 53). \tag{6}$$

On the other hand, Weil [8] determined the zeta function of the Fermat varieties of degree m by means of Jacobi sums. Moreover the prime ideal decomposition of Jacobi sums in the m-th cyclotomic field $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/m})$ is explicitly given by the so-called Stickelberger relation (see [9] p. 490). In the special case $Y = X_5(p)$, the Jacobi sum $j = j(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5})$ (in the notation of [8]) appears as a reciprocal pole of the zeta function of Y, and it is easy to verify that, if $p \equiv 1 \pmod 5$, then no power of j is equal to a power of p. Hence the zeta function of Y over $\mathbb{F}_q$ (q: a power of p) cannot take the form (6) if $p \equiv 1 \pmod 5$. Therefore $X_5(p)$ cannot be unirational if $p \equiv 1 \pmod 5$. q.e.d.

§ 4.

Now we recall the following result due to Serre [4] Proposition 2. (The terminology "weakly unirational" in [4] corresponds to our "unirational".)

Lemma 4. *Let $f: Y \to X$ be an étale morphism of non-singular irreducible projective varieties. Then Y is unirational if and only if X is so.*

Applying this lemma to the étale covering $X_5(p) \to X(p)$ of the Godeaux surface $X(p)$, we have

$$X(p)\text{: unirational} \Leftrightarrow X_5(p)\text{: unirational}. \tag{7}$$

Summarizing, we have proved the following result:

Proposition 5. *The Godeaux surface $X(p)$ in* char p, $p \equiv 1 \pmod 5$, *satisfies the condition* (**). *For $p \not\equiv 1 \pmod 5$, $X(p)$ is unirational.*

Remark 6. By a similar argument, we can also construct examples of *non-unirational Enriques surfaces* in char $p > 2$. They satisfy (**) too. We can also give examples of *unirational Enriques surfaces*. The detail will appear elsewhere.

Remark 7. It is known ([4, 10]) that the fundamental group $\pi_{1,\mathrm{alg}}(X)$ of a unirational variety is finite. We remark however that its order can be *arbitrarily large*, as is shown by the Godeaux type quotient of Fermat surface of prime degree m in char p with $p^\nu \equiv -1 \pmod m$ for some ν (cf. [10] Exposé XI, Remarque 1.4).

§ 5.

From the above consideration, we are led to the following question:

Question I. Suppose that a surface X is (i) *supersingular,* (ii) $\mathrm{Alb}(X) = 0$ *and* (iii) $\pi_{1,\mathrm{alg}}(X) = 0$ *(i.e., X has no connected étale covering). Is X then unirational?*

As a special case, we consider (cf. [2] Theorem 5):

Question II. Is a supersingular K3 surface unirational?

This was conjectured by Artin [1] p. 552, though his definition of supersingularness is slightly different from ours. If a $K3$ surface X is supersingular in our sense ($\varrho = b_2$), it is also supersingular in Artin's sense, and the converse also holds provided that X is elliptic $K3$ (cf. [1] Theorems (0.1) and (1.7)). Question II has been verified for certain supersingular $K3$ surfaces in char $p=2$ by Artin, and for the Fermat surface X_4 in char $p \equiv -1 \pmod 4$ by the author [5]. We shall add a little more evidence for it:

Proposition 8. *All supersingular Kummer surfaces in* char $p>2$ *are unirational (at least) for* $p \not\equiv 1 \pmod{12}$.

Proof. A Kummer surface $X = Km(A)$ is supersingular if and only if A is isogenous to the product $E \times E$ of a *supersingular* elliptic curve E with itself (cf. [7] Proposition 3). Since $Km(A)$ is dominated by $Km(E \times E)$, it is sufficient to prove the assertion for $A = E \times E$ for some such an E. Assume $p \not\equiv 1 \pmod{12}$. Then we have either (a) $p \equiv -1 \pmod 4$ or (b) $p \equiv -1 \pmod 3$.

In case (a), we can choose as E the following elliptic curve

$$\eta^2 = \xi^4 + 1 .$$

With respect to a suitable origin, the inversion of E is expressed as $(\xi, \eta) \to (\xi, -\eta)$. Denoting by (ξ_1, η_1) and (ξ_2, η_2) the coordinates of the first and second factor of $A = E \times E$, we have

$$\begin{aligned} k(Km(A)) &= \text{the fixed field of } k(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \text{ under} \\ &\qquad (\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \to (\xi_1, -\eta_1, \xi_2, -\eta_2) \\ &= k(\xi_1, \xi_2, \zeta) , \end{aligned}$$

where $\zeta = \sqrt{-1}\, \eta_1/\eta_2$ satisfies the relation

$$-\zeta^2 = (\xi_1^4 + 1)/(\xi_2^4 + 1) .$$

On the other hand, writing the equation of the Fermat surface X_4 inhomogeneously as

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + 1 = 0 ,$$

we see that

$$\xi_1 = x_1, \quad \xi_2 = x_2/x_3 , \quad \zeta = x_3^2$$

defines a dominant rational map of X_4 to $Km(A)$. Since X_4 is unirational if $p \equiv -1 \pmod 4$ ([5] Proposition 1), we conclude that $Km(A)$ is also unirational.

In case (b), the proof is similar. We can take as E the elliptic curve

$$\eta^2 = \xi^3 + 1 ,$$

and then find a dominant rational map of the Fermat surface X_6 of degree 6 to $Km(E \times E)$. Applying [5] Proposition 1 once more, we complete the proof.

References

1. Artin, M.: Supersingular K 3 surfaces. Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. **7**, 543—568 (1974)
2. Bombieri, E., Mumford, D.: Enriques' classification of surfaces in char. p, II. to appear
3. Lang, S.: Abelian varieties. New York: Interscience 1959
4. Serre, J.-P.: On the fundamental group of a unirational variety. J. London Math. Soc. **34**, 481—484 (1959)
5. Shioda, T.: An example of unirational surfaces in characteristic p. Math. Ann. **211**, 233—236 (1974)
6. Shioda, T.: On elliptic modular surfaces. J. Math. Soc. Japan **24**, 20—59 (1972)
7. Shioda, T.: Algebraic cycles on certain K 3 surfaces in characteristic p. Proc. Int. Conf. on Manifolds (Tokyo, 1973) 357—364 (1975)
8. Weil, A.: Number of solutions of equations in finite fields. Bull. Amer. Math. Soc. **55**, 497—508 (1949)
9. Weil, A.: Jacobi sums as „Grössencharaktere". Trans. Amer. Math. Soc. **73**, 487—495 (1952)
10. Grothendieck, A.: Revètements étales et groupe fondamental (SGA 1). Lecture Notes No. 224. Berlin, Heidelberg New York: Springer 1971

Received April 28, 1976

Math. Ann. 225, 161—171 (1977)

Über Derivationen in isolierten Singularitäten auf vollständigen Durchschnitten

Günter Scheja und Hartmut Wiebe

Institut für Mathematik der Universität, Universitätsstr. 150, D-4630 Bochum, Bundesrepublik Deutschland

Einleitung

Seien k ein bewerteter Körper der Charakteristik Null und A eine analytische k-Algebra, die sich aus einem konvergenten Potenzreihenring über k durch Restklassenbildung nach einer Primfolge ergibt, also ein vollständiger Durchschnitt. Wir machen ferner die Voraussetzung, daß A reduziert ist und eine isolierte Singularität beschreibt. Das maximale Ideal von A sei mit $\mathfrak{m}_A$ bezeichnet.

Wir untersuchen die Lie-Algebra $\mathrm{Der}_k A$ der k-Derivationen von A und ihre kanonischen endlichdimensionalen Bilder $\mathfrak{g}_\nu(A)$ in $\mathrm{Der}_k(A/\mathfrak{m}_A^\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}$. Insbesondere wird gezeigt, daß die Lie-Algebren $\mathfrak{g}_\nu(A)$ stets auflösbar sind, wenn für die Multiplizität $e(A)$ von A gilt: $e(A) \geqq 3$. Dabei wird ein genauer Überblick über die Eigenwerte der Derivationen gegeben, vgl. (3.2), (3.3) und (3.4).

Die Hauptanwendung ist die folgende Aussage: Ist k algebraisch abgeschlossen und ist eine der Lie-Algebren $\mathfrak{g}_\nu(A)$ nicht nilpotent, so besitzt A eine positive Graduierung, d.h. in geeigneten Koordinaten $Y_1, \ldots, Y_n$ ist A Restklassenring nach einem Ideal, das von Polynomen erzeugt wird, die homogen sind bezüglich positiver ganzzahliger Gewichte m_i der Y_i, die im übrigen bei geeigneter Normierung eindeutig bestimmt sind.

Wir setzen mit dieser Arbeit Untersuchungen von Reiffen [4], [5], Saito [6] sowie aus [9] fort. Das wichtigste Hilfsmittel ist die in §2 nach dem Muster von [6], §1 bzw. [9], §3 durchgeführte Betrachtung der Monome der A definierenden Potenzreihen.

1. Vorbereitungen

Sei k ein (trivial oder nicht trivial) bewerteter Körper, von dem wir in dieser ganzen Arbeit $\mathrm{char}\, k = 0$ voraussetzen. Unter einer (lokalen) analytischen k-Algebra verstehen wir stets eine k-Algebra A, die Restklassenring (!) eines konvergenten Potenzreihenringes $k\langle\langle X_1, \ldots, X_n \rangle\rangle$ in den Unbestimmten $X_1, \ldots, X_n$ über k ist; das maximale Ideal von A wird mit $\mathfrak{m}_A$ bezeichnet. Wir schreiben in $k\langle\langle X_1, \ldots, X_n \rangle\rangle$ kurz $\partial_i := \partial/\partial X_i$ bei $i = 1, \ldots, n$.

Sei A eine analytische k-Algebra. Mit $\operatorname{Der}_k A$ bezeichnen wir die Lie-Algebra über k der k-Derivationen von A in sich. $\operatorname{Der}'_k A$ sei die Unteralgebra von $\operatorname{Der}_k A$ derjenigen Derivationen, die $\mathfrak{m}_A$ invariant lassen. Diese Derivationen lassen dann auch die Potenzen $\mathfrak{m}_A^\nu$ invariant. Folglich gibt es einen Homomorphismus $\operatorname{Der}'_k A \to \operatorname{Der}'_k(A/\mathfrak{m}_A^\nu)$, dessen Bild wir mit $\mathfrak{g}_\nu(A)$ bezeichnen.

(1.1) Bemerkung. *Beschreibt die analytische k-Algebra A eine isolierte Singularität, so ist* $\operatorname{Der}_k A = \operatorname{Der}'_k A$.

Beweis. Es gibt eine Darstellung $A = P/\mathfrak{a}$ mit $P := k\langle\langle X_1, \ldots, X_n \rangle\rangle$ und $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}_P^2$. Das von allen $f \in \mathfrak{a}$ und den zugehörigen $\partial_1 f, \ldots, \partial_n f$ erzeugte Ideal werde mit $\mathfrak{y}$ bezeichnet. Es ist $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}_P$. Nach Voraussetzung über A ist $\mathfrak{p}$ primär zu $\mathfrak{m}_P$. Jedes Element aus $\operatorname{Der}_k A$ wird nach [9], (2.1) von einem $\delta \in \operatorname{Der}_k P$ mit $\delta(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{a}$ induziert. Es genügt $\delta \in \operatorname{Der}'_k P$ zu zeigen. Dies folgt wegen [9], (2.5) aus $\delta(\mathfrak{p}) \subseteq \mathfrak{p}$, was sich wegen $\eta(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{p}$ für alle $\eta \in \operatorname{Der}_k P$ und $\delta(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{a}$ aus $\delta(\partial_i f) = [\delta, \partial_i](f) + \partial_i(\delta f)$ ergibt.

(1.2) Lemma. *Seien A eine analytische k-Algebra und K ein (bewerteter) Erweiterungskörper von k. Für jede natürliche Zahl ν sind dann die kanonischen Homomorphismen*

$$K \hat{\otimes}_k \operatorname{Der}'_k A \to \operatorname{Der}'_K(K \hat{\otimes}_k A), \qquad K \otimes_k \mathfrak{g}_\nu(A) \to \mathfrak{g}_\nu(K \hat{\otimes}_k A)$$

Isomorphien von Lie-Algebren über K.

Beweis. Der (universell endliche) Differentialmodul von A über k sei mit $D_k(A)$ bezeichnet. Dann ist $\operatorname{Der}'_k A = \operatorname{Hom}_A(D_k(A), \mathfrak{m}_A)$ ein endlicher A-Modul. Da $K \hat{\otimes}_k A$ flach über A ist, ist der kanonische Homomorphismus von $K \hat{\otimes}_k \operatorname{Der}'_k A$ in $\operatorname{Der}'_K(K \hat{\otimes}_k A)$ ein Isomorphismus von Lie-Algebren über K, der den gesuchten Isomorphismus der $\mathfrak{g}_\nu$ induziert. –

Aussagen über die Lie-Algebren $\operatorname{Der}'_k(A/\mathfrak{m}_A^\nu) = \operatorname{Der}_k(A/\mathfrak{m}_A^\nu)$ lassen sich in vielen Fällen auf die Unteralgebren $\mathfrak{g}_\nu(A)$ übertragen. Wir beschränken uns daher zunächst auf die Untersuchung von Algebren des Typs $A/\mathfrak{m}_A^\nu$.

(1.3) Lemma. *Für jede analytische k-Algebra A und jede natürliche Zahl ν gilt: Die Lie-Algebren* $\mathfrak{g}_\nu(A)$ *und* $\mathfrak{g}_\nu(\hat{A})$ *(zur Komplettierung* $\hat{A}$ *von A) sind kanonisch isomorph.*

Beweis. Jede k-Derivation δ von A ist eine $\mathfrak{m}_A$-adisch stetige Funktion und läßt sich deswegen zu einer Funktion $\hat{\delta}$ auf $\hat{A}$ fortsetzen, die eine k-Derivation von $\hat{A}$ ist. Ist $\delta \mathfrak{m}_A \subseteq \mathfrak{m}_A$, so ist auch $\hat{\delta} \mathfrak{m}_{\hat{A}} \subseteq \mathfrak{m}_{\hat{A}}$. Mit der so gewonnenen Abbildung $\delta \mapsto \hat{\delta}$ haben wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Der}'_k A & \to & \operatorname{Der}_k(A/\mathfrak{m}_A^\nu) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Der}'_k \hat{A} & \to & \operatorname{Der}_k(\hat{A}/\mathfrak{m}_{\hat{A}}^\nu) \end{array}$$

mit den kanonischen horizontalen Homomorphismen und dem vertikalen Isomorphismus φ rechts, der von der kanonischen Isomorphie $A/\mathfrak{m}_A^\nu = \hat{A}/\mathfrak{m}_{\hat{A}}^\nu$ herrührt. Es genügt nun zu zeigen, daß $\mathfrak{g}_\nu(A)$ durch φ auf $\mathfrak{g}_\nu(\hat{A})$ abgebildet wird.

Sei dazu $\tilde{\eta} \in \operatorname{Der}'_k \hat{A}$ vorgegeben. Sei $D_k(A)$ der (universell endliche) Differentialmodul von A über k. Seine Komplettierung ist nach [8], (1.6) nichts anderes als $D_k(\hat{A})$. Komplettieren ist mit dem Dualisieren verträglich. Sind also $\delta_1, \ldots, \delta_r$

Erzeugende des A-Moduls $\mathrm{Der}_k(A) = \mathrm{Hom}_A(D_k(A), A)$, so sind $\hat{\delta}_1, \ldots, \hat{\delta}_r$ Erzeugende des $\hat{A}$-Moduls $\mathrm{Der}_k(\hat{A})$. Es gibt somit eine Darstellung $\tilde{\eta} = \tilde{g}_1 \hat{\delta}_1 + \ldots + \tilde{g}_r \hat{\delta}_r$ mit $\tilde{g}_i \in \hat{A}$. Es gibt $g_i \in A$ mit $g_i - \tilde{g}_i \in \mathfrak{m}_{\hat{A}}^{\nu}$. Dann ist $\eta := g_1 \delta_1 + \ldots + g_r \delta_r \in \mathrm{Der}_k A$ mit $(\hat{\eta} - \tilde{\eta})(\hat{A}) \subseteq \mathfrak{m}_{\hat{A}}^{\nu}$. Nun ist $\eta \in \mathrm{Der}'_k A$, und die von η auf $A/\mathfrak{m}_A^{\nu}$ induzierte Derivation hat als φ-Bild gerade die von $\tilde{\eta}$ auf $\hat{A}/\mathfrak{m}_{\hat{A}}^{\nu}$ induzierte Derivation.

(1.4) Lemma. *Für jede analytische k-Algebra A und jede natürliche Zahl ν gilt: Sei δ' eine k-Derivation aus* $\mathfrak{g}_\nu(A)$ *und* $\delta' = \alpha' + \beta'$ *die kanonische Spektralzerlegung von δ' in einen halbeinfachen Operator α' und einen nilpotenten Operator β' auf* $A/\mathfrak{m}_A^{\nu}$. *Dann sind auch α' und β' Elemente von* $\mathfrak{g}_\nu(A)$.

Beweis. Nach (1.3) können wir annehmen, daß A komplett ist. δ' wird von $\delta \in \mathrm{Der}'_k A$ induziert. Die Behauptung folgt nun direkt aus Lemma (1.5).

(1.5) Lemma. *Sei A eine komplette analytische k-Algebra und* $\delta \in \mathrm{Der}'_k A$. *Dann gibt es* $\alpha, \beta \in \mathrm{Der}'_k A$ *derart, daß* $\delta = \alpha + \beta$, $\alpha\beta = \beta\alpha$ *und daß modulo jeder Potenz von* $\mathfrak{m}_A$ *die von α (bzw. β) induzierte Derivation halbeinfach (bzw. nilpotent) ist.*

Beweis. Sei $P := k[\![X_1, \ldots, X_n]\!]$, $\mathfrak{a}$ ein Ideal in P und $A := P/\mathfrak{a}$. Wir behandeln zunächst den Fall $A = P$.

Nach (1.3) und (2.1) aus [9] gibt es α_ν, $\beta_\nu \in \mathrm{Der}'_k P$ derart, daß α_ν der halbeinfache, β_ν der nilpotente Bestandteil von δ modulo $\mathfrak{m}_P^{\nu}$ ist. Wegen der Eindeutigkeit dieser Spektralzerlegung konvergieren α_ν und β_ν in P bezüglich der $\mathfrak{m}_P$-adischen Topologie gegen innere Abbildungen α, β von P. Daß diese die gewünschten Eigenschaften besitzen, zeigt eine triviale Limesbetrachtung.

Im allgemeinen Fall gibt es bei vorgegebenen $\delta \in \mathrm{Der}'_k A$ nach [9], (2.1) ein $\delta_P \in \mathrm{Der}'_k P$, welches δ induziert. Sei $\delta_P = \alpha_P + \beta_P$ die kanonische Spektralzerlegung, deren Existenz wir gerade bewiesen haben. Es genügt zu zeigen, daß α_P und β_P Derivationen von A induzieren, also $\mathfrak{a}$ invariant lassen. Modulo $\mathfrak{m}_P^{\nu}$ ist α_P ein Polynom in δ_P und läßt deswegen ebenfalls $(\mathfrak{a} + \mathfrak{m}_P^{\nu})/\mathfrak{m}_P^{\nu}$, also auch $\mathfrak{a} + \mathfrak{m}_P^{\nu}$ invariant. Nach dem Krullschen Durchschnittssatz ist $\mathfrak{a}$ endlich invariant unter α_P und damit auch unter $\beta_P = \delta_P - \alpha_P$.

(1.6) Lemma. *Eine analytische k-Algebra A besitzt genau dann eine positive Graduierung im Sinne von* [9], (§3, S. 171), *wenn dies für ihre Komplettierung* $\hat{A}$ *gilt.*

Beweis. Mit A ist auch $\hat{A}$ trivialerweise positiv graduiert. Sei umgekehrt $\hat{A}$ positiv graduiert, und sei $A = P/\mathfrak{a}$ mit $P := k\langle\!\langle X_1, \ldots, X_n \rangle\!\rangle$. Nach Voraussetzung über $\hat{A} = \hat{P}/\hat{\mathfrak{a}}$ gibt es ein Erzeugendensystem $g_1, \ldots, g_t$ von $\hat{\mathfrak{a}}$ aus homogenen Polynomen g_j in neuen Unbestimmten $Y_1, \ldots, Y_n$ von $\hat{P}$. Mit B bezeichnen wir die positiv graduierte analytische k-Algebra $P'/\mathfrak{a}'$ mit $P' := k\langle\!\langle Y_1, \ldots, Y_n \rangle\!\rangle$ und $\mathfrak{a}' := P' g_1 + \ldots + P' g_t$. Dann gibt es einen k-Algebra-Homomorphismus von B in $\hat{A}$, dessen Komplettierung eine Isomorphie von $\hat{B}$ auf $\hat{A}$ ist. Nach Artins Satz (1.6) aus [1] sind dann B und A bereits isomorph.

(1.7) Lemma. *Sei* $f_1, \ldots, f_t$ *eine Primfolge in* $P := k\langle\!\langle X_1, \ldots, X_n \rangle\!\rangle$ *derart, daß* $\mathfrak{a} := P f_1 + \ldots + P f_t$ *in* $\mathfrak{m}_P^2$ *enthalten ist und eine reduzierte isolierte Singularität beschreibt. Dann gibt es eine natürliche Zahl* $v = v(\mathfrak{a})$ *derart, daß für alle* $\nu \geqq v$ *gilt: Sind* $g_1, \ldots, g_t$ *Elemente aus P, die* $(\mathfrak{a} + \mathfrak{m}_P^{\nu})/\mathfrak{m}_P^{\nu}$ *erzeugen, so sind* $g_1, \ldots, g_t$ *ebenfalls eine Primfolge in P und* $\mathfrak{b} := P g_1 + \ldots + P g_t$ *beschreibt auch eine reduzierte isolierte Singularität.*

Beweis. Sei $\mathfrak{p}$ das von den t-Minoren der $(t \times n)$-Funktionalmatrix $(\partial_i f_j)$ erzeugte Ideal von P. Nach Voraussetzung über $\mathfrak{a}$ ist $\mathfrak{a}+\mathfrak{p}$ ein $\mathfrak{m}_P$-primäres Ideal. Wir wählen v so groß, daß $\mathfrak{m}_P^{v-2}$ in $\mathfrak{a}+\mathfrak{p}$ enthalten ist und daß $\mathfrak{a}+\mathfrak{m}_P^{v-2}/\mathfrak{m}_P^{v-2}$ nicht von weniger als t Elementen erzeugt wird. (Ist $f_1,\ldots,f_t,\ldots,f_n$ eine maximale Primfolge in $\mathfrak{m}_P$, so braucht man nur $\mathfrak{m}_P^{v-2} \subseteqq \mathfrak{m}_P(Pf_1+\ldots+Pf_n)$ zu wählen.)

Sei nun $\nu \geqq v$, und seien $g_1,\ldots,g_t$ Elemente aus P, die $\mathfrak{a}+\mathfrak{m}_P^\nu/\mathfrak{m}_P^\nu$ erzeugen. Dann gibt es Darstellungen $g_j=\sum_i a_{ij} f_i + b_j$ mit $a_{ij} \in P$, $b_j \in \mathfrak{m}_P^\nu$ für alle i, j. Nach der Wahl von v ist (a_{ij}) invertierbar. Daher wird $\mathfrak{a}$ von den $g_j - b_j$ erzeugt. Wir dürfen also annehmen, daß (a_{ij}) die Einheitsmatrix ist, daß also $g_j = f_j + b_j$ ist. Es ist nun $\partial_i g_j = \partial_i f_j + \partial_i b_j$. Bezeichnet $\mathfrak{q}$ das Ideal, das von den t-Minoren der Funktionalmatrix $(\partial_i g_j)$ erzeugt wird, so gilt offenbar $\mathfrak{b}+\mathfrak{q} \subseteqq \mathfrak{a}+\mathfrak{p}$ wegen $g_j \in \mathfrak{a}+\mathfrak{m}_P^\nu \subseteqq \mathfrak{a}+\mathfrak{p}$ und $\partial_i b_j \in \mathfrak{m}_P^{\nu-1} \subseteqq \mathfrak{a}+\mathfrak{p}$. Da aber sogar $\mathfrak{m}_P^{\nu-1} \subseteqq \mathfrak{m}_P(\mathfrak{a}+\mathfrak{p})$ ist, erhält man umgekehrt aus $\partial_i f_j = \partial_i g_j - \partial_i b_j$, daß $\mathfrak{p} \subseteqq \mathfrak{q}+\mathfrak{m}_P(\mathfrak{a}+\mathfrak{p})$ ist. Es ist weiter $b_j \in \mathfrak{m}_P^\nu \subseteqq \mathfrak{m}_P(\mathfrak{a}+\mathfrak{p})$ und daher insgesamt $\mathfrak{b}+\mathfrak{q} \subseteqq \mathfrak{a}+\mathfrak{p} \subseteqq \mathfrak{b}+\mathfrak{q}+\mathfrak{m}_P(\mathfrak{a}+\mathfrak{p})$, woraus sich $\mathfrak{a}+\mathfrak{p}=\mathfrak{b}+\mathfrak{q}$ ergibt. Also ist $\mathfrak{b}+\mathfrak{q}$ auch $\mathfrak{m}_P$-primär. Nach dem Jacobikriterium (vgl. [8], (6.4)) besitzt $\mathfrak{b}$ die verlangten Eigenschaften.

2. Derivationen mit ganzzahligen Eigenwerten

Auf $P := k\langle\langle X_1,\ldots,X_n\rangle\rangle$ sei eine k-Derivation $\delta \neq 0$ gegeben mit $\delta(X_i)=m_i X_i$ mit $m_i \in \mathbb{Z}$. Ferner sei $g_1,\ldots,g_t$ eine Primfolge in $\mathfrak{m}_P^2$ aus δ-Eigenfunktionen, die eine reduzierte isolierte Singularität beschreibt. Hieraus resultieren Bedingungen an die m_i, die wir im folgenden untersuchen.

Variablenvertauschung und evtl. Multiplikation mit -1 gestatten es anzunehmen:

$$m_1 \geqq \ldots \geqq m_n, \qquad m_1 > 0.$$

Die δ-Eigenwerte der g_j sind offenbar ebenfalls ganze Zahlen: $\delta(g_j)=p_j g_j$, wobei wir für die $p_j \in \mathbb{Z}$ annehmen können, daß $p_1 \geqq \ldots \geqq p_t$ ist. Bei $p_1 < 0$ ist $m_n < 0$, und wir ersetzen δ durch $-\delta$. Wir dürfen also von nun an auch $p_1 \geqq 0$ annehmen.

Das von den g_j und den t-Minoren der Funktionalmatrix $(\partial_i g_j)$ erzeugte $\mathfrak{m}_P$-primäre Ideal enthält eine reine Potenz von X_i für jedes $i=1,\ldots,n$. Das bedeutet, daß für jedes i wenigstens eine der beiden folgenden Aussagen gilt.

$\mathfrak{A}(i)$: *Es gibt ein (von i abhängendes) j und ein $s_j(i) \geqq 2$ derart, daß das Monom $X_i^{s_j(i)}$ (mit dem Koeffizienten $\neq 0$ aus k) in g_j vorkommt. Insbesondere ist*

$$s_j(i) m_i = p_j$$

für ein (von i abhängendes) j.

$\mathfrak{B}(i)$: *Für jedes $j=1,\ldots,t$ gibt es ein $v_j(i)$ und ein $r_j(i) \geqq 1$ derart, daß das Monom $X_i^{r_j(i)} X_{v_j(i)}$ in g_j vorkommt. (Die $v_j(i)$ können paarweise verschieden angenommen werden.) Insbesondere ist*

$$r_j(i) m_i + m_{v_j(i)} = p_j$$

für alle $j=1,\ldots,t$.

Dabei entsteht $\mathfrak{B}(i)$ dadurch, daß eine reine Potenz von X_i in einem t-Minor von $(\partial_i g_j)$ vorkommt.

(2.1) Hilfssatz. *Der Fall $p_1>0$, $p_t \leqq 0$ kann nicht auftreten.*

Beweis. Mit I bezeichnen wir die Menge der i mit $1 \leqq i \leqq n$, für die $\mathfrak{B}(i)$ gilt. Wir wählen $u \in I$ derart, daß $|m_u|$ maximal ist. Sei zunächst $m_u \leqq 0$. Wegen $u \in I$ gilt:

$$m_{v_1(u)} = p_1 - r_1(u) m_u . \tag{1}$$

Offenbar ist $|m_{v_1(u)}| > |m_u|$, also $v_1(u) \notin I$, und nach $\mathfrak{A}(v_1(u))$ gibt es ein σ mit:

$$s_\sigma(v_1(u)) m_{v_1(u)} = p_\sigma . \tag{2}$$

Durch Einsetzen von (1) in (2) erhält man den Widerspruch

$$0 < s_\sigma(v_1(u)) p_1 - p_\sigma = s_\sigma(v_1(u)) r_1(u) m_u \leqq 0 .$$

Daher ist $m_u > 0$. Wegen $u \in I$ gilt:

$$m_{v_t(u)} = p_t - r_t(u) m_u . \tag{3}$$

Also ist $m_{v_t(u)} \leqq 0$ und $|m_{v_t(u)}| \geqq |m_u|$. Nach dem bereits Bewiesenen ist $v_t(u) \notin I$, und es gibt nach $\mathfrak{A}(v_t(u))$ ein τ mit:

$$s_\tau(v_t(u)) m_{v_t(u)} = p_\tau . \tag{4}$$

Durch Einsetzen von (3) in (4) erhält man den Widerspruch

$$0 \geqq s_\tau(v_t(u)) p_t - p_\tau = s_\tau(v_t(u)) r_t(u) m_u > 0 .$$

Also ist I leer. Daher gibt es λ und μ mit:

$$s_\lambda(1) m_1 = p_\lambda , \qquad s_\mu(n) m_n = p_\mu . \tag{5}$$

Sei $\varkappa$ definiert durch $m_\varkappa > 0$, $m_{\varkappa+1} \leqq 0$ und ϱ durch $p_\varrho \geqq 0$, $p_{\varrho+1} < 0$. Sei $\mathfrak{a}_1 := \sum_{i \leqq \varkappa} P X_i$ und $\mathfrak{a}_2 := \sum_{i > \varkappa} P X_i$. Wegen $p_1 \geqq p_\lambda$ und (5) kommen in jedem Monom von g_1 mindestens 2 der Unbestimmten X_i, $i \leqq \varkappa$, vor. Daher liegen alle partiellen Ableitungen von g_1 und damit das von den t-Minoren von $(\partial_i g_j)$ erzeugte Ideal $\mathfrak{q}$ in $\mathfrak{a}_1$. Trivialerweise ist $g_1, \ldots, g_\varrho \in \mathfrak{a}_1$. Insgesamt umfaßt $\sum_{j > \varrho} P g_j + \mathfrak{a}_1$ das $\mathfrak{m}_P$-primäre Ideal $\mathfrak{q} + \mathfrak{a}$, wobei $\mathfrak{a} := \sum_{j=1}^t P g_j$ ist. Nach dem Krullschen Hauptidealsatz ist dann $(t - \varrho) + \varkappa \geqq n$.

Ist $p_t < 0$, so ist trivialerweise $m_n < 0$. Wegen (5) und $p_t \leqq p_\mu$ kommen in jedem Monom von g_t mindestens 2 der Unbestimmten X_i, $i > \varkappa$, vor. Dasselbe gilt wegen $g_t \in \mathfrak{m}_P^2$ bei $p_t = 0$, d.h. $m_n = 0$, da in diesem Falle in den Monomen von g_t nur X_i mit $m_i = 0$ vorkommen. Wieder umfaßt $\sum_{j \leqq \varrho} P g_j + \mathfrak{a}_2$ das $\mathfrak{m}_P$-primäre Ideal $\mathfrak{q} + \mathfrak{a}$, und man hat $\varrho + (n - \varkappa) \geqq n$, also $\varrho \geqq \varkappa$. Insgesamt ist $t \geqq n$, was der Reduziertheit von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}_P^2$ widerspricht. –

Nach (2.1) ist insbesondere der Fall $p_1 > 0$ und $p_t < 0$ nicht möglich. Indem wir notfalls von δ zu $-\delta$ übergehen, können wir von jetzt an annehmen:

$$p_1 \geqq \cdots \geqq p_t \geqq 0 .$$

(2.2) Hilfssatz. *Der Fall $p_1 > p_t$, $m_n \leqq 0$ kann nicht auftreten.*

Beweis. Bei $p_t = 0$ ist $p_1 = \ldots = p_t = 0$ nach (2.1) im Widerspruch zu $p_1 > p_t$. Also ist $p_t > 0$, und $\mathfrak{A}(n)$ kann nicht zutreffen. Daher gilt $\mathfrak{B}(n)$ und man hat:

$$r_1(n) m_n + m_{v_1(n)} = p_1 . \tag{6}$$

Betrachten wir zunächst den Fall, daß $\mathfrak{A}(v_1(n))$ gilt. Dann gibt es ein τ mit

$$s_\tau(v_1(n))m_{v_1(n)} = p_\tau \,. \tag{7}$$

Durch Einsetzen von (6) in (7) erhält man den Widerspruch

$$0 < s_\tau(v_1(n))p_1 - p_\tau = s_\tau(v_1(n))r_1(n)m_n \leqq 0 \,.$$

Also gilt $\mathfrak{B}(v_1(n))$ und man hat

$$r_t(v_1(n))m_{v_1(n)} + m_{v_t(v_1(n))} = p_t \,. \tag{8}$$

Durch Einsetzen von (6) in (8) erhält man nun den Widerspruch

$$0 < r_t(v_1(n))p_1 - p_t = r_t(v_1(n))r_1(n)m_n - m_{v_t(v_1(n))} \leqq 0 \,.$$

(2.3) Hilfssatz. *Im Fall* $m_n \leqq 0$ *ist* $p = m_1 + m_n$ *für* $p := p_1 = \ldots = p_t$.

Beweis. Trifft $\mathfrak{A}(1)$ zu, so gibt es ein τ mit $p = s_\tau(1)m_1 \geqq 2m_1$. Trifft $\mathfrak{B}(1)$ zu, so ist $p = r_1(1)m_1 + m_{v_1(1)}$. In jedem Fall ist $p \geqq m_1 + m_n$.

Trifft $\mathfrak{A}(n)$ zu, so gibt es ein τ mit $p = s_\tau(n)m_n \leqq 2m_n$. Trifft $\mathfrak{B}(n)$ zu, so ist $p = r_1(n)m_n + m_{v_1(n)}$. In jedem Fall ist $p \leqq m_1 + m_n$.

(2.4) Hilfssatz. *Der Fall* $t \geqq 2$, $m_n \leqq 0$ *kann nicht auftreten. Der Fall* $t = 1$, $m_n \leqq 0$ *und* $g_1 \in \mathfrak{m}_P^3$ *kann ebenfalls nicht auftreten.*

Beweis. Die Zahlen r und s seien definiert durch

$$m_1 = \ldots = m_r > m_{r+1}, \qquad m_{n-s} > m_{n-s+1} = \ldots = m_n \,.$$

Für $i \leqq r$ trifft dann $\mathfrak{A}(i)$ nicht zu, da sonst $p = s_\tau(i)m_i \geqq 2m_i > m_1 + m_n$ im Widerspruch zu (2.3) wäre. Also gilt gemäß $\mathfrak{B}(i)$ dann $p = r_j(i)m_i + m_{v_j(i)}$ für alle j. Nach (2.3) folgt $r_j(i) = 1$.

Wir können nun die Funktionen g_j in der folgenden Form schreiben:

$$g_j = X_1 h_{j1} + \ldots + X_r h_{jr} + h_j$$

mit δ-Eigenfunktionen h_{ji} und h_j, wobei $X_1, \ldots, X_r$ nicht in h_j auftreten und die h_{ji} wegen $r_j(i) = 1$ notwendig Koordinatenfunktionen sind. Damit ist der Fall $t = 1$ bereits erledigt. Außerdem sind etwa $h_{11}, \ldots, h_{1r}$ linear unabhängig über $k \bmod \mathfrak{m}_P^2$. Andernfalls könnte man z.B. annehmen $h_{11} = \sum_{i=2}^r a_i h_{1i} + h$ mit $a_i \in k$ und $h \in \mathfrak{m}_P^2$. Dann wäre $g_1 = X'_1 h + X'_2 h_{12} + \ldots + X'_r h_{1r} + h_1$ mit neuen Koordinaten X'_i im Eigenraum zum Eigenwert m_1, wobei $X'_1 = X_1$ und $X'_i = X_i + a_i X_1$ für $i = 2, \ldots, r$ ist. Wegen $h \in \mathfrak{m}_P^2$ steht diese Darstellung im Widerspruch zu der oben abgeleiteten Bedingung $r_1(1) = 1$.

Aus der linearen Unabhängigkeit von $h_{11}, \ldots, h_{1r} \bmod \mathfrak{m}_P^2$ ergibt sich $r \leqq s$.

Für $i \geqq n - s + 1$ trifft $\mathfrak{A}(i)$ nicht zu, da sonst $p = s_\tau(i)m_i \leqq 2m_i < m_1 + m_n$ im Widerspruch zu (2.3) wäre. Also gilt gemäß $\mathfrak{B}(i)$ dann $p = r_j(i)m_n + m_{v_j(i)}$ für alle j. Nach (2.3) folgt $m_{v_j(i)} = m_1$. Da die $v_j(n)$ paarweise verschieden sind, folgt $t \leqq r$.

Sei $J := \{i : r < i \leqq n - s\}$. In jedem Monom M von h_j kommen wenigstens zwei Variablen X_i mit $i \in J$ vor. Da $X_1, \ldots, X_r$ nach Konstruktion der h_j nicht in M vorkommen, folgt diese Behauptung aus $\delta(M) = pM$ und (2.3). Insbesondere liegen die partiellen Ableitungen der h_j im Ideal $\mathfrak{p} := \sum_{i=1}^{n-s} PX_i$ und es ist $\sum_{j=1}^t Pg_j \subseteq \mathfrak{p}$.

Sei $\mathfrak{c}$ das von den t-Minoren der Matrix $(h_{ji})_{1 \leqq j \leqq t, 1 \leqq i \leqq r}$ erzeugte Ideal und $\mathfrak{q}$ das von den t-Minoren der Funktionalmatrix $(\partial_i g_j)$ erzeugte Ideal in P. Offenbar ist $\mathfrak{c}+\mathfrak{p}=\mathfrak{q}+\mathfrak{p}$ ein $\mathfrak{m}_P$-primäres Ideal.

Nach Eagon und Northcott [2], §6, Theorem 3 und wegen $r \geqq t$ hat das Determinantenideal $\mathfrak{c}$ der $t \times r$-Matrix (h_{ji}) eine Krull-Kodimension $\leqq r-t+1$. Da $\mathfrak{c}+\mathfrak{p}$ primär zu $\mathfrak{m}_P$ ist, folgt $n \leqq r-t+1+n-s$. Wegen $s \geqq r$ folgt nun $t \leqq 1$.

Wir fassen noch einmal zusammen:

(2.5) Satz. *Die Eigenwerte von δ sind alle positiv, wenn nicht der Fall $t=1$ und $g_1 \notin \mathfrak{m}_P^3$ vorliegt.*

(2.6) Korollar. *Es sei $t \geqq 2$ oder $g_1 \in \mathfrak{m}_P^3$. Zwei k-Derivationen auf P, die $X_1, \ldots, X_n$ und $g_1, \ldots, g_t$ als Eigenfunktionen zu ganzzahligen Eigenwerten haben, unterscheiden sich um einen Faktor aus $\mathbb{Q}$.*

Beweis. Wegen (2.5) genügt es, Derivationen der beschriebenen Art zu betrachten, deren Eigenwerte sämtlich positiv sind. Unter diesen Derivationen wählen wir $\tilde{\delta}$ derart, daß der Eigenwert $\tilde{m}_1$ von $\tilde{\delta}$ zu X_1 minimal ist. Es genügt nun zu zeigen, daß eine beliebige Derivation δ der betrachteten Art ganzzahliges Vielfaches von $\tilde{\delta}$ ist.

Dazu sei m_1 der Eigenwert von δ zu X_1, und es sei $m_1 = q\tilde{m}_1 + r$ mit ganzzahligen q, r und $0 \leqq r < \tilde{m}_1$. Wegen $r \geqq 0$ und (2.5) ist dann $\delta - q\tilde{\delta}$ ebenfalls eine Derivation der betrachteten Art, deren Eigenwerte alle 0 oder alle positiv sind. Ihr Eigenwert zu X_1 ist $r < \tilde{m}_1$. Nach der Wahl von $\tilde{\delta}$ ist dann $r=0$ und somit $\delta - q\tilde{\delta} = 0$.

3. Lie-Algebren von Derivationen

Sei $f_1, \ldots, f_t$ eine Primfolge in $P := k\langle\!\langle X_1, \ldots, X_n \rangle\!\rangle$ derart, daß $\mathfrak{a} := \sum_{j=1}^{t} P f_j$ in $\mathfrak{m}_P^2$ enthalten ist und eine reduzierte Singularität beschreibt; bei $t=1$ setzen wir für den Satz 3.1 zusätzlich $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}_P^3$ voraus. Sei $v = v(\mathfrak{a})$ gemäß (1.7). Für beliebiges $\nu \geqq v$ betrachten wir den Ring $R = R_\nu := P/(\mathfrak{a} + \mathfrak{m}_P^\nu)$, der eine endliche k-Algebra ist.

(3.1) Satz. *Sei δ eine k-Derivation auf R, die auf $\mathfrak{m}_R/\mathfrak{m}_R^2$ einen nicht-nilpotenten trigonalisierbaren k-linearen Operator $\bar{\delta}$ induziert. Dann gibt es ein $a \in k$, $a \neq 0$, derart, daß $a^{-1}\bar{\delta}$ als Eigenwerte nur positive natürliche Zahlen hat.*

Beweis. Nach (1.1) ist $\delta(\mathfrak{m}_R) \subseteq \mathfrak{m}_R$, und $\bar{\delta}$ ist wohldefiniert. δ wird von einer k-Derivation auf P induziert ([9], (2.1)), die wir ebenfalls mit δ bezeichnen. δ induziert $\bar{\delta}$ auf $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 = \mathfrak{m}_R/\mathfrak{m}_R^2$.

Wir definieren nun $B := P/\mathfrak{m}_P^\nu$. Mit δ' bezeichnen wir die von δ auf B induzierte k-Derivation. Sei $\mathfrak{a}' := (\mathfrak{a} + \mathfrak{m}_P^\nu)/\mathfrak{m}_P^\nu$. Dann ist $\delta'(\mathfrak{a}') \subseteq \mathfrak{a}'$. Mit x_i bezeichnen wir die Restklasse von X_i in B. Indem man eine geeignete Monombasis in den x_i von B betrachtet, sieht man, daß nicht nur $\bar{\delta}$ auf $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 = \mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_B^2$, sondern auch δ' auf dem k-Vektorraum B trigonalisierbar und nicht nilpotent ist.

Nach [9], (3.1) sind in der Spektralzerlegung $\delta' = \alpha' + \beta'$ von δ' in B die Bestandteile α' und β' k-Derivationen. Der halbeinfache Operator α' ist hier notwendig ein nichttrivialer Diagonaloperator, der ein Polynom in δ' ist. $\mathfrak{m}_B$ wird dann von α'-Eigenvektoren erzeugt. Wir dürfen o.B.d.A. annehmen, daß dies die x_i sind. Nun bilden die Monome des Grades $<\nu$ in den x_i eine k-Basis aus α'-Eigenvektoren. Nach [9], (2.1) wird α' von einer k-Derivation α auf P mit $\alpha(X_i)=a_i X_i$, $a_i \in k$, induziert.

Wir wenden nun eine Überlegung von Chevalley an, vgl. [9], (3.2). Der Primkörper von k ist der Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen. Seien $b_1,\ldots,b_s$ eine Basis des $\mathbb{Q}$-Vektorraumes $\mathbb{Q}a_1+\ldots+\mathbb{Q}a_n$. Wir können annehmen, daß die Basis b_i so gewählt ist, daß man Darstellungen $a_i=\sum_{\sigma=1}^{s} m_{i\sigma} b_\sigma$ mit Koeffizienten $m_{i\sigma} \in \mathbb{Z}$ hat, die bei festem σ jeweils keinen echten gemeinsamen Teiler in $\mathbb{Z}$ haben und die der Bedingung $m_{1\sigma} \geqq 0$ genügen. Für die k-Derivation α_σ von P mit $\alpha_\sigma(X_i)=m_{i\sigma} X_i$ gilt dann $\alpha=\sum_{\sigma=1}^{s} a_\sigma \alpha_\sigma$. Darüber hinaus gilt nach [9], (3.2), daß jeder Eigenvektor von α in P auch Eigenvektor von α_σ ist.

Da α' (als Polynom in δ') das Ideal $\mathfrak{a}'$ invariant läßt, gibt es eine Basis von $\mathfrak{a}'$ aus α'-Eigenvektoren. Dann gibt es Elemente (sogar Polynome vom Grade $<\nu$) $g_1,\ldots,g_t$ aus P, die α-Eigenvektoren sind und die $\mathfrak{a}'$ erzeugen. Nach (1.7) ist $g_1,\ldots,g_t$ eine Primfolge in P, die eine reduzierte isolierte Singularität beschreibt. Da die g_j als α-Eigenvektoren auch α_σ-Eigenvektoren sind, können wir die Ergebnisse aus §2 anwenden. (2.5) und (2.6) besagen wegen der oben getroffenen Normierung der α_σ, daß alle $m_{i\sigma}>0$ sind und die $m_{i\sigma}$ bei festem i alle übereinstimmen. Mit $a:=\sum_{\sigma=1}^{s} b_\sigma$ und $m_i:=m_{i1}$ für $i=1,\ldots,n$ gilt dann $a_i=am_i$. Es folgt also $a^{-1}\alpha(X_i)=m_i X_i$ für $i=1,\ldots,n$.

Der von α auf $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ induzierte Operator $\bar{\alpha}$ ist der halbeinfache Bestandteil von $\bar{\delta}$. Daher sind die positiven natürlichen Zahlen $m_1,\ldots,m_n$ die Eigenwerte von $a^{-1}\bar{\delta}$, womit (3.1) bewiesen ist.

(3.2) Korollar. *Die Lie-Algebra* $\mathfrak{g}:=\mathrm{Der}_k R$ *ist auflösbar.*

Ist $\mathfrak{g}$ *nicht nilpotent, so gibt es eindeutig bestimmte natürliche Zahlen* $m_1,\ldots,m_n$ *mit folgenden Eigenschaften:*

(1) *Es ist* $m_1 \geqq \ldots \geqq m_n > 0$ *und* $m_1,\ldots,m_n$ *sind teilerfremd.*

(2) *Zu jedem* $\delta \in \mathfrak{g}$ *gibt es im algebraischen Abschluß von* k *ein Element* a *derart, daß* $am_1,\ldots,am_n$ *die Eigenwerte des von* δ *auf* $\mathfrak{m}_R/\mathfrak{m}_R^2$ *induzierten linearen Operators* $\bar{\delta}$ *sind.*

Beweis. Es ist $\mathrm{Der}_k R=\mathrm{Der}'_k R$ nach (1.1). Da R endlich über k ist, spielt die Bewertung von k keine Rolle: R ist komplett, und wir dürfen $P=k[[X_1,\ldots,X_n]]$ annehmen. Wegen (1.2) dürfen wir offenbar annehmen, daß k selbst algebraisch abgeschlossen ist.

Sei $\mathfrak{g}$ nicht auflösbar. Nach [3], IV, §1 enthält $\mathfrak{g}$ dann eine einfache k-Lie-Algebra der Dimension 3. Folglich gibt es eine Derivation aus $\mathfrak{g}$, die positive und negative ganzzahlige Eigenwerte auf $\mathfrak{m}_R/\mathfrak{m}_R^2$ annimmt (vgl. [9], §6). Dies ist ein Widerspruch zu (3.1).

Nach dem Satz von Lie gibt es eine k-Basis von $\mathfrak{m}_R$, in der alle Elemente von $\mathfrak{g}$ simultan durch eine obere Dreiecksmatrix beschrieben werden. Da $\mathfrak{m}_R^2$ ein $\mathfrak{g}$-Modul ist, dürfen wir ferner annehmen, daß diese k-Basis eine Basis von $\mathfrak{m}_R^2$ und die Restklassen der Unbestimmten X_i in R enthält.

Wir betrachten nun zwei beliebige Elemente von $\mathfrak{g}$. Sie haben dieselben Eigenwerte wie ihre halbeinfachen Bestandteile α und $\tilde{\alpha}$, die nach [9], (3.1) ebenfalls zu $\mathfrak{g}$ gehören, also in der betrachteten Basis durch eine Diagonalmatrix beschrieben werden. α und $\tilde{\alpha}$ werden von k-Derivationen auf P induziert, die die Unbestimmten X_i als Eigenvektoren haben; sie werden wieder mit α bzw. $\tilde{\alpha}$ bezeichnet. Auf P sind α und $\tilde{\alpha}$ vertauschbar. Wie im Beweis von (3.1) konstruieren wir nun eine Primfolge $g_1,\ldots,g_t$, die ein Ideal mit den entsprechenden Eigenschaften wie $\mathfrak{a}$ erzeugt und die aus simultanen Eigenvektoren für α und $\tilde{\alpha}$ besteht. Nach (3.1) und (2.6) sind dann α und $\tilde{\alpha}$ über k linear abhängig. Die Aussage über die Eigenwerte von α und damit auch von beliebigen $\delta\in\mathfrak{g}$ folgen dabei ebenfalls mit (3.1). –

Wir betrachten nun die analytische k-Algebra $A:=P/\mathfrak{a}$, wobei $\mathfrak{a}$ wie in (3.1) gewählt ist.

(3.3) Korollar. *Die Aussagen von* (3.2) *gelten analog auch für die Lie-Algebra* $\mathfrak{g}_\nu(A)$.

Beweis. Es ist $A/\mathfrak{m}_A^\nu=R$. Daher ist $\mathfrak{g}_\nu(A)$ eine Unteralgebra der Lie-Algebra $\mathrm{Der}_k R$, und die Behauptung folgt aus (3.2).

Definition. In der Situation von (3.2) bzw. (3.3) nennen wir das n-Tupel $(m_1,\ldots,m_n)$ den *Homogenitätstyp* von R bzw. A, wenn $\mathfrak{g}$ bzw. die $\mathfrak{g}_\nu(A)$ für ein und damit für jedes $\nu\geqq 2$ nicht nilpotent sind. Sind die genannten Lie-Algebren nilpotent, so sprechen wir vom *Homogenitätstyp* 0.

Man beachte dabei, daß der Kern jeder kanonischen Abbildung $\mathfrak{g}_{\nu+\mu}(A)\to\mathfrak{g}_\nu(A)$ nilpotent operiert und daher ein nilpotentes Ideal ist.

Schließlich sei noch bemerkt, daß aus (3.2), (2) direkt folgt:

(3.4) Korollar. *Sei* $\mathfrak{n}\subseteqq\mathfrak{g}$ *das Ideal der nilpotenten Derivationen aus* $\mathfrak{g}$. *Dann ist* $\dim_k\mathfrak{g}/\mathfrak{n}\leqq 1$.

4. Anwendungen und Beispiele

Wir erinnern daran, daß nur analytische Algebren über Grundkörpern der Charakteristik Null betrachtet werden, vgl. die Konventionen in §1.

(4.1) Satz. *Sei A eine analytische k-Algebra, die einen reduzierten vollständigen Durchschnitt mit isolierter Singularität beschreibt. Die Multiplizität von A sei* $\geqq 3$. *Dann gilt:*

(1) *Für jede natürliche Zahl ν ist die Lie-Algebra* $\mathfrak{g}_\nu(A)$ *auflösbar.*

(2) *Gibt es eine k-Derivation $\delta\in\mathrm{Der}_k A$, die auf $\mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2$ trigonalisierbar und nicht nilpotent ist, so gibt es eine positive Graduierung (im Sinne von* [9], §3, S. 171*) auf A; insbesondere ist die de Rham Kohomologie von A über k trivial.*

(3) *Ist k algebraisch abgeschlossen, so ist die Prämisse von* (2) *äquivalent damit, daß eine (und damit jede) der Lie-Algebren $\mathfrak{g}_\nu(A)$, $\nu\geqq 2$, nicht nilpotent ist.*

Beweis. Es gibt eine Darstellung $A=P/\mathfrak{a}$ mit $P:=k\langle\langle X_1,\ldots,X_n\rangle\rangle$ und einem Ideal $\mathfrak{a}$ gemäß den Eingangsvoraussetzungen von §3. Nun ergibt (3.3) sofort (1). Die Aussage (3) ergibt sich unmittelbar mit dem Satz von Engel; die Trigonalisierbarkeit ist durch die algebraische Abgeschlossenheit gesichert.

Zum Beweis von (2) betrachten wir eine Derivation $\delta\in\mathrm{Der}_k A=\mathrm{Der}'_k A$ [vgl. (1.1)], die auf $\mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2$ trigonalisierbar und nicht nilpotent operiert. Nach Multiplikation mit einem Element aus k dürfen wir nach (3.1) annehmen, daß δ auf

$\mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2$ als Eigenwerte teilerfremde natürliche Zahlen $m_1 \geqq \ldots \geqq m_n > 0$ hat. Sei $r := m_1 + 1$. Nach (1.4) gibt es ein $\alpha \in \mathrm{Der}'_k A$ derart, daß α auf $\mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2$ ebenfalls die Eigenwerte $m_1, \ldots, m_n$ hat und auf $A/\mathfrak{m}_A^r$ halbeinfach ist (als halbeinfacher Bestandteil des von δ induzierten Operators). α ist ebenfalls diagonalisierbar auf jedem $\mathfrak{m}_A^s/\mathfrak{m}_A^{s+1}$, das von den Monomen in den Eigenvektoren von α in $\mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2$ erzeugt wird. Also ist α auf $A/\mathfrak{m}_A^r$ trigonalisierbar und als halbeinfacher Operator dann auch diagonalisierbar. Folglich gibt es ein Erzeugendensystem $x_1, \ldots, x_n$ von $\mathfrak{m}_A$ mit $\alpha(x_i) \equiv m_i x_i$ modulo $\mathfrak{m}_A^r$. Nach einem Satz von Reiffen (Satz 5 aus [5], der nach einer Mitteilung von H. J. Reiffen auch bei nicht-archimedischer Bewertung des Grundkörpers gilt), gibt es dann ein Erzeugendensystem $y_1, \ldots, y_n$ von $\mathfrak{m}_A$ mit $\alpha(y_i) = m_i x_i$ für $1 \leqq i \leqq n$. Die Aussage über die de Rham Kohomologie folgt jetzt aus [9], (4.2).

Beweisvariante. Daß A positiv graduiert ist, folgt nach dem Nachweis der Existenz einer Derivation δ mit positiven natürlichen Eigenwerten auf $\mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2$ auch direkt über (1.5) und (1.6).

(4.2) Zusatz. *Die in der Situation von* (4.1), (2) *auftretenden normierten Eigenwerte* $m_1, \ldots, m_n$ *sind durch* A *eindeutig bestimmt.*

Denn $(m_1, \ldots, m_n)$ ist der Homogenitätstyp von A, vgl. §3. Vergleiche auch [6], (4.3).

(4.3) Bemerkung. *(Zum Hyperflächenfall der Multiplizität* 2.*)* Sei die analytische k-Algebra A von der Form $A = P/Pf$, wobei f den Untergrad 2 im Potenzreihenring hat und eine isolierte Singularität beschreibt. Dieser Fall wird unter reduzierten vollständigen Durchschnitten mit isolierter Singularität von (4.1) nicht erfaßt.

Man rechnet leicht nach, daß (k algebraisch abgeschlossen vorausgesetzt) die Lie-Algebren $\mathfrak{g}_\nu(A)$, $\nu \geqq 2$, genau dann noch auflösbar sind, wenn sich f in geeigneten Koordinaten in der Form $f = X^2 + g$ oder $f = X^2 + Y^2 + g$ schreiben läßt, wobei g eine Potenzreihe in $\mathfrak{m}_Q^3$ ist, $Q := k\langle\langle Z_1, \ldots, Z_m \rangle\rangle$, X, Y, $Z_1, \ldots, Z_m$ unabhängig.

(4.4) Satz. *Sei k algebraisch abgeschlossen. Die analytische k-Algebra A beschreibe einen reduzierten vollständigen Durchschnitt mit isolierter Singularität. Gibt es eine k-Derivation δ von A, die auf $\mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2$ bijektiv operiert, so ist A eine positiv graduierte k-Algebra.*

Beweis. Nach (4.1) genügt es, den Fall $A = P/Pf$ zu betrachten, wobei f in geeigneten Koordinaten (vgl. [9], S. 182) $X_1, \ldots, X_r$, $Y_1, \ldots, Y_s$ die Form $f = X_1^2 + \ldots + X_r^2 + g$ mit $g \in \mathfrak{m}_Q^3$, $Q := k\langle\langle Y_1, \ldots, Y_s \rangle\rangle$, hat. Durch eine einfache Überlegung, wie man die Derivationen auf Q/Qg zu solchen von A liftet, sieht man, daß g bei $s \geqq 2$ wieder den Voraussetzungen von (4.4) genügt. Wir dürfen daher wegen [9], (5.7), (5) annehmen, daß g selbst (nach einem Koordinatenwechsel) homogen von einem Grade ist, der gerade gewählt werden kann, etwa als $2q$. Man setzt diese Graduierung von Q zu einer solchen von P fort, indem man X_i homogen vom Gewicht q macht. Dann ist f homogen vom Grad $2q$. –

Eine analytische k-Algebra A wurde in [7], §4 fasthomogen genannt, wenn es einen A-Homomorphismus von $D_k(A)$ auf $\mathfrak{m}_A$ gibt. Dies ist offenbar gleichbedeutend mit der in (4.4) gemachten Voraussetzung über δ. Aus „fasthomogen" folgt also in gewissen Fällen „homogen". Es sei bemerkt, daß nach einer Mitteilung von E. Kunz gilt: Jede eindimensionale reduzierte analytische k-Algebra über einem algebraisch abgeschlossenen Grundkörper der Charakteristik 0 ist homogen, wenn sie fasthomogen ist.

(4.5) Beispiel. Sei $P := k[\![X, Y, Z]\!]$, $f := X^5 + Y^5 + X^3 Y^3 Z$. Nach [9], (7.3) ist P/Pf nicht homogen (wenn auch fasthomogen). P/Pf ist reduziert, hat aber keine isolierte Singularität. Die Voraussetzung der isolierten Singularität ist also notwendig bei Sätzen des hier besprochenen Typs.

(4.6) Beispiel. Seien $P := k[\![X, Y, Z]\!]$, $\mathfrak{a}$ das von $X^5 + Y^5 + X^3 Y^3 Z$, X^6 und Z^2 in P erzeugte Ideal und $A := P/\mathfrak{a}$. Dann ist A ein nulldimensionaler vollständiger Durchschnitt, der aber nicht homogen ist (wenn auch fasthomogen, siehe (4.5) oben). Die Voraussetzung der Reduziertheit ist also notwendig bei Sätzen des hier besprochenen Typs. Bemerkung: Die de Rham Kohomologie von A über k ist trivial, obwohl A nicht positiv graduiert ist.

Literatur

1. Artin, M.: On the solutions of analytic equations. Inventiones math. **5**, 277—291 (1968)
2. Eagon, J. A., Northcott, D. G.: Ideals defined by matrices and a certain complex associated with them. Proc. Royal Soc. A. **269**, 188—204 (1962)
3. Jacobson, N.: Lie Algebras. New York: Interscience 1962
4. Reiffen, H.-J.: Kontrahierbare eindimensionale Hyperflächen. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen **3**, 39—46 (1968)
5. Reiffen, H.-J.: Kontrahierbare analytische Algebren. Math. Z. **109**, 253—268 (1969)
6. Saito, K.: Quasihomogene isolierte Singularitäten von Hyperflächen. Inventiones math. **14**, 123—142 (1971)
7. Scheja, G., Storch, U.: Über differentielle Abhängigkeit bei Idealen analytischer Algebren. Math. Z. **114**, 101—112 (1970)
8. Scheja, G., Storch, U.: Differentielle Eigenschaften der Lokalisierungen analytischer Algebren. Math. Ann. **197**, 137—170 (1972)
9. Scheja, G., Wiebe, H.: Über Derivationen von lokalen analytischen Algebren. Symp. Math. **XI**, 161—192 (1973)

Angenommen am 18. Juni 1976

Math. Ann. 225, 173—176 (1977)

Real Quadratic Fields with Large Class Number

Hugh L. Montgomery and Peter J. Weinberger
Department of Mathematics, University of Michigan, Ann Arbor, Michigan 48104, USA

Let h, d, ε, and R be the class number, discriminant, fundamental unit, and regulator, respectively, of the real quadratic field $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Let χ be the primitive quadratic character $(\operatorname{mod} d)$, and let

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)n^{-s}.$$

Then $R=\log\varepsilon$, and

$$L(1,\chi)=hRd^{-\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

Since $L(1,\chi)\ll\log d$, $R>(\frac{1}{2}+o(1))\log d$, it follows that $h\ll\sqrt{d}$. Moreover, Littlewood [4] showed that if all nontrivial zeros of $L(s,\chi)$ lie on the critical line $\operatorname{Re}s=\frac{1}{2}$, then $L(1,\chi)<(2e^{\gamma}+o(1))\log\log d$. Hence

$$h<(4e^{\gamma}+o(1))d^{\frac{1}{2}}(\log d)^{-1}\log\log d \tag{2}$$

assuming the Generalized Riemann Hypothesis. In this paper we show that the hypothetical estimate (2) can not be improved upon, apart from the value of the constant.

Theorem. *There is an absolute constant $c>0$ such that*

$$h>cd^{\frac{1}{2}}(\log d)^{-1}\log\log d \tag{3}$$

for infinitely many real quadratic fields $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

To prove the Theorem we construct d for which $R<\log d$, and $L(1,\chi)>c\log\log d$. Then (3) follows from (1). We consider only square-free d with $d\equiv 1\,(\operatorname{mod}4)$, $d=n^2+1$. Then $\varepsilon=n+\sqrt{d}<2\sqrt{d}<d$, and so $R<\log d$. To make $L(1,\chi)$ large we wish to have $\chi(p)=1$ for many small primes p. By quadratic reciprocity this amounts to having d lie in certain arithmetic progressions. Following an argument of Estermann [3], we show in Lemma 1 that such d exist. Then in Lemma 2 we relate $L(1,\chi)$ to $\chi(p)$ for small p. With these lemmas established, it is then a simple matter to complete the proof of the Theorem.

Lemma 1. *Let $D(x;q,a)$ denote the number of $d \leqq x$ such that d is square-free, $d = n^2+1$ for some integer n, and $n \equiv a \pmod q$. Suppose that $2|q$, and that $(a^2+1, q) = 1$. Then*

$$D(x;q,a) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{q} \prod_{p \nmid q} (1 - 2p^{-2}) + O(x^{\frac{1}{3}} \log x).$$

Proof. Clearly

$$\begin{aligned} D(x;q,a) &= \sum_{\substack{n \leqq (x-1)^{1/2} \\ n \equiv a \pmod q}} \sum_{r^2 | (n^2+1)} \mu(r) \\ &= \sum_{r \leqq x} \mu(r) \sum_{\substack{n \leqq (x-1)^{1/2} \\ n \equiv a \pmod q \\ r^2 | (n^2+1)}} 1. \end{aligned}$$

If $(q,r) > 1$ then the inner sum vanishes, since $(n^2+1, q) = 1$ for $n \equiv a \pmod q$. Thus we may suppose that $(q,r) = 1$. We consider $r \leqq y$, $y < r \leqq x$ separately. Writing $n^2+1 = r^2 s$, we see that

$$\sum_{y < r \leqq x} \mu(r) \sum_{\substack{n \leqq (x-1)^{1/2} \\ n \equiv a \pmod q \\ r^2 | (n^2+1)}} 1 \ll \sum_{s \leqq xy^{-2}} \sum_{\substack{n,r \\ r^2 s = n^2+1}} 1.$$

From the theory of Pell's equation, the number of pairs u, v for which $u^2 - sv^2 = -1$, $1 \leqq u \leqq U$, is $\ll \log U$, uniformly in s. Thus the inner sum above is $\ll \log x$, and so the contribution of $r > y$ is $\ll xy^{-2} \log x$. Thus

$$D(x;q,a) = \sum_{\substack{r \leqq y \\ (q,r) = 1}} \mu(r) \sum_{\substack{n \leqq (x-1)^{1/2} \\ n \equiv a \pmod q \\ r^2 | (n^2+1)}} 1 + O(xy^{-2} \log x).$$

For odd m the number of solutions $n \pmod m$ of the congruence

$$n^2 + 1 \equiv 0 \pmod m \quad \text{is} \quad \prod_{p|m} \left(1 + \left(\frac{-1}{p}\right)\right) = c(m), \quad \text{say.}$$

But $2|q$ and $(q,r) = 1$, so r is odd, and so the number of $n \pmod{qr^2}$ for which $r^2 | (n^2+1)$, $n \equiv a \pmod q$, is $c(r^2) = c(r)$. Hence the inner sum above is $= c(r)(x^{\frac{1}{2}} q^{-1} r^{-1} + O(1))$. Now $c(r) \leqq d(r)$ so

$$\sum_{r \leqq y} c(r) \ll y \log y, \quad \text{and} \quad \sum_{r > y} c(r) r^{-2} \ll y^{-1} \log y.$$

Therefore

$$\begin{aligned} D(x;q,a) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{q} \sum_{\substack{r=1 \\ (q,r)=1}}^{\infty} \mu(r) c(r) r^{-2} + O(y \log y) + O(x^{\frac{1}{2}} q^{-1} y^{-1} \log y) \\ + O(xy^{-2} \log x). \end{aligned}$$

Taking $y = x^{\frac{1}{3}}$, we obtain the result, since the sum over r is

$$= \prod_{p \nmid q} \left(1 - \left(1 + \left(\frac{-1}{p}\right)\right) p^{-2}\right).$$

Lemma 2. *Suppose that* $0<\delta<1$. *Then for* $(\log q)^{\delta} \leqq y \leqq \log q$, *and* χ *a primitive character* $(\operatorname{mod} q)$, $q>1$,

$$\log L(1,\chi)=\sum_{p\leqq y}\chi(p)p^{-1}+O_{\delta}(1)$$

unless χ *lies in an exceptional set* $\mathfrak{E}(\delta)$. *The set* $\mathfrak{E}(\delta)$ *contains* $\ll Q^{\delta}$ *primitive characters* χ *with conductor* $q\leqq Q$.

A more precise result of this sort has been given by Elliott [2]; for the sake of completeness we include a short proof of Lemma 2.

Proof. Clearly

$$\sum_{n\leqq x}\chi(n)\Lambda(n)(n\log n)^{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int \log L(s,\chi)\frac{x^{s-1}}{s-1}\,ds,$$

where the contour is the straight line from $c-i\infty$ to $c+i\infty$, $c>1$. Let $\mathfrak{E}$ be the set of primitive characters χ for which $L(s,\chi)$ has at least one zero in the rectangle

$$1-\tfrac{1}{7}\delta\leqq\sigma\leqq 1,\qquad |t|\leqq(\log q)^2. \tag{4}$$

Suppose that $\chi\notin\mathfrak{E}$. Arguing in the usual manner (see Titchmarsh [8, Lemma 3.12]), we see that the portion of the above integral for which $|t|\geqq\log q$ contributes $\ll 1$, uniformly for $x\leqq q$. For $|t|\leqq\log q$ we take the contour to the abcissa $\sigma=1-\frac{1}{8}\delta$, passing the pole at $s=1$ (with residue $\log L(1,\chi)$). We may neglect higher powers of primes with error $\ll 1$, so

$$\sum_{p\leqq x}\chi(p)p^{-1}-\log L(1,\chi)\ll 1+\int_{-\log q}^{\log q}|\log L(1-\tfrac{1}{8}\delta+it,\chi)|\frac{dt}{\delta+|t|}.$$

But $L(s,\chi)\neq 0$ for s in the rectangle (4), which implies that $\log L(s,\chi)\ll_{\delta}\log q$ in the integrand above. Hence the above is $\ll 1+x^{-\frac{1}{8}\delta}(\log q)^2$. Taking $x=(\log q)^{16\delta^{-1}}$, we find that

$$\log L(1,\chi)-\sum_{p\leqq y}\chi(p)p^{-1}\ll_{\delta}1+\sum_{y<p\leqq x}p^{-1}\ll_{\delta}1,$$

since $y\geqq(\log q)^{\delta}$.

It remains now to estimate the number of characters lying in the set $\mathfrak{E}=\mathfrak{E}(\delta)$. Let $N(\sigma,T,\chi)$ denote the number of zeros $\varrho=\beta+i\gamma$ of $L(s,\chi)$ in the rectangle $\sigma\leqq\beta\leqq 1$, $|\gamma|\leqq T$. From a theorem of Montgomery [6] (see also [7, Theorem 12.2] or [1, Théorème 20]),

$$\sum_{q\leqq Q}\sideset{}{^*}\sum_{\chi}N(\sigma,T,\chi)\ll(Q^2T)^{3(1-\sigma)}(\log QT)^9.$$

Here $\sideset{}{^*}\sum_{\chi}$ denotes a sum over all primitive characters $\chi\,(\operatorname{mod} q)$. Thus the number of zeros in question is $\ll Q^{\delta}$, so Lemma 2 is established.

We now complete the proof of the Theorem. Let $y=\frac{1}{9}\log x$, $q=2\prod_{p\leqq y}p$, $a=0$. Then $q<x^{\frac{1}{8}}$, $2|q$, $(a^2+1,q)=1$, and if $d=n^2+1$, $n\equiv a\,(\operatorname{mod} q)$, then $\chi(p)=\left(\frac{d}{p}\right)=1$

for all $p \leqq y$. By Lemma 1 there are $\gg x^{\frac{1}{2}} q^{-1} \gg x^{\frac{3}{8}}$ such square-free $d \leqq x$. From Lemma 2, with $\delta < \frac{3}{8}$, we see that $L(1, \chi) > c_1 \log y > c \log \log d$ for almost all of these d. This completes the proof of the Theorem.

References

1. Bombieri, E.: Le grand crible dans la théorie analytique des nombres. Astérisque 18, Société Math. de France 1974
2. Elliott, P. D. T. A.: The distribution of the quadratic class number. Litovsk. Mat. Sb. **10**, 189—196 (1970)
3. Estermann, T.: Einige Sätze über quadratfreie Zahlen. Math. Ann. **105**, 653—662 (1931)
4. Littlewood, J. E.: On the class number of the corpus $P(\sqrt{-k})$. Proc. London Math. Soc. **27**, 358—372 (1927)
5. Montgomery, H. L.: Zeros of L-functions. Invent. Math. **8**, 346—354 (1969)
6. Montgomery, H. L.: Topics in multiplicative number theory. Lecture Notes in Mathematics 227. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1971
7. Titchmarsh, E. C.: The theory of the Riemann zeta-function. Oxford: Oxford University Press 1951

Received July 6, 1976

Math. Ann. 225, 177–194 (1977)

Berechnung der Gelfand-Kirillov-Dimension bei induzierten Darstellungen

Walter Borho

Sonderforschungsbereich Theoretische Mathematik, Universität Bonn, Wegelerstraße 10, D-5300 Bonn, Bundesrepublik Deutschland

1. Einleitung

1.1. Ein (zweiseitiges) Ideal einer (assoziativen) Algebra heißt *primitiv*, wenn es als Kern einer irreduziblen Darstellung vorkommt. Im Falle der Einhüllenden Algebra $U(\mathfrak{g})$ einer halbeinfachen komplexen Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ haben viele primitive Ideale die Gestalt $I = \operatorname{Ann}_{U(\mathfrak{g})} N$, wobei $N = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} V$ der induzierte $\mathfrak{g}$-Modul eines endlich-dimensionalen einfachen $\mathfrak{p}$-Moduls V ist für eine parabolische Unteralgebra $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{g}$. (Dabei bezeichnet $\operatorname{Ann}_{U(\mathfrak{g})}$ den Annullator des Moduls, also den Kern der Darstellung.) Ein primitives Ideal I dieser Gestalt heiße kurz *(von $\mathfrak{p}$) induziert*. N. Conze und J. Dixmier [6] und A. Joseph [10] haben entdeckt, daß $U(\mathfrak{g})$ im allgemeinen auch primitive Ideale besitzt, die nicht in diesem Sinne induziert sind (nämlich immer dann, wenn $\mathfrak{g}$ einen einfachen Summanden vom Typ $\neq A_n$ hat [10]). Aber dieser nicht-induzierte Anteil des primitiven Spektrums dürfte „relativ klein" sein. Im Falle $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ ist er leer, und im Falle $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(4, \mathbb{C})$ abzählbar [11]. Induziert sind z. B. ganz allgemein alle minimalen primitiven Ideale von $U(\mathfrak{g})$: Genauer stimmen nämlich die *minimalen* primitiven Ideale mit den *von einer Borel-Unteralgebra induzierten* überein [7; 8.4].

1.2. Das Zentrum $Z(\mathfrak{g})$ von $U(\mathfrak{g})$ ist bekanntlich isomorph zu einem Polynomring in $l = \operatorname{Rang} \mathfrak{g}$ Unbestimmten. Durch die Abbildung $I \mapsto I \cap Z(\mathfrak{g})$ wird der Raum $\mathscr{X}$ aller primitiven Ideale von $U(\mathfrak{g})$ auf das maximale Spektrum von $Z(\mathfrak{g})$ projiziert, also – nach Koordinatenwahl – auf den affinen Raum $\mathbb{C}^l$. Die Einschränkung dieser Projektion auf den Unterraum $\mathscr{X}^{\min}$ aller minimalen primitiven Ideale ist ein Homöomorphismus $\mathscr{X}^{\min} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^l$ (bezüglich der Jacobson- bzw. der Zariski-Topologie; Dixmier-Duflo [7; 8.4]). Auch die Teilmenge $\mathscr{X}^{\max}$ der maximalen (und damit primitiven) Ideale von $U(\mathfrak{g})$ wird durch diese Projektion bijektiv auf den $\mathbb{C}^l$ abgebildet. Die *Faser* $\mathscr{X}_p$ der auf den Punkt $p \in \mathbb{C}^l$ projizierten Elemente von $\mathscr{X}$ ist eine *endliche*, durch die Inklusionen *geordnete Menge* mit einem *kleinsten* Element $I_p^{\min} \in \mathscr{X}^{\min}$ und einem größten Element $I_p^{\max} \in \mathscr{X}^{\max}$.

Nach Dixmier gilt „im allgemeinen" sogar $I_p^{\min} = I_p^{\max}$, d. h. die Anzahl der Elemente in der Faser ist eins, $\# \mathscr{X}_p = 1$. Genauer ist die Menge $T = \{p \in \mathbb{C}^l \mid \# \mathscr{X}_p > 1\}$ die Vereinigung einer gewissen lokalendlichen Familie algebraischer Hyper-

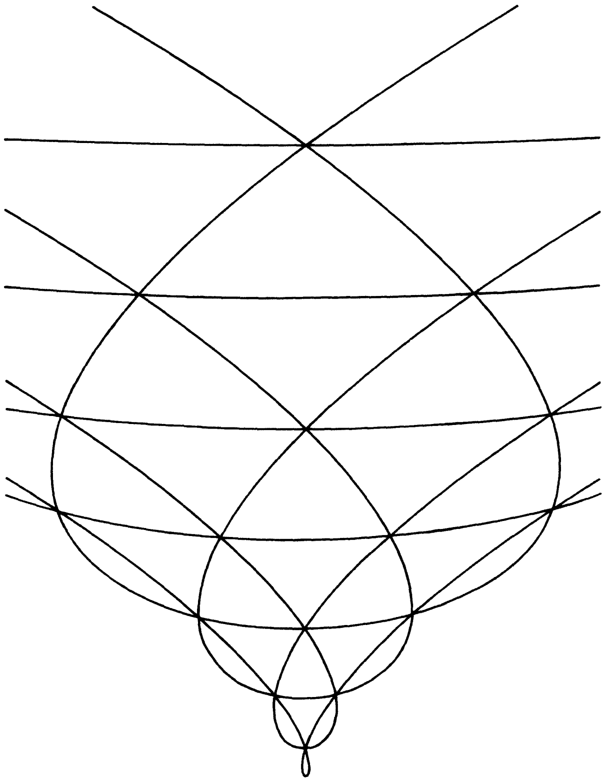


Abb. 1. Die reellen Punkte der „Ausnahmehyperflächen" im Raum ($\cong \mathbb{C}^2$) der Maximalideale von $Z(\mathfrak{g})$ für den Fall $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ (vgl. 1.2, 4.3 und 5.6)

flächen (vgl. 4.3). Im Falle $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ zum Beispiel handelt es sich bei diesen „*Ausnahmehyperflächen*" um eine Folge von Kurven dritten Grades, deren reelle Punkte in der Abb. 1 dargestellt sind.

1.3. Wir nennen einen Punkt des $\mathbb{C}^l$ *regulär*, wenn er nicht zu T gehört, wir nennen ihn *singulär*, wenn er ein singulärer Punkt von T ist, und wir nennen ihn *subregulär*, wenn er weder regulär noch singulär ist. Ist zum Beispiel der Rang $l = 2$, so sind die Schnittpunkte der verschiedenen Ausnahmekurven die einzigen singulären Punkte von T (vgl. die Abbildungen); schon beim Rang $l = 3$ treten aber auch Singularitäten anderer (nicht so trivialer) Art auf.

In dieser Note werden die Fasern $\mathscr{X}_p$ über den subregulären Punkten beschrieben: Sie bestehen aus genau zwei Elementen, den Idealen $I_p^{\max}$ und $I_p^{\min}$, und beide sind induziert (Satz 5.4). Ist $\mathfrak{g}$ ein Produkt von Algebren der Typen A_n, D_n, E_n, so sind die subregulären Punkte sogar durch diese Eigenschaft charakterisiert: Die Menge $\{p \in \mathbb{C}^l \mid \# \mathscr{X}_p \geqq 3\}$ stimmt dann genau mit der Menge der singulären Punkte von T überein (Satz 5.5).

Für den Spezialfall $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ war dies schon in [3; 7.3] bemerkt worden. Der Beweis dort überträgt sich mit Hilfe eines Resultates von Conze-Dixmier [6] auf den allgemeinen Fall, sobald man für die induzierten Ideale eine gewisse Invariante, die Gelfand-Kirillov-Dimension ihrer Restklassenalgebra, berechnet hat.

1.4. Die Gelfand-Kirillov-Dimension $\operatorname{Dim} A$ ist eine für jede Algebra A definierte Invariante (reell oder ∞), die im Falle einer Restklassenalgebra $A = U(\mathfrak{g})/I$ auch mit der Krull-Dimension der assoziierten graduierten Algebra $\operatorname{gr} A = S(\mathfrak{g})/\operatorname{gr} I$ [bezüglich der natürlichen Filtrierung von $U(\mathfrak{g})$] übereinstimmt: Es gilt

$$\operatorname{Dim} U(\mathfrak{g})/I = \operatorname{Dim} S(\mathfrak{g})/\operatorname{gr} I = \text{Krull-Dim}\, S(\mathfrak{g})/\operatorname{gr} I \tag{1}$$

[3; 5.4]. Dabei wird die symmetrische Algebra $S(\mathfrak{g})$ mit der assoziierten graduierten Algebra $\operatorname{gr} U(\mathfrak{g})$ identifiziert. – Daß diese Invariante allein durch die Algebrastruktur von $U(\mathfrak{g})/I$ festgelegt ist, also nicht von der Filtrierung abhängt, geht aus [3] hervor.

Hier wird für ein von der parabolischen Unteralgebra $\mathfrak{p}$ induziertes Ideal J die folgende Gleichung bewiesen (2.3):

$$\operatorname{Dim} U(\mathfrak{g})/J = 2 \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{p}\,. \tag{2}$$

Die Ungleichung „$\leqq$" geht bereits aus einem Satz von Conze hervor [5]. Der Beweis der umgekehrten Ungleichung basiert auf einem geometrischen Resultat von Richardson, wonach $2 \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ gerade die Dimension des algebraischen Kegels $G\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}$ ist, welchen das Nilradikal $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{p}$ unter der Wirkung der adjungierten Gruppe G von $\mathfrak{g}$ erzeugt [12]. – Für gewisse spezielle parabolische Unteralgebren $\mathfrak{p}$ wurde die Gleichung (2) schon von Joseph bewiesen [10; 8.7] (z. B. für solche $\mathfrak{p}$, für die $\mathfrak{r}$ kommutativ ist).

1.5. Kombiniert man die Dimensionsformel (2) mit den Resultaten von Conze [5], so erhält man eine Strukturaussage für die Restklassenalgebra $U(\mathfrak{g})/J$ eines vollprimen induzierten Ideals J, die eng mit der Gelfand-Kirillov-Vermutung zusammenhängt (2.5).

Der Autor möchte J. C. Jantzen, A. Joseph und H. Kraft für hilfreiche Diskussionen danken, dem ersten auch für den Hinweis auf das Lemma 4.2. Für Verbesserungsvorschläge dankt er J. Dixmier. Der Gesamthochschule Paderborn sei für die Gelegenheit gedankt, während einer Arbeitstagung über Einhüllende Algebren am 17. 6. 1975 über diese Arbeit vorzutragen.

Konventionen und Notationen

In dieser Note wird stets über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen als Grundkörper gearbeitet. Alle Resultate bleiben allerdings über einem beliebigen algebraisch abgeschlossenen Grundkörper k der Charakteristik 0 richtig. (Die Einschränkung $k = \mathbb{C}$ geht lediglich in den Abschnitten 4 und 5 in die Beweise ein, immer wenn [6] benutzt wird.)

Weiter bezeichnet:

dim	die Dimension von Vektorräumen bzw. Varietäten (über $\mathbb{C}$);
Dim	die Gelfand-Kirillov-Dimension einer $\mathbb{C}$-Algebra (vgl. 1.4, oder [3]);
$\mathbb{A}_n$	die n-te Weyl-Algebra über $\mathbb{C}$ ([2], § 4);
$M_n(\mathbb{C})$	den Ring der $n \times n$-Matrizen;
$\mathbb{D}_n$	den n-ten Weyl-Körper, den Quotientenschiefkörper von $\mathbb{A}_n$.

Folgende Bezeichnungen werden im wesentlichen aus [7] (Chapitre 7) übernommen. Es sei

$\mathfrak{g}$	eine halbeinfache Lie-Algebra (endlich-dimensional über $\mathbb{C}$);
l	ihr Rang;
G	ihre adjungierte Gruppe;
$\mathfrak{h}$	eine Cartan-Unteralgebra;
$\mathfrak{h}^*$	der Dualraum von $\mathfrak{h}$;
$R\subset\mathfrak{h}^*$	das Wurzelsystem von $\mathfrak{g}$ bezüglich $\mathfrak{h}$;
B	eine Basis von R;
R_+	die Menge der positiven Wurzeln von R bezüglich B;
δ	die halbe Summe der positiven Wurzeln;
$\mathfrak{g}=\mathfrak{n}_+\oplus\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_-$	die „Dreieckszerlegung" von $\mathfrak{g}$ zu $\mathfrak{h}$ und B [7];
$\mathfrak{b}=\mathfrak{n}_+\oplus\mathfrak{h}$	die Borel-Unteralgebra zu $\mathfrak{h}$ und B;
H_α	die Kowurzel (in $\mathfrak{h}$) zur Wurzel $\alpha\in R$;
x_α	für $\alpha\in R$ die Wurzelvektoren einer Chevalley-Basis;
W	die Weyl-Gruppe von R;
s_α	die Spiegelung ($\in W$) $\lambda\mapsto\lambda-\lambda(H_\alpha)\alpha$ von $\mathfrak{h}^*$;
$M(\lambda)$ für $\lambda\in\mathfrak{h}^*$	der Verma-Modul [7] mit höchstem Gewicht $\lambda-\delta$;
$L(\lambda)$ für $\lambda\in\mathfrak{h}^*$	der einfache Modul mit höchstem Gewicht $\lambda-\delta$ [also *der* einfache Quotient von $M(\lambda)$].

2. Berechnung der Gelfand-Kirillov-Dimension eines induzierten Ideals

2.1. Die Killing-Form auf $\mathfrak{g}$ erlaubt es, $\mathfrak{g}$ mit seinem Dualraum zu identifizieren und so die symmetrische Algebra $S(\mathfrak{g})$ als Ring der polynomialen Funktionen auf $\mathfrak{g}$ aufzufassen. Ist $M\subseteqq\mathfrak{g}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{g}$, so bezeichne $\mathscr{I}(M)$ das Ideal der auf M verschwindenden Funktionen $f\in S(\mathfrak{g})$. Ist $J\subset S(\mathfrak{g})$ ein Ideal von $S(\mathfrak{g})$, so bezeichne $\mathscr{V}(J)\subset\mathfrak{g}$ sein Nullstellengebilde in $\mathfrak{g}$. Die adjungierte Darstellung von $\mathfrak{g}$ in $\mathfrak{g}$ setzt sich eindeutig fort zu einer Operation von $\mathfrak{g}$ durch Derivationen auf $S(\mathfrak{g})$.

Lemma. *Sei $\mathfrak{p}$ eine parabolische Unteralgebra von $\mathfrak{g}$ mit Nilradikal $\mathfrak{r}$. Dann ist $\mathscr{I}(G\mathfrak{r})$ das größte $\mathfrak{g}$-stabile Ideal von $S(\mathfrak{g})$, welches in $S(\mathfrak{g})\mathfrak{p}$ enthalten ist. Dieses $\mathfrak{g}$-stabile Ideal ist prim.*

Beweis. Sei J die Summe aller in $S(\mathfrak{g})\mathfrak{p}$ enthaltenen $\mathfrak{g}$-stabilen Ideale. Offenbar ist J das größte $\mathfrak{g}$-stabile Ideal $\subseteqq S(\mathfrak{g})\mathfrak{p}$. Seien $P_1,\ldots,P_n$ die minimalen Primideale $\supseteqq J$. Sie sind alle $\mathfrak{g}$-stabil [2; 4.1 b)]. Da das Ideal $S(\mathfrak{g})\mathfrak{p}$ prim ist, enthält es eines der P_i, etwa P_1. Es folgt daher: $J=P_1$ ist ein Primideal.

Betrachtet man auch die adjungierte Operation von G (durch Automorphismen) auf $S(\mathfrak{g})$, so stimmen die $\mathfrak{g}$-stabilen mit den G-stabilen Idealen überein (vgl. etwa [2; 12.3], wo entsprechendes für $U(\mathfrak{g})$ bewiesen wird). Bei der bekannten Bijektion $I\leftrightarrow\mathscr{V}(I)$ der semiprimen Ideale von $S(\mathfrak{g})$ mit den Zariski-abgeschlossenen Teilmengen von $\mathfrak{g}$ entsprechen die G-stabilen Ideale gerade den G-stabilen Teilmengen von $\mathfrak{g}$. Folglich stimmt $\mathscr{V}(J)$ gerade überein mit der kleinsten abgeschlossenen G-stabilen Teilmenge von $\mathfrak{g}$, welche $\mathscr{V}(S(\mathfrak{g})\mathfrak{p})=\mathscr{V}(\mathfrak{p})$ umfaßt. Aber das Nullstellengebilde $\mathscr{V}(\mathfrak{p})$ des linearen Teilraums $\mathfrak{p}$ ist offenbar selbst ein linearer Teilraum von $\mathfrak{g}$, und zwar der Orthogonalraum von $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{g}$ bezüglich der Killing-Form, und dies ist $\mathfrak{r}$ (vgl. [7; 1.10.2 (iii)]). Also hat man $\mathscr{V}(\mathfrak{p})=\mathfrak{r}$ und daher $\mathscr{V}(J)=\overline{G\mathfrak{r}}$. Das bedeutet $J=\mathscr{I}(\mathscr{V}(J))=\mathscr{I}(G\mathfrak{r})$. Q.e.d.

2.2. *Bemerkungen.* a) Es ist leicht zu sehen, daß $G\mathfrak{r}=\overline{G\mathfrak{r}}$ eine *abgeschlossene irreduzible* Teilmenge von $\mathfrak{g}$ ist: Als kanonisches Bild der irreduziblen Varietät $G\times\mathfrak{r}(\subset G\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g})$ ist $G\mathfrak{r}$ irreduzibel. Und die Abgeschlossenheit beruht auf der Tatsache, daß die parabolische Untergruppe $P\subset G$ zu $\mathfrak{p}$ das Ideal $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{p}$ stabilisiert und daß G/P eine vollständige Varietät ist (vgl. [1; Lemma 11.9]).

b) Nach Richardson ist $\dim G\mathfrak{r}=2\dim\mathfrak{r}(=2\dim\mathfrak{g}/\mathfrak{p})$ [12; Proposition 6 (b)].

c) Da der Kegel $\mathscr{N}=G\mathfrak{n}_+$ aller nilpotenten Elemente von $\mathfrak{g}$ aus nur endlich vielen G-Bahnen besteht (Kostant [7; 8.1.3]), gibt es in $G\mathfrak{r}\subset\mathscr{N}$ eine Bahn Gx, $x\in\mathfrak{r}$, mit $\dim G\mathfrak{r}=\dim Gx$. Da Bahnen algebraischer Gruppen offen in ihrem Abschluß sind, und da $G\mathfrak{r}$ irreduzibel ist, folgt hieraus: $G\mathfrak{r}$ *enthält eine offene und dichte Bahn* Gx, $x\in\mathfrak{r}$. (Nach Richardson ist sogar Px offen und dicht in $\mathfrak{r}$ [12; Proposition 6].)

Von diesen Bemerkungen wird im folgenden nur b) verwendet.

2.3. Man kann $S(\mathfrak{g})$ auch mit der assoziierten graduierten Algebra

$$\operatorname{gr} U(\mathfrak{g})=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} U_n(\mathfrak{g})/U_{n-1}(\mathfrak{g})$$

der Einhüllenden Algebra $U(\mathfrak{g})$ identifizieren, wobei $U_n(\mathfrak{g})$ die Teilmenge der Elemente vom Grad $\leqq n$ bezeichnet. Es bezeichne gr_n die kanonische Abbildung $\operatorname{gr}_n: U_n(\mathfrak{g})\to U_n(\mathfrak{g})/U_{n-1}(\mathfrak{g})\xrightarrow{\sim} S^n(\mathfrak{g})\subset S(\mathfrak{g})$. Für jeden Teilraum $V\subseteqq U(\mathfrak{g})$ definiere man den Teilraum $\operatorname{gr} V\subseteqq S(\mathfrak{g})$ durch

$$\operatorname{gr} V=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{gr}_n(U_n(\mathfrak{g})\cap V).$$

Satz. *Gegeben seien eine parabolische Unteralgebra* $\mathfrak{p}$ *von* $\mathfrak{g}$, *mit Nilradikal* $\mathfrak{r}$, *sowie ein endlich-dimensionaler einfacher* $\mathfrak{p}$-*Modul* V_λ, *mit Höchstgewicht* $\lambda\in\mathfrak{h}^*$. *Es bezeichne* $N_\lambda=U(\mathfrak{g})\otimes_{U(\mathfrak{p})}V_\lambda$ *den induzierten* $\mathfrak{g}$-*Modul und* $I_\lambda=\operatorname{Ann}_{U(\mathfrak{g})}N_\lambda$ *seinen Annullator. Dann gilt:*

a) $G\mathfrak{r}\subseteqq\mathscr{V}(\operatorname{gr} I_\lambda)$.

b) $\operatorname{Dim} U(\mathfrak{g})/I_\lambda=\dim G\mathfrak{r}=2\dim\mathfrak{r}$.

c) *Insbesondere hängt die Gelfand-Kirillov-Dimension* $\operatorname{Dim} U(\mathfrak{g})/I_\lambda$ *nicht von* λ *ab, sondern nur von* $\mathfrak{p}$.

Beweis. a) Sei $J_\lambda=\operatorname{Ann}_{U(\mathfrak{p})}V_\lambda$. Dann ist natürlich $I_\lambda\subseteqq U(\mathfrak{g})J_\lambda$ [2; 10.4a]. Es bezeichne $x_1,\ldots,x_m$ eine k-Basis eines Komplementes von $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{g}$ und x^n das geordnete Monom $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_m^{n_m}$, für jedes $n=(n_1,\ldots,n_m)\in\mathbb{N}^m$; außerdem sei $|n|=n_1+\ldots n_m$ der Grad dieses Monoms. Jedes Element von $U(\mathfrak{g})J_\lambda$ hat die Form $u=\sum x^n u_n$ mit $u_n\in J_\lambda$ und $u_n=0$ für fast alle n. Aus dem Birkhoff-Witt-Theorem schließt man $\deg(x^n u_n)=|n|+\deg u_n$. Sei d das Maximum aller dieser Grade. Dann ist $\deg u\leqq d$ und $\operatorname{gr}_d(u)=\sum x^n \operatorname{gr}_{d-|n|}(u_n)\in S(\mathfrak{g})\operatorname{gr} J_\lambda$, wobei mindestens einer der Koeffizienten $\operatorname{gr}_{d-|n|}(u_n)$ nicht verschwindet. Da die x^n unabhängig über $S(\mathfrak{p})$ sind, folgt hieraus $\operatorname{gr}_d(u)\neq 0$, also $\deg u=d$ und daher $\operatorname{gr} ku=k\operatorname{gr}_d(u)\subseteqq S(\mathfrak{g})\operatorname{gr} J_\lambda$. Folglich gilt

$$\operatorname{gr} I_\lambda\subseteqq\operatorname{gr} U(\mathfrak{g})J_\lambda\subseteqq S(\mathfrak{g})\operatorname{gr} J_\lambda\subseteqq S(\mathfrak{g})\mathfrak{p},$$

letzteres, weil $\operatorname{gr} J_\lambda$ als homogenes Ideal $\neq S(\mathfrak{p})$ von $S(\mathfrak{p})$ notwendig in $S(\mathfrak{p})\mathfrak{p}$ enthalten ist. Nun ist $\operatorname{gr} I_\lambda$ ein $\mathfrak{g}$-stabiles Ideal von $S(\mathfrak{g})$. Also folgt nach Lemma 2.1: $\operatorname{gr} I_\lambda \subseteqq \mathscr{I}(G\mathfrak{r})$ und daher $\mathscr{V}(\operatorname{gr} I_\lambda) \supseteqq G\mathfrak{r}$.

b) Nach [3; 5.4, 3.2] hat man

$$\operatorname{Dim} U(\mathfrak{g})/I_\lambda = \operatorname{Dim} S(\mathfrak{g})/\operatorname{gr} I_\lambda = \dim \mathscr{V}(\operatorname{gr} I_\lambda).$$

Nach a) und nach Richardson (2.2b)) gilt demnach

$$\operatorname{Dim} U(\mathfrak{g})/I_\lambda \geqq \dim G\mathfrak{r} = 2\dim \mathfrak{r}.$$

Die umgekehrte Ungleichung folgt aus dem Satz 2.4 von Conze. Q.e.d.

2.4. In der Situation von Satz 2.3 hat man folgendes Resultat:

Satz von Conze. *Sei* $m = \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ *und* $n = \dim V_\lambda$. *Dann gibt es eine Algebra-Einbettung*

$$i: U(\mathfrak{g})/I_\lambda \hookrightarrow \mathbb{A}_m \otimes M_n(\mathbb{C}) = M_n(\mathbb{A}_m).$$

Insbesondere ist $\operatorname{Dim} U(\mathfrak{g})/I_\lambda \leqq 2m$.

Zum *Beweis.* Dies folgt aus [5; Proposition 2.2] und der Tatsache, daß $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{r}^-$ ist mit einer $\operatorname{ad}_\mathfrak{g}$-nilpotenten Unteralgebra $\mathfrak{r}^-$ (vgl. den Beweis von [5; Theorem 5.6]). – Es sei nur kurz an die Konstruktion der Einbettung i erinnert: Conze identifiziert den induzierten Modul N_λ als Vektorraum mit $S(\mathfrak{r}^-) \otimes V_\lambda$. Die induzierte Darstellung liefert daher eine Einbettung $j: U(\mathfrak{g})/I_\lambda \hookrightarrow \operatorname{End}_\mathbb{C} S(\mathfrak{r}^-) \otimes \operatorname{End}_\mathbb{C} V_\lambda$. Sei $x_1, \dots, x_m$ eine Basis von $\mathfrak{r}^-$. Sei $\mathscr{A} = \operatorname{Diff}(\mathfrak{r}^-) (\cong \mathbb{A}_m)$ die von den partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}$ und den Linksmultiplikationen mit $x_1, \dots, x_m$ erzeugte Unteralgebra des $\mathbb{C}$-Endomorphismenringes von $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_m] = S(\mathfrak{r}^-)$. Sei schließlich $\mathscr{A}^\wedge$ die von $\mathscr{A}$ und der Potenzreihenalgebra

$$\mathbb{C}\left[\left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right]\right] \subset \operatorname{End}_\mathbb{C} S(\mathfrak{r}^-)$$

erzeugte Unteralgebra. Aus allgemeinen Gründen gilt dann

$$\operatorname{Im} j \subset \mathscr{A}^\wedge \otimes \operatorname{End}_\mathbb{C} V_\lambda$$

[5; Proposition 2.2]. Kann man – wie hier – als Komplement $\mathfrak{r}^-$ von $\mathfrak{p}$ eine $\operatorname{ad}_\mathfrak{g}$-nilpotente Unteralgebra wählen, so brechen alle auftretenden Potenzreihen ab, d. h. man hat sogar

$$\operatorname{Im} j \subset \mathscr{A} \otimes \operatorname{End}_\mathbb{C} V_\lambda \cong \mathbb{A}_m \otimes M_n(\mathbb{C}).$$

Also liefert j die gewünschte Einbettung i. Die letzte Aussage des Satzes ist nun klar [3; 3.1 a), d)]:

$$\operatorname{Dim} U(\mathfrak{g})/I_\lambda \leqq \operatorname{Dim} \mathbb{A}_m \otimes M_n(\mathbb{C}) = \operatorname{Dim} \mathbb{A}_m = 2m. \quad \text{Q.e.d.}$$

2.5. *Anwendung.* Im Falle $\dim V_\lambda = 1$ wird die Restklassenalgebra $B := U(\mathfrak{g})/I_\lambda$ nach 2.4 in den nullteilerfreien Ring $\mathbb{A}_m$ eingebettet. Ihr Quotientenschiefkörper $K := Q(B)$ wird dadurch in den „Weyl-Körper“ $\mathbb{D}_m := Q(\mathbb{A}_m)$ eingebettet. Es ist eine interessante Frage, ob diese Einbettung ein Isomorphismus $K \cong \mathbb{D}_m$ ist. Dies würde die Gelfand-Kirillov-Vermutung für vollprime von $\mathfrak{p}$ induzierte Ideale beweisen. Im Falle $\mathfrak{p}=\mathfrak{b}$ (Borel-Unteralgebra) ist die Antwort nach Conze positiv [5]. Als Anwendung des Satzes 2.3 sei hier bemerkt:

Korollar. $\mathbb{D}_m$ *ist als Vektorraum über K (links und rechts) endlich-dimensional.*

Nach Satz 2.3 haben nämlich $\mathbb{A}_m$ und die Unteralgebra $i(B)$ gleiche Gelfand-Kirillov-Dimension. Hieraus kann man nun ganz allgemein folgern, daß die Quotientenschiefkörper (links und rechts) endliche Dimension übereinander haben (vgl. [3], Satz 6.7).

3. Spezialfall: Verma-Moduln

3.1. Wählt man im Satz 2.3 als parabolische Unteralgebra $\mathfrak{p}$ die Borel-Unteralgebra $\mathfrak{b}$, so erhält man als induzierten Modul N_λ den „Verma-Modul" mit Höchstgewicht λ, also $N_\lambda = M(\lambda+\delta)$ in Dixmiers Notation [7; 7.1]. In diesem Spezialfall ist $Gr = G\mathfrak{n}_+ = \mathcal{N}$ der gesamte Kegel $\mathcal{N}$ der nilpotenten Elemente von $\mathfrak{g}$. Dies hat zur Folge, daß im Satz 2.3 die obere Abschätzung für $\operatorname{Dim} U(\mathfrak{g})/I_\lambda$ trivial wird: Im Falle eines Verma-Moduls wird der Verweis auf den Satz von Conze überflüssig. Man erhält so einen einfachen Beweis für die Resultate von Dixmier-Duflo über die Annullatoren der Verma-Moduln:

3.2. Es bezeichne $Z = U(\mathfrak{g})^\mathfrak{g}$ das Zentrum von $U(\mathfrak{g})$, $Y = S(\mathfrak{g})^\mathfrak{g}$ den Invariantenring von $S(\mathfrak{g})$ und Y_+ das Maximalideal $Y \cap \mathfrak{g}S(\mathfrak{g})$ von Y. Aus der vollen Reduzibilität der adjungierten Operation von $\mathfrak{g}$ auf $U(\mathfrak{g})$ und $S(\mathfrak{g})$ schließt man leicht $\operatorname{gr} Z = Y$. Für jedes Maximalideal J von Z hat man $\operatorname{gr} J = Y_+$ (vgl. [3], Beweis von 7.1).

Satz (Dixmier-Duflo). *Im Satz 2.3 sei speziell* $\mathfrak{p}=\mathfrak{b}$ *eine Borel-Unteralgebra, also* $N_\lambda = M(\lambda+\delta)$ *ein Verma-Modul. Dann gilt*

a) $\operatorname{gr} I_\lambda = S(\mathfrak{g})\, Y_+ = \mathcal{I}(\mathcal{N})$;

b) $I_\lambda = U(\mathfrak{g})(Z \cap I_\lambda)$;

c) I_λ *ist vollprim.*

Korollar. $\operatorname{Dim} U(\mathfrak{g})/I_\lambda = \# R (= \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h})$.

Beweis. a) Nach Kostant ist $S(\mathfrak{g})\, Y_+ = \mathcal{I}(\mathcal{N}) = \mathcal{I}(G\mathfrak{n}_+)$ [7; 8.4], und nach Lemma 2.1 ist dies das größte $\mathfrak{g}$-stabile Primideal $\subseteq S(\mathfrak{g})\mathfrak{b}$ von $S(\mathfrak{g})$. Wie in 2.3 folgt hieraus $\operatorname{gr} I_\lambda \subseteq S(\mathfrak{g})\, Y_+$. Andererseits operiert aber Z durch Skalare auf $M(\lambda+\delta)$ [7; 7.1.8]. Daher ist $\operatorname{gr}(Z \cap I_\lambda) = Y_+$ und folglich $\operatorname{gr} I_\lambda \supseteq S(\mathfrak{g})\, Y_+$.

b) „$\supseteq$" ist klar. Andererseits folgt nach den Argumenten von a) auch $\operatorname{gr}(U(\mathfrak{g})(Z \cap I_\lambda)) = S(\mathfrak{g})\, Y_+$, und dies ist bereits das ganze $\operatorname{gr} I_\lambda$ nach a). Aus der Gleichheit der assoziierten graduierten Ideale folgt nun die behauptete Gleichheit.

c) Gilt, da $\operatorname{gr} I_\lambda$ prim ist, und das Korollar folgt aus a) wegen $\operatorname{Dim} U(\mathfrak{g})/I_\lambda = \operatorname{Dim} S(\mathfrak{g})/\operatorname{gr} I_\lambda = \dim \mathcal{N} = \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Q.e.d.

3.3. *Problem.* In der Situation von Satz 2.3 sei wieder $\mathfrak{p}$ beliebig, aber V_λ eindimensional.

Hat man dann in Verallgemeinerung von 3.2 a) *die Gleichung*

$$\operatorname{gr} I_\lambda = \mathcal{I}(Gr)\ ? \tag{1}$$

Hat man für ein V_λ *beliebiger endlicher Dimension stets*

$$\mathcal{V}(\operatorname{gr} I_\lambda) = Gr\ ? \tag{2}$$

Anmerkung bei der Überarbeitung: Wenn $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_n$ und wenn außerdem der „halbeinfache Anteil“ $[\mathfrak{p},\mathfrak{p}]/\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{p}$ *einfach* ist, kann man die Gleichung (1) mit Hilfe neuer Resultate von Conze, Duflo und Hesselink tatsächlich beweisen. Duflo hat den Autor jedoch darauf hingewiesen, daß die Gleichung (1) nicht ganz allgemein richtig sein kann (Gegenbeispiel für $\mathfrak{g}=\mathfrak{so}_5$). Dixmier hat inzwischen bewiesen: Gilt (1) für $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_n$ immer, so wird durch die „Orbit-Methode“ eine Abbildung des Bahnenraumes $\mathfrak{g}/G$ in das primitive Spektrum von $U(\mathfrak{g})$ wohldefiniert.

4. Anwendungen auf das primitive Spektrum

4.1. Ist $B' \subseteq B$ eine Teilmenge der Basis, so ist $R' = R \cap \mathbb{Z}B'$ ein Unterwurzelsystem von R. Die Wurzelräume $\mathfrak{g}^\alpha$, $\alpha \in R'$, erzeugen eine halbeinfache Unteralgebra $\mathfrak{g}'$ von $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{p}=\mathfrak{b}+\mathfrak{g}'$ ist eine parabolische Unteralgebra. Die Zuordnung $B' \mapsto \mathfrak{b}+\mathfrak{g}'=\mathfrak{p}$ setzt die Teilmengen von B in Bijektion zu den parabolischen Unteralgebren $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{b}$ von $\mathfrak{g}$. Ist im folgenden eine parabolische Unteralgebra $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{b}$ gegeben, so sollen B', R', $\mathfrak{g}'$ die obige Bedeutung haben. Außerdem seien $r = \# R$ und $r' = \# R'$ die Wurzelanzahlen, $\mathfrak{h}' := \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}'$, $\mathfrak{r}$ das Nilradikal von $\mathfrak{p}$ $\left(=\sum_\alpha \mathfrak{g}^\alpha, \alpha \in R_+ \setminus R'\right)$ und $\mathfrak{r}^-$ das $\mathfrak{h}$-invariante Komplement von $\mathfrak{p}$ $\left(=\sum_\alpha \mathfrak{g}^{-\alpha}, \alpha \in R_+ \setminus R'\right)$.

4.2. Mit den Voraussetzungen von 2.3 und 4.1 gilt das folgende Lemma von Jantzen (vgl. [9], Lemma 2).

Lemma. *Gilt* $(\lambda+\delta)(H_\gamma) \notin \mathbb{N} \setminus 0$ *für alle* $\gamma \in R_+ \setminus R'$, *so ist der induzierte* $\mathfrak{g}$-*Modul* N_λ *einfach.*

Beweis. Da $\mathfrak{r}^-$ stabil unter $\mathfrak{g}'$ ist, erhält man durch Einschränken der adjungierten Operation von $\mathfrak{g}$ auf $U(\mathfrak{g})$ eine Operation von $\mathfrak{g}'$ auf $U(\mathfrak{r}^-)$. Man überlegt sich leicht, daß N_λ als $\mathfrak{g}'$-Modul isomorph zu $U(\mathfrak{r}^-) \otimes V_\lambda$ ist. Folglich operiert $\mathfrak{g}'$ auf dem induzierten Modul *lokal-endlich.*

Als einelementig erzeugter $\mathfrak{g}$-Modul mit Höchstgewicht λ ist N_λ ein homomorphes Bild des Verma-Moduls $M(\lambda+\delta)$ [7; 7.1.8 (i)]. Sei K der größte nichttriviale Untermodul von $M(\lambda+\delta)$ [7; 7.1.11]. Zu zeigen ist $N_\lambda \overset{!}{=} M(\lambda+\delta)/K = L(\lambda+\delta)$. Es genügt zu zeigen, daß $\mathfrak{g}'$ auf keinem einfachen Unterquotienten von K lokal-endlich operiert.

Sei L' ein einfacher Unterquotient von K. Nach [7; 7.6] kann man $L' = L(\mu)$ annehmen mit einem $\mu \in \mathfrak{h}^*$, und nach Bernstein-Gelfand [7; 7.6.23] gibt es $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \in R_+$, derart daß mit $w_i := s_{\gamma_i} \ldots s_{\gamma_2} s_{\gamma_1}$ und $\mu_i := w_i(\lambda+\delta)$ gilt:

$$\mu_n = \mu \quad \text{und} \quad 0 \neq \mu_i - \mu_{i+1} \in \mathbb{N}R_+ = \mathbb{N}B \tag{1}$$

für $i = 0, 1, \ldots, n$ (wobei $w_0 = 1$). Der Fall $n = 0$, das heißt $\mu = \lambda + \delta$, kann dabei ausgeschlossen werden, da der λ-Gewichtsraum von $M(\lambda+\delta)$ eindimensional ist. Da man andererseits

$$\mu_i - \mu_{i+1} = \mu_i - s_{\gamma_{i+1}} \mu_i = \mu_i(H_{\gamma_{i+1}}) \gamma_{i+1} \in \mathbb{C}\gamma_{i+1}$$

hat und da für jede Wurzel γ die Gleichung $\mathbb{Z}B \cap \mathbb{C}\gamma = \mathbb{Z}\gamma$ und somit $\mathbb{N}B \cap \mathbb{C}\gamma = \mathbb{N}\gamma$ gilt (denn γ ist Element einer $\mathbb{Z}$-Basis des Gitters $\mathbb{Z}R = \mathbb{Z}B$), folgt aus (1)

$$\mu_i(H_{\gamma_{i+1}}) \in \mathbb{N} \setminus 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq i < n .$$

Weiter folgt

$$\mu_i(H_{\gamma_{i+1}}) = (w_i(\lambda+\delta))(H_{\gamma_{i+1}}) = (\lambda+\delta)(H_{w_i\gamma_{i+1}}) \in \mathbb{N}\setminus 0$$

und daher $w_i\gamma_{i+1} \in R'$ nach der Voraussetzung des Lemmas. Durch Induktion nach i schließt man hieraus $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in R'$ (denn aus $\gamma_1, \ldots, \gamma_i \in R'$ folgt $R' = w_i^{-1} R' \ni \gamma_{i+1}$).

Die Einschränkungen der μ_i ($i = 0, 1, \ldots, n$) auf die Cartan-Unteralgebra $\mathfrak{h}'$ von $\mathfrak{g}'$ sind daher konjugiert unter der Weyl-Gruppe W' des Wurzelsystems $R'|_{\mathfrak{h}'}$. Nur eine dieser Einschränkungen – offenbar $\mu_0|_{\mathfrak{h}'}$ – kann in der „dominanten Weyl-Kammer" liegen; d.h. $(\mu_i - \delta)|_{\mathfrak{h}'}$ ist nur für $i = 0$ Höchstgewicht eines endlich-dimensionalen $\mathfrak{g}'$-Moduls. Folglich ist $\mu - \delta = \mu_n - \delta$, das Höchstgewicht von $L(\mu)$, nicht Höchstgewicht eines endlich-dimensionalen $\mathfrak{p}$-Moduls. Also operiert $\mathfrak{p}$ nicht lokal-endlich auf $L(\mu)$. Q.e.d.

4.3. Wie in der Einleitung bezeichne $\mathscr{X}$ das *primitive Spektrum* von $U(\mathfrak{g})$. Weiter sei für jedes $d \in \mathbb{N}$

$$\mathscr{X}^d = \{J \in \mathscr{X} \mid \operatorname{Dim} U(\mathfrak{g})/J = d\}$$

das durch die Gelfand-Kirillov-Dimension d bestimmte „*Stockwerk*" von $\mathscr{X}$. Das gesamte primitive Spektrum $\mathscr{X}$ wird durch $J \mapsto J \cap Z(\mathfrak{g})$ auf das maximale Spektrum des Zentrums $Z(\mathfrak{g})$ von $U(\mathfrak{g})$ projiziert, und dies wiederum wird vermöge des Harish-Chandra-Isomorphismus bijektiv auf den W-Bahnenraum $\mathfrak{h}^*/W$ abgebildet (vgl. [7]; 8.4 und 7.4). Durch Zusammensetzen erhält man eine Projektion $\pi: \mathscr{X} \twoheadrightarrow \mathfrak{h}^*/W$. Andererseits ist $\mathfrak{h}^*/W$ in natürlicher Weise eine algebraische Varietät $\cong \mathbb{C}^l$ ($l = \dim \mathfrak{h}$), nämlich das maximale Spektrum des Invariantenringes $S(\mathfrak{h})^W$, der nach [4; p. 107] ein Polynomring in $l = \dim \mathfrak{h}$ Variablen ist. Die Inklusion $S(\mathfrak{h})^W \subset S(\mathfrak{h})$ definiert dann eine endliche algebraische Abbildung $\varphi: \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{h}^*/W$ mit $\varphi(\lambda) = W\lambda$, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.

Die folgenden Hyperebenen von $\mathfrak{h}^*$,

$$E_{\alpha,n} = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \lambda(H_\alpha) = n\}, \qquad \alpha \in R_+,\ n \in \mathbb{Z},$$

heißen *Mauern* im Falle $n = 0$ und *Ausnahme-Hyperebenen* im Falle $n \neq 0$. Die „*Ausnahme-Hyperflächen*" der Einleitung sind nun nichts anderes als die Bilder der Ausnahme-Hyperebenen unter der algebraischen Abbildung φ (bis auf den Harish-Chandra-Isomorphismus).

Für die *Faser* $\mathscr{X}_p = \pi^{-1}(p)$ von $\mathscr{X}$ über dem Punkt $p = \varphi(\lambda) = W\lambda \in \mathfrak{h}^*/W$, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, wird zur Abkürzung auch $\mathscr{X}_\lambda$ geschrieben, ebenso $I_\lambda^{\min} = I_p^{\min}$ bzw. $I_\lambda^{\max} = I_p^{\max}$ für das kleinste bzw. das größte Element der Faser (vgl. 1.2). Man hat $I_\lambda^{\min} = \operatorname{Ann} M(\lambda)$. – Schließlich bezeichne

$$\mathscr{X}_\lambda^d = \mathscr{X}_\lambda \cap \mathscr{X}^d, \qquad \lambda \in \mathfrak{h}^*,\ d \in \mathbb{N},$$

den Durchschnitt der Faser $\mathscr{X}_\lambda$ mit dem „Stockwerk" $\mathscr{X}^d$.

4.4. Für jedes $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ sind die Mengen

$$R_\lambda := \{\alpha \in R \mid \lambda(H_\alpha) \in \mathbb{Z}\} \quad \text{und} \quad R_\lambda^0 := \{\alpha \in R \mid \lambda(H_\alpha) = 0\}$$

Unterwurzelsysteme von R, mit Weyl-Gruppen

$$W_\lambda := \{w \in W \mid \lambda - w\lambda \in \mathbb{Z}R\} \quad \text{bzw.} \quad W_\lambda^0 := \{w \in W \mid \lambda - w\lambda = 0\}$$

(vgl. [4], p. 227, Exercise 1). Ein Unterwurzelsystem R' von R heiße *parabolisch*, wenn es unter W konjugiert ist zu einem Unterwurzelsystem R', welches gemäß 4.1 zu einer parabolischen Unteralgebra gehört (d. h. wenn es eine Basis B' von R' und $w \in W$ gibt mit $wB' \subset B$). Zum Beispiel ist in einem Wurzelsystem vom Typ A_n *jedes* Unterwurzelsystem parabolisch. – Ein Unterwurzelsystem R' von R ist genau dann parabolisch, wenn es „linear-abgeschlossen" in R ist, das heißt wenn $R' = \mathbb{C}R' \cap R$ gilt (vgl. [4], p. 165, Proposition 24). Von dieser Kennzeichnung der parabolischen Unterwurzelsysteme werden wir im § 5 frei Gebrauch machen. Sie hat z. B. folgende unmittelbare Anwendung: *Für jedes $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ ist R_λ^0 ein parabolisches Unterwurzelsystem von R.*

4.5. Satz. *Die Linearform $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ liege auf keiner Mauer, und das Unterwurzelsystem R_λ sei parabolisch. Dann gilt mit $r := \# R$ und $r' := \# R_\lambda$:*

a) $\mathscr{X}_\lambda^{r-n} = \emptyset$ *für* $n > r'$.

b) $\mathscr{X}_\lambda^{r-r'}$ *besteht aus genau einem Element, dem Ideal* $I_\lambda^{\max}$.

c) *Das Ideal* $I_\lambda^{\max}$ *ist induziert.*

Beweis. Da die Behauptung nicht von λ selbst, sondern nur von $\varphi(\lambda) = W\lambda$ abhängt, kann man zunächst ohne Einschränkung annehmen, daß $R' := R_\lambda$ wie in 4.1 zu einer parabolischen Unteralgebra $\mathfrak{p} \supsetneqq \mathfrak{b}$ gehört und dann auch noch, daß $\lambda(H_\alpha) \in \mathbb{N} \setminus 0$ ist für alle $\alpha \in R' \cap R_+$. Daher ist die Einschränkung von $\lambda - \delta$ auf $\mathfrak{h}'$ ein dominantes Gewicht für $\mathfrak{g}'$ bezüglich B', das heißt es gibt einen einfachen endlich-dimensionalen $\mathfrak{p}$-Modul $V_{\lambda-\delta}$ mit Höchstgewicht $\lambda - \delta$. Der induzierte $\mathfrak{g}$-Modul $N_{\lambda-\delta} = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} V_{\lambda-\delta}$ ist nach Lemma 4.2 einfach, also isomorph zu $L(\lambda)$. Und nach [6; lemme 2] ist der Annullator von $L(\lambda)$ gleich $I_\lambda^{\max}$, da $\lambda(H_\gamma) \notin \{-1, -2, \ldots\}$ ist für alle $\gamma \in R_+$. Folglich ist das induzierte Ideal $I_{\lambda-\delta} = \mathrm{Ann}_{U(\mathfrak{g})} N_{\lambda-\delta}$ in diesem Falle gleich $I_\lambda^{\max}$. Nach Satz 2.3 gilt deshalb

$$\operatorname{Dim} U(\mathfrak{g})/I_\lambda^{\max} = 2 \dim \mathfrak{r} = r - r' .$$

Schließlich hat man ganz allgemein für jedes $J \in \mathscr{X}_\lambda$, $J \neq I_\lambda^{\max}$:

$$\operatorname{Dim} U(\mathfrak{g})/J > \operatorname{Dim} U(\mathfrak{g})/I_\lambda^{\max}$$

(wegen $J \subsetneqq I_\lambda^{\max}$ folgt dies aus [3; 3.6]). Damit ist alles bewiesen. Q.e.d.

Bemerkung. Satz und Beweis 4.4 bleiben offensichtlich unter folgender, geringfügig allgemeineren, Voraussetzung richtig: Es werden auch Linearformen $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ auf den Mauern zugelassen, aber es wird vorausgesetzt, daß

$$R_\lambda \setminus R_\lambda^0 = \{\gamma \in R \mid \lambda(H_\gamma) \in \mathbb{Z} \setminus 0\}$$

ein parabolisches Unterwurzelsystem ist.

4.6. Satz. *Liegt $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ auf genau einer Ausnahme-Hyperebene* (4.3), *d. h. ist $\lambda(H_\gamma) \in \mathbb{Z} \setminus 0$ für genau ein $\gamma \in R_+$, so besteht die Faser $\mathscr{X}_\lambda$ aus genau zwei primitiven Idealen: $I_\lambda^{\min} \in \mathscr{X}_\lambda^r$ und $I_\lambda^{\max} \in \mathscr{X}_\lambda^{r-2}$.*

Bemerkung. Daß in diesem Falle die primitiven Ideale $I_\lambda^{\min}$ und $I_\lambda^{\max}$ verschieden sind, und wie man sie beide als induzierte Ideale erhalten kann, wurde schon von Conze-Dixmier gezeigt [6].

Beweis. Es gibt ein $w \in W$ mit $w\gamma \in B$. Daher ist $R_\lambda \setminus R_\lambda^0 = \{\gamma, -\gamma\}$ ein parabolisches Unterwurzelsystem. Nach 4.5 (mit $r' = 2$) gilt daher $I_\lambda^{\max} \in \mathscr{X}^{r-2}$, nach 3.2 d) $I_\lambda^{\min} \in \mathscr{X}^r$. Wäre nun J ein von diesen beiden Idealen verschiedenes Element von $\mathscr{X}_\lambda$, so müßte nach [3; 3.6] gelten:

$$r - 2 < \operatorname{Dim} U(\mathfrak{g})/J < r\,.$$

Dies ist unmöglich, da andererseits $\operatorname{Dim} U(\mathfrak{g})/J$ eine gerade Zahl sein muß [3; 7.1]. Q.e.d.

4.7. Lemma. *Zu jedem Ideal I von $U(\mathfrak{g})$ gibt es ein Primideal $J \supseteq I$, derart daß $U(\mathfrak{g})/I$ und $U(\mathfrak{g})/J$ gleiche Gelfand-Kirillov-Dimension haben.*

Beweis. Sei $\sqrt{I}$ das Nilradikal von I [2; 1.2–1.3]. Dann ist $\operatorname{gr}\sqrt{I} \subseteq \sqrt{\operatorname{gr} I}$, und deshalb folgt $\operatorname{Dim} U(\mathfrak{g})/I = \operatorname{Dim} U(\mathfrak{g})/\sqrt{I}$ [3; 5.4, 3.2]. Andererseits ist $\sqrt{I}$ Durchschnitt endlich vieler Primideale $J_1, \ldots, J_n$ [2; §§ 1–2] und daher $\operatorname{Dim} U(\mathfrak{g})/\sqrt{I} = \max_j \operatorname{Dim} U(\mathfrak{g})/J_j$ nach [3; 3.1 e)]. Q.e.d.

4.8. Satz. *Seien R' ein parabolisches Unterwurzelsystem von R, $r' = \# R'$ und $r = \# R$. Falls $\lambda(H_\gamma) \in \mathbb{Z} \setminus 0$ ist für alle $\gamma \in R'$ (wobei $\lambda \in \mathfrak{h}^*$), so hat man*

$$\mathscr{X}_\lambda^{r-r'} \neq \emptyset\,.$$

Beweis. Durch Konjugation mit passendem $w \in W$ kann o.E. erreicht werden, daß R' zu einer parabolischen Unteralgebra $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{b}$ gehört und daß $\lambda - \delta$ Höchstgewicht eines einfachen endlich-dimensionalen $\mathfrak{p}$-Moduls $V_{\lambda-\delta}$ ist. Nach Satz 2.3 hat die Restklassenalgebra von $I_{\lambda-\delta} = \operatorname{Ann} U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} V_{\lambda-\delta}$ die Gelfand-Kirillov-Dimension $r - r'$ ($= 2 \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$), und nach Lemma 4.7 gibt es ein Primideal $J \supseteq I_{\lambda-\delta}$, dessen Restklassenalgebra noch dieselbe Gelfand-Kirillov-Dimension hat. Jedes Primideal, das $I_\lambda^{\min}$ enthält, ist aber primitiv [8]. Also ist $J \in \mathscr{X}_\lambda^{r-r'}$. Q.e.d.

4.9. Korollar *Sei $\lambda \in \mathfrak{h}^*$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*
(i) $\# \mathscr{X}_\lambda > 1$.
(ii) $\mathscr{X}^d \neq \emptyset$ *für ein* $d < \# R$.
(iii) $\mathscr{X}^{\# R - 2} \neq \emptyset$.
(iv) $R_\lambda \neq R_\lambda^0$.

Beweis (zyklisch). (i)$\Rightarrow$(iv) nach Dixmier (vgl. [7], 9.6.12), (iv)$\Rightarrow$(iii) nach Satz 4.8; (iii)$\Rightarrow$(ii) ist trivial und (ii)$\Rightarrow$(i) folgt aus 3.2. Q.e.d.

4.10. Korollar. *Sei speziell $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$. Sei $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ Höchstgewicht eines endlich-dimensionalen einfachen $\mathfrak{g}$-Moduls, also $R_\lambda = R$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*
(i) $\mathscr{X}^d \neq \emptyset$.
(ii) $\mathscr{X}_\lambda^d \neq \emptyset$.
(iii) $d = 2 \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ *für eine parabolische Unteralgebra* $\mathfrak{p}$ *von* $\mathfrak{g}$.
(iv) $d = \dim Gx$ *für ein nilpotentes Element* $x \in \mathfrak{g}$.

Beweis. Zyklisch. (i)$\Rightarrow$(iv) gilt für beliebiges halbeinfaches $\mathfrak{g}$ nach [3; 7.1]. (iv)$\Rightarrow$(iii) folgt durch Betrachten der Jordanschen Normalform für x und Berechnen des Zentralisators in $\mathfrak{g}$. (iii)$\Rightarrow$(ii) folgt aus 4.8, und (ii)$\Rightarrow$(i) ist trivial. Q.e.d.

Bemerkung. Für einfache Lie-Algebren $\mathfrak{g} \not\cong \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ ist die Aussage (iv)$\Rightarrow$(iii) stets falsch. Ebensowenig gilt dann (i)$\Rightarrow$(iii) (verwende [10] und 2.3). Im Falle $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(4, \mathbb{C})$ haben sich auch (i) und (ii) als nicht äquivalent erwiesen [11]. Es wäre aber möglich, daß (i)$\Leftrightarrow$(iv) ganz allgemein richtig ist.

5. Bestimmung der zentralen Charaktere zu denen genau zwei primitive Ideale gehören

Welche der Fasern $\mathscr{X}_\lambda$ des Raumes $\mathscr{X}$ bestehen aus genau zwei Elementen? In diesem Abschnitt soll diese Frage zunächst vollständig beantwortet und dann geometrisch interpretiert werden [das erste im Satz 5.1 (iii) und das zweite in den Sätzen 5.4 und 5.5]. Für λ außerhalb der Wände haben wir die Antwort schon in 4.6 gegeben; es wird sich zeigen, daß die Situation auf den Wänden sehr viel komplizierter werden kann. Insbesondere reicht dort die schwache Version des Jantzenschen Irreduzibilitäts-Kriteriums (Lemma 4.2), mit der wir uns für 4.6 beholfen haben, nicht mehr aus: Wir werden auf die schärfere Originalfassung in [9] zurückgreifen müssen.

5.1. Für jedes $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ betrachten wir neben den (in 4.4 eingeführten) Wurzelsystemen R_λ und R_λ^0 noch die Teilmengen

$$R_\lambda^+ := \{\alpha \in R \mid \lambda(H_\alpha) \in \mathbb{N} \setminus 0\} \quad \text{und} \quad R_\lambda^- := \{\alpha \in R \mid \lambda(H_\alpha) \in -\mathbb{N} \setminus 0\}.$$

Jedes Element von $\mathfrak{h}^*$ ist unter W offenbar zu einem λ mit $R_\lambda^+ \subset R_+$ konjugiert. Nach Dixmier ist $\#\mathscr{X}_\lambda \geq 2$ mit $R_\lambda^+ \neq \emptyset$ äquivalent.

Satz. *Sei $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ mit $\emptyset \neq R_\lambda^+ \subset R_+$. Folgende Aussagen sind äquivalent.*

(i) $\#\mathscr{X}_\lambda = 2$.

(ii) $\operatorname{Dim} U(\mathfrak{g})/I_\lambda^{\max} = \# R - 2$.

(iii) *Für je zwei $\mathbb{C}$-unabhängige Wurzeln $\alpha, \beta \in R_\lambda$* gilt $(\mathbb{C}\alpha + \mathbb{C}\beta) \cap R_\lambda^0 \neq \emptyset$.

(iv) *Es gibt ein $w \in W$ mit $R_{w\lambda}^+ \subset R_+$, eine minimale $\mathfrak{b}$ echt umfassende parabolische Unteralgebra $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{g}$ und einen endlich-dimensionalen einfachen $\mathfrak{p}$-Modul V' mit höchstem Gewicht $w\lambda - \delta$, so daß der von V' induzierte $\mathfrak{g}$-Modul N' einfach ist.*

Beweis. (i)$\Leftrightarrow$(ii) ist lediglich eine Wiederholung: Aus (i) folgt (ii), weil dann $\mathscr{X}_\lambda^{\# R}$ und $\mathscr{X}_\lambda^{\# R - 2}$ nach 4.9 bzw. 3.2 nicht leer sind. Für die umgekehrte Implikation argumentiert man wie im Beweis von 4.6 mit den Sätzen 3.6 und 7.1 aus [3].

(iv)$\Rightarrow$(ii): Die Einfachheit von N' bedeutet $N' = L(w\lambda)$, und aus $R_{w\lambda}^+ \subset R_+$ folgt $R_{w\lambda}^- \cap R_+ = (-R_{w\lambda}^+) \cap R_+ = \emptyset$. Deshalb kann man [6], Lemme 2 anwenden und erhält

$$I_\lambda^{\max} = I_{w\lambda}^{\max} = \operatorname{Ann} L(w\lambda) = \operatorname{Ann} N'.$$

Nach Satz 2.3 ist aber $\operatorname{Dim} U(\mathfrak{g})/\operatorname{Ann} N' = 2 \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{p} = \# R - 2$.

(ii)$\Rightarrow$(iii): Angenommen, es gibt $\mathbb{C}$-unabhängige $\alpha, \beta \in R_\lambda$ mit $(\mathbb{C}\alpha + \mathbb{C}\beta) \cap R_\lambda^0 = \emptyset$. Dann ist $R' := (\mathbb{C}\alpha + \mathbb{C}\beta) \cap R$ ein parabolisches Unterwurzelsystem vom Rang 2 mit $R' \cap R_\lambda^0 = \emptyset$; im Falle $R' \subset R_\lambda$ folgt die Behauptung daher sofort aus 4.8. Sei nun $R' \not\subset R_\lambda$. Wegen $\alpha, \beta \in R_\lambda$ hat das System $R'' := R_\lambda \cap R' \subsetneqq R'$ immer noch Rang 2. Daraus folgt, daß R' vom Typ B_2 bzw. G_2 (und R'' vom Typ $A_1 \times A_1$ bzw. $A_1 \times A_1$

oder A_2) ist. Insbesondere sind wir damit fertig, falls das Coxeter-Diagramm von R nur einfache Striche enthält.

Sei nun $\mathfrak{g}'$ die $\mathfrak{h}$ umfassende reduktive Unteralgebra mit Wurzelsystem R'. Sei L' der einfache $\mathfrak{g}'$-Modul mit höchstem Gewicht $\lambda-\delta$ und sei I' dessen Annullator in $U(\mathfrak{g}')$. Sei weiter $r := \# R$ und $r' := \# R'$ $(=8$ bzw. $12)$. Nach (ii)$\Rightarrow$(i) und [13] (Corollar 2.15, angewendet auf die halbeinfache Lie-Algebra $[\mathfrak{g}', \mathfrak{g}']$) ist dann

$$\operatorname{Dim} U(\mathfrak{g}')/I' < r' - 2 .$$

Ist nun $\mathfrak{p}'$ die parabolische Unteralgebra $\mathfrak{b}+\mathfrak{g}'$ und $\mathfrak{n}'$ ihr Nilradikal, so kann man L' als $\mathfrak{p}'$-Modul mit $\mathfrak{n}'L'=0$, also mit Annullator $J := I' + \mathfrak{n}'U(\mathfrak{p}')$ auffassen, und es ist $U(\mathfrak{p}')/J \cong U(\mathfrak{g}')/I'$. Sei schließlich I der Annullator des von L' induzierten $\mathfrak{g}$-Moduls. Nach Conze [5] gibt es eine Einbettung

$$U(\mathfrak{g})/I \hookrightarrow (U(\mathfrak{p}')/J) \otimes \mathbb{A}_m$$

mit $m = \dim \mathfrak{n}'$ (vgl. 2.4); also folgt

$$\begin{aligned}\operatorname{Dim} U(\mathfrak{g})/I_\lambda^{\max} &\leqq \operatorname{Dim} U(\mathfrak{g})/I \leqq 2m + \operatorname{Dim} U(\mathfrak{p}')/J < 2m + r' - 2 \\ &= r - r' + r' - 2 = r - 2 ,\end{aligned}$$

und (ii) gilt nicht. Dies beweist (ii)$\Rightarrow$(iii).

(iii)$\Rightarrow$(iv): Es bezeichne B_λ die Basis von R_λ mit $R_\lambda \cap R_+$ als System positiver Wurzeln. Wegen $R_\lambda^+ \subset R_+$ ist $B_\lambda^0 := B_\lambda \cap R_\lambda^0$ eine Basis von R_λ^0. Wegen $\mathbb{C}(B_\lambda \setminus B_\lambda^0) \cap R_\lambda^0 = \emptyset$ folgt aus (iii) offenbar, daß $B_\lambda \setminus B_\lambda^0$ aus einer einzigen Wurzel α besteht. Wir wollen jetzt λ durch ein geeignetes Konjugiertes ersetzen, um zu erreichen, daß diese Wurzel zu B gehört. Zunächst ergänzen wir α so zu einer Basis B_1 von R, daß die Wurzeln in $R_\lambda \cap R_+$ auch für B_1 positiv sind; daß dies möglich ist, kann man entweder Fall für Fall verifizieren oder aber aus [13], Lemma 4.7 entnehmen. Nun gibt es (genau) ein $w \in W$ mit $wB_1 = B$. Da $R_\lambda \cap R_+$ positiv für B_1 ist, folgt $w(R_\lambda \cap R_+) \subset R_+$ und daher

$$R_{w\lambda}^+ = wR_\lambda^+ \subset w(R_\lambda \cap R_+) \subset R_+ .$$

Indem wir λ durch $w\lambda$ ersetzen, können wir also von vornherein annehmen, daß $B_\lambda = B_\lambda^0 \cup \{\alpha\}$ mit $\alpha \in B$ ist.

Sei $\mathfrak{p} := \mathfrak{b} + \mathbb{C}x_{-\alpha}$ die zu $\{\alpha\}$ gehörende parabolische Unteralgebra und V' der endlich-dimensionale einfache $\mathfrak{p}$-Modul mit höchstem Gewicht $\lambda-\delta$. Wir müssen nur noch zeigen, daß der von V' induzierte $\mathfrak{g}$-Modul N' einfach ist. Dies ist nach Jantzen z. B. dann der Fall, wenn

$$\lambda(H_{s_\beta \alpha}) = 0 \quad \text{für alle} \quad \beta \in R_\lambda^+, \ \beta \neq \alpha ,$$

gilt ([9], Corollar 3 zu Satz 3). Wir nehmen deshalb von jetzt ab an, daß es eine Wurzel $\beta \in R_\lambda^+$ mit $\beta \neq \alpha$ und $\lambda(H_{s_\beta \alpha}) \neq 0$ gibt. Die Wurzeln α, β sind positiv und verschieden und deshalb $\mathbb{C}$-unabhängig; sei $S := R \cap (\mathbb{C}\alpha + \mathbb{C}\beta)$ das parabolische Unterwurzelsystem vom Rang 2 in R, in dem sie liegen. Nach Wahl von α, β ist die Menge $\{\pm\alpha, \pm\beta, \pm s_\beta\alpha\}$ in $R_\lambda \setminus R_\lambda^0$ enthalten; nach (iii) ist S daher echt größer als diese Menge. Hieraus folgt, daß der Typ von S weder A_2 noch $A_1 \times A_1$ sein kann. Insbesondere ist der Satz damit bewiesen, falls das Coxeter-Diagramm von

R nur einfache Striche enthält. – Für beliebiges R beweist man (iii)$\Rightarrow$(iv), indem man oben anstelle des Korollars 3 die Bemerkungen 1), 2) und 6) zum Satz 3 in [9] heranzieht. Q.e.d.

Bemerkung. Man kann diesen Satz auch mit Hilfe der Klassifikation der Wurzelsysteme „Fall für Fall" beweisen (unter Benutzung der Bemerkungen 1), 2) und 8) in [9]); das ist zwar nicht elegant, liefert aber mehr Informationen über die Fasern $\mathscr{X}_\lambda$ der Kardinalität >2 als die Argumente oben.

5.2. Wir bezeichnen mit E die Vereinigung aller Ausnahme-Hyperebenen in $\mathfrak{h}^*$ und mit F die Vereinigung aller Ausnahme-Hyperflächen in $\mathfrak{h}^*/W$ (vgl. 4.3), also

$$E := \bigcup_{\alpha\in R_+,\, n\in\mathbb{Z}\setminus 0} E_{\alpha,n} \quad \text{mit} \quad E_{\alpha,n} = \{\lambda\in\mathfrak{h}^* \mid \lambda(H_\alpha) = n\} \quad \text{und}$$
$$F := \varphi(E).$$

Wir bezeichnen außerdem für jedes $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ mit E_λ die Vereinigung der durch λ laufenden Ausnahme-Hyperflächen und für jedes $p\in\mathfrak{h}^*/W$ mit F_p die Vereinigung der durch p verlaufenden Ausnahme-Hyperflächen, also

$$E_\lambda := \bigcup_{\alpha\in R_\lambda^+} E_{\alpha,\lambda(H_\alpha)} \quad \text{und} \quad F_p = \varphi(E_\lambda) \quad \text{für} \quad p = \varphi(\lambda).$$

Weder E noch F sind algebraische Untervarietäten, wohl aber E_λ und F_p für alle λ und alle p. Wir können E und F daher „lokal" als algebraische Varietäten ansehen: Zum Beispiel ist ein Punkt p von F „singulär", wenn F_p in p eine Singularität hat.

Definition. Ein Punkt $p\in\mathfrak{h}^*/W$ heißt
regulär, wenn er nicht in F liegt,
singulär, wenn er ein singulärer Punkt von F ist und
subregulär, wenn er weder regulär noch singulär ist.

Ein Gewicht $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ heißt *regulär (singulär, subregulär)*, wenn $\varphi(\lambda)$ es ist.

5.3. Die oben eingeführten Teilmengen E_λ von $\mathfrak{h}^*$ sind unter W_λ (4.4) stabil; wir können also z. B. die algebraische Varietät E_λ/W_λ^0 bilden. Die Vereinigung $WE_\lambda = \bigcup_{w\in W} E_{w\lambda}$ ist sogar W-stabil, und wir können die algebraische Varietät WE_λ/W bilden und mit $\varphi(E_\lambda) = F_{\varphi(\lambda)} \subset \mathfrak{h}^*/W$ identifizieren.

Lemma. *Sei* $\lambda\in\mathfrak{h}^*$.

a) *Genau dann ist λ singulär, wenn das Bild von λ in E_λ/W_λ^0 ein singulärer Punkt von E_λ/W_λ^0 ist.*

b) *Ist λ subregulär, so operiert W_λ^0 transitiv auf R_λ^+.*

Beweis. a) Wir betrachten das folgende Diagram kanonischer algebraischer Abbildungen:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathfrak{h}^* & \xrightarrow{\varphi'} & \mathfrak{h}^*/W_\lambda^0 & \xrightarrow{\varphi''} & \mathfrak{h}^*/W \\
\cup & & \cup & & \cup \\
E_\lambda & \xrightarrow{\psi'} & E_\lambda/W_\lambda^0 & \xrightarrow{\psi''} & WE_\lambda/W.
\end{array}$$

Da W_λ^0 der Stabilisator des Punktes λ von E_λ in W ist, muß der Morphismus ψ'' im Punkte $\psi'(\lambda)$ «étale» sein (siehe etwa [14], p. 111, Proposition 2.2). Insbesondere ist $\psi''(\psi'(\lambda))=\varphi(\lambda)$ genau dann ein singulärer Punkt von $E_\lambda/W=F_{\varphi(\lambda)}\subset F$, wenn $\psi'(\lambda)$ ein singulärer Punkt von E_λ/W_λ^0 ist.

b) Die irreduziblen Komponenten von E_λ sind die Hyperebenen $E_{\alpha,n}$ mit $\alpha\in R_\lambda^+$ und $n=\lambda(H_\alpha)$; ihre Bilder unter ψ' sind irreduzible Komponenten von E_λ/W_λ^0 (weil ψ' endliche Fasern hat) und verlaufen durch den Punkt $\psi'(\lambda)$. Gibt es nun zwei verschiedene solche Komponenten, so ist $\psi'(\lambda)$ ein singulärer Punkt von E_λ/W_λ^0 (als Schnittpunkt zweier irreduzibler Komponenten). Aber λ sollte subregulär sein. Also folgt nach a), daß E_λ/W_λ^0 irreduzibel ist, also daß alle $E_{\alpha,n}\subset E_\lambda$ dasselbe Bild in E_λ/W_λ^0 haben und folglich unter W_λ^0 konjugiert sind. Wegen $wE_{\alpha,n}=E_{w\alpha,n}$ für alle $w\in W$ folgt hieraus insbesondere, daß alle $\alpha\in R_\lambda^+$ unter W_λ^0 konjugiert sind.

5.4. Satz. *Für jedes subreguläre $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ gilt $\#\mathscr{X}_\lambda=2$.*

Beweis. Jedenfalls gilt $\#\mathscr{X}_\lambda\geqq 2$. Nehmen wir $\#\mathscr{X}_\lambda>2$ an! Aus Satz 5.1 (iii) folgt, daß es ein parabolisches Unterwurzelsystem T vom Rang 2 in R gibt, so daß auch das Wurzelsystem $T\cap R_\lambda$ noch Rang 2 hat, aber $T\cap R_\lambda^0=\emptyset$ ist. Da T linear abgeschlossen ist (4.4), gibt es offenbar ein $v\in\mathfrak{h}^*$ mit $R_v^0=T$. Wie man sich leicht überlegt, gibt es zu v eine (Zariski-) dichte Teilmenge D in $\mathbb{C}$, so daß für alle $c\in D$

$$R_{\lambda+cv}=R_\lambda\cap R_v^0=R_\lambda\cap T \quad \text{und (folglich)} \quad R_{\lambda+cv}^0=\emptyset$$

gilt. Insbesondere ist dann $\#R_{\lambda+cv}^+\geqq 2$ für $c\in D$, und $W_{\lambda+cv}^0=\{1\}$ operiert nicht transitiv auf $R_{\lambda+cv}^+$. Nach 5.3 b) sind daher alle Gewichte aus $\lambda+Dv$ nicht singulär.

Die Gerade $\lambda+\mathbb{C}v$ ist ganz in E_λ enthalten; die Bildkurve $\varphi(\lambda+\mathbb{C}v)$ ist also ganz in $F_{\varphi(\lambda)}$ enthalten, und sie enthält eine dichte Teilmenge von singulären Punkten der Varietät $F_{\varphi(\lambda)}$. Die Menge der singulären Punkte ist aber abgeschlossen. Folglich sind *alle* Punkte der Kurve $\varphi(\lambda+\mathbb{C}v)$ singulär in $F_{\varphi(\lambda)}$, insbesondere auch $\varphi(\lambda)$. Also war λ nicht subregulär, und der Satz ist bewiesen.

5.5. Satz. *Das Coxeter-Diagramm von R enthalte nur einfache Striche. Sei $\lambda\in\mathfrak{h}^*$. Genau dann gilt $\#\mathscr{X}_\lambda=2$, wenn λ subregulär ist.*

Beweis. Nach 5.4 brauchen wir nur noch $\#\mathscr{X}_\lambda=2$ anzunehmen und zu zeigen, daß λ nicht singulär ist. Zunächst ist $R_\lambda^+\neq\emptyset$, und aus dem Satz 5.1 [(i)⇒(iii)] geht hervor, daß R_λ^+ in einer einzigen irreduziblen Komponente S von R_λ enthalten ist.

Behauptung. *S hat Typ A_l ($l\geqq 1$) und $S\cap R_\lambda^0$ hat Typ A_{l-1}.* (Konvention: $A_0=\emptyset$.)

Zum Beweis dieser Behauptung geht man von der Aussage (iv) des Satzes 5.1 aus und benutzt Jantzens Bemerkungen 1), 2) und 8) zu seinem Satz 3 in [9]. (Oder man schließt alle anderen Möglichkeiten Fall für Fall aus.)

Nach [4] (Planche I) können wir nun $\mathfrak{h}^*$ in einen $\mathbb{C}$-Vektorraum V mit einem Skalarprodukt und einer Orthonormalbasis $\varepsilon_0,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ einbetten, so daß das Skalarprodukt auf $\mathfrak{h}^*$ mit dem vorgegebenen übereinstimmt und so daß

$$S=\{\pm\varepsilon_i\pm\varepsilon_j|0\leqq i\leqq j\leqq 1\},$$

$$S\cap R_\lambda^0=\{\pm\varepsilon_i\pm\varepsilon_j|1\leqq i<j\leqq 1\}$$

und
$$R_\lambda^+ = \{\varepsilon_0 - \varepsilon_j | 1 \leqq j \leqq 1\}$$
ist. Außerdem operiert W_λ sogar auf ganz V, indem es $\varepsilon_{l+1}, \ldots, \varepsilon_n$ fest läßt und auf $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_l$ die volle Permutationsgruppe in $1+1$ Ziffern induziert. Seien $\varepsilon_0^*, \ldots, \varepsilon_n^*$ die zu $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n$ duale Basis von V und $e_i \in \mathfrak{h} = \mathfrak{h}^{**}$ die Einschränkung von ε_i^* auf $\mathfrak{h}^*$ $(0 \leqq i \leqq {}^l)$. Die Gruppe W_λ^0 läßt nun e_0 fest und permutiert nur die Indizes $1, \ldots, l$. Bezeichnen wir daher mit $\sigma_1, \ldots, \sigma_1 \in S(\mathfrak{h})$ die symmetrischen Funktionen in den „Koordinatenfunktionen" $e_1, \ldots, e_l \in \mathfrak{h}$, so gehören $\sigma_1, \ldots, \sigma_l$ zum Ring $S(\mathfrak{h})^{W_\lambda^0}$ der W_λ^0-invarianten Funktionen auf $\mathfrak{h}^*$, das heißt zum Koordinatenring der Varietät $\mathfrak{h}^*/W_\lambda^0$; sie sind algebraisch unabhängig und lassen sich sogar zu einem System algebraisch unabhängiger Erzeugender von $S(\mathfrak{h})^{W_\lambda^0}$ ergänzen. (Hierzu benutzt man [4], Ch. V, no. 5.3, sowie die Tatsache, daß $S \cap R_\lambda^0$ eine Komponente von R_λ^0 ist.) Mit anderen Worten: Die Funktionen $\sigma_1, \ldots, \sigma_l$ gehören zu einem System affiner Koordinaten des *affinen Raumes* $\mathfrak{h}^*/W_\lambda^0$. Wir wollen jetzt die Hyperfläche $E_\lambda/W_\lambda^0 \subset \mathfrak{h}^*/W_\lambda^0$ durch eine Gleichung in $\sigma_1, \ldots, \sigma_l$ beschreiben und an dieser Gleichung ablesen, daß E_λ/W_λ^0 im Bild von λ keine Singularität hat. Nach 5.3 a) wird der Satz damit bewiesen sein.

Sei $m = \lambda(H_\alpha)$ mit $\alpha \in R_\lambda^+$; wegen $W_\lambda^0 \alpha = R_\lambda^+$ hängt diese Zahl nicht von der Wahl von α in R_λ^+ ab, und E_λ ist die Vereinigung der Hyperebenen $E_{\alpha,m}$ mit $\alpha \in R_\lambda^+$, gegeben jeweils durch eine der Gleichungen
$$e_0 - e_i - m \equiv 0 \quad (i = 1, \ldots, l). \tag{1}$$
Beachtet man, daß $e_0 + e_1 + \ldots + e_l = 0 = e_0 + \sigma_1$ ist, so lautet die Gleichung (1) auch
$$\sigma_1 + m + e_i \equiv 0 \quad (1 \leqq i \leqq l). \tag{2}$$
Die Gleichung
$$\prod_{i=1}^{l} (\sigma_1 + m + e_i) = \sum_{i=0}^{l} \sigma_i (\sigma_1 + m)^{l-i} \equiv 0. \tag{3}$$
$(\sigma_0 := 1)$ definiert nun eine Hyperfläche in $\mathfrak{h}^*/W_\lambda^0$, welche die Bilder aller l Hyperebenen (2) und damit E_λ/W_λ^0 umfaßt. Diese Hyperfläche muß sogar irreduzibel sein, weil das Polynom $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_l)$, das in (3) auftritt, offensichtlich irreduzibel ist. Also ist (3) die gesuchte definierende Gleichung für E_λ/W_λ^0 in $\mathfrak{h}^*/W_\lambda^0$. Die Hyperfläche (3) kann nur dort Singularitäten haben, wo alle partiellen Ableitungen des Polynoms $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_l)$ verschwinden. Aber
$$\frac{\partial}{\partial \sigma_l} f(\sigma_1, \ldots, \sigma_l) = 1$$
verschwindet nie. Folglich ist E_λ/W_λ^0 singularitätenfrei und der Satz ist bewiesen.

5.6. *Bemerkungen* und *Beispiele*. Der Satz 5.5 läßt sich in dieser Form nicht auf beliebige $\mathfrak{g}$ verallgemeinern: Zum Beispiel gibt es bei $\mathfrak{g}$ vom Typ B_2 bzw. G_2 auch *singuläre* Gewichte λ mit $\# \mathscr{X}_\lambda = 2$. Zur Veranschaulichung werden die Ausnahmehyperflächen für diese Typen hier zeichnerisch dargestellt (siehe unten); dabei sind die singulären Punkte $p = \varphi(\lambda)$ mit $\# \mathscr{X}_\lambda = 2$ durch eine „2" in der Abbildung gekennzeichnet. – Neue Resultate von Conze-Duflo sowie Beispiele beim Typ B_2 lassen vermuten, daß die folgende Modifizierung der Aussage im Satz 5.5 allgemein gilt: Sei $\hat{\mathscr{X}}_\lambda$ die Menge *aller* (zweiseitigen) Ideale I von $U(\mathfrak{g})$ mit $I_\lambda^{\min} \subset I \subset I_\lambda^{\max}$. *Vermutung: Genau dann ist* $\# \hat{\mathscr{X}}_\lambda = 2$, *wenn* λ *subregulär ist*. Die Sätze

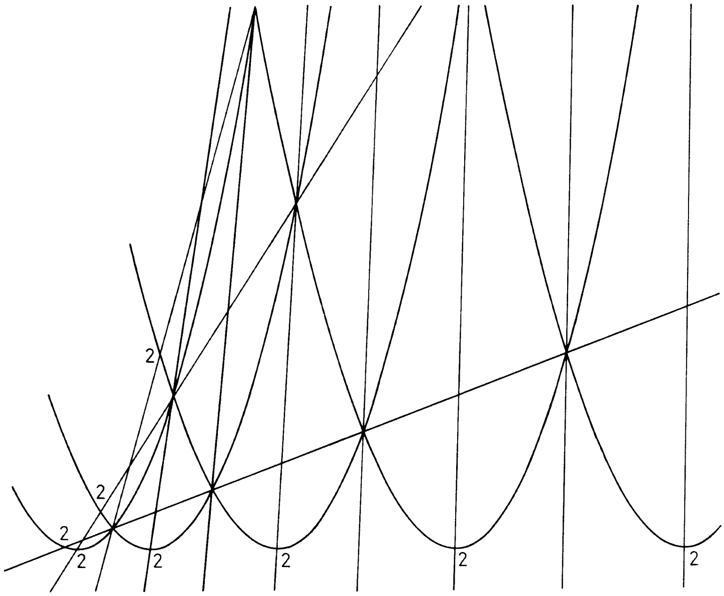


Abb. 2. Subreguläre und singuläre zentrale Charaktere für $\mathfrak{g}$ vom Typ B_2 (vgl. 5.6 und 4.3)

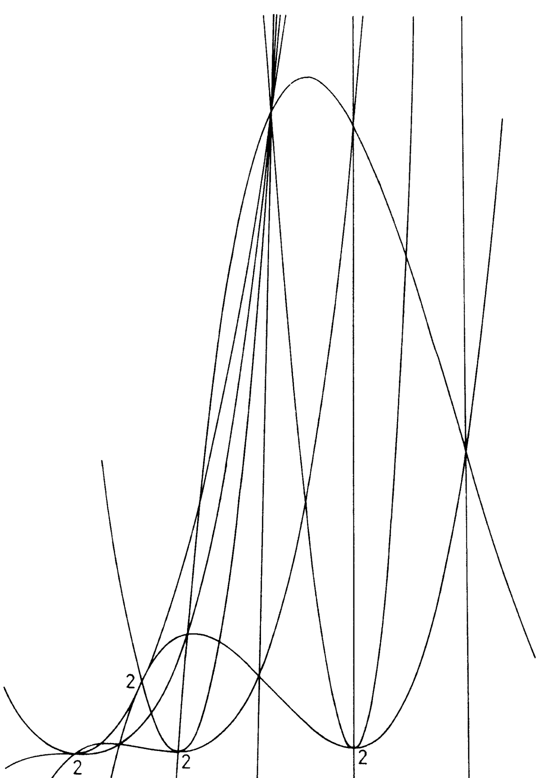


Abb. 3. Subreguläre und singuläre zentrale Charaktere für $\mathfrak{g}$ vom Typ G_2 (vgl. 5.6 und 4.3)

5.4 und 5.5 legen die weitergehende Frage nahe, ob es einen allgemeinen Zusammenhang zwischen der Struktur von $\hat{\mathscr{X}}_\lambda$ einerseits und der lokalen Struktur der algebraischen Varietät F_p (5.2) im Punkte $p=\varphi(\lambda)$ andererseits gibt.

Erläuterungen zu den *Abbildungen.* Sei $\mathfrak{g}$ vom Typ A_2, B_2 bzw. G_2. Da der Rang gleich zwei ist, ist $\mathfrak{h}^*/W$ eine affine Ebene, und die Ausnahmehyperflächen sind Kurven. Wir realisieren das Wurzelsystem R wie in [4] (Tafeln I, II, IX) in einem euklidischen Raum V mit Orthonormalbasis $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ (bzw. $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ beim Typ B_2) und bezeichnen mit e_1, e_2, e_3 (bzw. e_1, e_2)$\in\mathfrak{h}=\mathfrak{h}^{**}$ die Einschränkungen der dazu dualen Basis auf $\mathfrak{h}^*\subset V\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$. Dann sind

$$
\begin{array}{llll}
 & x:=e_1e_2+e_2e_3+e_1e_3 & \text{und}\quad y:=e_1e_2e_3 & (\text{beim Typ } A_2)\\
\text{bzw.} & x:=e_1^2+e_2^2 & \text{und}\quad y:=e_1^2e_2^2 & (\text{beim Typ } B_2)\\
\text{bzw.} & x:=e_1^2+e_2^2+e_3^2 & \text{und}\quad y:=e_1^2e_2^2e_3^2 & (\text{beim Typ } G_2)
\end{array}
$$

algebraisch unabhängige Erzeugende von $S(\mathfrak{h})^W$, und die Ausnahmekurven sind gegeben durch

$$
\begin{array}{llll}
 & x=-\tfrac{1}{3}(t^2+nt+n^2), & y=\tfrac{1}{27}(2t+n)(t-n)(t+2n) & (\text{beim Typ } A_2),\\
 & (t \text{ ein komplexer Parameter}) & & \\
\text{bzw.} & y\equiv\tfrac{1}{4}(x-n^2)^2, & y\equiv\tfrac{1}{4}n^2(x-\tfrac{1}{4}n^2) & (\text{beim Typ } B_2),\\
\text{bzw.} & y\equiv n^2(\tfrac{1}{2}x-n^2)^2, & y\equiv\tfrac{1}{27}(\tfrac{1}{2}x-n^2)^2(2x-n^2) & (\text{beim Typ } G_2),
\end{array}
$$

jeweils für $n=1,2,3,4,\ldots$. In den Abbildungen sind die reellen Punkte dieser Kurvenscharen dargestellt.

Literatur

1. Borel, A.: Linear algebraic groups. New York: Benjamin 1969
2. Borho, W., Gabriel, P., Rentschler, R.: Primideale in Einhüllenden auflösbarer Lie-Algebren. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1973
3. Borho, W., Kraft, H.: Über die Gelfand-Kirillov-Dimension. Math. Ann. **220**, 1—24 (1976)
4. Bourbaki, N.: Groupes et algèbres de Lie. Chap. IV—VI. Paris: Hermann 1968
5. Conze, N.: Algèbres d'opérateurs différentiels et quotients des algèbres enveloppantes. Bull. Soc. Math. France **102**, 379—415 (1974)
6. Conce, N., Dixmier, J.: Idéaux primitifs dans l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie semisimple. Bull. Sci. Math. **96**, 339—351 (1972)
7. Dixmier, J.: Algèbres enveloppantes. Paris: Gauthier-Villars 1974
8. Dixmier, J.: Idèaux primitifs dans l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie semi-simple complexe. C.R. Acad. Sci. **272**, 1628—1630 (1971)
9. Jantzen, J.C.: Kontravariante Formen auf induzierten Darstellungen halbeinfacher Lie-Algebren. Math. Ann. (erscheint demnächst)
10. Joseph, A.: The minimal orbit in a simple Lie-algebra and its associated maximal ideal. Ann. scient. Éc. Norm. Sup. **9**, 1—30 (1976)
11. Joseph, A.: Primitive ideals in the enveloping algebras of sl_3 and sp_4. Preprint. Paris 1976
12. Richardson, R.W.: Conjugacy classes in parabolic subgroups of semi-simple algebraic groups. Bull. London M.S. **6**, 21—24 (1974)
13. Borho, W., Jantzen, J.C.: Primitive Ideale in der Einhüllenden einer halbeinfachen Lie-Algebra. Inventiones math. (erscheint demnächst)
14. Grothendieck, A.: Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1). Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1971

Angenommen am 23. Juli 1976

Math. Ann. 225, 195—204 (1977)

Hypersurfaces with Constant Scalar Curvature

Shiu-Yuen Cheng
Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, New York, N.Y. 10012, USA

Shing-Tung Yau
Mathematics Department, Stanford University, Stanford, CA 94305, USA

Introduction

Let M be a complete two-dimensional surface immersed into the three-dimensional Euclidean space. Then a classical theorem of Hilbert says that when the curvature of M is a non-zero constant, M must be the sphere. On the other hand, when the curvature of M is zero, a theorem of Hartman-Nirenberg [4] says that M must be a plane or a cylinder. These two theorems complete the classification of complete surfaces with constant curvature in R^3.

Generalizations of these theorems have been attempted by many authors (see the references in Kobayashi-Nomizu [5]). A typical theorem of this type is the following theorem of Thomas [7] which says that an Einstein hypersurface in R^{n+1} with $n \geqq 3$ is locally a sphere. As far as we know, all these theorems assume something on the Ricci tensor. In this paper, we propose to study complete hypersurfaces with constant scalar curvature. Like the theorems in two-dimension, this requires more global consideration.

When M is compact, we assume that the ambient manifold has constant sectional curvature c (and need not be complete). Suppose M has non-negative sectional curvature and constant scalar curvature $\geqq c$. Then we prove that either M is totally umbilical, the Riemannian product of two totally umbilical constantly curved submanifold, or M is flat. As a corollary, one sees that if the ambient manifold is R^{n+1}, M must be the sphere and if the ambient manifold is S^{n+1}, M has the form $S^{n-p} \times S^p$. In the course of the proof of this theorem, we introduce some self-adjoint differential operators which are interesting for their own right.

When M is complete and non-compact, we assume that M has non-negative curvature and the ambient space is R^{n+1}. In this case, we use the eigenvalue problem method initiated in the first author's thesis. We study the growth of the first eigenvalue of the operator mentioned above and compare this growth condition with the geometric equations that we derive. Our conclusion is that M must be a generalized cylinder $S^p \times R^{n-p}$.

The operators and the estimates that we have in this paper should have more applications. We hope we can come back to this again.

1. Second Order Differential Operators on a Riemannian manifold

Let $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ be a local orthonormal frame field defined on a Riemannian manifold M. Then the structure equations of M are given by

$$d\omega_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j, \qquad \omega_{ij} + \omega_{ji} = 0, \tag{1.1}$$

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} + \Omega_{ij}, \tag{1.2}$$

where

$$\Omega_{ij} = -\tfrac{1}{2} \sum_{k,l} R_{ijkl}\, \omega_k \wedge \omega_l \tag{1.3}$$

and

$$R_{ijkl} + R_{ijlk} = 0. \tag{1.4}$$

For any C^2-function f defined on M, we define its gradient and hessian by the following formulas

$$df = \sum_i f_i \omega_i, \tag{1.5}$$

$$\sum_j f_{ij} \omega_j = df_i + \sum_j f_j \omega_{ji}. \tag{1.6}$$

Let $\phi = \sum_{i,j} \phi_{ij} \omega_i \otimes \omega_j$ be a symmetric tensor defined on M. Then we can define an operator associated to ϕ by

$$\Box f = \sum_{i,j} \phi_{ij} f_{ij}. \tag{1.7}$$

The first observation is the following:

Proposition 1. *Let M be a compact orientable Riemannian manifold. Then the operator $\Box$ is self-adjoint iff*

$$\sum_j \phi_{ijj} = 0 \tag{1.8}$$

for all i.

Proof. Note that the covariant derivative of ϕ_{ij} is defined by

$$\sum_k \phi_{ijk} \omega_k = d\phi_{ij} + \sum_k \phi_{kj} \omega_{ki} + \sum_k \phi_{ik} \omega_{kj} \tag{1.9}$$

so that the condition (1.8) is independent of the choice of the frame field.

From condition (1.8), one verifies that for any C^2-functions f and g, we have

$$\int_M (\Box f) g = \int_M d\left(\sum_{i,j} \phi_{ij} f_i g * \omega_j\right) - \int_M \sum_{i,j} \phi_{ij} f_i g_j. \tag{1.10}$$

Hence, by Stokes' theorem,

$$\int_M (\Box f) g = \int_M f(\Box g). \tag{1.11}$$

Conversely, it is straightforward to see that the validity of (1.11) for all f and g implies (1.8).

Based on Proposition 1, let us give two examples of self-adjoint operators. Let $R_{ij}=\sum_k R_{ikjk}$ be the Ricci tensor of the Riemannian manifold. Then we claim that the operator $\Box f=\sum_{i,j}\left(\frac{R}{2}\delta_{ij}-R_{ij}\right)f_{ij}$ is self-adjoint, where $R=\sum_i R_{ii}$ is the scalar curvature.

In fact, by the Bianchi identity,

$$\begin{aligned}\sum_j R_{ij,j}&=\sum_{k,j} R_{ikjk,j}\\&=\sum_{k,j} R_{jkik,j}\\&=-\sum_{k,j} R_{jkkj,i}-\sum_{k,j} R_{jkji,k}\\&=R_i-\sum_{k,j} R_{jijk,k}\\&=R_i-\sum_k R_{ik,k}\,.\end{aligned}\tag{1.12}$$

Hence $\sum_j R_{ij,j}=\frac{1}{2}R_i$ and our claim is proved.

Our second example is provided by $\phi_{ij}=\left(\sum_k \psi_{kk}\right)\delta_{ij}-\psi_{ij}$ where ψ_{ij} is a symmetric tensor satisfying the "Codazzi equation":

$$\psi_{ij,k}=\psi_{ik,j}\,.\tag{1.13}$$

Using (1.13), it is straightforward to check that $\Box f=\sum_{i,j}\phi_{ij}f_{ij}$ is self-adjoint.

The interesting second order elliptic operators are the elliptic ones. A sufficient condition for the operator in the first example to be elliptic is that the Ricci curvature of M is positive and pinched in the following sense: The ratio of the maximal Ricci curvature and the minimal Ricci curvature is less than $n-1$. We hope that this operator will be useful in intrinsic geometry.

2. Laplacian of a Symmetric Tensor

Let $\sum_{i,j}\phi_{ij}\omega_i\otimes\omega_j$ be a symmetric tensor defined on M. Then following Bochner, Calabi, Simons, Chern [1, 6, 3], we shall compute the Laplacian of this tensor.

The covariant derivative of ϕ_{ij} is defined by (1.9). The second covariant derivative of ϕ_{ijk} is defined by

$$\sum_l \phi_{ijkl}\omega_l=d\phi_{ijk}+\sum_m \phi_{mjk}\omega_{mi}+\sum_m \phi_{imk}\omega_{mj}+\sum_m \phi_{ijm}\omega_{mk}\,.\tag{2.1}$$

Exterior differentiate (1.9), we obtain

$$\sum_{l,k}\phi_{ijkl}\omega_l\Lambda\omega_k=\sum_k \phi_{kj}\Omega_{ki}+\sum_k \phi_{ik}\Omega_{kj}\,.\tag{2.2}$$

Therefore,

$$\phi_{ijkl}-\phi_{ijlk}=-\sum_m \phi_{mj}R_{milk}-\sum_m \phi_{im}R_{mjlk}\,. \tag{2.3}$$

The Laplacian of the tensor ϕ_{ij} is defined to be $\sum_k \phi_{ijkk}$ and so

$$\begin{aligned}\Delta\phi_{ij}&=\sum_k \phi_{ijkk}\\ &=\sum_k(\phi_{ijkk}-\phi_{ikjk})+\sum_k(\phi_{ikjk}-\phi_{ikkj})+\sum_k(\phi_{ikkj}-\phi_{kkij})+\Big(\sum_k\phi_{kk}\Big)_{ij}\\ &=\sum_k(\phi_{ijkk}-\phi_{ikjk})+\sum_k(\phi_{ikkj}-\phi_{kkij})+\Big(\sum_k\phi_{kk}\Big)_{ij}\\ &\quad-\sum_{m,k}\phi_{mk}R_{mikj}-\sum_{m,k}\phi_{im}R_{mkkj}\,.\end{aligned} \tag{2.4}$$

For tensors satisfying "Codazzi equation"

$$\phi_{ijk}=\phi_{ikj} \tag{2.5}$$

have

$$\Delta\phi_{ij}=\Big(\sum_k\phi_{kk}\Big)_{ij}-\sum_{m,k}\phi_{mk}R_{mikj}-\sum_{m,k}\phi_{im}R_{mkkj}\,. \tag{2.6}$$

Let $|\phi|^2=\sum_{i,j}\phi_{ij}^2$ and $\operatorname{tr}\phi=\sum_i\phi_{ii}$. Then equation (2.6) shows:

$$\tfrac12\Delta|\phi|^2=\sum_{i,j,k}\phi_{ijk}^2+\sum_{i,j}\phi_{ij}(\operatorname{tr}\phi)_{ij}-\sum_{i,j,m,k}\phi_{ij}\phi_{mk}R_{mikj}-\sum_{i,j,m,k}\phi_{ij}\phi_{im}R_{mkkj}\,. \tag{2.7}$$

Choose a frame field $\{\omega_1,\dots,\omega_n\}$ so that $\phi_{ij}=\lambda_i\delta_{ij}$. Then (2.7) simplifies to

$$\tfrac12\Delta|\phi|^2=\sum_{i,j,k}\phi_{ijk}^2+\sum_i\lambda_i(\operatorname{tr}\phi)_{ii}+\tfrac12\sum_{i,j}R_{ijij}(\lambda_i-\lambda_j)^2\,. \tag{2.8}$$

Denoting the second symmetric function of ϕ_{ij} by m, we have

$$\begin{aligned}m&=\sum_{i\neq j}\lambda_i\lambda_j\\ &=(\operatorname{tr}\phi)^2-|\phi|^2\,.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Putting (2.9) and (2.8) together, we obtain

$$\tfrac12\Delta(\operatorname{tr}\phi)^2=\Delta m+\sum_{i,j,k}\phi_{ijk}^2+\sum_i\lambda_i(\operatorname{tr}\phi)_{ii}+\tfrac12\sum_{i,j}R_{ijij}(\lambda_i-\lambda_j)^2\,. \tag{2.10}$$

Let $\Box f=\sum_{i,j}((\operatorname{tr}\phi)\delta_{ij}-\phi_{ij})f_{ij}$ be the self-adjoint operator defined in Section 1. Then (2.10) takes the form

$$\Box(\operatorname{tr}\phi)=\Delta m+\sum_{i,j,k}\phi_{ijk}^2-\sum_i(\operatorname{tr}\phi)_i^2+\tfrac12\sum_{i,j}R_{ijij}(\lambda_i-\lambda_j)^2\,. \tag{2.11}$$

Since $\Box$ is self-adjoint, we conclude that

$$0\geq\int\Big[\sum_{i,j,k}\phi_{ijk}^2-\sum_i(\operatorname{tr}\phi)_i^2\Big]+\int\tfrac12\sum_{i,j}R_{ijij}(\lambda_i-\lambda_j)^2\,. \tag{2.12}$$

By Schwarz inequality,

$$\sum_{i,j,k} \phi_{ijk}^2 \geqq \frac{1}{|\phi|^2} \sum_k \Big(\sum_{i,j} \phi_{ij} \phi_{ijk} \Big)^2 . \tag{2.13}$$

Differentiating (2.9) and using (2.13) we obtain

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,k} \phi_{ijk}^2 &\geqq |\phi|^{-2} \sum_k [(\operatorname{tr}\phi)(\operatorname{tr}\phi)_k - \tfrac{1}{2} m_k]^2 \\ &\geqq |\phi|^{-2} [(1-\varepsilon)(\operatorname{tr}\phi)^2 \sum_k (\operatorname{tr}\phi)_k^2 + \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{4\varepsilon}\Big) \sum_k m_k^2] \end{aligned} \tag{2.14}$$

for all $\varepsilon > 0$.

Substituting (2.14) into (2.12) we derive that

$$\begin{aligned} 0 \geqq \int & \Big[(1-\varepsilon)(|\phi|^2 + m)|\phi|^{-2} \sum_k (\operatorname{tr}\phi)_k^2 - \sum_k (\operatorname{tr}\phi_k)^2 + \Big(\frac{1}{4} - \frac{1}{4\varepsilon}\Big) |\phi|^{-2} \sum_k m_k^2 \Big] \\ & + \int \tfrac{1}{2} \sum_{i,j} R_{ijij} (\lambda_i - \lambda_j)^2 . \end{aligned} \tag{2.15}$$

If $m = \text{constant}$, we can take $\varepsilon = 0$ in (2.15). Hence

$$0 \geqq \int_M \Big[m|\phi|^{-2} \sum_k (\operatorname{tr}\phi)_k^2 + \tfrac{1}{2} \sum_{i,j} R_{ijij} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \Big] . \tag{2.16}$$

When $m \geqq 0$ and $R_{ijij} \geqq 0$, the integrand of the integral in (2.16) must be identically zero. Therefore (2.13) becomes equality and there are numbers c_k such that

$$\phi_{ijk} = c_k \phi_{ij} \tag{2.17}$$

when $|\phi|^2 \neq 0$.

Since we assume $\phi_{ij} = \lambda_i \delta_{ij}$ and $\phi_{ijk} = \phi_{ikj}$, it is easy to see that the only non-zero terms of ϕ_{ijk} and the terms ϕ_{iii}. Thus

$$(\phi_{ii} - \phi_{jj}) \omega_{ij} = 0 . \tag{2.18}$$

Using the fact $\sum_{i,j} R_{ijij} (\lambda_i - \lambda_j)^2 = 0$, we can then prove that M is the closure of $\bigcup_k 0_k$ where each point of the open set 0_k has a product neighborhood $N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_l$ where the tangent space of each N_i is spanned by eigenvectors of ϕ_{ij} with the same eigenvalue.

Theorem 1. *Let $\sum_{i,j} \phi_{ij} \omega_i \otimes \omega_j$ be a symmetric tensor defined on a compact Riemannian manifold with non-negative sectional curvature. Suppose the Codazzi equation $\phi_{ij,k} = \phi_{ik,j}$ is satisfied. Let $\{\omega_i\}$ be a co-frame which diagonalizes the tensor ϕ_{ij} so that $\sum_{i,j} \phi_{ij} \omega_i \otimes \omega_j = \sum_i \lambda_i \omega_i \otimes \omega_i$. Then when $m = \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j$ is a non-negative constant, we have $m |\nabla \operatorname{tr}\phi| = 0$ and $\sum_{i,j} R_{ijij} (\lambda_i - \lambda_j)^2 = 0$. Furthermore M is the closure of $\bigcup_i 0_i$ where each point of the open set 0_i has a product neighborhood $N_1 \times \ldots \times N_l$ so that the cotangent space of each N_i are spanned by the ω_k's with the same λ_k. In particular, when M is locally irreducible, all the eigenvalues of ϕ_{ij} are the same.*

3. Compact Hypersurfaces

The applications that we have in mind are of course the submanifold problems. Thus, let M be a compact hypersurface in a Riemannian manifold with constant sectional curvature c. Then the second fundamental form $\sum_{i,j} h_{ij}\omega_i \otimes \omega_j$ of M satisfies the Codazzi equation. Furthermore when $\{e_1, \dots e_n\}$ diagonalizes the second fundamental form so that $\sum_{i,j} h_{ij}\omega_i \otimes \omega_j = \sum_i \lambda_i \omega_i \otimes \omega_i$, then the Gauss equation says

$$R_{ijij} = c + \lambda_i \lambda_j . \tag{3.1}$$

In particular

$$\sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j = n(n-1)(R-c) \tag{3.2}$$

where R is the normalized scalar curvature of M.

Therefore when R is constant and $\geqq c$, Theorem 1 applies. In this case, we shall exhaust the possibility of M.

Theorem 1 shows that when $\lambda_i \neq \lambda_j$

$$c + \lambda_i \lambda_j = 0 . \tag{3.3}$$

It is a simple algebraic fact that (3.3) implies there are at most two distinct λ_i's. Call them λ_1 and λ_2.

When $c=0$, either $\lambda_1 \equiv \lambda_2$ in which case M is totally umbilical or at some point of M, we have $\lambda_1 \lambda_2 = 0$ and $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 \neq 0$. In the latter case, if the multiplicity of the zero eigenvalue is not equal to $\dim M - 1$, Equation (3.2) shows that the non-zero eigenvalue is a constant depending only on R (which implies the constancy of the multiplicity of this eigenvalue). From these data, we conclude, using (3.1), that either M is totally umbilical, a flat manifold, or the product of a totally umbilical, constantly curved submanifold with a totally geodesic flat manifold. (By totally umbilical submanifold, we mean a submanifold such that the principle curvatures are all equal with respect to any normal direction.)

When $c>0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ and $R \geqq c > 0$; (3.3) implies $\dim M \geqq 3$. One then uses (3.1) and (3.2) to show that both λ_i are constants and have constant multiplicities. Thus M is either a totally umbilical hypersurface or the product of two totally umbilical constantly curved submanifolds.

When $c<0$, we have $R-c>0$ and Theorem 1 shows that $\operatorname{tr}(h_{ij}) = \text{constant}$. Equation (3.2) again shows that M is either totally umbilical or the product of two totally umbilical constantly curved submanifolds.

Theorem 2. *Let M be a compact hypersurface with non-negative sectional curvature immersed in a manifold with constant sectional curvature c. Suppose the normalized scalar curvature of M is constant and greater than or equal to c. Then M is either totally umbilical, a (Riemannian) product of two totally umbilical constantly curved submanifolds or possibly a flat manifold which is different from the above two types. The last case can happen only if $c=0$. (If the ambient manifold is the Euclidean space, the last two cases cannot occur because of the compactness of M.)*

In Theorem 2, we assume the scalar curvature R is constant. Let us now relax this condition and get an estimate of the mean curvature of M in terms of the intrinsic geometry of M.

Suppose $nH\delta_{ij}-h_{ij}$ is positive semi-definite so that $\Box f=\sum_{i,j}(nH\delta_{ij}-h_{ij})f_{ij}$ is a (possibly degenerate) elliptic operator.

Hence when nH attains its maximum at some point $\varrho\in M$, we see from (2.11) that at ϱ,

$$\sum_{i,j} R_{ijij}(\lambda_i-\lambda_j)^2 \leqq -2n(n-1)\Delta R\,. \tag{3.4}$$

In particular,

$$\begin{aligned}\Big(\min_{i\neq j} R_{ijij}\Big)(nH)^2 &\leqq \Big(\min_{i\neq j} R_{ijij}\Big)n\Big(\sum_i \lambda_i^2\Big)\\ &\leqq \Big(\min_{i\neq j} R_{ijij}\Big)\left[\frac{n}{n-1}\frac{1}{2}\sum_{i,j}(\lambda_i-\lambda_j)^2+n^2(R-c)\right]\\ &\leqq -n^2\Delta R+n^2(R-c)\min_{i\neq j} R_{ijij}\,.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Since (3.5) holds at the point where nH achieves its maximum, we have pıoved the following

Theorem 3. *Let M be a compact hypersurface in a manifold with constant sectional curvature c. Suppose M has positive sectional curvature and the form $(nH\delta_{ij}-h_{ij})$ is positive semi-definite. Then*

$$\sup_M nH \leqq \sup_M \left\{-n^2\left[\min_{i\neq j}(R_{ijij})\right]^{-1}\Delta R+n^2(R-c)\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{3.6}$$

and hence the length of the second fundamental form of M can be estimated in terms of quantities defined intrinsically.

4. Noncompact Convex Hypersurfaces

Let M be a complete hypersurface with non-negative sectional curvature in the Euclidean space. Then we can choose the normal of M so that its second fundamental form is positive semi-definite.

As in Section 3, we consider the operator $\Box f=\sum_{i,j}(nH\delta_{ij}-h_{ij})f_{ij}$ where H is the mean curvature and h_{ij} is the second fundamental form.

Let X and e_{n+1} be the position vector and the normal vector of M respectively. Then we shall compute $\Box X$ and $\Box e_{n+1}$.

Let $\{e_1,\ldots,e_n\}$ be a local orthonormal frame field of M. Then

$$X_{ij}=h_{ij}e_{n+1} \tag{4.1}$$

for all i,j.

Hence by (3.2),

$$\begin{aligned}\Box X &= \sum_{i,j}(nH\delta_{ij}-h_{ij})h_{ij}e_{n+1}\\ &=\Big((nH)^2-\sum_{i,j}h_{ij}^2\Big)e_{n+1}\\ &=n(n-1)R\,e_{n+1}\,.\end{aligned} \tag{4.2}$$

To compute $\Box e_{n+1}$, we have

$$de_{n+1} = -\sum_{i,k} h_{ik} e_i \omega_k, \tag{4.3}$$

$$d\Big(-\sum_i h_{ik} e_i\Big) - \sum_l h_{il} e_i \omega_{lk} = \sum_l \Big(-\sum_i h_{ik} h_{il} e_{n+1} - \sum_i h_{ikl} e_i\Big)\omega_l, \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
\Box e_{n+1} &= \sum_{k,l} (nH\delta_{kl} - h_{kl})\Big(-\sum_i h_{ik} h_{il} e_{n+1} - \sum_i h_{ikl} e_i\Big)\\
&= -\sum_{k,l} (nH\delta_{kl} - h_{kl})\Big(\sum_i h_{ik} h_{il}\Big) e_{n+1}\\
&\quad - \sum_{i,k,l} (nH\delta_{kl} - h_{kl}) h_{ikl} e_i\\
&= -\sum_{k,l} (nH\delta_{kl} - h_{kl})\Big(\sum_i h_{ki} h_{il}\Big) e_{n+1}\\
&\quad - \sum_i \Big[nH(nH)_i - \sum_{k,l} h_{ikl} h_{kl}\Big] e_i\\
&= -\sum_{k,l} (nH\delta_{kl} - h_{kl})\Big(\sum_i h_{ki} h_{il}\Big) e_{n+1}\\
&\quad - \tfrac{1}{2} n(n-1) \sum_i R_i e_i
\end{aligned} \tag{4.5}$$

where (3.2) has been used in the last equality.

We shall make use of the formulas (4.4) and (4.5) to deal with our problem. First of all, we note the following

Proposition 2. *Let $\Box$ be a formally self-adjoint second order (possibly degenerate) elliptic operator defined on a compact manifold M with boundary. Let f be a C^2 positive function. Then for any non-negative C^2-function g such that $g|\partial M = 0$, we have*

$$\Big(-\int_M g\,\Box g\Big)\Big(\int_M g^2\Big)^{-1} \geqq \inf_M \Big(\frac{-\Box f}{f}\Big). \tag{4.6}$$

Proof. We note that we have only to prove (4.6) by assuming $\Box$ is non-degenerate elliptic. In fact, one can simply replace $\Box$ by $\Box + \varepsilon\Delta$ and let $\varepsilon \to 0$.

Let λ be the first eigenvalue and g_λ be the first eigenfunction of $\Box$ over D with the boundary condition $g_\lambda|\partial D = 0$. Then it is well-known that the left hand side of (4.6) is always not less than λ and g_λ is positive in the interior of D.

Consider the function g_λ/f defined on D. Then at the point where g_λ/f attains its maximum, one can verify easily that $\lambda = \dfrac{-\Box g_\lambda}{g_\lambda} \geqq \dfrac{-\Box f}{f}$. This proves (4.6).

Theorem 4. *Let M be a complete non-compact hypersurface in the Euclidean space with non-negative curvature. Suppose the scalar curvature of M is constant, then M is a generalized cylinder $S^{n-p} \times R^p$.*

Proof. Since M is convex, there is a unit vector a in the Euclidean space so that $\langle e_{n+1}, a\rangle \geqq 0$ on M (see Wu [8]). If $\langle e_{n+1}, a\rangle = 0$ at one point, then we claim that $\langle e_{n+1}, a\rangle$ is identically zero.

First of all, we note that if the scalar curvature of M is non-zero, the operator $\square$ is elliptic. In fact $\square$ being degenerate elliptic means that at some point in M, $\sum_{i \neq j} \lambda_i$ is equal to zero for some principle curvature λ_j. This implies $\lambda_i = 0$ for all $i \neq j$ and the scalar curvature is zero at that point. When the scalar curvature of M is zero, M is flat and Theorem 4 follows from Hartman-Nirenberg [4].

Our claim now follows by applying the minimal principle to the elliptic equation

$$\square\langle e_{n+1}, a\rangle = -\sum_{k,l} (nH\delta_{kl} - h_{kl})\Big(\sum_i h_{ki}h_{il}\Big)\langle e_{n+1}, a\rangle . \tag{4.7}$$

Therefore, we conclude that either $\langle e_{n+1}, a\rangle$ is everywhere positive or $\langle e_{n+1}, a\rangle \equiv 0$. In the latter case, we can split out one line and continue by induction to prove the theorem (see [2]). Hence we can apply the proposition to (4.7) and deduce

$$\Big(-\int_D g\,\square g\Big)\Big(\int_D g^2\Big)^{-1} \geqq \min_D \sum_{k,l} (nH\delta_{kl} - h_{kl})\Big(\sum_i h_{ki}h_{il}\Big) \tag{4.8}$$

for all smooth function g with compact support D.

We shall apply g to a function defined by $\langle X, a\rangle$. Since M is essentially a graph along a (see Wu [8]), the set $D_r = \{X \mid \langle X, a\rangle \leqq r\}$ is compact for all $r > 0$. We can then apply $r - \langle X, a\rangle$ to (4.8) with D replaced by D_r.

On the other hand, applying (4.2), we have

$$\begin{aligned} &-\Big[\int_{D_r} (r-\langle X, a\rangle)\,\square(r-\langle X, a\rangle)\Big]\Big(\int_{D_r} (r-\langle X, a\rangle)^2\Big)^{-1} \\ &\quad \leqq n(n-1)rR\Big(\int_{D_r} \langle e_{n+1}, a\rangle\Big)\Big[\frac{r^2}{4}\operatorname{Vol}(D_{r/2})\Big]^{-1} \\ &\quad = 4n(n-1)Rr^{-1}\operatorname{Vol}(D_r)[\operatorname{Vol}(D_{r/2})]^{-1} . \end{aligned} \tag{4.9}$$

Since M is convex, it is easy to verify that there are constants c_1 and c_2 so that $\operatorname{Vol}(D_r) \leqq c_1 r^n + c_2$. [For example, one sees that $\langle X, a\rangle$ is asymptotic to the geodesic distance of M and $\operatorname{Vol}(D_r)$ is asymptotically the volume of the geodesic hall.] This implies that $\liminf_{r\to\infty} r^{-\varepsilon}\operatorname{Vol}(D_r)[\operatorname{Vol}(D_{r/2})]^{-1} = 0$, for any $\varepsilon > 0$.

Combining (4.8), (4.9) and the above information, we conclude that

$$\inf_M \sum_{k,l} (nH\delta_{kl} - h_{kl})\Big(\sum_i h_{ki}h_{il}\Big) = 0 . \tag{4.10}$$

Let λ_1 and λ_2 be principle curvatures such that $\lambda_1\lambda_2 \geqq R$. Then

$$\begin{aligned} &\sum_{k,l} (nH\delta_{k,l} - h_{kl})\Big(\sum_i h_{ki}h_{il}\Big) \\ &\quad \geqq \lambda_1\lambda_2^2 + \lambda_2\lambda_1^2 \\ &\quad \geqq (\lambda_1\lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2) \\ &\quad \geqq \lambda_1\lambda_2\sqrt{2\lambda_1\lambda_2} \\ &\quad \geqq \sqrt{2}\,R^{3/2} . \end{aligned} \tag{4.11}$$

Since R is constant, we conclude from (4.10) and (4.11) that $R = 0$ and Theorem 4 again follows from Hartman-Nirenberg [4].

References

1. Calabi, E.: Improper affine hyperspheres of convex type and a generalization of a theorem by K. Jörgens. Mich. Math. J. **5**, 105 (1958)
2. Cheng, S. Y., Yau, S. T.: Differential equations on Riemannian manifolds and their geometric applications (to appear in Commun. Pure Appl. Math.)
3. Chern, S. S.: Minimal submanifolds in a Riemannian manifold. Mimeographed lecture notes. Univ. of Kansas 1968
4. Hartman, P., Nirenberg, L.: On spherical image maps whose Jacobians do note change sign. Amer. J. Math. **81**, 901 (1959)
5. Kobayashi, S., Nomizu, K.: Foundations of differential geometry. Vol. II. New York: Wiley-Interscience 1969
6. Simons, J.: Minimal varieties in riemannian manifolds. Ann. Math. **88**, 62 (1968)
7. Thomas, T. Y. T.: On closed spaces of constant mean curvature. Amer. J. Math. **58**, 702 (1936)
8. Wu, H.: The spherical images of convex hypersurfaces. J. Diff. Geom. **9**, 279 (1974)

Received July 21, 1975

Math. Ann. 225, 205—218 (1977)

On Some Fixed Point Principles for Cones in Linear Normed Spaces*

Gilles Fournier
Mathematics Institute, University of Warwick, Coventry, Warwickshire CV4 7AL, England

Heinz-Otto Peitgen
Institut für Angewandte Mathematik der Universität, Wegelerstr. 6, D-5300 Bonn, Federal Republic of Germany

0. Introduction

In [9] and [10] Krasnosel'skiĭ established and proved several fundamental fixed point principles for operators leaving invariant a cone in a Banach space. One of these, which has come to be known as the theorem about the *compression* and *expansion* of a cone has been extended by Nussbaum to an asymptotic version (cf. Theorems 1.2 and 1.3 in [13]) even for condensing maps rather than completely continuous maps:

(0.1) *Let P be a cone in a Banach space, $T: P \to P$ a condensing map, $r, R \in \mathbb{R}_+$ and $N \in \mathbb{N}$. Assume that*
(0.1.1) $T^n(S_r) \subset B_r$ *for all* $n \geqq N$;
(0.1.2) *there is* $h \in P$, $h \neq 0$, *such that* $x - T^n(x) \neq th$ *for* $x \in S_R$, $n \geqq N$ *and* $t \geqq 0$;
(0.1.3) $T(\{x \in U \mid T^n(x) = x\}) \subset U$ *for* $n \geqq N$.
Then the fixed point index of T on U is

$$\operatorname{ind}(P, T, U) = \begin{cases} -1, & \text{if } r < R \\ +1, & \text{if } r > R. \end{cases}$$

Thus, T has a fixed point in U.
($S_r = \{x \in P \mid \|x\| = r\}$, $B_r = \{x \in P \mid \|x\| < r\}$ and $U = \{x \in P \mid \min\{r, R\} < \|x\| < \max\{r, R\}\}$.)

Nussbaum's proof makes an essential use of the rather involved Zabreiko and Krasnosel'skiĭ and Steinlein (mod p)-theorem for the fixed point index (cf. [20–23]) and it is the crucial assumption (0.1.3) which makes this tool applicable (cf. Theorem 1, assumption 0.4 in [20]). However, (0.1.3) does not seem to be convenient for applications. In fact Nussbaum's fundamental applications in [13] of asymptotic fixed point theory to the existence of periodic solutions of nonlinear, autonomous functional differential equations can be reduced to the

* This work was supported by the Deutsche Forschungsgemeinschaft, SFB 72 an der Universität Bonn and a fellowship given by the NRC of Canada

following only implicitly established principle (cf. proof of Theorem 2.1, pp. 374–377, in [13]):

(0.2) *Let P be a cone in a Banach space, T: $P \to P$ completely continuous, r, $R \in \mathbb{R}_+$ and $N \in \mathbb{N}$. Assume that:*
(0.2.1) *$T^n(cl\, B_r) \subset B_r$, whenever $n \geqq N$;*
(0.2.2) *$T^n(P \backslash B_R) \subset P \backslash cl\, B_R$, whenever $n \geqq N$.*
Then $\operatorname{ind}(P, T, U) = -1$, *if* $r < R$, *and* $\operatorname{ind}(P, T, U) = +1$, *if* $r > R$.

If P is normal then (0.2.1) and (0.2.2) imply (0.1.1)–(0.1.3); thus, in that case (0.2) is a corollary of (0.1). Result (0.2) was independently and implicitly established in [16], Theorem 1.1 and [6], Theorem 4.9. Note, that the proof in [6] does not make use of any type of a (mod p)-argument. The result there reads as follows (for definitions and notations see Section 1):

(0.3) *Let X be a metric ANR, f: $X \to X$ a map of compact attraction, U open in X such that*
(0.3.1) *there is $N \in \mathbb{N}$ such that $f^n(X \backslash U) \subset X \backslash cl\, U$, whenever $n \geqq N$;*
(0.3.2) *$j: X \backslash U \to X$ induces isomorphisms in H_*.*
Then $\operatorname{ind}(X, f, U) = 0$ *and* $\operatorname{ind}(X, f, X \backslash cl\, U) = \Lambda(f, X)$.

Note also, that assumption (0.1.1) is just Rothe's condition for T^n (cf. [19]).

The purpose of this paper is to present two new asymptotic fixed point principles in which assumptions (0.2.1) and (0.2.2) in view of applications are weakened essentially. The first, Theorem 2.5, will be proved by using the (mod p)-theorem for the Lefschetz number rather than the fixed point index and such a result was proved in [17] and [18] and independently in [4]. The second, Theorem 2.6, will be proved by techniques first developed for purposes of the generalized Lefschetz theory by Leray, Browder, Granas and the authors. Both results are not a consequence of (0.1) and in both proofs the (mod p)-theorem for the fixed point index cannot be applied. At least the method of the proof of the second theorem seems to be of independent interest, and it could serve as a nice demonstration of the power of general fixed point theory in concrete problems.

We also want to mention that our results have a relation to another fixed point principle of Krasnosel'skiĭ [10], pp. 335–337, expressed in terms of spectral properties of the derivatives of the underlying operator at zero and infinity, which was extended by Amann in [1].

Except for a very simple one we don't give applications. We think that Nussbaum's work in [13] and related papers [14] and [15] provide a good and concrete motivation for the results we are concerned with. But it seems likely that our weaker conditions should lead to stronger results for instance in the context of [13]. Note that in contrast to (0.2) to apply Theorem 2.6 it suffices to verify pointwise estimates.

Several concrete examples will indicate that our conditions seem to be sharp.

1. Preliminaries

In what follows an essential use will be made of the notion of the Lefschetz number in the generalized sense as given by Leray [11] and the fixed point index for metric ANR's developed by Granas in [8].

Let E be a graded vector space over the field of rational numbers, Φ an endomorphism of degree zero and $N(\Phi)=\bigcup_{n>0}\ker(\Phi^n)$. Then Φ is said to be a *Leray endomorphism* iff $\tilde{E}=E/N(\Phi)$ is of finite type. In that case one defines $\mathrm{Tr}(\Phi)=\mathrm{trace}(\tilde{\Phi})$, where $\tilde{\Phi}:\tilde{E}\to\tilde{E}$ is the induced endomorphism. The *generalized Lefschetz number* of Φ is denoted by $\Lambda(\Phi)$ and is given by the formula

$$\Lambda(\Phi)=\sum_q(-1)^q\,\mathrm{Tr}(\Phi_q)\,.$$

Let H_* denote the singular homology functor with rational coefficients and f_* is the abbreviation for $H_*(f)$, where f is a map. A map $f: X\to X$ is said to be a *Lefschetz map* iff $f_*: H_*(X)\to H_*(X)$ is a Leray endomorphism and in that case the generalized Lefschetznumber of f is given by $\Lambda(f,X)=\Lambda(f_*)$.

For triples (X,f,U), where X is a metric ANR, U is open in X and $f: U\to X$ is a compact, *admissible* map [i.e. $\mathrm{Fix}(f)=\{x\in U\,|\,f(x)=x\}$ is compact in U] a fixed point index $\mathrm{ind}(X,f,U)$ is defined in [8] which satisfies the standard properties including the strong normalization property $\mathrm{ind}(X,f,X)=\Lambda(f,X)$. We note that Granas's concept of an index extends to the following class of maps (cf. [8], Section 12):

(1.1) Definition. Let X be a metric *ANR* and $f: U\to X$ an admissible map satisfying the following condition:
(1.1.1) for some neighborhood V of $\mathrm{Fix}(f)$ the restriction $f_{|V}$ is a compact map (i.e. $cl\,f_{|V}(V)$ is compact in X).
For such f one defines $\mathrm{ind}(X,f,U)=\mathrm{ind}(X,f,V)$.

Note, that every admissible map which is locally compact satisfies (1.1.1). With this definition Granas obtains the following result:

(1.2) Theorem. *Let C be the category of metric ANR's and $\mathscr{A}$ the class of all admissible maps satisfying* (1.1.1). *Assume further that, given an admissible homotopy H there is a neighborhood W of $\bigcup_t\mathrm{Fix}(H_t)$ such that H is compact on W. Then the function $f\to\mathrm{ind}(X,f,U)$ defined by* (1.1) *satisfies the standard properties of an index if for the commutativity property one assumes that f is compact in some neighborhood of $\mathrm{Fix}(g\circ f)$ and for the normalization property one assumes that f is compact.*

This theorem has one important consequence for our purposes, which we want to call the *weak commutativity* of the index:

(1.3) Corollary. *Let X and Y be metric ANR's, Y open in X, U open in X, $T: U\to X$ an admissible map satisfying* (1.1.1) *and $T(U)\subset Y$. Then*

$$\mathrm{ind}(X,T,U)=\mathrm{ind}(Y,T,Y\cap U)\,.$$

Proof. Let T' denote the map $T': U\to Y$ induced by T. Consider the pair $T': U\to Y$, $i: U\cap Y\to X$. Observe that T' is compact in a neighborhood of $\mathrm{Fix}(i\circ T'_{|T'^{-1}(U\cap Y)})=\mathrm{Fix}(T_{|U})$. Thus, commutativity of the index implies: $\mathrm{ind}(X,T,U)=\mathrm{ind}(X,i\circ T',T'^{-1}(U\cap Y))=\mathrm{ind}(Y,T'\circ i,i^{-1}(U))=\mathrm{ind}(Y,T,U\cap Y)$. □

For the proofs of our main results we need a class of maps which generalizes the class of compact maps in a natural direction.

(1.4) Definition (cf. [6, 7]). Let X be a topological space, $f: X \to X$ a map, A and K two subsets of X.

(1.4.1) The set $o_K = \bigcup_n f^n(K)$ is said to be the orbit of K under f and $f^n(K)$ is the n-th member of o_K.

(1.4.2) We say that A absorbs K provided almost all members of o_K are contained in A.

(1.4.3) We say that A attracts a point $x \in X$ provided the intersection $cl(o_x) \cap A$ is not empty.

(1.4.4) We say that A is an attractor for f provided it attracts all the points in X.

(1.4.5) We say that f is of compact attraction provided

(i) f has a compact attractor; and

(ii) f is a locally compact map.

For the Lefschetz theory of mappings which are of compact attraction see [7]. The usefulness of this class of maps in asymptotic fixed point theory is demonstrated in [4, 6] and [12], for example. In [6] there is also the definition of an index for such maps.

In the context of the generalized Lefschetz number we shall need three elementary algebraic lemmata. The first was communicated to us by Granas.

(1.5) Lemma. *Assume we are given a commutative diagram of graded vector spaces with exact rows*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & E & \longrightarrow & E'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow{\scriptstyle \Phi'} & & \uparrow{\scriptstyle \Phi} & & \uparrow{\scriptstyle \Phi''} & & \\ 0 & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & E & \longrightarrow & E'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

such that Φ or Φ' and Φ'' are Leray endomorphisms. Then Φ, Φ', and Φ'' are Leray endomorphisms and $\Lambda(\Phi) = \Lambda(\Phi') + \Lambda(\Phi'')$.

(1.6) Lemma. *Let E be a vector space and $T: E \to E$ weakly-nilpotent (i.e. for all $e \in E$ there is an $n \in \mathbb{N}$ such that $T^n(e) = 0$). Then* $\mathrm{Tr}(T) = 0$.

(1.7) Lemma. (cf. Lemma 1 in [18]). *Let X be a metric ANR, $f: X \to X$ a compact map, $p \in \mathbb{N}$ a prime number. Then $\Lambda(f, X) \equiv \Lambda(f^p, X) \bmod p$.*

Finally we cite two lemmata which we shall need for our computations in Section 2.

(1.8) Lemma. (cf. [6], Corollary 4.4). *Let X be a metric ANR, $f: X \to X$ a map of compact attraction, $x_0 \in X$ an ejective fixed point of f relative to W a neighborhood of x_0 (i.e. for all $x \in W \setminus \{x_0\}$ there is $n_x \in \mathbb{N}$ such that $f^{n_x}(x) \notin W$), $f(X \setminus \{x_0\}) \subset X \setminus \{x_0\}$ and $f(x) \neq x$ for all $x \in \partial W$.*

Then $\mathrm{ind}(X, f, W) = \Lambda(f, X) - \Lambda(f, X \setminus \{x_0\})$.

(1.9) Lemma. (cf. [7], Lemma 1.2). *Let X be a topological space, $Y \subset X$, $f: X \to X$ a map such that $f(Y) \subset Y$. Assume that Y absorbs compact sets of X under f. Then $f: X \to X$ is a Lefschetz map iff $f_{|Y}: Y \to Y$ is a Lefschetz map and in that case $\Lambda(f, X) = \Lambda(f, Y)$.*

Let X be a normed linear space. A subset P of X is said to be a cone, if it is closed, convex, invariant under multiplication by non-negative real numbers and if $P \cap (-P) = \{0\}$. In what follows we denote by $S_r = \{x \in P \mid \|x\| = r\}$ and $B_r = \{x \in P \mid \|x\| < r\}$, $r \in \mathbb{R}_+$.

2. Main Results

We begin with a standard observation in the theory of AR's and ANR's.

(2.1) Definition. Let X be a topological space and $A \subset X$. Then A is said to be a deformation retract of X provided there is a retraction $r: X \to A$ such that if $i: A \to X$, then $\mathrm{id}_X \sim i \circ r$ ($\sim$: homotopic to).

(2.2) Lemma. *Let P be a cone in a linear normed space and $r \in \mathbb{R}_+$. Then*
(2.2.1) *S_r is a deformation retract of $cl\, B_r$;*
(2.2.2) *S_r is a deformation retract of $P \backslash B_r$;*
(2.2.3) *B_r, $cl\, B_r$, $P \backslash B_r$, $P \backslash cl\, B_r$ are contractible spaces.*

Proof. Consider the mapping $h: S_r \times [0,1] \to S_r$ defined by $h(x,t) = r(tx_0 + (1-t)x)/\|tx_0 + (1-t)x\|$, where $x_0 \in S_r$ is fixed. Since $0 \in P$ is an extremal point it follows that $tx_0 + (1-t)x \neq 0$ for all $x \in S_r$; thus, h provides a homotopy joining id_{S_r} and the constant map onto x_0. Moreover, S_r being a retract of the ANR $P \backslash cl\, B_{r_1}$, $r_1 < r$, is itself an ANR. Thus, S_r being contractible it is by a theorem of Borsuk [3], p. 96, an AR. By the definition of an AR we find extensions

$$\begin{tikzcd} cl\, B_r \arrow[dr, dashed, "\varrho_1"] & \\ S_r \arrow[u, "i_1"] \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & S_r \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} P \backslash B_r \arrow[dr, dashed, "\varrho_2"] & \\ S_r \arrow[u, "i_2"] \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & S_r . \end{tikzcd}$$

However, in the present situation we can give ϱ_1 and ϱ_2 explicitly: Define $\varrho_1: cl\, B_r \to S_r$ by $\varrho_1(x) = r((r - \|x\|)x_0 + x)/\|(r - \|x\|)x_0 + x\|$, where $x_0 \in S_r$. Note that $(r - \|x\|)x_0 + x \neq 0$ since $P \cap (-P) = \{0\}$. Define $\varrho_2: P \backslash B_r \to S_r$ by $\varrho_2(x) = rx/\|x\|$. Clearly, $i_1 \circ \varrho_1$ (resp. $i_2 \circ \varrho_2$) is homotopic to $\mathrm{id}_{|cl\, B_r}$ (resp. $\mathrm{id}_{|P \backslash B_r}$) by means of $h_\tau(x,t) = t(i_\tau \circ \varrho_\tau)(x) + (1-t)x$, $\tau = 1,2$. □

(2.3) Corollary. *Let P be a cone in a linear normed space and $r \in \mathbb{R}_+$. Then*
(2.3.1) *$P \backslash B_r$ is a deformation retract of P;*
(2.3.2) *$cl\, B_r$ is a deformation retract of P.*

Proof. Extend $\varrho_1: cl\, B_r \to S_r$ to a deformation retraction $\bar{\varrho}_1: P \to P \backslash B_r$ by setting $\bar{\varrho}_1(x) = \varrho_1(x)$, if $x \in cl\, B_r$ and $\bar{\varrho}_1(x) = x$, if $x \in P \backslash B_r$. Extend ϱ_2 respectively. □

(2.4) Remark. (2.4.1) If X is an infinite dimensional linear normed space, then a theorem of Dugundji [5] implies that S the unit sphere is an AR; thus, the conclusions of (2.2) and (2.3) are also true for the entire sphere, ball and it's complement.
(2.4.2) In general $P \backslash B_r$ is not even starlike. For example, if P is the cone of positive, continuous, bounded functions on the entire real line.

Next, we state the main results for the cone case and discuss their assumptions; but Remark (2.4.1) and the proofs will immediately show that the results remain valid, if we replace the cone by an infinite dimensional linear normed space and all relative spheres and balls by the entire ones.

(2.5) Theorem. *Let P be a cone in a linear normed space, $r, R \in \mathbb{R}_+$ and $T: P \to P$ completely continuous. Assume that*
(2.5.1) *there is $m_r \in \mathbb{N}$ such that $T^m(S_r) \subset B_r$, whenever $m \geqq m_r$;*
(2.5.2) *there is $n_r \in \mathbb{N}$ such that $T^{n_r}(B_r) \subset B_r$.*
Then $\operatorname{ind}(P, T, B_r) = 1$.
Assume that
(2.5.3) *there is $m_R \in \mathbb{N}$ such that $T^m(S_R) \subset P \backslash cl\, B_R$, whenever $m \geqq m_R$;*
(2.5.4) *there is $n_R \in \mathbb{N}$ such that $T^{n_R}(P \backslash cl\, B_R) \subset P \backslash cl\, B_R$.*
Then $\operatorname{ind}(P, T, B_R) = 0$.
(2.5.5) *Let $U = \{x \in P \mid \min\{r, R\} < \|x\| < \max\{r, R\}\}$ and assume that* (2.5.1)–(2.5.4) *are satisfied. Then*

$$\operatorname{ind}(P, T, U) = \begin{cases} -1, & \text{if } r < R \quad (\textit{expansion}), \\ +1, & \text{if } r > R \quad (\textit{compression}); \end{cases}$$

thus, T has a fixed point in U.

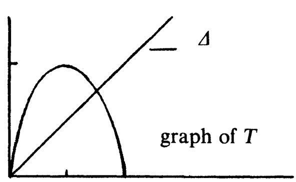
(2.6) Theorem. *Let P be a cone in a linear normed space, $r, R \in \mathbb{R}_+$ and $T: P \to P$ completely continuous. Assume that*
(2.6.1) *there is $m_r \in \mathbb{N}$ such that $T^{m_r}(S_r) \subset B_r$;*
(2.6.2) *for all $x \in B_r$ there is $n_x \in \mathbb{N}$ such that $T^n(x) \in B_r$, whenever $n \geqq n_x$.*
Then $\operatorname{ind}(P, T, B_r) = 1$.
Assume that
(2.6.3) *there is $m_R \in \mathbb{N}$ such that $T^{m_R}(S_R) \subset P \backslash cl\, B_R$;*
(2.6.4) *for all $x \in P \backslash cl\, B_R$ there is $n_x \in \mathbb{N}$ such that $T^n(x) \in P \backslash cl\, B_R$, whenever $n \geqq n_x$.*
Then $\operatorname{ind}(P, T, B_R) = 0$.
(2.6.5) *Let $U = \{x \in P \mid \min\{r, R\} < \|x\| < \max\{r, R\}\}$ and assume that* (2.6.1)–(2.6.4) *are satisfied. Then*

$$\operatorname{ind}(P, T, U) = \begin{cases} -1, & \text{if } r < R \quad (\textit{expansion}), \\ +1, & \text{if } r > R \quad (\textit{compression}); \end{cases}$$

thus, T has a fixed point in U.

The following examples show that various weakenings of (0.2.1) and (0.2.2) are not possible.

(2.7.) Example. (2.7.1) It is not possible to weaken (0.2.1) to the condition:



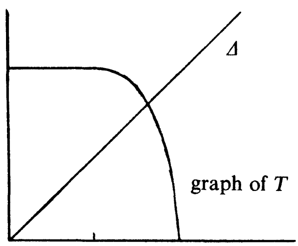
There is $m_r \in \mathbb{N}$ such that $T^m(S_r) \subset B_r$, whenever $m \geqq m_r$.

Define $T: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ by

$$T(x) = \begin{cases} -(x-2)^2+4, & \text{if } 0 \leqq x \leqq 4 \\ 0 & \text{if } 4 \leqq x \leqq \infty. \end{cases}$$

Choose $r=2$. Then $T(S_r)=T(2)=4$ and $T^2(S_r)=T(4)=0$. Thus, $T^m(S_r)=0$, whenever $m \geqq 2$. Since 0 is an ejective fixed point of T relative to B_r Lemma *1.8* implies $\operatorname{ind}(\mathbb{R}_+, T, B_r)=0$.

(2.7.2) It is not possible to weaken (0.2.1) to the condition:



There is $n_r \in \mathbb{N}$ such that $T^{n_r}(cl\, B_r) \subset B_r$.

Define $T: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ by

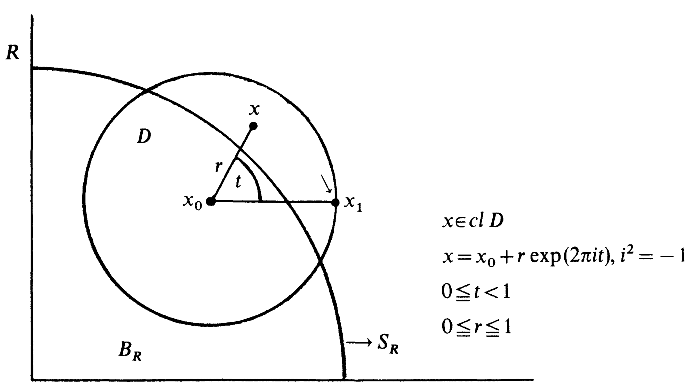
$$T(x) = \begin{cases} 4 & , \text{ if } 0 \leqq x \leqq 2 \\ -(x-2)^2+4, & \text{if } 2 \leqq x \leqq 4 \\ 0 & , \text{ if } 4 \leqq x < \infty. \end{cases}$$

Choose $r=2$. Then $T(cl\, B_r)=T([0,2])=\{4\}$ and $T^2(cl\, B_r)=T(\{4\})=\{0\}$. But $T^3(cl\, B_r)=\{4\}$; thus, $T^3(cl\, B_r) \not\subset B_r$. Now, $\operatorname{ind}(\mathbb{R}_+, T, B_r)=0$, since $\operatorname{Fix}(T_{|B_r})=\emptyset$.

(2.7.3) It is not possible to weaken (0.2.2) to the condition:

For all $x \in P \backslash B_R$ there is $n_x \in \mathbb{N}$ such that $T^n(x) \in P \backslash cl\, B_R$, whenever $n \geqq n_x$.

Consider the cone $P=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geqq 0, y \geqq 0\}$. Choose $R>0$ and $x_0 \in B_R$ such that the solid ball D of radius 1 centered at x_0 is in P and has nonempty intersection with $P \backslash cl\, B_R$.



We may assume that x_1 is in $P \backslash cl\, B_R \cap \partial D$ (cf. figure). Now let $\varrho: P \to cl\, D$ be the radial retraction and define $f: cl\, D \to cl\, D$ by $f(x_0 + r\exp(2\pi i t)) = x_0 + \min\{2r, 1\}\exp(2\pi i t^2)$. Let $T: P \to P$ be $T = f \circ \varrho$.

Observe that (2.7.3) is satisfied. In fact, for each $x\in P\backslash B_R$ we have that $T^n(x)\to x_1$ as n tends to infinity. Moreover, observe that (2.6.1) is not satisfied: a sequence $(x_n)\subset S_R$ such that $x_n=x_0+r\exp(2\pi i t_n)$ and $t_n\to 1$ admits no uniform m_R such that $T^{m_R}((x_n))\subset P\backslash cl\, B_R$. Now x_0 and x_1 are the only fixed points of T in P and to compute $\mathrm{ind}(P, T, B_R)$ it suffices to compute the index of x_0. By definition of T we have that x_0 is an ejective fixed point and thus from Lemma 1.8 and the commutativity and additivity properties of the index we have $\mathrm{ind}(P, T, B_R)=\mathrm{ind}(cl\, D, T, x_0)=\Lambda(T, cl\, D)-\Lambda(T, cl\, D\backslash\{x_0\})$. Since $cl\, D$ is contractible we have that $\Lambda(T, cl\, D)=1$. Observe that $T_{|cl\, D}=f$ and that $f_{|cl\, D\backslash\{x_0\}}\sim \mathrm{id}_{|cl\, D\backslash\{x_0\}}$. Thus, $\Lambda(T, cl\, D\backslash\{x_0\})=\chi(cl\, D\backslash\{x_0\})=0$. Hence, $\mathrm{ind}(P, T, B_R)=1$, which proves that (0.2.2) cannot be weakened to the pointwise condition (2.7.3).

The preciding examples, especially example (2.7.3), show how the conditions in (2.5) and (2.6) are "sharp".

For methodological reasons we split the proofs of Theorems 2.5 and 2.6 in several steps. The first one is purely point set topological. We use the following notations.

(2.8) *Let $\varrho_r: P\to P\backslash B_r$ (resp. $\varrho_R: P\to cl\, B_R$) denote the deformation retractions from Corollary (2.3). Let s represent one of the symbols r or R; let $\mathcal{O}_s$ be B_r, if $s=r$, and let $\mathcal{O}_s$ be $P\backslash cl\, B_R$, if $s=R$. Define the open set*

$$\mathscr{W}_s=\bigcup_{i=1}^{\infty} T^{-i}(\mathcal{O}_s)\,.$$

We have organized the main part of the proofs symmetrically in r and R.

(2.9) Lemma. *Let P be a cone in a linear normed space, $r, R\in\mathbb{R}_+$ and $T: P\to P$ completely continuous. Assume that either* (2.5.1)–(2.5.4) *or* (2.6.1)–(2.6.4) *are satisfied. Then with the notations of* (2.8) *we have:*

(2.9.1) *$cl\, \mathcal{O}_s\subset \mathscr{W}_s$, $T(\mathscr{W}_s)\subset\mathscr{W}_s$ and $T^{-1}(\mathscr{W}_s)\subset\mathscr{W}_s$;*

(2.9.2) *$T\circ\varrho_s:\mathscr{W}_s\to\mathscr{W}_s$ is a mapping of compact attraction;*

(2.9.3) *$\mathcal{O}_s$ absorbs compact sets of $\mathscr{W}_s$ under $T^p\circ\varrho_s$, where $p>\max\{m_s, n_s\}$ and p prime in the case where* (2.5.1)–(2.5.4) *are satisfied; and $p=m_s$ in the case where* (2.6.1)–(2.6.4) *are satisfied;*

(2.9.4) *$T\circ\varrho_{s|\mathscr{W}_s}\sim T_{|\mathscr{W}_s}$ and $T^p\circ\varrho_{s|\mathscr{W}_s}\sim T^p_{|\mathscr{W}_s}$.*

Proof. Assumptions (2.5.1)–(2.5.4) [resp. (2.6.1)–(2.6.4)] imply immediately that $cl\, \mathcal{O}_s\subset\mathscr{W}_s$. Thus, $T(\mathscr{W}_s)\subset\mathscr{W}_s$, and $T^{-1}(\mathscr{W}_s)\subset\mathscr{W}_s$ follows from the definition of $\mathscr{W}_s$.

(2.9.2): Set $\mathscr{M}_s=cl\, T(S_s)$. Then $\mathscr{M}_s$ is compact in P. Since $S_s\subset T^{-m_s}(\mathcal{O}_s)$ we have that $T(S_s)\subset T^{-m_s+1}(\mathcal{O}_s)$. Thus $cl\, T(S_s)\subset T^{-m_s+1}(cl\, \mathcal{O}_s)\subset T^{-m_s+1}(\mathscr{W}_s)\subset\mathscr{W}_s$; hence, $\mathscr{M}_s$ is a compact subset of $\mathscr{W}_s$. To show that $\mathscr{M}_s$ is an attractor, let x be in $\mathscr{W}_s$. Then there is $i\in\mathbb{N}$ such that $T^i(x)\in\mathcal{O}_s$. Let $k\in\mathbb{N}$ be minimal with this property, i.e. $T^j(x)\in P\backslash\mathcal{O}_s$ for all j such that $0\leqq j\leqq k-1$. Hence, $(T\circ\varrho_s)T^j(x)=T^{j+1}(x)$ for all j such that $0\leqq j\leqq k-1$ and by induction $(T\circ\varrho_s)^j(x)=T^j(x)$ for all j such that $0\leqq j\leqq k$. Thus, $(T\circ\varrho_s)^{k+1}(x)=(T\circ\varrho_s)T^k(x)\in(T\circ\varrho_s)(\mathcal{O}_s)\subset T(S_s)\subset\mathscr{M}_s$; hence $\mathscr{M}_s$ attracts the points of $\mathscr{W}_s$ under $T\circ\varrho_s$.

(2.9.3): a) Assume that (2.5.1)–(2.5.4) are satisfied. Observe that $T^m\circ\varrho_s(cl\, \mathcal{O}_s)\subset T^m(S_s)\subset\mathcal{O}_s$ for all $m\geqq m_s$. Choose $p\in\mathbb{N}$ prime and such that $p>\max\{n_s, m_s\}$.

We show first that

$$\mathscr{W}_s \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} (T^p \circ \varrho_s)^{-i}(\mathscr{O}_s).$$

Let x be in $\mathscr{W}_s$, i.e. there is $i \in \mathbb{N}$ such that $T^i(x) \in \mathscr{O}_s$. Since p is a prime and $p > n_s$ there is $j \in \mathbb{N}, j > 0$, such that $jn_s + i = kp$ for some $k \in \mathbb{N}$. Then $T^{kp}(x) = T^{jn_s+i}(x) = T^{jn_s}(T^i(x)) \in T^{jn_s}(\mathscr{O}_s) \subset \mathscr{O}_s$ by assumption (2.5.2) [resp. (2.5.4)]. Thus, there is $k \in \mathbb{N}$ such that $T^{kp}(x) \in \mathscr{O}_s$. Let k be minimal with this property. Then an argument similar to that in the proof of (2.9.2) shows that $(T^p \circ \varrho_s)^k(x) = T^{kp}(x)$; thus $x \in \bigcup_{i=0}^{\infty} (T^p \circ \varrho_s)^{-i}(\mathscr{O}_s)$. Now let $K \subset \mathscr{W}_s$ be a compact set. Then we find $j \in \mathbb{N}$ such that $K \subset \bigcup_{i=0}^{j} (T^p \circ \varrho_s)^{-i}(\mathscr{O}_s)$. Then $(T^p \circ \varrho_s)^j(K) \subset \mathscr{O}_s$.

b) Assume that (2.6.1)–(2.6.4) are satisfied. Observe that $(T^{m_s} \circ \varrho_s)(cl\, \mathscr{O}_s) \subset \mathscr{O}_s$. We show first that

$$\mathscr{W}_s \subset \bigcup_{i=0}^{\infty} (T^{m_s} \circ \varrho_s)^{-i}(\mathscr{O}_s).$$

Let x be in $\mathscr{W}_s$, i.e. there is $i \in \mathbb{N}$ such that $T^i(x) \in \mathscr{O}_s$. Set $y = T^i(x)$. Then by (2.6.2) [resp. (2.6.4)] there is n_y such that $T^n(y) = T^{i+n}(x) \in \mathscr{O}_s$, whenever $n \geqq n_y$. Hence we find $k \in \mathbb{N}$ such that $T^{km_s}(x) \in \mathscr{O}_s$. Suppose, that k is minimal with this property, i.e. $T^{jm_s}(x) \in P \backslash \mathscr{O}_s$ for all j such that $0 \leqq j \leqq k-1$. Hence, $(T^{m_s} \circ \varrho_s) T^{jm_s}(x) = T^{(j+1)m_s}(x)$ for all j such that $0 \leqq j \leqq k-1$ and by induction $(T^{m_s} \circ \varrho_s)^j(x) = T^{jm_s}(x)$ for all j such that $0 \leqq j \leqq k$. Thus, $x \in (T^{m_s} \circ \varrho_s)^{-k}(\mathscr{O}_s)$ and the conclusion follows from the same argument as in a).

(2.9.4): Since $\varrho_s(\mathscr{W}_s) = \mathscr{W}_s \backslash \mathscr{O}_s \subset \mathscr{W}_s$ and $\varrho_{s|\mathscr{W}_s \backslash \mathscr{O}_s} = \mathrm{id}_{|\mathscr{W}_s \backslash \mathscr{O}_s}$, it follows from Corollary 2.3 that $\varrho_{s|\mathscr{W}_s} \sim \mathrm{id}_{|\mathscr{W}_s}$ and the conclusion is a consequence of that fact. □

The next lemma contains the crucial steps in the proofs of (2.5) and (2.6). In both cases we use some basic facts from algebraic topology. In the second case one cannot use a Lefschetz (mod p)-argument. In the first case one cannot use an index (mod p)-argument but as we shall show we can use a Lefschetz (mod p)-argument. However, we could also use the arguments of the second case.

(2.10) Lemma. *Let P be a cone in a linear normed space, $r, R \in \mathbb{R}_+$ and $T: P \to P$ completely continuous. Assume that either* (2.5.1)–(2.5.4) *or* (2.6.1)–(2.6.4) *are satisfied. Then with the notations of* (2.8) *we have:*

(2.10.1) $T \circ \varrho_s : \mathscr{W}_s \to \mathscr{W}_s$ *is a Lefschetz map;*

(2.10.2) $\Lambda(T \circ \varrho_s, \mathscr{W}_s) = \Lambda(T, \mathscr{W}_s)$ *and* $\Lambda(T, \mathscr{W}_s) = 1$.

Proof. The first assertion follows from (2.9.2) and théorème 2.1 in [7] and $\Lambda(T \circ \varrho_s, \mathscr{W}_s) = \Lambda(T, \mathscr{W}_s)$ follows from (2.9.4).

Case a): Assume that (2.5.1)–(2.5.4) are satisfied. Choose $p>\max\{m_s, n_s\}$ and prime. Since $T^p\circ\varrho_s(\mathcal{O}_s)\subset\mathcal{O}_s$ and $\mathcal{O}_s$ is contractible we have that $T^p\circ\varrho_s:\mathcal{O}_s\to\mathcal{O}_s$ is a Lefschetz map and $\Lambda(T^p\circ\varrho_s, \mathcal{O}_s)=1$. Since $\mathcal{O}_s$ absorbs compact sets of $\mathcal{W}_s$ under $(T^p\circ\varrho_s)$ [cf. (2.9.3)] it follows from Lemma 1.9 that $T^p\circ\varrho_s:\mathcal{W}_s\to\mathcal{W}_s$ is also a Lefschetz map and $\Lambda(T^p\circ\varrho_s, \mathcal{W}_s)=1$. Since $T\circ\varrho_s:\mathcal{W}_s\to\mathcal{W}_s$ is a map of compact attraction we find $Y_s\subset\mathcal{W}_s$ open and such that $cl(T\circ\varrho_s)(Y_s)$ is a compact subset of Y_s and such that Y_s absorbs compact sets of $\mathcal{W}_s$ under $T\circ\varrho_s$ (cf. Corollary 2.2 in [6]). Thus Lemma 1.9 implies $\Lambda(T\circ\varrho_s, \mathcal{W}_s)=\Lambda(T\circ\varrho_s, Y_s)$. Since $T\circ\varrho_s: Y_s\to Y_s$ is a compact map we obtain from Lemma 1.7 for primes p $\Lambda(T\circ\varrho_s, Y_s)\equiv\Lambda((T\circ\varrho_s)^p, Y_s)$ mod p. Now Y_s also absorbs compact sets of $\mathcal{W}_s$ under $(T\circ\varrho_s)^p$ for any $p\in\mathbb{N}$; thus, $\Lambda((T\circ\varrho_s)^p, Y_s)=\Lambda((T\circ\varrho_s)^p, \mathcal{W}_s)$. Since $(T\circ\varrho_s)^p_{|\mathcal{W}_s}\sim T^p_{|\mathcal{W}_s}\sim T^p\circ\varrho_{s|\mathcal{W}_s}$ we obtain for any prime $p>\max\{m_s, n_s\}$ $\Lambda(T\circ\varrho_s, \mathcal{W}_s)\equiv\Lambda(T^p\circ\varrho_s, \mathcal{W}_s)=1$ mod p; and this is only possible if $\Lambda(T\circ\varrho_s, \mathcal{W}_s)=1$.

Case b): Assume that (2.6.1)–(2.6.4) are satisfied. Since $\mathcal{O}_s$ is connected and contractible we have that

$$H_q(\mathcal{O}_s)=\begin{cases}\mathbb{Q}, & \text{if } q=0\\ 0, & \text{if } q>0\end{cases}$$

and $i:\mathcal{O}_s\to\mathcal{W}_s$ induces an injection $i_*: H_*(\mathcal{O}_s)\to H_*(\mathcal{W}_s)$. Moreover, $(T^{m_s}\circ\varrho_s)(\mathcal{O}_s)\subset\mathcal{O}_s$ implies that $((T^{m_s}\circ\varrho_s)_{|\mathcal{O}_s})_*=(\mathrm{id}_{|\mathcal{O}_s})_*$. Once we have verified that $T_*(i_*H_*(\mathcal{O}_s))\subset i_*H_*(\mathcal{O}_s)$ we can obtain the following commutative diagram with exact rows

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & i_*H_*(\mathcal{O}_s) & \longrightarrow & H_*(\mathcal{W}_s) & \longrightarrow & H_*(\mathcal{W}_s)_{/i_*H_*(\mathcal{O}_s)} & \longrightarrow & 0\\
 & & \uparrow{\scriptstyle \hat{T}_*} & & \uparrow{\scriptstyle T_*} & & \uparrow{\scriptstyle \tilde{T}_*} & & \\
0 & \longrightarrow & i_*H_*(\mathcal{O}_s) & \longrightarrow & H_*(\mathcal{W}_s) & \longrightarrow & H_*(\mathcal{W}_s)_{/i_*H_*(\mathcal{O}_s)} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

where $\hat{T}_*=T_{*|i_*H_*(\mathcal{O}_s)}$ and $\tilde{T}_*$ is the quotient homomorphism. Since $\mathcal{O}_s$ is contractible we only have to verify the inclusion $T_*(i_*H_*(\mathcal{O}_s))\subset i_*H_*(\mathcal{O}_s)$ for $q=0$. Let $x_0\in\mathcal{O}_s$; then the class $[x_0]$ generates $H_0(\mathcal{O}_s)$. Since $T_{|\mathcal{O}_s}(x_0)\in\mathcal{W}_s$, we find from (2.9.3) $k\in\mathbb{N}$ such that $(T^{m_s}\circ\varrho_s)^k_{|\mathcal{W}_s}T_{|\mathcal{O}_s}(x_0)=y$ is in $\mathcal{O}_s$. In the following we prefer to write T_* instead of T_0. Consider

$$\begin{aligned}
T_{|\mathcal{W}_s^*}\circ i_*[x_0] &= T_{|\mathcal{W}_s^*}\circ i_*\circ(T^{m_s}\circ\varrho_s)^k_{|\mathcal{O}_s^*}[x_0]=T_{|\mathcal{W}_s^*}\circ(T^{m_s}\circ\varrho_s)^k_{|\mathcal{W}_s^*}\circ i_*[x_0]\\
&= T_{|\mathcal{W}_s^*}\circ(T^{km_s})_{|\mathcal{W}_s^*}\circ i_*[x_0]\,, \quad \text{by (2.9.4)}\\
&=(T^{m_s}\circ\varrho_s)^k_{|\mathcal{W}_s^*}\circ T_{|\mathcal{W}_s^*}\circ i_*[x_0]\,, \quad \text{by (2.9.4)}\\
&=[(T^{m_s}\circ\varrho_s)^k_{|\mathcal{W}_s}\circ T_{|\mathcal{W}_s}\circ i(x_0)]=[i\circ(T^{m_s}\circ\varrho_s)^k_{|\mathcal{W}_s}\circ T_{|\mathcal{O}_s}(x_0)]\\
&=[i(y)]=i_*[y]=i_*[x_0]\,, \quad \text{since } \mathcal{O}_s \text{ is contractible}.
\end{aligned}$$

Our computation shows in addition that trace $(\hat{T}_0)=1$; hence $\Lambda(\hat{T}_*)=1$.

We shall show now that $\tilde{T}_*$ is weakly-nilpotent. Let $a\in H_*(\mathcal{W}_s)$; we have to show that there is $n\in\mathbb{N}$ such that $T^n_*(a)\in i_*H_*(\mathcal{O}_s)$. Since H_* has compact supports, we find $K\subset\mathscr{W}_s$ a compact set and $b\in H_*(K)$ such that $a=j_*(b)$, if $j:K\to\mathscr{W}_s$ denotes the inclusion. From (2.9.3) we find $k\in\mathbb{N}$ such that $(T^{m_s}\circ\varrho_s)^k_{|K}(K)\subset\mathscr{O}_s$. Then the commutativity of the diagram

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "j"] \arrow[d, "(T^{m_s}\circ\varrho_s)^k_{|K}"'] & \mathscr{W}_s \arrow[d, "(T^{m_s}\circ\varrho_s)^k_{|\mathscr{W}_s}"] \\ \mathscr{O}_s \arrow[r, "i"] & \mathscr{W}_s \end{tikzcd}$$

and the fact that $(T^{km_s})_{|\mathscr{W}_s}\sim(T^{m_s}\circ\varrho_s)^k_{|\mathscr{W}_s}$ imply the identities

$$(T^{km_s})_{|\mathscr{W}_s^*}(a)=(T^{m_s}\circ\varrho_s)^k_{|\mathscr{W}_s^*}\circ j_*(b)=i_*\circ(T^{m_s}\circ\varrho_s)^k_{|K*}(b)\in i_*H_*(\mathscr{O}_s)\,.$$

Finally, Lemmata 1.5 and 1.6 imply $\Lambda(T,\mathscr{W}_s)=\Lambda(T_*)=\Lambda(\hat{T}_*)+\Lambda(\tilde{T}_*)=1+0=1$. □

Lemma 2.10 immediately implies the existence of a solution of the nonlinear eigenvalue problem

$$T(x)=\lambda x\,,\qquad \lambda\in\mathbb{R}\,.$$

(2.11) Corollary. *Let P be a cone in a linear normed space, $R\in\mathbb{R}_+$ and $T:P\to P$ completely continuous. Assume that either*
(2.11.1) *there is $m_R\in\mathbb{N}$ such that $T^m(S_R)\subset P\backslash cl\,B_R$, whenever $m\geqq m_R$, and there is $n_R\in\mathbb{N}$ such that $T^{n_R}(P\backslash cl\,B_R)\subset P\backslash cl\,B_R$; or*
(2.11.2) *there is $m_R\in\mathbb{N}$ such that $T^{m_R}(S_R)\subset P\backslash cl\,B_R$ and for all $x\in P\backslash cl\,B_R$ there is $n_x\in\mathbb{N}$ such that $T^n(x)\in P\backslash cl\,B_R$, whenever $n\geqq n_x$.*
Then there is $x_0\in S_R$ and there is $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda>1$, such that

$$T(x_0)=\lambda x_0\,.$$

Proof. From Lemma 2.10 we obtain in both cases $\Lambda(T\circ\varrho_R,\mathscr{W}_R)=1$ and since $T\circ\varrho_R$ is a map of compact attraction the Lefschetz fixed point theorem holds, i.e. there is $x\in\mathscr{W}_R$ such that $T\circ\varrho_R(x)=x$. Now, the definition of $\mathscr{W}_R$ implies that x cannot be in $cl\,B_R$. Hence, $T\circ\varrho_R(x)=x$ implies $T(Rx/\|x\|)=x$; thus, $T(Rx/\|x\|)=\|x\|/R(Rx/\|x\|)$. □

The proof of (2.5) and (2.6) is now routine work with the properties of the fixed point index.

Proof of (2.5): a) Computation of $\mathrm{ind}(P,T,B_r)$: Since T is completely continuous we have that T is compact on some neighborhood V of $\mathrm{Fix}(T_{|B_r})$. Since $T(x)\neq x$ for all $x\in S_r$ we may assume that $V\subset B_r$. Now the weak-commutativity property of the index (cf. Corollary 1.3) implies $\mathrm{ind}(P,T,B_r)=\mathrm{ind}(\mathscr{W}_r,T,B_r)$. Define $h:P\times[0,1]\to P$ by $h(x,t)=tT(x)+(1-t)T\circ\varrho_r(x)$ and observe that h is completely continuous. Moreover, $F=\{(x,t)\in cl\,B_r\times[0,1]\,|\,h(x,t)=x\}$ is closed in P, $F\cap S_r=\emptyset$ and since h is completely continuous it is also relatively compact; thus, F is compact in $B_r\times[0,1]$. Since h is locally compact we find a neighborhood U of F in $B_r\times[0,1]$ such that h is compact on U. Then the homotopy property of the index (cf. Theorem

1.2) implies $\mathrm{ind}(\mathscr{W}_r, T, B_r) = \mathrm{ind}(\mathscr{W}_r, T\circ\varrho_r, B_r)$. By definition of $\mathscr{W}_r$ we have $T\circ\varrho_r(x) = T(x) \neq x$ for all $x \in \mathscr{W}_r \backslash B_r$. Thus, $\mathrm{ind}(\mathscr{W}_r, T\circ\varrho_r, B_r) = \mathrm{ind}(\mathscr{W}_r, T\circ\varrho_r, \mathscr{W}_r)$ and, finally, since $T\circ\varrho_r$ is of compact attraction, we know that (cf. [6]) $\mathrm{ind}(\mathscr{W}_r, T\circ\varrho_r, \mathscr{W}_r) = \Lambda(T\circ\varrho_r, \mathscr{W}_r)$ and by Lemma 2.10 $\mathrm{ind}(P, T, B_r) = 1$.

b) Computation of $\mathrm{ind}(P, T, B_R)$: Since $T_{|B_R} = T\circ\varrho_{R|B_R}$ we have that $\mathrm{ind}(P, T, B_R) = \mathrm{ind}(P, T\circ\varrho_R, B_R)$. Since $T\circ\varrho_R: P \to P$ is a compact map the additivity and normalization properties for the index imply $\mathrm{ind}(P, T\circ\varrho_R, B_R) = \mathrm{ind}(P, T\circ\varrho_R, P) - \mathrm{ind}(P, T\circ\varrho_R, P\backslash cl\, B_R)$, and $\mathrm{ind}(P, T\circ\varrho_R, P) = \Lambda(T\circ\varrho_R, P) = 1$ since P is convex. Now, by the definition of $\mathscr{W}_R$ we have that $T\circ\varrho_R(x) = T(x) \neq x$ for all $x \in \mathscr{W}_R \backslash (P\backslash cl\, B_R)$; thus, $\mathrm{ind}(P, T\circ\varrho_R, P\backslash cl\, B_R) = \mathrm{ind}(P, T\circ\varrho_R, \mathscr{W}_R)$. Observe that $T\circ\varrho_R$ is compact on a neighborhood of $\mathrm{Fix}(T\circ\varrho_{R|\mathscr{W}_R})$ and therefore the weak-commutativity property of the index yields $\mathrm{ind}(P, T\circ\varrho_R, \mathscr{W}_R) = \mathrm{ind}(\mathscr{W}_R, T\circ\varrho_R, \mathscr{W}_R)$. Finally, $T\circ\varrho_R: \mathscr{W}_R \to \mathscr{W}_R$ is a mapping of compact attraction and therefore we have $\mathrm{ind}(\mathscr{W}_R, T\circ\varrho_R, \mathscr{W}_R) = \Lambda(T\circ\varrho_R, \mathscr{W}_R) = 1$, by Lemma 2.10. □

Proof of (2.6): The computations are analogous to the above. □

(2.12) Remark. (2.12.1) Let X be an infinite dimensional linear normed space. Then Remark 2.4.2 implies that Theorems 2.5 and 2.6 and Corollary 2.11 can be formulated in the obvious manner.

(2.12.2) From Corollary 4.5.1 in [6] or Corollary 1.1 in [14] we know that $\mathrm{ind}(P, T, B_r) = 0$ if $0 \in P$ is an ejective fixed point of a completely continuous operator $T: P \to P$ relative to B_r. Assuming that T satisfies (2.5.1) and (2.5.2) [resp. (2.6.1) and (2.6.2)] for a ball B_R, $R \in \mathbb{R}_+$, we obtain $\mathrm{ind}(P, T, B_R) = 1$. Thus, the additivity of the fixed point index provides an alternative criterion for the existence of a nontrivial fixed point for T. In a similar way one can combine the results for attractive fixed points as given in [18] and Theorems 2.5 and 2.6.

Finally, we give an application of Corollary 2.11 to the existence of bifurcation from infinity.

(2.13) Definition (Bifurcation from infinity). Let P be a cone in a linear normed space and $T: \mathbb{R}_+ \times P \to P$ a completely continuous operator. Denote by $\sum = \{(\lambda, x) \in \mathbb{R}_+ \times P \mid T(\lambda, x) = x\}$ the solution set of the equation $T(\lambda, x) = x$. Following Amann [2], we say that $\lambda_\infty \in \mathbb{R}_+$ is a bifurcation point from infinity iff $\sum \cap ((\lambda_\infty - \varepsilon, \lambda_\infty + \varepsilon) \times P\backslash cl\, B_{1/\varepsilon}) \neq \emptyset$ for all $\varepsilon > 0$.

(2.14) Bifurcation from Infinity for an Uryson Operator. Let Ω denote a closed, bounded set in a finite-dimensional space. Let $k: \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}_+$ be continuous and for the sake of simplicity we shall assume that $\mathrm{mes}\,\Omega = 1$. We consider the completely continuous operator $A: \mathbb{R}_+ \times C_+(\Omega) \to C_+(\Omega)$ defined by

$$A(\mu, x)(t) = \mu \cdot \int_\Omega k(s, t) f(x(s))\, ds\,;$$

where $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ is continuous. Assume that

(2.14.1) there is $m, M \in \mathbb{R}$ such that $0 < m < k(s, t) < M < \infty$ for all $(s, t) \in \Omega \times \Omega$;

(2.14.2) there is $\varrho > 0$ such that $f(u) \geqq 1/m_1 \cdot u$, whenever $u \geqq \varrho$, where $0 < m_1 < m$.

Then there is μ_∞, $0 \leqq \mu_\infty \leqq 1$, such that μ_∞ is a bifurcation point from infinity for the equation $A(\mu, x) = x$.

Proof. Let $P_M^m = \{x \in C_+(\Omega) | \min x(t) \geqq m/M \|x\|_\infty\}$, where $\| \ \|_\infty$ denotes the sup-norm. Then P_M^m is a cone in $C_+(\Omega)$ and $B: P_M^m \to P_M^m$ is a completely continuous operator, where

$$B(x)(t) = \int_\Omega k(s,t) f(x(s))\, ds\,.$$

Set $R = M/m \cdot \varrho$. Let x be in P_M^m and $\|x\|_\infty \geqq R$; then $x(s) \geqq m/M \|x\|_\infty \geqq m/M \cdot M/m \cdot \varrho = \varrho$. Thus,

$$B(x)(t) = \int_\Omega k(s,t) f(x(s))\, ds \geqq m \cdot \int_\Omega f(x(s))\, ds \geqq m/m_1 \cdot \int_\Omega x(s)\, ds \geqq m/m_1 \cdot \varrho\,;$$

and $B^n(x)(t) \geqq (m/m_1)^n \cdot \varrho$, $n \in \mathbb{N}$. Since $m/m_1 > 1$, we find $n_R \in \mathbb{N}$ such that $\|B^n(x)\|_\infty > R$, whenever $n \geqq n_R$. Thus, Corollary 2.11 implies that there is $x_R \in S_R$, i.e. $\|x_R\|_\infty = M/m \cdot \varrho$, and $\lambda_R > 1$ such that $B(x_R) = \lambda_R x_R$. Note that the existence of $x_R \in S_R$ and λ_R only positive such that $B(x_R) = \lambda_R x_R$ follows already by Theorem 5.5 in [10], which provides an extension of the Birkoff-Kellogg-theorem to the case of a cone. Set $\mu_R = 1/\lambda_R < 1$, then $A(\mu_R, x_R) = x_R$. Since M was arbitrary except for (2.14.1) we find a sequence $(x_n) \subset C_+(\Omega)$ and a sequence $(\mu_n) \subset (0,1)$ such that $A(\mu_n, x_n) = x_n$ and $\|x_n\|_\infty \geqq n$. Now, (μ_n) has an accumulation point $\mu_\infty \in [0,1]$ and clearly this point is a bifurcation point from infinity for $A(\mu, x) = x$. □

References

1. Amann, H.: Fixed points of asymptotically linear maps in ordered Banach spaces. J. Funct. Anal. **14**, 162—171 (1973)
2. Amann, H.: Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach spaces. SIAM Review **18**, 620—709 (1976)
3. Borsuk, K.: Theory of retracts. Warszawa: PWN, Polish Scientific Publishers 1967 (Polska Akad. Nauk, Monographie matem., 44)
4. Browder, F. E.: The Lefschetz fixed point theorem and asymptotic fixed point theorems. "Partial differential equations and related topics". Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1975
5. Dugundji, J.: An extension of Tietze's theorem. Pacific J. Math. **1**, 353—367 (1951)
6. Fenske, C. C., Peitgen, H.-O.: On fixed points of zero index in asymptotic fixed point theory. (to appear in Pacific J. Math.)
7. Fournier, G.: Généralisations du théorème de Lefschetz pour des espaces non-compacts I, II, III. Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Math. Astronom. Phys. **23**, 693—711 (1975)
8. Granas, A.: The Leray-Schauder index and the fixed point theory for arbitrary ANR's. Bull. Soc. math. France **100**, 209—228 (1972)
9. Krasnosel'skiĭ, M. A.: Fixed points of cone-compressing or cone-extending operators. Soviet Math. Dokl. **1**, 1285—1288 (1960)
10. Krasnosel'skiĭ, M. A.: Positive solutions of operator equations. Groningen: Noordhoff 1964
11. Leray, J.: Théorie des points fixes: indice total et nombre de Lefschetz. Bull. Soc. math. France **87**, 221—233 (1959)
12. Nussbaum, R. D.: Some asymptotic fixed point theorems. Trans. Amer. Math. Soc. **171**, 349—375 (1972)
13. Nussbaum, R. D.: Periodic solutions of some nonlinear, autonomous functional differential equations. II. J. Diff. Eq. **14**, 360—394 (1973)
14. Nussbaum, R. D.: Periodic solutions of some nonlinear, autonomous functional differential equations. Ann. Mat. Pura Appl. **101**, 263—306 (1974)
15. Nussbaum, R. D.: A global bifurcation theorem with applications to functional differential equations. J. Funct. Anal. **19**, 319—338 (1975)
16. Peitgen, H.-O.: Asymptotic fixed point theorems and stability. J. Math. Anal. Appl. **47**, 32—42 (1974)

17. Peitgen, H.-O.: On the Lefschetz number for iterates of continuous mappings. Proc. Amer. Math. Soc. **54**, 441—444 (1976)
18. Peitgen, H.-O.: Some applications of the fixed point index in asymptotic fixed point theory. Proc. Conf. on Fixed Point Theory and its Applications, Halifax 1975, ed.: Academic Press, N.Y. 1976. Bonn Univ. preprint no. 78 (1975)
19. Rothe, E.: Zur Theorie der topologischen Ordnung und der Vektorfelder in Banach'schen Räumen. Compositio Math. **5**, 177—197 (1938)
20. Steinlein, H.: Ein Satz über den Leray-Schauderschen Abbildungsgrad. Math. Z. **120**, 176—208 (1972)
21. Steinlein, H.: Über die verallgemeinerten Fixpunktindizes von Iterierten verdichtender Abbildungen. Manuscripta math. **8**, 251—266 (1972)
22. Steinlein, H.: A new proof of the (mod p)-theorem in asymptotic fixed point theory. Proc. Conf. on Problems in Nonlinear Functional Analysis, Bonn 1974, ed.: Ber. Ges. Math. Datenverarb. Bonn **103**, 29—42 (1975)
23. Zabreiko, P. P., Krasnosel'skiĭ, M. A.: Iterations of operators and the fixed point index. Doklady Akad. Nauk SSSR **196**, 1000—1009 (1971) = Soviet Math. Dokl. **12**, 294—298 (1971)

Received February 13, 1976

Math. Ann. 225, 219—242 (1977)

Minimal Models in Homotopy Theory

H. J. Baues and J. M. Lemaire*

Mathematisches Institut der Universität, Wegelerstr. 10, D-5300 Bonn, Federal Republic of Germany

There are three basic constructions in literature which relate a 1-connected topological space X to a differential graded algebra. Adams and Hilton [2] constructed a chain algebra (with integer coefficients) for the loop space ΩX, a special version of which is Adams' cobar construction [1]. Later Quillen [13] associated a differential graded rational Lie algebra $\lambda(X)$ to the space X, and Sullivan [14, 15], using simplicial differential forms with rational coefficients, obtained a DG commutative cochain algebra for X. For these cochain algebras, Sullivan introduces the notion of minimal model, which corresponds to the Postnikov decomposition of a space.

In this paper, we construct minimal models for chain algebras (over any field) and for rational DG Lie algebras. These minimal models correspond to the Eckmann-Hilton homology decomposition of a space. The algebraic construction of the minimal model uses algebraic versions of the Hurewicz and Blakers-Massey theorems (2.6), (2.9). The corresponding minimal models for topological spaces are studied in § 3.

§ 0. Recollection of Notations and Results

Our references for notations are [10] and [13]. For the reader's convenience, we here collect basic definitions and facts we shall use in this paper.

(0.1) Let $\boldsymbol{k}$ be a field. All algebraic objects we shall consider are graded $\boldsymbol{k}$-vector spaces, i.e. sequences of $\boldsymbol{k}$-vector spaces which are zero in negative degrees. In particular $\boldsymbol{k}$ is the graded vector space which equals $\boldsymbol{k}$ in degree zero and zero elsewhere.

In case we have a $DG\boldsymbol{k}$-vector space M, the prefix "chain" (resp. "cochain") means that the differential has degree (-1) (resp. $+1$), and we write M_n (resp. M^n) for the component of degree n. We denote by $|x|$ the degree of $x \in M$.

* During the preparation of this paper, the first author was partially supported by the Centre National de la Recherche Scientifique (France), and the second author by the Sonderforschungsbereich 40 "Theoretische Mathematik" (Bonn)

The r-fold suspension ($r\in\mathbb{Z}$) of a graded vector space V is the graded vector space $s^r V$ defined by $(s^r V)_n = V_{n-r}$, $n\in\mathbb{Z}$, and we denote by $\hat{v}\in s^r V$ the element which corresponds to $v\in V$.

Let HM be the homology of the DG vector space M. A weak isomorphism $f: M\to N$ is DG-map such that $Hf: HM\to HN$ is an isomorphism.

(0.2) The tensor product $M\otimes N$ of two DG $\boldsymbol{k}$-vector spaces M and N is defined by

$$(M\otimes N)_n = \bigoplus_{r+s=n} (M_r\otimes N_s)$$

together with the differential $d\otimes N + M\otimes d$, where M denotes the identity map of M as well; here we use the Koszul convention for signs: namely, the interchange isomorphism $T: M\otimes N\to N\otimes M$ is defined by $T(x\otimes y) = (-1)^{|x|\cdot|y|} y\otimes x$, and any calculation which involves the interchange map will be made accordingly; for instance $(M\otimes d)(x\otimes y) = (-1)^{|x|} x\otimes dy$. Recall that $H(M\otimes N) = HM\otimes HN$ by the Künneth theorem.

The symmetric tensor product $M\bar{\otimes} M$ is the quotient $M\otimes M/R$ where R is the sub-vector space generated by $x\otimes y - (-1)^{|m|\cdot|n|} y\otimes x$ for all x and y in M. More generally, one defines the r-fold symmetric product $M^{\bar{\otimes} r}$; one has maps

$$\pi: M^{\otimes r}\to M^{\bar{\otimes} r}$$
$$\sigma: M^{\bar{\otimes} r}\to M^{\otimes r}.$$

Here π is the quotient map, and

$$\sigma(x_1\otimes x_2\otimes\ldots\otimes x_r) = \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_r} \mathscr{E}(\tau) x_{\tau(1)}\otimes\ldots\otimes x_{\tau(r)}$$

where $\mathfrak{S}_r$ is the symmetric group, and $\mathscr{E}: \mathfrak{S}_r\to\{+1, -1\}$ is the sign given by the above interchange map T.

If $r! \neq o\in\boldsymbol{k}$, then $(r!)^{-1}\sigma$ is a section of π and σ is injective.

(0.3) As in [2], a chain algebra A is a chain $\boldsymbol{k}$-vector space, together with chain maps $m: A\otimes A\to A$ and $\iota: \boldsymbol{k}\to A$ satisfying the associativity and unit conditions (cf. [10] 1.1). In addition A shall be connected, i.e. $\iota: \boldsymbol{k} \xrightarrow{\equiv} A_0$. Let $\bar{A}$ be the augmentation ideal and let $QA = \bar{A}/\bar{A}\cdot\bar{A}$ be the indecomposables; then QA has the induced differential. Clearly the homology HA is a graded connected algebra.

(0.4) Let V be a graded vector space, with $V_0 = o$.

The tensor algebra $T(V)$ is the graded algebra whose underlying vector space is the graded direct sum $\bigoplus_{n\geq o} V^{\otimes n}$ (here $V^{\otimes o} = \boldsymbol{k}$); for this direct sum, let i^m and p^n be the inclusion of $V^{\otimes m}$ and the projection onto $V^{\otimes n}$ respectively. Then i^0 is the unit of $T(V)$, and the multiplication m is the unique map such that $p^{m+n}\cdot m\cdot(i^m\otimes i^n)$: $V^{\otimes m}\otimes V^{\otimes n}\to V^{\otimes m+n}$ is the canonical isomorphism.

We say that a chain algebra A is free if, forgetting differentials, one has $A\cong T(V)$ for some V. In this case the differential on A is determined by its restriction $d\cdot i^1$: $V\to T(V)$, and $QA\cong V$.

(0.5) A chain Lie algebra L is a chain $\mathbb{Q}$-vector space, together with a map

$$[\,,\,]: L\otimes L\to L$$

which satisfies graded anticommutativity and the Jacobi identity (cf. [10], 5.2, or [13], Appendix B). In addition L shall be connected, i.e. $L_0 = o$.

Let $QL = L/[L, L]$ with the induced differential. The enveloping algebra UL, as defined in [10] or [13], is a chain $\mathbb{Q}$-algebra. Recall that $QUL = QL$. The homology HL is a Lie algebra, and one has $HUL = UHL$ as algebras.

We point out that we consider chain Lie algebras only over $\mathbb{Q}$, while we allow any ground field $\boldsymbol{k}$ for chain algebras.

(0.6) Let V be a graded vector space, with $V_0 = o$. The map $m - m \cdot T: \overline{T(V)} \otimes \overline{T(V)} \to \overline{T(V)}$ gives $\overline{T(V)}$ a Lie algebra structure. The free Lie Algebra $\mathbb{L}(V)$ on V is the sub-Lie-algebra of $\overline{T(V)}$ generated by V. Clearly $U\mathbb{L}(V) = T(V)$.

As in the case of chain algebras, we say that a chain Lie algebra F is free if, forgetting differentials, one has $F \cong \mathbb{L}(V)$ for some V.

(0.7) In the category of (chain) algebras, as well as in the category of (chain) Lie algebras, there exist coproducts; we denote the coproduct of A and B by $A \amalg B$. We shall actually use the coproduct $A \amalg B$ only when B is free, and we shall give an explicit description of this in the remark following (2.8).

(0.8) A chain coalgebra is a chain $\boldsymbol{k}$-vector space together with chain maps $\varepsilon: C \to \boldsymbol{k}$ and $\Delta: C \to C \otimes C$ which satisfy counit and coassociativity conditions, as in [10], 2.1. The coalgebra C is cocommutative if $T \cdot \Delta = \Delta$. It is connected if ε: $C_0 \xrightarrow{\cong} \boldsymbol{k}$, and 1-connected if an addition $C_1 = o$. For a connected coalgebra, let $\bar{C}$ be the augmentation coideal of positive degree elements, and let $PC = \operatorname{Ker}(\bar{\Delta}: \bar{C} \to \bar{C} \otimes \bar{C})$ be the primitive elements.

(0.9) Let V be a graded $\boldsymbol{k}$-vector space, with $V_0 = o$.

The tensor coalgebra $T'(V)$ is the coalgebra whose underlying vector space is $\bigoplus_{n \geq o} V^{\otimes n}$ as in (0.4); its counit is p^0, and its diagonal Δ is the unique map such that

$$(p^m \otimes p^n) \cdot \Delta \cdot i^{m+n}: V^{\otimes(m+n)} \to V^{\otimes m} \otimes V^{\otimes n}$$

is the canonical isomorphism.

We say that the chain coalgebra C is cofree if, forgetting differentials one has $C \cong T'(V)$ for some V. Then the differential d on C is determined by its component

$$p^1 \cdot d: T'(V) \to V.$$

Also, $PT'(V) = V$.

(0.10) We define a cochain algebra B to be a cochain $\mathbb{Q}$-vector space, together with DG maps $m: B \otimes B \to B$ and $\iota: \mathbb{Q} \to B$ which satisfy associativity, commutativity and unit conditions. Sullivan ([14, 15]) calls these "differential algebras" but since we must distinguish them from chain algebras we call them "cochain algebras". Let C be a cocommutative chain $\mathbb{Q}$-coalgebra. Then $C^* = \operatorname{Hom}(C, \mathbb{Q})$ is a cochain algebra. Conversely, if B is a cochain algebra whose underlying vector space has finite dimension in each degree, then

$$\operatorname{Hom}(B \otimes B, \mathbb{Q}) = \operatorname{Hom}(B, \mathbb{Q}) \otimes \operatorname{Hom}(B, \mathbb{Q})$$

and thus $\operatorname{Hom}(B, \mathbb{Q})$ is a chain $\mathbb{Q}$-coalgebra.

(0.11) Let V be a graded $\mathbb{Q}$-vector space, with $V_0 = o$. The symmetric algebra $S(V)$ on V is the free commutative algebra on V, that is the algebra whose underlying vector space is $\bigoplus_{n \geqq o} V^{\bar{\otimes} n}$; let again i^m and p^n be the inclusion of $V^{\bar{\otimes} m}$ and the projection onto $V^{\bar{\otimes} n}$ respectively; then the commutative multiplication in $S(V)$ is the unique map $m: S(V) \otimes S(V) \to S(V)$ such that

$$p^{m+n} \cdot m \cdot (i^m \otimes i^n) = \pi : V^{\bar{\otimes} m} \otimes V^{\bar{\otimes} n} \to V^{\bar{\otimes}(m+n)}$$

and the unit in $S(V)$ is i^0.

Alternatively $S(V) = T(V)/R$ is the quotient of $T(V)$ by the ideal R generated by elements $x \otimes y - (-1)^{|x| \cdot |y|} y \otimes x$ for all x and y in V. Thus $\pi: T(V) \to S(V)$ is an algebra homomorphism. We recall that

$$S(V) = \mathbb{Q}[V_{\text{even}}] \otimes \Lambda[V_{\text{odd}}]$$

where $\mathbb{Q}[V_{\text{even}}]$ is the polynomial algebra on the even-degree components of V, and $\Lambda[V_{\text{odd}}]$ is the exterior algebra on the odd-degree components of V.

We say that a cochain algebra B is free if, forgetting differentials, one has $B \cong S(V)$ for some V. Again, the differential on B is then determined by its restriction $d \cdot i^1 : V \to S(V)$.

(0.12) The symmetric coalgebra $S'(V)$ on V is the coalgebra whose underlying vector space is $\bigoplus_{n \geqq o} V^{\bar{\otimes} n}$ as in (0.11); its counit is p^0, and its diagonal is the unique map Δ such that

$$(p^m \otimes p^n) \Delta i^{m+n} = \Sigma^{m,n} : V^{\bar{\otimes}(m+n)} \to V^{\bar{\otimes} m} \otimes V^{\bar{\otimes} n}$$

where $\Sigma^{m,n}$ is the shuffle map, defined by

$$\Sigma^{m,n}(v_1 \bar{\otimes} \ldots \bar{\otimes} v_{m+n}) = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}(m,n)} \mathscr{E}(\tau)(v_{\tau(1)} \bar{\otimes} \ldots \bar{\otimes} v_{\tau(m)}) \otimes (v_{\tau(m+1)} \bar{\otimes} \ldots \bar{\otimes} v_{\tau(m+n)})$$

in which $\mathfrak{S}(m,n) \subset \mathfrak{S}_{m+n}$ is the subset of all (m,n) shuffles.

Now it is not hard to see that the map

$$\sigma : S'(V) \to T'(V)$$

is an injective map of coalgebras, and thus the diagonal on $S'(V)$ can alternatively be thought of as the restriction of the diagonal of $T'(V)$ (cf. 0.9).

(0.13) Cobar Construction (cf. [1, 11])

Let C be a 1-connected chain $\boldsymbol{k}$-coalgebra, with diagonal Δ and differential d.

The cobar construction $\boldsymbol{\Omega} C$ is the free chain $\boldsymbol{k}$-algebra $T(s^{-1}\bar{C})$, together with the differential d_Ω whose restricton

$$d_\Omega \cdot i^1 : s^{-1} C \to T(s^{-1}\bar{C})$$

is given by

$$d_\Omega \cdot i^1 = -i^1 s^{-1} ds + i^2 (s^{-1} \otimes s^{-1}) \bar{\Delta} s$$

where $s: s^{-1}\bar{C} \to \bar{C}$ is the suspension and $\bar{\Delta}: \bar{C} \to \bar{C} \otimes C$ is the restriction of Δ. For $a \in \bar{C}$ with $\bar{\Delta} a = \Sigma b_i \otimes c_i$, one has, by application of the sign rule in (0.2)

$$d_\Omega(\hat{a}) = -\widehat{da} + \Sigma (-1)^{|b_i|} \hat{b}_i \otimes \hat{c}_i$$

where $s(\hat{a})=a$. This coincides with Adams' definition. Clearly $\boldsymbol{\Omega}$ is a functor from 1-connected chain coalgebras to connected chain algebras.

The cobar construction spectral sequence is given by the filtration of $\boldsymbol{\Omega} C$ by powers of the augmentation ideal $\overline{\boldsymbol{\Omega} C}$, that is:

$$\forall p \in \mathbb{N},\ F_{-p}\boldsymbol{\Omega} C = (\overline{\boldsymbol{\Omega} C})^p = \bigoplus_{m \geqq p} (s^{-1}\bar{C})^{\otimes m}.$$

This is a second-quadrant spectral sequence.

At the E^1-level, one has

$$E^1\boldsymbol{\Omega} C = \boldsymbol{\Omega} HC$$

as chain algebras, where HC is considered as a chain coalgebra with differential zero. Since C is 1-connected, the spectral sequence converges to $H\boldsymbol{\Omega} C$. Therefore the functor $\boldsymbol{\Omega}$ maps a weak isomorphism of chain coalgebras into a weak isomorphism of chain algebras.

(0.14) Bar Construction (cf. [11])

Let A be a (connected) chain algebra, with multiplication m and differential d, and let $\bar{m}: \bar{A} \otimes \bar{A} \to \bar{A}$ be the restriction of m. The bar construction $\boldsymbol{B}A$ is the cofree chain coalgebra $T'(s\bar{A})$ together with the differential d_B whose component

$$p^1 \cdot d_B : T'(s\bar{A}) \to s\bar{A}$$

is given by

$$p^1 d_B = -sds^{-1}p^1 + s\bar{m}(s^{-1} \otimes s^{-1})p^2.$$

Clearly $\boldsymbol{B}$ is a functor from connected chain algebras to 1-connected chain coalgebras.

The bar construction spectral sequence is given by the filtration

$$\forall p \in \mathbb{N},\ F_p\boldsymbol{B}A = \bigoplus_{m \leqq p} (s\bar{A})^{\otimes m}.$$

This is a first-quadrant spectral sequence, and therefore it converges to $H\boldsymbol{B}A$. At the E^1-level, one has

$$E^1\boldsymbol{B}A = \boldsymbol{B}HA$$

as chain coalgebras, where HA is given the zero differential. From this we get that $\boldsymbol{B}$ takes weak isomorphisms of chain algebras into weak isomorphisms of algebras.

(0.15) $\mathscr{L}$-Construction (cf. [11, 13])

Let C be a 1-connected chain $\mathbb{Q}$-coalgebra.

The cobar construction $\boldsymbol{\Omega} C$ is the free chain algebra $(T(s^{-1}\bar{C}), d_\Omega)$. One checks that if C is cocommutative, the differential d_Ω restricts to the free Lie algebra $\mathbb{L}(s^{-1}\bar{C}) \subset T(s^{-1}\bar{C})$. Therefore, together with this restriction of d_Ω, the Lie algebra $\mathbb{L}(s^{-1}\bar{C})$ is a free chain Lie algebra which we call the $\mathscr{L}$-construction on C and denote by $\mathscr{L}C$. Clearly $\mathscr{L}$ is a functor from cocommutative, 1-connected chain $\mathbb{Q}$-coalgebras to connected chain Lie algebras. We observe that the cobar construction spectral sequence can be restricted to $\mathscr{L}C$ as well, and again $\mathscr{L}$ takes weak isomorphisms into weak isomorphisms.

(0.16) Koszul Construction

Let L be a connected chain Lie algebra.

The bar construction $\boldsymbol{B}(UL)$ on the enveloping algebra of L is the cofree chain coalgebra $(T'(s\overline{UL}), d_B)$. Now one has the injective map of coalgebras.

$$S'(sL) \subset S'(s\overline{UL}) \xrightarrow{\sigma} T'(s\overline{UL})$$

and one checks that the differential d_B restricts to $S'(sL)$; therefore, together with this restricted differential, $S'(sL)$ is a cocommutative chain algebra which we call the Koszul construction of L; we denote it by $\mathscr{C}L$ (our definition of $\mathscr{C}L$ coincides with Quillen's ([13], Appendix B)).

Again, the bar construction spectral sequence for $\boldsymbol{B}UL$ restricts to $\mathscr{C}L$. This spectral sequence will be used in (2.6); it is a useful tool for understanding the rational Hurewicz homomorphism, (cf. 2.6′, 3.7).

(0.17) Adjunction Properties

We recall from [11] that the bar construction functor $\boldsymbol{B}$ is a right adjoint to the cobar construction functor $\boldsymbol{\Omega}$. Moreover, the adjunction maps $\alpha: \boldsymbol{\Omega B}A \to A$ and $\beta: C \to \boldsymbol{B\Omega}C$ are weak isomorphisms of algebras and coalgebras respectively.

Similarly, the Koszul construction functor $\mathscr{C}$ is a right adjoint to $\mathscr{L}$, and the adjunction maps $\alpha': \mathscr{L}\mathscr{C}L \to L$ and $\beta': C \to \mathscr{C}\mathscr{L}C$ are weak isomorphisms of Lie algebras and cocommutative chain coalgebras respectively. Actually α and α' are just algebra extensions of p^1 and β and β' are coalgebra extensions of i^1.

As an application of these results, we have the following

(0.18) Proposition ([11], p. 5). *Let L be a chain Lie algebra. Then the injective map of chain coalgebras $\sigma: \mathscr{C}L \to \boldsymbol{B}UL$ is a weak isomorphism.*

Proof. One has the commutative diagram

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{\Omega}\mathscr{C}L \arrow[r, "\Omega\sigma"] \arrow[d, equal] & \boldsymbol{\Omega B}UL \arrow[d, "\alpha", "\sim"'] \\ U\mathscr{L}\mathscr{C}L \arrow[r, "U\alpha'", "\sim"'] & UL \end{tikzcd}$$

Since α and $U\alpha'$ are weak isomorphisms, so is $\boldsymbol{\Omega}\sigma$; now $\boldsymbol{B}$ preserves weak isomorphisms, thus $\boldsymbol{B\Omega}\sigma$ is a weak isomorphism, and therefore σ as well.

§ 1. Homotopy and Homology for Algebras

(1.1) Homotopy of Chain Algebra Maps

Let $A = (T(V), d)$ be a free chain algebra.

We define $A \times I$ to be the chain algebra equal to $T(V' \oplus V'' \oplus sV)$ as an algebra, where V' and V'' denote two copies of V, and where the differential d is given on generators in V' and V'' as in A, and on sV as follows: we first define the map of graded vector spaces, of degree $+1$:

$$S: A \to A \times I$$

to be the unique map satisfying the two conditions

$$\forall v \in V,\ Sv = \hat{v} \in A \times I \tag{1}$$

$$\forall x \forall y \in A,\ S(x \cdot y) = Sx \cdot y'' + (-1)^{|x|} x' \cdot Sy\,. \tag{2}$$

Then d is defined on sV by the formula

$$\forall v \in V,\ d\hat{v} = v'' - v' - Sdv\,. \tag{3}$$

The canonical inclusions $i', i'': A \to A \times I$, which identify V with V' and V'' respectively, are maps of chain algebras, and these maps are homotopic through S in the usual sense, i.e.

$$i'' - i' = Sd + dS\,.$$

Moreover, i' and i'' are chain homotopy equivalences, and one immediately checks that $Q(A \times I)$ is the usual "cylinder" on the chain complex QA.

Let B be any chain algebra, free or not, and $f, g: A \to B$ be chain algebra maps. We say that f and g are homotopic if there exists a chain algebra map H such that the following diagram commutes:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "i'"'] \arrow[drr, "f"] & & \\
& A \times I \arrow[r, "H"] & B\,. \\
A \arrow[ur, "i''"] \arrow[urr, "g"'] & &
\end{tikzcd}$$

As chain maps, f and g are homotopic through HS. We call H a chain-algebra homotopy from f to g. Note that QH then defines a homotopy from Qf to Qg.

(1.2) Homotopies of Chain Lie Algebras Maps

Let $F = (\mathbb{L}(V), d)$ be a free Lie algebra.

We define the free Lie $\mathbb{Q}$-algebra $F \times I = (\mathbb{L}(V' \oplus V'' \oplus sV), d)$, together with the mapping $:S: F \to F \times I$, by the following formulae:

$$:\forall v \in V,\ Sv = \hat{v} \tag{1'}$$

$$:\forall x \forall y \in F,\ S[x, y] = [Sx, y''] + (-1)^{|x|}[x', Sy] \tag{2'}$$

$$:\forall v \in V,\ d\hat{v} = v'' - v' - Sdv\,. \tag{3'}$$

As in (1.1), we define a chain Lie algebra homotopy between Lie algebra maps $f, g: F \to G$, (where G is any chain Lie algebra), to be a chain Lie algebra map $H: F \times I \to G$, such that $Hi' = f$ and $Hi'' = g$. Similar remarks as in (1.1) apply to $F \times I$: in particular $Q(F \times I)$ is the "cylinder" on QF, and therefore QH defines a homotopy from Qf to Qg.

However, we point out that the enveloping algebra $U(F \times I)$ is *not* isomorphic to $UF \times I$ as defined in (1.1): both are equal as tensor algebras, but the differentials are different. Of course, both are homotopy equivalent to UF as chain algebras.

(1.3) Remark. Homotopy of chain algebra maps, as defined above, is an equivalence relation. Indeed, transitivity can be seen by defining a retraction of $(A \times I) \times I$ onto $(A \times I) \amalg_A (A \times I) \amalg_A (A \times I)$, where the latter denotes the subalgebra of $(A \times I) \times I$ which corresponds to the inclusion of the three edges $\{o\} \times I \cup I \times \{o\} \cup \{1\} \times I$ in the square $I \times I$. We should mention that $F \times I$ is an explicit "cylinder object" for a free Lie algebra (cf. [13], p. 234), since the inclusion $(i', i''): F \amalg F \to F \times I$ is a free map and thus a cofibration ([13], p. 256, remark).

Therefore a homotopy in our sense is a "left homotopy" in the closed model category of chain Lie algebras, and D. Quillen states (p. 234) that left homotopy from a "cofibrant" object is an equivalence relation but cofibrant Lie algebras are just the free ones.

(1.4) Proposition *(Adams-Hilton). Let*

$$\begin{tikzcd} B' \arrow[r, "h"] & B \\ & A \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, dashed, "g"] \end{tikzcd}$$

be a diagram in the category of chain algebras (resp. Lie algebras). Assume h is a weak isomorphism, and A is free. Then there exists g such that the diagram commutes up to chain-algebra (resp. Lie algebra) homotopy, and g is unique up to chain-algebra (resp. Lie algebra) homotopy.

Proof. One constructs both g and the homotopy of hg to f by induction on the degree of generators in A, as in Theorem (3.1) of [2]. If g' is another lifting of f, a homotopy from g to g' is constructed in the same way.

(1.5) Proposition. *Let $h: A' \to A$ be a map of free chain k-algebras (resp. Lie algebras). Then h is a weak isomorphism if and only if $HQh: HQA' \to HQA$ is an isomorphism.*

Proof. The Lie algebra case reduces to the chain algebra case by means of the enveloping algebra functor U.

We recall from [9], (2.1.10) that h induces a commutative diagram.

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & EA' \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{h}"] & k \oplus sQA' \arrow[d, "k \oplus sQh"] \\ A \arrow[r] & EA \arrow[r] & k \oplus sQA \end{tikzcd}$$

where $EA = A \otimes [k \oplus sQA']$ together with the differential defined in [9], (2.1.4) or [2], $R1$ to $D2$, p. 309. This diagram is a map of acyclic "constructions", and the result follows by application of Moore's comparison theorem (cf. [12]).

(1.6) Proposition. *Let A be a free chain algebra and let F be a free Lie algebra. Then the compositions*

$$\overline{\mathbf{B}A} \xrightarrow{p^1} s\bar{A} \xrightarrow{s(\eta)} sQA$$

$$\overline{\mathscr{C}F} \xrightarrow{p^1} sF \xrightarrow{s(\eta)} sQF$$

are weak isomorphisms of chain vector spaces, where η is the quotient map.

Proof. We know that the adjunction maps (0.17)

$$\alpha : \boldsymbol{\Omega}\mathbf{B}A \to A$$

$$\alpha' : \mathscr{L}\mathscr{C}F \to F$$

are weak isomorphisms. Since $Q\alpha$ and $Q\alpha'$ are the maps $s(\eta)\cdot p^1$ above, the result follows by (1.5).

§ 2. Minimal Models

(2.1) Definition. A free chain algebra (A, d) is said to be minimal if the composition

$$\bar{A} \xrightarrow{d} \bar{A} \xrightarrow{\eta} QA$$

is zero. Equivalently, the induced differential on QA is zero, so that $HQA = QA$.

Let B be any chain algebra. A minimal model for B is a minimal chain algebra A together with a weak isomorphism

$$f : A \to B$$

Similarly, a free chain Lie algebra F is said to be minimal if the composition

$$F \xrightarrow{d} F \xrightarrow{\eta} QF$$

is zero, or equivalently if $HQF = QF$.

A minimal model for a chain Lie algebra G is a minimal Lie algebra F, together with a weak isomorphism $f : F \to G$.

Remark. If B is a free chain algebra (resp. G is a free Lie algebra), then f is injective since it is injective on generators by (1.5).

(2.2) Proposition *(uniqueness of minimal models). In the following diagram*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, "f"] & \\ & B \\ A' \arrow[uu, dashed, "g"] \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

*let (A, f) and (A', f') be minimal models of the chain **k**-algebra (resp. Lie algebra) B. Then there exist an isomorphism g such that the diagram commutes up to chain algebra homotopy.*

Proof. By Theorem (1.4) there exists a weak isomorphism of (Lie) algebras g such that the diagram homotopy-commutes. Since A' and A are minimal, Qg is an isomorphism by Proposition (1.5), and therefore g is an isomorphism since both A' and A are free.

We shall now prove the existence of minimal models.

(2.3) Theorem. *For any free chain* **k***-algebra B, there exists a minimal model* $f: A \to B$. *For any free chain Lie algebra G, there exists a minimal model* $f: F \to G$.

(2.4) Corollary. *For any chain* **k***-algebra (resp. chain Lie algebra), there exists a minimal model, and choosing minimal models defines functors*

$$\mu: \boldsymbol{k}\,\mathbf{Alg}^* \to [\mathbf{Min}_k\,\mathbf{Alg}^*]$$

from the category of chain **k***-algebras into the homotopy category of minimal chain* **k***-algebras, and*

$$\mu: \mathbf{Lie} \to [\mathbf{Min\,Lie}]$$

from the category of chain Lie algebras into the homotopy category of minimal chain Lie algebras; here homotopy is defined as in (1.1) and (1.2) respectively.

(2.4′) Remark. Sullivan ([15], §B) proves the corresponding statement for cochain algebras, that is, for any cochain algebra, there exists a minimal model, and choosing minimal models defines a functor

$$\mu: \mathbf{Alg} \to [\mathbf{Min\ Alg}^*]$$

from the category of cochain algebras (over $\mathbb{Q}$) into the homotopy category of minimal cochain algebras, where homotopy is defined as in ([15], §M).

Proof of (2.4). To show that (2.3) implies (2.4), we first remark that any chain algebra B admits a natural free model, that is

$$\alpha: \boldsymbol{\Omega B}B \to B$$

in the chain algebra case, and

$$\alpha': \mathscr{L}\mathscr{C}B \to B$$

in the Lie algebra case, cf. (0.17).

For each B, we choose a minimal model μ_B of $\boldsymbol{\Omega B}B$ (resp. $\mathscr{L}\mathscr{C}B$) by (2.3). Then, by (1.4), any map $f: B \to B'$ induces a unique homotopy class $\mu(f): \mu_B \to \mu_{B'}$.

(2.5) Remark. Sullivan constructs his minimal model for a 1-connected cochain algebra inductively. In the following, we apply the same inductive construction to the chain algebra B, and obtain a free model of B. But, while Sullivan can use an obvious degree argument to show that he obtains a minimal model, we will see that this argument does not work in the chain algebra case.

Assume

$$\varrho^n: A^n \to B$$

is a chain algebra map, such that A^n is free and $\varrho^n_*: H_i A^n \to H_i B$ is an isomorphism for $i < n$ and injective for $i = n$; we set $A^0 = \boldsymbol{k}$.

Then let $V\subset(ZB)_n$ be a sub-vector space of cycles such that the composition

$$V\subset(ZB)_n \twoheadrightarrow H_nB \twoheadrightarrow H_nB/\operatorname{Im}\varrho_*^n$$

is an isomorphism, and let

$$A'=A^n \amalg T(V)$$

where the differential on V is zero. Then there is an obvious chain algebra map

$$\varrho': A'\to B$$

let now $W\subset(ZA')_{n+1}$ be a sub-vector space such that the composition

$$W \hookrightarrow (ZA')_{n+1} \twoheadrightarrow H_{n+1}A' \qquad (*)$$

is an isomorphism onto $\operatorname{Ker}\varrho'_*$. Then we define

$$A^{n+1}=A'\amalg T(sW)$$

with the differential given on sW by the inclusion $W\subset ZA'$. The map ϱ^{n+1} is defined by $\varrho^{n+1}|A'=\varrho'$ and $\varrho^{n+1}|sW=o$. One checks that ϱ^{n+1} fulfills the inductive hypothesis, and $A=\varinjlim A^n$ is a free model for B. The analogous construction works for Lie algebras.

To show that A is minimal, we have to know that in (*) the vector space W can be chosen within the decomposable cycles. This is clear in the cochain algebra case, since then $(ZA')_{n+1}$ consists only of decomposable elements. In the chain algebra case, $(ZA')_{n+1}$ does contain indecomposable elements, therefore we need a more careful inductive argument.

Before proving (2.3), we first state some lemmas which are needed in our proof. These are algebraic versions of the Hurewicz and Blakers-Massey theorems, and so are interesting in their own right.

(2.6) Lemma[1]. *Let A be a free chain algebra, and let $\eta:\bar{A}\twoheadrightarrow QA$ be the canonical projection. Assume that $H_i\bar{A}=o$ for $i<r$. Then, for $i\leqq 3r+1$, there is an exact sequence*

$$H_i\bar{A}\xrightarrow{\eta_*}H_iQA\to T(i-1)\xrightarrow{m}H_{i-1}\bar{A}\xrightarrow{\eta_*}H_{i-1}QA\to\dots$$

where

$$T(i)=(H\bar{A}\otimes H\bar{A})_i \quad \text{for} \quad i\leqq 3r-1$$

$$T(3r)=(H\bar{A}\otimes H\bar{A})_{3r}/\operatorname{Im}(m\otimes H\bar{A}-H\bar{A}\otimes m)$$

with $m: H\bar{A}\otimes H\bar{A}\to H\bar{A}$ being the multiplication.

The following notation will be used in the next lemma: if L is a Lie algebra, let $L\wedge L=L\otimes L/\bar{R}$ be the quotient of $L\otimes L$ by the sub-vector space $\bar{R}$ generated by $x\otimes y+(-1)^{|x|\cdot|y|}y\otimes x$ for all x, y in L. Then the Lie bracket factors as a map $[\,,\,]: L\wedge L\to L$.

---

[1] We thank the referee for pointing out the analogy between Lemma (2.6) and Kor. 6.11 in [6]

(2.6') Lemma. *Let F be a free chain Lie algebra, and $\eta: F \to QF$ be the quotient map. Assume $H_iF = o$ for $i < r$. Then, for $i \leqq 3r+1$, there is an exact sequence*

$$H_iF \xrightarrow{\eta_*} H_iQF \to \Lambda(i-1) \xrightarrow{[\,,\,]} H_{i-1}F \xrightarrow{\eta_*} H_{i-1}QF$$

in which

$$\Lambda(i) = (HF \wedge HF)_i \quad \text{for} \quad i \leqq 3r-1$$

$$\Lambda(3r) = (HF \wedge HF)_{3r}/\operatorname{Im} J$$

where

$$J: HF \otimes HF \otimes HF \to HF \wedge HF$$

is given by Jacobi identity, namely:

$$J(a \otimes b \otimes c) = (-1)^{|a|\cdot|c|}[a, b] \wedge c + (-1)^{|b|\cdot|a|}[b, c] \wedge a + (-1)^{|c|\cdot|b|}[c, a] \wedge \,.$$

(2.7) Remark. We point out that in (2.6) and (2.6'), the map η_* is an isomorphism up to degree $2r-1$ and surjective in degree $2r$. This corresponds to the rational Hurewicz theorem (cf. 3.8).

The Koszul construction spectral sequence has been also studied by Allday [3]. The commutative diagrams in the proof of (2.6') correspond to Theorem 2.1 in [3].

Proof of (2.6) and (2.6'). The sequences in (2.6) and (2.6') are isomorphic to the exact sequences of low-degree terms in the bar construction spectral sequence and the Koszul construction spectral sequence respectively. We only have to identify edge homomorphisms and d^1-differentials. For (2.6), we consider the bar construction spectral sequence, in which we have (0.14)

$$E^1_{p,q}\boldsymbol{B}A = [(s H\bar{A})^{\otimes p}]_{p+q} \underset{p}{\Rightarrow} H_{p+q}(\boldsymbol{B}A)\,.$$

The edge homomorphism is given by the following commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
E^1_{1,*} \arrow[r, two heads] \arrow[d, equal] & E^\infty_{1,*} \arrow[r, hook] & \overline{HBA} \arrow[d, "{[s(\eta)\cdot p^1]_*}", "\cong"'] \\
s\overline{HA} \arrow[urr, "i^1_*"] \arrow[rr, "s(\eta)_*"] & & H(sQA)
\end{tikzcd}$$

where $[s(\eta)\cdot p^1]_*$ is an isomorphism by (1.6).

The d^1-differentials can be identified as in the following diagram

$$\begin{tikzcd}
E^1_{3,*} \arrow[r, "d^1_3"] \arrow[d, equal] & E^1_{2,*} \arrow[r, "d^1_2"] \arrow[d, equal] & E^1_{1,*} \arrow[d, equal] \\
(s\overline{HA})^{\otimes 3} & (s\overline{HA})^{\otimes 2} & s\overline{HA} \\
(\overline{HA})^{\otimes 3} \arrow[u, "\cong", "s\otimes s\otimes s"'] \arrow[r, "m\otimes\overline{HA}-\overline{HA}\otimes m"] & (\overline{HA})^{\otimes 2} \arrow[u, "\cong", "s\otimes s"'] \arrow[r, "m"] & \overline{HA} \arrow[u, "\cong", "s"']
\end{tikzcd}$$

For (2.6'), we consider the Koszul construction spectral sequence, in which we have (0.16)

$$E^1_{p,q}\mathscr{C}F = [(sHF)^{\bar{\bar{\otimes}} p}]_{p+q} \underset{p}{\Rightarrow} H_{p+q}(\mathscr{C}F)\,.$$

The edge homomorphism is given by

$$\begin{tikzcd} E^1_{1,*} \arrow[r] \arrow[d, equal] & E^\infty_{1,*} \arrow[r, hook] & \overline{H\mathcal{C}F} \arrow[d, "\cong"', "{[s(\eta)\cdot p^1]_*}"] \\ sHF \arrow[urr, "i^1_*"] \arrow[rr, "s(\eta)_*"] & & H(sQF) \end{tikzcd}$$

where again $[s(\eta)\cdot p^1]_*$ is an isomorphism by (1.6).

The d^1-differentials can be identified as in the following diagram

$$\begin{tikzcd} E^1_{3,*} \arrow[r, "d^1_3"] \arrow[d, equal] & E^1_{2,*} \arrow[r, "d^1_2"] \arrow[d, equal] & E^1_{1,*} \arrow[d, equal] \\ (sHF)^{\bar{\otimes} 3} & (sHF)^{\bar{\otimes} 2} & sHF \\ (sHF)^{\otimes 3} \arrow[u, "\pi"'] & & \\ (HF)^{\otimes 3} \arrow[u, "\cong", "s\otimes s\otimes s"'] \arrow[r, "J"] & HF\wedge HF \arrow[uu, "\cong", "\overline{s\otimes s}"'] \arrow[r, "{[,]}"] & HF \arrow[uu, "s"] \end{tikzcd}$$

Here $\overline{s\otimes s}$ is the degree 2 isomorphism induced by $s\otimes s$; one may compute d^1_3 from the following commutative diagram

$$\begin{tikzcd} (sHF)^{\bar{\otimes} 3} \arrow[rr, "d^1_3"] \arrow[d, "\Delta"'] & & (sHF)^{\bar{\otimes} 2} \arrow[d, "\sigma"'] \\ {[(sHF)^{\bar{\otimes}2}\otimes sHF]\oplus[sHF\otimes(sHF)^{\bar{\otimes}2}]} \arrow[rr, "d^1_2\otimes id + id\otimes d^1_2"] & & (sHF)^{\bar{\otimes}2} \end{tikzcd}$$

where $\Delta=(\Sigma^{2,1}, \Sigma^{1,2})$ is given by shuffle maps, cf. (0.12).

(2.7′) Remark. The exact sequence (2.6) [resp. (2.6′)] is also isomorphic to the bottom part ($i\leqq 3r$) of the homology long exact sequence which corresponds to the short exact sequence of chain complexes:

$$o\to\bar{A}^2\to\bar{A}\to QA\to o$$

(resp.

$$o\to[L, L]\to L\to QL\to o).$$

Indeed the multiplication $m:\bar{A}\otimes\bar{A}\to\bar{A}^2$ (resp. the bracket $[\,,\,]:L\wedge L\to[L, L]$) induces an isomorphism $T(i)\xrightarrow{\cong}H_i(\bar{A}^2)$ (resp. $\Lambda(i)\xrightarrow{\cong}H_i([L, L])$ for $i\leqq 3r$.

(2.8) Definition. We say that an injective map $i:A\to B$ of chain $\mathbb{k}$-algebras (resp. Lie algebras) is a cofibration if $B=i(A)\amalg T(W)$ [resp. $B=i(A)\amalg\mathbb{L}(W)$] as a $\mathbb{k}$-algebra (resp. Lie algebra), where W is some vector space (cf. (0.7), [13]).

Remark. We may say that B is obtained by "freely adding generators" to A. Indeed, we have

$$B = \bigoplus_{i \geq o} A \otimes (W \otimes A)^{\oplus i}$$

in the chain algebra case, and in the Lie algebra case the same description applies to the enveloping algebras. Note that in both cases, if A and B are free, a map $j: A \to B$ is a cofibration if $Qj: QA \to QB$ is injective.

The following lemma is an algebraic analogue to the Blakers-Massey theorem (cf. [5], p. 218).

(2.9) Lemma. *Let $i: A \hookrightarrow B$ be a cofibration of chain* **k***-algebras (resp. Lie algebras) and let $B/\!/A$ denote the quotient of B by the ideal generated by A, that is:*
$B/\!/A = B/(B \cdot \bar{A} + \bar{A} \cdot B)$ *in the chain algebra case,*
$B/\!/A = B/[B, A]$ *in the Lie algebra case.*
Let $\bar{\varphi}: B/\bar{A} \to B/\!/A$ be the natural surjection of chain complexes. Then, if $H_i A = o$ for $i < r$ and $H_i(B/\!/A) = o$ for $i < k$,

$$\bar{\varphi}_* : H_n(B, \bar{A}) \to H_n(B/\!/A)$$

is an isomorphism for $n \leq r + k - 2$ and surjective for $n \leq r + k - 1$.

Proof of (2.9). We first consider the chain algebra case. Let the bidegree of

$$a_0 \otimes w_1 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes w_l \otimes a_l \in A \otimes (W \otimes A)^{\otimes l} \subset B \quad \text{be} \quad (p, q) = \left(\sum_{i=1}^{l} |w_i|, \sum_{j=o}^{l} |a_j| \right).$$

Thus B is a bigraded algebra. Let $(F_p B)$ be the filtration of B by the first degree. Then

$$E^0_{p,q} B = B_{p,q} \, .$$

Let d be the differential on B. One has $d(W_n) \subset F_{n-1} B$; since d is a derivation, one has the commutative square

$$\begin{array}{ccc} E^0_{p,q} & \xrightarrow[d^0]{} & E^0_{p,q-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ A \amalg T(W) & \xrightarrow{d' \amalg o} & A \amalg T(W) \end{array}$$

where d' denotes the differential on A. Therefore

$$E^1_{p,q} B = (HA \amalg T(W))_{p,q}$$

and $d^1 = o \amalg d''$, where d'' is the quotient differential on $B/\!/A = T(W)$. Thus

$$E^2_{p,q} B = (HA \amalg H(B/\!/A))_{p,q}$$

and we have a spectral sequence of algebras which converges to HB. The edge homomorphisms correspond to the injection $i: A \hookrightarrow B$ and the projection $\varphi: B \twoheadrightarrow B/\!/A$, and the usual exact sequence of low degree terms can be written

$$H_{k+r-1} B \xrightarrow{\varphi_*} H_{k+r-1}(B/\!/A) \to H_{k+r-2} A \xrightarrow{i_*} H_{k+r-2} B \to \ldots .$$

Now the five-lemma yields the result.

In the Lie $\mathbb{Q}$-algebra case, one can apply the same arguments to the spectral sequence described in [13], II, 6.7 (where the filtration actually has to be defined as above).

We are now ready to prove Theorem (2.3).

Proof of Theorem (2.3). We give it only in the chain algebra case, since the proof for Lie algebras is entirely analogous.

Let r be the least integer such that $H_r\bar{B} \neq o$. We shall define the minimal model

$$f: A \to B$$

as

$$\varinjlim f^n : \varinjlim A^n \to B$$

where the chain algebra map $f^n: A^n \to B$ is an inclusion constructed by induction.

We first define f^1 as follows: let $V^1 \subset ZB$ be a subvector space such that the composition

$$V^1 \hookrightarrow ZB \twoheadrightarrow HB \xrightarrow{\eta_*} HQB$$

is an isomorphism onto $\operatorname{Im}\eta_*$. Let $A^1 = T(V^1)$ with differential zero, and let f^1 be the extension of the inclusion $V^1 \subset B$.

Now assume $f^{n-1}: A^{n-1} \to B$ has been constructed for $n \geqq 2$ with the following properties:

$$\begin{cases} (a^{n-1}): A^{n-1} \quad \text{is minimal} \\ (b^{n-1}): HQf^{n-1}: HQA^{n-1} = QA^{n-1} \to HQB \quad \text{is} \\ \qquad - \text{injective in all degrees} \\ \qquad - \text{surjective in degrees } \leqq nr. \end{cases}$$

Clearly, f^1 satisfies (a^1), and by (2.7), (b^1).

Let $V^n \subset Z(B, A^{n-1})$ be a sub-vector space of relative cycles, such that the composition

$$V^n \subset Z(B, A^{n-1}) \twoheadrightarrow H(B, A^{n-1}) \xrightarrow{\varphi_*} H(B /\!/ A^{n-1})$$

is an isomorphism onto the image of $\eta_* \varphi_*$.

Then we define $A^n = A^{n-1} \amalg T(V^n)$ with the differential d which extends the differential on A^{n-1} and is given on V^n by $d|V^n = d_B: V^n \to A^{n-1}$. Furthermore, f^{n-1} extends to f^n by the inclusion $V^n \subset B$.

To see that (a^n) holds, we have only to prove that the composition

$$V^n \xrightarrow{d} \bar{A}^{n-1} \twoheadrightarrow QA^{n-1} = HQA^{n-1}$$

is zero. One has the commutative diagram of chain complexes

$$\begin{array}{ccccccc} o \to & \bar{A}^{n-1} & \xrightarrow{f^{n-1}} & \bar{B} & \to & \bar{B}/\bar{A}^{n-1} & \to o \\ & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta} & & \downarrow & \\ o \to & QA^{n-1} & \longrightarrow & QB & \to & Q(B/\!/A^{n-1}) & \to o \end{array}$$

in which the bottom row is exact by (b^{n-1}) and freeness of A^{n-1} and B. Thus we get the induced diagram

$$\begin{array}{ccc} V^n \hookrightarrow H(B, A^{n-1}) & \xrightarrow{\partial} & HA^{n-1} \\ \downarrow{\scriptstyle \eta_*\bar{\varphi}_*} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_*} \\ HQ(B//A^n) & \xrightarrow{0} & HQA^{n-1} \rightarrowtail HQB \end{array}$$

which shows that (a^n) holds. Now:

$$HQf^n : QA^n = QA^{n-1} \oplus V^n \to HQB$$

is injective, for $V^n \to HQB/QA^{n-1} = HQ(B//A^{n-1})$ is injective by definition of V^n. Therefore f^n is an inclusion [cf. remark following (2.8)]. Finally, by (2.7) and (2.8), the maps η_* and $\bar{\varphi}_*$ are surjective in degrees $\leqq (n+1)r$; the commutative diagram with exact rows

$$\begin{array}{ccccccccc} o \to & QA^{n-1} & \to & QA^n & \to & V^n & \to o \\ & \downarrow{\scriptstyle =} & & \downarrow{\scriptstyle HQf^n} & & \downarrow & \\ o \to & HQA^{n-1} & \to & HQB & \to & HQ(B//A^{n-1}) & \to o \end{array}$$

then shows that (b^n) holds. This completes the proof of (2.3).

(2.10) Remark. The above construction of the minimal model $A = T(V)$ of B, with $V = \bigoplus_{i \geqq 1} V^i$, has the following property. Let $F_pV = \bigoplus_{i=1}^{p} V^i$; then

$$\forall p \geqq o,\ F_{p+1}V = d^{-1}(T(F_pV)) \cap V$$

in particular

$$V^1 = ZA \cap V \quad (\text{indeed } V^1 \xrightarrow{\hat{=}} ZA/ZA \cap \bar{A}^2).$$

Therefore F_*V is an admissible filtration in the sense of [9], 2.2.1, which also is the coarsest one on the generating vector space V. In the Lie algebra case, this filtration correspond to the filtration of the unstable cw-model of the rational homotopy type of a space X as an iterated mapping cone, cf. [4]. We believe that the length of this latter filtration is the Lusternik-Schnirelmann category of the rationalization $X_{(o)}$ of X. In the chain algebra case as well, the length of the minimal model filtration could be a meaningful invariant.

Next we consider the minimal model $\mathcal{M}$ of the cobar construction $\boldsymbol{\Omega} C$ on a 1-connected $\boldsymbol{k}$-coalgebra C. We shall see that in this case the quadratic terms in the differential of $\mathcal{M}$ are determined by the diagonal of HC. In particular, let $C = C_*(X) \otimes \boldsymbol{k}$ be the normalized singular chain coalgebra of a space X, with coefficients in $\boldsymbol{k}$, as in (3.1); then there is a natural isomorphism of graded algebras

$$H(\mathcal{M}) \cong H_*(\boldsymbol{\Omega} C) \cong H_*(\Omega X; \boldsymbol{k})$$

where ΩX is the loop space on X. Our next result expresses the fact that the quadratic part of the differential in $\mathcal{M}$ is determined by the cup-product in $H^*(X; \boldsymbol{k})$.

This is dual to Sullivan's result that the quadratic part of the differential in his minimal model of a space X is determined by the Whitehead product in $\pi_*(X)\otimes\mathbb{Q}$ (cf. [14], Theorem B, (iii); [15]).

(2.11) Theorem. *Let C be a 1-connected chain $\mathbf{k}$-coalgebra, with diagonal Δ. Let $\boldsymbol{\Omega} C$ be the cobar construction on C, and let $\mathcal{M}\to\boldsymbol{\Omega} C$ be a minimal model of the chain algebra $\boldsymbol{\Omega} C$. Then $\mathcal{M}$ is isomorphic to $T(s^{-1}\tilde{H}C)$ together with a differential d, for which the following diagram commutes*

$$\begin{tikzcd}
s^{-1}\tilde{H}C \arrow[r, "d"] \arrow[d, "s"', "\cong"] & \bar{\mathcal{M}}^2 \arrow[r, two heads] & \bar{\mathcal{M}}^2/\bar{\mathcal{M}}^3 = s^{-1}\tilde{H}C\otimes s^{-1}\tilde{H}C \arrow[d, "s\otimes s"] \\
\tilde{H}C \arrow[rr, "\bar{\Delta}_*"] & & \tilde{H}C\otimes\tilde{H}C
\end{tikzcd}\quad .$$

Proof. Only the statement about d requires a proof. Recall that the differential d_Ω of $\boldsymbol{\Omega} C=T(s^{-1}\bar{C})$ is defined on $s^{-1}\bar{C}$ by

$$d_\Omega=-d_c+(s^{-1}\otimes s^{-1})\bar{\Delta}s=-d_c+\delta$$

(cf. 0.13). We consider the following commutative diagram.

$$\begin{tikzcd}
s^{-1}\tilde{H}C\subset\bar{\mathcal{M}} \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "d"] & & \overline{\boldsymbol{\Omega} C} \arrow[d, "d_\Omega"] \\
\bar{\mathcal{M}}^2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"] & \overline{\boldsymbol{\Omega} C}^2 \arrow[r, hook] \arrow[d, "q"] & \overline{\boldsymbol{\Omega} C} \\
\bar{\mathcal{M}}^2/\bar{\mathcal{M}}^3 \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, equal] & \overline{\boldsymbol{\Omega} C}^2/\overline{\boldsymbol{\Omega} C}^3 \arrow[d, equal] & \\
s^{-1}\tilde{H}C\otimes s^{-1}\tilde{H}C \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr, "="'] & s^{-1}\bar{C}\otimes s^{-1}\bar{C} & \\
& Z(s^{-1}\bar{C}\otimes s^{-1}\bar{C}) \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[d] & \\
& H(s^{-1}\bar{C}\otimes s^{-1}\bar{C}) . &
\end{tikzcd}$$

Let $x\in s^{-1}\tilde{H}C$. We can write

$$fx=z+w$$

where $z\in s^{-1}C$ is a d_c-cycle and $w\in\overline{\boldsymbol{\Omega} C}^2$.

Therefore $qd_\Omega fx=\delta z-d_c w \bmod \overline{\boldsymbol{\Omega} C}^3$.

By the above diagram, $qd_\Omega fx$ is a cycle in $s^{-1}C\otimes s^{-1}C$, and clearly ($d_c w \bmod \overline{\boldsymbol{\Omega} C}^3$) is the boundary of ($w \bmod \overline{\boldsymbol{\Omega} C}^3$)$\in s^{-1}C\otimes s^{-1}C$. The result follows.

Actually, (2.11) is equivalent to the following more condensed theorem:

(2.12) Theorem. *Let $\mathcal{M} \to \Omega C$ be a minimal model of the cobar construction on a 1-connected* **k***-coalgebra C. Let $E^0\mathcal{M}$ be the bigraded differential algebra associated with the filtration of $\mathcal{M}$ by powers of $\bar{\mathcal{M}}$. Then f induces a differential isomorphism*

$$\bar{f}: E^0\mathcal{M} \to \Omega HC.$$

Proof. Filter both $\mathcal{M}$ and ΩC by powers of the augmentation ideals. We get a differential map

$$\bar{f} = E^1 f: E^1\mathcal{M} \to E^1 \Omega C.$$

But $E^1\mathcal{M} = \mathcal{M}$ since $\mathcal{M}$ is minimal and $E^1 \boldsymbol{\Omega} C = \boldsymbol{\Omega} HC$ is the E^1-term of the cobar construction spectral sequence.

(2.13) Remark. Let $A = (T(V), d)$ be a minimal algebra. Then $\boldsymbol{B}A$ is a differential coalgebra and the isomorphism

$$H(\boldsymbol{B}A) \cong \boldsymbol{k} \oplus sV$$

given by (1.6) defines a coalgebra structure Δ on $\boldsymbol{k} \oplus sV$. Since A clearly is a minimal model for $\boldsymbol{\Omega B}A$, Theorem (2.11) shows that this coalgebra structure is also given by the commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "d"] \arrow[d, "s"', "\cong"] & \bar{A}^2 \arrow[r, two heads] & \bar{A}^2/\bar{A}^3 = V \otimes V \arrow[d, "\cong"', "s \otimes s"] \\
sV \arrow[rr, "\Delta"] & & sV \otimes sV .
\end{tikzcd}$$

For a minimal model of the $\mathcal{L}$-construction (0.15), we have the following version of (2.11).

(2.14) Corollary. *Let C be a cocommutative 1-connected chain $\mathbb{Q}$-coalgebra. Then $\mathcal{L}C$ is a chain Lie algebra. Let $f: F \to \mathcal{L}C$ be a minimal model for $\mathcal{L}C$. Then F is isomorphic to the free Lie algebra $\mathbb{L}(s^{-1}\overline{HC})$ together with a differential d, such that the following diagram commutes*

$$\begin{tikzcd}
s^{-1}\overline{HC} \arrow[r, "d"] \arrow[d, "s"', "\cong"] & {[F,F]} \arrow[r, two heads] & {[F,F]/[[F,F],F]} \arrow[r, hook, "j"] & s^{-1}\overline{HC} \otimes s^{-1}\overline{HC} \arrow[d, "s \otimes s"] \\
\overline{HC} \arrow[rrr, "\bar{\Delta}_*"] & & & \overline{HC} \otimes \overline{HC}
\end{tikzcd}$$

where $j[x, y] = x \otimes y - (-1)^{|x| \cdot |y|} y \otimes x$.

As an application of (2.11) and (2.14) respectively, we obtain now formulations of the exact sequences (2.6) and (2.6′).

(2.15) Proposition. *Let C be a 1-connected chain* **k***-coalgebra, with diagonal Δ. Assume that $H_i C = o$ for $o < i \leqq r$.*

Let m be the multiplication of the chain algebra $\boldsymbol{\Omega} C$. Then, for $i \leqq 3r+1$, there is an exact sequence

$$(H\overline{\boldsymbol{\Omega} C})_i \xrightarrow{\eta_*} (H\bar{C})_{i+1} \xrightarrow{\delta_{i+1}} T(i-1) \xrightarrow{m} (H\overline{\boldsymbol{\Omega} C})_{i-1} \xrightarrow{\eta_*} (H\bar{C})_i$$

in which

$$\forall i<3r,\ T(i)=(H\overline{\Omega C}\otimes H\overline{\Omega C})_i \xrightarrow[\eta_*\otimes\eta_*]{\cong} (H\bar{C}\otimes H\bar{C})_{i+2}$$

$$T(3r)=(H\overline{\Omega C}\otimes H\overline{\Omega C})_{3r}/\mathrm{Im}\,(m\otimes id-id\otimes m)$$

$$\forall i<3r+2,\ \delta_i=\bar{\Delta}_i:(H\bar{C})_i\to(H\bar{C}\otimes H\bar{C})_i=T(i-2)\,.$$

Proof. This is the sequence (2.6) for the chain algebra ΩC, and only the statement about δ_i requires a proof. By Remark (2.7′), δ_i is the boundary in the homology sequence of the short exact sequence

$$o\to\overline{\Omega C}^2\to\overline{\Omega C}\to Q\Omega C\to o$$

or equivalently of the short exact sequence

$$o\to\mathcal{M}^2\to\mathcal{M}\to Q\mathcal{M}\to o$$

where $\mathcal{M}=(T(s^{-1}H\bar{C}),d)$ is the minimal model of $\boldsymbol{\Omega}C$.

Since $(\mathcal{M}^2)_i=(\mathcal{M}\otimes\mathcal{M})_i=T(i)$ for $i<3r$, we see that

$$\delta_i=d_{i-1}:(s^{-1}H\bar{C})_{i-1}\to(\mathcal{M}^2)_{i-2}=T(i-2)$$

and the image of d_{i-1} is quadratic in this range of degrees. Therefore the result follows by (2.11). We observe that δ_{3r+2} involves a non-quadratic part.

By a similar argument using (2.14), we have

(2.15′) Proposition. *Let C be a* 1*-connected chain* $\mathbb{Q}$*-coalgebra.*

Assume that $H_iC=o$ for $o<i\leqq r$. Let $[\,,]$ be the bracket of the chain Lie algebra $\mathcal{L}C$. Then, for $i\leqq 3r+1$, there is an exact sequence:

$$(H\mathcal{L}C)_i\xrightarrow{\eta_*}(H\bar{C})_{i+1}\xrightarrow{\delta_{i+1}}\Lambda(i-1)\xrightarrow{[,]}(H\mathcal{L}C)_{i-1}\xrightarrow{\eta_*}(H\bar{C})_i$$

in which

$$\forall i<3r,\ \Lambda(i)=(H\mathcal{L}C\wedge H\mathcal{L}C)_i\xrightarrow[\eta_*\otimes\eta_*]{\cong}(H\bar{C}\bar{\otimes}H\bar{C})_{i+2}$$

$$\Lambda(3r)=(H\mathcal{L}C\wedge H\mathcal{L}C)_{3r}/\mathrm{Im}\,J$$

where J is given by Jacobi identity as in (2.6′),

$$\forall i<3r+2,\ \delta_i=\bar{\Delta}_i:(H\bar{C})_i\to(H\bar{C}\bar{\otimes}H\bar{C})_i=\Lambda(i-2)\,.$$

(2.16) Remark. The above sequences thus appear as "EHP-sequences" for coalgebras. For $i\leqq 3r$, they can also be identified with the exact sequences of low-degree terms in the cobar and $\mathcal{L}$-construction spectral sequences respectively.

§ 3. Algebra Models of Spaces

We now describe the constructions relating 1-connected topological spaces X to DG algebras:

(3.1) Adams-Hilton Model

Let $CS(X)$ be the singular chain complex, with coefficients in $\boldsymbol{k}$, and let $CS^1(X)$ be the Eilenberg subcomplex of $CS(X)$ generated by the singular simplices whose

1-skeleton maps into the base point *. Then $C(X)=CS^1(X)/CS^1(*)$ is a 1-connected coalgebra with the standard Alexander-Whitney diagonal. Thus, the cobar construction yields a functor $X \rightsquigarrow \mathbf{\Omega} C(X)$ from 1-connected spaces into the category of chain $\boldsymbol{k}$-algebras. Adams [1] proves the existence of a natural isomorphism

$$\varphi_*: H\mathbf{\Omega}\, C(X) \xrightarrow{\cong} H_*(\Omega X; \boldsymbol{k})$$

for the Pontryagin algebra of the loop space ΩX of X.

We shall denote by A_X a minimal model for the chain $\boldsymbol{k}$-algebra $\mathbf{\Omega}\, C(X)$; in case X is a cw-complex, whose 1-skeleton is trivial, Adams and Hilton [2] construct a chain algebra generated by the cells of X, and the minimal model A_X is a minimal model of this chain algebra as well, and this provides better means for computation.

By Corollary (2.4), the correspondence $X \rightsquigarrow A_X$ yields a functor

$$A=\mu\mathbf{\Omega}\, C: \mathscr{T} \to [\mathbf{Min}_k\ \mathbf{Alg}_*]$$

where $\mathscr{T}$ is the category of 1-connected topological spaces. Forgetting differentials, one has

$$A_X \cong T(s^{-1}\tilde{H}_*(X; \boldsymbol{k}))\,.$$

Furthermore, it is implicit in Adams' and Hilton's work ([2], 2.1) that the following diagram commutes

$$\begin{array}{ccc} H(\bar{A}_X) & \xrightarrow{\quad \eta_* \quad} & H(QA_X) \\ \cong \Big\downarrow & & \Big\| \\ \tilde{H}_*(\Omega X; \boldsymbol{k}) & \xrightarrow{s^{-1}\Sigma} & s^{-1}\tilde{H}_*(X; \boldsymbol{k}) \end{array}$$

where Σ is the homology suspension.

(3.2) Quillen Model

In [13], Quillen constructs a functor $\lambda: \mathscr{T} \to \mathbf{Lie}$ into the category of connected chain Lie algebras (over $\mathbb{Q}$). He proves the existence of a natural isomorphism

$$H(\lambda(X)) \xrightarrow{\cong} \pi_*(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$$

of graded Lie algebras. We shall denote by L_X a minimal model of the chain Lie algebra $\lambda(X)$.

By Corollary (2.4), the correspondence $X \rightsquigarrow L_X$ yields a functor

$$L=\mu\lambda: \mathscr{T} \to [\mathbf{Min\ Lie}]\,.$$

Forgetting differentials, one has

$$L_X \cong \mathbb{L}(s^{-1}\tilde{H}_*(X; \mathbb{Q}))\,.$$

Furthermore, it follows from Quillen's work that the following diagram commutes

$$\begin{tikzcd} H(L_X) \arrow[r, "\eta_*"] \arrow[d, "\cong"'] & H(QL_X) \arrow[d, equal] \\ s^{-1}\pi_*(X)\otimes\mathbb{Q} \arrow[r, "s^{-1}h"] & s^{-1}\tilde{H}_*(X;\mathbb{Q}) \end{tikzcd}$$

where h is the rational Hurewicz homomorphism.

(3.3) Sullivan Model

Sullivan ([14, 15]) and Dupont ([7]) construct a contravariant functor $\mathscr{E}:\mathscr{T}\to\mathbf{Alg}^*$ into the category of cochain algebras (over $\mathbb{Q}$). The cochain algebra $\mathscr{E}(X)$ is the simplicial De Rham complex of the singular polytope of X.

They prove that there exists a natural isomorphism of graded algebras

$$H\mathscr{E}(X)\xrightarrow{\cong}H^*(X;\mathbb{Q})$$

which is induced by the integration map

$$\textstyle\int:\mathscr{E}(X)\to \mathrm{Hom}(CS(X),\mathbb{Q}) \quad \text{(cf. [14], Theorem A; [7], 2.8)}.$$

We shall denote by E_X a minimal model of the cochain algebra $\mathscr{E}(X)$. By Remark (2.4′), the correspondence $X\rightsquigarrow E_X$ yields a contravariant functor

$$E=\mu\mathscr{E}:\mathscr{T}\to[\mathbf{Min\ Alg}^*].$$

Forgetting differentials, one has

$$E_X\cong S(\mathrm{Hom}(\pi_*(X),\mathbb{Q})).$$

Furthermore, Sullivan states that the following diagram commutes

$$\begin{tikzcd} H(\bar{E}_X) \arrow[r, "\eta_*"] \arrow[d, "\cong"'] & H(QE_X) \arrow[d, equal] \\ \tilde{H}^*(X;\mathbb{Q}) \arrow[r, "\mathrm{hom}(h,\mathbb{Q})"] & \mathrm{hom}(\pi_*(X),\mathbb{Q}). \end{tikzcd}$$

(3.4) Remark. Let $[\mathscr{T}_{\mathbb{Q}}]$ be the homotopy category of 1-connected rational spaces. Then the functors L and E induce equivalences of categories

$$L:[\mathscr{T}_{\mathbb{Q}}]\to[\mathbf{Min\ Lie}]$$

$$E:[\mathscr{T}_{\mathbb{Q}}]\to[\mathbf{Min\ Alg}^*].$$

The equivalence L is given by Quillen's Theorem I ([13], §1), since μ induces an equivalence of Quillen's category $Ho(DGL)_1$ with **[Min Lie]** (cf. [13], Theorem 1.3).

The equivalence E follows from [15], §R.

Using the algebraic functors defined in § 0, we may try to compare the algebra models A_X, L_X, and E_X of the 1-connected space X.

Assume X has finite Betti numbers. Then $\mathrm{Hom}(E_X,\mathbb{Q})$ is a 1-connected cocommutative coalgebra; let L'_X be the minimal model of the chain Lie algebra

$\mathscr{L}\,\mathrm{Hom}(E_X, \mathbb{Q})$. Conversely $\mathrm{Hom}(\mathscr{C}L_X, \mathbb{Q})$ is a cochain algebra; let E'_X be the minimal model of $\mathrm{Hom}(\mathscr{C}L_X, \mathbb{Q})$.

Each model L_X, L'_X, E_X, E'_X determines the rational homotopy type of X. Furthermore, forgetting differentials, one has the isomorphisms

$$L_X \cong \mathbb{L}(s^{-1}\tilde{H}(X, \mathbb{Q}) \cong L'_X$$

of Lie algebras, and

$$E_X \cong S(\mathrm{Hom}(\pi_*(X), \mathbb{Q})) \cong E'_X$$

of commutative algebras. Therefore, we are lead to

(3.5) Conjecture. *The chain Lie algebras L_X and L'_X are isomorphic. Equivalently, the cochain algebras E_X and E'_X are isomorphic.*

Clearly the conjecture is true for Eilenberg-Mac-Lane spaces and spheres. The proof of this conjecture is related to the well-known problem: how to pass from the Postnikov decomposition to the Eckmann-Hilton homology decomposition and vice-versa. For a rational space, the latter is well-defined [16].

For the Adams-Hilton model A_X with rational coefficients, we can prove the following

(3.6) Proposition. *For a 1-connected space X with finite Betti numbers, there exists a natural isomorphism of chain $\mathbb{Q}$-algebras*

$$A_X \xrightarrow{\cong} UL'_X .$$

Proof. We consider the composition of chain maps

$$\gamma\colon CS^1(X) \hookrightarrow CS(X) \hookrightarrow CS(X)^{**} \xrightarrow{\int^*} \mathscr{E}(X)^* \to E^*_X$$

where $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{Q})$.

$CS^1(X)$ and E^*_X are connected coalgebras, and γ is a map of chain coalgebras, since $\gamma^*\colon E^{**}_X = E_X \to CS^1(X)^*$ is an algebra map.

Since the cobar-construction is also available for only connected coalgebras (cf. [11]), we obtain the diagram of weak isomorphisms of chain algebras

$$\begin{tikzcd}
A_X \arrow[rr, dashed] \arrow[dd] \arrow[ddr, dashed] & & UL'X \arrow[d, "\sim"'] \\
& & U\mathscr{L}E^*_X \arrow[d, equal] \\
\Omega C(X) & \Omega CS^1(X) \arrow[l, two heads, "\sim"'] \arrow[r, "\sim"] & \Omega E^*_X
\end{tikzcd}$$

where the dotted arrows are given by (1.4).

Next we use the above models to translate the exact sequences in (2.15), (2.15′) into geometry.

We thus obtain "EHP-sequences" imbedding the homology suspension (with coefficients in any field $\boldsymbol{k}$) and the rational Hurewicz homomorphism respectively.

(3.7) Proposition. *Let X be a 1-connected space, and let $\mathbf{k}$ be a field. Assume that $\tilde{H}(X;\mathbf{k})=o$ for $i \leqq r$. Then for $i \leqq 3r+1$, the homology suspension Σ is embedded in the exact sequence*

$$\tilde{H}_i(\Omega X;\mathbf{k}) \xrightarrow{\Sigma} \tilde{H}_{i+1}(X;\mathbf{k}) \xrightarrow{\delta_{i+1}} T(i-1) \xrightarrow{m} \tilde{H}_{i-1}(\Omega X;\mathbf{k}) \xrightarrow{\Sigma} H_i(X;\mathbf{k})$$

where

$$\forall i \leqq 3r-1,\ T(i)=(\tilde{H}_*(\Omega X;\mathbf{k}) \otimes \tilde{H}_*(\Omega X;\mathbf{k}))_i \cong (\tilde{H}_*(X;\mathbf{k}) \otimes \tilde{H}_*(X;\mathbf{k}))_{i+2}$$
$$T(3r)=(\tilde{H}_*(\Omega X;\mathbf{k}) \otimes \tilde{H}_*(\Omega X;\mathbf{k}))_{3r}/\mathrm{Im}(m \otimes id - id \otimes m)$$

m is the Pontryagin product,

$$\delta_i = \Delta_i : \tilde{H}_i(X;\mathbf{k}) \to (\tilde{H}_*(X;\mathbf{k}) \otimes \tilde{H}_*(X;\mathbf{k}))_i = T(i-2)$$

is the geometric diagonal for $i \leqq 3r+1$.

(3.8) Proposition. *Let X be a 1-connected space, and assume that $\tilde{H}_i(X;\mathbb{Q})=o$ for $i \leqq r$. Then, for $i \leqq 3r+1$, the rational Hurewicz homomorphism h is imbedded in the exact sequence*

$$\boldsymbol{\pi}_{i+1}(X) \xrightarrow{h} \tilde{H}_{i+1}(X;\mathbb{Q}) \xrightarrow{\delta_{i+1}} \Lambda(i-1) \xrightarrow{s[,]} \boldsymbol{\pi}_i(X) \xrightarrow{h} \tilde{H}_i(X;\mathbb{Q})$$

in which $\boldsymbol{\pi}_i(X)=\pi_i(X) \otimes \mathbb{Q}$

$$\forall i \leqq 3r-1,\ \Lambda(i)=(\boldsymbol{\pi}_*(\Omega X) \wedge \boldsymbol{\pi}_*(\Omega X))_i \cong (\tilde{H}_*(X;\mathbb{Q}) \bar{\otimes} \tilde{H}_*(X;\mathbb{Q}))_{i+2}$$
$$\Lambda(3r)=(\boldsymbol{\pi}_*(\Omega X) \wedge \boldsymbol{\pi}_*(\Omega X))_{3r}/\mathrm{Im}\, J$$

where J is the Jacobi identity for the Samelson product as in (2.6′),

$$\delta_i = \Delta_i : \tilde{H}_i(X;\mathbb{Q}) \to (\tilde{H}_*(X;\mathbb{Q}) \bar{\otimes} \tilde{H}_*(X;\mathbb{Q}))_i = \Lambda(i-2)$$

is the geometric diagonal for $i \leqq 3r+1$.

Again we observe that the expression of δ_{3r+2} would involve a Massey product in $H^*(X)$ in general. The exact sequence (3.8) can be derived by Sullivan's model as well, compare (3.3) and end of (2.10), furthermore (3.8) is proven by geometric arguments in [4]; it extends and corrects Theorems 4.1 and 4.2 in [8].

(3.9) Remark. In connection with the above sequences, we observe that filtering L_X, L'_X and E_X, E'_X respectively by powers of the augmentation ideals yields isomorphic E^1-terms (as complexes) of the corresponding spectral sequences (cf. 2.12). This supports conjecture (3.5) as well.

References

1. Adams, J. F.: On the cobar construction. Proc. N.A.S. USA **42**, 409—412 (1956)
2. Adams, J. F., Hilton, P.: On the chain algebra of a loop space. Comment. Math. Helvet. **20**, 305—330 (1955)
3. Allday, C.: Rational Whitehead products and a spectral sequence of Quillen. Pacific J. Math. **46**, 305—330 (1973)
4. Baues, H. J.: Rationale Homotopietypen. To appear in manus. math.

5. tom Dieck, T., Kamps, K. H., Puppe, D.: Homotopietheorie. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1970
6. Dold, A., Puppe, D.: Homologie nicht additiver Funktoren. Anwendungen Ann. Inst. Fourier Grenoble **11**, 201—312 (1961)
7. Dupont, J. L.: Simplicial de Rham cohomology and characteristic classes of flat bundles. Aarhus Univ. preprint series no. 29, 1975
8. Dyer, M.: Rational homology and Whitehead products. Pacific J. Math. **40**, 59—71 (1972)
9. Lemaire, J. M.: Algèbres connexes et homologie des espaces de lacets. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1974
10. Milnor, J., Moore, J. C.: On the structure of Hopf algebras. Ann. Math. **81**, 211—264 (1965)
11. Moore, J. C.: Differential homological algebra. Proc. Int. Cong. Math. I, 1—5 (1970)
12. Moore, J. C.: Sèminaire H. Cartan. 1954–55. Exp. 3
13. Quillen, D.: Rational homotopy theory. Ann. Math. **90**, 205—295 (1969)
14. Sullivan, D.: Differential forms and the topology of manifolds. Proc. Conf. Manifolds. Tokyo 1973
15. Sullivan, D.: Infinitesimal computations in topology. Preprint 1975
16. Toomer, G. H.: Two applications of homology decompositions. Can. J. Math. **27**, 323—329 (1975)

Received February 16, 1976

Math. Ann. 225, 243—251 (1977)

The Fundamental Group of Fibered Knot Cobordisms

Martin Scharlemann*
Department of Mathematics, University of Georgia, Athens, GA 30602, USA

Let L be the disjoint union of i circles. A locally flat imbedding $K:(L\times I, L\times\partial I)\to(S^3\times I, S^3\times\partial I)$ is called a cobordism between the links $k_0=K|L\times\{0\}\to S^3\times\{0\}$ and $k_1=K|L\times\{1\}\to S^3\times\{1\}$. K and k_i will frequently denote image (K) and image (k_i) respectively. The study of the relation bctween $\pi_1(S^3\times I-K)$ and $\pi_1(S^3-k_0)$ has a long history. Early work of Chen [2] and Milnor [7] showed that for K a (non-locally flat) isotopy the lower central series of $\pi_1(S^3-k_0)$ and $\pi_1(S^3-k_1)$ are isomorphic. Stallings [10] generalized their results to cobordisms and proved that the lower central series of $\pi_1(S^3\times I-K)$ itself is isomorphic to that of $\pi_1(S^3-k_0)$.

In the case that L has only a single component, these theorems provide no information beyond the well-known $H_1(S^3\times I-K)\simeq H_1(S^3-k_0)$. Indeed, the theorems do not require that k be locally flat, and all knots are nonlocally flatly cobordant to the trivial knot, by coning.

The group $\pi_1(S^3\times I-K)$ can be made arbitrarily large by adding to any cobordism (e.g. the product cobordism) 2-knots in S^4. Here we examine how "small" $\pi_1(S^3\times I-K)$ can be made. More precisely, we examine the homomorphism induced by inclusion $i_\#:\pi_1(S^3-k_0)\to\pi_1(S^3\times I-K)$, and show that for k_0 a torus knot and K fibered, the map $i_\#$ is always injective.

The research was motivated by an attempt to construct a simply connected homology cobordism from the Poincare 3-sphere to itself and thereby a fake homotopy $S^3\times S^1$, by doing surgery on a cobordism from the trefoil knot to itself.

I gratefully acknowledge the help of D. W. Sumners who acted as a constant and reliable reference on knot theory.

§ 1. Criteria for Injectivity

It was shown in the introduction that the lower central series of a knot group is independent of the knot type and therefore useless for our purposes. Motivated

* Supported in part by National Science Foundation grant MPS72-05055 A02

by the following lemma, we will instead retreat to a study of the commutator subgroup of the knot group.

1.1. Lemma. *Let $h: G \to H$ be a homomorphism of groups inducing an isomorphism $h_*: H_1(G) \xrightarrow{\cong} H_1(H)$. Then h is injective iff the induced map $h': G' \to H'$ on the commutator subgroups is injective.*

Proof. Apply the nonabelian 5-lemma to the commutative diagram

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & G' & \to & G & \to & H_1(G) & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle h'} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle h_*} & & \\ 0 & \to & H' & \to & H & \to & H_1(H) & \to & 0. \end{array} \quad \square$$

Denote the complement of an open tubular neighborhood of $K(S^1 \times I)$ in $S^3 \times I$ by Y, the set $Y \cap S^3 \times \{0\}$ by X. Let $\tilde{X}$ and $\tilde{Y}$ be the infinite cyclic covers of X and Y respectively. Let $G = \pi_1(X)$, $H = \pi_1(Y)$, $G' = \pi_1(\tilde{X})$, $H' = \pi_1(\tilde{Y})$.

In general $\pi_1(\tilde{X}) = G'$ may not be finitely generated. In order to reduce the complexity of the problem, we restrict attention to those knots for which G' is finitely generated. Stallings shows that this condition is equivalent to requiring that $k(S^1)$ be a fibered knot [11], that is $S^3 - k(S^1)$ fibers over S^1 with fiber a punctured 2-manifold. Then $\tilde{X} \simeq M \times \mathbb{R}$, where M is a surface with $\partial M \simeq S^1$. The group $G' = \pi_1(\tilde{X}) \simeq \pi_1(M)$ is a free group of order twice the genus of M.

For a free group the intersection of all terms in the lower central series is trivial. Thus to prove that the homomorphism $\pi_1(S^3 - k_0) \to \pi_1(S^3 \times I - K)$ is injective for k_0 fibered, it suffices to show that the induced map on the successive quotients in the lower central series of G' and H' are injective. In general this is difficult to verify, though examination of the "dual" problem: [that $H^1(\tilde{Y}) \to H^1(\tilde{X})$ is onto and the Massey products of a basis in $H^1(\tilde{Y})$ of $H^1(\tilde{X})$ are all trivial] can occasionally yield information.

Suppose, however that K is a fibered cobordism, that is, Y is a fiber bundle over S^1 with fiber a 3-manifold. There is then a simpler way to prove that $i_\#: \pi_i(S^3 - k) \to \pi_1(S^3 \times I - K)$ is injective, a method using only the cohomology rings of the infinite cyclic covers. Note that if M is the fiber of $S^3 - k$ and N is the fiber of $S^3 \times I - K$, then the infinite cyclic covers of $S^3 - k$ and $S^3 \times I - K$ are fiber bundles over R, hence are homeomorphic to $M \times R$ and $N \times R$ respectively.

Throughout our entire discussion, all cohomology and homology groups will be understood to have rational coefficients.

1.2. Theorem. *Let K be a fibered cobordism, and X, Y be as above. Suppose the map $H^1(\tilde{Y}) \to H^1(\tilde{X})$ is onto, and $w_1, \ldots, w_m \in H^1(\tilde{Y})$ are such that $i^*(w_1), \ldots, i^*(w_m)$ generate $H^1(\tilde{X})$. If $w_1, \ldots, w_m$ can be chosen so that all cup products $w_i \cup w_j$ are trivial, then $i_\#: \pi_1(S^3 - k_0) \to \pi_1(S^3 \times I - K)$ is injective.*

Proof. The fibering of K induces a fibering of k. Let $j: M \hookrightarrow \partial N \subset N$ be the inclusion of the respective fibers. Since $\tilde{X} \simeq M \times R$, $\tilde{Y} \simeq N \times R$, and $H^1(\tilde{Y}) \to H^1(\tilde{X})$ is surjective, it follows that $j^*: H^1(N) \to H^1(M)$ is surjective.

Dually, $H_1(M) \to H_1(N)$ is injective. Suppose $j_\#: \pi_1(M) \to \pi_1(N)$ fails to be injective. By the loop theorem [8] there is an imbedded circle α in M such that α is not null-homotopic in M, yet α bounds an imbedded disk D in N. Since $H_1(M) \to$

$H_1(N)$ is injective, the Hurewicz image of α in $H_1(M)$ is trivial. Then α splits the surface M into two components, one of which, M_α, has boundary α and nontrivial genus.

Then $M_\alpha \cup_\alpha D$ is a surface imbedded in N with fundamental class $g \in H_2(M_\alpha \cup_\alpha D)$. Let $k: M_\alpha \cup_\alpha D \hookrightarrow N$ be the imbedding. Since $M_\alpha \cup_\alpha D$ has nonzero genus, there are elements $u, v \in H^1(M_\alpha \cup_\alpha D)$ such that $\langle u \cup v, g\rangle = 1$. Since α is null-homologous in M_α, the inclusion maps induce an epimorphism $H^1(M) \to H^1(M_\alpha) \simeq H^1(M_\alpha \cup_\alpha D)$. Since j^* is onto, so is $H^1(N) \xrightarrow{k^*} H^1(M_\alpha \cup_\alpha D)$. Then for any $u', v' \in H^1(N)$ such that $k^*(u') = u$, $k^*(v') = v$, we have $\langle u' \cup v', k_*(g)\rangle = \langle k^*(u') \cup k^*(v'), g\rangle = \langle u \cup v, g\rangle = 1$. Thus $u' \cup v' \neq 0$. This contradicts the assumption on the generators of $H^1(\tilde{X})$ and proves 1.2.

§ 2. Non-Fibered Cobordisms of the Torus Knots

In this section we show that if k_0 is a torus knot and K is a (possibly non-fibered) cobordism, then $H^1(\tilde{Y}) \to H^1(\tilde{X})$ is always surjective. First we review algebraic information about the torus knots [3, 9].

The torus knot of type (p, q), p and q relatively prime, is the link of the complex hypersurface singularity $z_1^p + z_2^q$. As a link of such a singularity, it is fibered, with fiber a punctured orientable surface M of genus $\frac{(p-1)(q-1)}{2}$. To the fibered knot is associated a pairing $H_1(M) \otimes H_1(M) \to Q$ called the Seifert pairing (see e.g. [3] for definition). There is a basis for $H_1(M)$ on which the Seifert pairing $H_1(M) \otimes H_1(M) \to Q$ can be represented by the matrix $-\Lambda_p \otimes \Lambda_q$, where Λ_a is the $(a-1) \times (a-1)$ matrix

$$\Lambda_a = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ -1 & 1 & & & \\ & -1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

With respect to the same basis the monodromy transformation $h_*: H_1(M) \to H_1(M)$ is given by $(-\Lambda_p \otimes \Lambda_q)^{-1}(-\Lambda_p \otimes \Lambda_q)^t = (\Lambda_p^{-1}\Lambda_p^t) \otimes \Lambda_q^{-1}\Lambda_q^t \simeq \Gamma_p \otimes \Gamma_q$, where Γ_a is the matrix

$$\Gamma_a = \Lambda_a^{-1}\Lambda_a^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots & & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \ldots\ldots\ldots & & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \ldots\ldots\ldots & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note that $(-\Gamma_a)^a = I$, the identity matrix.

The intersection matrix $H_1(M)\otimes H_1(M)\to Q$ with respect to this basis is $S=(\Lambda_p\otimes\Lambda_q)^t-(\Lambda_p\otimes\Lambda_q)$.

Also needed are the following algebraic definitions [5]: Let $\varphi(n)$ denote the Euler function of n; that is, $\varphi(n)$ is the number of natural numbers d less than n such that $(d,n)=1$. The n^{th} cyclotomic polynomial $\psi_n\in Z[x]$ is the polynomial of degree $\varphi(n)$ whose complex roots are the primitive n^{th} roots of unity. Recursively, ψ_n may be defined by $\psi_n\cdot\Bigl(\prod_{\substack{d\mid n\\ d<n}}\psi_d\Bigr)=x^n-1$, and is irreducible over Q. To ψ_n is associated a $\varphi(n)\times\varphi(n)$ integral matrix A_n (called the companion matrix) with characteristic polynomial ψ_n [5, p. 206, 396, 401].

2.1. Lemma. *The matrices $-\Gamma_a$ and $\bigoplus_{\substack{d\mid a\\ d\neq 1}} A_d$ are similar over Q. The resultant decomposition $\Gamma_p\otimes\Gamma_q\simeq\bigoplus_{\substack{e\mid p,\,f\mid q\\ e\neq 1\neq f}}(A_e\otimes A_f)$ is indecomposable over Q.*

Proof. A simple induction argument shows that $-\Gamma_a$ has characteristic polynomial $x^{a-1}+\ldots+1=\dfrac{(x^a-1)}{(x-1)}=\prod_{\substack{d\mid a\\ d\neq 1}}\psi_d$. $\bigoplus_{\substack{d\mid a\\ d\neq 1}}A_d$ has the same characteristic polynomial.

Since each φ_d is unique and irreducible over Q, the characteristic polynomial is the unique invariant of both $\bigoplus_{\substack{d\mid a\\ d\neq 1}}A_d$ and $-\Gamma_a$ [5, p. 397]. Hence $\bigoplus_{\substack{d\mid a\\ d\neq 1}}A_d$ and $-\Gamma_a$ are similar matrices over Q. Thus $\Gamma_p\otimes\Gamma_q$ is similar to the direct sum $\bigoplus_{\substack{e\mid p,\,f\mid q\\ e,f\neq 1}}(A_e\otimes A_f)$. It remains to show that $A_e\otimes A_f$ is indecomposable.

For any primitive n^{th} root v of unity, the complex roots of ψ_n are $\{v^a\mid 1\leqq a<n,\ (a,n)=1\}$. Let α,β,γ be primitive e, f and $e\cdot f$ roots of unity respectively. Then the $\varphi(e)\cdot\varphi(f)$ roots of the characteristic polynomial of $A_e\otimes A_f$ are $D=\{\alpha^a\cdot\beta^b\mid 1\leqq a<e,\ 1\leqq b<f,\ (a,e)=(b,f)=1\}=\{\gamma^{af+be}\mid 1\leqq a<e,\ 1\leqq b<f,\ (a,e)=(b,f)=1\}$ [5, p. 407]. Since $(a,e)=(b,f)=(e,f)=1$ it follows that $(af+be,\,e\cdot f)=1$ and each γ^{af+be} in D is distinct. Since $\varphi(e\cdot f)=\varphi(e)\varphi(f)$ [5, p. 65] it follows that D consists of all primitive $e\cdot f$ roots of unity, so the characteristic polynomial of $A_e\otimes A_f$ is the irreducible polynomial $\psi_{e\cdot f}$. This proves Lemma 2.1.

Without loss of generality we now assume that p is odd.

2.2. Lemma. *Any invariant subspace of $\Gamma_p\otimes\Gamma_q$ contains a nonzero vector of the form $v\otimes w=(x_1,\ldots,x_{p-1})\otimes(y_1,\ldots,y_{q-1})$ with $x_1=0$.*

Proof. From 2.1 it follows that any invariant subspace has a basis of the form $\{v_i\otimes w_j\mid 1\leqq i\leqq\varphi(e),\ 1\leqq j\leqq\varphi(f),\ e\mid p,\ f\mid q,\ e\neq 1\neq f\}$. Since p is odd, $\varphi(e)\geqq 2$. Some linear combination of $\{v_1\otimes w_1,\ v_2\otimes w_1\}$ then is of the required form.

Let $h\colon M\to M$ be the monodromy map (see e.g. [3]).

2.3. Proposition. *Any non-trivial invariant subspace of $h_*\colon H_1(M)\to H_1(M)$ contains elements with non-trivial intersection.*

Proof. Recall that for the basis of $H_1(M)$ referred to above, the intersection pairing is given by $S=(\Lambda_p\otimes\Lambda_q)^t-(\Lambda_p\otimes\Lambda_q)$ and the monodromy transformation by $\Gamma_p\otimes\Gamma_q$. If u is a non-zero element in an invariant subspace, then so is $h_*^n(u)$, for any n. It suffices, therefore, to show that any non-trivial invariant subspace of h_* contains a vector u such that for some $n\geqq 1$

$$u^t\cdot S\cdot h_*^n(u)=u^t\cdot((\Lambda_p\otimes\Lambda_q)^t-(\Lambda_p\otimes\Lambda_q))(\Gamma_p\otimes\Gamma_q)^n\cdot u \tag{1}$$

is nonzero. Choose u to be of the form in 2.2.

Choose n so that $n\equiv 1 \bmod(p)$, $n\equiv 0 \bmod(q)$. Then $(\Gamma_p\otimes\Gamma_q)^n=\pm\Gamma_p\otimes I$. The definitions of Γ_p and Λ_p immediately show that for u as in 2.2, $(\Gamma_p\otimes I)\cdot u=((\Lambda_p^t-I)\otimes I)\cdot u$. Recall also that $\Gamma_p=\Lambda_p^{-1}\Lambda_p^t$. Hence (1) becomes

$$\begin{aligned}
&\pm u^t[((\Lambda_p\otimes\Lambda_q)^t\cdot((\Lambda_p^t-I)\otimes I))-(\Lambda_p\otimes\Lambda_q)(\Lambda_p^{-1}\Lambda_p^t\otimes I)]u\\
&=\pm u^t[(\Lambda_p^t)^2\otimes\Lambda_q^t-\Lambda_p^t\otimes\Lambda_q^t-\Lambda_p^t\otimes\Lambda_q]u\\
&=\pm u^t[((\Lambda_p^t)^2-2\Lambda_p^t)\otimes\Lambda_q^t+\Lambda_p^t\otimes(\Lambda_q^t-\Lambda_q)]u\\
&=\pm(v^t[(\Lambda_p^t)^2-2\Lambda_p^t]v)\cdot(w^t\Lambda_q^t w)\pm(v^t\Lambda_p^t v)(w^t(\Lambda_q^t-\Lambda_q)w)\,.
\end{aligned}$$

Since $\Lambda_q^t-\Lambda_q$ is antisymmetric, the last term is trivial and (1) becomes

$$\pm(v^t[(\Lambda_p^t)^2-2\Lambda_p^t]v)(w^t\Lambda_q^t w)\,.$$

Now $(\Lambda_p^t)^2-2\Lambda_p^t$ is the matrix

$$B=\begin{pmatrix}
-1 & 0 & 1 & & & 0\\
 & -1 & 0 & 1 & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & & \ddots & \ddots & 1\\
 & & & & \ddots & 0\\
0 & & & & & -1
\end{pmatrix}$$

and

$$\begin{aligned}
(v_1,v_2,\dots,v_{p-1})^t B(v_1,\dots,v_{p-1})&=-\sum_{i=1}^{p-1}v_i^2+\sum_{i=1}^{p-3}v_iv_{i+2}\\
&=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p-3}(v_i-v_{i+2})^2-\frac{1}{2}(v_1^2+v_2^2+v_{p-1}^2+v_{p-2})^2<0\,.
\end{aligned}$$

Similarly $w^t\Lambda_q w>0$.

Thus (1) is nonzero for this choice of u and n, proving the proposition.

2.4. Theorem. *Let $K\colon S^1\times I\to S^3\times I$ be any imbedding such that $k_0=K|S^1\times\{0\}$ is a torus knot. Then the homomorphism $H^1(\tilde{Y})\to H^1(\tilde{X})$ induced by inclusion of the infinite cyclic covers is surjective.*

Proof. Let Y, $\tilde{Y}$, M be as in §1. Note that $\partial\tilde{Y}$ is homeomorphic to the union along $\partial M\times R$ of $M\times R$, the infinite cyclic cover of S^3-k_0, and the infinite cyclic cover $\tilde{W}$ of S^3-k_1. By [6], $H_*(\tilde{W})$ is finitely generated, as are $H_*(M\times R)$ and $H_*(\partial M\times R)$. Hence $H_*(\partial\tilde{Y})$ is finitely generated.

Consider the exact sequence

$$H^1(\partial\tilde{Y})\to H^1(M\times R)\to H^2(\partial\tilde{Y}, M\times R)\to H^2(\partial\tilde{Y})\to H^2(M\times R).$$

Since M is a punctured 2-manifold the last group is zero. By excision $H^2(\partial\tilde{Y}, M\times R)\simeq H^2(\tilde{W}, \partial\tilde{W})$. By [6], $H^2(\tilde{W}, \partial\tilde{W})$ and $H^2(\tilde{Y})$ are both Q. Thus by exactness the first homomorphism is surjective. Let j^* denote the surjection $H^1(\partial\tilde{Y})\to H^1(M\times R)\xrightarrow{(p^*)^{-1}} H^1(M)$.

Clearly $j^*i^*(H^1(Y))$ is invariant under the monodromy transformation $h^*: H^1(M)\to H^1(M)$. Then the subspace S of $H_1(M)$ which is annihilated by $j^*i^*(H^1(\tilde{Y}))$ is invariant under $h_*: H_1(M)\to H_1(M)$.

Let $x_1, x_2\in S$. By Poincare duality there are unique $x_1', x_2'\in H^1(M, \partial M)$ such that for $[M]$ a given generator of $H_2(M, \partial M)\simeq Q$, $[M]\cap x_i'=x_i$. By definition, for any $y\in H^1(\tilde{Y})$, $0=\langle j^*i^*(y), x_i\rangle=\langle j^*i^*(y), [M]\cap x_i'\rangle=\langle j^*i^*(y)\cup x_i', [M]\rangle$. Thus $j^*i^*(y)\cup x_i'=0$.

Clearly the homomorphism ψ in the exact sequence

$$0\to H^1(M, \partial M)\xrightarrow{\psi} H^1(M)\to H^1(\partial M)\xrightarrow{\cong} H^2(M, \partial M)$$

is an isomorphism and factors through $H^1(\partial Y)$ as follows:

$$\begin{aligned} H^1(M, \partial M)&\simeq H^1(M\times R, \partial M\times R)\\ &\simeq H^1(\partial\tilde{Y}, \partial\tilde{Y}-(M\times R))\to H^1(\partial\tilde{Y})\xrightarrow{j^*} H^1(M).\end{aligned}$$

Let l_i be the image of x_i' in $H^1(\partial Y)$. Then by naturality the image of $j^*i^*(y)\cup x_i'=0$ under the isomorphism

$$H^2(M, \partial M)\simeq H^2(M\times R, \partial M\times R)\simeq H^2(\partial\tilde{Y}, \partial\tilde{Y}-(M\times R))\xrightarrow{\cong} H^2(\partial\tilde{Y})$$

is $i^*(y)\cup l_i$. Hence $i^*(y)\cup l_i=0$. Since this is true for all y in $H^1(\tilde{Y})$, l_i is in the annihilator of $i^*(H^1(\tilde{Y}))$ under the cup product pairing on $H^1(\partial\tilde{Y})$. But by [6, p. 130] this annihilator is precisely $i^*(H^1(\tilde{Y}))$. Hence $l_i\in i^*(H^1(\tilde{Y}))$ and $l_1\cup l_2=0$ so $x_1'\cup x_2'=0$. But $x_1\cdot x_2=\langle [M], x_1'\cup x_2'\rangle=0$ [4, p. 156].

This shows that S is an invariant subspace of $H_1(M)$ for which all pairs of elements have trivial intersection. Hence by 2.3, S is empty. Then $j^*i^*(H^1(\tilde{Y}))=H^1(M)$, so $H^1(\tilde{Y})\to H^1(\tilde{X})$ is onto.

§ 3. Fibered Cobordisms of the Torus Knots

In this section we prove:

3.1. Theorem. *If K is a fibered cobordism such that $k=K|S^1\times\{0\}\to S^3\times\{0\}$ is a torus knot, then $\pi_1(S^3-k)-\pi_1(S^3\times I-K)$ is injective.*

In view of 1.2, it is tempting to search for a basis of $H^1(\tilde{Y})$ projecting to a basis of $H^1(\tilde{X})$, all of whose cup products are trivial. In general this may be quite difficult; we instead exploit the geometry of the fiber in a series of Lemmas.

Suppose N is an oriented 3-manifold with one boundary component ∂N, $M\subset\partial N$ is a 2-manifold with one boundary component $\partial M\simeq S^1$, and the inclusion $i: M\hookrightarrow N$ induces an injective map $i_*: H_1(M)\to H_1(N)$. A *loop* $\alpha\in M$ will be an imbedded circle in M which is nontrivial in $\pi_1(M)$ but bounds an imbedded disk in N. To each loop α is assigned a positive integer $\nu(\alpha)$, the genus of the surface $T(\alpha)$ in M which α bounds. The surface $T(\alpha)$ inherits a natural orientation from ∂N. Let $D(\alpha)$ be an imbedded disk in N whose boundary is α. The inclusion in N of the natural orientation class of $T(\alpha)\cup D(\alpha)$ will be denoted $g(\alpha)\in H_2(N)$; ambiguity in the choice of $D(\alpha)$ implies that $g(\alpha)$ is defined uniquely only modulo the Hurewicz image $\mathscr{H}$ of $\pi_2(N)$ in $H_2(N)$.

We begin with a technical lemma.

For a family $D=\bigcup_{i=1}^{n}(D_i,\partial D_i)$ of disjointly imbedded disks in (N,M), let $\delta(D):\{\partial D_i\}\to\{-1,1\}$ be the function which assigns $(-1)^{s+1}$ to ∂D_i, where s is the number of intersections of D with a general position arc in M from ∂M to interior $T(D_i)$.

3.2. Lemma. *Let $D=\bigcup_{i=1}^{n}(D_i,\partial D_i)$ be a family of disjointly imbedded disks in (N,M) and let C, ∂C be an imbedded disk in (N,M). Then there is a family $E=\bigcup_{i=1}^{m}(E_i,\partial E_i)$ of disjointly imbedded disks in (N,M) such that $C\cap E=\emptyset$ and $\sum_{i=1}^{n}\delta(D)(\partial D_i)\cdot g(\partial D_i)=\sum_{i=1}^{m}\delta(E)(\partial E_i)\cdot g(\partial E_i)$ in $H_2(N)/\mathscr{H}$. Moreover E may be chosen to lie in any given regular neighborhood of $C\cup D$.*

Proof. Put all disks in general position. By standard cutting and pasting techniques D may be altered so that $D\cap C$ contains no circle components; the homology class of each $T(\partial D_i)\cup D_i$ is thereby altered only by elements in $\mathscr{H}$.

The proof is by induction on the number of arc components of $D\cap C$. Let l be an arc component of $D\cap C$ which is "outermost" in the sense that for some component l' in $\partial C-D$, $l\cup l'$ bounds a disk Q in $C-D$. Assume the D_i have been labelled so that $l\subset D_1$. Choose a small bicollar neighborhood of Q, $Q\times I$ so that $l\times I\subset D_1$ and $(Q\times I)\cap(C\cup D)=(l\times I)\cup Q$. Split D_1 by removing $l\times I$ and attaching $Q\times\partial I$. D_1 is thereby replaced by two imbedded disks D_1' and D_1'', which are disjoint from $\bigcup_{i=2}^{n}D_i$. Denote the collection $D_1'\cup D_1''\cup\left(\bigcup_{i=2}^{n}D_i\right)$ by D'. It is easily seen that $\delta(D)D_1\cdot g(\partial D_1)=\delta(D')D_1'\cdot g(\partial D_1')+\delta(D')D_1''\cdot g(\partial D_1'')$. Furthermore, $C\cap D'=(C\cap D)-l$. The lemma follows by induction.

Now suppose that there is an orientation preserving diffeomorphism $h:(N,M)\to(N,M)$ such that for some $n>1$, $h^n|M$ is the identity.

3.3. Lemma. *If $\pi_1(M)\to\pi_1(N)$ fails to be injective, then there is a class $g\in H_2(N)/\mathscr{H}$ and elements u, $v\in H^1(N)$ such that $\langle u\cup v,g\rangle=1$, and for any i, $\langle u\cup v,h_*^i(g)\rangle=0$ or 1.*

Remark. Since $u\cup v$ evaluates any element of $\mathscr{H}$ to zero, $\langle u\cup v,h_*^i(g)\rangle$ is well-defined.

Proof of 3.3. By definition $i_*:H_1(M)\to H_1(N)$ is injective. By the loop theorem [8], there is a loop in M. Let α be a loop in M such that $\nu(\alpha)$ is minimal among all loops in M. By definition $\nu(\alpha)>0$ so there are elements $u', v' \in H^1(T(\alpha)\cup D(\alpha))$ such that $u'\cup v'$ evaluates the orientation class $g(\alpha)$ of $T(\alpha)\cup D(\alpha)$ to 1. Of the inclusion induced maps, $H^1(N)\to H^1(M)$ is surjective, $H^1(M)\to H^1(T(\alpha))$ is split surjective and $H^1(T(\alpha)\cup D(\alpha))\to H^1(T(\alpha))$ is an isomorphism. Hence there are elements $u, v\in H^1(N)$ such that under the inclusion induced map $H^1(N)\xrightarrow{j^*} H^1(T(\alpha)\cup D(\alpha))$, $j^*(u)=u'$, $j^*(v)=v'$ and so $\langle u\cup v, g(\alpha)\rangle=1$. Furthermore, u, v may be chosen so that the inclusion induced map $H^1(N)\to H^1(M-T(\alpha))$ sends u and v to zero.

Now consider $h^i_*(g(\alpha))$ for any $i\in Z$. Since h is orientation preserving $h^i_*(g(\alpha))=g(h^i(\alpha))$.

Apply 3.2 with ∂C corresponding to α and ∂D corresponding to $h^i(\alpha)$. Then there is a family of disjoint loops $\beta_1,\ldots,\beta_m$ in X such that $\beta_i\cap\alpha=\emptyset$ and $\sum_{i=1}^{m}\delta(\beta)(\beta_i)\cdot g(\beta_i)=g(h^i(\alpha))$.

There are three cases:

i) If $T(\beta_i)\cap T(\alpha)=\emptyset$ then, since $H^1(N)\to H^1(M-T(\alpha))$ sends u and v to zero, it follows that $\langle u\cup v, g(\beta_i)\rangle=0$.

ii) If $T(\beta_i)\supset T(\alpha)$ then just as $\langle u\cup v, g(\alpha)\rangle=1$ so too $\langle u\cup v, g(\beta_i)\rangle=1$.

iii) If $T(\beta_i)\subset T(\alpha)$ then, since $\nu(\alpha)$ is minimal, $\nu(\beta_i)=\nu(\alpha)$ or 0.

In the latter case β_i is null-homotopic and may be ignored. In the former case $\beta_i\sim\alpha$ since they differ by a genus zero surface. In particular, after a homotopy we may assume that $T(\alpha)\subset T(\beta_i)$.

Hence

$$\langle u\cup v, h^i_*(g(\alpha))\rangle=\left\langle u\cup v, \sum_{i=1}^{m}\delta(\beta)(\beta_i)\cdot g(\beta_i)\right\rangle = \sum_{T(\beta_i)\supset T(\alpha)}\delta(\beta)(\beta_i).$$

By definition of $\delta(\beta)$ this is 0 or 1 depending on whether there are an even or odd number of $T(\beta_i)$ containing $T(\alpha)$.

Proof of 3.1. Let N be the fiber of the cobordism, M the fiber of k a torus knot of type (p,g). Since k is a torus knot, the monodromy map $h|M$ has order pq (indeed, the statements are equivalent [1]). In §2 it was shown that $i_*:H_1(M)\to H_1(N)$ is injective.

By 3.3, if $i_\#:\pi_1(M)\to\pi_1(N)$ is not injective there is a class $g\in H_2(N)/\mathscr{H}$ and elements $u, v\in H^1(N)$ such that $\langle u\cup v, g\rangle=1$, $\langle u\cup v, h^i_*(g)\rangle\geqq 0$. Thus $\left\langle u\cup v, \sum_{i=1}^{pq} h^i_*(g)\right\rangle\geqq 1$, so in particular $\sum_{i=1}^{pq} h^i_*(g)$ is not in $\mathscr{H}$.

Choose a representative $\bar{g}$ for $\sum_{i=1}^{pq} h^i_*(g)$ in $H_2(N)$. Since h is of order pq, it follows that $(h_*-1)(\bar{g})$ is in $\mathscr{H}$. Since $\bar{g}$ is not in $\mathscr{H}$ and (h_*-1) clearly maps $\mathscr{H}$ to itself, this implies (h_*-1) is not injective. But from the Wang sequence, [6], (h_*-1) is an isomorphism. The contradiction completes the proof.

Questions. Is 3.1 true for algebraic knots, and/or if K is not necessarily fibered?

References

1. Burde, G., Zieschang, H.: Eine Kennzeichnung der Torusknoten. Math. Ann. **167**, 169—176 (1966)
2. Chen, K.-T.: Isotopy invariants of links. Ann. of Math. **56**, 343—353 (1952)
3. Durfee, A. H.: Fibered knots and algebraic singularities. Topology **13**, 47—59 (1974)

4. Hilton, P. J., Wylie, S.: Homology theory. Cambridge: Cambridge University Press 1967
5. Lang, S.: Algebra. New York: Addison-Wesley 1965
6. Milnor, J.: Infinite cyclic coverings. In: Conference on the Topology of Manifolds, pp. 115—133. New York: Prindle, Weber and Schmidt 1968
7. Milnor, J.: Isotopy of links. In: Algebraic Geometry and Topology, pp. 280—306. Princeton: Princeton University Press 1957
8. Papakyriakopoulos, C. D.: On solid tori. Proc. London Math. Soc. **7**, 281—299 (1957)
9. Sakamoto, K.: Milnor fiberings and their characteristic maps. In: Manifolds-Tokyo-1973, pp. 145—150. Tokyo: University of Tokyo Press 1974
10. Stallings, J.: Homology and central series of groups. J. of Algebra **2**, 170—181 (1965)
11. Stallings, J.: On fibering certain 3-manifolds. In: Topology of 3-Manifolds and Related Topics, pp. 95—100. New York: Prentice-Hall 1962

Received March 17, 1976

Math. Ann. 225, 253—261 (1977)

Anti-Invariant Submanifolds of Almost Contact Metric Manifolds

Gerald D. Ludden*[1], Masafumi Okumura[2], and Kentaro Yano[3]

[1] Department of Mathematics, Michigan State University, East Lansing, MI 48824, USA
[2] Department of Mathematics, Saitama University, Urawa, Japan
[3] Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology, Tokyo, Japan

§ 1. Introduction

Let M be a submanifold of a Riemannian manifold $\tilde{M}$ and $\tilde{F}$ an endomorphism of the tangent bundle $T\tilde{M}$ of $\tilde{M}$. If $\tilde{F}T_xM \perp T_xM$ for each point $x \in M$, we say that M is an *anti-invariant* submanifold of $\tilde{M}$ under $\tilde{F}$.

If $\tilde{F}$ is an almost complex structure, then such M are usually called *totally real* submanifolds and have been studied by various authors [1, 3, 5–7].

The purpose of the present paper is to study the case, in which $\tilde{F}$ is the endomorphism φ of an almost contact metric structure (φ, ξ, η, g) on $\tilde{M}$, in particular, that of a Sasakian structure (see § 2). The authors will study the cases in which the structure vector field ξ is either tangent to M (see § 4) or normal to M (see § 5). In both cases the computation of the Laplacian of the square of the norm of the second fundamental form of M in $\tilde{M}$ plays an important role. The Theorems 8, 15, 16 present typical examples of our main results, which say, roughly speaking, that compact, minimal, anti-invariant submanifolds M of a Sasakian space form $\tilde{M}$, which are of not too large relative curvature (measured in terms of the norm $\|\alpha\|$ of the second fundamental form α of M in $\tilde{M}$) have to be already totally geodesic in $\tilde{M}$.

§ 2. Basic Definitions and Examples

Let M^{2n+1} be an $(2n+1)$-dimensional manifold endowed with an *almost contact metric structure* (φ, ξ, η, g), where g is a Riemannian metric, η a 1-form, ξ a vector field on M^{2n+1} and φ an endomorphism of TM^{2n+1} which satisfy:

$$\begin{aligned}&\varphi\xi=0,\ \eta\circ\varphi=0,\ \eta(\xi)=1\,,\\&\varphi^2=-I+\eta\otimes\xi, \quad \text{and} \quad g(\varphi X, \varphi Y)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y)\,,\end{aligned} \tag{1}$$

I denoting the identity endomorphism of TM^{2n+1}. Moreover, if M^{2n+1} is Sasakian (see e.g. [9]), then we have

$$(\nabla_X\varphi)Y=-g(X,Y)\xi+\eta(Y)X \quad \text{and} \quad \nabla_X\xi=\varphi X\,, \tag{2}$$

* Partially supported by NSF Grant No. 36684

where ∇ is the operator of Levi-Civita covariant differentiation. M^{2n+1}, given as before, is called a *Sasakian space form* of constant φ-curvature $k(\in R)$ and will be denoted by $M^{2n+1}(k)$, if the sectional curvature with respect to all sections spanned by X and φX is equal to k for all vectors X such that X is orthogonal to ξ. Then the curvature tensor is given by

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z = (k+1)(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y) \\ + k\{\eta(X)\eta(Z)Y - \eta(Y)\eta(Z)X + g(X, Z)\eta(Y) - g(Y, Z)\eta(X) \\ + \Phi(Z, Y)\varphi X - \Phi(Z, X)\varphi Y + 2\Phi(X, Y)\varphi Z\}, \end{aligned} \tag{3}$$

where $\Phi(X, Y) = g(X, \varphi Y)$.

Now we show some examples of anti-invariant submanifolds of a contact metric manifold.

a) Consider the Hopf-fibration $\tilde{\pi}: S^{2n+1} \to CP^n$ and submanifolds M and $\bar{M}$ of S^{2n+1} and CP^n respectively with $\tilde{\pi}^{-1}(\bar{M}) = M$. Then (using formulas of [8]) it is easy to show that $\bar{M}$ is anti-invariant under the complex structure of CP^n if and only if M is anti-invariant under φ, and ξ is *tangent* to M, where (φ, ξ, η, g) is the canonical almost contact metric structure on S^{2n+1} (see e.g. [7]). Of course the integral curves of ξ are in this case examples of totally geodesic anti-invariant submanifolds of S^{2n+1}. On the other hand, it is known [7] that, in the contact metric manifold $S^{2\cdot 2+1} = S^5(1)$ in C^3, the 3-copies $S^1(1/\sqrt{3}) \times S^1(1/\sqrt{3}) \times S^1(1/\sqrt{3})$ of the circle $S^1(1/\sqrt{3})$ of radius $1/\sqrt{3}$, each of which lies in complex subspaces of C^3, is an example of a non-totally geodesic, minimal, anti-invariant submanifold of S^5. In this case the vector field ξ is everywhere tangent to $S^1(1/\sqrt{3}) \times S^1(1/\sqrt{3}) \times S^1(1/\sqrt{3})$.

b) If (φ, ξ, η, g) is a contact structure on $\tilde{M}$, then Blair and Ogiue [2] have shown that a submanifold M of $\tilde{M}$ is an integral submanifold of the form η if and only if M is an anti-invariant submanifold of $\tilde{M}$ and ξ is everywhere normal to M.

c) If $\bar{M}$ is an almost Hermitian manifold, then it is well known (see e.g. [10]) that any hypersurface $\tilde{M}$ of $\bar{M}$ possesses a naturally induced almost contact metric structure (φ, ξ, η, g). Let M be a submanifold of $\tilde{M}$. Then M is, considered as a submanifold of $\bar{M}$, anti-invariant under the almost complex structure of $\bar{M}$ if and only if M is an anti-invariant submanifold of $\tilde{M}$ under φ.

§ 3. Anti-Invariant Submanifolds

Suppose M^m is an m-dimensional anti-invariant submanifold of M^{2n+1}. For every vector $\bar{z}$ of M^{2n+1} at a point of M^m, put

$$\bar{z} = \bar{z}_t + \bar{z}_n, \tag{4}$$

where $\bar{z}_t$ and $\bar{z}_n$ are tangential and normal to M^m respectively. Define homomorphisms P and Q of the normal bundle into the tangent and normal bundles of M^m respectively by [see (4)]

$$PN = (\varphi N)_t, \quad QN = (\varphi N)_n, \tag{5}$$

for every normal field N of M^m.

If X is a vector field on M, then φX is a vector field in the normal bundle of M^m (see e.g. [5]). Henceforth we always assume $m>1$, since any 1-dimensional submanifold is anti-invariant.

We will use $X, Y, Z, \dots$ to represent vector fields tangent to M^m and $N, L, \dots$ to represent vector fields normal to M^m. Apply φ to φX, φN and ξ and comparing tangential and normal parts we obtain

$$\left.\begin{aligned} &-X+\eta(X)\xi_t=P\varphi X, \quad \eta(X)\xi_n=Q\varphi X \\ &\eta(N)\xi_t=PQN, \quad -N+\eta(N)\xi_n=\varphi PN+Q^2N \\ &\varphi\xi_t+P\xi_n=0, \quad Q\xi_n=0\,. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

We write the equations of Gauss and Weingarten as

$$\nabla_X Y=\bar\nabla_X Y+\alpha(X\cdot Y), \qquad \nabla_X N=-A_N X+\nabla^\perp_X N\,, \tag{7}$$

where ∇ is the Riemannian connection of g and $\bar\nabla$ is the Riemannian connection of the metric $\bar g$ induced on M^m. Here α is the second fundamental form and $\bar g(A_N X, Y)=g(\alpha(X, Y), N)$ and $\nabla^\perp$ is the connection induced in the normal bundle. M^m is *totally geodesic* if $\alpha\equiv 0$ and *minimal* if $\sum_{i=1}^{n}\alpha(e_i, e_i)=0$ for any local orthonormal basis $\{e_1, \dots, e_m\}$ of tangent vectors to M^m.

§ 4. The Case in which ξ is Tangent to M^m

In this section we assume that ξ is tangent to M^m. Then $\xi_n\equiv 0$ so that (6) becomes

$$\begin{cases} -X+\eta(X)\xi=P\varphi X, \quad Q\varphi X=0 \\ PQN=0, \quad -N=\varphi PN+Q^2N\,. \end{cases} \tag{6'}$$

From (6′) we see that $Q^3+Q=0$, that is, Q defines an f-structure in the normal bundle (see [11]).

Assume now that M^{2n+1} is Sasakian. Differentiating φX, φN, and ξ, using (2), (5), and (7), and comparing tangential and normal components, we obtain

$$\left.\begin{aligned} &-g(X, Y)\xi+\eta(X)Y+P\alpha(X, Y)=-A_{\varphi X}Y, \\ &\varphi\bar\nabla_Y X+Q\alpha(Y, X)=\nabla^\perp_Y(\varphi X)\,, \\ &P\nabla^\perp_X N=\bar\nabla_X(PN)-A_{QN}X\,, \\ &-\varphi A_N X+Q\nabla^\perp_X N=\alpha(X, PN)+\nabla^\perp_X(QN)\,, \\ &\bar\nabla_X\xi=0\,, \\ &\alpha(X, \xi)=\varphi X\,. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

From (8) we see that $\bar\nabla_\xi(PN)-P\nabla^\perp_\xi N=A_{QN}\xi$. Now

$$\begin{aligned} \bar g(A_{QN}\xi, X)&=g(\alpha(\xi, X), QN)=g(\varphi X, QN) \\ &=g(\varphi X, \varphi N-PN) \\ &=g(X, N)-\eta(X)\eta(N)-g(\varphi X, PN)=0\,. \end{aligned}$$

Thus, we have that $\bar\nabla_\xi(PN)-P\nabla^\perp_\xi N=0$. Similarly, $\nabla^\perp_\xi(QN)-Q\nabla^\perp_\xi N=0$.

Suppose now that M^m is totally umbilical, that is, $\alpha(X, Y)=\bar{g}(X, Y)H$, where H is the mean curvature vector. Then, from the last equation of (8) we have $H\equiv 0$. However this implies that $\varphi\equiv 0$, which is a contradiction since $n>1$. Thus, summing up, we have

Proposition 1. *If M^m is an anti-invariant submanifold of the Sasakian manifold M^{2n+1} and if ξ is tangent to M^m, then*
 i) *ξ is parallel vector field along M^m and the normal curvature $\alpha(\xi, \xi)$ in the direction of ξ vanishes.*
 ii) *P and Q are parallel along ξ.*
 iii) *M^m cannot be totally umbilical.*

Suppose now that $m=n+1$. Then $Q\equiv 0$ and it can be seen from (8) that

$$\bar{R}(X, Y)PN=PR^{\perp}(X, Y)N\,, \tag{9}$$

where $\bar{R}$ is the curvature on M^{n+1} and $R^{\perp}$ the curvature operator on the normal bundle. Thus $\bar{R}\equiv 0$ implies that $R^{\perp}\equiv 0$. On the other hand, if $R^{\perp}\equiv 0$, then $\bar{R}(X, Y)PN=0$ and also $\bar{R}(X, Y)\xi=0$. Thus we have that $\bar{R}(X, Y)\equiv 0$.

Proposition 2. *If M^{n+1} is an anti-invariant submanifold of the Sasakian manifold M^{2n+1} such that ξ is tangent to M^{n+1}, then $\bar{R}\equiv 0$ if and only if $R^{\perp}\equiv 0$.*

Suppose that M^m is an anti-invariant submanifold of $M^{2n+1}(k)$ with ξ tangent to M^m. Then the equation of Gauss is

$$\begin{aligned}\bar{g}(\bar{R}(X, Y)Z, W)=&(k+1)(\bar{g}(X, W)\bar{g}(Y, Z)-\bar{g}(X, Z)\bar{g}(Y, W))\\&-k(\bar{g}(X, W)\eta(Y)\eta(Z)-\bar{g}(X, Z)\eta(Y)\eta(W)+\eta(X)\eta(W)\bar{g}(Y, Z)\\&-\eta(X)\eta(Z)\bar{g}(Y, W))+g(\alpha(X, W), \alpha(Y, Z))\\&-g(\alpha(X, Z), \alpha(Y, W))\,.\end{aligned} \tag{10}$$

From (10) we have that

$$\begin{aligned}\bar{S}(X, Y)=&[(k+1)(m-1)-k]\bar{g}(X, Y)-k(m-2)\eta(X)\eta(Y)\\&+\sum_i \{g(\alpha(e_i, e_i), \alpha(X, Y))-g(\alpha(e_i, X), \alpha(e_i, Y))\}\end{aligned} \tag{11}$$

and

$$\begin{aligned}\bar{\varrho}=&m[(k+1)(m-1)-k]-k(m-2)+\sum_{i,j} \{g(\alpha(e_i, e_i), \alpha(e_j, e_j))\\&-g(\alpha(e_i, e_j), \alpha(e_i, e_j))\}\,,\end{aligned} \tag{12}$$

where $\{e_1, \ldots, e_m\}$ is a local orthonormal basis of tangent vectors to M^m and $\bar{S}$ and $\bar{\varrho}$ are the Ricci tensor and the scalar curvature of M^m respectively. Thus, since M^m cannot be totally geodesic by Proposition 1, iii), we have the following

Proposition 3. *If M^m is a minimal, anti-invariant submanifold of $M^{2n+1}(k)$ with ξ tangent to M^m then*
 i) *$\bar{S}-[(k+1)(m-1)-k]\bar{g}+k(m-2)\eta\otimes\eta$ is semi-negative definite, and*
 ii) *$\bar{\varrho}<m[(k+1)(m-1)-k]-k(m-2)$.*

Ricci's equation is

$$g(R(X, Y)N, L)=g(R^{\perp}(X, Y)N, L)-\bar{g}([A_N, A_L]X, Y)\,. \tag{13}$$

Suppose $n+1=m$. Then $Q\equiv 0$ and from (8) we have that $\varphi\bar{\nabla}_Y X=\nabla^\perp_Y(\varphi X)$. Hence, we have

$$R^\perp(X, Y)(\varphi Z)=\varphi\bar{R}(X, Y)Z. \tag{14}$$

Using (14) and (3) in (13) and noting that if N is a normal vector field then $N=\varphi Z$ for some tangent vector field Z we obtain

$$\begin{aligned}&k[g(\varphi Z, \varphi Y)g(\varphi X, L)-g(\varphi Z, \varphi X)g(\varphi Y, L)]\\&=g(\varphi\bar{R}(X, Y)Z, L)-\bar{g}([A_{\varphi Z}, A_L]X, Y).\end{aligned}$$

If we assume that $[A_N, A_L]=0$ for any normal vectors L and N, then this becomes

$$\varphi\bar{R}(X, Y)Z=k\{[g(Z, Y)-\eta(Z)\eta(Y)]\varphi X-[g(Z, X)-\eta(Z)\eta(X)]\varphi Y\}.$$

Applying φ to this equation and using the fact that $\bar{\nabla}_X\xi=0$, we obtain

$$\begin{aligned}\bar{R}(X, Y)Z=&\,k[g(Z, Y)X-g(Z, X)Y]-k[\eta(Z)\eta(Y)X-\eta(Z)\eta(X)Y\\&+g(Z, Y)\eta(X)\xi-g(Z, X)\eta(Y)\xi].\end{aligned}$$

From a theorem in [12] we have the following

Theorem 4. *Let M^{n+1} be an anti-invariant submanifold of $M^{2n+1}(k)$ such that $[A_N, A_L]=0$ for all normal vectors L and N. Then M^{n+1} is locally $M'\times R^1$, where M' is a real space form of constant curvature k.*

Corollary 5. *Let M^{n+1} be an anti-invariant submanifold of S^{2n+1} such that $[A_N, A_L]=0$ for all normal vectors L and N. Then M^{n+1} is locally flat.*

Proof. This follows immediately from Theorem 4 since $S^{2n+1}=M^{2n+1}(0)$.

Let M^{n+1} be a minimal anti-invariant submanifold of $M^{2n+1}(k)$. Let $\{N_1,\dots,N_n\}$ be a local orthonormal basis of the normal space to M^{n+1} and let $A_\lambda=A_{N_\lambda}$. Then using (3), (6′), (8) and Equation (2.23) in [4] ($M^{2n+1}(k)$ is not locally symmetric but (2.23) applies since $(\nabla_W R)(X, Y, Z, V)=0$ whenever X, Y, Z, W, V are tangent to M^m) we find

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\Delta\|\alpha\|^2=&\,(n+1)(k+1)\|\alpha\|^2-2kn(n+1)\\&+\sum\operatorname{tr}(A_\lambda A_\mu-A_\mu A_\lambda)^2-\sum(\operatorname{tr}A_\lambda A_\mu)^2+\|\nabla'\alpha\|^2,\end{aligned}$$

where Δ is the Laplacian operator and ∇' is covariant differentiation in (tangent bundle)$\oplus$(normal bundle). The following lemmas appear in [4].

Lemma 6. $\operatorname{tr}(A_\lambda A_\mu-A_\mu A_\lambda)^2\geqq-2(\operatorname{tr}A_\lambda^2)(\operatorname{tr}A_\mu^2)$.

Lemma 7. *We can choose an orthonormal basis $\{N_1,\dots,N_n\}$ of the normal space to M^{n+1} such that $\operatorname{tr}A_\lambda A_\mu=0$ if $\lambda\neq\mu$.*

Hence,

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\Delta\|\alpha\|^2\geqq&\,(n+1)(k+1)\|\alpha\|^2-2kn(n+1)\\&+\frac{1}{n}\sum_{\lambda<\mu}(\operatorname{tr}A_\lambda^2-\operatorname{tr}A_\mu^2)^2-\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(\sum\operatorname{tr}A_\lambda^2\right)^2+\|\nabla'\alpha\|^2.\end{aligned}$$

If $-1 \leqq k \leqq 0$, we have that

$$\tfrac{1}{2}\Delta\|\alpha\|^2 \geqq \frac{2n-1}{n}\left[\frac{n(n+1)(k+1)}{2n+1} - \|\alpha\|^2\right]\|\alpha\|^2$$

and so $\frac{1}{2}\Delta\|\alpha\|^2 \geqq 0$ if $\|\alpha\|^2 < \dfrac{n(n+1)(k+1)}{2n-1}$. Now if M^{n+1} is compact, we see that $\Delta\|\alpha\|^2 = 0$ which implies that $\|\alpha\|^2 = 0$ and $k=0$. Using Proposition 1 we obtain the following

Theorem 8. *If M^{n+1} is a compact, minimal, anti-invariant submanifold of $M^{2n+1}(k)$ with $-1 \leqq k \leqq 0$ and ξ is tangent to M^{n+1} then $\|\alpha\|^2 \geqq \dfrac{n(n+1)(k+1)}{2n-1}$ at some point of M^{n+1}.*

§ 5. The Case in which ξ is Normal to M^m

In this section we assume that ξ is normal to M^m. Then $\xi_t \equiv 0$ so that (6) becomes

$$\begin{cases} -X = P\varphi X, & Q\varphi X = 0 \\ PQN = 0, & -N + \eta(N)\xi = \varphi PN + Q^2 N. \end{cases} \tag{6''}$$

Remark. In this case we have that $m \leqq n$. If $m = n$ then $Q \equiv 0$.

Suppose now that M^{2n+1} is Sasakian. Differentiating φX, φN and ξ covariantly, using (2), (5), and (7), and comparing tangential and normal components, we obtain

$$\left.\begin{aligned} &-A_{\varphi Y}X = P\alpha(X, Y),\ \nabla^{\perp}_X(\varphi Y) = -\bar{g}(X, Y)\xi + \varphi\bar{\nabla}_X Y + Q\alpha(X, Y), \\ &\eta(N)X + P\nabla^{\perp}_X N = \bar{\nabla}_X(PN) - A_{QN}X, \\ &Q\nabla^{\perp}_X N - \varphi A_N X = \alpha(X, PN) + \nabla^{\perp}_X(QN), \\ &A_{\xi}X = 0, \quad \nabla^{\perp}_X\xi = \varphi X. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

From (15) we easily see that

$$\nabla^{\perp}_Y\nabla^{\perp}_X\xi = \nabla^{\perp}_Y(\varphi X) = -\bar{g}(X, Y)\xi + \varphi\bar{\nabla}_Y X + Q\alpha(X, Y)$$

so that $R^{\perp}(X, Y)\xi = 0$ for any X and Y. Thus we have the following

Proposition 9. *If M^m is an anti-invariant submanifold of the Sasakian manifold M^{2n+1} such that ξ is normal to M^m, then the curvature tensor of the normal bundle annihilates ξ.*

Suppose now that $m = n$. Then $Q \equiv 0$ and (15) becomes

$$\left.\begin{aligned} &-A_{\varphi Y}X = \varphi\alpha(X, Y), \quad \nabla^{\perp}_X(\varphi Y) = -\bar{g}(X, Y)\xi + \varphi\bar{\nabla}_X Y, \\ &\eta(N)X + \varphi\nabla^{\perp}_X N = \bar{\nabla}_X(\varphi N), \\ &A_{\xi}X = 0, \quad \nabla^{\perp}_X\xi = \varphi X. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

If M^m is totally umbilical, that is, $\alpha(X, Y)H$ for some normal vector field H, then from (16) we have

$$-\bar{g}(A_{\varphi Y}X, Z) = \bar{g}(\varphi\alpha(X, Y), Z),$$

or

$$-\bar{g}(X, Z)g(H, \varphi Y) = \bar{g}(X, Y)\bar{g}(\varphi H, Z).$$

If we let $X = Z$ and $Y = \varphi H$ then this becomes

$$\bar{g}(X, X)g(\varphi H, \varphi H) = \bar{g}(X, \varphi H)^2,$$

and since $n > 1$ we have that $\varphi H = 0$. On the other hand

$$0 = \bar{g}(A_\xi X, Y) = g(\alpha(X, Y), \xi) = \bar{g}(X, Y)g(H, \xi),$$

that is $\eta(H) = 0$ and thus $H \equiv 0$. Hence we have

Proposition 10. *If M^n is a totally umbilical, anti-invariant submanifold of the Sasakian manifold M^{2n+1} such that ξ is normal to M^n, then M^n is totally geodesic.*

Using (16) we find that

$$R^\perp(X, Y)(\varphi Z) = \varphi\bar{R}(X, Y)Z + \bar{g}(X, Z)\varphi Y - \bar{g}(Y, Z)\varphi X. \tag{17}$$

From (17) and the fact that ξ is normal to M^n we see that if the connection of the normal bundle is trivial, that is, $R^\perp \equiv 0$, then M^n is of constant curvature 1. Conversely, if M^n is of constant curvature 1, then (17) gives $R^\perp(X, Y)(\varphi Z) = 0$. Also, from Proposition 9, we have $R^\perp(X, Y)\xi = 0$. Thus we have

Proposition 11. *Let M^n be an anti-invariant submanifold of the Sasakian manifold M^{2n+1} such that ξ is normal to M^n. Then the connection in the normal bundle is trivial if and only if M^n is of constant curvature* 1.

Suppose now that the ambient space is $M^{2n+1}(k)$. Then the equation of Gauss becomes

$$\begin{aligned}\bar{g}(\bar{R}(X, Y)Z, W) = (k+1)(\bar{g}(X, W)\bar{g}(Y, Z) - \bar{g}(X, Z)\bar{g}(Y, W))\\ + g(\alpha(X, W), \alpha(Y, Z)) - g(\alpha(X, Z), \alpha(Y, W)).\end{aligned} \tag{18}$$

From this we have the following

Proposition 12. *If M^m is a totally geodesic anti-invariant submanifold of $M^{2n+1}(k)$ such that ξ is normal to M^m, then M^m is of constant curvature $k+1$.*

From (18), we see that

$$\begin{aligned}\bar{S}(X, Y) = (k+1)(m-1)\bar{g}(X, Y) + \sum_i \{g(\alpha(e_i, e_i), \alpha(X, Y))\\ - g(\alpha(e_i, X), \alpha(e_i, Y))\}\end{aligned}$$

and

$$\bar{\varrho} = (k+1)(m-1)m + \sum_{i,j} \{g(\alpha(e_i, e_i)\alpha(e_j, e_j)) - g(\alpha(e_i, e_j), \alpha(e_i, e_j))\},$$

where $\{e_1, \ldots, e_m\}$ is a local orthonormal basis of tangent vectors to M^m. Thus, we have the following

Proposition 13. *Let M^m be a minimal anti-invariant submanifold of $M^{2n+1}(k)$ with ξ normal to M^m. Then*

i) *$\bar{S}-(k+1)(m-1)\bar{g}$ is negative semi-definite, and*

ii) *$\bar{\varrho} \leqq (k+1)(m-1)m$,*

with equality holding if and only if M^m is totally geodesic.

If we now put (3) into (13), Ricci's equation becomes

$$\begin{aligned} &g(R^{\perp}(X, Y))N, L)-\bar{g}([A_N, A_L]X, Y) \\ &\quad = k[g(N, \varphi Y)g(\varphi X, L)-g(N, \varphi X)g(\varphi Y, L)] \end{aligned} \tag{19}$$

for an anti-invariant submanifold with ξ normal. From (17) and (19) we obtain

$$\begin{aligned} &g(\varphi \bar{R}(X, Y)Z, L)-\bar{g}([A_N, A_L]X, Y) \\ &\quad =(k+1)g(\varphi(\bar{g}(Y, Z)X-\bar{g}(X, Z)Y), L). \end{aligned} \tag{20}$$

Thus, we have the following

Proposition 14. *Let M^n be an anti-invariant submanifold of $M^{2n+1}(k)$ with ξ normal to M^n. Then $[A_N, A_L]=0$ for all N, L if and only if M^m is of constant curvature $k+1$.*

Suppose now that M^m is minimal submanifold of $M^{2n+1}(k)$. By a calculation similar to that in [2] we find that

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\Delta\|\alpha\|^2 &= n(k+1)\|\alpha\|^2+k\sum \operatorname{tr}(A^2_{\varphi e_i}) \\ &\quad +\sum \operatorname{tr}(A_\lambda A_\mu - A_\mu A_\lambda)^2-\sum(\operatorname{tr} A_\lambda A_\mu)^2+\|\nabla'\alpha\|^2 . \end{aligned}$$

(We have used the same notation as in § 3.) Using Lemmas 6 and 7, we obtain

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\Delta\|\alpha\|^2 &\geqq m(k+1)\|\alpha\|^2+k\sum \operatorname{tr}(A^2_{\varphi e_i}) \\ &\quad +\frac{1}{p}\sum_{\lambda<\mu}(\operatorname{tr} A^2_\lambda-\operatorname{tr} A^2_\mu)^2-\left(2-\frac{1}{p}\right)\left(\sum \operatorname{tr} A^2_\lambda\right)^2+\|\nabla'\alpha\|^2 \\ &\geqq \frac{2p-1}{p}\|\alpha\|^2\left(\frac{(k+1)mp}{2p-1}-\|\alpha\|^2\right)+k\sum \operatorname{tr}(A^2_{\varphi e_i}), \end{aligned} \tag{21}$$

where $p=2n+1-m$. If $k \geqq 0$ and $\|\alpha\|^2<\dfrac{(k+1)mp}{2p-1}$ then $\Delta\|\alpha\|^2 \geqq 0$ and M^m compact implies $\Delta\|\alpha\|^2=0$ and hence $\|\alpha\|^2=0$, that is, M^m is totally geodesic. Thus, we have the following

Theorem 15. *If M^m is a compact, minimal, anti-invariant submanifold of $M^{2n+1}(k)$ with ξ normal to M^m and $k \geqq 0$ and $\|\alpha\|^2<\dfrac{(k+1)mp}{2p-1}$, where $p=2n+1-m$, then M^m is totally geodesic.*

If $m=n$, then $\{\varphi e_i, \xi\}$ can be used for $\{N_1, \ldots, N_{n+1}\}$ and since $A_\xi \equiv 0$ we find $\sum \operatorname{tr}(A_{\varphi e_i})^2 = \|\alpha\|^2$. Hence, (21) becomes

$$\tfrac{1}{2}\Delta\|\alpha\|^2 \geqq \frac{2p-1}{p}\|\alpha\|^2\left(\frac{(k+1)np+pk}{2p-1} - \|\alpha\|^2\right),$$

where $p=n+1$. Thus the following theorem holds.

Theorem 16. *If M^n is a compact, minimal, anti-invariant submanifold of $M^{2n+1}(k)$ with ξ normal to M^n and $\|\alpha\|^2 < \dfrac{(n+1)(k+n(k+1))}{2n+1}$ then M^n is totally geodesic.*

Remark. Since $A_\xi \equiv 0$, in the derivation of (21) we could assume $p=2n-m$. Hence, the hypothesis in Theorem 16 could be replaced by $\|\alpha\|^2 < \dfrac{n(k+n(k+1))}{2n-1}$ (see [2]).

References

1. Abe, K.: Application of a Riccati type differential equation to Riemannian manifolds with totally geodesic distribution. Tôhoku Math. J. **25**, 425—444 (1973)
2. Blair, D. E., Ogiue, K.: Geometry of integral submanifolds of a contact distribution. Illinois J. Math. **19**, 269—276 (1975)
3. Chen, B. Y., Ogiue, K.: On totally real submanifolds. Trans. of AMS **193**, 257—266 (1974)
4. Chern, S. S., doCarmo, M. P., Kobayashi, S.: Minimal submanifolds of a sphere with second fundamental form of constant length, Functional analysis and related fields (proc. Conf. for M. Stone, Univ. of Chicago, Chicago, Ill. (1968). Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1970
5. Houh, C. S.: Some totally real minimal hypersurfaces in CP^2. Proc. of AMS **40**, 240—244 (1973)
6. Ludden, G. D., Okumura, M., Yano, K.: Totally real submanifolds of complex manifolds. Rendiconti dell'Academia Nazionale dei Lincei **58**, 346—353 (1975)
7. Ludden, G. D., Okumura, M., Yano, K.: A totally real surface in CP^2 that is not totally geodesic. Proc. of AMS **53**, 186—190 (1975)
8. Okumura, M.: Submanifolds of real codimension of a complex projective space. Rendiconti dell'Academia Nazionale dei Lincei **58**, 544—555 (1975)
9. Sasaki, S., Hatakeyama, Y.: On differentiable manifolds with contact metric structure. J. Math. Soc. Japan **14**, 249—271 (1962)
10. Tashiro, Y.: On contact structure of hypersurfaces in complex manifold. Tôhoku Math. J. **15**, 62—78 (1963)
11. Yano, K.: On a structure defined by a tensor field f of type (1, 1) satisfying $f^3+f=0$. Tensor N. S. **14**, 99—109 (1963)
12. Yano, K.: On n-dimensional Riemannian spaces and admitting a group of motions of order $\frac{1}{2}n(n-1)+1$. Trans. of AMS **74**, 260—279 (1953)

Received October 16, 1975, and in revised form April 26, 1976

Math. Ann. 225, 263—273 (1977)

Vector Fields and Chern Numbers

J. B. Carrell* and D. I. Lieberman**

Department of Mathematics, University of British Columbia, Vancouver, B. C., Canada V6T 1W5
Department of Mathematics, Brandeis University, Waltham MA 02154, U.S.A.

Introduction

The purpose of this note is to expose an elementary Kozsul complex argument which underlies the work of Bott [3, 4] and Baum-Bott [5]. Their results relate global Chern invariants of X to local residue calculations. The treatment of their results given by the present approach is valid for both the analytic and algebraic categories, and we feel that it clarifies the role of the Grothendieck Residue symbol in the formulae. A more important consequence of the present approach is that for Kähler manifolds having a vector field with non-trivial zeroes one can prove that the Chern *classes* (and not merely the Chern numbers) of X may be computed on the zero set. Furthermore, we study systematically the notion of bundles equivariant with respect to a $\mathscr{W}$-valued vector field V, i.e. a section of $\Theta\otimes\mathscr{W}$, where Θ is the holomorphic tangent bundle and $\mathscr{W}$, a vector bundle. One proves easily that the Chern numbers of equivariant bundles are determined on the zeroes of V (as are the Chern classes for X Kähler, $\mathscr{W}$ trivial, and zero $(V)\neq\phi$). The notion of equivariance is extremely fruitful since it vastly increases the applicability of the theorem. All line bundles are equivariant if X is Kähler, $\mathscr{W}$ is trivial and zero (V) is nonempty. Further if $\mathscr{W}$ is taken to be a sufficiently ample line bundle then any given bundle $\mathscr{E}$ will be equivariant for all $\mathscr{W}$-valued vector fields, which will exist, moreover, in abundance (see § 1).

A section V of $\Theta\otimes\mathscr{W}=(\Omega^1)^*\otimes\mathscr{W}$ is viewed as defining a map $i(V)\colon \Omega^1\to\mathscr{W}$ from the holomorphic forms to $\mathscr{W}$. We obtain therefore a derivation $V\colon\mathscr{O}_X\to\mathscr{W}$ by $V(f)=i(V)(df)$. A bundle $\mathscr{E}$ is called V-equivariant if one may lift V to $\tilde V\colon\mathscr{E}\to\mathscr{W}\otimes\mathscr{E}$ such that:

$$\tilde V(fs)=V(f)\otimes s+f\,\tilde V(s)$$

for f a function, and s a section of $\mathscr{E}$. If one restricts to Z, the locus of points at which V vanishes, then the formula above shows that $\tilde V$ defines a *linear* map

$$\tilde V_Z\in H^0(Z,\operatorname{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})\otimes\mathscr{W})\,.$$

---

* Partially supported by the National Research Council of Canada
** Partially supported by a Sloan Foundation Fellowship and N.S.F. grant GP-28323A3

If one gives a degree d polynomial map p: $\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})\otimes\mathscr{W}\to G$, then one obtains $p(\tilde{V}_Z)\in H^0(Z,\mathscr{G})$. Our results relate this local class to global invariants obtained by applying p to the Atiyah class $c(\mathscr{E})\in H^1(X,\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})\otimes\Omega^1)$, which yields an element $p(c(\mathscr{E}))\in H^d(X,\Omega^d\otimes\mathscr{W}^{-d}\otimes\mathscr{G})$.

Main Theorem. *Let X be a complex manifold, $\mathscr{W}$ a line bundle and V a $\mathscr{W}$-valued holomorphic vector field with isolated zeroes Z. Given a V-equivariant bundle $\mathscr{E}$ and a polynomial mapping of degree d, p: $\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})\otimes\mathscr{W}\to\mathscr{G}$ for some bundle $\mathscr{G}$, then*

a) *If $d=n=\dim X$ there exists a natural homomorphism*

$$e: H^0(Z,\mathscr{G})\to H^n(X,\Omega^n\otimes\mathscr{W}^{-n}\otimes\mathscr{G})$$

such that

$$e(p(\tilde{V}_Z))=p(c(\mathscr{E}))\,.$$

b) *If $d=n$, X is compact and $\mathscr{G}=\mathscr{W}^n$ so that $p(c(\mathscr{E}))\in H^n(X,\Omega^n)$ can be integrated to give a Chern number of $\mathscr{E}$, then one has*

$$\int_X p(c(\mathscr{E}))=(2\pi i)^n\,\mathrm{Res}(p(\tilde{V}_Z))$$

where Res, *the Grothendieck Residue, is the canonical map of $H^0(Z,W^n)=\mathrm{Ext}^n(\mathcal{O}_Z,\Omega^n)$ to the scalars.*

c) *If $\mathscr{W}=\mathscr{G}=\mathcal{O}_X$ and $d<n$, then* $\mathrm{Res}(p(\tilde{V}_Z))=0$.

d) *If X is compact Kähler, $Z\neq\emptyset$, and $\mathscr{G}=\mathscr{W}=\mathcal{O}_X$ is trivial, then there exists a filtration F_i on $H^0(Z,\mathcal{O}_Z)$, with $F_i\supseteqq F_{i+1}$ and $F_i\cdot F_j\subseteqq F_{i+j}$, and isomorphisms*

$$e_d: F_{-d}/F_{-d+1}\to H^d(X,\Omega^d)$$

such that

$$e_d(p(\tilde{V}_Z))=p(c(\mathscr{E}))\,.$$

In particular for σ_d: $\mathrm{Hom}(E,E)\to\mathcal{O}_X$ *the d* th *elementary symmetric function one obtains that $\sigma_d(\tilde{V}_Z)\in H^0(Z,\mathcal{O}_Z)$ computes the d* th *Chern class of E.*

In Section 4 we indicate how one may explicitly calculate the cohomology rings of Grassmanians by using the equivariance of the canonical quotient and subbundle with respect to flows on the Grassmanian.

The underlying idea of our proof is that the Atiyah class $c(\mathscr{E})$ can be thought of as coming from a class $\tilde{c}(\mathscr{E})$ in the hypercohomology of an $i(V)$-Kozsul complex. This hypercohomology lives on Z, in particular, for isolated Z, $\tilde{c}(\mathscr{E})$ will be identifiable with $\tilde{V}_Z\in H^0(Z,\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})\otimes\mathscr{W})$. Now, by construction $c(\mathscr{E})$ arises from $\tilde{c}(\mathscr{E})$ via a spectral sequence edge morphism e, and this morphism commutes with the evaluation of p in view of the multiplicative character of the Kozsul complex. The lack of multiplicative structure for the generalized Kozsul complexes is a first obstacle to the simple treatment of higher dimensional foliations, cf. [6], by an analogous argument. We remark in §3 that statement b) of our theorem follows easily from a standard commutative diagram in residue theory. The analogous result for the higher dimensional foliations needs to be uncovered—it is clearly implicit in the fibered residue calculations of [6].

Finally, we remark that for higher dimensional foliations the hypothesis of *integrability* of Baum and Bott is precisely the hypothesis that the quotient sheaf

$Q=\Theta/\mathscr{W}$ is *equivariant*, and "explains" the calculation of Q-Chern numbers rather than Θ-Chern numbers in their work. Since Q is in general only *coherent* rather than locally free it is necessary to extend our spectral sequence argument to this broader context to cover the Baum-Bott results—this is achieved in §6.

§ 1. V-Equivariant Sheaves

Throughout our discussion X will denote a (not necessarily compact) complex manifold of dimension n, $\mathscr{W}$ will denote a locally free, rank one sheaf of $\mathcal{O}_X$ modules and $V\in H^0(X,\Theta\otimes\mathscr{W})$ a "$\mathscr{W}$-valued" holomorphic vector field on X. (Note that since $\Theta\otimes\mathscr{W}=\mathrm{Hom}(\mathscr{W}^*,\Theta)$, one may equivalently view V as a map $\mathscr{W}^{a*}\to\Theta$. We indicate by "$V$", or by "$V\otimes$", any map $\mathscr{W}^*\otimes\mathscr{F}\to\Theta\otimes\mathscr{F}$ produced from V by linearity. Dually we denote by $i(V)$ maps produced from $i(V)$: $\Omega^1\to\mathscr{W}$ by tensorisation.)

A sheaf of $\mathcal{O}_X$ modules $\mathscr{E}$ is called *V-equivariant* if there exists a C-linear map, $\tilde{V}:\mathscr{E}\to\mathscr{W}\otimes\mathscr{E}$, lifting the derivation $V:\mathcal{O}_X\to\mathscr{W}$, that is

$$\tilde{V}(f\cdot s)=V(f)\otimes s+f\cdot\tilde{V}(s) \tag{1.1}$$

where f (resp. s) is a local section of $\mathcal{O}_X$ (resp. $\mathscr{E}$). For vector fields (i.e. when W is trivial) the sheaves Θ and Ω^p are equivariant via Lie bracket and Lie derivative. In general Θ will not be equivariant for $\mathscr{W}$-valued fields. However, if one defines Q by the sequence

$$0\to\mathscr{W}^{a*}\xrightarrow{V}\Theta\xrightarrow{\pi}Q\to 0 \tag{1.2}$$

then one obtains a natural

$$\tilde{V}: Q\to\mathscr{W}\otimes Q=\mathrm{Hom}(W^*,Q)$$

by taking $\tilde{V}(q)$ to be the map: $s\to\pi([V(s),\tilde{q}])$ where s is a section of $\mathscr{W}^{a*}$ and $\tilde{q}$ is any π-lift of q. (Independence of the choice of $\tilde{q}$ is due to the *integrability* of rank 1 subbundles of Θ. For higher rank $\mathscr{W}$, one may assume integrability to guarantee equivariance of Q, as in [6].)

We denote by Z the subvariety of X defined by the vanishing of V, i.e. by the sheaf of ideals I_Z which is the image of $i(V):\Omega^1\otimes\mathscr{W}^{a*}\to\mathcal{O}_X$. Note that by definition $V(f)\in I_Z$ for all f. If $\mathscr{E}$ is any equivariant bundle we see therefore that $\tilde{V}:\mathscr{E}\to\mathscr{E}\otimes\mathscr{W}$ maps $I_Z\cdot\mathscr{E}$ to $I_Z\cdot(\mathscr{E}\otimes\mathscr{W})$ and modulo I_Z induces an $\mathcal{O}_Z$ linear map $\tilde{V}_Z$, important in the sequel.

For general $\mathscr{E}$ one may measure the obstruction to constructing a $\tilde{V}$ by a class $\delta(\mathscr{E})\in H^1(X,\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})\otimes\mathscr{W})$. Namely, locally one may construct $\tilde{V}_\alpha$ satisfying (1.1) and $\tilde{V}_\alpha$ is determined by to a linear map in $\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{W}\otimes\mathscr{E})$, whence the patching obstruction for global $\tilde{V}$.

Proposition (1.1). *Given a locally free sheaf $\mathscr{E}$ of $\mathcal{O}_X$-modules, the element $\delta(V)$ obstructing the V-equivariance of $\mathscr{E}$ is $i(V)$ $c(\mathscr{E})\in H^1(X,\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})\otimes\mathscr{W})$ where $c(\mathscr{E})\in H^1(X,\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})\otimes\Omega^1)$ is the Atiyah Chern class of $\mathscr{E}$.*

Proof. The result follows from noting that $c(\mathscr{E})$ obstructs the existence of a connexion $\nabla:\mathscr{E}\to\Omega^1\otimes\mathscr{E}$ and that given ∇ one may define $\tilde{V}$ as $i(V)\cdot\nabla$.

An important application of this is

Proposition (1.2). *Given X a projective manifold and $\mathscr{E}$ locally free, there exists a line bundle $\mathscr{L}$ on X such that $\mathscr{E}$ is equivariant with respect to any section of H^0 $(X, \Theta \otimes \mathscr{L})$ and such that $\Theta \otimes \mathscr{L}$ has sections with isolated zeros.*

Proof. When $\mathscr{L}$ is sufficiently positive, $H^1(X, \operatorname{Hom}(\mathscr{E}, \mathscr{E}) \otimes \mathscr{L}) = 0$ and $\Theta \otimes \mathscr{L}$ will be very ample, hence will have sections in general position.

As another example, we have

Proposition (1.3). *If X is a compact Kähler manifold and $V \in H^0(X, \Theta)$ has zeros, then every invertible sheaf $\mathscr{L}$ on X is equivariant.*

Proof. For then, $i(V)$: $H^1(X, \Omega^1) \to H^1(X, \mathcal{O}_X)$ is zero. This is essentially Lichnerowicz's Lemma [7].

§ 2. The Fundamental Kozsul Complex

Given $V \in H^0(X, \Theta \otimes \mathscr{W})$ we may extend the canonical map $i(V)$: $\Omega^1 \otimes \mathscr{W}^* \to \mathcal{O}_X$ to define a Kozsul complex. Namely, we define: $K^{-p} = \Lambda^p(\Omega^1 \otimes \mathscr{W}^*) = \Omega^p \otimes \mathscr{W}^{-p}$, where $\mathscr{W}^{-p} = (\mathscr{W}^*)^{\otimes p}$. We have the fundamental Kozsul complex of sheaves:

$$0 \to K^{-n} \to \ldots \to K^{-1} \to K^0 \to 0 \tag{2.1}$$

in which the differential is contraction with V, $i(V)$. Given any locally free $\mathscr{F}$ we shall denote by $K(\mathscr{F})$ the complex obtained by tensoring (2.1) with $\mathscr{F}$, over $\mathcal{O}_X$.

We will be analysing the two spectral sequences of hypercohomology for these complexes

$$E_2^{p,q} = H^p(X, \mathscr{H}^q(F)) \Rightarrow \boldsymbol{H}^{p+q}(X, K(\mathscr{F})) \tag{2.2}$$

$$E_1^{p,q} = H^q(X, \Omega^{-p} \otimes \mathscr{F}) \Rightarrow \boldsymbol{H}^{p+q}(X, K(\mathscr{F})) \tag{2.3}$$

where $\mathscr{H}(\mathscr{F})$ denotes the cohomology sheaves of the complex $K(\mathscr{F})$.

The hypercohomology $\boldsymbol{H}(X, K(\mathscr{F}))$ may be computed as total cohomology of a double complex—for example fixing a Leray covering $\mathscr{U}$ for X, one may form the double Čech complex $\check{C}^p(\mathscr{U}, \Omega^q \otimes F)$ with differentials $i(V)$ and δ, (the Cech coboundary) and with total differential $\delta + (-1)^p i(V)$. Alternatively one can use the double complex $A^{p,q}(F)$ of F valued C^∞ forms of type p, q with differentials $\bar{\partial}$ and $i(V)$. In fact this double complex is implicit in the projector calculations of Bott. The remarks we make below concerning hypercohomology may be easily followed in the explicit representation given by either of these double complexes. The spectral sequences above are the two spectral sequences of the double complex.

We recall that (2.1) is exact off the zeroes Z of V, and the cohomology sheaves $\mathscr{H}(\mathscr{F})$ are in fact coherent sheaves of $\mathcal{O}_Z$ modules in particular are supported on Z. When $\dim Z = 0$ then $\mathscr{H}^q = 0$ for $q > 0$ and $\mathscr{H}^0(\mathscr{F}) = \mathscr{F}_Z$ by the well known theory of the Kozsul complex.

Remark 2.4. The sequence (2.2) shows that $\boldsymbol{H}(K(\mathscr{F}))$ is determined by contributions on Z. One sees immediately,

a) If $Z = \phi$ then $\boldsymbol{H}^r(X, K(\mathscr{F})) = 0$ for all r.

b) If $\dim Z=0$ then $\boldsymbol{H}^r(X, K(\mathscr{F}))=0$ for $r\neq 0$ and $\boldsymbol{H}^0(X, K(\mathscr{F}))=H^0(Z, \mathscr{F}_Z)$. where $\mathscr{F}_Z=\mathscr{F}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_Z$.

Moreover we remark on the multiplicative nature of these spectral sequences. Namely, given a bilinear map $A\times B\to C$ one extends it to a natural bilinear map

$$K^p(A)\times K^q(B)\to K^{p+q}(C) \tag{2.5}$$

by using the natural exterior product in $K^{\cdot}=\Lambda^{\cdot}K^1$. This is a pairing of complexes in view of the contraction identity

$$i(V)(k_1\wedge k_2)=(i(V)\,k_1)\wedge k_2+(-1)^p\,k_1\wedge i(V)\,k_2\,.$$

Consequently one obtains a bilinear pairing

$$\boldsymbol{H}^p(K(A))\times\boldsymbol{H}^q(K(B))\to\boldsymbol{H}^{p+q}(K(C))$$

of hypercohomology. Further, if $F.\,\boldsymbol{H}$ denotes the filtration on $\boldsymbol{H}$ defined by the spectral sequence (2.3) then one has $F_r\boldsymbol{H}\times F_s\boldsymbol{H}\to F_{r+s}\boldsymbol{H}$.

In particular when $\mathscr{F}=\mathcal{O}_X$, the hypercohomology of $K^{\cdot}=K(\mathcal{O}_X)$ has a natural ring structure, which is compatible via (2.3) with the wedge product pairings of the groups $E^{-p,q}=H^q(X,\Omega^p\otimes\mathscr{W}^{-p})$. In case $\mathscr{W}=\mathcal{O}_X$ and X is a Kähler manifold, the $H^q(X,\Omega^p)$ are the Hodge components of the cohomology ring of X. In this case we recall the main result of [7]:

Theorem 2.6. *If X is a Kähler manifold, V a holomorphic vector field with nonempty zero set, Z, then the spectral sequence* (2.3) *has all differentials vanishing, so that the cohomology ring of X is determined on Z as the associated graded ring for the filtered $F_p\boldsymbol{H}^{p+q}(X, K^{\cdot})$.*

Remark 2.7. In particular if $\dim Z=0$, the cohomology ring of X is the associated graded of a filtration

$$H^0(Z,\mathcal{O}_Z)=F_{-n}\supseteq F_{-n+1}\supseteq\cdots\supseteq F_{-1}\supseteq F_0=0$$

on the ring of global functions on Z, cf. 2.4 b) above. Note that the F_i are not in general ideals in this ring, but do satisfy $F_i\cdot F_j\subseteq F_{i+j}$.

An example with $X=P^n$ is done explicitly in §4, below.

§ 3. Principal Results

We next turn to the definition of hyper-Chern classes for equivariant bundles. Given any bundle we note that the Atiyah Chern class $c(\mathscr{E})$ defines an element of $H^1(X,\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})\otimes\Omega^1)$, which group may be interpreted as the $E_1^{-1,1}$ term in the $\boldsymbol{H}(K(\mathscr{F}))$ spectral sequence (2.3), where $\mathscr{F}=\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})\otimes\mathscr{W}$. We note that $d_1(c(\mathscr{E}))=0$ if and only if $\mathscr{E}$ is V-equivariant (Proposition 1.1). Thus since $E_1^{r-1,2-r}$ vanishes if $r>1$, we find that $\mathscr{E}$ is equivariant if and only if $c(\mathscr{E})$ defines a hypercohomology class $\tilde{c}(\mathscr{E})$ lying in $F_{-1}\boldsymbol{H}^0(X, K(\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})\otimes\mathscr{W}^{\cdot})$. [This $\tilde{c}(\mathscr{E})$ is well defined only up to $F_0\boldsymbol{H}^0$, and modulo F_0, $\tilde{c}(\mathscr{E})$ is the class in $E_\infty^{-1,1}$ given by $c(\mathscr{E})$ modulo all spectral sequence boundaries.] We call $\tilde{c}(\mathscr{E})$ a hyper-Chern class of $\mathscr{E}$.

Given $\mathcal{O}_X$-modules A and B, a mapping $p: A\to B$ will be called a polynomial of degree d if it is obtained by composing the diagonal map $A\to\otimes^d A$, $(a\to a\otimes a\ldots\otimes a)$, with a linear map $\otimes^d A \to B$. Given such a polynomial one obtains canonically $p: \boldsymbol{H}(K(A)) \to \boldsymbol{H}(K(B))$ by composing the diagonal map $\boldsymbol{H}(K(A)) \to \otimes^d \boldsymbol{H}(K(A))$ with the map $\otimes^d \boldsymbol{H}(K(A)) \to \boldsymbol{H}(K(B))$ induced by the linear mapping assumed above. Note that p respects the filtration of the spectral sequence (2.3), i.e. $p(F_r \boldsymbol{H}^q(A)) \subseteqq F_{dr} \boldsymbol{H}^{dq}(B)$, and one finds immediately (in view of the multiplicative character of our spectral sequences):

Proposition 3.1. *Given p: $\mathrm{Hom}(\mathscr{E}, \mathscr{E}) \otimes \mathscr{W} \to \mathscr{G}$ a degree d polynomial, the class $p(c(\mathscr{E}))$ in $H^d(X, \Omega^d \otimes \mathscr{W}^{-d} \otimes \mathscr{G})$ is associated to the class $p(\tilde{c}(\mathscr{E}))$ in $\boldsymbol{H}^0(X, K(\mathscr{G}))$. More precisely, $p(\tilde{c}(\mathscr{E})) \in F_{-d} \boldsymbol{H}^0(X, K(G))$ and modulo F_{-d+1} it defines in $E_\infty^{-d,d}$ the class which is the image of $p(c(\mathscr{E})) \in E_1^{-d,d}(K(G))$ modulo $B^{-d,d}$ (the set of all spectral sequence boundaries in $E_1^{-d,d}$).*

In general the vanishing of $p(\tilde{c}(\mathscr{E}))$ implies only that $p(c(\mathscr{E}))$ is a spectral sequence boundary, and will not imply the vanishing of $p(c(\mathscr{E}))$. In particular cases where there are *no boundaries* $p(c(\mathscr{E}))$ is completely determined by $p(\tilde{c}(\mathscr{E}))$. Since this latter class is in $\boldsymbol{H}(K(\mathscr{G}))$ it is determined on the zero set Z in view of (2.4). Thus, we have results of Bott type:

Theorem 3.2. *Given $V \in H^0(X, \Theta \otimes \mathscr{W})$ where X is a (not necessarily compact) complex manifold, and $\mathscr{W}$ is a complex line bundle, then for any V-equivariant bundle E, and any polynomial p: $\mathrm{Hom}(\mathscr{E}, \mathscr{E}) \otimes \mathscr{W} \to \mathscr{G}$ of degree $n = \dim X$:*

$$e(p(\tilde{c}(\mathscr{E}))) = p(c(\mathscr{E}))$$

where e: $\boldsymbol{H}^0(X, K(\mathscr{G})) \to H^n(X, \Omega^n \otimes W^{-n} \otimes G)$ is the edge morphism of the spectral sequence (2.3). *Thus $p(c(\mathscr{E}))$ is determined by contributions on $Z = zero(V)$, vanishing if $Z = \phi$.*

The concluding remark of the theorem is a reference to the spectral sequence (2.2). The local contributions are made explicit in (3.4) below. The key point in (3.2) is the non-existence of boundaries in $E_1^{-n,n}$ since $K^r = 0$ if $r < -n$. We have similarly

Theorem 3.3. *Let X be compact Kähler, and V a vector field with nonempty zero set Z, and let p: $\mathrm{Hom}(\mathscr{E}, \mathscr{E}) \to \mathcal{O}_X$ be any degree d polynomial, then the Chern class $p(c(\mathscr{E})) \in H^d(X, \Omega^d)$ is $e(p(\tilde{c}(\mathscr{E})))$ where*

$$e: F_{-d} \boldsymbol{H}^0(K) \to H^d(X, \Omega^d)$$

arises from the totally degenerate spectral sequence (2.3), (*cf.* 2.6, *and* [7].)

One cannot conclude the vanishing of Chern *classes* for equivariant bundles on Kähler manifolds when $Z = \emptyset$, since the spectral sequences will not degenerate when $Z = \emptyset$. As an example, let $X = P^1 \times T$ with T an elliptic curve. Take V to be translation on T and $\mathscr{E} = \pi_1^*(\mathcal{O}(1))$. One has $p(\tilde{c}(\mathscr{E})) \in \boldsymbol{H}(K)) = 0$, while clearly for $p = \mathrm{tr}$: $\mathrm{Hom}(\mathscr{E}, \mathscr{E}) \to \mathcal{O}_X$ one has $0 \neq c_1(\mathscr{E}) \in H^1(X, \Omega^1)$.

We turn next to the proof of the main theorem. The hypothesis that Z have *isolated* zeroes yields an identification $\boldsymbol{H}^0(X, K(\mathrm{Hom}(\mathscr{E}, \mathscr{E}) \otimes \mathscr{W})) \xrightarrow{\sim} H^0(Z, \mathrm{Hom}(\mathscr{E}, \mathscr{E}) \otimes \mathscr{W})$ in view of the degeneracy of spectral sequence (2.2), cf. (2.4). The statements a), c), of our main theorem correspond to Theorems 3.2, and 3.3, once one verifies that $\tilde{c}(\mathscr{E})$ and $\tilde{V}_Z$ correspond under the above isomorphism. Fixing an acyclic covering $\mathscr{U}$ of X by polydiscs U_α we employ the Cech double complex $C^p(\mathscr{U}, K^q)$ to calculate $\boldsymbol{H}$. Note that if D_α: $\mathscr{E}\to\mathscr{E}\otimes\Omega^1$ is a connexion for $\mathscr{E}$ on U_α then $D_\alpha - D_\beta = \Theta_{\alpha\beta} \in C^1(\mathscr{U}, K^{-1})$ is the Cech representative for the Atiyah class. Consider $L_\alpha = \tilde{V} - i(V)\cdot D_\alpha$ which yields an element of $C^0(\mathscr{U}, \mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})\otimes\mathscr{W})$ such that $L_\beta - L_\alpha = i(V)(\Theta_{\alpha\beta})$. Thus we see that the cochain $\{\Theta_{\alpha\beta}\}\oplus\{L_\alpha\}\in\bigoplus_{p+q=0} C^p(\mathscr{U}, K^q(\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})\otimes\mathscr{W}))$ is a total cocycle (i.e. is annihilated by $\delta+(-1)^p i(V)$, the total differential) and represents the class $\tilde{c}(\mathscr{E})$. The corresponding class in $H^0(Z, \mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})\otimes\mathscr{W})$ is $\{L_\alpha\}|_Z$. But $L_\alpha|_Z = \tilde{V}_Z$ since $i(V)$ vanishes on Z, and we obtain our assertion.

To obtain statement b) of the main theorem concerning the Grothendieck residue, note that since $\dim Z = 0$

$$K = 0 \to \Omega^n \otimes \mathscr{W}^{-n} \to \dots \to \Omega^1 \otimes \mathscr{W}^{-1} \to \mathscr{O}_X$$

is a resolution of $\mathscr{O}_Z$ and since one has a natural identification $K(\mathscr{W}^n) = \mathrm{Hom}(K, \Omega^n)$ via

$$K^{-p}(\mathscr{W}^n) = \Omega^p \otimes \mathscr{W}^{n-p} = \mathrm{Hom}(\Omega^{n-p}\otimes\mathscr{W}^{p-n}, \Omega^n)$$

so that one may identify $\boldsymbol{H}^0(K(\mathscr{W}^n))$ and $\mathrm{Ext}^n(\mathscr{O}_Z, \Omega^n)$. Our claim is:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^n(\mathscr{O}_Z, \Omega^n) & \xrightarrow{e} & H^n(X, \Omega^n) \\ & {\scriptstyle\mathrm{Res}}\searrow \quad \swarrow & \\ & \boldsymbol{C} & \end{array} \tag{3.4}$$

is commutative, where Res is the Grothendieck Residue, e is the edge morphism in the spectral sequence, and $H^n(X, \Omega^n)\to\boldsymbol{C}$ is the *canonical* map (called Tr in [8], and $\int$ in [9]). [This latter notation is misleading, since in fact the map Tr is given by $1/(2\pi i)^n \int_X$ under the standard identification of $H^n(X,\Omega^n)$ and $H^{2n}(X, \boldsymbol{C})$.] The commutativity of the above diagram is essentially the definition of Res, see [9] or [8, Chapter III, § 1] for a proof of commutativity.

c) Follows immediately from the fact that $e(p\tilde{c}(\mathscr{E}))=0$ if $\deg p < n$.

§ 4. Examples

(I) The universal Chern classes

Let Grass (k, n) denote the set of k-planes in $\boldsymbol{C}^n$ viewed as the homogeneous space of left cosets G/H where $G = GL(n; \boldsymbol{C})$ and $H = GL(k, n-k; \boldsymbol{C})$ is the isotropy group of the k-plane $\boldsymbol{C}^k$ spanned by $e_1, \dots, e_k$ for the left action of G on Grass (k, n). For any $\tau\in G$, let $W(\tau)$ denote the first k columns of τ and for any sequence $I = \{1 \leqq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqq n\}$ denote by U_I the Zariski open H-invariant set in G defined by the requirement that $W_I(\tau)$, the submatrix of $W(\tau)$ formed by selecting rows I, be nonsingular. The universal subbundle $\mathscr{E}$ consisting of all pairs (S, x) where $S\in$ Grass (k, n) and $x \in S$ can be viewed as the homogeneous vector bundle $G\times \boldsymbol{C}^k/H$ where the right action of H is $(\tau, v)\,\phi = (\tau\phi, \phi^{-1}v)$. From this description it follows that $\mathscr{E}$ is trivial over $\tilde{U}_I = U_I/H$ and that the patching data on $\tilde{U}_I\cap\tilde{U}_J$ are $f_{IJ} = W_I W_J^{-J}$. An explicit representative of $c(\mathscr{E})$ in $C^1(\{U_I\}, \mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})\otimes\Omega^1_{\mathrm{Grass}})$ is $df_{IJ}f_{IJ}^{-1}$. First, computing this on G, gives

$$df_{IJ}f_{IJ}^{-1} = dW_I W_I^{-1} - f_{IJ}\,dW_J W_J^{-1} f_{IJ}^{-1}\,. \tag{4.1}$$

It is well known that a given $V \in H^0\ \Theta_{\mathrm{Grass}(k,n)}$ lifts to a linear vector field M on G; i.e. $M \in \mathrm{Hom}(C^n, C^n) \subset H^0(\Theta_G)$. Now (4.1) implies that the $\tilde{M}_I = i(M)\, dW_I W_I^{-1}$ provide a lift of M to a derivation on $\mathcal{O}_G^k$, consequently if the $\tilde{M}_I$ descend to $\tilde{V}_I$ on $\tilde{U}_I$ we will have established V-equivariance of $\mathscr{E}$. But

$$i(M)\, dW_I W_I^{-1} = (MW)_I W_I^{-1} = M_I W W_I^{-1},$$

hence M_I clearly does descend. We can thus represent $\tilde{c}(\mathscr{E})$ by

$$df_{IJ} f_{IJ}^{-1} - M_I W W_I^{-1}$$

and therefore the jth universal Chern class $c_j(\mathscr{E})$ is represented in $H^0(Z, \mathcal{O}_Z)$ by $(-1)^j \sigma_j(M_I W W_I^{-1})$.

To continue the example let $M = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ where $\lambda_i \in C$ are distinct complex numbers. Then the zeros of the induced vector field V on Grass (k, n) are all simple and these occur at the $\binom{n}{k}$ k-planes $\zeta_I = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}$. Consequently $H^0(Z, \mathcal{O}_Z) = \oplus_I C$ is the ring of all $\binom{n}{k}$ square diagonal matrices and the computation of the contribution to $c_j(\mathscr{E})$ at the zero ζ_I is $(-1)^j \sigma_j(M W W_I^{-1}) = (-1)^j \sigma_j(\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_k})$.

(II). *The Cohomology Ring of* P^{n-1}

The vector field

$$M = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ \vdots & \\ 0 & \ldots 0 \end{pmatrix}$$

on C^n vanishes along the line spanned by e_1 hence descends to $V \in H^0(\Theta_{P^{n-1}})$ with unique zero $\zeta = [1, 0, \ldots, 0]$. In inhomogeneous coordinates $w_1, \ldots, w_{n-1}$ about ζ

$$V = (w_2 - w_1^2)\, \partial/\partial w_1 + (w_3 - w_1 w_2)\, \partial/\partial w_2 + \ldots - w_1 w_{n-1}\, \partial/\partial w_{n-1}$$

It follows that $H^0(Z, \mathcal{O}_Z) = C[w_1]/(w_1^n)$. In the notation of the above example, $I = \{1\}$ and

$$W W_I^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Therefore, $-M_I W W_I^{-1} = -w_1$ is the first Chern class of the universal subbundle $\mathcal{O}(-1)$ on P^{n-1}. Granting that $c_1(\mathcal{O}(-1))^{n-1} \neq 0$ it follows that the filtration degree of w^i is precisely $-i$, hence $H^{\cdot}(P^{n-1}, C)$ is the graded polynomial ring generated by the element $c_1(\mathcal{O}(-1))$ and truncated at degree n.

Remark. The constructions employed in (I) are valid for any V-equivariant sheaf $\mathscr{E}$ on an arbitrary X. The appropriate role of G and M are respectively as the bundle $\mathscr{F}$ of frames of $\mathscr{E}$ and as equivariant lift of V to $\mathscr{F}$. The precise formulations are left to the reader.

§ 5. Higher Dimensional Foliations

Ideally, one would hope to treat the study of singular foliations $\mathscr{W}^* \to \Theta$ with $\operatorname{rank}(\mathscr{W}) > 1$ in a completely parallel manner, by employing generalized Kozsul complexes to simplify the argument of [6]. The simpler results of [4] are readily described in the present context:

Proposition 5.1. *Suppose $i(V)$: $\Omega^1 \to \mathscr{W}$ is a surjection and $\mathscr{E}$ is V-equivariant. Then for any $\mathcal{O}_X$-linear p: $\operatorname{Hom}(\mathscr{E}, \mathscr{E})^{\otimes k} \to \mathcal{O}_X$, $p(c(\mathscr{E})) = 0$ for $\deg p = k > \operatorname{corank} \mathscr{W}$.*

Proof. Following an idea of Sommese, consider the induced exact sequence of locally free sheaves

$$0 \to \operatorname{Hom}(E, E) \otimes \mathscr{F} \to \operatorname{Hom}(\mathscr{E}, \mathscr{E}) \otimes \Omega^1 \to \operatorname{Hom}(E, E) \otimes \mathscr{W} \to 0 .$$

Considering the H^1-level of the cohomology exact sequence one sees that V-equivariance implies $c(\mathscr{E}) \in H^1(X, \operatorname{Hom}(\mathscr{E}, \mathscr{E}) \otimes \mathscr{F})$. Hence $c(\mathscr{E})^{\otimes k} = 0$ if $k > \operatorname{rank} \mathscr{F}$.

Proposition 5.1, which is valid in all generality, explains in our context the foliation vanishing theorem of Bott [4] since, if $\mathscr{F}$ generates an ideal in $\Omega^{\cdot}$ closed under d, then $Q = \mathscr{F}^*$ is equivariant (see Section 1).

Proposition 5.2. *Suppose $i(V)$: $\Omega^1 \to \mathscr{W}$ is surjective and that X admits a line bundle $\mathscr{L}$ such that $c_1(\mathscr{L})^k \neq 0$ for some $k > \operatorname{corank} \mathscr{W}$. Then $H^1(X, \mathscr{W}) \neq 0$.*

Proof. If $H^1(X, \mathscr{W}) = 0$, then $\mathscr{L}$ is equivariant so Proposition 5.1 applies giving a contradiction.

§ 6. Coherent Sheaves, Equivariant Complexes

For general $\mathcal{O}_X$-modules $\mathscr{E}$, there are both local and global obstructions to equivariance. Denoting by $J^1(\mathscr{E})$ the $\mathscr{E}$-valued one jets, one has an exact sequence (see [1])

$$0 \to \Omega^1 \otimes \mathscr{E} \to J^1(\mathscr{E}) \to \mathscr{E} \to 0 . \tag{6.1}$$

The equivariance of $\mathscr{E}$ is equivalent to the existence of a linear map $J^1(\mathscr{E}) \to \mathscr{E}$ extending the map $i(V) \otimes 1$: $\Omega^1 \otimes \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ and hence is obstructed by an element $\delta(V)$ of global $\operatorname{Ext}^1(\mathscr{E}, \mathscr{E})$. The obstruction to splitting (6.1) is the generalized Atiyah class $c(\mathscr{E}) \in \operatorname{Ext}^1(\mathscr{E}, \Omega^1 \otimes \mathscr{E})$ and one obtains $i(V)\, c(\mathscr{E}) = \delta(V)$ under the natural map $i(V)$: $\operatorname{Ext}^1(\mathscr{E}, \Omega^1 \otimes \mathscr{E}) \to \operatorname{Ext}^1(\mathscr{E}, \mathscr{E})$.

To be more explicit, assume

$$0 \to \mathscr{F}^{-n} \xrightarrow{\lambda} \mathscr{F}^{-n+1} \to \dots \to \dots \xrightarrow{\lambda} \mathscr{F}^0 \to \mathscr{E} \to 0 \tag{6.2}$$

is a global resolution of the coherent sheaf $\mathscr{E}$ by locally free $\mathscr{F}$. Then the Atiyah obstruction may be calculated in the following manner. Fix a Leray covering $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}$ such that $\mathscr{F}^i$ is free on U_α. Fix local connexions d_α^i for $\mathscr{F}^i$ on U_α. Denote by $\operatorname{Hom}^{\cdot}(\mathscr{F}, \mathscr{F})$ the complex of sheaves with $\operatorname{Hom}^p(\mathscr{F}, \mathscr{F})$ the $\mathcal{O}_X$-linear maps

$\mathscr{F}^i \to \mathscr{F}^{i+p}$ and with differential D: $\mathrm{Hom}^p \to \mathrm{Hom}^{p+1}$ defined by $D(\Phi) = \lambda \cdot \Phi + (-1)^p \Phi \cdot \lambda$ where λ denotes the differential in $\mathscr{F}^{\cdot}$. Note that

$$\begin{aligned} &d^i_\alpha \cdot \lambda - \lambda \cdot d^{i-1}_\alpha \in C^0(\mathscr{U}, \mathrm{Hom}^1(\mathscr{F}, \mathscr{F}) \otimes \Omega^1) \\ &d^i_\beta - d^i_\alpha \in C^1(\mathscr{U}, \mathrm{Hom}^0(\mathscr{F}, \mathscr{F}) \otimes \Omega^1) \end{aligned} \tag{6.3}$$

define a 1-cocycle θ in the complex

$$C(\mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{F}) \otimes \Omega^1) = \bigoplus_{r+s=\cdot} C^r(\mathscr{U}, \mathrm{Hom}^s(\mathscr{F}, \mathscr{F}) \otimes \Omega^1) \tag{6.4}$$

in which the differential $C^r(\mathrm{Hom}^s) \to C^{r+1}(\mathrm{Hom}^s) \oplus C^r(\mathrm{Hom}^{s+1})$ is given by $\delta + (-1)^r D$. One checks easily that $\mathscr{E}$ has a connexion if and only if θ cobounds. In fact, the cohomology of the complex (6.4) is simply $\mathrm{Ext}^1(\mathscr{E}, \mathscr{E} \otimes \Omega^1)$ and θ represents the Atiyah class.

Given a vector field V, the obstruction to V-equivariance may be similarly calculated and is in fact the image of θ under

$$i(V): C(\mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{F}) \otimes \Omega^1) \to C(\mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{F})).$$

Assuming that $\mathscr{E}$ is V-equivariant, we obtain an element $L \in C^0(\mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{F}))$ whose total (δ, D) coboundary is $i(V)\theta$, and $\theta + L$ is therefore a total cocycle in the double complex

$$K^r(\mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{F})) = \bigoplus_{p-q=r} C^p(\mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{F}) \otimes \Omega^q)$$

in which the differential is $\delta \pm D$ in the p direction and $i(V)$ in the q direction. To define Chern numbers (or classes), one must give maps of *complexes* of sheaves $\otimes^p \mathrm{Hom}^{\cdot}(\mathscr{F}, \mathscr{F}) \to \mathcal{O}_X$ where $\otimes^p$ comes equipped with differential

$$D \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1 + \ldots + 1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes D$$

and $\mathcal{O}_X$ is viewed as a complex concentrated in degree zero, i.e. maps are admissable if and only if they send boundaries in $\otimes^p \mathrm{Hom}^{\cdot}(\mathscr{F}, \mathscr{F})$ to zero. Note that when $p=1$, the boundaries in $\mathrm{Hom}^{\cdot}(\mathscr{F}, \mathscr{F})$ are the maps homotopic to zero hence admissable maps kill homotopies. As an example, the alternating sum of traces for $\Phi \in \mathrm{Hom}^0(\mathscr{F}, \mathscr{F})$ is admissable. One may calculate the Chern numbers of $\mathscr{E}$, i.e. the virtual Chern numbers of the complex $0 \to \mathscr{F}^{-n} \to \ldots \to \mathscr{F}^0 \to 0$ in the hypercohomology of the Koszul complex (2.1) associated to V by applying suitable admissable polynomials. Determination of these numbers on Z follows from our earlier remarks. This applies equally to the meromorphic case.

Note moreover that given any complex of locally free sheaves

$$\ldots \to \mathscr{L}^i \to \mathscr{L}^{i+1} \to \ldots$$

with $\mathscr{L}^i = 0$ for $|i|$ sufficiently great, one could define V-equivariance of $\mathscr{L}^{\cdot}$ by requiring that if θ is the cocycle defined as in (6.2) then $i(V)\theta$ cobounds and one may calculate Chern numbers of $\mathscr{L}^{\cdot}$ (or Chern classes if $Z \neq \emptyset$) by calculations on Z. N.B. The individual $\mathscr{L}^i$ need not be equivariant and their Chern numbers need not be calculable on Z in a natural way.

References

1. Atiyah, M. F.: Complex analytic connections in fibre bundles. Trans. Amer. Math. Soc. **85**, 181—207 (1957)
2. Atiyah, M. F., Singer, I.: The index of elliptic operators. III. Ann. Math. **87**, 546—604 (1968)
3. Bott, R.: Vector fields and characteristic numbers. Mich. Math. J. **14**, 231—244 (1967)
4. Bott, R.: On a topological obstruction to integrability. Proc. Sympos. Pure Math. **XVI**, AMS, 127—132 (1970)
5. Baum, P., Bott, R.: On the zeros of meromorphic vector fields. Essays on Topology and related topics (*Memoires dedies a Georges de Rham*), pp. 29—47. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1970
6. Baum, P., Bott, R.: Singularities of Holomorphic foliations. J. Diff. Geom. **7**, 279—342 (1972)
7. Carrell, J., Lieberman, D.: Holomorphic vector fields and Kaehler manifolds. Inventiones Math. **21**, 303—309
8. Hartshorne, R.: Residues and duality. Lecture notes in mathematics. No. 20. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1966
9. Verdier, J. L.: Base change for twisted inverse image of coherent sheaves. Algebraic geometry (Internat. Colloq., Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1968), pp. 393—408. London: Oxford University Press 1969

Received October 2, 1975, and in revised form June 8, 1976

Math. Ann. 225, 275—292 (1977)

Pseudoconvex Domains: An Example with Nontrivial Nebenhülle

Klas Diederich
Mathematisches Institut, Universität Münster, Roxeler Str. 64, D-4400 Münster, Federal Republic of Germany

John Erik Fornaess
Department of Mathematics, Princeton University, Fine Hall-Box 37, Princeton, NJ 08540, USA

Introduction

Let $\Omega = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z| < |w| < 1\}$ be the Hartogs triangle. The intersection of all domains of holomorphy in $\mathbb{C}^2$ containing $\bar{\Omega}$ is the closed unit dicylinder. In 1933, Behnke and Thullen used this example to characterize a large class of domains of holomorphy, the closure of which is not the intersection of domains of holomorphy (see [1]). The boundaries of these domains are not smooth and it has been an open question at least since that time, whether smoothness of the boundary of a bounded pseudoconvex domain Ω guarantees the existence of a Stein neighborhood basis for $\bar{\Omega}$. (For some more details with respect to this question see also the introduction of [6].)

It is the purpose of this paper to present a family of bounded pseudoconvex domains Ω_r, $r > 1$, with smooth boundaries, for which $\bar{\Omega}_r$, r large enough, is not the intersection of Stein domains. The results of the paper were announced in [5].

The family was constructed to get examples for this phenomenon. But once it was at the disposal it seemed to be useful to test also several other question about pseudoconvex domains in the case of the concrete domains Ω_r for which the answer is not known in general.

The set-up of the paper is as follows: The family of domains Ω_r and their nebenhülle is discussed in §1. Function algebraic properties of Ω_r are derived in §2. In §3 defining functions for Ω_r are studied and it is shown that bounded strictly plurisubharmonic exhaustion functions on Ω_r cannot be Hölder continuous at $b\Omega_r$ with exponents close to 1. This means that the global exhaustion functions constructed by the authors in [6] are in general best possible with respect to their boundary behavior. In §4 it is proved that smooth image domains of Ω_r under biholomorphic mappings which extend to diffeomorphisms on $\bar{\Omega}_r$ again have a nontrivial nebenhülle. Finally, in §5 we prove that for certain weakly pseudoconvex domains $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^2$ with smooth boundaries $\bar{\Omega}$ has a Stein neighborhood basis. This latter question will also be studied for a different class of domains in [7].

§ 1. The Domains Ω_r and their Nebenhülle

1.1 *Definition of* Ω_r. We fix a C^∞-function $\lambda: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ with the following properties:

a) $\lambda(x)=0$ if $x \leqq 0$
b) $\lambda(x)>1$ if $x>1$
c) $\lambda''(x) \geqq 100\lambda'(x)$ for all x
d) $\lambda''(x)>0$ if $x>0$
e) $\lambda'(x)>100$ if $\lambda(x)>\frac{1}{2}$.

(Such a function obviously exists.)

Now, we define for any $r>1$ the function

$$\varrho_r: \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$$

by the formula

$$\varrho_r(z,w)=|w+\exp(i \ln z\bar{z})|^2 - 1 + \lambda\left(\frac{1}{|z|^2}-1\right) + \lambda(|z|^2-r^2) \tag{1}$$

and we put

$$\Omega_r = \{(z,w) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \,|\, \varrho_r(z,w)<0\}. \tag{2}$$

How do these domains Ω_r look like? Notice at first, that the function ϱ_r does only depend on $|z|$ and w. Therefore, Ω_r is invariant under the transformations

$$z \mapsto e^{i\Theta} z, \quad w \mapsto w, \quad (\Theta \in \mathbb{R})$$

i.e., Ω_r is a *Hartogs domain* with symmetry plane $\{z=0\}$, which is not proper (see f.i. [2]). One can visualize Ω_r in $\mathbb{R}^3 = \{(|z|, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}\}$ in the following way:

Fix a point z_0 with $1 \leqq |z_0| \leqq r$. Then one has because of property a) of λ

$$\Omega_r(z_0) = \Omega_r \cap \{z=z_0\} = \{(z_0, w) \,|\, |w+\exp(i \ln z_0 \bar{z}_0)|<1\},$$

showing that $\Omega_r(z_0)$ is the disc in the plane $\{z=z_0\}$ with center $w_0 = -\exp(i \ln z_0 \bar{z}_0)$ on the unit circle and radius 1.

As $|z_0|$ varies between 1 and r, the projection of this center into the plane $\{z=0\}$ moves on the unit circle starting at $w_0=-1$ and covering it at least k times if $r > \exp k\pi$. Therefore the disc $\Omega_r(z_0)$ spirals around $\{w=0\}$ as $|z_0|$ varies between 1 and r. This picture remains even the same for $|z_0|<1$ and $|z_0|>r$ with the only change, that the radius of the disc $\Omega_r(z_0)$ shrinks to

$$1-\lambda\left(\frac{1}{|z_0|^2}-1\right) - \lambda(|z_0|^2-r^2),$$

because one of the terms involving λ now becomes strictly positive. Furthermore, property b) of λ shows that $\Omega_r(z_0)=\emptyset$ for $|z_0| \geqq (r^2+1)^{1/2}$ and for $|z_0| \leqq \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Consequently, one has

$$\bar{\Omega}_r \subset \{(z,w) \,|\, |w| \leqq 2, \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \leqq |z_0| \leqq (r^2+1)^{1/2}\}. \tag{3}$$

1.2 *Elementary Properties of* Ω_r. We show now:

Proposition 1. *For each fixed* $r>1, \Omega_r$ *is a bounded pseudoconvex domain in* $\mathbb{C}^2$ *with* C^∞*-boundary; one has* $d\varrho_r \neq 0$ *on* $b\Omega_r$. *Furthermore,* $b\Omega_r$ *fails to be strictly pseudoconvex precisely on the set*

$$M=M_r=\{(z,w)|1\leqq|z|\leqq r \quad \text{and} \quad w=0\}.$$

Proof. 1) We calculate at first all needed derivatives of ϱ_r and get

$$\frac{\partial\varrho_r}{\partial z}=\frac{i\bar{w}}{z}\exp(i\ln|z|^2)-\frac{iw}{z}\exp(-i\ln|z|^2)-\frac{1}{z^2\bar{z}}\lambda'\left(\frac{1}{|z|^2}-1\right)+\bar{z}\lambda'(|z|^2-r^2) \tag{4}$$

$$\frac{\partial\varrho_r}{\partial w}=\bar{w}+\exp(-i\ln|z|^2) \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\varrho_r}{\partial z\partial\bar{z}}=&-\frac{\bar{w}}{|z|^2}\exp(i\ln|z|^2)-\frac{w}{|z|^2}\exp(-i\ln|z|^2)+\frac{1}{|z|^6}\lambda''\left(\frac{1}{|z|^2}-1\right)\\&+\frac{1}{|z|^4}\lambda'\left(\frac{1}{|z|^2}-1\right)+|z|^2\lambda''(|z|^2-r^2)+\lambda'(|z|^2-r^2)\end{aligned} \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2\varrho_r}{\partial z\partial\bar{w}}=\frac{i}{z}\exp(i\ln|z|^2) \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2\varrho_r}{\partial w\partial\bar{w}}=1. \tag{8}$$

2) We assume that a point $(z_0,w_0)\in b\Omega_r$ exists with $d\varrho(z_0,w_0)=0$. Then

$$\frac{\partial\varrho(z_0,w_0)}{\partial z}=\frac{\partial\varrho(z_0,w_0)}{\partial w}=0.$$

Consequently, (5) gives $w_0=-\exp(i\ln|z|^2)$ and, because of $\varrho_r(z_0,w_0)=0$, we get

$$\lambda\left(\frac{1}{|z|^2}-1\right)+\lambda(|z|^2-r^2)=1. \tag{9}$$

This shows, that the only possibilities are

(i) $|z_0|\in(\frac{1}{2}\sqrt{2},1)$ or

(i) $|z_0|\in(r,(r^2+1)^{1/2})$.

In the first case, we have because of (4)

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varrho}{\partial z}(z_0,w_0)&=\frac{i\bar{w}_0}{z_0}\exp(i\ln|z_0|^2)-\frac{iw_0}{z_0}\exp(-i\ln|z_0|^2)-\frac{1}{z_0^2\bar{z}_0}\lambda'\left(\frac{1}{|z_0|^2}-1\right)\\&=-\frac{1}{z_0|z_0|^2}\lambda'\left(\frac{1}{|z_0|^2}-1\right).\end{aligned}$$

Together with property e) of λ and (9), this gives

$$\left|\frac{\partial\varrho}{\partial z}(z_0,w_0)\right|\geqq\left|\lambda'\left(\frac{1}{|z_0|^2}-1\right)\right|>100$$

in contradiction to the assumption $d\varrho_r(z_0,w_0)=0$.

In the second case we obtain in the same way the contradiction:

$$\left|\frac{\partial\varrho}{\partial z}(z_0, w_0)\right| = |\bar{z}_0\lambda'(|z|^2-r^2)| \geqq 100r > 0.$$

3) We now have to calculate the Leviform of $\varrho = \varrho_r$, r fixed, on $b\Omega_r$. For this purpose, we observe at first that (6) can be rearranged for points on $b\Omega_r$ to give

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\varrho}{\partial z\partial\bar{z}} &= \frac{1}{|z|^2}\left[\lambda\left(\frac{1}{|z|^2}-1\right)+\lambda(|z|^2-r^2)+|w|^2\right]+\frac{1}{|z|^6}\lambda''\left(\frac{1}{|z|^2}-1\right)\\ &\quad+\frac{1}{|z|^4}\lambda'\left(\frac{1}{|z|^2}-1\right)+|z|^2\lambda''(|z|^2-r^2)+\lambda'(|z|^2-r^2). \qquad (10)\end{aligned}$$

The dimension of the holomorphic tangent space $T^q_{10}b\Omega_r$ at $q=(z,w)\in b\Omega_r$ being 1 it is enough to calculate the value of the Leviform $\mathcal{L}_\varrho(q;\cdot)$ on the vector

$$T_q = -\frac{\partial\varrho(z,w)}{\partial w}\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial\varrho(z,w)}{\partial z}\frac{\partial}{\partial w}.$$

By using the expressions (4), (5), (7), (8), (10), we get after a simple, but tedious calculation, which can be dropped here:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_\varrho(q;T_q)\\ &= \left\{\frac{1}{|z|^2}\left(\lambda\left(\frac{1}{|z|^2}-1\right)+\lambda(|z|^2-r^2)+|w|^2\right)+\frac{1}{|z|^6}\lambda''\left(\frac{1}{|z|^2}-1\right)\right.\\ &\quad\left.+\frac{1}{|z|^4}\lambda'\left(\frac{1}{|z|^2}-1\right)+|z|^2\lambda''(|z|^2-r^2)+\lambda'(|z|^2-r^2)\right\}\\ &\quad\cdot|w+\exp(i\ln|z|^2)|^2+\frac{1}{|z|^6}\left[\lambda'\left(\frac{1}{|z|^2}-1\right)\right]^2+|z|^2[\lambda'(|z|^2-r^2)]^2\\ &\quad+2\,\mathrm{Re}\left[i\bar{w}\exp(i\ln|z|^2)\left(\lambda'(|z|^2-r^2)-\frac{1}{|z|^4}\lambda'\left(\frac{1}{|z|^2}-1\right)\right)\right]. \qquad (11)\end{aligned}$$

4) To check whether $\mathcal{L}_\varrho(q;T_q)$ is nonnegative resp. strictly positive, we have to distinguish between different cases for the position of $q=(z,w)\in b\Omega_r$:

a) $1\leqq|z|\leqq r$. In this case (11) reduces to $\mathcal{L}=\frac{|w|^2}{|z|^2}|w+\exp(i\ln|z|^2)|^2$. Furthermore, we have

$$\varrho(z,w)=|w+\exp(i\ln|z|^2)|^2-1=0.$$

Hence one has $\mathcal{L}(q;T_q)>0$ if $q=(z,w)$ with $w\neq0$ and $\mathcal{L}(q;T_q)=0$ otherwise, i.e., if $q\in M$.

b) $\frac{1}{2}\sqrt{2}\leqq|z|<1$. We assume at first that

$$|w+\exp(i\ln|z|^2)|^2\geqq\tfrac{1}{2}.$$

Notice that only the term $2\,\mathrm{Re}[\ldots]$ in (11) can be negative. Therefore we can estimate $\mathcal{L}$ by using property c) of λ and the fact that $|w|\leqq2$ as follows:

$$\mathcal{L}(q;T_q)\geqq\frac{1}{2}\lambda''\left(\frac{1}{|z|^2}-1\right)-16\lambda'\left(\frac{1}{|z|^2}-1\right)\geqq34\lambda'\left(\frac{1}{|z|^2}-1\right)>0.$$

We still have to take into account the possibility

$$|w+\exp(i\ln|z|^2)|^2<\tfrac{1}{2}.$$

This implies, since $\varrho(z,w)=0$, that $\lambda\left(\frac{1}{|z|^2}-1\right)>\frac{1}{2}$. Therefore, we get with e) of λ

$$\mathcal{L}(q;T_q)\geqq\left(\lambda'\left(\frac{1}{|z|^2}-1\right)\right)^2-16\lambda'\left(\frac{1}{|z|^2}-1\right)\geqq 8400>0.$$

Finally we have to consider

c) $r^2<|z|^2\leqq r^2+1$. Again, we assume at first that

$$|w+\exp(i\ln|z|^2)|^2\geqq\tfrac{1}{2}.$$

Then we get from (11) together with property c) of λ and because $r>1$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(q;T_q)&\geqq\tfrac{1}{2}r^2\lambda''(|z|^2-r^2)-4\lambda'(|z|^2-r^2)\\&\geqq 50\lambda'(|z|^2-r^2)-4\lambda'(|z|^2-r^2)>0.\end{aligned}$$

In case we have $|w-\exp(i\ln|z|^2)|<\frac{1}{2}$, we must have $\lambda(|z|^2-r^2)>\frac{1}{2}$, because $\varrho(z,w)=0$, and hence we get from (11) and property e) of λ

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(q;T_q)&\geqq r^2[\lambda'(|z|^2-r^2)]^2-4\lambda'(|z|^2-r^2)\\&\geqq\lambda'(|z|^2-r^2)[\lambda'(|z|^2-r^2)-4]\geqq 9600>0.\end{aligned}$$

This proves Proposition 1. □

1.3. *The Nebenhülle of Ω_r.* The following is a slight modification of a definition contained in [1] (see also [2]):

Definition 1. Let $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ be a domain of holomorphy. The interior of the intersection of all domains of holomorphy $\hat{\Omega}\subset\mathbb{C}^n$ with $\bar{\Omega}\subset\hat{\Omega}$ is called *Nebenhülle of* Ω and denoted by $\mathcal{N}(\Omega)$. If the difference $\mathcal{N}(\Omega)\setminus\Omega$ has interior points, then Ω is said to have a *nontrivial Nebenhülle.*

Remarks. a) For the unit ball $\Omega_1\subset\mathbb{C}^n$, one obviously has $\mathcal{N}(\Omega_1)=\Omega_1$.

b) If we take $\Omega_2=\Omega_1\setminus\{(z^1,\dots,z^n)\in\mathbb{C}^n|z^1=0\}$, we get $\mathcal{N}(\Omega_2)=\Omega_1$, i.e., $\mathcal{N}(\Omega_2)\supsetneqq\Omega_1$, but nevertheless, Ω_2 does not have a nontrivial Nebenhülle.

c) A pseudoconvex domain Ω does not have a nontrivial Nebenhülle if $\bar{\Omega}$ has a neighborhood basis consisting of Stein domains.

We now show:

Theorem 1. *Let $r>e^{3\pi}$. Every function holomorphic in a neighborhood of $\bar{\Omega}_r$ extends to a function holomorphic in a neighborhood of $\bar{\Omega}_r\cup K$ with*

$$K=\{(z,w)|e^{\pi}\mp|z|\mp e^{2\pi}\quad\text{and}\quad|w|\leqq 2\}.$$

In particular $\Omega_r\cup\mathring{K}\subset\mathcal{N}(\Omega_r)$, i.e., Ω_r has a nontrivial Nebenhülle.

Proof. 1) Let a be any number with $1\leqq a\leqq e^{\pi}$ and put $b=e^{2\pi}a$. Then one has $e^{2\pi}\leqq b\leqq e^{3\pi}$ and $\exp(i\ln b^2)=\exp(4\pi i+i\ln a^2)=\exp(i\ln a^2)$. Furthermore, according to the definition of Ω_r, we get

$$\Delta_a = \{(z, w) | \, |z| = a, \, |w + \exp(i \ln a^2)| \leqq 1\} \subset \bar{\Omega}_r$$

$$\Delta_b = \{(z, w) | \, |z| = b, \, |w + \exp(i \ln b^2)| \leqq 1\} \subset \bar{\Omega}_r$$

$$M_a = \{(z, w) | \, a \leqq |z| \leqq b, \, w = 0\} \subset M_r \subset b\Omega_r \, .$$

Consequently, any function f holomorphic in a neighborhood of $\bar{\Omega}_r$ is holomorphic in a neighborhood of the set $\Delta_a \cup \Delta_b \cup M_a$. By Hartogs theorem it can therefore be extended to a function holomorphic in a neighborhood of

$$\bar{\Omega} \cup \{(z, w) | a \leqq |z| \leqq e^{2\pi} a, \, |w + \exp(i \ln a^2)| \leqq 1\} \, . \tag{12}$$

2) If a in 1) runs between 1 and e^{π}, then $\exp(i \ln a^2)$ describes the full unit circle. Therefore one can find for any point w with $|w| \leqq 2$ a value a, $1 \leqq a \leqq e^{\pi}$, such that $|w + \exp(i \ln a^2)| \leqq 1$. And for all these a one has $[e^{\pi}, e^{2\pi}] \subset [a, e^{2\pi} a]$.

This shows that any point $(z, w) \in K$ belongs to at least one of the sets described in (12), such that any function $f \in H(\bar{\Omega}_r)$ can be holomorphically extended to $\bar{\Omega}_r \cup K$. Moreover, the point $(z, w) = (\exp \frac{3}{2}\pi, -1)$ obviously belongs to $\mathring{K}$, but not to $\bar{\Omega}_r$. $\square$

§ 2. Function Algebraic Properties of the Domains Ω_r

2.1. *Approximation.* We write $H(\bar{\Omega})$ for the algebra of holomorphic functions on $\bar{\Omega}$ and $A^k(\bar{\Omega}) = \mathcal{O}(\Omega) \cap C^k(\bar{\Omega})$, $1 \leqq k \leqq \infty$. It has been conjectured (see f.i. R. O. Wells [14]), that the analogue of the Mergelyan theorem holds for any bounded pseudoconvex domain Ω with smooth boundary in $\mathbb{C}^n$, i.e., that the algebra $H(\bar{\Omega})$ is dense in $A^0(\bar{\Omega})$ with respect to the sup-norm on $\bar{\Omega}$. But there are some indications saying that there might be an intimate connection between the existence of a Stein neighborhood basis of $\bar{\Omega}$ and Mergelyan's theorem. Therefore, one should ask, whether also this approximation theorem does not hold for the domains Ω_r. It turns out that one can easily prove even a little bit more:

Theorem 2. *Let r be any fixed number* $\geqq \exp(3\pi)$. *The algebra $H(\bar{\Omega}_r)$ is not dense in $A^{\infty}(\Omega)$ with respect to the* sup-*norm on $\bar{\Omega}_r$.*

Proof. 1) If $|z|$ varies between $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ and $(r^2 + 1)^{1/2}$, then the disc which is the projection of $\Omega_r(z)$ into the w-plane $\{z = 0\}$ turns around $w = 0$ a finite number of times. Therefore, there is a positive integer $s(r)$, such that for all integers $s > s(r)$ a function g_s continuous on $\bar{\Omega}_r$ and holomorphic on Ω_r exists, which satisfies on Ω_r the equality

$$g_s^s(z, w) \equiv w \, . \tag{13}$$

Furthermore, because $(z_0, w_0) = \left(\exp \frac{\pi}{2}, 1\right) \in \Omega_r$, we can choose an $s > s(r)$ so large and a function $g = g_s$ satisfying (13), such that

a) $g(z_0, w_0) = 1$;

b) $\operatorname{Re} g(z, w) > 0$ for $(z, w) \in \Omega_r$;

c) $|\operatorname{Im} g(z, w)| \leqq \operatorname{Re} g(z, w)$ on $\bar{\Omega}_r$.

It is now an easy exercise to check that for such a function g the function

$$h(z,w)=\begin{cases}\exp\left(-\dfrac{1}{g(z,w)}\right) & \text{for } (z,w)\in\Omega_r\setminus M\\ 0 & \text{for } (z,w)\in M\end{cases}$$

is holomorphic in Ω_r and C^∞ on $\bar{\Omega}_r$ with all derivatives vanishing on M.

2) We claim that any function $h\in A^\infty(\Omega_r)$ as constructed in 1) cannot be approximated uniformly on $\bar{\Omega}_r$ by functions on $\bar{\Omega}_r$. To see this, we use the following consequence of a well-known theorem (see [2], p. 132): Since all functions $f\in H(\bar{\Omega}_r)$ are extendable to a holomorphic function $\hat{f}$ on $\bar{\Omega}_r\cup K$ (Theorem 1), we have

$$\|f\|_{\bar{\Omega}_r}=\|\hat{f}\|_{\bar{\Omega}_r\cup K}\quad\text{for all}\quad f\in H(\bar{\Omega}_r).$$

Therefore, for any sequence $(f_k)\subset H(\bar{\Omega}_r)$ approximating a function $h\in A^\infty(\Omega)$ as constructed in 1) uniformly on $\bar{\Omega}_r$, the sequence $(\hat{f}_k)$ of holomorphic extensions to $\bar{\Omega}_r\cup K$ would converge uniformly on $\bar{\Omega}_r\cup K$ to a function $\hat{h}$, which, consequently, would be a holomorphic extension of h to $\Omega_r\cup\mathring{K}$. But f.i. the point $(z_0,w_0)=(\exp\frac{3}{2}\pi,0)\in M$ obviously belongs to K and all derivatives of h vanish at (z_0,w_0), such that h cannot be extended holomorphically into a neighborhood of (z_0,w_0). This is a contradiction. □

2.2. *Peak Sets and Šilov Boundaries.* The questions, what the peak points, peak sets and Šilov boundaries of various algebras of holomorphic functions on pseudoconvex domains are, have been investigated in many papers (see f.i. [3, 4, 8, 11, 12]). (For the definitions see f.i. [13].) The domains Ω_r have some interesting properties with respect to these questions, which we want to exhibit now. We assume always that $r\geqq\exp 3\pi$.

For any domain $\Omega\subset\subset\mathbb{C}^n$ we denote by $\bar{H}(\bar{\Omega})$ the closure with respect to the sup-norm on $\bar{\Omega}_r$ of the algebra $H(\bar{\Omega})$ in $C(\bar{\Omega})$. Then we have $\bar{H}(\bar{\Omega})\subset A^0(\Omega)$ and, according to Theorem 2, $\bar{H}(\bar{\Omega}_r)\neq A^0(\bar{\Omega}_r)$. Furthermore, we have already seen in the proof of Theorem 2 that $\bar{H}(\bar{\Omega}_r)$ can be considered as an algebra of holomorphic functions on

$$\hat{\Omega}_r=\Omega_r\cup\{(z,w)\mid |w|<2,\ e^\pi<|z|<e^{2\pi}\},$$

which extend continuously to $\bar{\hat{\Omega}}_r$. One has

$$\|f\|_{\bar{\Omega}_r}=\|f\|_{\bar{\hat{\Omega}}_r}\quad\text{for all}\quad f\in\bar{H}(\bar{\Omega}_r).\tag{14}$$

By $\bar{A}^k(\Omega)$, $1\neq k<\infty$, we denote the closure of $A^k(\Omega)$ in $C(\bar{\Omega})$ with respect to $\|\ \|_{\bar{\Omega}}$.

If $A\subset C(\bar{\Omega})$ is a uniformly closed subalgebra, we denote by $\check{S}(A)$ the Šilov boundary of A. If Ω has a C^2-boundary, $SP(\Omega)$ means the set of points on $b\Omega$, where $b\Omega$ is strictly pseudoconvex.

The following was proved by Rossi [12]:

Proposition. *If $\Omega\subset\subset\mathbb{C}^n$ is a pseudoconvex domain with C^2-boundary, such that $\bar{\Omega}$ has a Stein neighborhood basis, then $\check{S}(\bar{H}(\bar{\Omega}))=\overline{SP(\Omega)}$.*

Pflug solved in [5] the same problem for the larger algebras $A^k(\bar{\Omega})$. He showed:

Proposition. *Let $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ be a pseudoconvex domain with C^∞-boundary. Then any point $p \in \overline{SP(\Omega)}$ is a peak point of each algebra $\overline{A^k}(\Omega)$, $1 \leqq k \leqq \infty$. In particular, $\check{S}(\overline{A^k}(\Omega)) = \overline{SP(\Omega)}$ for all $1 \leqq k \leqq \infty$.*

Remarks. 1) Pflug states the proposition only for $k < \infty$, because in the proof he uses the results of Kohn [9]. Meanwhile, these results are generalized ([10]) in such a way, that the case $k = \infty$ can be included.

2) Notice, that in the last proposition $\bar{\Omega}$ is not required to have a Stein neighborhood basis. Pflug asks in [11], whether this supposition can also be dropped in the theorem of Rossi. This is not true, because we have the following immediate consequence of Theorem 1:

Theorem 3. *If for a function $f \in \bar{H}(\bar{\Omega}_r)$ and a point $p = (z, w) \in b\Omega_r$ with $e^\pi < |z| < e^{2\pi}$, $|w| < 2$ the equality $|f(p)| = \|f\|_{\bar{\Omega}_r}$ holds, f is constant. In particular no such point can be a peak point of $\bar{H}(\bar{\Omega}_r)$ and $\check{S}(\bar{H}(\bar{\Omega}_r)) \underset{\neq}{\subset} b\Omega_r = \overline{SP(\Omega_r)}$.*

Proof. The points mentioned in the theorem are exactly those lying in $b\Omega_r \cap \hat{\Omega}_r$. Therefore and because of (14) any function $f \in \bar{H}(\bar{\Omega}_r)$ with $|f(p)| = \|f\|_{\bar{\Omega}_r}$ for such a point p must be constant and cannot peak at p. Since the Silov boundary is the closure of the peak points and $b\Omega_r \cap \hat{\Omega}_r \neq \emptyset$ is open in $b\Omega_r$, this also implies the last statement of the theorem.

We now want to study the behavior of the functions in the considered algebras on the set of degeneracy $M_r \subset b\Omega_r$. For this purpose we notice at first that the restriction of any function $f \in A^0(\Omega)$ to the complex manifold $\mathring{M}_r = \{(z, w) | 1 < |z| < r, w = 0\} \subset b\Omega_r$ is holomorphic. Consequently, any $f \in A^0(\Omega_r)$ assuming its maximum value at a point $(z, 0) \in \mathring{M}_r$ must be constant on M_r. It is therefore reasonable to ask, whether M_r can be the exact peak set of such functions f.

Theorem 4. *The set M_r is a peak set of the algebra $A^0(\Omega_r)$, but for every given real number $k > 0$ there is a number $r(k)$ such that for $r > r(k)$ the set M_r is not a peak set of $A^k(\Omega_r)$.*

Proof. 1) As in the proof of Theorem 2 we choose for a fixed r an integer $s = s(r)$ so large that there is a function $g \in A^0(\Omega_r)$ with the following properties

a) $g^s(z, w) = w$ on $\bar{\Omega}_r$;

b) $\mathrm{Re}\, g(z, w) > 0$ on $\bar{\Omega}_r \setminus M_r$.

Then the function $f = \exp(-g) \in A^0(\Omega_r)$ obviously satisfies $f(q) = 1$ for $q \in M_r$ and $|f(q)| < 1$ for $q \in \bar{\Omega}_r \setminus M_r$.

2) Let $k > 0$ be fixed and assume that M_r is a peak set of $A^k(\Omega_r)$ for a certain $r > 0$. We want to show that r has to be small. For this purpose we obviously may assume that $k < 1$. Choose a function $f \in A^k(\Omega_r)$ peaking on M_r, i.e. satisfying $f | M_r \equiv 1$ and $|f(q)| < 1$ for $q \in \bar{\Omega}_r \setminus M_r$. We use at first the fact that Ω_r is a Hartogs domain by defining the new function

$$\hat{f}(z, w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\Theta} z, w) d\Theta, \quad (z, w) \in \bar{\Omega}_r .$$

Then $\hat{f}$ has the same properties as f, but since it depends only on $|z|$ and is holomorphic in Ω_r, it is locally constant in z. Therefore, $\hat{f}$ can be interpreted as a holomorphic function on the subdomain of the Riemann surface of the logarithm, which lies over the punctured disc of radius 2 in the w-plane between the arguments 0 and $2\ln r$. Since $\hat{f}\in A^k(\bar{\Omega}_r)$, and $\hat{f}|M_r\equiv 1$ there is a constant $M>0$ such that

$$|\hat{f}(q)-1|\leqq M|w(q)|^k. \tag{15}$$

We introduce a new variable by

$$\zeta=\xi+i\eta=\log w$$

and a new function by

$$g(\zeta)=\log(\hat{f}(w(\zeta))-1). \tag{16}$$

This is possible since $\hat{f}-1$ has its values in the disc of radius 1 and center -1. We choose the complex logarithm in (16) in such a way that we have for $g=u+iv$

$$-\frac{\pi}{2}\leqq v\leqq\frac{\pi}{2}.$$

The function g is holomorphic on the stripe

$$S=\{\xi=\xi+i\eta|-\infty<\xi<\log 2, 0<\eta<2\log r\}$$

and continuous on $\bar{S}$. Because of (15) we have

$$u(\xi,\eta)\leqq c_1+k\xi$$

with a certain constant c_1.

Let now $\varepsilon>0$ small enough be given and put $\eta_\varepsilon=2\log r-\varepsilon$. We estimate for arbitrary $\xi<0$ the integral

$$\begin{aligned}\int_\xi^0(v(\tau,\eta_\varepsilon)-v(\tau,\varepsilon))d\tau&=\int_\xi^0\int_\varepsilon^{\eta_\varepsilon}\frac{\partial v(\tau,\sigma)}{\partial\eta}d\sigma d\tau=\int_\varepsilon^{\eta_\varepsilon}\int_\xi^0\frac{\partial u(\tau,\sigma)}{\partial\xi}d\tau d\sigma\\&=\int_\varepsilon^{\eta_\varepsilon}(u(0,\sigma)-u(\xi,\sigma))d\sigma\geqq c_2+(2\log r-2\varepsilon)(-c_1-k\xi)\end{aligned}$$

with a constant c_2 independent of ε and ξ. On the other hand we have for $\xi<0$

$$\int_\xi^0(v(\tau,\eta_\varepsilon)-v(\tau,\varepsilon))d\tau\leqq-\pi\xi.$$

Alltogether we get since $\varepsilon>0$ was arbitrarily chosen

$$-c_2+2c_1\log r\geqq(2k\log r-\pi)(-\xi)\quad\text{for all}\quad\xi<0.$$

A necessary condition for this to hold obviously is $2k\log r-\pi\leqq 0$, i.e.

$$r\leqq\exp\frac{\pi}{2k}.\quad\square$$

Remark. The proof of Theorem 2 shows that with respect to the question of holomorphic extendibility from Ω_r to $\hat{\Omega}_r$ the "border" lies already between $\bar{H}(\bar{\Omega}_r)$

and $A^{\infty}(\Omega_r)$. The same phenomenon occurs if one asks for functions peaking at the strictly pseudoconvex points of $b\Omega_r$ as the theorem of Pflug and Theorem 3 show. But the situation changes, if one wants M_r to be a peak set, because in this case the border lies between any given $A^k(\Omega_r)$, $k>0$, and $A^0(\Omega_r)$ if only r is large enough.

§3. Plurisubharmonic Defining and Exhaustion Functions for Ω_r

3.1. *Plurisubharmonic Defining Functions.* Theorem 1 shows that for any $r \geqq \exp 3\pi$ there is no neighborhood U of $b\Omega_r$ with a C^3-function $\sigma: U \to \mathbb{R}$ such that

a) $U \cap \Omega_r = \{p \in U | \sigma(p) < 0\}$
b) $d\sigma(p) \neq 0$ for $p \in b\Omega_r$
c) σ plurisubharmonic on U,

because for such a function σ the domains $\Omega_r(\varepsilon) = \{p \in U | \sigma(p) < \varepsilon\} \cup \Omega_r$, $\varepsilon > 0$ small enough, would form a Stein neighborhood basis of $\bar{\Omega}_r$. We want to show now that weakening condition c) to

c′) the Leviform $\mathscr{L}_\sigma(p, \cdot)$ is positive semidefinite on $\mathbb{C}^2$ for all $p \in b\Omega_r$
does not change this situation.

Theorem 5. *There is no C^3 defining function σ for Ω_r with the properties* a), b), *and* c′).

Proof. We assume that σ is a C^3 defining function of Ω_r on a certain neighborhood U of $b\Omega_r$ and that σ satisfies a), b), and c′). Then there is a C^2-function $h>0$ on U, such that $\sigma = h\varrho$ on U with $\varrho = \varrho_r$ as defined by (1). A straightforward calculation, which can be omitted here, gives the following expression for the Leviform $\mathscr{L}_\sigma(p; u, v)$ of σ at a point $p = (z, 0) \in M_r$ applied to an arbitrary vector $(u, v) \in \mathbb{C}^2$:

$$\mathscr{L}_\sigma(p; u, v) = 2\,\mathrm{Re}\left[\left(\frac{\partial h}{\partial z} + \frac{i}{z} h\right) \exp(i \ln |z|^2) u\bar{v}\right] + \left(\frac{\partial h}{\partial w} \exp(i \ln |z|^2) + \frac{\partial h}{\partial \bar{w}} \exp(-i \ln |z|^2) + h\right) |v|^2$$

(all arguments are p).

Therefore, $\mathscr{L}_\sigma$ can be positive semidefinite on M_r only if

$$\left(\frac{\partial h}{\partial z} + \frac{i}{z} h\right) \exp(i \ln |z|^2) \equiv 0 \quad \text{on} \quad M_r.$$

This condition can be rewritten in the following way:

$$\frac{\partial}{\partial z}(h \exp(i \ln |z|^2)) \equiv 0 \quad \text{on} \quad M_r,$$

and this is equivalent to

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(h \exp(-i \ln |z|^2)) \equiv 0 \quad \text{on} \quad M_r.$$

Consequently, there exists a holomorphic function $f(z)$ on the annulus $A = \{z \in \mathbb{C} | 1 < |z| < r\}$, such that

$$f(z) = h(z, 0) \exp(-i \ln |z|^2) \quad \text{for} \quad z \in A.$$

Locally near any point on A, we can multiply this by the holomorphic function $\exp(2i \ln z) = \exp(i \ln |z|^2) \exp(-2 \arg z)$, thus getting

$$h(z, 0) \exp(-2 \arg z) = f(z) \exp(2i \ln z).$$

This shows that the locally near any point of A defined and real-valued function $h(z, 0) \exp(-2 \arg z)$ is holomorphic and therefore constant. So we get $h(z, 0) = c \exp(2 \arg z)$ with a global constant c. This is however impossible on an annulus. □

3.2. *Bounded Plurisubharmonic Exhaustion Functions.* In [6] the authors showed that for any relatively compact pseudoconvex domain Ω with C^k-boundary in a Stein manifold X, $2 \leqq k \leqq \infty$, there exists a C^k strictly plurisubharmonic function $\sigma < 0$ with $\lim_{p \to b\Omega} \sigma(p) = 0$. Furthermore, it was shown that such a function σ can always be chosen with the following regularity property at the boundary $b\Omega$: There exists a positive integer l, such that for an arbitrary C^k defining function φ of Ω on a neighborhood U of $b\Omega$ the function σ can be written as

$$\sigma = -h(-\varphi)^{1/l} \quad \text{on} \quad U \cap \Omega$$

with a strictly positive function $h \in C^{k-1}(\bar{\Omega})$ which is C^k outside $b\Omega$.

Since the regularity property of this exhaustion function at the boundary $b\Omega$ is better, if l can be taken small, it is reasonable to ask, whether l can always be chosen smaller than a certain bound L not depending on Ω. That such a bound L, if it exists, must be larger than 1, is an immediate consequence of Theorem 5 (at least if $k \geqq 3$). However, by using the family Ω_r, it can even be shown that such a bound L does not exist, i.e., Theorem I of [6] is sharp with respect to the regularity properties at the boundary.

Theorem 6. *Let $L > 0$ be given. Then there is an $r(L) > 1$, such that any domain Ω_r with $r > r(L)$ has the following property: If σ is any plurisubharmonic function on Ω_r, which can be written in the form*

$$\sigma = -h(-\varrho_r)^{1/l}$$

with a function $h \in C^2(\bar{\Omega}_r)$, $h > 0$, then $l \geqq L$.

Proof. 1) We consider the new function $\hat{\sigma}$ on Ω_r defined by

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}(z, w) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma(e^{i\Theta} z, w) d\Theta = \left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(e^{i\Theta} z, w) d\Theta \right\} (-\varrho_r(z, w))^{1/l} \\ &= -\hat{h}(z, w)(-\varrho_r(z, w))^{1/l}.\end{aligned}$$

(Notice that $\varrho_r(e^{i\Theta} z, w) = \varrho_r(z, w)$ for all Θ.)

It is obviously also plurisubharmonic and $\hat{h}$, defined by the integral in { } is strictly positive and C^2 on $\bar{\Omega}_r$. But now $\hat{\sigma}$ and $\hat{h}$ depend only on $|z|$ on Ω_r resp. $\bar{\Omega}_r$.

We, therefore, can introduce the strictly positive C^2 function $\tilde{h}$ on $R_r = \{(t, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C} \mid t > 0, (\sqrt{t}, w) \in \bar{\Omega}_r\}$ by putting

$$\tilde{h}(t, w) = \hat{h}(\sqrt{t}, w). \tag{16}$$

This gives on Ω_r

$$\hat{\sigma}(z,w) = -\tilde{h}(|z|^2, w)(-\varrho_r(z,w))^{1/l}.$$

In the following, we will write again σ instead of $\hat{\sigma}$. It will turn out that it is enough for the proof to consider the Leviform of σ at the points

$$p = (z,w) = (z, -\delta \exp(i \ln |z|^2)) \tag{17}$$

with $1 \leqq |z| \leqq r$ and $0 < \delta < 1$. (They, obviously, belong to Ω_{r}.) According to (15) we get at these points:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \varrho}{\partial w} = (1-\delta)\exp(i \ln |z|^2); \quad \frac{\partial^2 \varrho}{\partial z \partial \bar{z}} = 2\frac{\delta}{|z|^2};$$

$$\frac{\partial^2 \varrho}{\partial z \partial \bar{w}} = \frac{i}{z}\exp(i \ln |z|^2); \quad \frac{\partial^2 \varrho}{\partial w \partial \bar{w}} = 1; \quad \varrho = -\delta(2-\delta).$$

Alltogether, we get for the Leviform $\mathscr{L}_\sigma(p;(\xi,\eta))$ of σ at points p as in (17) applied to the vector $(\xi,\eta) \in \mathbb{C}^2$ with the abbreviation $\zeta = \exp(i \ln |z|^2)$ the expression

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_\sigma(p;(\xi,\eta)) = \delta^{\tau-2}(2-\delta)^{\tau-2} \Big\{ & \delta^2(2-\delta)\left(-(2-\delta)\frac{\partial \hat{h}}{\partial z \partial \bar{z}} + 2\tau \hat{h}\frac{1}{|z|^2}\right)|\xi|^2 \\ & + 2\delta(2-\delta)\operatorname{Re}\left[\left(-\delta(2-\delta)\frac{\partial^2 \hat{h}}{\partial z \partial \bar{w}} + \tau(1-\delta)\frac{\partial \hat{h}}{\partial z} + \tau\frac{i}{z}\zeta\hat{h}\right)\xi\bar{\eta}\right] \\ & + (2-\delta)\left(-\delta^2(2-\delta)\frac{\partial^2 \hat{h}}{\partial w \partial \bar{w}} + 2\tau\delta(1-\delta)\operatorname{Re}\left(\zeta\frac{\partial \hat{h}}{\partial w}\right)\right. \\ & \left. + \tau\delta\hat{h} + \tau(1-\tau)\frac{(1-\delta)^2}{2-\delta}\hat{h}\right)|\eta|^2 \Big\}. \end{aligned} \tag{18}$$

If we suppose that we have written in this expression for (ξ,η) the vector $(\hat{\xi}, \delta\hat{\eta})$ with $(\hat{\xi},\hat{\eta}) \in \mathbb{C}^2$, then we get the following necessary condition for σ to be plurisubharmonic on Ω_r:

For all $z \in \mathbb{C}$, $\delta \in \mathbb{R}$ with $1 \leqq |z| \leqq r$ and $0 < \delta < 1$ and for all $(\hat{\xi},\hat{\eta}) \in \mathbb{C}^2$ we have

$$\begin{aligned} &\left(-(2-\delta)\frac{\partial^2 \hat{h}}{\partial z \partial \bar{z}} + 2\frac{\tau}{|z|^2}\hat{h}\right)|\xi|^2 + 2\operatorname{Re}\left[\left(-\delta(2-\delta)\frac{\partial^2 \hat{h}}{\partial w \partial \bar{w}} + \tau(1-\delta)\frac{\partial \hat{h}}{\partial z} + \tau\frac{i}{z}\zeta\hat{h}\right)\hat{\xi}\hat{\eta}\right] \\ &+ \left(-\delta^2(2-\delta)\frac{\partial^2 \hat{h}}{\partial w \partial \bar{w}} + 2\tau\delta(1-\delta)\operatorname{Re}\left(\zeta\frac{\partial \hat{h}}{\partial w}\right) + \tau\delta\hat{h} + \tau(1-\tau)\frac{(1-\delta)^2}{2-\delta}\hat{h}\right)|\hat{\eta}|^2 \geqq 0 \end{aligned}$$

[the arguments in the functions are always $p = (z, -\delta\exp(i \ln |z|^2))$]. Since $\hat{h} \in C^2(\bar{\Omega}_r)$, this inequality must also hold for $\delta = 0$, $p = (z,0) \in M_r$. This gives:

$$\left(-2\frac{\partial^2 \hat{h}}{\partial z \partial \bar{z}} + 2\frac{\tau}{|z|^2}\hat{h}\right)|\xi|^2 + 2\operatorname{Re}\left[\tau\zeta\left(\frac{\partial \hat{h}}{\partial z} + \frac{i}{z}\hat{h}\right)\hat{\xi}\hat{\eta}\right] + \frac{1}{2}\tau(1-\tau)\hat{h}|\hat{\eta}|^2 \geqq 0 \tag{19}$$

for all z with $1 \leqq |z| \leqq r$ and all $(\hat{\xi},\hat{\eta}) \in \mathbb{C}^2$.

Next, we want to rewrite (19) by using the function $\tilde{h}$ defined in (16). We have $\tilde{h}(z\bar{z},0)=\hat{h}(|z|,0)=\hat{h}(z,0)$ and therefore

$$\frac{\partial\hat{h}}{\partial z}(z,0)=\frac{\partial\tilde{h}}{\partial t}(|z|^2,0)\cdot\bar{z} \quad \text{and} \quad \frac{\partial^2\hat{h}}{\partial z\,\partial\bar{z}}(z,0)=\frac{\partial\tilde{h}}{\partial t}(|z|^2,0)+\frac{\partial^2\tilde{h}}{\partial t^2}(|z|^2,0)|z|^2\,.$$

Putting this into (19) gives

$$\left[-2|z|^2\frac{\partial^2\tilde{h}}{\partial t^2}-2\frac{\partial\tilde{h}}{\partial t}+2\frac{\tau}{|z|^2}\tilde{h}\right]|\xi|^2+2\operatorname{Re}\left[\tau\zeta\bar{z}\left(\frac{\partial\tilde{h}}{\partial t}+\frac{i}{|z|^2}\tilde{h}\right)\hat{\xi}\hat{\eta}\right]$$
$$+\tfrac{1}{2}\tau(1-\tau)\tilde{h}|\hat{\eta}|^2\geqq 0 \tag{20}$$

for all $(\hat{\xi},\hat{\eta})\in\mathbb{C}^2$ and $1\leqq|z|\leqq r$, the arguments in the derivatives of $\tilde{h}$ being $(|z|^2,0)$. In particular, (20) must hold, if we take

$$(\hat{\xi},\hat{\eta})=\left(1,\frac{2}{|z|}e^{i\varphi}\right)$$

and choose φ in such a way that the term in $\hat{\xi}\hat{\eta}$ becomes nonpositive. This gives the following new necessary condition for σ to be plurisubharmonic:

$$-2|z|^2\frac{\partial^2\tilde{h}}{\partial t^2}-2\frac{\partial\tilde{h}}{\partial t}+2\frac{\tau}{|z|^2}\tilde{h}-4\tau\left(\left(\frac{\partial\tilde{h}}{\partial t}\right)^2+\frac{\tilde{h}^2}{|z|^4}\right)^{1/2}+2\frac{\tau}{|z|^2}\tilde{h}-2\frac{\tau^2}{|z|^2}\tilde{h}\geqq 0\,.$$

Therefore, we also must have

$$-|z|^4\frac{\partial^2\tilde{h}}{\partial t^2}-|z|^2\frac{\partial\tilde{h}}{\partial t}-\tau^2\tilde{h}\geqq 0 \tag{21}$$

at all points $(|z|^2,0)$ with $1\leqq|z|\leqq r$.

This differential inequality can be further simplified by introducing the strictly positive C^2-function

$$g(s)=\tilde{h}(e^s,0)$$

on $\{s|0\leqq s\leqq\ln r^2\}$, i.e., by putting $|z|^2=e^s$. Because of

$$g'=e^s\frac{\partial\tilde{h}}{\partial t} \quad \text{and} \quad g''=e^s\frac{\partial\tilde{h}}{\partial t}=e^{2s}\frac{\partial^2\tilde{h}}{\partial t^2}\,,$$

one obtains from (21)

$$g''+\tau^2 g\leqq 0 \tag{22}$$

for $0\leqq s\leqq\ln r^2$.

3) We now assume that we have a strictly positive C^2-function g satisfying (22) on an interval $I=[0,N]$ with a large N. We want to derive a contradiction. From (22) and the strict positivity of g it follows

$$g''+\tfrac{1}{2}\tau^2 g<0 \quad \text{on} \quad I$$

and after replacing the variable t by $2\tau^{-2}t$ we get the inequality

$$g''+g<0 \quad \text{on} \quad I\,. \tag{23}$$

For further simplification we want to remark that we may assume that $g'(\frac{2}{3}N)<0$, and therefore, because of $g''<0$, also

$$g'(t)<0 \quad \text{for all} \quad t\in[\tfrac{2}{3}N, N]$$

holds. If namely $g'(\frac{2}{3}N)\geqq 0$, then $g'(\frac{1}{3}N)>0$ and therefore the transformation $t\to N-t$ gives what we want and preserves (23). Finally, after a translation by $-\frac{2}{3}N$, we get the following situation, since N was supposed to be large:

There is a strictly positive C^2-function g on $I=\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ with

$$g''+g<0 \quad \text{and} \quad g'<0 \quad \text{on} \quad I. \tag{24}$$

We now determine real numbers $a(t)$, $b(t)$ for every $t\in I$ such that

$$g(t)=a(t)\cos b(t); \qquad g'(t)=-a(t)\sin b(t).$$

We have to take

$$b(t)=\operatorname{arc\,cot}\left(-\frac{g(t)}{g'(t)}\right) \quad \text{and} \quad a(t)=\frac{g(t)}{\cos b(t)}.$$

Therefore, $a(t)$ and $b(t)$ are C^2 on I and

$$0<b(t)<\frac{\pi}{2}, \qquad a(t)>0. \tag{25}$$

Furthermore, we get because of (24)

$$b'=\frac{g'^2-gg''}{g'^2+g^2}>1 \quad \text{on} \quad I.$$

Integration gives now

$$b\left(\frac{\pi}{2}\right)>\frac{\pi}{2}+b(0)>\frac{\pi}{2},$$

a contradiction to (25). □

§4. An Invariance Property

Let D_1, D_2 be bounded pseudoconvex domains with smooth boundaries and let

$$\Phi:\bar{D}_1\to\bar{D}_2$$

be a diffeomorphism with $\Phi|D_1$ holomorphic. In this situation one can ask the following question:

Does $\bar{D}_2$ have a Stein neighborhood basis if and only if $\bar{D}_1$ is the intersection of Stein open sets?

The answer seems to be unknown in general. Therefore, it is of some interest to prove the following theorem:

Theorem 7. *Let $r > \exp 3\pi$ and $D \subset \mathbb{C}^n$ be a bounded pseudoconvex domain with smooth boundary such that there is a diffeomorphism*

$$\Phi : \bar{\Omega}_r \to \bar{D}$$

with $\Phi|\Omega_r$ holomorphic. Then $\bar{D}$ does not have a Stein neighborhood basis.

Proof. Put $\mathring{M}_r = \{(z, 0) | 1 < |z| < r\}$. The mapping $\Phi|M_r : M_r \to \mathbb{C}^2$ is a smooth embedding and $\Phi|\mathring{M}_r$ is even holomorphic. Therefore, if we write

$$\Phi(z, 0) = (f_1(z), f_2(z)),$$

the functions f_1, f_2 are smooth on $\bar{A} = \{z | 1 \leqq |z| \leqq r\}$ and holomorphic on $A = \{z | 1 < |z| < r\}$. Furthermore, f_1' and f_2' do not have common zeros on $\bar{A}$. Thus we can find smooth functions g_1, g_2 on $\bar{A}$, holomorphic on A, such that

$$f_1' g_2 - f_2' g_1 \equiv 1 \quad \text{on} \quad \bar{A}.$$

Consequently, there exists an open neighborhood U of $\mathring{M}_r$ in $\mathbb{C}^2$ such that the mapping

$$\Phi^* : U \to \mathbb{C}^2$$

defined by

$$(z, w) \mapsto (f_1(z) + w g_1(z), f_2(z) + w g_2(z))$$

is biholomorphic onto some neighborhood of $\Phi^*(\mathring{M}_r)$. Notice furthermore that $\Phi^*|\mathring{M}_r = \Phi|\mathring{M}_r$. Therefore, the mapping $\hat{\Phi} = \Phi^{*-1} \circ \Phi$ is after a possible shrinking of the neighborhood U of $\mathring{M}_r$ a diffeomorphism of U onto a neighborhood $\hat{U}$ of $\mathring{M}_r$, $\hat{\Phi}|\mathring{M}_r$ is the identity and $\hat{\Phi}|U \cap \Omega_r$ is holomorphic. Finally,

$$\hat{\Omega}_r = \hat{\Phi}(U \cap \Omega_r) = \Phi^{*-1}(D \cap \Phi(U)). \tag{25a}$$

Near $\mathring{M}_r$ the mapping $\hat{\Phi}$ can be written in the following form:

$$\hat{\Phi}(z, w) = (z + h_1(z)w + h_2(z)w^2 + O(|w|^3), h_3(z)w + h_4(z)w^2 + O(|w|^3))$$

with holomorphic functions $h_1, \ldots, h_4$ on A. We now introduce new holomorphic coordinates on $\mathbb{C}^2$ near $\mathring{M}_r$ by putting

$$z' = z + h_1(z)w + h_2(z)w^2$$
$$w' = \quad h_3(z)w + h_4(z)w^2.$$

In these coordinates $\hat{\Phi}$ has the form

$$\hat{\Phi}(z', w') = (z' + O(|w'|^3), w' + O(|w'|^3)$$

thus showing that in the coordinates (z', w') the domain $\hat{\Omega}_r$ is very close to $U \cap \Omega_r$. If we now assume that $\bar{D}$ has a Stein neighborhood basis, then $D \cap \Phi(U)$ also would have such a basis, if only U is chosen in the right way. This basis could be lifted by Φ^{*-1} to a Stein neighborhood basis of $\bar{\hat{\Omega}}_r$ because of (25a). But then because of the similarity of $\hat{\Omega}_r$ and $U \cap \Omega_r$ a reasoning quite similar to the proof of Theorem 1, which can be left to the reader, would give a contradiction. □

§5. An Existence Theorem for Stein Neighborhoods

As a consequence of Theorem 1 one should ask for additional assumptions on pseudoconvex domains Ω with smooth boundaries, which guarantee the existence of a Stein neighborhood basis for $\bar{\Omega}$ and are still weaker than the assumption of strict pseudoconvexity. One such condition will be given in [7]. It will in particular exclude the possibility that the set of degeneracy of the Leviform of $b\Omega$ contains complex submanifolds of positive dimension. On the other hand, the set of degeneracy in the boundary of the domain Ω_r, $r>e^{3\pi}$, is the annulus M_r (Proposition 1) and Ω_r has a nontrivial nebenhülle. We now want to show that such an example is impossible, if the set of degeneracy is a full disc.

Theorem 8. *Let $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^2$ be a pseudoconvex domain with C^3-boundary and such that the set M of degeneracy of the Leviform is exactly the disc $M=\{(z,w)|\,|z|\leqq 1, w=0\}$. Then $\bar{\Omega}$ has a Stein neighborhood basis.*

Proof. 1) The main idea of the proof is to show that the exterior normal on $b\Omega$ on M cannot rotate as wildly as it does on M_r in the case of the domains Ω_r. For this purpose we have to study $b\Omega_r$ near M. We take a defining function $\tilde{\varrho}(z,w)$ for Ω and write it in the form

$$\tilde{\varrho}(z,w)=\tilde{\varrho}(z,0)+wg(z,w)+\bar{w}\overline{g(z,w)}$$

with a C^2-function g on a neighborhood U of M. Notice that $\tilde{\varrho}(z,0)=0$ for $|z|\leqq 1$. Therefore $0 \neq \partial\tilde{\varrho}=g(z,0)dw$ on M, which means that we may suppose

$$g(z,w)\neq 0 \quad \text{on} \quad U\,.$$

By dividing $\tilde{\varrho}$ by $|g|$ we get a new defining function ϱ for Ω, which can be represented on U in the form

$$\varrho(z,w)=\hat{\varrho}(z,w)+w\exp(i\Theta(z,w))+\bar{w}\exp(-i\Theta(z,w))\,. \tag{26}$$

Claim. The function $\Theta(z,w)$ is harmonic on M.

From (26) one obtains by a simple calculation the following expression for the Leviform $\mathscr{L}(z,w)$ of ϱ applied to the holomorphic tangent vector $\left(-\frac{\partial\varrho}{\partial w}, \frac{\partial\varrho}{\partial z}\right)$ at the point $(z,w)\in U\cap b\Omega$

$$\mathscr{L}(z,w)=2iw\exp(i\Theta(z,w))\Theta_{z\bar{z}}(z,w)+O(|w|^2)$$

We rewrite this by putting $w=u+iv$ getting as a condition for (26) to be non-negative

$$-(u\sin\Theta+v\cos\Theta)\Theta_{z\bar{z}}+O(|w|^2)\geqq 0, \tag{27}$$

since $u\cos\Theta - v\sin\Theta\equiv 0$ on $b\Omega\cap U$. We now distinguish between two cases:

a) Let $(z_0,0)\in M$ be a fixed point with $\cos\Theta(z_0,0)\neq 0$. Then $\frac{\partial\varrho}{\partial u}(z_0,0)=0$ and therefore there are points of the form $(z_0,u+iv)\in b\Omega$ arbitrarily close to $(z_0,0)$ with v positive and also v negative. We can write at these points $u=v\tan\Theta$

and by putting this into (27), the condition becomes near $(z_0, 0)$

$$-v(\sin\Theta\tan\Theta+\cos\Theta)\Theta_{z\bar{z}}\geqq 0 .$$

Let us assume for the moment that $\cos\Theta(z_0, 0)>0$. Then multiplication with $\cos\Theta(z, w)$ gives

$$-v\Theta_{z\bar{z}}(z_0, w)\geqq 0$$

and since v can be both positive and negative, $\Theta_{z\bar{z}}(z_0, 0)=0$ follows. If $\cos\Theta(z_0, 0)<0$ an analogue argument gives the same result.

b) In the case $\sin\Theta(z_0, 0)\neq 0$ one interchanges in the above argument the role of u and v, thus getting $\Theta_{z\bar{z}}|M\equiv 0$.

2) We now want to show that in suitable coordinates there is a fixed real direction which is transversal to $b\Omega$ at all points of M. We approximate the function $\Theta(z, 0)$ on M by a harmonic function $\hat{\Theta}(z)$ on a neighborhood V of $\Delta=\{|z|\leqq 1\}$, such that

$$|\hat{\Theta}(z)-\Theta(z, 0)|<\frac{\pi}{2} \tag{28}$$

on Δ, and after shrinking V if necessary we may assume that the estimate holds on V. Furthermore, after taking a harmonic conjugate $\Psi(z)$ of $-\hat{\Theta}$ on V, we may even assume that the holomorphic function $f=\Psi-i\hat{\Theta}$ is a polynomial. Then the map

$$\Phi:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$$

$$(z, w)\mapsto(z, (\exp f(z))w) \tag{29}$$

is biholomorphic. It is now of course sufficient to prove that the domain $\Omega^*=\Phi^{-1}(\Omega)$ has a closure with a Stein neighborhood basis.

The set of degeneracy of the Leviform of $b\Omega^*$ is of course again the disc M. By putting (29) into (26) and writing again $w=u+iv$ one gets as a defining function of Ω^*

$$\sigma=\varrho\circ\Phi=\hat{\sigma}(z, w)+2e^{\Psi}[u\cos(\Theta(z, w)-\hat{\Theta}(z, w))-v\sin(\Theta(z, w)-\hat{\Theta}(z, w))] .$$

Therefore, the vector $(0, \exp i(\Theta(z, 0)-\hat{\Theta}(z, 0))\in\mathbb{C}^2$ is an exterior normal to $b\Omega^*$ at $(z, 0)\in M$. Because of (28) the second component of this vector belongs always to the right half plane of the w-plane. Consequently, the fixed vector $e=(0, 1)\in\mathbb{C}^2$ is transversal to $b\Omega^*$ at all points of M and is directed to the outside of Ω^*. Finally, by reasons of continuity this statement must also hold in all points on $W\cap b\Omega^*$, where W is a certain closed neighborhood of M.

3) As a consequence of 2) one has for all $\varepsilon>0$ small enough

$$S_\varepsilon=\{p+\varepsilon e|p\in V\cap b\Omega^*\}\subset\mathbb{C}^2\setminus\overline{\Omega^*} .$$

Furthermore, one can choose a strictly plurisubharmonic defining function ϱ^* for Ω^* at least on a neighborhood of $b\Omega^*\setminus\mathring{W}$. A simple patching argument by which suitable level sets $\{\varrho^*=\eta\}$ and the surfaces S_ε are glued together now gives the desired pseudoconvex neighborhoods of $\overline{\Omega^*}$. $\square$

Remarks. a) The same argument as in the above proof of course goes through also when $M=\{(z,w)|w=0, z\in\bar{D}\}$, where $D\subset\mathbb{C}$ is a domain bounded by a simply closed smooth curve.

b) One can easily generalize the above theorem to the case, in which M consists of any finite number of pairwise disjoint closures of domains each of which is contained in a complex line in $\mathbb{C}^2$ and looks like the domains mentioned in a).

References

1. Behnke, H., Thullen, P.: Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Das Konvergenzproblem der Regularitätshüllen. Math. Ann. **108**, 91—104 (1938)
2. Behnke, H., Thullen, P.: Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 51, 2. Aufl. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1970
3. Bremerman, H. J.: On a generalized Dirichlet problem for plurisubharmonic functions and pseudoconvex domains. Characterization of Silov boundaries. Trans. Amer. Math. Soc. **91**, 246—276 (1959)
4. Debiard, A., Gaveau, B.: Frontière de Silov de domaines faiblement pseudoconvexes de C^N. Bull. Sci. Math. **100**, 17—31 (1976)
5. Diederich, K., Fornaess, J. E.: A strange bounded smooth domain of holomorphy. Bull. Amer. Math. Soc. **82**, 74—76 (1976)
6. Diederich, K., Fornaess, J. E.: Pseudoconvex domains: Bounded strictly plurisubharmonic exhaustion functions. To appear
7. Diederich, K., Fornaess, J. E.: Pseudoconvex domains: Stein neighborhoods. To appear
8. Hakim, M., Sibony, N.: Frontière de Silov et spectre de $A(\bar{\partial})$ pour des domaines faiblement pseudoconvexes. C. R. Acad. Sci. Paris **281**, Sér. A, 995—962 (1975)
9. Kohn, J. J.: Global regularity for $\bar{\partial}$ on weakly pseudoconvex manifolds. Trans. Amer. Math. Soc. **181**, 273—292 (1973)
10. Kohn, J. J.: Lectures at the summer institute on Several Complex Variables of the Amer. Math. Soc., Williamstown (1975)
11. Pflug, P.: Über polynomiale Funktionen auf Holomorphiegebieten. Math. Z. **139**, 133—139 (1974)
12. Rossi, H.: Holomorphically convex sets in several complex variables. Ann. Math. **74**, 470—493 (1961)
13. Stout, E. L.: The theory of uniform algebras. Tarrytown-on-Hudson, Belmont: Bogden and Quigley 1971
14. Wells, R. O. Jr.: Function theory on differentiable submanifolds. Contributions to Analysis, ed.: L. V. Ahlfors et al. New York, London: Academic Press 1974

Received July 29, 1976