Домашнее задание №1. Введение/Выпуклые множества/Выпуклые функции. Векторное дифференцирование.

ВВЕДЕНИЕ (2 балла)

1. Для успешного выступления на соревнованиях спортсмен должен потратить как минимум K килокалорий. Вечером перед соревнованиями он идёт в магазин, чтобы купить продукты себе на ужин. В магазине представлено m наименований товаров, цена единицы каждого наименования равна p_i, $i = 1, ..., m$. Также известно, что i-ая единица каждого товара придаёт студенту энергию равную k_i килокалорий. Поставьте задачу определения содержимого корзины минимальной стоимости для успешного выступления. Является ли поставленная задача выпуклой и почему?

2. Что такое норма вектора? Что такое эквивалентность норм? Показать эквивалентность l_1, l_2, l_∞ норм.

3. Что такое норма матрицы (линейного конечномерного оператора)? Чему равны $\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2, \mathrm{L}_\infty$ нормы матрицы? Что такое Фробениусова норма матрицы и какой аналог среди векторных норм векторов она имеет?

ВЫПУКЛЫЕ/КОНИЧЕСКИЕ МНОЖЕСТВА (2 балла)

1. Доказать по определению, что гиперболическое множество

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n_+ \;\middle|\; \prod_{i=1}^{n} x_i \geq 1 \right\} \text{– выпуклое.}$$

2. Пусть $\mathrm{P} \in \mathbb{S}^n_{++}$, $c \in \mathbb{R}^n$. Покажите, что множество

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \langle \mathrm{P}x, x \rangle \leq \langle c, x \rangle^2,\ \langle c, x \rangle \geq 0 \right\} \text{– выпуклое.}$$

ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ (2 балла)

1. Докажите выпуклость следующих функций:

   (a) $f(x) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} e^{x_i} \right)$;

   (b) $f(x) = \frac{\|\mathrm{A}x - b\|^2}{1 - x^\top x}$, $\mathrm{X} = \{x \mid \|x\|^2 \leq 1\}$;

   (c) $F(x) = \frac{f^2(x)}{g(x)}$ при условии, что $f(x)$ является выпуклой и принимает только неотрицательные значения, $g(x)$ вогнута и принимает только положительные значения;

(d) $f(x,t) = -\log(t^2 - x^T x),\ \mathrm{E} = \{(x,t)\} \in \mathbb{R}^{n\times 1} \mid \|x\|_2 < t\}$;

(e) $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} w_i \ln\left(1 + \exp(a_i^\top x)\right) + \frac{\mu}{2}\|x\|_2^2,\ \ \mu, w_1, \ldots, w_n > 0,\ a_i \in \mathbb{R}^n$;

(f) $f(x) = \ln \sum\limits_{i=1}^{n} \exp\left(\max\{0, x_i\}^2\right)$.

ТЕСТ/ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ (2 балла)

1. Какое максимальное количество точек минимума может быть у выпуклой функции?
   (a) Одна
   (b) Две
   (c) Счётное множество
   (d) Несчётное множество

2. Какие из следующих функций выпуклы?
   (a) $f(x) = \sum_{i=1}^{r} x_{[i]}$, где $x_{[1]} \geq x_{[1]} \geq \ldots \geq x_{[n]}$ — упорядоченные по убыванию элементы вектора x
   (b) $f(x) = x^5$
   (c) $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i$, где $x_i \geq 0$ и $f(0) = 0$ по непрерывности
   (d) $f(A) = x^\top A x$, где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ — фиксированный вектор
   (e) $\|x\|_{1/3} = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^{1/3})^3$

3. Чем является касательная к графику выпуклой функции в каждой точке области определения?
   (a) Локальной оценкой сверху
   (b) Глобальной оценкой снизу
   (c) Локальной оценкой снизу
   (d) Глобальной оценкой сверху

4. На каком множестве выпукла функция $f = x_2^3 + x_2(x_1^2 + x_3^2)$?
   (a) $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0\}$
   (b) $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_2 \leq 0,\ 3x_2^2 - x_1^2 \geq 0\}$
   (c) $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_2 \geq 0,\ 3x_2^2 - x_1^2 \geq x_3^2\}$
   (d) $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_2 \geq 0,\ 6x_2^2 - x_1^2 \geq 0\}$

5. Может ли область определения выпуклой функции быть невыпуклым множеством?
   (a) Да
   (b) Нет

6. Отметьте все композиции $f(x) = h(g(x))$, такие что $f(x)$ — выпуклая функция.
   (a) $h(x) = \log x$, $g(x)$ – выпуклая функция
   (b) $h(x) = e^x$, $g(x)$ – вогнутая функция
   (c) $g(x) = Ax + b$ для некоторой матрицы A и вектора b, h – выпуклая функция
   (d) $h(x) = |x - 4|$, $g(x) = |x|$

7. Чему равна константа сильной выпуклости у функции $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|_2^2$?
   (a) 1
   (b) 2
   (c) 3
   (d) 10

ТЕСТ/ВЕКТОРНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ (2 балла)

1. Посчитайте $df(x)$ и $\nabla f(x)$ для функции $f(x) = \log(x^\top \mathrm{A} x)$ и выберите правильный вариант ответа.
   (a) $\nabla f(x) = \frac{2\left(\mathrm{A}+\mathrm{A}^\top\right)x}{x^\top \mathrm{A} x}$, $df(x) = \frac{x^\top 2\left(\mathrm{A}+\mathrm{A}^\top\right)dx}{x^\top \mathrm{A} x}$
   (b) $\nabla f(x) = \frac{\left(\mathrm{A}+\mathrm{A}^\top\right)x}{x^\top \mathrm{A} x}$, $df(x) = \frac{x^\top \left(\mathrm{A}+\mathrm{A}^\top\right)dx}{x^\top \mathrm{A} x}$
   (c) $\nabla f(x) = \frac{x^\top \left(\mathrm{A}+\mathrm{A}^\top\right)dx}{x^\top \mathrm{A} x}$, $df(x) = \frac{\left(\mathrm{A}+\mathrm{A}^\top\right)x}{x^\top \mathrm{A} x}$
   (d) $\nabla f(x) = \frac{x^\top 2\left(\mathrm{A}+\mathrm{A}^\top\right)dx}{x^\top \mathrm{A} x}$, $df(x) = \frac{2\left(\mathrm{A}+\mathrm{A}^\top\right)x}{x^\top \mathrm{A} x}$

2. Посчитайте $df(x)$, $d^2 f(x)$ и $\nabla f(x)$, $\nabla^2 f(x)$ для функции $f(x) = \frac{1}{p}\|x\|_2^p$, $p > 1$ и выберите все правильные результаты.
   (a) $\nabla f(x) = \|x\|_2^{p-1} x$
   (b) $df(x) = \|x\|_2^{p-2} x^\top dx$
   (c) $\nabla^2 f(x) = (p-2)\|x\|_2^{p-4} x^\top x + \|x\|_2^{p-2}$
   (d) $\nabla^2 f(x) = (p-1)\|x\|_2^{p-3} x x^\top + \|x\|_2^{p-1} I$
   (e) $d^2 f(x) = dx^\top \left((p-2)\|x\|_2^{p-4} x x^\top + \|x\|_2^{p-2} I\right) dx$
   (f) $d^2 f(x) = dx^\top \left((p-1)\|x\|_2^{p-3} x x^\top + \|x\|_2^{p-1} I\right) dx$

3. Верно ли, что у функции $f(x) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \log\left(1 + \exp(a_i^\top x)\right) + \frac{\mu}{2}\|x\|_2^2$, $a_i \in \mathbb{R}^n$, $\mu > 0$, гессиан $\nabla^2 f(x) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(-\frac{\exp(a_i^\top x)}{(1+\exp(a_i^\top x))^2} a_i a_i^\top + \frac{\exp(a_i^\top x)}{1+\exp(a_i^\top x)} a_i a_i^\top\right) + \mu \mathrm{I}$?
   (a) Да
   (b) Нет