

해석학 1

중간고사

2021. 04. 13 (타전공생용)

배점: 1번: 3+3+3+3+3점 2-6번의 각 문항 ---10점; 7번: 10+5점; 8번: 8+7점

1. 다음 내용을 기술하시오

- ① Bolzano-Weierstrass 정리
- ② 코시수열(Cauchy sequence)의 정의
- ③ 축소구간열 정리(Nested intervals theorem)
- ④ Sequence Location Theorem (수열위치 정리)
- ⑤ Limit Location Theorem (극한위치 정리)

2. 다음 각 수열이 위로 유계인지 여부를 판정하시오.

$$\textcircled{1} \quad a_n = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{4n+1}$$

$$\textcircled{2} \quad b_n = 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

3. 등식 $1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} = \frac{1 - x^{2n+2}}{1 - x^2}$ (단, n 은 자연수, $0 < x < 1$)을 활용하여 다음을 증명하시오

$$a_n = 1 + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)3^{2n+1}} \text{에 대하여, } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2} \ln 2 \text{이다}$$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ 임을 증명하시오

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos 3n$ 이 존재하지 않음을 증명하시오

6. 임의의 자연수 n 에 대하여, $|a_n| < 2$ 이고 $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \frac{1}{5} |a_{n+1}^2 - a_n^2|$ 을 만족하는 수열 (a_n) 은 수렴함을 증명하시오

7. $0 < a_1 < 2$, $4a_{n+1} = a_n^3 (\forall n \geq 1)$ 일 때,

- ① 수열 $(a_n)_{n=1}^\infty$ 이 수렴함을 보이시오
- ② 극한값 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 을 구하시오.

8. ① $A, B > 0$ 일 때, $\inf_{h>0} \left\{ \frac{A}{h} + \frac{h}{2} B \right\}$ 을 구하시오 --- 8점

② 수열 $\left\{ \sqrt[n]{|\sin(n\pi/6)|} \right\}_{n=0}^\infty$ 의 가장 큰 집적점(the largest cluster point)을 구하시오--- 7점