이름 : 정희철

학번 : 2016314895

1. 1) Bolzano - Weiestrass 정리 : 유계(bounded)한 수열 a_n은 집적점 L이 존재한다.

2) Given $\varepsilon > 0$, $a_m \underset{\varepsilon}{\approx} a_n$ for $m, n \gg 1$

3) $[a_n, b_n]$로 유계(bounded)한 구간 I는 극한 L이 존재한다.

4) If $\lim_{n \to \infty} a_n \le L$, then $a_n \le L$ for $n \gg 1$

If $\lim_{n \to \infty} a_n \ge L$, then $a_n \ge L$ for $n \gg 1$

5) If $a_n \le L$ for $n \gg 1$, then $\lim_{n \to \infty} a_n \le L$.

If $a_n \ge L$ for $n \gg 1$, then $\lim_{n \to \infty} a_n \ge L$.

2. 1) $a_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{4n+1}$

$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{4n+1} > \int_0^n \frac{1}{4x+1}\,dx$, $\frac{1}{4x+1}$는 concave up 하기 때문에,

$\int_0^n \frac{1}{4x+1}\,dx = \frac{1}{4}\ln(4x+1)\Big|_0^n = \frac{1}{4}\ln(4n+1)$, $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{4}\ln(4n+1) = \infty$,

∴ Comparison theorem에 의해, a_n 역시 위로 유계하지 않다.

2) $b_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, $p > 1$이기 때문에 위로 유계함

이름 : 정희철

학번 : 2016314895

4) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \left(\lim_{n\to\infty} n\right)^{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = (\infty)^0 = 1$

이름 : 정희철

학번 : 2016314895

5.) $\lim_{n \to \infty} \cos 3n$

pf) $\cos 3n$ 은 주기함수이기 때문에 $|\cos 3n| \le 1$ 로 bounded 되어 있다. 이는 Bolzano-Weierstrass 정리에 의해 cluster point L 이 존재함을 알 수 있다.

~~구간~~ $\cancel{\left[\frac{2k}{3}\pi, \frac{2k+1}{3}\pi\right]}$ ~~는 길이가~~ $\cancel{\frac{\pi}{3} > 1}$ ~~이고~~

구간 $\left[\frac{2k}{3}\pi, \frac{2k+1}{3}\pi\right]$ 는 길이가 $\frac{\pi}{3} > 1$ 이고, $a_{n_i} = \cos 3n_i$ 이 -1 에 집적되는 모습을 띈다. .... ①

구간 $\left[\frac{2k'}{3}\pi, \frac{2k'+1}{3}\pi\right]$ 역시 길이가 $\frac{\pi}{3} > 1$ 이지만, $a_{n_j} = \cos 3n_j$ 가 1 에 집적되는 모습을 띈다 .... ②

∴ 두 구간 집적점이 서로 다르므로 $\cos 3n$ 의 극한은 존재하지 않는다.

이름 : 정희철

학번 : 2016314895

6)

8.) 1)

$\frac{A}{h}+\frac{h}{2}B = \frac{2A+h^2B}{2h}$, $h>0$ 이기 때문에 $h=1$일 때 가장 작은 수가 된다.

$\frac{2A+(1)^2B}{2(1)} = \frac{2A+B}{2} = A+\frac{1}{2}B = \min\left(\frac{A}{h}+\frac{h}{2}B\right)$ 이며, minimum이 존재한다면

infimum과 minimum의 값이 같기 때문에 $\inf_{h>0}\left\{\frac{A}{h}+\frac{h}{2}B\right\} = A+\frac{1}{2}B$ 이다.

2) $\left|\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right| \le 1$ 이기 때문에, $\sqrt[n]{\left|\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)\right|} \le \sqrt[n]{1} = 1$ 이므로

가장 큰 집적점은 1 이다.