1. Cantor의 논리를 빌리자면, 다른 두 집합 사이에 일대일 대응이 존재하면 두 집합의 Cardinality는 같다. 때문에 자연수 집합과 유리수 집합이 일대일 대응이 된다는 의미는 자연수 집합과 유리수 집합에 개수가 같다는 것이므로, 이를 보여주면 문제가 해결된다.

pf)

i) 자연수 집합의 각각의 원소에 자연수 집합의 모든 원소를 하나씩 나눈 형태를 나열했다고 하자.

$$\Rightarrow \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \ldots, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{3}, \ldots, \frac{3}{n}, \ldots$$

분모를 n, 분자를 m이라고 가정할 때, $n=1,2,3,\ldots$ 과 $m=1,2,3,\ldots$ 의 모든 조합이라 할 수 있으며, m, n은 서로소인 자연수만 남기면 중복된 유리수를 제외하고 다음과 같이

하나씩 자연수와 대응시킬 수 있다.

$$\Rightarrow \begin{array}{cccccccccccc} \frac{1}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \ldots, & \frac{2}{1}, & \frac{2}{3}, & \frac{2}{5}, & \ldots, & \frac{3}{1}, & \frac{3}{2}, & \frac{3}{4}, & \frac{3}{5}, \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & a & b & c & \cdots & d & e & f & g \end{array}$$

위로 부터 자연수와 양의 유리수가 일대일 대응이 가능하다는 것을 확인하였다. 음의 정수와 음의 유리수도 부호만 바뀐다면 위와 동일한 방법으로 일대일 대응이 된다.

ii) 자연수 집합의 원소를 x라 하고, 정수 집합의 원소를 y라 가정할 때, $y = f(x) = \begin{cases} (x-1)/2, & x \% 2 = 1 \\ -x/2, & x \% 2 = 0 \end{cases}$ 로 정의하면 자연수와 정수는 일대일 대응이 되므로 개수가 같다.

$\therefore$ (i)과 (ii)의 결과와 더불어 0과 0을 대응시키면 정수와 유리수는 일대일 대응이 된다는 것을 알 수 있다. 나아가 정수는 자연수와 일대일 대응하므로 결과적으로 자연수와

유리수는 일대일 대응 하고, 이는 개수가 동일하다는 것을 증명한다.

2

2-1 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} > 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$$

$\therefore$ 따라서 비교판정법에 의해 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ 도 발산한다.

2-2 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \cdots$

$> \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, 여기서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$은 발산한다는 것을 위에 증명했으므로, $\frac{1}{2}(\infty)$ 역시 발산한다.

$\therefore$ 비교판정법에 의해 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1}$ 역시 발산한다

2-3 다음 급수에 대해 언급을 해보겠다. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{p}$, 해당 p-급수는 $\displaystyle\int_{1}^{\infty} x^{-p}\,dx$ $(x, p > 0)$의 Riemann's Sum을 이용한

추정값이라고 할 수 있다. 단, x^{-p} $(x, p > 0)$는 strictly-decreasing하고 concave up하기 때문에 $\displaystyle\int_{1}^{\infty} x^{-p}\,dx < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 이 성립한다.

$\Rightarrow$ $p=1$일 경우 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_{1}^{t} x^{-p}\,dx = \lim_{t\to\infty} \ln x\Big|_{1}^{t} = \lim_{t\to\infty} \ln t = \infty$ 으로 발산한다.

$\Rightarrow$ $p\neq 1$일 경우 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_{1}^{t} x^{-p}\,dx = \lim_{t\to\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_{1}^{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} = \frac{1}{1-p}\lim_{t\to\infty} t^{1-p} - \frac{1}{1-p}$ 로 되는데,

i) $p<1$ 이라면 $\displaystyle\lim_{t\to\infty} t^{1-p}$ 는 발산한다.

ii) $p>1$ 이라면 $\displaystyle\lim_{t\to\infty} t^{1-p}$ 는 수렴한다.

$\therefore$ 급수 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1.5}}$ 는 $p>1$ 이므로 수렴한다.

3

3-1 로피탈의 법칙이란 임의의 방정식 $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$ 의 극한이 $\frac{\infty}{\infty}$ 이나 $\frac{0}{0}$과 같이 나타날 때, 분자와 분모를 각각 미분한 $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ $(g'(x) \neq 0)$ 의 극한을 구해도 무방하다는 법칙이다.

EX) i) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sin x}{x}$ 와 같은 경우 x를 0에 극한으로 보내게 된다면 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0}$ 꼴이 되기에 정의할 수 없다.

여기서 로피탈의 법칙을 사용하게 된다면 $\lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$ 로 정의되는 것을 알 수 있다.

ii) $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{\infty}{\infty}$ 꼴이 되기에 로피탈의 법칙을 사용하게 된다면 $\lim_{x \to \infty} \frac{(\ln x)'}{(\sqrt{x})'} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$ 임을 확인할 수 있다.

3-2 $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{(-\frac{1}{x^2})} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \to 0^+} -x = 0$