심화수리통계학 [open books]

2022. 4. 7.

[총 27점]

1. 확률변수 X와 임의의 양의 실수 k에 대하여 다음을 증명하여라. [2점]

$$P(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}.$$

2. $P(X \leq 0) = 0,\ E(X) = \mu < \infty$일 때, $P(X \leq \mu t) \geq 1 - \frac{1}{t},\quad (t > 1)$임을 증명하여라. [2점]

3. $\{X_1, \ldots, X_n\}$에서 다음의 적절한 μ를 각각 구하라. [2점]

(a) $Min\sum_{i=1}^{n} w_i\,(X_i-\mu)^2,\quad w_i \geq 0, \sum w_i = 1$　　　(b) $Min\sum_{i=1}^{n} |X_i - \mu|$

4. 확률변수 X에 대하여 다음을 증명하여라. [2점]

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n) \leq E|X| \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P(|X| \geq n).$$

5. $f(x) = (1/2)^{x+1}\ I(x = 0, 1, 2, \ldots)$일 때 확률모함수 $E[t^x] = \sum_{j=0}^{\infty} t^j\, P(X = j)$를 구하라. [2점]

6. $E(X)$의 값이 존재한다면 $E|X| < \infty$임을 보이고, [2점]
j차 적률이 존재한다면, $E(X^j) < \infty,\quad i\,(i < j)$차 적률도 존재함을 증명하여라.

7. $E(X^{2k}) = (2k)!/(2^k k!)$와 $E(X^{2k-1}) = 0$를 만족하는 X의 적률모함수와 확률밀도함수를 구하라. [2점]

8. 연속형 확률변수 X의 중앙값을 m이라 한다면 다음을 증명하고, $b = m$일 때 최소값을 갖는다는 것을 보여라. [3점]

$$E[|X-b|] = E[|X-m|] + 2\int_b^m (x-b) f(x)\,dx.$$ Hint: $b > m$와 $b < m$인 경우를 고려해야 함.

9. $e^{\frac{t^2}{2}} = \sum \frac{(2k)!}{2^k k!} t^{2k}$임을 보이고, 이를 적률모함수 $M(t)$로 설정하여 $E(X^{2k}) = (2k)!/2^k k!$임을 보여라. [3점]

10. $\{X_1, \ldots, X_n\}$은 독립이며 동일한 분포를 따르는 확률변수일 때 다음을 보여라. [3점]

$$P(\overline{X} \geq a) \leq exp(-at)\,[M_X(\frac{t}{n})]^n,\quad (t > 0,\ a > 0).$$

11. 확률변수 X의 누적분포함수가 다음과 같을 때, [4점]

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ,\quad x < 0 \\ 0.5x + 0.25 & ,\quad 0 \leq x < 0.5 \\ \frac{6}{5}(x-0.5)^2 + 0.6 & ,\quad 0.5 \leq x < 1 \\ 1 & ,\quad x \geq 1 \end{cases}$$

(a) 이산형과 연속형 누적분포함수로 분해하고 밀도함수로 표현하여라.

(b) $E[X] = \int_0^{\infty} [1 - F(x)]\,dx$를 증명하고, 식을 이용하여 위 분포의 평균을 구하라.

(c) $E[X^2] = \int_0^{\infty} 2x[1 - F(x)]\,dx$를 증명하고, 이 식을 이용하여 분산을 구하라.

- Good Luck -

성균관대학교 경제대학 통계학과　　平散 洪 鍾 善 교수　　cshong@skku.edu