1. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\ln n)^3}{n\sqrt{n}} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\ln n)^3}{n^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}}\right)^3$,

$L \in (-\infty, \infty)$, $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)^3 = L$

$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)^2 = L'$, 수렴여부에 영향을 주지 않으므로

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\ln n)^2}{n} = L'$, 이 때 $\sum \frac{\ln n}{n} = 1$, $n \gg 1$ 이기 때문에

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\ln n)^3}{n\sqrt{n}}$ 은 발산 한다

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}}$, $\sin n$ 은 -1 과 1에 가까운 수를 무한히 갖고 있다.

이를 telescoping series 처럼 간주할 수 있고, telescoping series theorem 에 의하여 이는 수렴한다.

3. $f(x)$는 모든 점에서 불연속이다.

4. ii 와 iii 에 의해 $f(-0.5) = f(0.25) = 2021$, 그리고 $x \in (-1, 1)$ 에서

모든 점이 $f(x) = f(x^2)$ 해야 한다.

If $f(x) = 2021$, i) f는 $x=0$ 에서 연속 ✓

ii) $f(x) = f(x^2)$ $\forall x \in (-1,1)$ ✓

iii) $f(-0.5) = 2021$ ✓

$\therefore$ $f(x) = 2021$

5. pf) $f:[0, 2021] \to [0, 2021]$ 이므로 $c \in [0, 2021]$ 일 경우

$f(c) \in [0, 2021]$ 역시 성립해야 한다.

2021을 넘길 수 없으므로 상수는 2021을 넘을 수 없다.

6. i) $1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+2)!}\bigg/\frac{x^n}{(n+1)!}\right|$$

$$=\left|\frac{x}{(n+2)}\right| < 1$$

$$x < \infty$$

$R=\infty$. 해당 수열은 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}$ 로 나타낼 수 있다. 그리고 Ratio Test를 통해 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+2}\right|$ 가 1을 넘지 않는 x를 찾으면 되는데, 이는 n이 충분히 클 경우 어떤 수든 성립할 수 있으므로 수렴반지름은 무한 ∞ 이다.

ii) $\sum_{n=0}^{\infty} 10(\cos n)x^n$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{10\cdot\cos(n+1)\cdot x^{n+1}}{10\cdot\cos(n)\cdot x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\cos(n+1)}{\cos(n)}x\right| < 1$$

$$=|x|<1$$

$\therefore$ $R=1$. 해당 수열을 Ratio Test를 통해 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\cos(n+1)}{\cos(n)}x\right|$ 가 1을 넘지 않는 수를 찾으면 되는데, 이 때 n이 충분히 클 경우 $\frac{\cos(n+1)}{\cos(n)}$은 1에 수렴하므로 $|x|<1$ 이 성립된다. 그러므로 수렴반지름은 1 이다.

7. $f(x) = \sin^{2021} x \cdot \cos^{2023} x$

$$|f(x) - f(x_0)| = |\sin^{2021} x \cdot \cos^{2023} x - \sin^{2021} x_0 \cdot \cos^{2023} x_0|$$

$-1 \le \sin x \le 1$, $-1 \le \cos x \le 1$ 이기 때문에

$-1 \le \sin^{2021} x \le 1$, $-1 \le \cos^{2023} x \le 1$.

X 가 충분히 (+/−) 크다면, $X \gg f(X)$ 이기 때문에

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon < |x - x_0| < \delta$ 을 만족하는 ε 와 δ를 구할 수 있다

8.