Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет ИТМО»

Расчетно-графическая работа

по дисциплине

«Методы оптимизации»

Выполнил: Батаргин Егор Александрович

Группа: P3332

ITMO.ID: 335189

г. Санкт-Петербург, 2025 г.

Постановка задачи

i = 2 – номер студента

Содержание витаминов

Витамин	**Смесь 1**	**Смесь 2**
A	0%	0.1%
B	0.3%	$3 - \frac{2}{24} * 0{,}1\% = 0{,}0292\%$
C	0.1%	$(2 + \frac{2}{30} * 0{,}1\% = 0{,}0207\%$

Суточная норма витаминов:

Витамин	**Норма (г)**
A	0.003
B	0.027
C	0.012

Цена смесей:

Смесь	**Цена (руб./г)**
Смесь 1	0,1
Смесь 2	0,015*(3+|2-6|) = 0,09

Введем две переменные:

- x_1 - количество смести 1 (в граммах)
- x_2 – количество смеси 2 (в граммах)

Формулируем задачу линейного программирования

$$\min Z = 0.1 * x_1 + 0.09 * x_2$$

Теперь составим ограничения по содержанию для каждого витамина:

- Витамин А
    - $0.001 * x_2 \geq 0.003 \rightarrow x_2 \geq 3$
- Витамин В
    - $0.0003 * x_1 + 0.000292 * x_2 \geq 0.027$
- Витамин С
    - $0.001 * x_1 + 0.000207 * x_2 \geq 0.012$

Так же установим, что : $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$

Решение графическим методом

По сути мы можем определить только выгодную стоимость рациона, чтобы соблюдалась норма. А выгодная стоимость = минимальная. А минимальная стоимость — это тогда, когда эти смеси стоят минимально

Ограничения уже сформулированы. Приступим к поиску точек пересечений. И поскольку по витамину А у нас подходит только смесь 2 (x_2), то поиск точек пересечений в ограничениях будет идти для витаминов В и С. В ограничении для витамина В мы умножим все на 100.

$$\begin{cases} 3 * x_1 + 0.292 * x_2 = 27 \ (2) \\ x_1 + 0.207 * x_2 = 12 \ (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 * x_1 + 0.292 * x_2 = 27 \\ x_1 = 12 - 0.207 * x\_2 \end{cases}$$

Теперь подставим выраженное значение x_1 в первое уравнение

$$3 * (12 - 0{,}207 * x_2) + 0.292 * x_2 = 27$$

$$36 - 0.621 * x_2 + 0.292 * x_2 = 27$$

$$0.329 * x_2 = 27$$

$$x_2 \approx 27.37$$

Узнав значение x_2 мы можем вычислить x_1

$$x_1 = 12 - 0.207 * 27.37 \approx 6.33$$

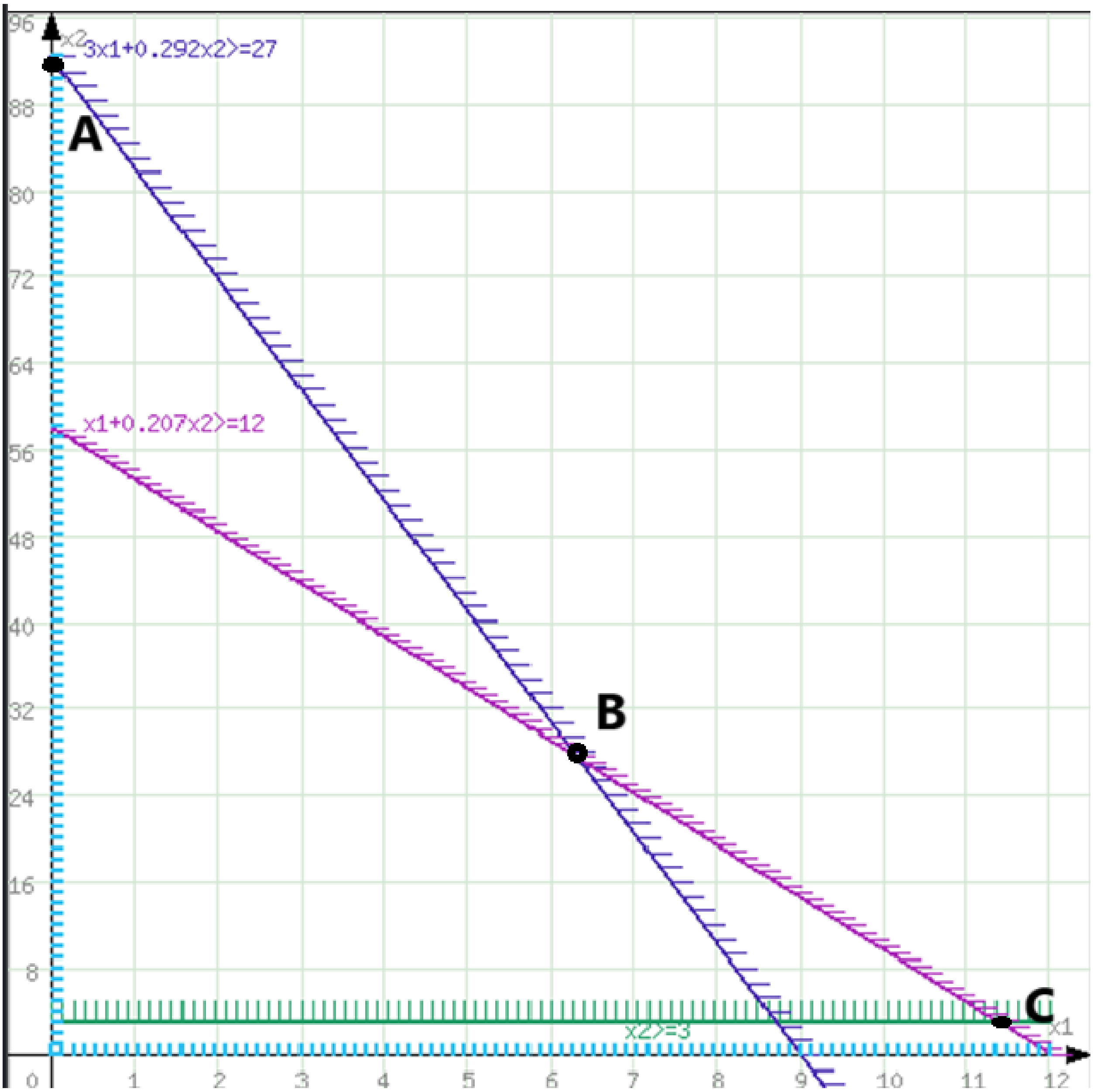
В итоге мы выполнили все ограничение, в том числе и для витамина А, где

$$x_2 \geq 3$$

Таким образом у нас есть одна точка (6.33, 27.37). Таким образом мы вычислили необходимое количество смеси 1 и смеси 2 для нормы для витаминов А, В и С. Касаемо график это еще одна точка для ограничения области допустимых значений.

Так же на графике будет линия, где $x_2 = 3$, поскольку у нас для витаминов А стоит ограничение $x_2 \geq 3$

Теперь можно построить график



Точку В мы уже знаем, узнаем точку С:

$$\begin{cases} x_2 = 3 \\ x_1 + 0.207 * x_2 = 12 \end{cases}$$

$$x_1 + 0.621 = 12$$

$$x_1 = 11.379$$

Точка А:

$$0.292 * x_2 = 2 -$$

$$x_2 = 92.47$$

Теперь мы знаем все точки:

- C $(11.379, 3)$
- B (6.33, 27.37)
- A (0, 92.47)

Теперь построим прямую:

$$C = 0.1 * x_1 + 0.09 * x_2$$

Однако, поскольку мы все умножали на 100, то и здесь тоже надо

$$C = 10 * x_1 + 9 * x_2$$

Градиент будет равен (10, 9). И первая точка, которая будет пересекаться – C

Значит это есть минимум: $x_1 = 11.379,\ x_2 = 3$.

Значит выгодная цена смеси 1 = 1.1379

Решение сиплекс-методом

Расчетно-графическая работа

Метод симплекс

Максимизируем функцию:

$Z = 10x_1 + 9x_2$

$x_2 - s_1 = 3$

$3x_1 + 0.292x_2 - s_2 = 27$

$x_1 + 0.207x_2 - s_3 = 12$

$\{x_1, x_2, x_3, x, \geq 0\}$

Начальная симплек-таблица:

базис	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Реш
s_1	0	1	-1	0	0	3
s_2	3	0.292	0	-1	0	27
s_3	1	0.207	0	0	-1	12
Z	10	9	0	0	0	0

Проверка усл. оптимальност

$$\Delta_j = C_j - \sum_{i=1}^{m} C_i a_{ij}$$

Для x_1: $\Delta_1 = 10$

Для x_2: $\Delta_2 = 9 - (0 \cdot 1 + 0 \cdot 0.292 + 0 \cdot 207)$

1

Так как $\Delta_1 - 10 > \Delta_2$, то x_1 - ведущий столбец

$\min\left(\frac{27}{3}; \frac{12}{1}\right) = 9$, что соответствует $s_2 \Rightarrow$

s_2 - ведущая строка

Ведущий элемент $= 3$

Обновим таблицу

Обновление будет идти по правилам

Новая строка ведущая $= \dfrac{\text{Старая строка ведущ.}}{\text{ведущий эл.}}$

Новая строка$_{s_1}$ = Старая строка$_{s}$ $- t_i$ Новая строка ведущая

Новая строка s_3 = Старая строка$_{s_3}$ $\cdot$

$\cdot\ t_i \cdot$ Новая строка ведущая

Новая строка Z = старая строка $Z - t_i \cdot$

$\cdot$ новая строка ведущая

t_i - элемент на i-й строке в ведущем столбце для S_i и Z.

Новая таблица

Базис	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Реш
s_1	0	1	-1	0	0	3
x_1	1	0.0973	0	-0.3333	0	9
s_3	0	0.1097	0	0.3333	-1	3
z	0	8.027	0	3.33	0	-90

Проверка условий оптимальности

$\Delta_2 = 8.027 - (0 \cdot 1 + 0 \cdot 0.0973 + 0.1097) = 8.027$

$\Delta s_2 = 3.333$

Ведущий столбец: x_2

$\min\left(\frac{3}{1}; \frac{9}{0.0973}; \frac{3}{0.1097}\right) = 3 \Rightarrow$ Ведущая строка s_1, ведущий элемент -1

Базис	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Реш
x_2	0	1	-1	0	0	7
x_1	1	0	0.0973	-0.3333	0	8.7081
s_3	0	0	0.1097	0.333	-1	2.6709
z	0	0	8.027	3.333	0	-114.081

$\Delta_{S_1} = 8.027$ – ведущий столбец

$\Delta_{S_2} = 3.333$

$\min\left(\frac{8.7081}{0.0973}; \frac{2.6705}{0.1097}\right) = \frac{2.6709}{0.1097}$ (игнорируем знач. <0)

Ведущая строка $= S_3 = 7$

Ведущий элемент $= 1.097$

	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	Реш
x_2	0	1	0	3.039	-9.118	27.35
x_1	1	0	0	-0.6291	0.887	6.3391
S_1	0	0	1	3.039	-9.118	24.35
Z	0	0	0	-21.057	73.19	-309.481

$\Delta_{S_2} = -21.057$

$\Delta_{S_3} = 73.19$ – ведущий столбец

$\min\left(\underset{x_2}{\frac{27.35}{-9.118}}; \underset{x_1}{\frac{6.3391}{0.887}}; \underset{S_1}{\frac{24.35}{-9.118}}\right) = \frac{6.3391}{0.887}$

отрицательные игнорируем.

Ведущая строка x_1, элемент – 0.887

Базис	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	решение
x_2	0	1	0	9.499	-18.28	-37.85
x_1	1.127	0	0	-0.709	1	7.15
s_1	0	0	1	9.499	-18.28	-40.85
z	0	0	0	-103.557	0	-832.981

$\Delta_{s_2} = -103.557$

$\Delta_{s_3} = 0$

Δ_{s_2} и $\Delta_{s_3} \leq 0$

$x_1 = 7.75$

$x_2 = -37.83$

$z = -832.981$

Однако $x_2 = -37.85$, что нарушает условие, и задача не имеет допустимого решения.

Решение через двойственную

Решение через двойственную

Зная фин. задачу, сделаем целевую функцию для двойственной

$W = 0.003 y_1 + 0.027 y_2 + 0.012 \to max$

$0.0003 y_2 + 0.001 y_3 \le 0.1$

$\cancel{0.003 y_2 +}$

$0.001 y_1 + 0.000292 y_2 + 0.000207 y_3 \le 0.09$

Пусть $y_1 = 0$, то по x_2 упрощение

$0.000292 y_2 + 0.000207 y_3 \le 0.09 \Rightarrow$

$W = 0.027 y_2 + 0.012 y_3 \to max$

$$\begin{cases} 0.003 y_2 + 0.001 y_3 \le 0.1 \\ 0.000292 y_2 + 0.000207 y_3 \le 0.09 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_3 \le 100 - 0.3 \\ 0.000292 y_2 + 0.000207 y_3 \le 0.09 \end{cases}$$

$0.000292 y_2 + 0.000207(100 - 0.3 y_2) \le 0.09$

$y_2 \le \frac{0.0693}{0.0002295} \approx 301.4$

$y_3 \le 100 - 0.3 \cdot 301.4 = 9.58$

(6) $W = 0.027 \cdot 301.4 + 0.012 \cdot 9.58 \approx 8.2528$

$Z = W$

$x_2 = 3$

$0.0003x_1 + 0.000292x_2 \geq 0.027$

$0.0003x_1 + 0.000876 \geq 0.027 \Rightarrow$

$x_1 \geq \frac{0.026124}{0.0003} \approx 87.08$ г

смесь1 $= 0.1 \cdot x_1 = 8.708$ руб

Ответ: 8.708 руб.