

# ***Методы оптимизации***

## ***Лекция 6. Двойственная задача линейного программирования***

*Селина Елена  
Георгиевна*

# Постановка и правила построения двойственной задачи

Каждой задаче линейного программирования можно поставить в соответствие другую задачу линейного программирования, составленную определенным образом. Связь между первой задачей и второй задачей, которую будем называть двойственной, заключается в том, что из решения одной задачи можно получить решение другой.

Пусть есть задача линейного программирования, записанная в матричной форме:

Найти

$$\max\{C^T X | AX \leq B, X \geq 0\} \quad (25)$$

Будем ее называть прямой задачей. Двойственной задаче (25) называется следующая задача:

Найти

$$\min\{B^T \lambda | A^T \lambda \leq C, \lambda \geq 0\} \quad (26)$$

Переменные  $\lambda$  называют двойственными переменными.

## Постановка и правила построения двойственной задачи

При переходе от исходной задачи к соответствующей двойственной задаче производят следующие преобразования:

1. заменяют максимизацию целевой функции минимизацией;
2. знак неравенств – ограничений меняется на противоположный. Если в исходной задаче неравенство меньше или равно нулю, то в двойственной задаче – больше или равно нулю;
3. число переменных  $x_i$  в исходной задаче равно числу ограничений в двойственной, и наоборот;
4. матрица  $A$  системы ограничений исходной задачи транспонируется;
5. векторы  $B$  и  $C$  меняются местами, т.е. коэффициенты целевой функции исходной задачи ( $C$ ) становятся столбцом свободных членов системы ограничений двойственной задачи, а столбец свободных членов системы ограничений исходной задачи ( $B$ ) становится коэффициентами целевой функции двойственной задачи.

Если  $A$  имеет размер  $m \times n$ , то  $X \in R^n, \lambda \in R^m$ .

$m < n \Rightarrow$  размерность двойственной задачи меньше размерности прямой.



В симметричных задачах система ограничений как исходной, так и двойственной задачи задается неравенствами, причем на двойственные переменные налагается условие неотрицательности.

В несимметричных задачах система ограничений исходной задачи задается в виде равенств, а система ограничений двойственной в виде неравенств, причем если в целевой функции двойственной задачи требуется найти минимум, то знак неравенств  $\geq$ , если максимум, то  $\leq$ . Кроме того, в двойственной задаче переменные могут принимать любое значение, в том числе и отрицательные.

Взаимозависимость исходной и двойственной задач определяется рядом теорем.

# Первая теорема двойственности

**Теорема.** Рассмотрим несимметричную пару двойственных задач:

$$\max\{C^T X | AX = B, X \geq 0\} \quad (27)$$

и

$$\min\{B^T A^T \lambda \geq C\} \quad (28)$$

Пусть  $X^*$  и  $\lambda^*$  являются соответственно решениями прямой и двойственной задач.  $f_{\Pi}(X^*)$ ,  $f_{\Delta}(\lambda^*)$  соответственно точки максимума и минимума. Тогда:

$$f_{\Pi}(X^*) = f_{\Delta}(\lambda^*)$$

Выполняются соотношения дополняющей нежесткости:

$$X_j^* (A^T \lambda^* - C)_j = 0$$

Если одна из задач имеет неограниченное решение, то другая не имеет допустимого решения, но не наоборот:

$$f_{\Pi} = \infty \Rightarrow \lambda = \emptyset$$

$$f_{\Delta} = \infty \Rightarrow X = \emptyset$$

## **Доказательство.**

1а) Докажем сначала, что для любых допустимых  $X, \lambda$  выполняется:  $f_D(\lambda^*) \geq f_P(X^*)$

Рассмотрим ограничения двойственной задачи:

$$A^T \lambda \geq C$$

Транспонируем обе части:

$$\lambda^T A \geq C^T$$

Умножим обе части на  $X \geq 0$ :

$$\lambda^T A X \geq C^T X$$

$$\lambda^T B \geq C^T X$$

$\lambda^T B$  – произведение строки на столбец, следовательно это скаляр и при транспонировании не изменится.

$$B^T \lambda \geq C^T X$$

Следовательно,

$$f_D(\lambda^*) \geq f_P(X^*)$$

16) Докажем теперь, что  $f_D(\lambda^*) = f_\Pi(X^*)$

Предположим, что мы решили прямую задачу симплекс-методом и получено оптимальное решение  $X^*$ .

Рассмотрим последний шаг симплекс-метода. Для удобства базисная матрица стоит в начале. Тогда ограничение записывается так:

$$A_b^* X_b^* + A_c^* X_c^* = B$$

$$X^* = \begin{pmatrix} X_b^* \\ X_c^* \end{pmatrix}$$

$$X_c^* = 0$$

$$X_b^* = A_b^{*-1} B$$

$$f_\Pi(X^*) = C^T X^* = C_b^{*T} X_b^* + C_c^{*T} X_c^* = C_b^{*T} A_b^{*-1} B \quad (29)$$

I. Покажем, что  $\lambda^T = C_6^{*T} A_6^{*-1}$  является допустимым значением двойственной задачи, то есть  $A^T \lambda \geq C$

Транспонируем:

$$\lambda^T A \geq C^T$$

Для  $j$ -го элемента:

$$\lambda^T a_j \geq c_j$$

Надо показать, что  $\lambda$  удовлетворяет

$$c_j - \lambda^T a_j \leq 0 \quad c_j - C_6^{*T} A_6^{*-1} a_j \leq 0, j = \overline{1, n}$$

или  $\Delta_j^* \leq 0$

На последнем шаге симплекс-метода  $\Delta_j^* \leq 0$

Поскольку все выкладки равносильны, то идя по обратному пути придём к тому, что  $A^T \lambda \geq C$ .



Покажем, что это  $\lambda$  оптимальное.

$$f_D(\lambda) = B^T \lambda = \lambda^T B = C_6^{*T} A_6^{*-1} B = f_\Pi(X^*) \text{ (по (29))}$$

Возьмём  $\bar{\lambda}$  - любое, удовлетворяющее ограничению двойственной задачи,  $X^*$  - оптимальное решение прямой задачи.

$$f_D(\bar{\lambda}) \geq f_\Pi(X^*) = f_D(\lambda) = f_D(C_6^{*T} A_6^{*-1} B)$$

Получили, что для любого  $\bar{\lambda}$ , удовлетворяющего ограничению двойственной задачи,

$$f_D(C_6^{*T} A_6^{*-1} B) \leq f_D(\bar{\lambda})$$

Значит

$\lambda^* = C_6^{*T} A_6^{*-1} B$  – оптимальное решение двойственной задачи и  $f_\Pi(X^*) = f_D(\lambda^*)$

2) Условие дополняющей нежесткости.

Надо доказать:

$$X_j^* (A^T \lambda^* - C)_j = 0$$

$$\text{Но } (A^T \lambda^* - C)_j = -\Delta_j^*$$

То есть нужно доказать:

$$X_j^* \Delta_j^* = 0$$

Так как  $X^*$  удовлетворяет ограничениям задачи, возможны два варианта:

$X^* = 0$ . Тогда условие дополняющей нежесткости выполнено.

$X^* > 0 \Rightarrow j \in J_6 \Rightarrow \Delta_j^* = 0 \Rightarrow$  условие дополняющей нежесткости выполнено.

3) Пусть для определенности прямая задача имеет неограниченное решение  $f_{\Pi} = \infty$ . Докажем, что двойственная задача не имеет допустимого решения. Допустим противное. Пусть существует  $\bar{\lambda}$  - допустимое решения двойственной задачи.

$$f_{\text{Д}}(\bar{\lambda}) = B^T \bar{\lambda} < \infty$$

По пункту 1а  $f_{\text{Д}} \geq f_{\Pi} = \infty$ . Противоречие.

Аналогично доказывается если  $f_{\text{Д}} = -\infty$ , то нет допустимого решения у прямой задачи.

Теорема доказана.

## Вторая теорема двойственности

**Теорема.** Рассмотрим симметричную пару двойственных задач.

$$\max\{C^T X \mid AX \leq B, X \geq 0\} \quad (30) \quad \text{и}$$

$$\min\{B^T A^T \lambda \geq C, \lambda \geq 0\} \quad (31)$$

Пусть  $X^*$  и  $\lambda^*$  являются соответственно решениями прямой и двойственной задач.  $f_{\Pi}(X^*)$ ,  $f_{\text{Д}}(\lambda^*)$  соответственно точки максимума и минимума. Тогда:

$$f_{\Pi}(X^*) = f_{\text{Д}}(\lambda^*)$$

Выполняются соотношения дополняющей нежесткости:

$$\text{а) } X_j^* (A^T \lambda^* - C)_j = 0, j = \overline{1, n}$$

$$\text{б) } \lambda_i^* (AX^* - B)_i = 0, i = \overline{1, m}$$

Если одна из задач имеет неограниченное решение, то другая не имеет допустимого решения, но не наоборот:

$$f_{\Pi} = \infty \Rightarrow \lambda = \emptyset$$

$$f_{\text{Д}} = \infty \Rightarrow X = \emptyset$$

## Доказательство.

Сведём прямую задачу (30) к каноническому виду.

Введём  $\bar{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \begin{matrix} n \\ m \end{matrix}$

$$\max\{\bar{C}^T \bar{X} \mid \bar{A} \bar{X} = B, \bar{X} \geq 0\}, \quad \bar{C} = \begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bar{A} = \begin{array}{|c|c|} \hline A & E \\ \hline \end{array} \quad (32)$$

$$\bar{C}^T \bar{X} = C^T X, \quad \bar{A} \bar{X} = AX + Y = B, \quad X \geq 0, \quad Y \geq 0$$

Задача (32) полностью эквивалентна задаче (30).

В соответствии с первой теоремой двойственности можно написать двойственную задачу для задачи (32):

$$\min\{B^T \bar{A}^T \lambda \geq \bar{C}\} \quad (33)$$

Условие неравенства в ограничениях задачи (33) распадается на два неравенства.

$$\begin{array}{|c|} \hline A^T \\ \hline E \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline C \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} \quad A^T \lambda \geq C, \quad \lambda \geq 0$$

Таким образом, задача (33) полностью эквивалентна задаче (31). Значит, между (30) и (31) выполняются те же самые соотношения, что и между (32) и (33).

По первой теореме двойственности для задач (32) и (33):

$$\left. \begin{array}{l} f_{\Pi} = f_{\text{Д}} \\ f_{\Pi} = \bar{C}^T \bar{X}^* = C^T X^* \\ f_{\text{Д}} = B^T \lambda^* \end{array} \right\} \Rightarrow C^T X^* = B^T \lambda^* \Rightarrow f_{\Pi}(X^*) = f_{\text{Д}}(\lambda^*)$$

2) По первой теореме двойственности для (32) и (33)

$$\bar{X}_j^* (\bar{A}^T \lambda^* - \bar{C})_j = 0, \quad j = \overline{1, m+n}$$

$$\bar{X}^{*T} (\bar{A}^* \lambda^* - \bar{C}) = 0$$

$X^T$	$Y^T$	$A^T \lambda - C$
		$\lambda - 0$

Разбиваем на две части.

$$X_j^* (\bar{A}^T \lambda^* - C)_j = 0, \quad j = \overline{1, n}$$

$$Y_i^* \lambda_i^* = 0, \quad i = \overline{1, m}$$

$$Y = B - AX^* \Rightarrow Y_i^* = (B - AX^*)_i$$

$$(B - AX^*)_i \lambda_i^* = 0, \quad i = \overline{1, m}$$

$$(B - AX^*)^T \lambda^* = 0$$

$$\lambda^{*T} (B - AX^*) = 0$$

$$\lambda_i^* (AX^* - B)_i = 0, \quad i = \overline{1, m}$$

3) Докажем сначала вспомогательное утверждение:

$$\left. \begin{array}{l} f_D(\lambda) \geq f_P(X) \\ \lambda^T * \mid AX \leq B \quad \lambda^T AX \leq \lambda^T B \\ A^T \lambda \geq C \quad \lambda^T A \geq C^T \mid * X \geq 0 \quad \lambda^T AX \geq C^T X \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda^T B \geq C^T X \Rightarrow B^T \lambda \geq C^T X$$

Следовательно,  $f_D(\lambda) \geq f_P(X)$ .

Пусть для определенности прямая задача имеет неограниченное решение  $f_P = \infty$ . Докажем, что двойственная задача не имеет допустимого решения.

Допустим противное. Пусть существует  $\bar{\lambda}$  - допустимое решения двойственной задачи.

$$f_D(\bar{\lambda}) = B^T \bar{\lambda} < \infty$$

По вспомогательному утверждению  $f_D \geq f_P = \infty$ . Противоречие.

Аналогично доказывается если  $f_D = -\infty$ , то нет допустимого решения у прямой задачи.

Теорема доказана.



## Задание для домашней расчетной работы

**Условие задачи** ( $i$  – Ваш номер в журнале преподавателя)

Для кормления животного ежедневно требуются витамины А, В и С. Эти витамины содержатся в кормовых смесях двух видов. Известно процентное содержание каждого витамина в каждой из смесей, дневная норма витаминов и цена каждой смеси. Определить наиболее дешёвый рацион, обеспечивающий норму. При какой цене смеси 1 её будет невыгодно (выгодно) использовать в рационе?

	Смесь 1	Смесь 2	Норма
А	-	0,1 %	0,003 г.
В	0,3 %	$\left(3 - \frac{i}{24}\right) \cdot 0,1\%$	0,027 г.
С	0,1%	$\left(2 + \frac{i}{30}\right) \cdot 0,1\%$	$\left(12 + \frac{i}{2}\right) \cdot 0,001$ г.
Цена	0,1 руб./г.	$0,015 \cdot (3 +  i - 6 )$ руб./г.	.

Решить 3 способами:

- Графический метод
- Симплекс-метод
- Через двойственную задачу

## Пример решения домашней расчетной работы.

### I. Условие задачи

Для кормления животного ежедневно требуются витамины А, В и С. Эти витамины содержатся в кормовых смесях двух видов. Известно процентное содержание каждого витамина в каждой из смесей, дневная норма витаминов и цена каждой смеси. Определить наиболее дешёвый рацион, обеспечивающий норму. При какой цене смеси 1 её будет невыгодно (выгодно) использовать в рационе?

	Смесь 1	Смесь 2	Норма
А	-	0,1 %	0,003 г.
В	0,3 %	0,217%	0,027 г.
С	0,1%	0,267 %	0,022 г.
Цена	0,1 руб./г.	0,255 руб./г.	.

Решить 3 способами:

- Графический метод
- Симплекс-метод
- Через двойственную задачу

## II. Математическая постановка задачи

Обозначим  $x_1^*$ ,  $x_2^*$  - вес оптимального количества корма 1 и 2 соответственно. Тогда нам надо решить следующую задачу линейного программирования: найти минимум  $f$  при ограничениях (1)

$$f = 0,1x_1 + 0,255x_2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 0,001x_2 \geq 0,003 \\ 0,003x_1 + 0,00217x_2 \geq 0,027 \\ 0,001x_1 + 0,00267x_2 \geq 0,0215 \end{cases} \quad (1)$$

Или:  $\min\{C^T X \mid AX \geq B, X \geq 0\}$

$$\text{Где } C = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,255 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0,001 \\ 0,003 & 0,00217 \\ 0,001 & 0,00267 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0,003 \\ 0,027 \\ 0,022 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_2 \geq 3 \\ 3x_1 + 2,17x_2 \geq 27 \\ x_1 + 2,267 \geq 22 \end{cases}$$

Графический метод.

$$f = 0,1x_1 + 0,255 \rightarrow \min$$

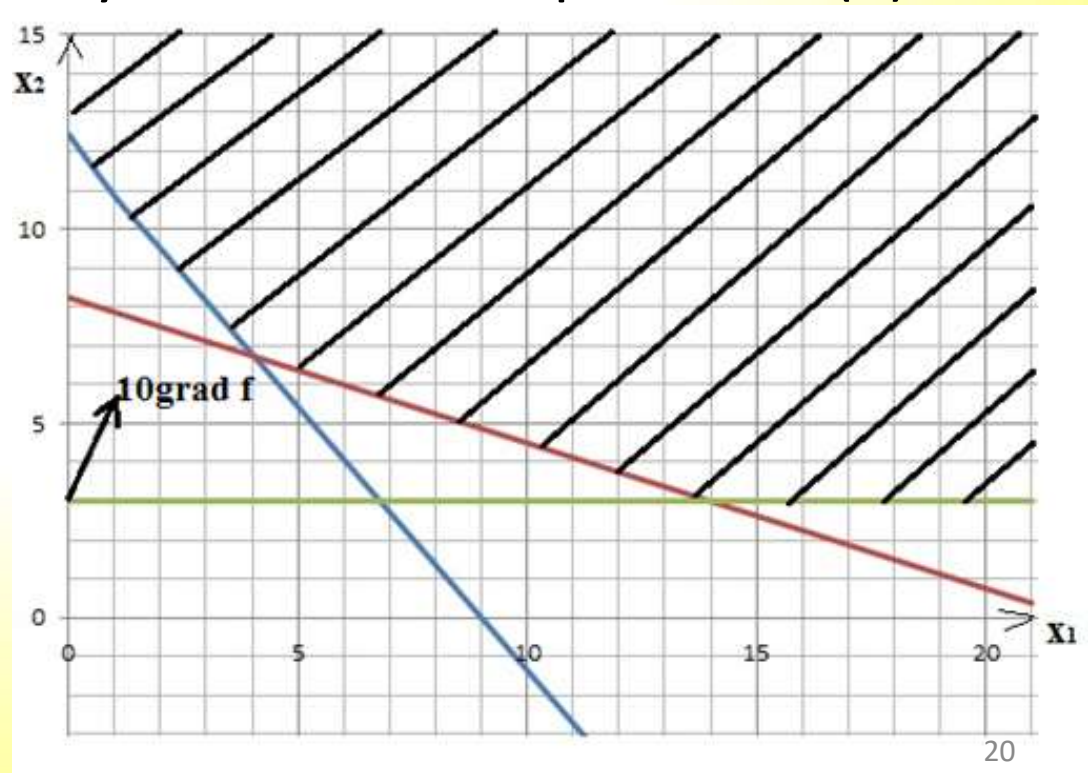
При следующих ограничениях:

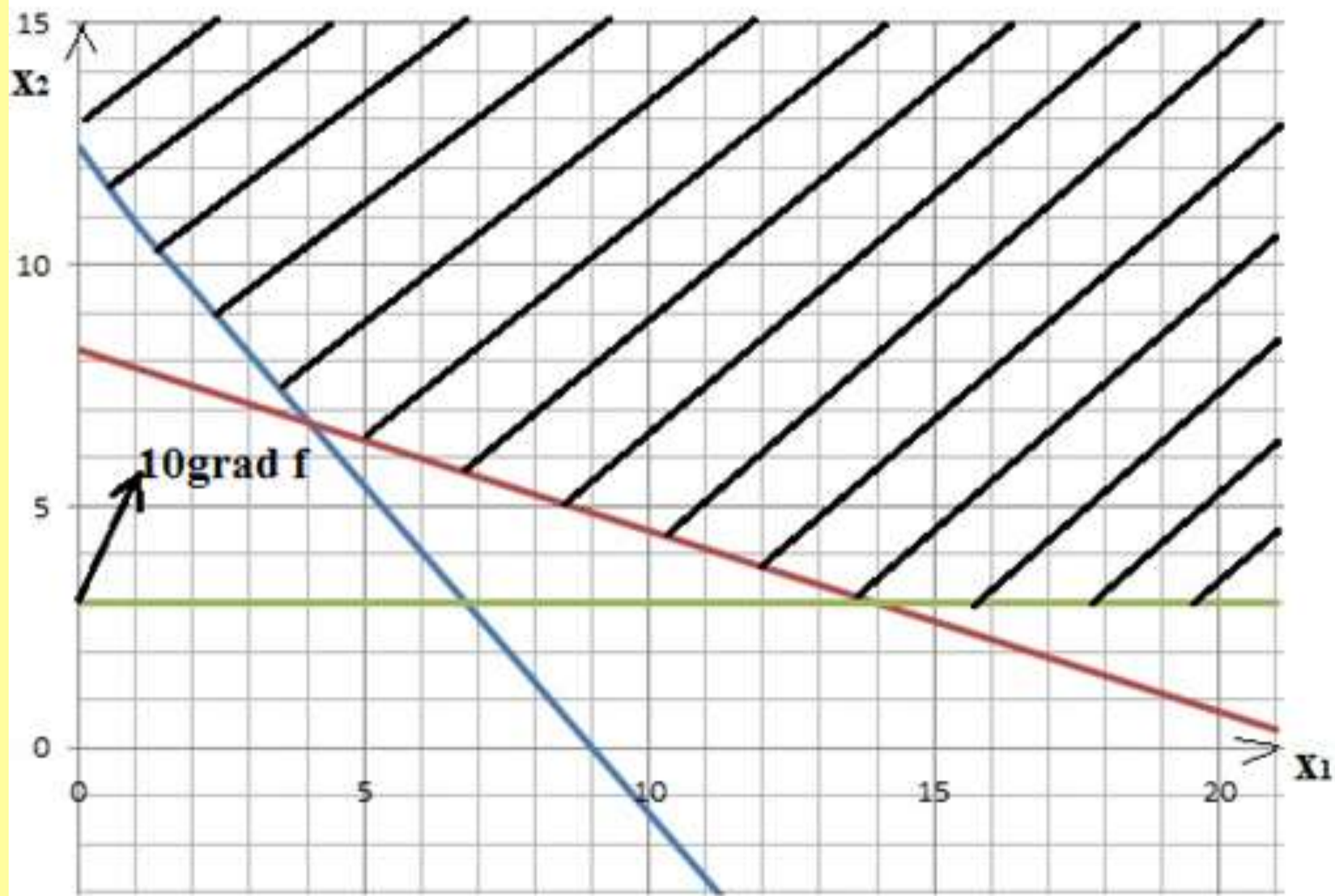
$$\begin{cases} x_2 \geq 3 \\ 3x_1 + 2,17x_2 \geq 27 \\ x_1 + 2,67x_2 \geq 2,2 \end{cases} \quad (2)$$

Построим область G, заданную системой неравенств (2) и

$$graf = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,255 \end{pmatrix}$$

Удобно построить  $\begin{pmatrix} 1 \\ 2,55 \end{pmatrix}$





Движемся противоположно направлению градиента и определим оптимальное решение. Оно расположено на пересечении следующих прямых:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2,17x_2 = 27 \\ x_1 + 2,67x_2 = 22 \end{cases} \quad \begin{cases} 66 - 8,01x_2 + 2,17x_2 = 27 \\ x_1 = 22 - 2,67x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5,84x_2 = 39 \\ x_1 = 22 - 2,67x_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 6,678 \\ x_1 = 4,1695 \end{cases}$$

Следовательно  $x_1^* = 4,1695$

$$x_2^* = 6,678$$

$$X^* = \begin{pmatrix} 4,1695 \\ 6,678 \end{pmatrix}$$

Вычислим  $f^*$

$$\begin{aligned} f^* &= 0,1x_1^* + 0,255x_2^* = 0,1 * 4,1695 + 0,255 * 6,678 \\ &= 2,11984 \approx 2,12 \end{aligned}$$

#### IV. Симплекс-метод.

Зная, что

$$\min(0,1x_1 + 0,255x_2) = -\max(-0,1x_1 - 0,255x_2)$$

будем искать  $\max$  функции  $-f$

Приведем задачу к каноническому виду, введя дополнительные переменные  $x_3, x_4, x_5$ . При этом выберем эти переменные так, чтобы при их прибавлении к левым частям соотношений неравенства превращались в равенства.

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2,17x_2 - x_4 = 27 \\ x_1 + 2,67x_2 - x_5 = 22 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,5} \end{cases}$$

Применим метод искусственного базиса. Для этого введем переменные  $y_1, y_2, y_3$

$$\begin{cases} x_2 - x_3 + y_1 = 3 \\ 3x_1 + 2,17x_2 - x_4 + y_2 = 27 \\ x_1 + 2,67x_2 - x_5 + y_3 = 22 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,5} \\ y_j \geq 0, j = \overline{1,3} \end{cases}$$

Будем решать вспомогательную задачу

$$W = y_1 + y_2 + y_3 \rightarrow \min$$

$$y_1 = 3 - x_2 + x_3$$

$$y_2 = 27 - 3x_1 - 2,17x_2 + x_4$$

$$y_3 = 22 - x_1 - 2,67x_2 + x_5$$

$$W = -4x_1 - 5,84x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 52$$



	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\beta$
$y_1$	0	-1	1	0	0	3
$y_2$	-3	-2,17	0	1	0	27
$y_3$	-1	-2,67	0	0	1	22
W	-4	-5,84	1	1	1	52

Выбираем большую по модулю отрицательную  $\Delta$ . Видим, что при увеличении  $x_2$  быстрее всего до нуля доходит  $y_1$ . Меняем  $y_1$  и  $x_2$  местами.

$$x_2 = 3 + x_3 - y_1$$

$$\begin{aligned} y_2 &= 27 - 3x_1 - 2,17(3 + x_3 - y_1) + x_4 = \\ &= 20,49 - 3x_1 - 2,17x_3 + 2,17y_1 + x_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_3 &= 22 - x_1 - 2,67(3 + x_3 - y_1) + x_5 = \\ &= 13,99 - x_1 - 2,67x_3 + 2,67y_1 + x_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W &= -4x_1 - 5,84(3 + x_3 - y_1) + x_3 + x_4 + x_5 + 52 = \\ &= -4x_1 + 5,84y_1 - 4,84x_3 + x_4 + x_5 + 34,48 \end{aligned}$$

	$x_1$	$y_1$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$\beta$
$x_2$	0	-1	1	0	0	3
$y_2$	-3	2,17	-2,17	1	0	20,49
$y_3$	-1	2,67	-2,67	0	1	13,39
W	-4	5,84	-4,84	1	1	34,48

Выбираем большую по модулю отрицательную  $\Delta$ . Видим, что при увеличении  $x_3$  быстрее всего до нуля доходит  $y_3$ . Меняем  $y_3$  и  $x_3$  местами.

$$x_3 = -0,375x_1 + y_1 - 0,375y_3 + 0,375x_5 + 5,24$$

$$x_2 = 3 + (-0,375x_1 + y_1 - 0,375y_3 + 0,375x_5 + 5,24) - y_1 =$$

$$= 8,24 - 0,375x_1 - 0,375y_3 + 0,375x_5$$

$$y_2 = 20,37 - 3x_1 - 2,21(-0,375x_1 + y_1 - 0,375y_3 + 0,375x_5 +$$

$$+ 5,24) + 2,17y_1 + x_4 = 9,119 - 2,186x_1 + 0,814y_3 +$$

$$+ x_4 - 0,814x_5$$

$$W = -4x_1 + 5,84y_1 - 4,84(+(-0,375x_1 + y_1 - 0,375y_3 +$$

$$+ 0,375x_5 + 5,24) + x_4 + x_5 + 34,48 =$$

$$= -2,185x_1 + y_1 + 1,815y_3 + x_4 - 0,815x_5 + 9,089$$

	$x_1$	$y_1$	$y_3$	$x_4$	$x_5$	$\beta$
$x_2$	-0,375	0	-0,375	0	0,375	8,246
$y_2$	-2,186	0	0,814	1	-0,814	9,119
$x_3$	-0,375	1	-0,375	0	0,375	5,246
W	-2,185	1,815	1	1	-0,815	9,089

Выбираем большую по модулю отрицательную  $\Delta$ . Видим, что при увеличении  $x_1$  быстрее всего до нуля доходит  $y_2$ . Меняем  $y_2$  и  $x_1$  местами.

$$x_1 = -0,457y_2 + 0,372y_3 + 0,457x_4 - 0,372x_5 + 4,17$$

$$x_2 = -0,375(-0,457y_2 + 0,372y_3 + 0,457x_4 - 0,372x_5 + 4,17) - 0,375y_3 + 0,375x_5 + 8,24 =$$

$$= 0,171y_2 - 0,515y_3 - 0,171x_4 + 0,515x_5 + 6,678$$

$$x_3 = -0,375(-0,457y_2 + 0,372y_3 + 0,457x_4 - 0,372x_5 + 4,17) + y_1 - 0,375y_3 + 0,375x_5 + 5,24 =$$

$$= 0,171y_2 + y_1 - 0,515y_3 - 0,171x_4 + 0,515x_5 + 3,678$$

$$W = -2,185(-0,457y_2 + 0,372y_3 + 0,457x_4 - 0,372x_5 + 4,17) + y_1 + 1,815y_3 + x_4 - 0,815x_5 + 9,089 = y_1 + y_2 + y_3$$

	$y_2$	$y_1$	$y_3$	$x_4$	$x_5$	$\beta$
$x_2$	0,171	0	-0,515	-0,171	0,515	6,678
$x_1$	-0,457	0	0,372	0,457	-0,372	4,17
$x_3$	0,171	1	-0,515	-0,171	0,515	3,678
W	1	1	1	0	0	0

Видим, что выполнен критерий оптимальности: все  $\Delta \geq 0$ .  
 Вспомогательная задача решена. Вернёмся теперь к исходной задаче. Выбросим вспомогательные переменные  $y_1, y_2, y_3$ , так как они нам больше не понадобятся.

$$x_1 = 4,17 + 0,457x_4 - 0,372x_5$$

$$x_2 = 6,678 - 0,171x_4 + 0,515x_5$$

$$x_3 = 3,678 - 0,171x_4 + 0,515x_5$$

$$\begin{aligned}
 f &= 0,1x_1 + 0,255x_2 = 0,1(4,17 + 0,457x_4 - 0,372x_5) + \\
 &+ 0,255(6,678 - 0,1761 + 0,515x_5) = \\
 &= 2,11949 + 0,0021x_4 + 0,0941x_5
 \end{aligned}$$

	$x_4$	$x_5$	$\beta$
$x_2$	-0,171	0,515	6,678
$x_1$	0,457	-0,372	4,17
$x_3$	-0,171	0,515	3,678
-f	-0,0021	-0,0941	-2,11949

Обе характеристические разности отрицательные.  
Найдено оптимальное решение.

$$x_1^* = 4,17$$

$$x_2^* = 6,678$$

$$f^* = 2,11949 \approx 2,12$$

## V. Решение двойственной задачи.

Прямая задача:

$$\min\{C^T X \mid AX \geq B, X \geq 0\}$$

$$\begin{cases} x_2 \geq 0,003 \\ x_1 \geq 0 \\ 0,003x_1 + 0,00217x_2 \geq 0,027 \\ x_1 + 0,00267x_2 \geq 0,022 \end{cases}$$

и функционал  $\min\{0,1x_1 + 0,255x_2\}$

Построим двойственную задачу:

$$\max\{B^T \lambda \mid A^T \lambda \leq C, \lambda \geq 0\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0,001 \\ 0,003 & 0,00217 \\ 0,001 & 0,00267 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0,003 \\ 0,027 \\ 0,022 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,255 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0,003 & 0,001 \\ 0,001 & 0,00217 & 0,00267 \end{pmatrix}$$

Двойственная задача имеет вид:

$$\max\{0,003\lambda_1 + 0,027\lambda_2 + 0,022\lambda_3\} \text{ при ограничениях:}$$

$$\begin{cases} 0,003\lambda_2 + 0,001\lambda_3 \leq 0,1 \\ \lambda_1 + 0,00217\lambda_2 + 0,00267\lambda_3 \leq 0,255 \\ \lambda_i \geq 0, i = \overline{1,3} \end{cases}$$

Решим двойственную задачу Симплекс-методом.

Приведём к каноническому виду, введя дополнительные переменные  $\lambda_4, \lambda_5$ . При этом выберем эти переменные так, чтобы при их прибавлении к левым частям соотношений неравенства превращались в равенства.

$$\begin{cases} 3\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 100 \\ \lambda_1 + 2,17\lambda_2 + 2,67\lambda_3 + \lambda_5 = 255 \end{cases}$$

Построим симплекс-таблицу:

$$\begin{aligned} \lambda_4 &= -3\lambda_2 - \lambda_3 + 0,1 \\ \lambda_5 &= -\lambda_1 - 2,17\lambda_2 - 2,67\lambda_3 + 0,255 \\ f_D &= 3\lambda_1 + 27\lambda_2 + 22\lambda_3 \end{aligned}$$



	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\beta$
$\lambda_4$	0	-3	-1	100
$\lambda_5$	-1	-2,17	-2,67	255
$f_D$	0,003	0,027	0,022	0

Выбираем наибольшую положительную  $\Delta$ . Видим, что при увеличении  $\lambda_2$  быстрее всего до нуля дойдёт  $\lambda_4$ . Меняем  $\lambda_2$  и  $\lambda_4$  местами.

$$\lambda_2 = \frac{1}{3}(-\lambda_3 - \lambda_4 + 100) = -0,3333\lambda_3 - 0,3333\lambda_4 + 33,33$$

$$\lambda_5 = -\lambda_1 - 2,17(-0,3333\lambda_3 - 0,3333\lambda_4 + 33,33) - 2,67\lambda_3 + 255 = -\lambda_1 - 1,9467\lambda_3 + 0,7233\lambda_4 + 182,7$$

$$\begin{aligned} f_D &= 0,003\lambda_1 + 0,027(-0,3333\lambda_3 - 0,3333\lambda_4 + 33,33) + 0,022\lambda_3 \\ &= \\ &= 0,003\lambda_1 + 0,013009\lambda_3 - 0,0089991\lambda_4 + 0,8999 \end{aligned}$$

	$\lambda_1$	$\lambda_4$	$\lambda_3$	$\beta$
$\lambda_2$	0	-0,3333	-0,3333	33,33
$\lambda_5$	-1	0,7233	-1,9467	182,7
$f_D$	0,003	-0,0089991	0,013009	0,8999

Выбираем наибольшую положительную  $\Delta$ . Видим, что при увеличении  $\lambda_3$  быстрее всего до нуля дойдёт  $\lambda_5$ . Меняем  $\lambda_3$  и  $\lambda_5$  местами.

$$\lambda_3 = \frac{1}{1,9467} (-\lambda_1 + 0,7233\lambda_4 - \lambda_5 + 182,7) =$$

$$= -0,5137\lambda_1 + 0,372\lambda_4 - 0,5137\lambda_5 + 93,85$$

$$\lambda_2 = -0,3333(-0,5137\lambda_1 + 0,372\lambda_4 - 0,5137\lambda_5 + 93,85) -$$

$$-0,3333\lambda_4 + 33,33 =$$

$$= 0,1712\lambda_1 - 0,4573\lambda_4 + 0,1712\lambda_5 + 0,00202$$

$$f_D = 0,003\lambda_1 + 0,013009(-0,5137\lambda_1 + 0,372\lambda_4 - 0,5137\lambda_5 +$$

$$+93,85) - 0,008999\lambda_4 + 0,8999 =$$

$$= -0,003683\lambda_1 - 0,0041598\lambda_4 - 0,006683\lambda_5 + 2,1203$$

	$\lambda_1$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\beta$
$\lambda_2$	0,1712	-0,4573	0,1712	2,02
$\lambda_3$	-0,5137	0,372	-0,5137	93,85
$f_D$	-0,003683	-0,0041598	-0,006683	2,1203

Видим, что выполнен критерий оптимальности: все  $\Delta \leq 0$ .

Итак  $\lambda_2^* = 2,02$

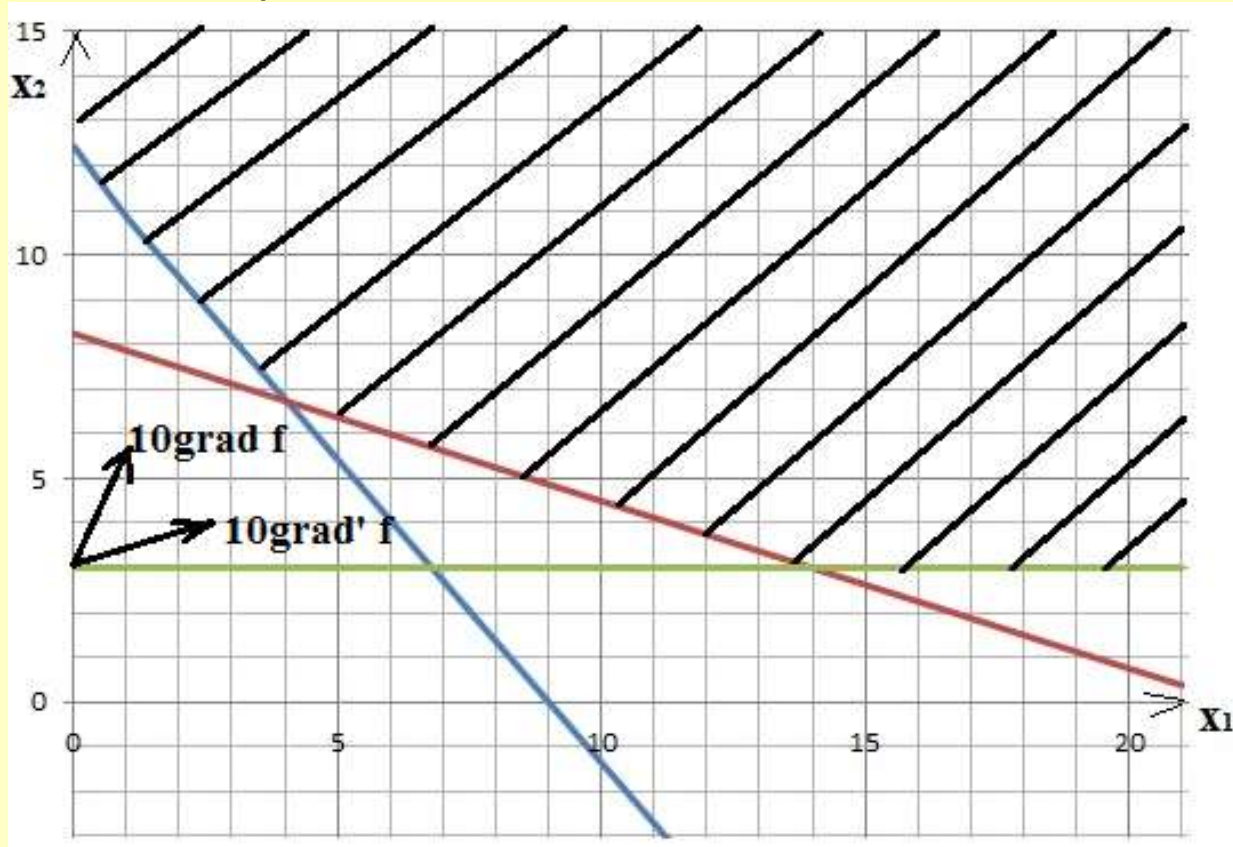
$$\lambda_3^* = 93,85$$

$$f^* = 2,1203$$

$$\lambda_1^* = \frac{1}{3}(0,027\lambda_2^* + 0,022\lambda_3^* - f^*) = \frac{1}{3}(0,027 * 2,02 + \\ + 0,022 * 93,85 - 2,1203) = 0$$

**Вывод:** видим, что во всех трёх методах ответы совпадают.

VI. Найдем при какой цене на смесь 1 её будет невыгодно использовать в рационе.



Будем поворачивать градиент по часовой стрелке до тех пор, пока он не станет перпендикулярен прямой  $3x_1 + 2,17x_2 = 27$ . В случае, когда градиент перпендикулярен этой прямой, оптимальным решением будут являться все точки этой прямой, лежащие в G. Если мы будем поворачивать градиент дальше по часовой стрелке, то оптимальным решением будет  $x_1^* = 0$ ,  $x_2^* = 12,4424$ , то есть смесь 1 будет невыгодно использовать в рационе.

Обозначим  $C_1^*$  - цена на смесь 1, выше которой её невыгодно будет использовать в рационе.

Тогда  $grad'f = (C_1^*, 0,255)^T$  перпендикулярен прямой  $3x_1 + 2,17x_2 = 27$  и параллелен вектору  $\begin{pmatrix} 3 \\ 2,17 \end{pmatrix}$ . Тогда

$$\frac{C_1^*}{3} = \frac{0,255}{2,17} \quad C_1^* = 0,3525$$

Таким образом если  $C_1 > 0,3525$  р/кг, то смесь 1 невыгодно использовать в рационе.

**Общий вывод:** мы определили наиболее дешевый рацион, который состоит из 4,136 г. смеси 1 и 6,602 г. смеси 2 и нашли цену на смесь 1, при которой её будет невыгодно использовать в рационе.

Ответ:  $x_1^* = 4,17$  г.

$$x_2^* = 6,678 \text{ г.}$$

$$f_{\Pi} = 2,12 \text{ руб.}$$

$$C_1^* = 0,3525 \text{ руб.}$$

$$\lambda_1^* = 0$$

$$\lambda_2^* = 2,02$$

$$\lambda_3^* = 93,85$$

$$f_D = 2,12$$

**Спасибо за внимание!**