УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Методы оптимизации

Лекция 5. **ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ**

Селина Елена Георгиевна

Ауд. 302

Линейное программирование

Линейное программирование – математическая дисциплина, посвящённая теории и методам решения задач об экстремумах линейных функций на множествах, задаваемых системами линейных неравенств и равенств. Линейное программирование стало развиваться в первую очередь в связи с решением задач экономики, с поиском способов оптимального распределения и использования ресурсов. Оно послужило основой широкого использования математических методов в этой сфере.

В реальных экономических задачах число независимых переменных обычно бывает очень большим (тысячи, десятки тысяч). Поэтому практическая реализация алгоритмов их решения принципиально невозможна без современной вычислительной техники.

Постановка задач линейного программирования

Задача линейного программирования (ЗЛП) – поиск максимума или минимума функции переменных

$$f(\mathbf{x}) = < \mathbf{c}, \mathbf{x} > = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1)$$

при линейных ограничениях

$$A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,\ldots, n, \qquad (3)$$

где **x** – *m*-мерный вектор неизвестных, А – матрица *m*×*n*, **b** – *m*-мерный вектор, **c** – *n*-мерный вектор. Функция (1) называется ***целевой функцией.***

Суть задачи состоит в том, чтобы найти неотрицательные значения компонентов вектора **x**, удовлетворяющие системе линейных неравенств (2), при которых линейная целевая функция $f(\mathbf{x})$ достигает минимума или максимума.

Любое решение $\bar{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ системы (2), удовлетворяющее условию (3) называется ***допустимым решением***.

Совокупность всех допустимых решений называется ***областью допустимых решений (ОДР)***.

Допустимое решение, для которого целевая функция достигает максимума (минимума), называется ***оптимальным решением.***

Примеры задач линейного программирования

1)Задача планирования производства.

Предприятие выпускает *n* видов продукции (например, столы, стулья, шкафы и т. д.). Для производства требуется *m* видов ресурсов (например, станки, вагоны, древесина и т. д.).

Имеется матрица затрат *A*, в которой a_{ij} – количество *i*-го ресурса, необходимого для производства единицы *j*-ой продукции.

Есть вектор $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, b_i – запас *i*-го вида ресурса в течении некоторого количества времени.

Есть вектор $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, c_j – прибыль, полученная с единицы j-го продукта.

$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – количество выпускаемой продукции каждого вида.

Требуется найти оптимальный план работы предприятия, т. е. определить количество выпускаемой продукции каждого вида так, чтобы прибыль была максимальной.

Математическая постановка задачи:

$$f(\mathbf{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to \max.$$

Найти максимум функции $f(\mathbf{x})$ при ограничениях:

$$a_{i1} + \dots + a_{in} \le b_i\,,\, i = \overline{1,m},$$

$$x_j \ge 0, \qquad j = \overline{1,n},$$

то есть найти $\max\{<\mathbf{c},\mathbf{x}> | A\mathbf{x} \le \mathbf{b},\ \mathbf{x} \ge 0\}$.

2) Задача о рационе (ЗР)

Задача организации питания в большой компании.

Имеется *n* продуктов питания, в которых содержится *m* полезных веществ.

Есть матрица *A*, в которой a_{ij} – количество *i*-го полезного вещества в единице *j*-го продукта.

Есть вектор $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, b_i – минимальная

потребность *i*-го полезного вещества, необходимого для поддержания нормального (здорового) состояния организма за определенный промежуток времени.

Есть вектор $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, c_j – стоимость единицы j-го продукта.

Требуется составить оптимальный рацион, который дает необходимое количество полезных веществ и минимизировать затраты.

Математическая постановка задачи:

$$f(\mathbf{x}) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \to \min.$$

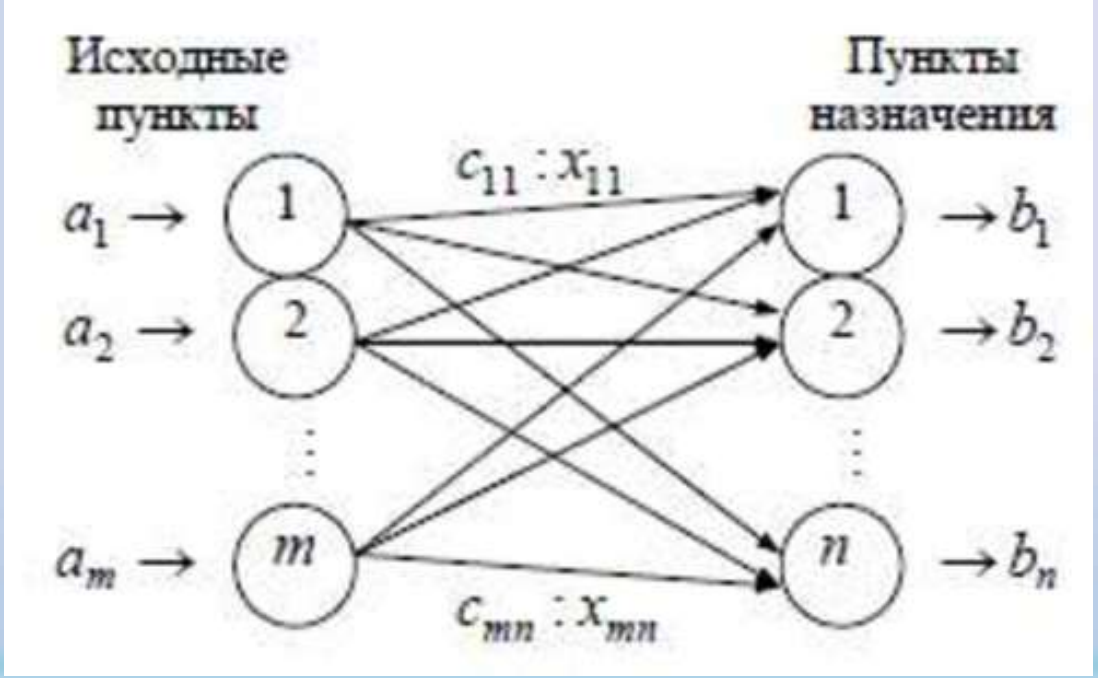
Найти максимум функции $f(\mathbf{x})$ при ограничениях :

$$a_{i1} + \cdots + a_{in} \geq b_i\,, i = \overline{1, m},$$
$$x_j \geq 0, \qquad j = \overline{1, n},$$

3) Транспортная задача (ТЗ)

Пусть имеется некоторый однородный продукт, который надо доставить от пункта производителя в пункт потребителя. Имеется *m* пунктов отправления («поставщиков») и *n* пунктов потребления («потребителей») некоторого одинакового товара.

Есть матрица *C*, в которой c_{ij} – затраты на перевозку единицы продукции из пункта *i* в пункт *j*.



a_i – количество *i*-го продукта у *j*-го производителя.

b_j – количество однородного продукта, который нужно поставить потребителю.

Требуется найти x_{ij} – количество продукта, перевозимого от *i*-го производителя к *j*-му потребителю так, чтобы затраты были минимальны.

Математическая постановка задачи:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min.$$

$$x_{ij} \geq 0,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \qquad i = \overline{1,m},$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \qquad j = \overline{1,n}.$$

Графический метод решения задачи линейного программирования

Если задача линейного программирования содержит только две переменные, и в ее условии нет ограничений - равенств, то такую задачу можно исследовать и решить графически.

Рассматривается задача линейного программирования:

$$f(\mathbf{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 \to \min \qquad (4)$$

при ограничениях:

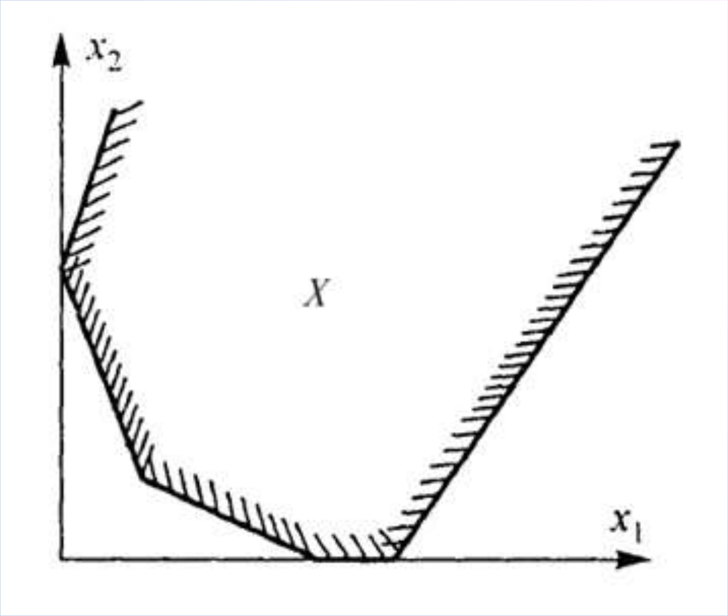
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{cases} \qquad (5)$$

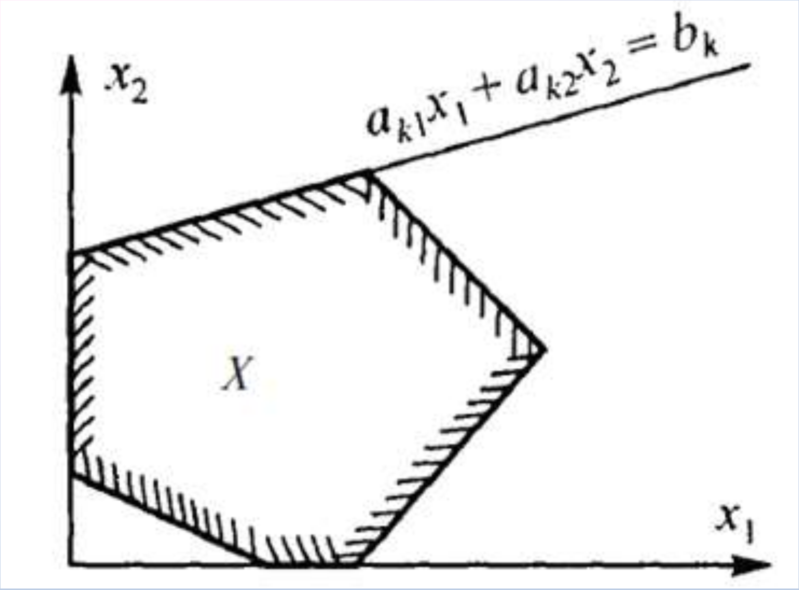
и условиях неотрицательности:

$$x_1, x_2 \ge 0 \qquad (6)$$

На плоскости (x_1 , x_2) любое из неравенств (5) определяет полуплоскость, область допустимых решений задачи линейного программирования G является пересечением первого квадранта (6) и полуплоскостей, соответствующих неравенствам (5).

Область может быть ограниченной, неограниченной и даже пустой (тогда задача (4) – (6) не имеет решений из-за несовместимости ограничений).





Таким образом, геометрически задача линейного программирования (ЗЛП) представляет собой отыскание такой точки многоугольника решений, координаты которой доставляют линейной функции цели максимальное (минимальное) значение, причем допустимыми решениями являются все точки многоугольника решений.

Есть 3 способа графического решения ЗЛП.

Способ 1

Способ 1. Перебрать все вершины.

Переборный метод решения основан на следующей основной теореме:

Теорема 1. *Если целевая функция имеет максимум (минимум), то он достигается в крайней точке (вершине) области допустимых решений*.

Поэтому для поиска максимума или минимума целевой функции следует:

- перебрать все вершины многоугольника;
- для каждой вершины найти значение целевой функции;
- выбрать вершину, в которой достигается оптимальное значение.

Способ 2

Способ 2. Градиентный метод.

В этом случае для нахождения среди допустимых решений оптимального используют ***линии уровня*** и ***опорные прямые***.

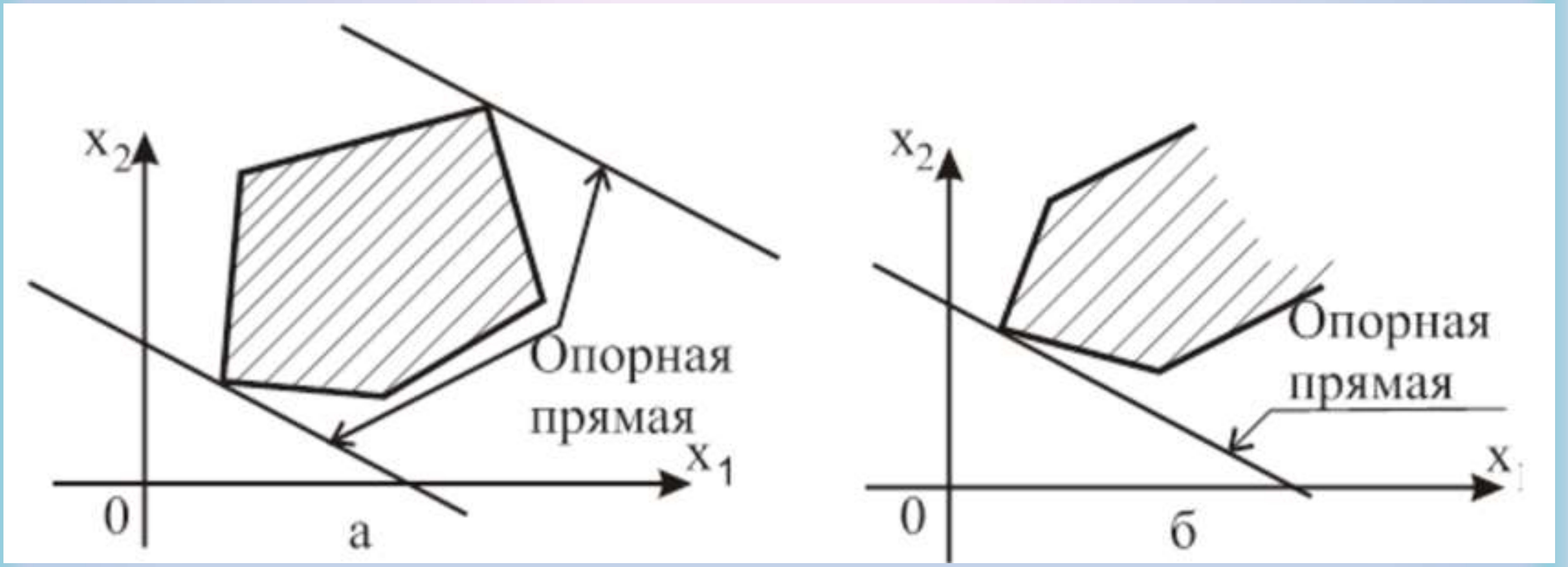
Определение 1. Линией уровня целевой функции называется прямая, на которой целевая функция задачи принимает постоянное значение. Уравнение линии уровня в общем случае имеет вид

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = const$$

Все линии уровня параллельны между собой.

Определение 2. Опорной прямой называется линия уровня, имеющая хотя бы одну общую точку с многоугольником решений системы ограничений G и по отношению к которой G находится по одну сторону.

Область G имеет не более двух опорных прямых.



Находим градиент целевой функции

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\vec{j} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Известно, что вектор градиента функции показывает направление наибольшего возрастания функции. Таким образом, значения целевой функции в точках линии уровня увеличивается, если линию уровня перемещать параллельно начальному положению в направлении вектора нормали, и убывают при перемещении в противоположном направлении.

Алгоритм метода:

1. На плоскости в системе координат $\{x_1, x_2\}$ строим прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях знаков неравенств на знаки точных равенств.

2. Находим полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи.

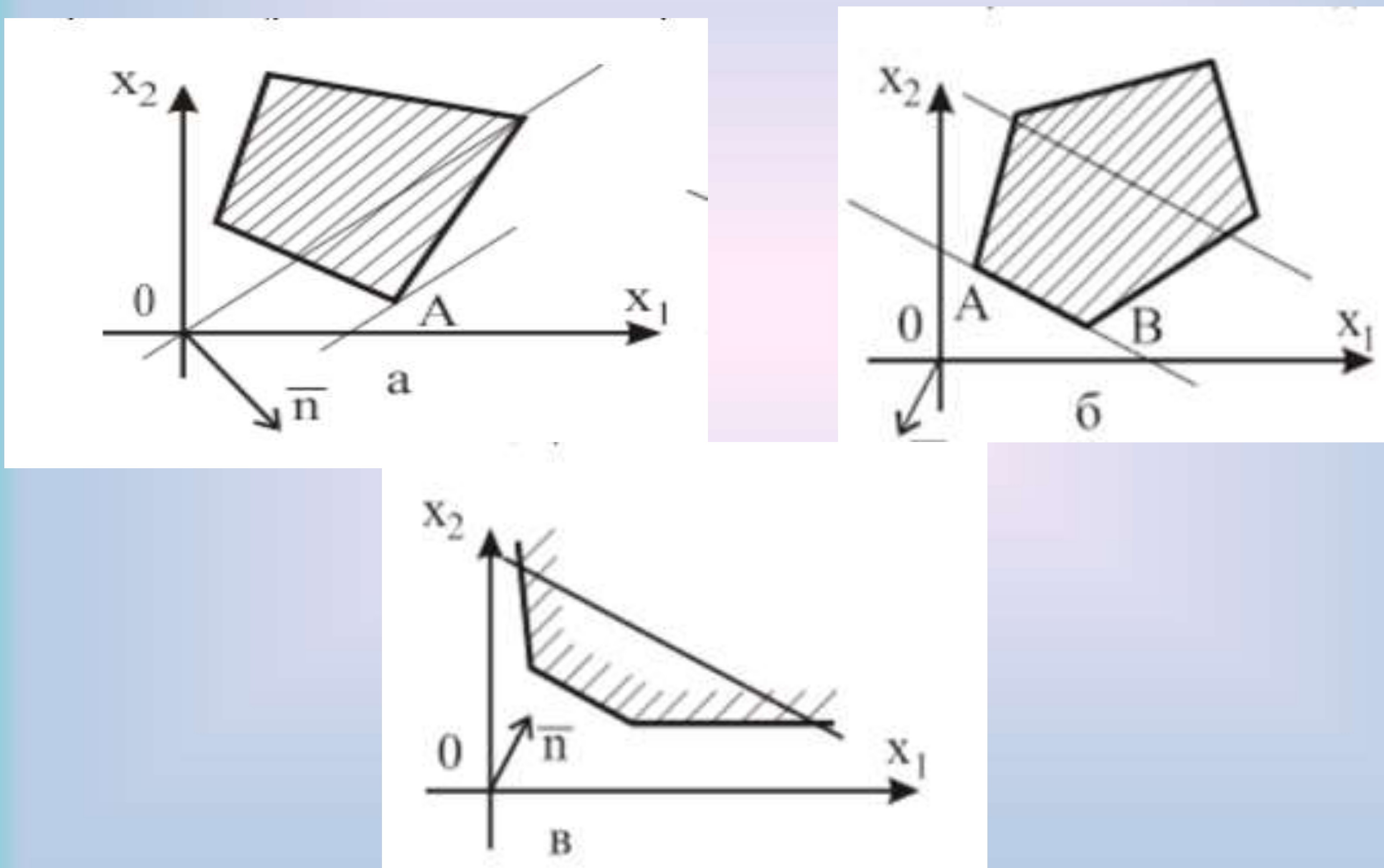
3. Находим область допустимых решений (многоугольник решений).

4. Находим градиент функции.

5. Строим прямую $c_1 x_1 + c_2 x_2 = const$

6. Перемещаем найденную прямую параллельно самой себе в направлении градиента функции (при поиске максимума) или антиградиента (при поиске минимума) целевой функции. В результате, либо отыщется точка или множество точек, в которой целевая функция принимает максимальное (минимальное) значение, либо будет установлено, что задача не имеет решения.

На рисунке показаны случаи, когда задача имеет единственное решение (а), бесконечное множество решений (б), не имеет решения (в).



Пример 1.

Используя графический метод, найти решение задачи линейного программирования

$$f(x) = -3x_1 - 2x_2 \to min$$

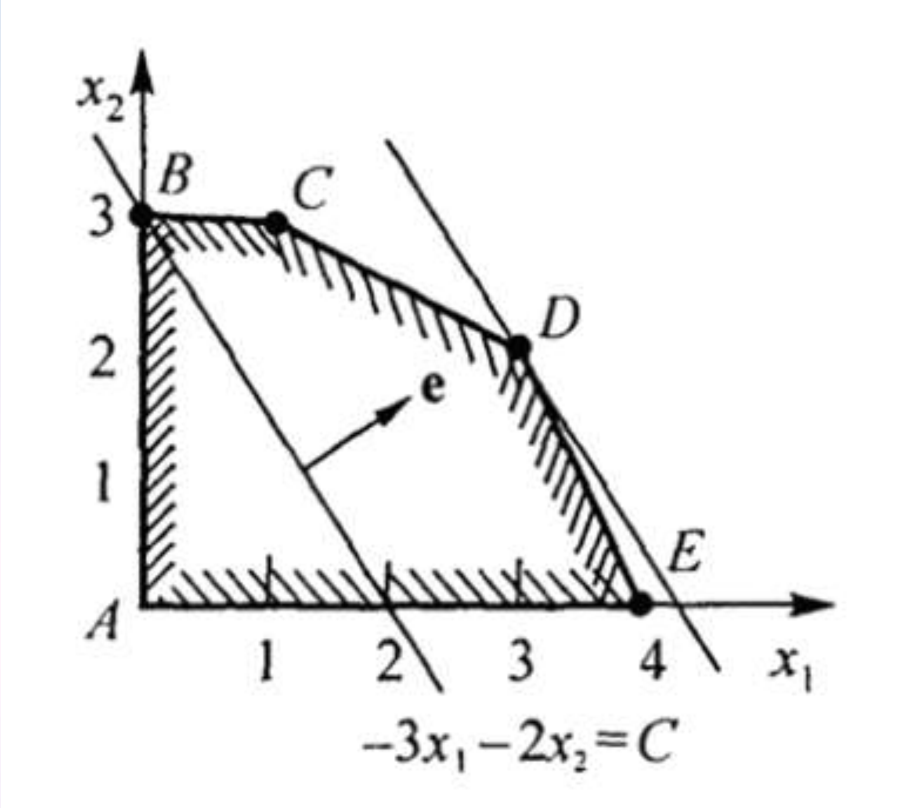
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 7 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_2 \le 3 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

Решение.

Изобразим на плоскости (x_1, x_2)допустимое множество *X* данной задачи (многоугольник *ABCDE*) и одну из линий уровня $-3x_1 - 2x_2 = C$ целевой функции.

Антиградиент $-\nabla f(x) = (3{,}2) = \vec{e}$ указывает направление убывания функции $f(x)$. Совершая параллельный перенос линии уровня вдоль напрвления $\vec{e}$, находим её крайнее положение.



В этом положении прямая $-3x_1 - 2x_2 = C$ проходит через вершину $D = (3{,}2)$ многоугольника *ABCDE.* Поэтому целевая функция $f(x)$ принимает единственное значение f^* в точке $x^* = (3{,}2)$, причём

$$f^* = f(x^*) = f(3{,}2) = -13$$

Пример 2

Используя графический метод, найти решение задачи линейного программирования

$$f(x) = -x_1 - 2x_2 \to min$$

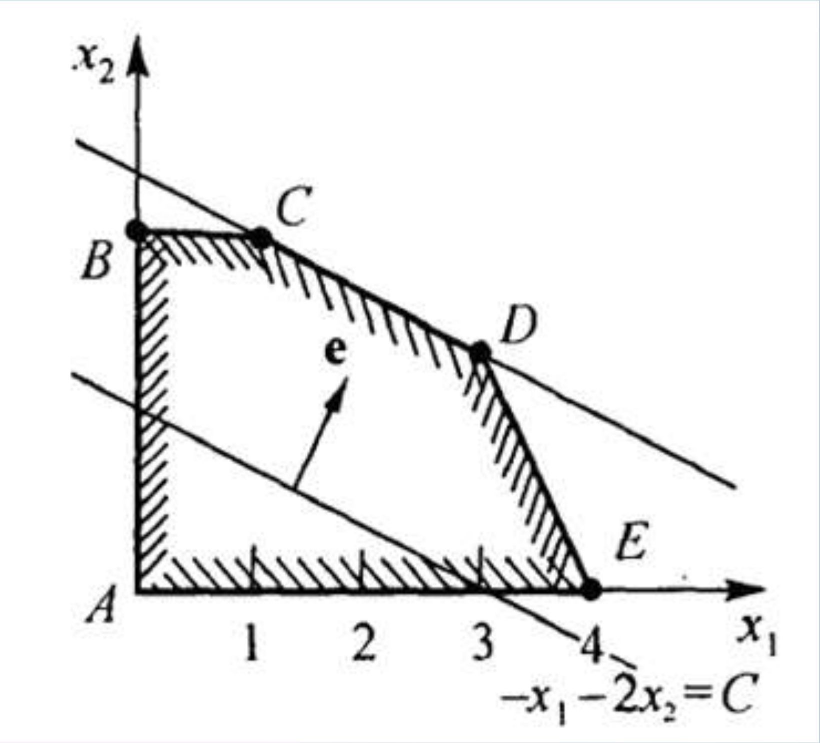
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 7 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_2 \le 3 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$$

Решение.

Изобразим на плоскости (x_1, x_2) допустимое множество X данной задачи (многоугольник *ABCDE*) и одну из линий уровня $-x_1 - 2x_2 = C$ целевой функции.

Антиградиент $-\nabla f(x) = (1,2) = \vec{e}$ указывает направление убывания



функции *f(x).* Совершая параллельный перенос линии уровня вдоль направления $\vec{e}$, находим её крайнее положение. В этом положении прямая $-x_1 - 2x_2 = C$ содержит сторону *CD* многоугольника *ABCDE.* Таким образом, все точки отрезка $[C, D]$ являются точками минимума функции *f(x)* на множестве *X.* Так как концы *C* и *D* этого отрезка имеют координаты (1,3) и (3,2) соответственно, то любая точка минимума *f(x)* представима в виде

$x = (1,3) + 1(-\lambda)(3,2) = 3(-2\lambda, 2+\lambda)$, где $\lambda \in [0,1]$.

Целевая функция *f(x)* принимает минимальное значение f^* в точках x^*, причём

$$f^* = f(x^*) = -7.$$

Пример 3

Решить графическим методом задачу линейного программирования

$$f(x) = -x_1 - 2x_2 \to min$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ 2x_1 - x_2 \geq -1 \\ x_1 - 2x_2 \leq 0 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

Решение.

Изобразим на плоскости (x_1, x_2) допустимое множество X данной задачи (неограниченное многоугольное множество) и одну из линий уровня $-x_1 - 2x_2 = C$ целевой функции.

Антиградиент $-\nabla f(x) = (1,2) = \vec{e}$ указывает направление убывания

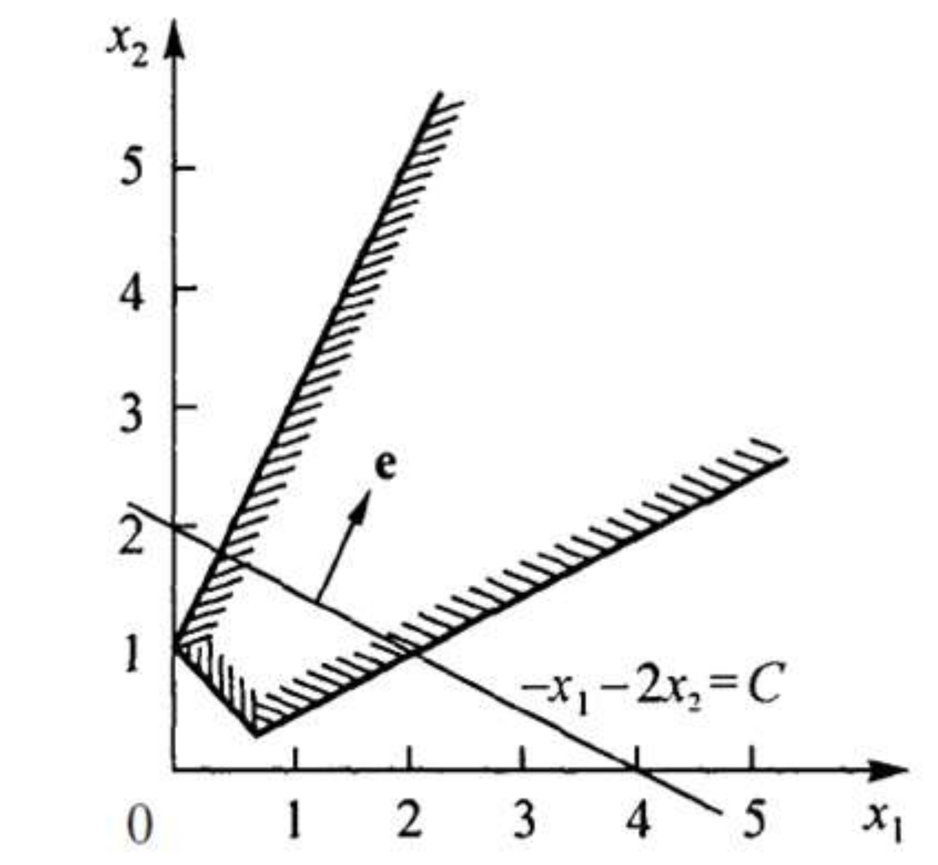
функции *f(x).*

При параллельном переносе линии уровня

$-x_1 - 2x_2 = C$

вдоль направления $\vec{e}$ она всегда пересекает множество *X,*

а целевая функция неограниченно убывает.



Поэтому данная задача линейного программирования решений не имеет.

Каноническая форма задачи линейного программирования

Каноническая форма записи задачи линейного программирования имеет вид:

$$f(\mathbf{x}) = < \mathbf{c}, \mathbf{x} > = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \qquad (7)$$

при ограничениях

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad (8)$$

$$x_j \geq 0, \ j = \overline{1, n}. \qquad (9)$$

Основные вычислительные схемы решения ЗЛП разработаны именно для канонической формы записи задачи.

Сведение задачи линейного программирования к каноническому виду

Если в исходной задаче требуется найти min, надо изменить знак и искать max этой функции.

$$min\, f(\boldsymbol{x}) = -max\,(-f(\boldsymbol{x}))$$

Рассмотрим линейное неравенство с n неизвестными:

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i \qquad (10)$$

Чтобы преобразовать его в равенство, прибавим к левой части некоторую неотрицательную величину:

$$x_{n+1} \ge 0$$

так, чтобы получилось линейное уравнение:

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i \qquad (11)$$

Каждому решению неравенства (10) соответствует единственное решение уравнения (11) и наоборот.

Рассмотрим линейное неравенство с n неизвестными:

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i \qquad (12)$$

Чтобы преобразовать его в равенство, вычтем из левой части некоторую неотрицательную величину:

$$x_{n+2} \geq 0$$

так, чтобы получилось линейное уравнение:

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n - x_{n+2} = b_i \qquad (13)$$

Если некоторая переменная x_i не имеет ограничений по знаку, то она заменяется разностью между двумя новыми неотрицательными переменными.

$$x_j = y_i - z_j,$$

$$y_j \geq 0,$$

$$z_j \geq 0.$$

Пример

Найти $\min(x_1 - 2x_2)$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 5 \\ \quad x_1 \ge 0 \\ \quad x_2 - \ \forall \end{cases}$$

Приводим к каноническому виду:

$$\min(x_1 - 2x_2) = -\max(-x_1 + 2x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ \quad x_2 = x_4 - x_5 \\ \qquad x_1 \ge 0 \\ \qquad x_4 \ge 0 \\ \qquad x_5 \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 3(x_4 - x_5) + x_3 = 5 \\ \quad x_j \ge 0, \ \ j = 1,3,4,5 \end{cases}$$

$$\min(x_1 - 2x_2) = -\max\big(-x_1 + 2(x_4 - x_5)\big)$$
$$= -\max(-x_1 + 2x_4 - 2x_5)$$

Постановка задач линейного программирования

Задача линейного программирования (ЗЛП) – поиск максимума или минимума функции переменных

$$f(\mathbf{x}) = < \mathbf{c}, \mathbf{x} > = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при линейных ограничениях

$$A\mathbf{x} \le \mathbf{b}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1,\ldots, n,$$

где **x** – *m*-мерный вектор неизвестных, А – матрица $m \times n$, **b** – *m*-мерный вектор, **c** – *n*-мерный вектор. Функция (1) называется ***целевой функцией.***

Симплекс-метод решения задачи линейного программирования

Рассмотрим задачу линейного программирования в каноническом виде:

$$\max f = \max < \mathbf{c}, \mathbf{x} >, \qquad (14)$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \qquad (15)$$

$$\mathbf{x} \geq 0. \qquad (16)$$

Определение. Множеством ***допустимых решений*** задачи линейного программирования является такое множество $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, которое удовлетворяет ограничениям (15) и (16).

Определение. *Оптимальным решением задачи* линейного программирования (или просто решением) является такое допустимое решение $\mathbf{x}^*$, при котором $f = f_{max} = < \mathbf{c}, \mathbf{x}^* >$.

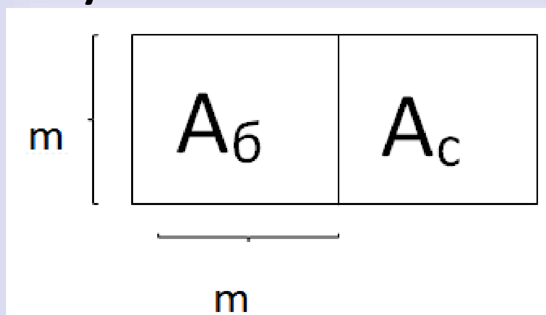
Идея симплекс-метода

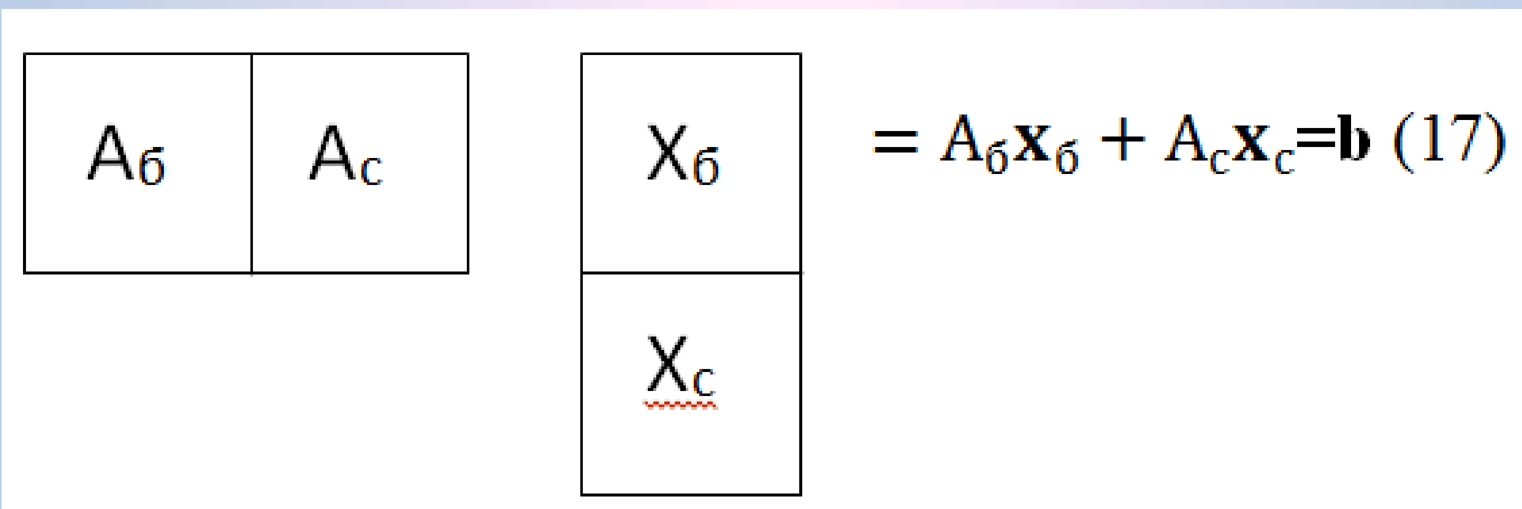
Идея симплекс-метода состоит в следующем.

- Примем в качестве начального приближения координаты некоторой вершины многогранника допустимых решений и найдем все ребра, выходящие из этой вершины.
- Двигаемся вдоль того ребра, по которому линейная целевая функция возрастает.
- Приходим в новую вершину, находим все выходящие из нее ребра, двигаемся по одному из них и т.д.
- В конце концов мы придем в такую вершину, движение из которой вдоль любого ребра приведет к убыванию целевой функции.
- Следовательно, максимум достигнут, и координаты этой последней вершины принимаются в качестве оптимальных значений рассматриваемых проектных параметров.

- Поскольку f - линейная функция, а многогранник выпуклый, данный вычислительный процесс сходится к решению задачи, причем за конечное число шагов k. В данном случае их число порядка n, т.е. значительно меньше числа шагов в методе простого перебора вершин, где k может быть порядка 2^n.
- Будем считать, что у матрицы A все строки линейно независимы (если зависимые строки есть, их можно просто отбросить). У нас m – число уравнений, n – число переменных. Тогда m – ранг матрицы. Тогда $m < n$, так как при $m = n$ система (15) имеет единственное решение, что исключает оптимизацию (при $m > n$ не выполняются сделанные выше предположения).

Не уменьшая общности, будем полагать, что невырожденная матрица $m \times m$ стоит на первом месте. Если это не так, то путем перемещения переменных получим то, что нужно.





Выразим первые m переменных $x_1, x_2, \dots, x_m$ через остальные. Переменные $x_1, x_2, \dots, x_m$ называются ***базисными***, а вектор $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ – ***базисом***. Переменные $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$ – называются ***свободными переменными***.

Свободные переменные принимают любые значения. Придадим им нулевые значения, получим частное решение системы (15):

$$x_1 = \beta_1^{(0)}, x_2 = \beta_2^{(0)}, \dots, x_m = \beta_m^{(0)},$$

$$x_{m+1} = x_{m+2} = \dots = x_n = 0$$

Определение. Допустимое решение, удовлетворяющее (15) и (16), соответствующее нулевым значениям свободных переменных, называется ***базисным решением (базисом).***

Определение. Базис называется ***невырожденным,*** если все базисные переменные >0.

Определение. Базис называется ***вырожденным,*** если все хотя бы одна базисная переменная = 0.

Суть симплекс-метода заключается в целенаправленном переборе вершин с увеличением функционала до получения оптимального решения и включает 3 этапа:

1. Алгоритм отыскания начального (опорного) базиса или установления несовместимости ограничений (15) и (16).
2. Проверка текущей вершины на оптимальность полученного базиса.
3. Если критерий оптимальности не выполнен, то переходим от текущего базиса к другому с обязательным увеличением функционала до получения оптимального решения или до установления факта его неограниченности.

Допустим, мы выразили базисные переменные через свободные из (17) и получили:

$$X_{б} = \mathrm{A}_{б}^{-1}(\mathrm{B} - \mathrm{A}_{с}X_{c}) \qquad (18)$$

Выразим функцию через свободные переменные:

$$f = C^{T}X = C_{б}^{T}X_{б} + C_{c}^{T}X_{c} = C_{б}^{T}\mathrm{A}_{б}^{-1}(B - A_{с}X_{c}) + C_{c}^{T}X_{c} =$$

$$= C_{б}^{T}\mathrm{A}_{б}^{-1}B + (C_{c}^{T} - C_{б}^{T}\mathrm{A}_{б}^{-1}A_{c})X_{c}$$

Обозначим

$f_{0} = C_{б}^{T}\mathrm{A}_{б}^{-1}B$

$\Delta^{T} = C_{c}^{T} - C_{б}^{T}\mathrm{A}_{б}^{-1}A_{c}$ – вектор характеристических разностей.

Тогда

$$f = f_{0} + \Delta^{T}X_{c} \qquad (19)$$

$$f = f_0 + \Delta^T X_c$$

Предположим, что существует хотя бы один положительный коэффициент среди Δ_i. Тогда при увеличении переменной x_{c_i} функция f увеличивается по сравнению с f_0, поэтому надо искать новое опорное решение. Следовательно, $\Delta \leq \mathbf{0}$ – ***критерий оптимальности***.

Если все Δ_i<0 , то решение единственно.

Улучшение решения

Пусть критерий оптимальности не выполнен. Если только одно $\Delta_i > 0$, то увеличиваем соответствующее x_i. Если есть несколько $\Delta_i > 0$, то выбираем наибольшую $\Delta_k = \max\limits_{\Delta_i > 0} \Delta_i$ в надежде, что увеличение соответствующего этому Δ x_k приведет к увеличению функции (хотя это не обязательно так).

Введем обозначения:

$$X_б = -A_б^{-1} A_с X_c + A_б^{-1} B$$
$$X_б^0 = A_б^{-1} B = \beta$$
$$\alpha = -A_б^{-1} A_с$$

Тогда

$$X_б = \alpha X_c + X_б^0 \qquad (20)$$

(19) и (20) удобно оформить в виде симплекс-таблицы.

	x_{m+1}	$\cdots$	x_k	$\dots$	x_n	$X_б^0 = \beta$
x_1						
$\vdots$						
x_l			α_{l_k}			x_l^0
$\vdots$						
x_m						
f	Δ_{m+1}	$\dots$	Δ_k	$\dots$	Δ_n	$f_0 = C_б^0 A_б^{-1} B$

$$x_i = \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{ij} x_j + x_i^0$$

$f = \Delta^T X_c + f_0 = \sum \Delta_j x_j + f_0 \, , j \in J_c$

J_c - множество индексов, соответствующих свободным переменным.

Пусть $\Delta_k = \max\limits_{\Delta_i \geq 0} \Delta_i$

Если все $\alpha_{ik} \geq 0, i \in J_б$, тогда увеличение x_k не приведет к уменьшению базисных значений. В этом случае функция неограниченно увеличивается.

$\uparrow f = f_0 + \Delta_k x_k \uparrow$

Пусть $\alpha_{ik} < 0$. Тогда увеличение x_k приводит к уменьшению базисных значений.

$$\downarrow x_i = x_i^0 + \alpha_{ik} x_k \uparrow$$

Переменную x_k можно увеличивать лишь до тех пор, пока базисные переменные остаются неотрицательными. Это и является условием выбора x_k'.

$$x_k' = -\frac{x_i^0}{\alpha_{ik}}$$

Если таких α_{ik} несколько, надо взять наименьшее, так как первой обратится в ноль переменная x_l , для которой отношение $\frac{x_l^0}{\alpha_{lk}}$ минимально.

$$x_k' = \min\left(-\frac{x_i^0}{\alpha_{ik}}\right) = -\frac{x_l^0}{\alpha_{lk}} > 0$$

x_k попадает в базовые переменные, x_l, которая была базовой, стала = 0

Действительно,

$$x_l' = x_l^0 + \alpha_{lk}\left(-\frac{x_l^0}{\alpha_{lk}}\right) = 0$$

Пример

Простейшая задача на симплекс-метод.

$$f = x_1 + x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ x_i \geq 0, i = 1,2 \end{cases}$$

Приведём к каноническому виду.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ x_i \geq 0, i = 1,4 \end{cases}$$

$$x_3 = -2x_1 - x_2 + 3$$

$$x_4 = -x_1 - 2x_2 + 3$$

$$f = x_1 + x_2$$

Начальный базис: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Составим симплекс-таблицу:

	x_1	x_2	β
x_3	-2	-1	3
x_4	-1	-2	3
f	1	1	0

$\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0 \Rightarrow$ критерий оптимальности не выполнен

$\min\left(\frac{3}{2};\frac{3}{1}\right) = \frac{3}{2} \Rightarrow x_1$ попадает в базисные, x_3 - в свободные

$$x_1 = \frac{1}{2}(-x_2 - x_3 + 3) = -\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 1{,}5$$

$$x_4 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - 1{,}5 - 2x_2 + 3 = -1{,}5x_2 + \frac{1}{2}x_3 + 1{,}5$$

$$f = x_1 + x_2 = -\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 1{,}5 + x_2 == \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 1{,}5$$

	x_3	x_2	β
x_1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1,5
x_4	$\frac{1}{2}$	-1,5	1,5
f	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1,5

Критерий оптимальности не выполнен.

$$x_2 = \frac{1}{1{,}5}\left(\frac{1}{2}x_3 - x_4 + 1{,}5\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}x_3 - \frac{2}{3}x_4 + \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2} =$$

$$= \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 + 1$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 + 1\right) - \frac{1}{2}x_3 + 1{,}5 = -\frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 + 1$$

$$f = x_1 + x_2 = -\frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 + 1 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 + 1 =$$

$$= -\frac{1}{3}x_3 - x_4 + 2$$

	x_3	x_4	β
x_1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1
x_2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1
f	$-\frac{1}{3}$	-1	2

Критерий оптимальности выполнен.

x_1=1

x_2=1

$$f_{max} = 2$$

Получение начального базиса Метод искусственного базиса

Начальным шагом симплекс-метода является нахождение начального базиса. В общем случае эта задача нетривиальна.

Наиболее общим способом построения начального допустимого базисного решения задачи ЛП является использование искусственных переменных. Эти переменные в первой итерации играют роль дополнительных остаточных переменных, но на последующих итерациях от них освобождаются.

Пусть у нас есть ЗЛП в каноническом виде и выбор начального базиса неочевиден.

$$\max f = \max < \mathbf{c}, \mathbf{x} >,$$
$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$
$$\mathbf{x} \geq 0$$

Будем полагать, что все $b_i \geq 0$. Если есть $b_i < 0$, то домножим соответствующее уравнение на (-1).

Добавим в ограничения искусственные переменные и решим задачу ЛП минимизации суммы искусственных переменных с исходными ограничениями.

$$\min W = \min \sum_{i=1}^{m} y_i \rightarrow min \qquad (21)$$

$$AX + Y = B \qquad (22)$$

$$X, Y \geq 0 \qquad (23)$$

Если минимальное значение этой новой целевой функции больше нуля, значит, исходная задача не имеет допустимого решения, и процесс вычислений заканчивается. (Положительные значения искусственных переменных указывают на то, что исходная система ограничений несовместна.) Если новая целевая функция равна нулю, переходим ко второму этапу.

Для решения вспомогательной задачи можно воспользоваться симплекс-методом. При этом начальный базис уже найден. Действительно, если за базисные переменные принять $y_1, y_2, \ldots y_m$, а за свободные $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то в системе базисные переменные уже выражены через свободные.

$$Y = B - AX$$

$$Y_б = B \geq 0$$

$$X^0 = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$$

Находим $\mathrm{W}^* = \min \mathrm{W}$.

Возможны два варианта:

1) $W^* = 0$. Очевидно, что это возможно, только в том сучае, когда все вспомогательные переменные равны нулю, а именно, когда

$$y_1{}^* = y_2{}^* = \cdots = y_m{}^* = 0$$

(* – означает оптимальное решение).

Выписав из последней симплекс-таблицы оптимальные значения переменных, получим:

$$x_j = \beta_j - (\alpha_{jm+1}x_{m+1} + \cdots + \alpha_{jn}x_n + \alpha_{j1}y_1 + \cdots + \alpha_{jm}y_m) \qquad (24)$$

Причем все $\beta_j \geq 0,\, j = \overline{1, m}$. Это справедливо, так как в столбце свободных членов находятся оптимальные значения базисных переменных, а они всегда неотрицательны.

Полагая теперь в выражении (24)

$$y_1 = y_2 = \cdots = y_m = 0$$

получаем искомый начальный базис:

$$x_j = \beta_j - (\alpha_{jm+1} x_{m+1} + \cdots + \alpha_{jn} x_n)$$

Далее необходимо выразить целевую функцию f через свободные переменные $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$, и решать основную задачу максимизации функции.

2) $W^* > 0$. Это означает, что система (22) не имеет решений, для которых

$$y_1{}^* = y_2{}^* = \cdots = y_m{}^* = 0$$

Отсюда следует, что система $AX = B$ несовместна.

Пример

Решим следующую задачу, используя метод искусственного базиса.

$$f = x_1 + 3x_2 + x_3 \rightarrow max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,3} \end{cases}$$

В той задаче выбор начального базиса неочевиден, поэтому применим метод искусственного базиса.

Добавим в ограничения искусственные переменные y_1, y_2

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + y_1 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + y_2 = 4 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,3} \\ y_j \geq 0, \ \ j = \overline{1,2} \end{cases}$$

и решим задачу поиска минимума функции $W = y_1 + y_2$ при этих ограничениях.

$W = y_1 + y_2 \to min$

$$y_1 = -x_1 - 2x_2 + x_3 + 5$$
$$y_2 = -2x_1 - x_2 - 2x_3 + 4$$
$$W = -3x_1 - 3x_2 - x_3 + 9$$

Составим симплекс-таблицу:

	x_1	x_2	x_3	β
y_1	-1	-2	1	5
y_2	-2	-1	-2	4
W	-3	-3	-1	9

Мы ищем минимум, значит, критерий оптимальности $\Delta \geq \mathbf{0}$

$\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 < 0,\ \Delta_3 < 0 \Rightarrow$ критерий оптимальности не выполнен.

$\min\left(\frac{5}{1}; \frac{4}{2}\right) = \frac{4}{2} \Rightarrow x_1$ попадает в базовые, y_2 - в свободные.

$$x_1 = -\frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}x_2 - x_3 + 2$$

$$y_1 = -\left(-\frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}x_2 - x_3 + 2\right) - 2x_2 + x_3 + 5 =$$

$$= \frac{1}{2}y_2 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3 + 3$$

$$W = y_1 + y_2 = \frac{1}{2}y_2 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3 + 3 + y_2 =$$

$$= \frac{3}{2}y_2 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3 + 3$$

	y_2	x_2	x_3	β
y_1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	2	3
x_1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	2
W	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	2	3

$\Delta_2 < 0 \Rightarrow$ критерий оптимальности не выполнен.

$\min\left(3:\frac{3}{2}; 2:\frac{1}{2}\right) = 3:\frac{3}{2} \Rightarrow x_2$ попадает в базовые, y_1 - в свободные.

$$x_2 = \frac{1}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_1 + \frac{4}{3}x_3 + 2$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_1 + \frac{4}{3}x_3 + 2\right) - x_3 + 2 =$$

$$= -\frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_1 - \frac{5}{3}x_3 + 1$$

	y_2	y_1	x_3	β
x_2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	2
x_1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	1
W	1	1	0	0

Решаем основную задачу максимизации функции

$$f = x_1 + 3x_2 + x_3 = -\frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_1 - \frac{5}{3}x_3 +$$

$$+ 1 + 3\left(\frac{1}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_1 + \frac{4}{3}x_3 + 2\right) + x_3 = \frac{10}{3}x_3 + 7$$

	x_3	β
x_2	$\frac{4}{3}$	2
x_1	$-\frac{5}{3}$	1
f	$\frac{10}{3}$	7

$\frac{10}{3} > 0 \Rightarrow$ критерий оптимальности не выполнен.

$-2 : \frac{4}{3} < 0 \Rightarrow$ x_3 попадает в базовые, x_1 - в свободные.

$$x_3 = -\frac{3}{5}x_1 + \frac{3}{5}$$

$$x_2 = \frac{4}{3}\left(-\frac{3}{5}x_1 + \frac{3}{5}\right) + 2 = -\frac{4}{5}x_1 + \frac{14}{5}$$

$$f = \frac{10}{3}\left(-\frac{3}{5}x_1 + \frac{3}{5}\right) + 7 = -2x_1 + 9$$

	x_1	β
x_2	$-\frac{4}{5}$	$\frac{14}{5}$
x_3	$-\frac{5}{3}$	$\frac{3}{5}$
f	-2	9

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{14}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \qquad f_{max} = 9$$

Спасибо за внимание!