**Практическое занятие 1**

**Задача 1**

Исследуйте поведение функции в точке $x_0$, используя производные высших порядков.

1. $y = x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 24(x + 1 - e^x)$, $x_0 = 0$.
2. $y = \cos^2(x-1) + x^2 - 2x$, $x_0 = 1$.
3. $y = (x-1)\sin(x-1) + 2x - x^2$, $x_0 = 1$.
4. $y = x^2 - 2x - 2e^{x-2}$, $x_0 = 2$.
5. $y = 4x - x^2 + (x-2)\sin(x-2)$, $x_0 = 2$.
6. $y = x^2 + 4x + \cos^2(x+2)$, $x_0 = -2$.
7. $y = 2x + x^2 - (x+1)\ln(2+x)$, $x_0 = -1$.
8. $y = 2\ln x + x^2 - 4x + 3$, $x_0 = 1$.
9. $y = 6x^{x-2} - x^3 + 3x^2 - 6x$, $x_0 = 2$.
10. $y = 4x + x^2 - 2e^{x+1}$, $x_0 = -1$.
11. $y = 6e^{x-1} - 3x - x^3$, $x_0 = -1$.
12. $y = \cos^2(x+1) + x^2 + 2x$, $x_0 = -1$.
13. $y = 6e^x - x^3 - 3x^2 - 6x - 5$, $x_0 = 0$.
14. $y = 2e^{x-1} - 2\cos(x-1) - 2x(x-1) - \dfrac{1}{3}(x-1)^3$, $x_0 = 1$.
15. $y = 4(x-1) - (x-1)^2 - 2\cos(x-3)$, $x_0 = 3$.
16. $y = 2e^x - 2\cos x - 2x(x+1) - \dfrac{1}{3}x^3$, $x_0 = 0$.
17. $y = 2\ln x + (x-2)^2$, $x_0 = 1$.
18. $y = 2e^x + 2\sin x - x^2 - 4x$, $x_0 = 0$.
19. $y = x^2 - 4x - (x-2)\ln(x-1)$, $x_0 = 2$.
20. $y = (x+1)\sin(x+1) - 2x - x^2$, $x_0 = -1$.
21. $y = x^2 + 6x + 8 - 2e^{x+2}$, $x_0 = -2$.
22. $y = 2x - x^2 - 2\cos(x-1)$, $x_0 = 1$.
23. $y = 2\ln(x+1) - 2x + x^2 + 1$, $x_0 = 0$.
24. $y = 1 - 2x - x^2 + 2\cos(x+1)$, $x_0 = -1$.
25. $y = \sin^2(x+1) - 2x - x^2$, $x_0 = -1$.
26. $y = x^2 + 2\ln(x+2)$, $x_0 = -1$.
27. $y = 6e^{x+1} - (x+1)^3 - 3(x+1)^2 - 6x + 1$, $x_0 = -1$.
28. $y = \sin^2(x+2) - x^2 - 4x - 4$, $x_0 = -2$.
29. $y = x^2 - 2x - (x-1)\ln x$, $x_0 = 1$.
30. $y = 4x - x^2 - 2\cos(x-2)$, $x_0 = 2$.

**Задача 2**

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке.

1. $y = \sqrt[3]{2(x+2)^2(1-x)}$ при $x \in [-3;\ 4]$.
2. $y = \dfrac{2(x^2+3)}{x^2-2x+5}$ при $x \in [-3;\ 3]$.
3. $y = 1 + \sqrt[3]{2(x-1)^2(x-7)}$ при $x \in [-1;\ 5]$.
4. $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$ при $x \in [0;\ 1]$.
5. $y = 2x^2 + \dfrac{108}{x} - 59$ при $x \in [2;\ 4]$.
6. $y = \sqrt[3]{2x^2(x-3)}$ при $x \in [-1;\ 6]$.
7. $y = \sqrt[3]{2x^2(x-6)}$ при $x \in [-2;\ 1]$.
8. $y = x^2 - 2x + \dfrac{16}{x-1} - 13$ при $x \in [2;\ 5]$.
9. $y = \sqrt[3]{2(x-1)^2(x-4)}$ при $x \in [0;\ 4]$.
10. $y = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{8}{x} + 8$ при $x \in [-4;\ -1]$.
11. $y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(5-x)}$ при $x \in [1;\ 5]$.
12. $y = \dfrac{x^2}{2} + 2x + \dfrac{8}{x-2} + 5$ при $x \in [-2;\ 1]$.
13. $y = \sqrt[3]{2x^2(x-3)}$ при $x \in [-1;\ 3]$.

14. $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ при $x \in [0;\ 4]$.

15. $y = x + 2\sqrt{x}$ при $x \in [0;\ 4]$.

16. $y = x^4 - 2x^2 + 5$ при $x \in [-2;\ 2]$.

17. $y = \sqrt[3]{100 - x^2}$ при $x \in [-6;\ 8]$.

18. $y = \dfrac{10x}{1+x^2}$ при $x \in [0;\ 3]$.

19. $y = -\dfrac{2(x^2+3)}{x^2+2x+5}$ при $x \in [-5;\ 1]$.

20. $y = \dfrac{4x}{4+x^2}$ при $x \in [-4;\ 2]$.

21. $y = x - 4\sqrt{x+2} + 8$ при $x \in [-1;\ 7]$.

22. $y = 2\sqrt{x-1} - x + 2$ при $x \in [1;\ 5]$.

23. $y = \dfrac{-2x(2x+3)}{x^2+4x+5}$ при $x \in [-2;\ 1]$.

24. $y = \dfrac{2(-x^2+7x-7)}{x^2-2x+2}$ при $x \in [1;\ 4]$.

25. $y = 3 - x - \dfrac{4}{(x+2)^2}$ при $x \in [-1;\ 2]$.

26. $y = \sqrt[3]{2(x+1)^2(5-x)} - 2$ при $x \in [-3;\ 3]$.

27. $y = x - 4\sqrt{x} + 5$ при $x \in [1;\ 9]$.

28. $y = 2\sqrt{x} - x$ при $x \in [0;\ 4]$.

29. $y = \sqrt[3]{2(x-2)^2(8-x)} - 1$ при $x \in [0;\ 6]$.

30. $y = x^2 + \dfrac{16}{x} - 16$ при $x \in [1;\ 4]$.

Задача 3

Решить задачи

**1.1.** Полотняный шатер объемом $V$ имеет форму прямого конуса. Каково должно быть отношение высоты конуса к радиусу его основания, чтобы на шатер пошло наименьшее количество полотна? (*Ответ*: $\sqrt{2}$.)

**1.2.** В равнобедренный треугольник с основанием $a$ и углом при основании $\alpha$ вписать параллелограмм наибольшей площадью так, чтобы одна из его сторон лежала на основании, а другая на боковой стороне треугольника. Найти длины сторон параллелограмма. (*Ответ*: $a/2$ и $a/(4\cos\alpha)$.)

**1.3.** Найти соотношение между радиусом $R$ и высотой $H$ цилиндра, имеющего при данном объеме $V$ наименьшую полную поверхность. (*Ответ*: $H = 2R$.)

**1.4.** Требуется сделать коническую воронку с образующей, равной 20 см. Какой должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наименьшим? (*Ответ*: $20\sqrt{3}/3$ см.)

**1.5.** Периметр равнобедренного треугольника равен $2p$. Каково должно быть его основание, чтобы объем тела, образованного вращением этого треугольника вокруг его основания, был наибольшим? (*Ответ*: $p/2$.)

**1.6.** Найти высоту конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиусом $R$. (*Ответ*: $4R/3$.)

**1.7.** Проволокой, длина которой $l$ м, необходимо огородить клумбу, имеющую форму кругового сектора. Каким должен быть радиус круга, чтобы площадь клумбы была наибольшей? (*Ответ*: $l/4$ м.)

**1.8.** Определить наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в полукруг радиусом $a$. (*Ответ*: $a^2$.)

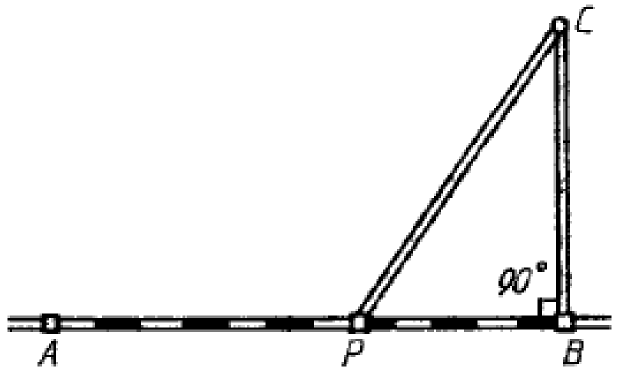
**1.9.** Бревно длиной 20 м имеет форму усеченного конуса, диаметры оснований которого равны 2 м и 1 м. Требуется вырубить из бревна балку с квадратным поперечным сечением, ось которой совпадала бы с осью бревна, а объем был бы наибольшим. Каковы должны быть размеры балки? (*Ответ*: длина балки $40/3$ м, сторона поперечного сечения $2\sqrt{2}/3$ м.)

**1.10.** С корабля, который стоит на якоре в 9 км от берега, нужно послать гонца в лагерь, расположенный в 15 км от ближайшей к кораблю точки берега. Скорость посыльного при движении пешком — 5 км/ч, а на лодке — 4 км/ч. В каком месте он должен пристать к берегу, чтобы попасть в лагерь в кратчайшее время? (*Ответ*: в 3 км от лагеря.)

**1.11.** Полоса жести шириной $a$, имеющая прямоугольную форму, должна быть согнута в виде открытого кругового цилиндрического желоба так, чтобы его сечение имело форму сегмента. Каким должен быть центральный угол $\varphi$, опирающийся на дугу этого сегмента, чтобы вместимость желоба была наибольшей? (*Ответ*: $\varphi = \pi$.)

**1.12.** Из круглого бревна диаметром $d$ надо вырезать балку прямоугольного сечения. Каковы должны быть ширина $b$ и высота $h$ этого сечения, чтобы балка, будучи горизонтально расположенной и равномерно нагруженной, имела наименьший прогиб? (Величина прогиба обратно пропорциональна произведению ширины $b$ поперечного сечения и куба высоты $h$.) (*Ответ*: $b = d/2$, $h = d\sqrt{3}/2$.)

**1.13.** Стоимость железнодорожной перевозки груза на 1 км ($AB$) равна $k_1$ р., а автомобильной ($PC$) — $k_2$ р. ($k_1 < k_2$). В каком месте $P$ надо начать строительство шоссе, чтобы возможно дешевле доставлять груз из пункта $A$ в $C$? Известно, что $|AB| = a$, $|BC| = b$ $\left(\textit{Ответ: на расстоянии } a - \dfrac{k_1 b}{\sqrt{k_2^2 - k_1^2}} \textit{ от точки } A.\right)$



**1.14.** Человеку нужно добраться из пункта $A$, находящегося на одном берегу реки, в пункт $B$ на другом ее берегу. Зная, что скорость движения по берегу в $k$ раз больше скорости движения по воде, определить, под каким углом человек должен пересечь реку, чтобы достичь пункта $B$ в кратчайшее время. Ширина реки $h$, расстояние между пунктами $A$ и $B$ (вдоль берега) равно $a$. (*Ответ*: $\max(\arccos(1/k),\ \operatorname{arctg}(h/a))$.)

**1.15.** На прямолинейном отрезке $AB$, соединяющем два источника света: $A$ (силой $p$) и $B$ (силой $q$), найти точку $M$, освещаемую слабее всего, если $|AB| = a$. (Освещенность обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света.) $\left(\text{\textit{Ответ}: на расстоянии } \dfrac{a\sqrt[3]{p}}{\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}} \text{ от точки } A.\right)$

**1.16.** Лампа висит над центром круглого стола радиусом $r$. При какой высоте лампы над столом освещенность предмета, лежащего на его крае, будет наилучшей? (Освещениость прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей света и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света.) (*Ответ*: $r/\sqrt{2}$.)

**1.17.** Из всех цилиндров, вписанных в данный конус, найти тот, у которого боковая поверхность наибольшая. Высота конуса $H$, радиус основания $R$. (*Ответ*: радиус основания цилиндра $R/2$, высота $H/2$.)

**1.18.** Из бумажного круга вырезан сектор, а из оставшейся его части склеена коническая воронка. Какой угол должен иметь вырезанный сектор, чтобы объем воронки был наибольшим? (*Ответ*: $2\pi\sqrt{2/3}$.)

**1.19.** Из всех конусов с данной боковой поверхностью $S$ найти тот, у которого объем наибольший. (*Ответ*: радиус основания конуса $\sqrt{\dfrac{S}{\pi\sqrt{3}}}$, высота $\sqrt{\dfrac{S(3\pi-1)}{\pi\sqrt{3}}}$.)

**1.20.** Пункт $B$ находится на расстоянии 60 км от железной дороги. Расстояние по железной дороге от пункта $A$ до ближайшей к пункту $B$ точки $C$ составляет 285 км. На каком расстоянии от точки $C$ надо построить станцию, от которой проложат шоссе к пункту $B$, чтобы затрачивать наименьшее время на передвижения между пунктами $A$ и $B$, если скорость движения по железной дороге равна 52 км/ч, а скорость движения по шоссе — 20 км/ч. (*Ответ*: 25 км.)

**1.21.** Канал, ширина которого $a$ м, под прямым углом впадает в другой канал шириной $b$ м. Определить наибольшую длину бревен, которые можно сплавлять по этой системе каналов. (*Ответ*: $(a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2}$ м.)

**1.22.** Найти высоту прямого кругового конуса наименьшего объема, описанного около шара радиусом $R$. (*Ответ*: $8R$.)

**1.23.** При каком наклоне боковых сторон равнобедренной трапеции площадь ее будет наибольшей, если боковые стороны равны $b$, а меньшее основание $a$. (*Ответ*: $\cos\varphi =$ $=(\sqrt{a^2+8b^2}-a)/(4b)$.)

**1.24.** Из фигуры, ограниченной кривой $y=3\sqrt{x}$ и прямыми $x=4$, $y=0$, вырезать прямоугольник наибольшей площадью. (*Ответ*: $S=9{,}22$.)

**1.25.** Равнобедренный треугольник, вписанный в окружность радиусом $R$, вращается вокруг прямой, которая проходит через его вершину параллельно основанию. Какой должна быть высота этого треугольника, чтобы тело, полученное в результате его вращения, имело наибольший объем? (*Ответ*: $5R/3$.)

**1.26.** Требуется изготовить открытый цилиндрический бак вместимостью $V$. Стоимость 1 м$^2$ материала, из которого изготавливается дно бака, составляет $P_1$ р., а стоимость 1 м$^2$ материала, идущего на стенки бака,— $P_2$ р. При каком отношении радиуса дна к высоте бака затраты на материал будут минимальными? (*Ответ*: $P_2/P_1$.)

**1.27.** Сосуд с вертикальными стенками высотой $H$, наполненный невязкой жидкостью, стоит на горизонтальной плоскости. Определить местоположение отверстия, при котором дальность струи будет наибольшей, если скорость вытекающей жидкости по закону Торричелли равна $\sqrt{2gx}$, где $x$ — расстояние от отверстия до поверхности жидкости; $g$ — ускорение свободного падения. (*Ответ*: на середине высоты $H$.)

**1.28.** Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр окна равен 15 м. При каком радиусе полукруга окно будет пропускать наибольшее количество света? (*Ответ*: 2,1 м.)

**1.29.** На странице книги печатный текст занимает площадь $S$; ширина верхнего и нижнего полей равна $a$, а правого и левого — $b$. При каком отношении ширины к высоте текста площадь всей страницы будет наименьшей? (*Ответ*: $b/a$.)

**Задача 4**

Исследуйте заданную функцию на экстремум.

1. $z = e^{x^2 - y}(5 - 2x + y),\ y > 0,\ x > 0.$
2. $z = xy^2(1 - x - y).$
3. $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y.$
4. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$
5. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2.$
6. $z = (2x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}.$
7. $z = x^2 + (y-1)^2.$
8. $z = (x - y + 1)^2.$
9. $z = xy\ln(x^2 + y^2).$
10. $z = x^2 - (y-2)^2.$
11. $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}.$
12. $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}.$
13. $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}.$
14. $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}.$
15. $z = 3y^2 + (2x - 1)^2.$
16. $z = e^{x+2y}(x^2 - xy + 2y^2).$
17. $z = x^3 + y^3 - 6xy.$
18. $z = y^2x^3(4 - y - x).$
19. $z = y^2 + x^2 - xy + 2x - y.$
20. $z = e^{x-2y}(2x + y).$
21. $z = y^2 + 3x^2 + y - x.$
22. $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}.$
23. $z = 2x^2 - x + (y + 1)^2.$
24. $z = x^2y(2 - x + y).$
25. $z = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2.$
26. $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2.$
27. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y.$
28. $z = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2).$
29. $z = x^2 + y^2 + (x + y - 2)^2.$
30. $z = (5x + 7y - 25)e^{-(x^2+xy+y^2)}.$

## Задача 5

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z(x,\ y)$ в заданной области.

1. $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27, 0 \le x \le 4, 0 \le y \le 4$.
2. $z = x - 2y - 3, 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 1,\ \ 0 \le x + y \le 1$.
3. $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y, x^2 + y^2 \le 25$.
4. $z = x^2 + y^2 + xy, |x| + |y| \le 1$.
5. $z = 4x^2 + y^2 - 2y, -1 \le x \le 1, 0 \le y - x \le 1, 0 \le x + y \le 1$.
6. $z = x + 2y, 0 \le x \le 2,\ \ 0 \le y \le 2,\ \ 0 \le x + y \le 2$.
7. $z = 3x + 4y - 2, -1 \le x \le 1,\ \ 0 \le y - x \le 1,\ \ 0 \le x + y \le 1$.
8. $z = 2x^2 - y^2, x^2 + y^2 \le 16$.
9. $z = y^2 - x^2, x^2 + y^2 \le 9$.
10. $z = x^2 + y^2 - 2xy, |x| + |y| \le 1$.
11. $z = y - x, -1 \le x \le 0,\ \ 0 \le y \le 1$.
12. $z = x^2 - y^2, |x| + |y| \le 2$.
13. $z = x^2 + y^2 + 2xy, 0 \le x \le 3,\ \ 0 \le y \le 3,\ \ 0 \le x + y \le 3$.
14. $z = 2y + x, y \ge x^2,\ \ y - 2x \le 3$.
15. $z = y^2 - 2x^2, x^2 + y^2 \ge 1,\ \ x^2 + y^2 \le 100$.
16. $z = x^2 + y^2 - xy + 1, y \ge x^2 - 1,\ \ y \le 4$.
17. $z = 1 - x - y, x^2 + y^2 \le 4$.
18. $z = x - x^2 + y^2, x^2 + y^2 \le 9$.
19. $z = 5x - 3y, y \ge x,\ \ y \ge -x,\ \ y \le 4$.
20. $z = 2x^2 + y^2 - 4x + y, x^2 + 4y^2 \le 4$.
21. $z = \dfrac{1}{2}x^2 - y^2 + 5x - y, 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 1$.
22. $z = 4 - 3x + 2y, x^2 + y^2 \le 9$.
23. $z = 2x^2 + 4y^2 - xy, 0 \le x \le 1,\ \ -1 \le y \le 0$.
24. $z = 10 - x - y, x^2 + y^2 \le 64$.
25. $z + 2 = x^2 - 5y^2, 0 \le x \le 2,\ \ y - x \le 0$.
26. $z - 4 = 5x + 4y, x^2 + y^2 \le 4$.
27. $z + 1 = x^2 + x + y^2 - 4y, -1 \le x \le 0,\ \ y - x \le 1$.
28. $z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 \le 100$.
29. $z = x^2 + 2y^2 - x, x^2 + y^2 \le 100,\ \ y \ge 0$.
30. $1 - z = 3y^2 + x^2, 0 \le x \le 1,\ \ -1 \le y \le 0,\ \ 0 \le x - y \le 1$.