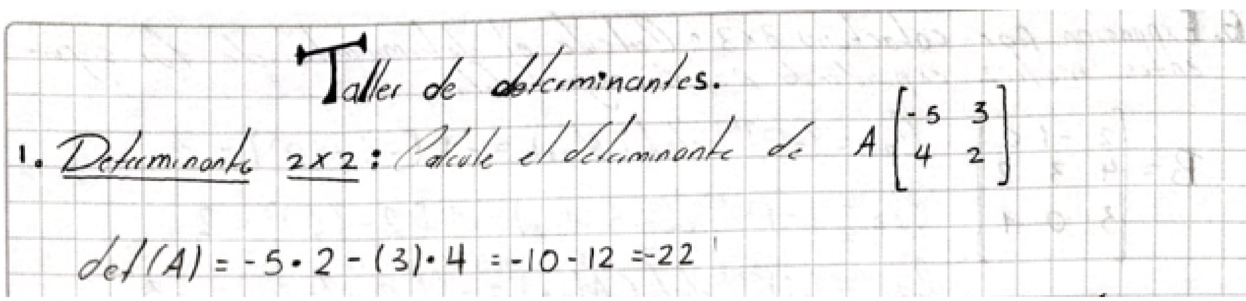
Taller de Determinantes

Roger Villa

Taller de Determinantes

1. **Determinante 2x2.** Calcule el determinante de

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$



Taller de determinantes.

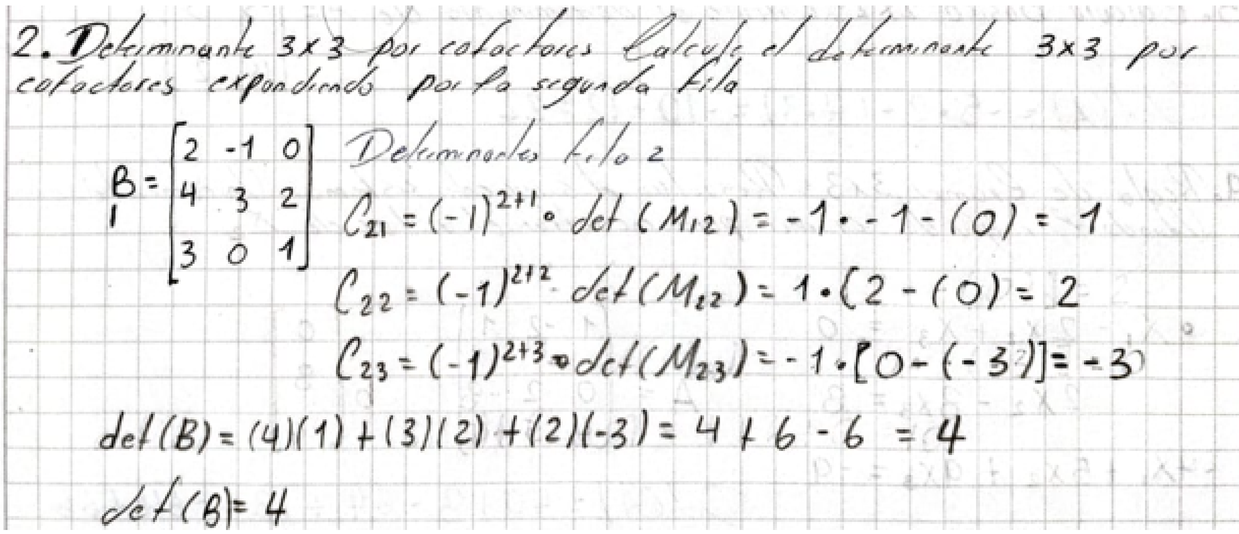
1. Determinante 2x2: Calcule el determinante de $A \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

$\det(A) = -5 \cdot 2 - (3) \cdot 4 = -10 - 12 = -22$

Figura 1: Enter Caption

2. **Determinante 3x3 por cofactores.** Calcule el determinante de la siguiente matriz expandiendo por la segunda fila.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



2. Determinante 3x3 por cofactores Calcule el determinante 3x3 por cofactores expandiendo por la segunda fila

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinantes fila 2

$C_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \det(M_{12}) = -1 \cdot -1 - (0) = 1$

$C_{22} = (-1)^{2+2} \det(M_{22}) = 1 \cdot (2 - (0)) = 2$

$C_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \det(M_{23}) = -1 \cdot [0 - (-3)] = -3$

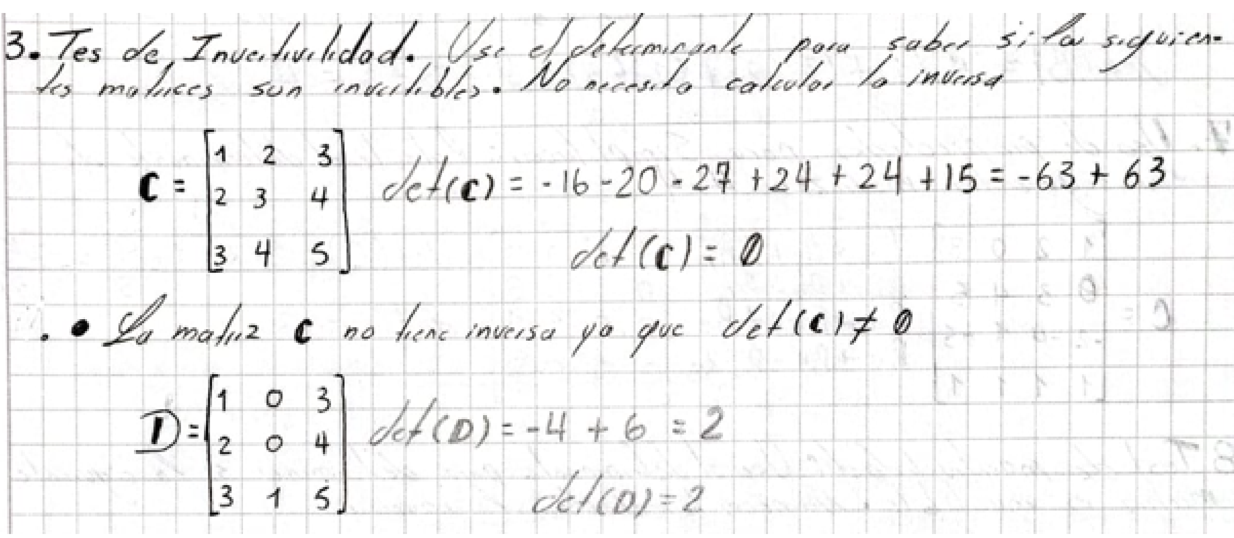
$\det(B) = (4)(1) + (3)(2) + (2)(-3) = 4 + 6 - 6 = 4$

$\det(B) = 4$

Figura 2: Enter Caption

3. **Test de invertibilidad.** Use el determinante para saber si las siguientes matrices son invertibles. No necesita calcular la inversa.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$



3. Tes de Invertivilidad. Use el determinante para saber si las siguientes matrices son invertibles. No necesita calcular la inversa

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$\det(\mathbf{C}) = -16 - 20 - 27 + 24 + 24 + 15 = -63 + 63$

$\det(\mathbf{C}) = 0$

• La matriz $\mathbf{C}$ no tiene inversa ya que $\det(\mathbf{C}) \neq 0$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

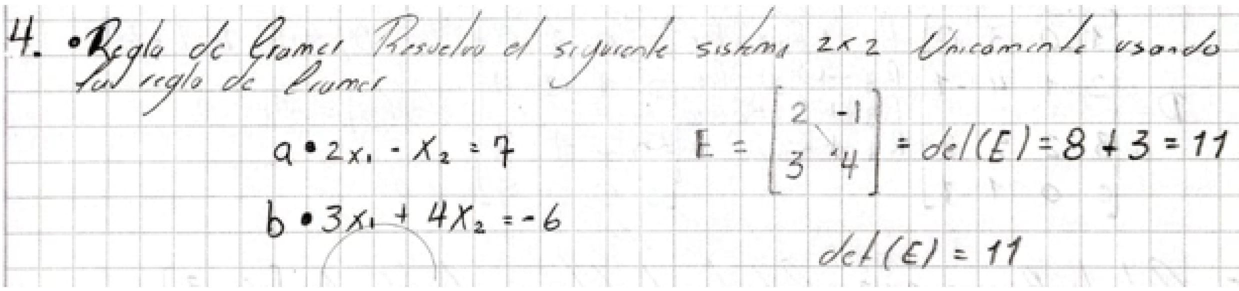
$\det(\mathbf{D}) = -4 + 6 = 2$

$\det(\mathbf{D}) = 2$

Figura 3: Enter Caption

4. **Regla de Cramer (2x2).** Resuelva el siguiente sistema únicamente usando la Regla de Cramer.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 7, \\ 3x_1 + 4x_2 = -6. \end{cases}$$



4. • Regla de Cramer Resuelva el siguiente sistema 2x2 Unicamente usando la regla de Cramer

a • $2x_1 - X_2 = 7$

b • $3x_1 + 4X_2 = -6$

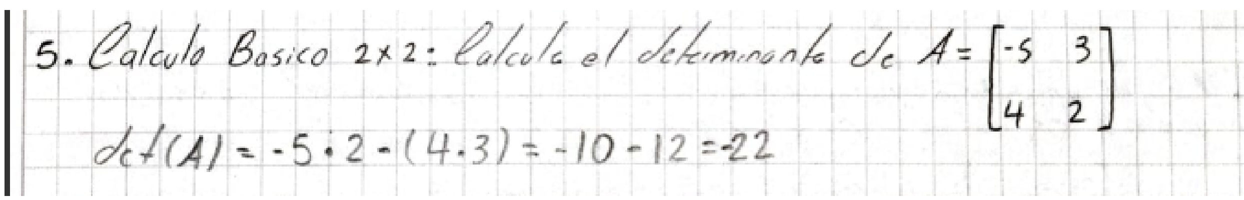
$E = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = del(E) = 8 + 3 = 11$

$det(E) = 11$

Figura 4: Enter Caption

5. **Cálculo básico 2x2.** Calcule el determinante de

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$



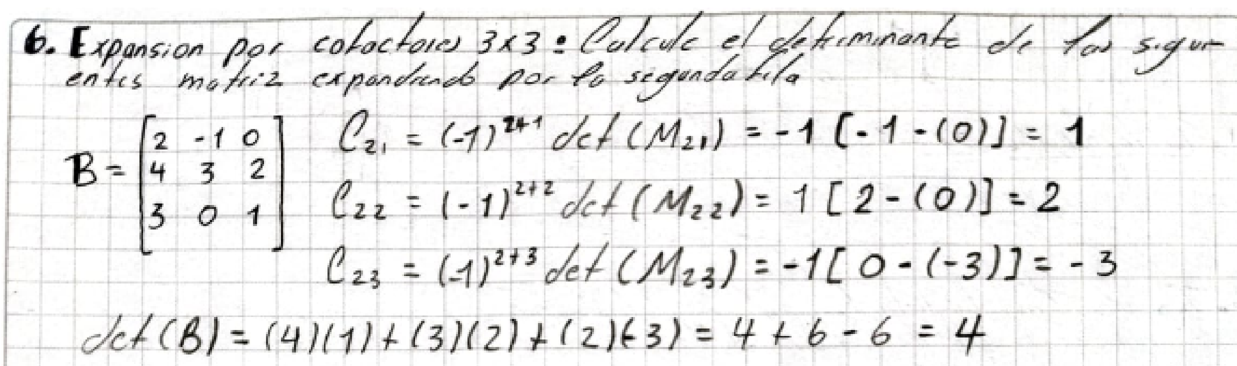
5. Calculo Basico 2x2: Calcule el determinante de $A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

$det(A) = -5 \cdot 2 - (4 \cdot 3) = -10 - 12 = -22$

Figura 5: Enter Caption

6. **Expansión por cofactores 3x3.** Calcule el determinante de la siguiente matriz expandiendo por la segunda fila.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



6. Expansion por cofactores 3x3: Calcule el determinante de las siguientes matriz expandiendo por la segunda fila

$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$C_{21} = (-1)^{2+1} \, det(M_{21}) = -1 \, [-1 - (0)] = 1$

$C_{22} = (-1)^{2+2} \, det(M_{22}) = 1 \, [2 - (0)] = 2$

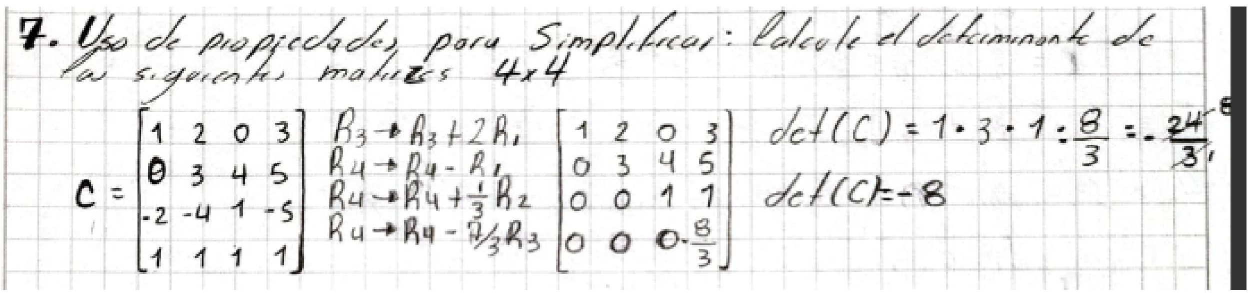
$C_{23} = (-1)^{2+3} \, det(M_{23}) = -1 [0 - (-3)] = -3$

$det(B) = (4)(1) + (3)(2) + (2)(-3) = 4 + 6 - 6 = 4$

Figura 6: Enter Caption

7. **Uso de propiedades para simplificar (4x4).** Calcule el determinante de la siguiente matriz. Pista: use operaciones por fila para simplificar.

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & -4 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$



7. Uso de propiedades para Simplificar: Calcule el determinante de las siguientes matrizes 4x4

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & -4 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_3 \to R_3 + 2R_1 \\ R_4 \to R_4 - R_1 \\ R_4 \to R_4 + \frac{1}{3}R_2 \\ R_4 \to R_4 - 7/3 R_3 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

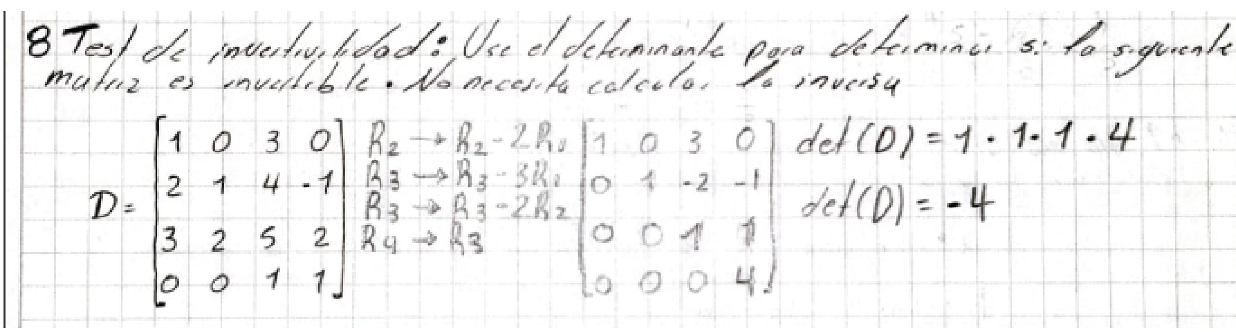
$\det(C) = 1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot -\frac{8}{3} = -\frac{24}{3}$

$\det(C) = -8$

Figura 7: Enter Caption

8. **Test de invertibilidad (4x4).** Use el determinante para determinar si la matriz siguiente es invertible. No necesita calcular la inversa.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$



8 Test de invertivilidad: Use el determinante para determinar si la siguiente matriz es invertible. No necesita calcular la inversa

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 3R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_2 \\ R_4 \to R_3 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$\det(D) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4$

$\det(D) = -4$

Figura 8: Enter Caption

9. **Regla de Cramer 3x3.** Resuelva el siguiente sistema únicamente usando la Regla de Cramer para encontrar el valor de x_2.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_2 - 8x_3 = 8, \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9. \end{cases}$$

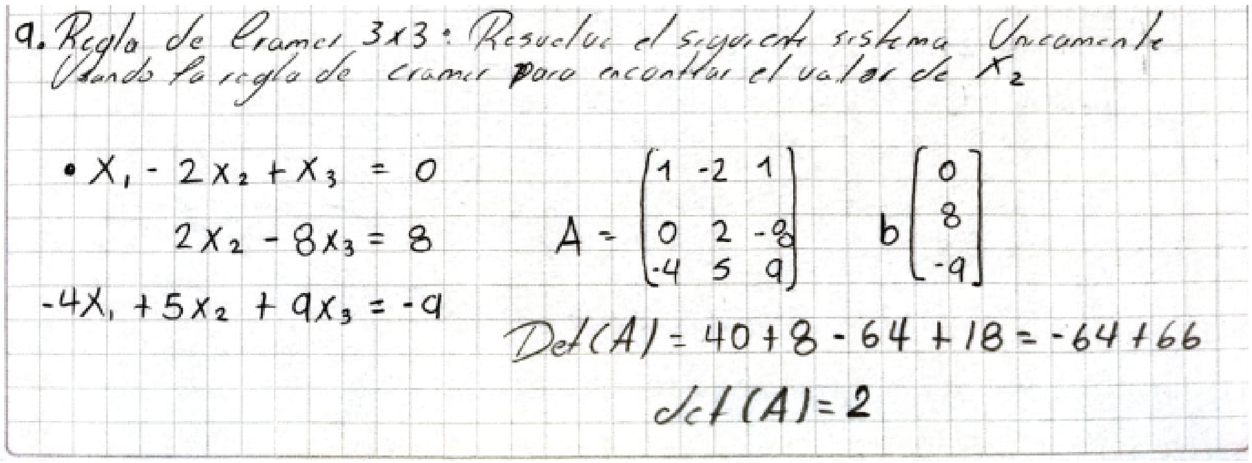


Figura 9: Enter Caption

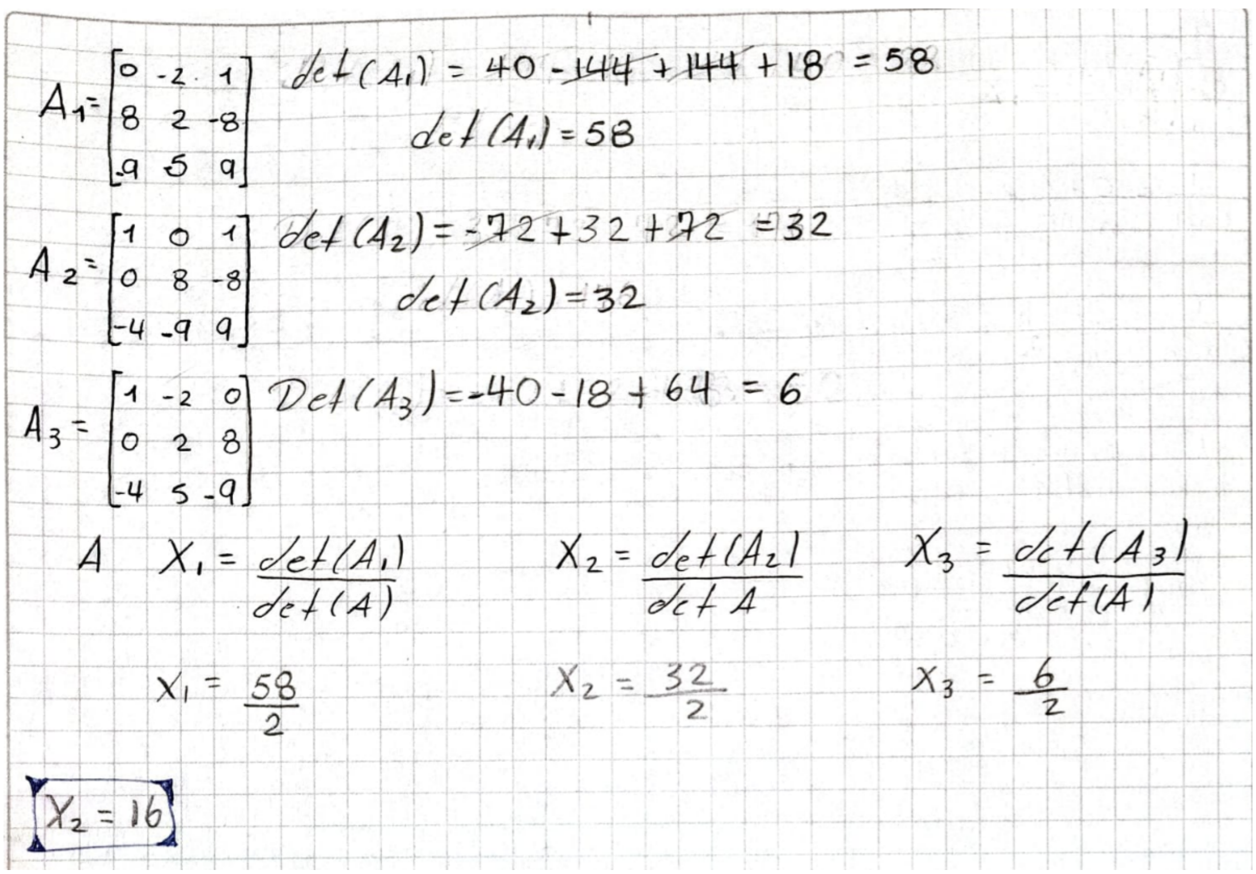
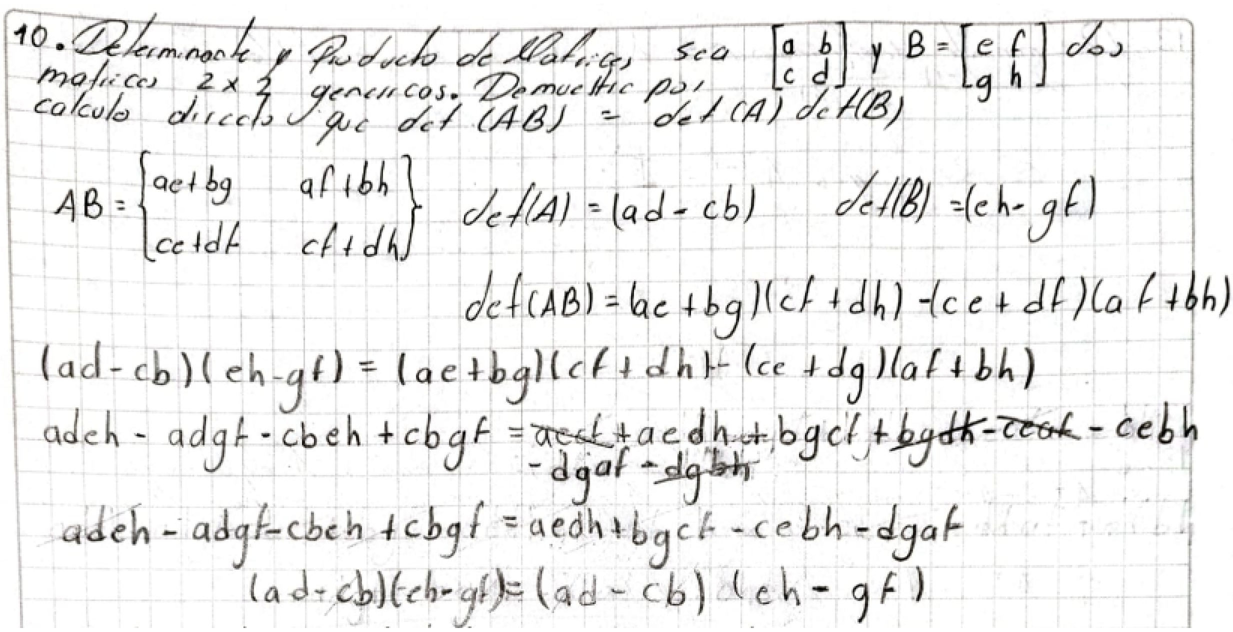


Figura 10: Enter Caption

10. **Determinante y producto de matrices.** Sean

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

dos matrices 2×2 genéricas. Demuestre por cálculo directo que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.



10. Determinante y Producto de Matrices. Sea $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ dos matrices 2 x 2 genericos. Demuestre por calculo directo que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

$$AB = \begin{Bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+df & cf+dh \end{Bmatrix} \quad \det(A) = (ad-cb) \quad \det(B) = (eh-gf)$$

$$\det(AB) = (ae+bg)(cf+dh) - (ce+df)(af+bh)$$

$$(ad-cb)(eh-gf) = (ae+bg)(cf+dh) - (ce+dg)(af+bh)$$

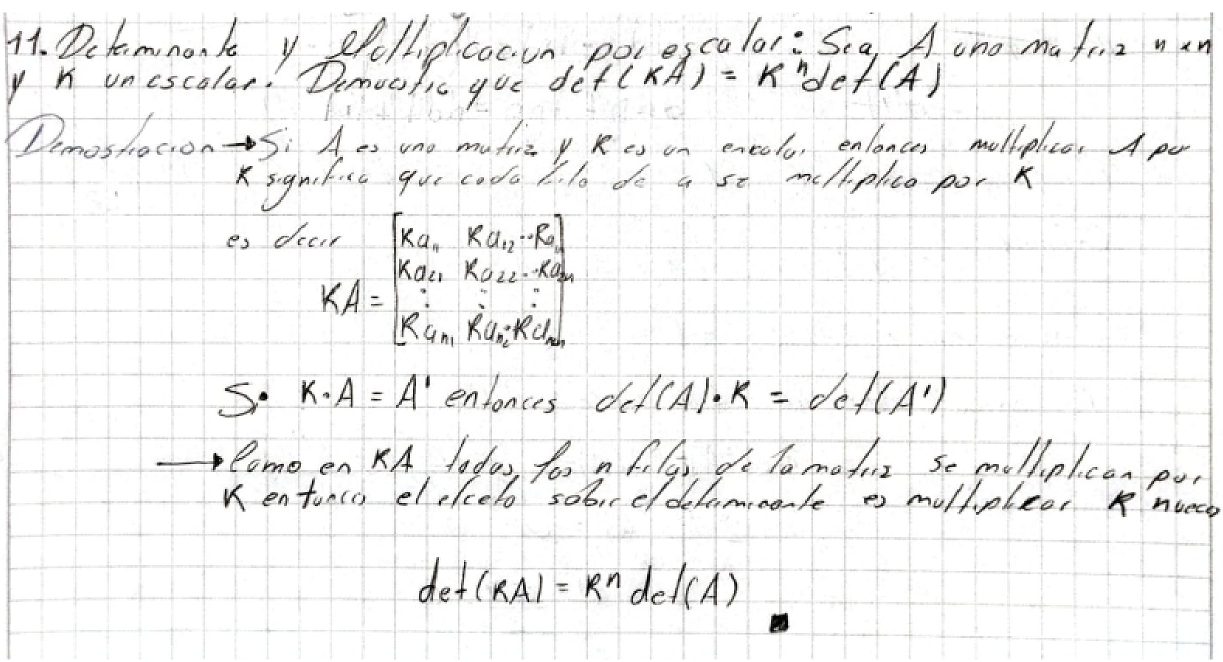
$$adeh - adgf - cbeh + cbgf = \cancel{aecf} + aedh + bgcf + \cancel{bgdh} - \cancel{ceaf} - cebh - dgaf - \cancel{dgbh}$$

$$adeh - adgf - cbeh + cbgf = aedh + bgcf - cebh - dgaf$$

$$(ad-cb)(eh-gf) = (ad-cb)(eh-gf)$$

Figura 11: Enter Caption

11. **Determinante y multiplicación por escalar.** Sea A una matriz $n \times n$ y k un escalar. Demuestre que $\det(kA) = k^n \det(A)$.



11. Determinante y Multiplicacion por escalar: Sea A una matriz $n \times n$ y K un escalar. Demuestre que $\det(KA) = K^n \det(A)$

Demostracion → Si A es una matriz y K es un escalar, entonces multiplicar A por K significa que cada fila de A se multiplica por K

es decir

$$KA = \begin{bmatrix} Ka_{11} & Ka_{12} & \cdots & Ka_{1n} \\ Ka_{21} & Ka_{22} & \cdots & Ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Ka_{n1} & Ka_{n2} & \cdots & Ka_{nn} \end{bmatrix}$$

Si $K \cdot A = A'$ entonces $\det(A) \cdot K = \det(A')$

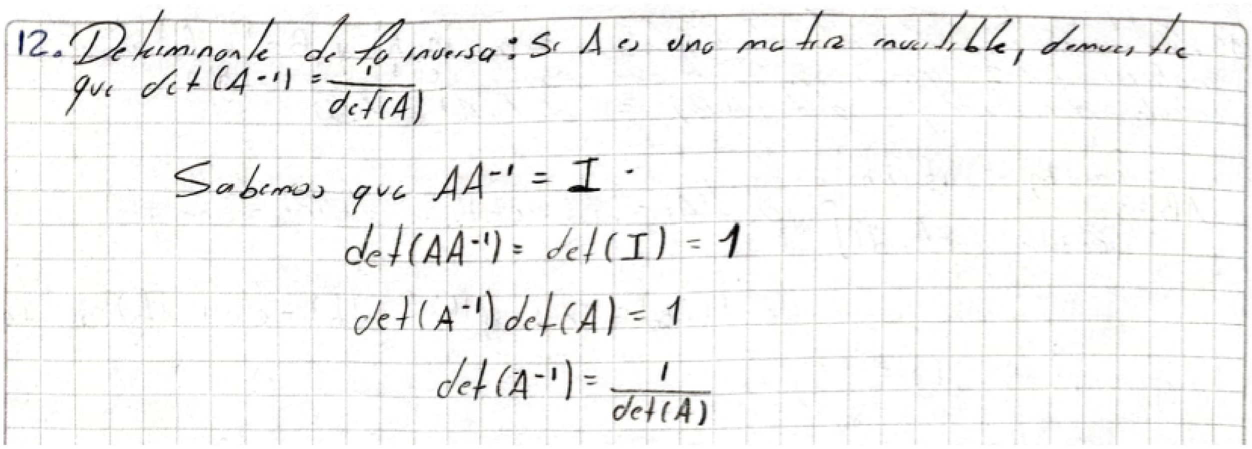
→ Como en KA todas las n filas de la matriz se multiplican por K entonces el efecto sobre el determinante es multiplicar K n veces

$$\det(KA) = K^n \det(A)$$

Figura 12: Enter Caption

12. **Determinante de la inversa.** Si A es una matriz invertible, demuestre que

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$



12. Determinante de la inversa: Si A es una matriz invertible, demuestre que $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$

Sabemos que $AA^{-1} = I$.

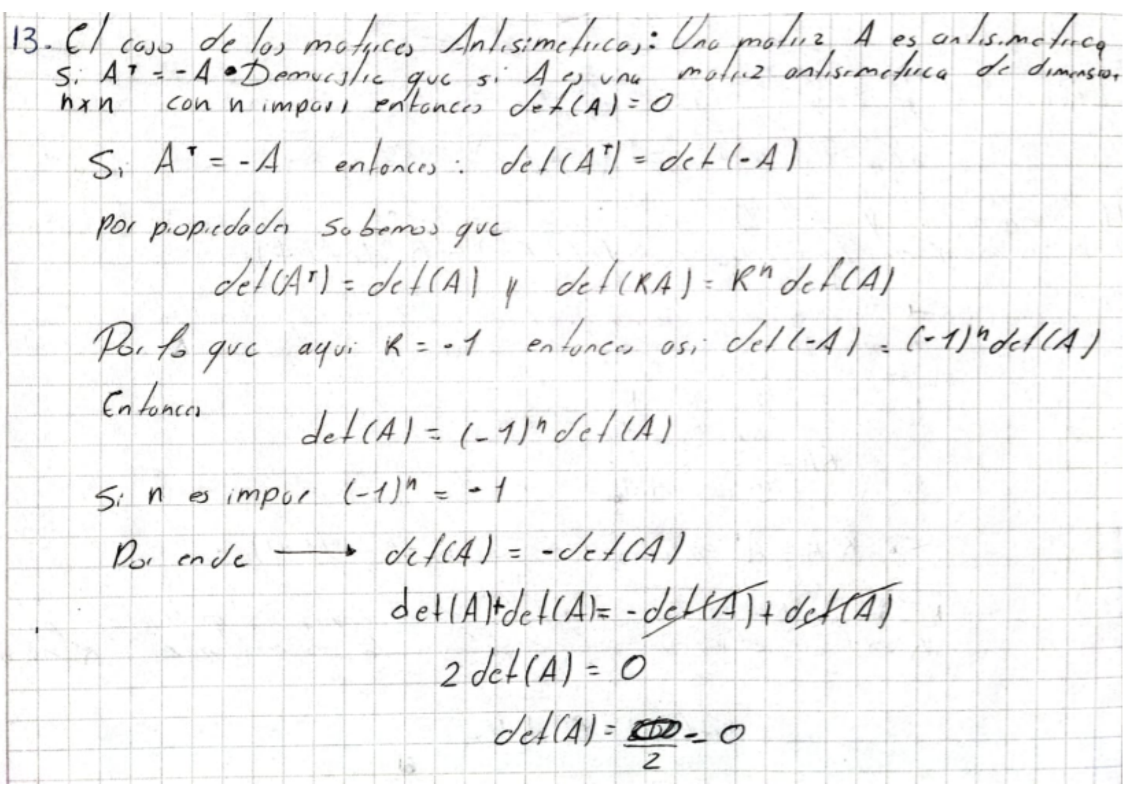
$$det(AA^{-1}) = det(I) = 1$$

$$det(A^{-1})det(A) = 1$$

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$$

Figura 13: Enter Caption

13. **Matrices antisimétricas.** Una matriz A es antisimétrica si $A^T = -A$. Demuestre que si A es antisimétrica de dimensión $n \times n$ con n impar, entonces $\det(A) = 0$.



13. El caso de las matrices Antisimetricas: Una matriz A es antisimetrica si $A^T = -A$. Demuestre que si A es una matriz antisimetrica de dimension $n \times n$ con n impar entonces $det(A) = 0$

Si $A^T = -A$ entonces: $det(A^T) = det(-A)$

por propiedades sabemos que

$$det(A^T) = det(A) \quad y \quad det(KA) = K^n det(A)$$

Por lo que aqui $K = -1$ entonces asi $det(-A) = (-1)^n det(A)$

Entonces

$$det(A) = (-1)^n det(A)$$

Si n es impar $(-1)^n = -1$

Por ende $\longrightarrow$ $det(A) = -det(A)$

$$det(A) + det(A) = \cancel{-det(A)} + \cancel{det(A)}$$

$$2\,det(A) = 0$$

$$det(A) = \frac{0}{2} = 0$$

Figura 14: Enter Caption

14. **Determinantes e independencia lineal.** Demuestre que las columnas de una matriz A de $n \times n$ son linealmente independientes si y solo si $\det(A) \neq 0$.

14. Determinantes e independencia lineal: Demuestre que las columnas de una matriz A de $n \times n$ son linealmente independientes si y solo si $\det(A) \neq 0$

- Supongamos que las columnas A son linealmente independientes.

  Entonces $Ax = 0$ solo tiene solucion trivial.

  Por el teorema de la matriz invertible, A es invertible.
  por lo que $\det(A) \neq 0$

Figura 15: Enter Caption

15. **U**se Python y NumPy para verificar los determinantes de las matrices A, B, C y D calculados en la parte manual.

```
import numpy as np

def main():
    print("===␣Taller␣de␣Determinantes:␣Parte␣Computacional␣===\
       n")

    # 1. Matriz A
    A = np.array([[-5, 3], [4, 2]])
    print("Matriz␣A:\n", A)
    print("det(A)␣=", np.linalg.det(A))

    # 2. Matriz B
    B = np.array([[2, -1, 0],
                  [4,  3, 2],
                  [3,  0, 1]])
    print("\nMatriz␣B:\n", B)
    print("det(B)␣=", np.linalg.det(B))

    # 3. Matriz C
    C = np.array([[1, 2, 3],
                  [2, 3, 4],
                  [3, 4, 5]])
    print("\nMatriz␣C:\n", C)
    print("det(C)␣=", np.linalg.det(C))

    # 4. Matriz D
    D = np.array([[1, 0, 3],
                  [2, 0, 4],
```

```
                  [3, 1, 5]])
    print("\nMatriz D:\n", D)
    print("det(D) =", np.linalg.det(D))

    # 5. Verificar propiedad det(AB) = det(A)*det(B) con matrices 2x2
    Bp = np.array([[1, 2], [3, 4]])  # Ejemplo arbitrario
    print("\nMatriz Bp:\n", Bp)
    print("det(A) =", np.linalg.det(A))
    print("det(Bp) =", np.linalg.det(Bp))
    print("det(A*Bp) =", np.linalg.det(A @ Bp))
    print("det(A)*det(Bp) =", np.linalg.det(A) * np.linalg.det(Bp))

    # 6. Caso de matriz casi singular
    E = np.array([[1, 1],
                  [1, 1.0001]])
    F = np.array([[1, 1],
                  [1, 1]])
    print("\nMatriz E:\n", E)
    print("det(E) =", np.linalg.det(E))
    print(" E  es invertible?", np.linalg.det(E) != 0)

    print("\nMatriz F:\n", F)
    print("det(F) =", np.linalg.det(F))
    print(" F  es invertible?", np.linalg.det(F) != 0)

if __name__ == "__main__":
    main()
```
Listing 1: Interfaz en Python para la parte computacional