Guía de Talleres del Segundo Corte

Álgebra Lineal Aplicada

Semanas 7 a 11

Agosto - Septiembre 2025

Índice

1. Taller: Descomposición LU

1.1. Parte 1: Ejercicios de Cálculo Manual

Problema

1. Dada la matriz A y el vector $\mathbf{b}$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -4 & 2 \\ -4 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   a) Encuentre la descomposición $A = LU$ a mano.

   b) Use las matrices L y U para resolver el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ por sustitución hacia adelante y hacia atrás.

2. Una Matriz 3x3 Estándar Encuentre la descomposición $A = LU$ para la siguiente matriz. Este ejercicio refuerza el algoritmo básico.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 6 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

3. Caso con Ceros Estratégicos Encuentre la descomposición $A = LU$. Este ejercicio muestra cómo los ceros en la matriz simplifican el proceso de eliminación.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 10 & -3 \end{bmatrix}$$

4. ¿Qué Pasa si A ya es Triangular Superior? Encuentre la descomposición $A = LU$ para la siguiente matriz. Este es un caso conceptual para discutir en grupo.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

   Pregunta para discusión: *¿Qué forma tiene la matriz L en este caso? ¿Por qué?*

5. La Necesidad del Pivoteo (Caso que Falla) Intente encontrar la descomposición $A = LU$ para la siguiente matriz usando el método que hemos visto.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

   Pregunta para discusión: *¿Qué problema encuentran inmediatamente? ¿Cómo lo solucionarían en una eliminación gaussiana normal? (Esto introduce la necesidad de la permutación de filas y la descomposición LUP).*

6. **Unicidad de la Factorización** Suponga que una matriz invertible A tiene dos descomposiciones LU, es decir, $A = L_1U_1$ y $A = L_2U_2$. Demuestre que, si L_1 y L_2 son triangulares inferiores unitarias y U_1 y U_2 son triangulares superiores invertibles, entonces necesariamente $L_1 = L_2$ y $U_1 = U_2$.

Pista: Comience igualando $L_1U_1 = L_2U_2$. Reorganice la ecuación para tener las matrices L a un lado y las U al otro (ej. $L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$). ¿Qué puede decir sobre la estructura de la matriz resultante en cada lado de la igualdad?

7. **Determinante y Descomposición LU** Use las propiedades de los determinantes y la factorización $A = LU$ para demostrar que $\det(A) = \det(U)$.

   Pista: Recuerde la propiedad del determinante de un producto de matrices y el hecho de que el determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de su diagonal.

8. **Inversa y Descomposición LU** Si $A = LU$, demuestre que A es invertible si y solo si U es invertible. Luego, encuentre una expresión para A^{-1} en términos de L^{-1} y U^{-1}.

   Pista: Utilice la propiedad $(XY)^{-1} = Y^{-1}X^{-1}$. ¿Por qué podemos estar seguros de que L siempre es invertible?

9. **Simetría y Descomposición LU** Sea A una matriz simétrica que admite una descomposición $A = LU$. ¿Implica esto que $U = L^T$? Justifique su respuesta con una demostración o un contraejemplo.

   Pista: Considere una matriz simétrica simple como $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$. Calcule su descomposición LU y compare U con L^T. Esto le dará la respuesta y lo introducirá a la idea de otra factorización importante: la descomposición de Cholesky ($A = LL^T$), que sí aplica para matrices simétricas definidas positivas.

10. **Descomposición LU de la Transpuesta** Si $A = LU$, encuentre la descomposición LU de la matriz A^T. Es decir, encuentre matrices L' y U' tales que $A^T = L'U'$. Exprese L' y U' en términos de L y U.

    Pista: Comience con $A^T = (LU)^T = U^TL^T$. El producto U^TL^T es una factorización de A^T, pero ¿está en la forma "LU"(triangular inferior unitaria por triangular superior)? Si no es así, ¿cómo puede manipular la expresión para llegar a esa forma?

1.2. Parte 2: Aplicación Computacional

Problema: El Experimento de la Eficiencia

Vamos a verificar por qué LU es el método preferido en cómputo. Analizaremos una matriz fija A de 100×100 bajo 5000 vectores de carga **b** diferentes. Implemente los dos métodos de abajo y compare sus tiempos de ejecución usando la librería 'time'.

```
# Dentro de un bucle for:
x = np.linalg.solve(A, b)
```

```
# Fuera del bucle (una vez):
P, L, U = lu(A)
# Dentro del bucle:
y = solve_triangular(L, P@b, lower=True)
x = solve_triangular(U, y)
```

2. Taller de Determinantes

1. **Determinante 2x2** Calcule el determinante de $A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$.

2. **Determinante 3x3 por Cofactores** Calcule el determinante de la siguiente matriz expandiendo por la segunda fila.
$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. **Test de Invertibilidad** Use el determinante para saber si las siguientes matrices son invertibles. No necesita calcular la inversa.
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

4. **Regla de Cramer** Resuelva el siguiente sistema 2x2 **únicamente** usando la Regla de Cramer.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 7 \\ 3x_1 + 4x_2 &= -6 \end{aligned}$$

5. **Cálculo Básico 2x2:** Calcule el determinante de $A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$.

6. **Expansión por Cofactores 3x3:** Calcule el determinante de la siguiente matriz expandiendo por la **segunda fila**.
$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. **Uso de Propiedades para Simplificar:** Calcule el determinante de la siguiente matriz 4x4.
Pista: Use operaciones de fila para simplificar la matriz a una forma donde el cálculo sea trivial.
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & -4 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

8. **Test de Invertibilidad:** Use el determinante para determinar si la siguiente matriz es invertible. No necesita calcular la inversa.

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

9. **Regla de Cramer 3x3:** Resuelva el siguiente sistema **únicamente** usando la Regla de Cramer para encontrar el valor de x_2.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= -9 \end{aligned}$$

10. **Determinante y Producto de Matrices:** Sean $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ dos matrices 2x2 genéricas. Demuestre por cálculo directo que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

11. **Determinante y Multiplicación por Escalar:** Sea A una matriz de $n \times n$ y k un escalar. Demuestre que $\det(kA) = k^n \det(A)$.
Pista: ¿Cómo afecta la multiplicación por k a cada fila de la matriz?

12. **Determinante de la Inversa:** Si A es una matriz invertible, demuestre que $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.
Pista: Comience con la identidad $AA^{-1} = I$.

13. **El Caso de las Matrices Antisimétricas:** Una matriz A es antisimétrica si $A^T = -A$. Demuestre que si A es una matriz antisimétrica de dimensión $n \times n$ con n **impar**, entonces $\det(A) = 0$.
Pista: Use las propiedades $\det(A^T) = \det(A)$ y $\det(kA) = k^n \det(A)$.

14. **Determinantes e Independencia Lineal:** Demuestre que las columnas de una matriz A de $n \times n$ son linealmente independientes si y solo si $\det(A) \neq 0$.
Pista: Conecte esta afirmación con el Teorema de la Matriz Invertible.

15. Use Python y NumPy para verificar los determinantes de las matrices A, B, C y D calculados en la parte manual.

```python
import numpy as np
# Ejemplo para la matriz A
A = np.array([[-5, 3], [4, 2]])
det_A = np.linalg.det(A)
print(f"El determinante de A es: {det_A}")
```

Adicionalmente, verifique que $\det(A \cdot B_p) = \det(A) \cdot \det(B_p)$, donde B_p es una matriz 2x2 de su elección.

16. **El Problema de la Matriz Casi Singular**

a) Considere la matriz $E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1{,}0001 \end{bmatrix}$. Calcule su determinante. ¿Es invertible?

b) Ahora considere la matriz $F = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule su determinante. ¿Es invertible?

c) **Discusión en equipo:** La matriz E es técnicamente invertible, pero su determinante es muy cercano a cero. ¿Qué problemas creen que podría causar esto en un cálculo computacional del mundo real (donde los datos siempre tienen pequeños errores de medición)? Esta es la idea de un sistema **mal condicionado**, que exploraremos más adelante.

3. Taller: Espacios y Subespacios

1. Demuestre o refute si los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^3$ usando el Test de Subespacio (verificar las 3 condiciones).

   a) $H_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \mid a + b = 2c \right\}$

   b) $H_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \mid a \cdot b = 0 \right\}$

2. **Un Plano en** $\mathbb{R}^3$ ¿Es $H = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 5y + 2z = 0 \right\}$ un subespacio de $\mathbb{R}^3$?

3. **Un Plano Desplazado** ¿Es $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 5y + 2z = 1 \right\}$ un subespacio de $\mathbb{R}^3$?

4. **El Espacio de Polinomios** Sea $\mathcal{P}_2$ el espacio de todos los polinomios de grado menor o igual a 2. ¿Es el conjunto $S = \{p(t) \in \mathcal{P}_2 \mid p(0) = 0\}$ un subespacio de $\mathcal{P}_2$?

5. **El Conjunto de Matrices Singulares** Sea $M_{2\times 2}$ el espacio de todas las matrices de 2x2. ¿Es el conjunto de todas las matrices singulares (no invertibles) de 2x2 un subespacio de $M_{2\times 2}$?

6. **El Espacio Generado (Span)** Dados los vectores $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}^3$. ¿Es el conjunto $H = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ un subespacio de $\mathbb{R}^3$?

7. **Ejercicio 6: Intersección de Subespacios** Sean H y K dos subespacios de un espacio vectorial V. Demuestre que su intersección, $H \cap K$, también es un subespacio de V.

   Pista: Para probarlo, debe usar el Test de Subespacio sobre el conjunto $H \cap K$. Por ejemplo, para probar la cerradura bajo la suma, tome dos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H \cap K$ y demuestre que $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ también está en $H \cap K$.

8. **Unión de Subespacios**

   Sean H y K dos subespacios de un espacio vectorial V. ¿Es su unión, $H \cup K$, necesariamente un subespacio de V? Provea una demostración o un contraejemplo.

   Pista: Considere dos subespacios simples en $\mathbb{R}^2$, como dos líneas distintas que pasan por el origen. Tome un vector de cada línea y súmelos. ¿El resultado pertenece a la unión de las dos líneas?

9. **Propiedades del Vector Nulo** Usando únicamente los 10 axiomas de un espacio vectorial, demuestre que para cualquier vector $\mathbf{v} \in V$, se cumple que $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Pista: Comience con la propiedad de los escalares $0 + 0 = 0$. Luego use el axioma 8: $(0 + 0)\mathbf{v} = 0\mathbf{v} + 0\mathbf{v}$. A partir de ahí, use otros axiomas para simplificar y llegar a la conclusión.

10. **El Espacio Columna como un Span** Sea A una matriz $m \times n$. Demuestre que el Espacio Columna de A, definido como $\mathrm{Col}(A) = \{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{b} = A\mathbf{x} \text{ para algún } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\}$, es equivalente a la definición de $\mathrm{span}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$, donde $\mathbf{a}_i$ son las columnas de A.

    Pista: Recuerde la definición de la multiplicación $A\mathbf{x}$ como una combinación lineal de las columnas de A.

11. **Un Subespacio de Funciones** Sea $C(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de todas las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Considere el conjunto $H = \{f \in C(\mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t)\,dt = 0\}$. Demuestre que H es un subespacio de $C(\mathbb{R})$.

    Pista: Aplique el Test de Subespacio, usando las propiedades de linealidad de la integral.

3.1. Parte 2: Aplicación Computacional

Problema: Estructurando los Datos del Proyecto

Escriba una clase en Python (‘Dataset‘ o ‘ActuarialModel‘) que cargue los datos crudos de su proyecto (imágenes o CSV) y los convierta en las matrices y vectores de NumPy necesarios para su análisis.

4. Taller Semana 9: Independencia, Base y Dimensión

4.1. Parte 1: Ejercicios de Cálculo Manual

Problema

1. **Verificación de Independencia Lineal** Determine si el siguiente conjunto de vectores en $\mathbb{R}^3$ es linealmente independiente o dependiente.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

2. **Verificación de una Base** Determine si el siguiente conjunto de vectores forma una base para $\mathbb{R}^3$.

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

3. **Encontrar una Base para un Span** El siguiente conjunto de vectores S genera un subespacio H de $\mathbb{R}^4$. Encuentre una base para H y determine su dimensión.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ -6 \\ 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}$$

4. **Una Base en el Espacio de Polinomios** Considere el espacio vectorial $\mathcal{P}_2$ de los polinomios de grado menor o igual a 2. Determine si el conjunto $S = \{1-t^2,\ t-t^2,\ 2-t+t^2\}$ forma una base para $\mathcal{P}_2$.

   Pista: Convierta los polinomios a vectores de coordenadas con respecto a la base estándar $\{1, t, t^2\}$.

5. **+Dimensión del Espacio Columna y Nulo** Encuentre la dimensión del Espacio Columna y la dimensión del Espacio Nulo de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. **El Vector Nulo y la Dependencia** Demuestre que cualquier conjunto de vectores $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ que contiene al vector nulo $(\mathbf{0})$ es linealmente dependiente.

   Pista: Use la definición formal de independencia lineal. ¿Puede encontrar una combinación lineal no trivial de los vectores que sume cero?

7. **Unicidad de la Representación** Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ una base para un espacio vectorial V. Demuestre que para cada vector $\mathbf{x} \in V$, existe un **único** conjunto de escalares $c_1, \dots, c_n$ tal que $\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n$.

Pista: Suponga que existen dos representaciones diferentes y demuestre que esto conduce a una contradicción con la independencia lineal de la base.

8. **Dimensión de un Subespacio** Sea H un subespacio de un espacio vectorial de dimensión finita V. Demuestre que la dimensión de H no puede ser mayor que la dimensión de V. Es decir, $\dim(H) \leq \dim(V)$.

   Pista: Considere una base para H. ¿Es este conjunto de vectores linealmente independiente en V? ¿Qué puede concluir sobre el número de vectores en este conjunto en comparación con el número de vectores en una base para V?

9. **Unicidad del Inverso Aditivo** Usando únicamente los axiomas de un espacio vectorial, demuestre que cada vector $\mathbf{u}$ en V tiene un único inverso aditivo.

   Pista: Suponga que un vector $\mathbf{u}$ tiene dos inversos aditivos, $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$. Comience con la expresión $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{0}$ y use los axiomas para demostrar que $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$.

10. **Columnas de una Matriz Invertible** Demuestre que una matriz A de $n \times n$ es invertible si y solo si sus columnas forman una base para $\mathbb{R}^n$.

    Pista: Use el Teorema de la Matriz Invertible. Conecte la invertibilidad con la independencia lineal de las columnas y la capacidad de las columnas para generar $\mathbb{R}^n$.

Considere el conjunto $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

1. Determine si el conjunto S es linealmente independiente.
2. Encuentre una base para el subespacio generado por S y determine su dimensión.

4.2. Parte 2: Aplicación Computacional

Problema

Dados 5 vectores en $\mathbb{R}^4$, use `np.linalg.matrix_rank` para determinar si son L.I. y `sympy.rref()` para encontrar una base para el espacio que generan.

5. Taller Semana 10: Valores y Vectores Propios

5.1. Parte 1: Ejercicios de Cálculo Manual

Problema

Para la matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, encuentre a mano:

1. El polinomio característico y los valores propios.
2. Una base para cada espacio propio.

5.2. Parte 2: Aplicación Computacional

Problema: El Corazón del Proyecto

- **Equipos de Datos (PCA/SVD):** A partir de su matriz de datos, calculen la matriz de covarianza y usen `np.linalg.eig()` para encontrar sus valores y vectores propios (sus çomponentes principales”).
- **Equipos de Actuaría (Leslie):** Tomen su Matriz de Leslie y usen `np.linalg.eig()` para encontrar el valor propio dominante y su vector propio asociado.

6. Taller Semana 11: Diagonalización y Aplicaciones

6.1. Parte 1: Ejercicios de Cálculo Manual

Problema

Para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

del problema anterior:

1. Construya las matrices P y D.
2. Verifique a mano que $A = PDP^{-1}$.

6.2. Parte 2: Aplicación Computacional

Problema: Usando el Modelo

- **Equipos de Datos (PCA):** Implementen la compresión ($\mathbf{y} = P_k^T \mathbf{x}$) y reconstrucción ($\mathbf{x}_{\text{aprox}} = P_k \mathbf{y}$) de una imagen de su dataset. Visualicen el resultado para diferentes valores de k.
- **Equipos de Actuaría (Leslie):** Proyecten su población 50 años en el futuro usando la fórmula $p_{50} = (PD^{50}P^{-1})p_0$.