Álgebra Lineal

Tema: Cadenas de Markov y Aplicaciones

Estudiante:
Roger Villa

Universidad Mayor de Cundinamarca
Facultad de Ciencias
Programa de Matemáticas Aplicadas

Septiembre 2025

14. Cadena de Markov – Matrices P^n en formato `bmatrix`

Enunciado general

Una empresa que realiza estudios de mercado está estudiando los patrones de compra para tres productos que son competidores entre sí. La empresa ha determinado el porcentaje de residentes de casas que cambiarían de un producto a otro después de un mes (suponga que cada residente compra uno de los tres productos y que los porcentajes no cambian de un mes a otro). Esta información se presenta en forma de matriz:

$$p_{ij} = \text{porcentaje que cambia } \textit{del} \text{ producto } j \textit{ al} \text{ producto } i.$$

La matriz de transición es:

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0.05 \\ 0.05 & 0.75 & 0.05 \\ 0.15 & 0.05 & 0.9 \end{bmatrix}.$$

Supóngase un total de 30 000 residentes.

(a) Interpretación de los elementos de P

Cada entrada P_{ij} da la fracción (o porcentaje) de individuos que estaban en el producto j y, después de un mes, se encuentran en el producto i.

Interpretaciones concretas:

$$\begin{aligned}
P_{11} &= 0.8 && \Rightarrow 80\% \text{ de los que compraban 1 siguen en 1,} \\
P_{21} &= 0.05 && \Rightarrow 5\% \text{ de los que compraban 1 pasan a 2,} \\
P_{31} &= 0.15 && \Rightarrow 15\% \text{ de los que compraban 1 pasan a 3,} \\
P_{12} &= 0.2 && \Rightarrow 20\% \text{ de los que compraban 2 pasan a 1,} \\
P_{22} &= 0.75 && \Rightarrow 75\% \text{ permanecen en 2,} \\
P_{32} &= 0.05 && \Rightarrow 5\% \text{ de 2 pasan a 3,} \\
P_{13} &= 0.05 && \Rightarrow 5\% \text{ de 3 pasan a 1,} \\
P_{23} &= 0.05 && \Rightarrow 5\% \text{ de 3 pasan a 2,} \\
P_{33} &= 0.9 && \Rightarrow 90\% \text{ permanecen en 3.}
\end{aligned}$$

(b) Interpretación de Px y P^2x

Si

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

es el número actual de clientes que usan cada producto, entonces:

$$Px$$

es la distribución *al mes siguiente*.

$$P^2x = P(Px)$$

es la distribución dentro de dos meses. En general $P^n x$ es la distribución después de n períodos (meses).

(c) Caso $x^{(0)} = (10000, 10000, 10000)^T$. Matrices P^n y $P^n x$

A continuación se muestran las matrices P^n (cada una en `bmatrix`) para los n pedidos, seguidas de los vectores $P^n x^{(0)}$.

$$P^5 = \begin{bmatrix} 0.431496 & 0.401895 & 0.194191 \\ 0.148514 & 0.245595 & 0.605891 \\ 0.419990 & 0.352510 & 0.199918 \end{bmatrix}$$

$$P^5 x^{(0)} = \begin{bmatrix} 10275.8250 \\ 5840.3500 \\ 13883.8250 \end{bmatrix}$$

$$P^{10} = \begin{bmatrix} 0.315910 & 0.171625 & 0.512465 \\ 0.171374 & 0.171374 & 0.657252 \\ 0.512716 & 0.656999 & 0.830283 \end{bmatrix}$$

$$P^{10} x^{(0)} = \begin{bmatrix} 9477.3034 \\ 5141.2376 \\ 15381.4590 \end{bmatrix}$$

$$P^{15} = \begin{bmatrix} 0.304820 & 0.168826 & 0.526354 \\ 0.167459 & 0.168045 & 0.664496 \\ 0.527721 & 0.663129 & 0.688150 \end{bmatrix}$$

$$P^{15} x^{(0)} = \begin{bmatrix} 9142.6020 \\ 5023.7378 \\ 15833.6602 \end{bmatrix}$$

$$P^{20} = \begin{bmatrix} 0.301292 & 0.167981 & 0.529727 \\ 0.166799 & 0.167999 & 0.665202 \\ 0.531909 & 0.664020 & 0.682071 \end{bmatrix}$$

$$P^{20}x^{(0)} = \begin{bmatrix} 9038.7706 \\ 5003.9896 \\ 15957.2398 \end{bmatrix}$$

$$P^{25} = \begin{bmatrix} 0.300334 & 0.167875 & 0.531791 \\ 0.167001 & 0.167996 & 0.665003 \\ 0.532665 & 0.664129 & 0.672856 \end{bmatrix}$$

$$P^{25}x^{(0)} = \begin{bmatrix} 9010.0291 \\ 5000.6705 \\ 15989.3004 \end{bmatrix}$$

$$P^{30} = \begin{bmatrix} 0.300084 & 0.167867 & 0.532049 \\ 0.167031 & 0.167999 & 0.665070 \\ 0.532885 & 0.664134 & 0.665881 \end{bmatrix}$$

$$P^{30}x^{(0)} = \begin{bmatrix} 9002.5192 \\ 5000.1127 \\ 15997.3681 \end{bmatrix}$$

$$P^{35} = \begin{bmatrix} 0.300020 & 0.167866 & 0.532114 \\ 0.167036 & 0.167999 & 0.665125 \\ 0.532944 & 0.664135 & 0.630876 \end{bmatrix}$$

$$P^{35}x^{(0)} = \begin{bmatrix} 9000.6212 \\ 5000.0189 \\ 15999.3598 \end{bmatrix}$$

$$P^{40} = \begin{bmatrix} 0.300005 & 0.167866 & 0.532129 \\ 0.167038 & 0.167999 & 0.665138 \\ 0.532957 & 0.664135 & 0.602233 \end{bmatrix}$$

$$P^{40}x^{(0)} = \begin{bmatrix} 9000.1514 \\ 5000.0032 \\ 15999.8455 \end{bmatrix}$$

$$P^{45} = \begin{bmatrix} 0.300001 & 0.167866 & 0.532132 \\ 0.167039 & 0.167999 & 0.665142 \\ 0.532960 & 0.664135 & 0.587867 \end{bmatrix}$$

$$P^{45}x^{(0)} = \begin{bmatrix} 9000.0366 \\ 5000.0005 \\ 15999.9629 \end{bmatrix}$$

$$P^{50} = \begin{bmatrix} 0.300000 & 0.167866 & 0.532133 \\ 0.167039 & 0.167999 & 0.665144 \\ 0.532961 & 0.664135 & 0.576863 \end{bmatrix}$$

$$P^{50}x^{(0)} = \begin{bmatrix} 9000.0088 \\ 5000.0001 \\ 15999.9911 \end{bmatrix}$$

(d) Caso $x^{(0)} = (0, 30000, 0)^T$. Resultados $P^n x$

Usando las mismas matrices P^n mostradas arriba, los vectores $P^n x^{(0)}$ son:

$$P^5 \begin{bmatrix} 0 \\ 30000 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12056.8594 \\ 9201.7500 \\ 8741.3906 \end{bmatrix}$$

$$P^{10} \begin{bmatrix} 0 \\ 30000 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10598.1276 \\ 5706.1881 \\ 13695.6843 \end{bmatrix}$$

$$P^{15} \begin{bmatrix} 0 \\ 30000 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9525.9213 \\ 5118.6890 \\ 15355.3896 \end{bmatrix}$$

$$P^{20} \begin{bmatrix} 0 \\ 30000 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9149.4558 \\ 5019.9481 \\ 15830.5961 \end{bmatrix}$$

$$P^{25} \begin{bmatrix} 0 \\ 30000 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9039.6099 \\ 5003.3527 \\ 15957.0375 \end{bmatrix}$$

$$P^{30} \begin{bmatrix} 0 \\ 30000 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9010.0960 \\ 5000.5635 \\ 15989.3405 \end{bmatrix}$$

$$P^{35} \begin{bmatrix} 0 \\ 30000 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9000.6315 \\ 5000.0204 \\ 15999.3481 \end{bmatrix}$$

$$P^{40} \begin{bmatrix} 0 \\ 30000 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9000.1658 \\ 5000.0038 \\ 15999.8304 \end{bmatrix}$$

$$P^{45}\begin{bmatrix}0\\30000\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9000.0404\\5000.0006\\15999.9590\end{bmatrix}$$

$$P^{50}\begin{bmatrix}0\\30000\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9000.0097\\5000.0001\\15999.9902\end{bmatrix}$$

(e) Caso $x^{(0)} = (5000, 20000, 5000)^T$. Resultados $P^n x$

Igualmente, usando las matrices P^n anteriores:

$$P^{5}\begin{bmatrix}5000\\20000\\5000\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10664.3429\\6883.8500\\12451.8071\end{bmatrix}$$

$$P^{10}\begin{bmatrix}5000\\20000\\5000\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10037.2155\\5829.4336\\14133.3509\end{bmatrix}$$

$$P^{15}\begin{bmatrix}5000\\20000\\5000\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9596.2691\\5267.2136\\15136.5173\end{bmatrix}$$

$$P^{20}\begin{bmatrix}5000\\20000\\5000\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9224.1134\\5056.0528\\15719.8338\end{bmatrix}$$

$$P^{25}\begin{bmatrix}5000\\20000\\5000\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9040.8190\\5001.0117\\15958.1693\end{bmatrix}$$

$$P^{30}\begin{bmatrix}5000\\20000\\5000\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9006.2860\\5000.2416\\15993.4724\end{bmatrix}$$

$$P^{35}\begin{bmatrix}5000\\20000\\5000\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9000.7041\\5000.0366\\15999.2592\end{bmatrix}$$

$$P^{40}\begin{bmatrix}5000\\20000\\5000\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9000.2049\\5000.0060\\15999.7890\end{bmatrix}$$

$$P^{45}\begin{bmatrix}5000\\20000\\5000\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9000.0475\\5000.0010\\15999.9514\end{bmatrix}$$

$$P^{50}\begin{bmatrix}5000\\20000\\5000\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9000.0129\\5000.0002\\15999.9870\end{bmatrix}$$

(f) Límites y columnas de P^n

La distribución estacionaria exacta (fracciones) es

$$\pi = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{8}{15} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.1666667 \\ 0.5333333 \end{bmatrix}.$$

Por consiguiente,

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0.1666667 & 0.1666667 & 0.1666667 \\ 0.5333333 & 0.5333333 & 0.5333333 \end{bmatrix}, \quad \lim_{n\to\infty} 30000P^n = \begin{bmatrix} 9000 & 9000 & 9000 \\ 5000 & 5000 & 5000 \\ 16000 & 16000 & 16000 \end{bmatrix}.$$

(g) Agencia de renta (3 oficinas): matriz y distribución estacionaria

Matriz de transición:

$$P_{\text{renta}} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.05 & 0.75 & 0.1 \\ 0.15 & 0.15 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

Resolviendo $\pi = P_{\text{renta}}\pi$ con suma 1 se obtiene (razón entera)

$$a : b : c = 7 : 5 : 9,$$

por tanto

$$\pi_{\text{renta}} = \frac{1}{21}\begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{5}{21} \\ \frac{3}{7} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.3333 \\ 0.2381 \\ 0.4286 \end{bmatrix}.$$

Con 1000 autos:

$$1000\,\pi_{\text{renta}} \approx \begin{bmatrix} 333.33 \\ 238.10 \\ 428.57 \end{bmatrix}.$$