

REPUBLIC OF CAMEROON  
PEACE-WORK-FATHERLAND

\*\*\*\*\*

UNIVERSITY OF MAROUA

\*\*\*\*\*

FACULTY OF SCIENCES

\*\*\*\*\*

DEPARTEMENT OF  
MATHEMATICS AND  
COMPUTER SCIENCES

\*\*\*\*\*



RÉPUBLIQUE DU CAMEROUN  
PAIX-TRAVAIL-PATRIE

\*\*\*\*\*

UNIVERSITÉ DE MAROUA

\*\*\*\*\*

FACULTÉ DES SCIENCES

\*\*\*\*\*

DEPARTEMENT DE  
MATHÉMATIQUES ET  
D'INFORMATIQUE

\*\*\*\*\*

DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES - INFORMATIQUE

THEME :

**IMPLÉMENTATION D'UNE AUTHENTIFICATION MULTI-FACTEURS  
(MFA) ET CHIFFREMENT DES DONNÉES SENSIBLES :  
CAS DE DYMO SARL.**

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de :

**Master II mathématiques.**

**Spécialité : Algèbre et Géométrie (ALG).**

**Option : Algèbre.**

Par

**SOUNKOUA Roger**

**Matricule : 21A1754FS**

Licence (en mathématiques)

Sous la Direction de :

**Dr Gilbert MANTIKA**

Chargé de Cours.

**Année académique 2024-2025**

---

# DEDICACE

---

**À ma maman Massa Salomé.**

---

# REMERCIEMENTS

---

Ce travail a été réalisé au laboratoire de Mathématiques de la Faculté des Sciences de l'Université de Maroua, sous l'encadrement du Dr Gilbert Mantika. Je tiens à lui exprimer ma profonde gratitude et mes sincères remerciements pour m'avoir offert l'opportunité de travailler sous sa direction.

Je souhaite également exprimer mes remerciements à :

- Mme le Doyen de la Faculté des Sciences de l'Université de Maroua, Pr Ngo Bum Elisabeth, pour ses efforts constants visant à assurer une excellente qualité des enseignements, ainsi que pour l'attention particulière qu'elle nous a accordée à chaque fois que nous l'avons sollicitée ;
- Pr Joseph Dongho, Chef du Département de Mathématiques et Informatique, pour son soutien et sa disponibilité tout au long de cette période ;
- Dr Luc Emery Diekouam Fotso, pour ses enseignements, ses encouragements et ses précieux conseils ;
- Dr Aminatou Pecha, pour ses enseignements et son accompagnement bienveillant ;
- Dr Kemajou Théophile, pour ses encouragements constants à poursuivre dans le domaine de la géométrie ;
- Ma mère Massa Salomé qui a sacrifié certains de ses besoins personnels pour la réussite de mes études ;
- Mon père Koge André pour son soutien indéfectible et ses nombreuses aides ;
- Mes frères et sœurs, pour leurs conseils avisés et leur soutien financier ;
- Mes camarades de promotion, pour leur esprit d'entraide et leur amitié.

Je remercie également tous les enseignants de la Faculté des Sciences de l'Université de Maroua ainsi que toutes les personnes, de près ou de loin, qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

---

# Table des matières

---

DEDICACE.....	ii
..	
REMERCIEMENTS.....	iii
RESUMÉ.....	vi
ABSTRACT.....	vii
INTRODUCTION . . . . .	1
<b>1 Préliminaires</b>	<b>2</b>
1.1 Groupes, sous-groupes et homomorphismes de groupes . . . . .	2
1.1.1 Sur les groupes . . . . .	2
1.1.2 Sous-groupes . . . . .	4
1.1.3 Notion d'espace topologique et de groupe topologique . . . . .	4
1.2 Espaces vectoriels et applications linéaires . . . . .	6
1.2.1 Espaces vectoriels . . . . .	6
1.3 Notions de catégories, foncteurs, limites projectives et limites induc-	
tives . . . . .	7
1.3.1 Catégories . . . . .	7
1.3.2 Foncteurs . . . . .	8
1.3.3 Limites inductives . . . . .	9
1.3.4 Limites projectives . . . . .	11
1.4 Complété Profini d'un Groupe . . . . .	14
<b>2 Représentations linéaires d'un produit de deux groupes finis.</b>	<b>16</b>
2.1 Représentation et sous-représentation linéaire d'un groupe fini . . . .	16
2.1.1 Définitions et exemples . . . . .	16
2.1.2 Sous-représentations . . . . .	17
2.1.3 Produit tensoriel de deux espaces vectoriels et représentation	
linéaire d'un produit de deux groupes finis. . . . .	18
2.1.3.1 Produit tensoriel de deux espaces vectoriels . . . . .	18
2.1.3.2 Représentation linéaire d'un produit de deux groupes	
finis . . . . .	19

---

2.2	Caractère d'une représentation linéaire d'un groupe fini . . . . .	19
2.3	Représentations linéaires irréductibles . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Produit tensoriel arbitraire de représentation linéaire d'un produit arbitraire de groupes finis</b>	<b>26</b>
3.1	Produit tensoriel arbitraire d'espaces vectoriels . . . . .	26
3.1.1	Représentation linéaire d'un produit arbitraire de groupes finis	27
3.1.2	Caractère d'une représentation linéaire d'un produit de groupes	37
3.1.3	Irréductibilité des représentations d'un produit de groupes .	38
3.2	Traité du cas de $\widehat{\mathbb{Z}}$ , le complété profini de $\mathbb{Z}$ . . . . .	40
3.2.1	Propriétés du complété profini $\widehat{\mathbb{Z}}$ . . . . .	41
3.2.2	Représentations linéaires de $\widehat{\mathbb{Z}}$ . . . . .	41
3.2.3	Caractères de $\widehat{\mathbb{Z}}$ . . . . .	42
	CONCLUSION . . . . .	44

---

# RESUMÉ

---

Ce mémoire explore les représentations linéaires des groupes infinis, en mettant un accent particulier sur les groupes profinis. Ces groupes, définis comme des limites projectives de groupes finis sont des sous-groupes de produits arbitraires de groupes finis. Dans une première partie, nous avons établi les bases des représentations linéaires des groupes finis, incluant les caractères et les représentations irréductibles. La seconde partie étend ces concepts aux groupes infinis à l'aide des produits tensoriels infinis, permettant de définir et d'étudier les représentations de ces structures complexes. L'étude du complété profini  $\widehat{\mathbb{Z}}$  illustre concrètement ces concepts et met en évidence des liens entre les propriétés topologiques et algébriques des groupes profinis. En conclusion, ce travail ouvre des perspectives prometteuses, notamment en théorie de Galois, en cryptographie, et dans l'analyse des interactions entre les structures algébriques et topologiques des groupes compacts.

## Mots-clés

Groupes infinis, groupes profinis, complété profini, représentations linéaires, caractères et produit tensoriel.

---

# ABSTRACT

---

This thesis explores the linear representations of infinite groups, with a particular focus on profinite groups. These groups, defined as projective limits of finite groups, are subgroups of arbitrary products of finite groups. In the first part, we established the foundations of linear representations of finite groups, including characters and irreducible representations. The second part extends these concepts to infinite groups using infinite tensor products, enabling the definition and study of representations of these complex structures. The study of the profinite completion  $\widehat{\mathbb{Z}}$  concretely illustrates these concepts and highlights the connections between the topological and algebraic properties of profinite groups. In conclusion, this work opens promising perspectives, particularly in Galois theory, cryptography, and the analysis of interactions between the algebraic and topological structures of compact groups.

## Keywords

Infinite groups, profinite groups, profinite completion, linear representations, characters and tensor product.

---

# INTRODUCTION

---

La théorie des représentations linéaires d'un groupe constitue un outil fondamental permettant de représenter les éléments d'un groupe abstrait par des matrices inversibles sur un corps donné. Cette approche, qui traduit des problèmes complexes d'algèbre abstraite en des problèmes d'algèbre linéaire plus accessibles, repose sur la notion de représentation linéaire. Etant donné un corps  $\mathbb{K}$ , une représentation  $\mathbb{K}$ -linéaire d'un groupe fini  $G$  est un homomorphisme de groupes

$$\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$$

où  $V$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $\text{GL}(V)$  désigne le groupe des applications linéaires bijectives de  $V$  sur lui-même [13]. La théorie des représentations linéaires des groupes finis a été développée pour la première fois par le mathématicien allemand Ferdinand Georg Frobenius en 1897. Il introduit notamment la notion de représentation linéaire d'un groupe fini et jette les bases de la théorie des caractères des groupes finis [11]. Par la suite, le mathématicien français Jean-Pierre Serre a approfondi ces travaux et a formalisé cette théorie dans son ouvrage "**Représentations linéaires des groupes finis**" publié en 1968. Ces deux auteurs qu'on vient de voir ont travaillé dans le cadre de groupes finis et il n'y a pas de résultats récents généralisant cela au groupe infini. D'où notre thème : **représentation linéaires, caractères et représentations linéaires irréductibles d'un groupe infini**. Le but principal de ce projet est d'étendre les représentations linéaires aux groupes infinis. Pour atteindre les objectifs de ce travail, nous suivrons cette démarche dans la présentation :

Nous allons commencer par placer le décor sur les bases essentielles pour l'étude des représentations linéaires des groupes. En suite, nous aborderons l'étude des représentations linéaires des groupes finis. Puis, nous étendrons notre étude au cadre des groupes infinis et nous finirons par une conclusion.



# Préliminaires

## Introduction

### 1.1 Groupes, sous-groupes et homomorphismes de groupes

#### 1.1.1 Sur les groupes

##### Définition 1.1.1. [5]

Un groupe est un couple  $(G, *)$  où  $G$  un ensemble non vide et  $*$  une loi de composition interne

$$* : G \times G \longrightarrow G$$

$$(x, y) \longmapsto x * y$$

vérifiant :

- i)  $*$  est associative, c'est-à-dire,  $\forall x, y, z \in G, (x * y) * z = x * (y * z)$ ;
- ii)  $G$  possède un élément neutre pour la loi  $*$ , c'est-à-dire,  $\exists e \in G$  tel que  $\forall x \in G, x * e = e * x = x$ ;
- iii) tout élément de  $G$  est inversible (ou possède un élément symétrique) dans  $G$ , c'est-à-dire  $\forall x \in G, \exists y \in G$  tel que  $x * y = y * x = e$ .

##### Définition 1.1.2. [26]

Si  $(G, *)$  est un groupe tel que la loi  $*$  satisfasse à la propriété

$$\forall x, y \in G, x * y = y * x,$$

le groupe  $(G, *)$  est dit commutatif ou encore abélien.

##### Définition 1.1.3. [5]

Soit  $(G_i, \circ_i)$  une famille de groupes finis indexée par l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$ , où  $n \in \mathbb{N}^*$ . Le produit direct fini de cette famille est un groupe  $(\prod_{i=1}^n G_i, \circ)$ , défini par les propriétés suivantes :

i) **Ensemble sous-jacent.**

L'ensemble sous-jacent est constitué des familles indexées par  $\{1, 2, \dots, n\}$  :

$$\prod_{i=1}^n G_i = \{(g_i)_{i=1}^n \mid g_i \in G_i \text{ pour tout } i \in \{1, 2, \dots, n\}\}.$$

ii) **Loi de composition.**

La loi de composition  $\circ$  est définie composante par composante :

$$(g_i)_{i=1}^n \circ (g'_i)_{i=1}^n = (g_i \circ_i g'_i)_{i=1}^n,$$

où  $\circ_i$  désigne l'opération du groupe  $G_i$  pour chaque  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

iii) **Élément neutre.**

L'élément neutre de  $\prod_{i=1}^n G_i$  est la famille  $(e_i)_{i=1}^n$ , où  $e_i$  est l'élément neutre de  $G_i$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

iv) **Inverse.**

L'inverse d'une famille  $(g_i)_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^n G_i$  est donné par :

$$(g_i)_{i=1}^{n-1} = (g_i^{-1})_{i=1}^n,$$

où  $g_i^{-1}$  est l'inverse de  $g_i$  dans  $G_i$  pour chaque  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Remarque 1.1.1. [5]**

Les propriétés de groupe ( $\circ$  associative, existence d'un neutre et d'inverses) découlent directement des propriétés des groupes  $G_i$ . La famille de groupes  $(G_i, \circ_i)$  satisfait :

$$\left| \prod_{i=1}^n G_i \right| = \prod_{i=1}^n |G_i|,$$

avec  $|G_i|$  le cardinal de  $G_i$ .

**Propriété 1.1.1. [5]**

Si chaque  $(G_i, \circ_i)$  est un groupe abélien, alors  $(\prod_{i=1}^n G_i, \circ)$  est aussi un groupe abélien.

**Définition 1.1.4. [5]**

Soient  $(G, \cdot)$  et  $(G', *)$  deux groupes.

Un homomorphisme de groupes de  $G$  dans  $G'$  est une application  $f : G \rightarrow G'$  vérifiant :

$$\forall (x, y) \in G \times G, \quad f(x \cdot y) = f(x) * f(y).$$

**Définition 1.1.5. [5]**

Soit  $G$  est un groupe.

$G$  est dit monogène s'il admet un unique générateur  $a \in G$ , c'est-à-dire si :

$$G = \langle a \rangle = \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

De plus,  $G$  est dit cyclique s'il est fini.

---

**Théorème 1.1.1. [5]**

Si  $G$  est un groupe cyclique d'ordre  $n \geq 1$ , alors  $G$  est isomorphe au groupe additif  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

**Théorème 1.1.2. [5]**

Tout groupe fini d'ordre premier est cyclique.

**1.1.2 Sous-groupes****Définition 1.1.6. [18]**

Un sous-groupe d'un groupe  $G$  est un sous-ensemble non vide  $H$  de  $G$  tel que  $H$  muni de la loi induite par celle de  $G$  est un groupe.

**Définition 1.1.7. [26]**

Un sous-groupe  $H$  de  $G$  est distingué (on note  $H \triangleleft G$ ) si pour tout  $g \in G$ ,  $Hg = gH$  (on dit aussi : invariant ou normal).

**Propriété 1.1.2. [26]**

Soit  $G$  un groupe abélien. Tout sous-groupe  $H$  de  $G$  est aussi abélien.

**1.1.3 Notion d'espace topologique et de groupe topologique****Définition 1.1.8. [20]**

On appelle structure topologique (ou tout simplement une topologie) sur un ensemble  $X$  un ensemble  $\mathcal{O}$  de parties de  $X$  vérifiant :

- i)  $\emptyset \in \mathcal{O}$  et  $X \in \mathcal{O}$ ;
- ii) Toute réunion d'éléments de  $\mathcal{O}$  est dans  $\mathcal{O}$ ;
- iii) Toute intersection finie d'éléments de  $\mathcal{O}$  est dans  $\mathcal{O}$ .

Les éléments de  $\mathcal{O}$  sont appelés ouverts et ceux de  $X$  sont appelés points.

**Définition 1.1.9. [20]**

Un espace topologique est un couple  $(X, \mathcal{O})$ , où  $\mathcal{O}$  est une structure topologique définie sur  $X$ .

**Définition 1.1.10. [20]**

Soit  $X$  un espace topologique et  $A$  une partie quelconque de  $X$ . Un voisinage de  $A$  est tout sous-ensemble de  $X$  qui contient un ouvert contenant  $A$ . Les voisinages d'un sous-ensemble  $\{x\}$  constitué d'un seul point sont également appelés voisinages du point  $x$ .

**Proposition 1.1.1. [20]**

Un ensemble est un voisinage de chacun de ses points si et seulement si il est ouvert.

**Définition 1.1.11. [20]**

La clôture d'un sous-ensemble  $A$  d'un espace topologique  $X$  est l'ensemble de tous les points  $x \in X$  tels que tout voisinage de  $x$  intersecte  $A$ , et est notée par  $\overline{A}$ .

**Définition 1.1.12. [20]**

Un sous-ensemble  $A$  d'un espace topologique  $X$  est dit dense dans  $X$  (ou simplement dense, s'il n'y a pas d'ambiguïté sur  $X$ ) si  $\overline{A} = X$ , c'est-à-dire si tout ouvert non vide  $U$  de  $X$  rencontre  $A$ .

---

**Proposition 1.1.2.** [20]

Soit  $X$  un espace topologique,  $x \in X$  et  $\mathcal{B}(x)$  l'ensemble de tous les voisinages de  $x$ . Les ensembles  $\mathcal{B}(x)$  satisfont les propriétés suivantes :

(V<sub>1</sub>) Pour tout ensemble  $U \subset X$ , si  $U \supset V$  pour un certain  $V \in \mathcal{B}(x)$ , alors  $U \in \mathcal{B}(x)$ .

(V<sub>2</sub>) Pour tout entier naturel non nul  $n$ , si  $V_1, V_2, \dots, V_n \in \mathcal{B}(x)$ , alors

$$V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_n \in \mathcal{B}(x)$$

(V<sub>3</sub>) Pour tout  $V \in \mathcal{B}(x)$ , on a  $x \in V$ .

(V<sub>4</sub>) Pour tout  $V \in \mathcal{B}(x)$ , il existe un ensemble  $W \in \mathcal{B}(x)$  tel que  $W \subset V$  et, pour tout  $y \in W$ , on a  $V \in \mathcal{B}(y)$ .

**Définition 1.1.13.** [20]

Une application  $f : E \rightarrow F$  entre espaces topologiques est dite continue en un point  $a \in E$  si l'image réciproque de tout voisinage de  $f(a)$  est un voisinage de  $a$ .

Elle est dite continue si elle est continue en tout point de  $E$ .

**Définition 1.1.14.** [20]

Soit  $\{X_i\}_{i \in I}$  une famille d'espaces topologiques. Leur produit topologique est l'ensemble

$$X = \prod_{i \in I} X_i$$

muni de la topologie produit, qui est la topologie initiale engendrée par les projections canoniques :

$$\pi_i : X \rightarrow X_i, \quad \text{où} \quad \pi_i((x_j)_{j \in I}) = x_i.$$

**Remarque 1.1.2.** [20]

La topologie produit  $X = \prod_{i \in I} X_i$  est la plus grossière (la plus faible) rendant toutes les projections  $\pi_i : X \rightarrow X_i$  continues.

**Propriété 1.1.3.** [20]

Une application  $f : \prod_{i \in I} Y_i \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$  entre deux produits topologiques est continue si et seulement si chaque application

$$\pi_i \circ f : \prod_{i \in I} Y_i \rightarrow X_i$$

est continue pour tout  $i \in I$ .

**Théorème 1.1.3.** [20]

Soit  $\{X_i\}_{i \in I}$  une famille d'espaces topologiques. Si chaque  $X_i$  est compact, alors le produit  $\prod_{i \in I} X_i$  est compact dans la topologie produit.

Soient  $(X, \mathcal{O})$  un espace topologique et  $Y$  une partie de  $X$ .

**Définition 1.1.15.** [20]

$(X, \mathcal{O})$  est dit séparé (ou de Hausdorff) si pour tous points distincts  $x, y \in X$ , il existe des ouverts  $U, V \in \mathcal{O}$  tels que  $x \in U, y \in V$  et  $U \cap V = \emptyset$ .

---

**Définition 1.1.16.** [14]

On appelle recouvrement de  $X$  une famille  $(A_i)_{i \in I}$  de parties de  $X$  telle que

$$X = \bigcup_{i \in I} A_i.$$

Dans ce cas, un sous-recouvrement fini de  $(A_i)_{i \in I}$  est un recouvrement de  $X$  de la forme  $(A_j)_{j \in J}$  avec  $J \subseteq I$  et  $J$  fini.

**Définition 1.1.17.** [14]

On dit que  $(X, \mathcal{O})$  est compact si  $X$  est séparé et de tout recouvrement de  $X$ , on peut extraire un sous-recouvrement fini.

**Définition 1.1.18.** [14]

La topologie induite sur  $Y$  est la famille d'ensembles définie par :

$$\mathcal{O}_Y = \{O \cap Y \mid O \in \mathcal{O}\}.$$

Les éléments de  $\mathcal{O}_Y$  sont appelés les ouverts de  $Y$  pour la topologie induite.

## 1.2 Espaces vectoriels et applications linéaires

### 1.2.1 Espaces vectoriels

**Définition 1.2.1.** [24]

Un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ou espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  est un triplet  $(V, +, \cdot)$  tel que  $(V, +)$  est un groupe abélien,  $\cdot$  une multiplication par les scalaires, c'est-à-dire une application

$$(a, x) \in \mathbb{K} \times V \mapsto a \cdot x \in V$$

vérifiant les propriétés suivantes :

- i)  $1 \cdot x = x$ ;
- ii)  $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$  (pour tout  $(a, b) \in K \times K$  et  $(x, y) \in V \times E$ );
- iii)  $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$ ;
- iv)  $(a \cdot b) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$ .

**Notation 1.2.1.**

Un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $(V, +, \cdot)$  sera noté  $V$ .

**Définition 1.2.2.** [27]

Une suite numérique à valeurs dans  $\mathbb{C}$  est une application de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{C}$  :

$$n \in \mathbb{N} \longmapsto u_n \in \mathbb{C}.$$

On note cette suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ou  $(u_n)_{n \geq 0}$ , et l'on appelle  $u_n$  le terme général de la suite.

**Définition 1.2.3.** [27]

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite sur  $\mathbb{C}$  et  $\ell \in \mathbb{C}$ . On dit que  $(u_n)$  a pour limite  $\ell$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

---

**Propriété 1.2.1.** [27]

Si  $(u_n)$  est une suite convergente, alors sa limite  $\ell$  est unique.

**Définition 1.2.4.** [27]

Le produit infini des termes d'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  est la limite, si elle existe, de la suite des produits partiels  $\left(\prod_{n=0}^N u_n\right)_N$  quand  $N$  tend vers l'infini. Il est défini par :

$$\prod_{n=0}^{\infty} u_n \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=0}^N u_n.$$

## 1.3 Notions de catégories, foncteurs, limites projectives et limites inductives

### 1.3.1 Catégories

**Définition 1.3.1.** [23]

Une catégorie  $\mathcal{C}$  consiste en les données suivantes :

- i) Une classe  $|\mathcal{C}|$ , dont les éléments sont appelés objets de  $\mathcal{C}$  ;
- ii) À chaque couple d'objets  $(X, Y)$  de  $\mathcal{C}$ , est associé un ensemble  $\mathcal{C}(X, Y)$  (ou  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ ), dont les éléments sont appelés morphismes (ou flèches) de  $X$  dans  $Y$  ;
- iii) À chaque triplet  $(X, Y, Z)$  d'objets de  $\mathcal{C}$ , une application (appelée application de composition)

$$\mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \rightarrow \mathcal{C}(X, Z), \quad (f, g) \mapsto g \circ f;$$

- iv) À chaque objet  $X \in \mathcal{C}$ , est associé un élément  $1_X \in \mathcal{C}(X, X)$  appelé morphisme d'identité de  $X$ .

Ces données vérifient les axiomes suivants :

- **Associativité de la composition** : si  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$  sont des morphismes dans  $\mathcal{C}$ , alors on a

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

- **Neutralité de l'identité** : pour tous  $X, Y \in |\mathcal{C}|$ , et pour tout  $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ , on a

$$f \circ 1_X = f,$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{1_X} & X \\ & \searrow f & \swarrow f \\ & Y & \end{array}$$

et

$$1_Y \circ f = f,$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow f & \swarrow 1_Y \\ & Y & \end{array}$$

---

**Exemple 1.3.1.**

La catégorie des groupes, notée **Grp**, consiste en les données suivantes :

i) **Objets :**

Les objets sont des groupes.

ii) **Morphismes :**

Les morphismes sont des homomorphismes de groupes.

iii) **Composition :**

La composition de deux homomorphismes de groupes est un autre homomorphisme de groupes.

iv) **Identité :**

Pour chaque groupe  $G$ , le morphisme d'identité est la fonction qui envoie chaque élément sur lui-même.

**Vérification des axiomes :**

• **Associativité :**

Pour tout  $f : G_1 \rightarrow G_2$ ,  $g : G_2 \rightarrow G_3$ , et  $h : G_3 \rightarrow G_4$ , on a :

$$(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h).$$

• **Identité :**

Pour tout homomorphisme  $f$  entre deux groupes, on a :

$$f \circ id_G = f \quad \text{et} \quad id_H \circ f = f.$$

### 1.3.2 Foncteurs

Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  deux catégories.

**Définition 1.3.2.** [23]

Un foncteur contravariant est une règle de passage d'une catégorie  $\mathcal{C}$  à une catégorie  $\mathcal{D}$ ,  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ , qui :

i) à tout objet  $C$  de  $\mathcal{C}$  associe un objet  $F(C)$  de  $\mathcal{D}$ ,

ii) à tout morphisme  $X \xrightarrow{f} Y$  de  $\mathcal{C}$  associe un morphisme  $F(Y) \xrightarrow{F(f)} F(X)$  de  $\mathcal{D}$  satisfaisant :

(a) pour tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ , on a  $F(1_X) = 1_{F(X)}$ ;

(b) pour tous morphismes  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  de  $\mathcal{C}$ , on a  $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ .

### 1.3.3 Limites inductives

**Définition 1.3.3.** [23]

Une propriété universelle (PU) est un énoncé sur les objets mathématiques qui stipule que sous certaines conditions, il existe un unique morphisme qui satisfait certaines propriétés.

**Définition 1.3.4.** [16]

Un ensemble partiellement ordonné est un couple  $(I, \leq)$  où  $I$  est un ensemble non vide et  $\leq$  est une relation binaire sur  $I$  vérifiant les propriétés suivantes pour tous  $a, b, c \in I$  :

i) **Réflexivité** :  $a \leq a$ ;

ii) **Anti-symétrie** : si  $a \leq b$  et  $b \leq a$ , alors  $a = b$ ;

iii) **Transitivité** : si  $a \leq b$  et  $b \leq c$ , alors  $a \leq c$ .

**Définition 1.3.5.** [16]

Un ensemble  $(I, \leq)$  est dit **ordonné filtrant** si  $(I, \leq)$  est un ensemble partiellement ordonné et si pour tous  $i, j \in I$ , il existe  $k \in I$  vérifiant  $i \leq k$  et  $j \leq k$ .

**Exemple 1.3.2.**

$(\mathbb{N}, \leq)$  est ordonné filtrant.

**Définition 1.3.6.** [16]

Soit  $(I, \leq)$  un ensemble ordonné filtrant. Un système inductif de groupes sur  $I$  est la donnée d'un couple  $(X_i, \phi_{ij})_{i,j \in I}$  où les  $X_i$  sont les groupes et les  $\phi_{ij} : X_i \rightarrow X_j$  ( $i \leq j$ ) les homomorphismes de groupes, vérifiant :

i)  $\forall i \in I, \phi_{ii} = \text{Id}_{X_i}$ ;

ii)  $\forall (i, j, k) \in I^3, i \leq j \leq k \Rightarrow \phi_{jk} \circ \phi_{ij} = \phi_{ik}$ .

Ce qui se traduit par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{\phi_{ij}} & X_j \\ & \searrow \phi_{ik} & \swarrow \phi_{jk} \\ & X_k & \end{array}$$

**Définition 1.3.7.** [16]

Soient  $X$  un groupe et  $(X_i, \phi_{ij})$  un système inductif de groupes finis.

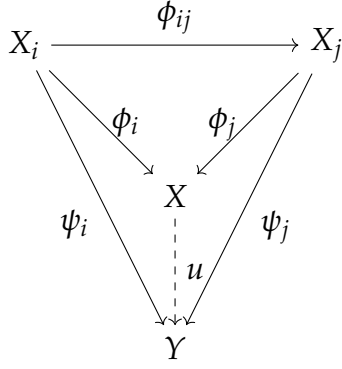
La famille  $(X, \phi_i : X_i \rightarrow X)$  est dite **compatible** avec  $(X_i, \phi_{ij})$  si pour tous  $i, j \in I$  tels que  $i \leq j$ , on a  $\phi_i = \phi_j \circ \phi_{ij}$ . Ce qui est illustré par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{\phi_{ij}} & X_j \\ & \searrow \phi_i & \downarrow \phi_j \\ & & X \end{array}$$

**Définition 1.3.8.** [16]

Soit  $(X_i, \phi_{ij})$  un système inductif de groupes. La limite inductive ou limite directe, lorsqu'elle existe, est une famille compatible  $(X, \phi_i : X_i \rightarrow X)$  avec  $(X_i, \phi_{ij})$  vérifiant la PU : pour toute autre famille  $(X, \psi_i)_{i \in I}$  compatible avec  $(X_i, \phi_{ij})$ , il existe un unique homomorphisme de groupes  $u : X \rightarrow Y$  telle que le diagramme :





soit commutatif pour tous  $i \leq j$ .

**Proposition 1.3.1.** [16]

La limite inductive lorsqu'elle existe est unique à isomorphisme près.

**Notation 1.3.1.**

La limite inductive  $(X, \phi_i)_{i \in I}$  d'un système inductif  $(X_i, \phi_{ij})_{j \in I}$  est notée  $X = \varinjlim X_i$ .

**Proposition 1.3.2.**

Un ensemble ordonné filtrant  $(I, \leq)$  est une catégorie.

**Preuve :**

Appelons  $\mathcal{I}$  cette catégorie. Elle est donnée comme suit :

- i) Une classe  $|\mathcal{I}|$  dont les objets sont les éléments  $I$ ;
- ii) À chaque couple  $(i, j) \in I \times I$  est associé un ensemble  $\mathcal{I}(i, j)$  défini par :

$$\mathcal{I}(i, j) = \begin{cases} \{*\} & \text{si } i \leq j, \\ \emptyset & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $*$  désigne un unique morphisme de  $i$  vers  $j$  lorsque  $i \leq j$ ;

- iii) À chaque triplet  $(i, j, k) \in I \times I \times I$ , une application de composition

$$\mathcal{I}(i, j) \times \mathcal{I}(j, k) \rightarrow \mathcal{I}(i, k), \quad (f, g) \mapsto g \circ f,$$

définie par la transitivité de l'ordre : si  $i \leq j$  et  $j \leq k$ , alors  $i \leq k$ , donc  $g \circ f = *$  est le morphisme unique de  $i$  vers  $k$ ;

- iv) À chaque objet  $i \in I$ , on associe un morphisme identité  $1_i \in \mathcal{I}(i, i)$ , défini par  $1_i = *$ , car  $i \leq i$  par réflexivité.

Ces données vérifient les axiomes suivants :

- **Associativité de la composition :** étant donné  $i \leq j \leq k \leq \ell$ , les compositions possibles coïncident puisqu'il n'y a qu'un seul morphisme entre deux objets liés par  $\leq$ . On a donc :

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

- **Neutralité de l'identité :** pour tout  $i \leq j$ , le morphisme unique  $f \in \mathcal{I}(i, j)$  satisfait :

$$f \circ 1_i = f \quad \text{et} \quad 1_j \circ f = f,$$

car  $f = *$  est unique.

Donc tout ensemble ordonné filtrant  $(I, \leq)$  est une catégorie.

### 1.3.4 Limites projectives

Soit  $(I, \leq)$  est dit ordonné filtrant.

#### Définition 1.3.9. [23]

Un système projectif de groupes sur  $(I, \leq)$  est un couple  $(X_i, \phi_{ij})_{i,j \in I}$  où les  $X_i$  sont les groupes et les  $\phi_{ij} : X_j \rightarrow X_i$  ( $i \leq j$ ) sont les homomorphismes de groupes vérifiant :

- i)  $\phi_{ii} = \text{Id}_{X_i}$  pour tout  $i \in I$ ;
- ii) pour tout  $(i, j, k) \in I^3$  tels que  $i \leq j \leq k$ , on a  $\phi_{ik} = \phi_{ij} \circ \phi_{jk}$ .

Autrement dit, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X_k & \xrightarrow{\phi_{jk}} & X_j \\ & \searrow \phi_{ik} & \swarrow \phi_{ij} \\ & X_i & \end{array}$$

est commutatif.

#### Définition 1.3.10. [23]

Soient  $X$  un groupe et  $(X_i, \phi_{ij})_{i,j \in I}$  un système projectif de groupes. La famille de homomorphismes  $(\phi_i : X \rightarrow X_i)_{i \in I}$  qu'on note  $(X, \phi_i)$  est dite compatible avec le système projectif  $(X_i, \phi_{ij})_{i,j \in I}$  si pour tous  $i, j \in I$  tels que  $i \leq j$ , on a :  $\phi_{ij} \circ \phi_j = \phi_i$ . Ce qui se traduit par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi_j} & X_j \\ & \searrow \phi_i & \swarrow \phi_{ij} \\ & X_i & \end{array}$$

#### Définition 1.3.11. [23]

Soit  $(X_i, \phi_{ij})_{i,j \in I}$  un système projectif de groupes. La limite projective ou limite inverse du système projectif  $(X_i, \phi_{ij})_{i,j \in I}$  est une famille  $(X, (\phi_i)_{i \in I})$  de homomorphismes compatibles avec  $(X_i, \phi_{ij})_{i,j \in I}$  vérifiant la PU suivante :

Si  $(\psi_i : Y \rightarrow X_i)_{i \in I}$  ( $Y \in |\mathcal{C}|$ ) est une famille de morphismes compatibles, alors il existe un unique morphisme  $\psi : Y \rightarrow X$  tel que le diagramme suivant commute pour tous  $i \leq j$  :

$$\begin{array}{ccccc} & & Y & & \\ & \swarrow & \downarrow \psi & \searrow & \\ & X_j & & X_i & \\ \psi_j \swarrow & & X & & \searrow \psi_i \\ & \swarrow \phi_j & & \searrow \phi_i & \\ X_j & \xrightarrow{\phi_{ij}} & X_i & & \end{array}$$

$$\psi_i = \phi_i \circ \psi$$

$$\psi_j = \phi_j \circ \psi$$

**Proposition 1.3.3.** [23]

Si une limite projective d'un système projectif existe, elle est unique à isomorphisme près.

**Notation 1.3.2.**

Une telle limite est notée  $\varprojlim_I X_i$  ou  $\varprojlim_{i \in I} X_i$ .

**Définition 1.3.12.** [23]

La limite projective d'un système projectif de groupe finis est appelé groupe profini.

**Théorème 1.3.1.**

Soit  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un foncteur contravariant entre deux catégories  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$ . Alors, l'image d'une limite inductive par le foncteur  $F$  est une limite projective.

**Preuve :**

Soit  $(X_i, f_{ij})$  un système inductif indexé par  $I$ . On a  $f_{ij} : X_i \rightarrow X_j$  ( $i \leq j$ ) satisfaisant :

- $f_{ii} = \text{id}_{X_i}$  (identité),
- $f_{jk} \circ f_{ij} = f_{ik}$  pour  $i \leq j \leq k$ .

La limite inductive de ce système, notée  $X = \varinjlim X_i$ , est un objet  $X$  de  $\mathcal{C}$  muni de morphismes  $u_i : X_i \rightarrow X$  tels que :

1. Pour tout  $i \leq j$ , on a  $u_j \circ f_{ij} = u_i$ .
2. Si un autre objet  $Y$  et des morphismes  $v_i : X_i \rightarrow Y$  satisfont  $v_j \circ f_{ij} = v_i$ , alors il existe un unique morphisme  $v : X \rightarrow Y$  tel que  $v \circ u_i = v_i$ .

Soit  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un foncteur contravariant entre deux catégories  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$ .

**Montrons que  $(F(X_i), F(f_{ij}))$  est un système projectif dans  $\mathcal{D}$  :**

En appliquant  $F$  au système inductif  $(X_i, f_{ij})$ ,

- Chaque morphisme  $f_{ij} : X_i \rightarrow X_j$  dans  $\mathcal{C}$  devient un morphisme  $F(f_{ij}) : F(X_j) \rightarrow F(X_i)$  dans  $\mathcal{D}$ .
- L'identité  $f_{ii} = \text{id}_{X_i}$  dans  $\mathcal{C}$  devient  $F(f_{ii}) = \text{id}_{F(X_i)}$ . En effet,  $F$  est contravariant et donc  $F(\text{id}_{X_i}) = \text{id}_{F(X_i)}$ .
- Pour  $i \leq j \leq k$ ,  $f_{jk} \circ f_{ij} = f_{ik}$  dans  $\mathcal{C}$  devient  $F(f_{ij}) \circ F(f_{jk}) = F(f_{ik})$  dans  $\mathcal{D}$ .

**Montrons que  $(F(X), F(u_i) : F(X) \rightarrow F(X_i))$  est une famille de morphismes**

**compatibles dans  $\mathcal{D}$  :**

Les morphismes  $u_i : X_i \rightarrow X$  dans  $\mathcal{C}$  deviennent  $F(u_i) : F(X) \rightarrow F(X_i)$  dans  $\mathcal{D}$ . Il vient que pour tout  $i \leq j$ ,  $u_j \circ f_{ij} = u_i$  dans  $\mathcal{C}$  devient  $F(f_{ij}) \circ F(u_j) = F(u_i)$  dans  $\mathcal{D}$ . Donc  $(F(X), F(u_i) : F(X) \rightarrow F(X_i))$  est une famille de morphismes compatibles dans  $\mathcal{D}$ .

**Vérifions la propriété universelle :**

La Propriété universelle dans  $\mathcal{C}$  implique en appliquant  $F$  qu'on a  $F(v_i) : F(Y) \rightarrow F(X_i)$  satisfont  $F(f_{ij}) \circ F(v_j) = F(v_i)$  et l'existence d'un morphisme unique  $F(v) : F(Y) \rightarrow F(X)$  tel que  $F(u_i) \circ F(v) = F(v_i)$ .

Il en résulte que  $F(X)$  satisfait exactement la définition d'une limite projective et par conséquent  $F(\varprojlim X_i) = \varprojlim F(X_i)$ .

**Définition 1.3.13.** (Morphisme de systèmes projectifs) [22]

Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie et  $(G_i, \varphi_{ij})$ ,  $(G'_i, \varphi'_{ij})$  deux systèmes projectifs d'objets de  $\mathcal{C}$  sur un même ensemble filtrant  $I$ . Un morphisme de systèmes projectifs

$$\Theta : (G_i, \varphi_{ij}) \longrightarrow (G'_i, \varphi'_{ij})$$

est la donnée pour chaque  $i \in I$  d'un morphisme  $\theta_i : G_i \rightarrow G'_i$  tel que pour tous  $i \leq j$  le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} G_j & \xrightarrow{\varphi_{ij}} & G_i \\ \theta_j \downarrow & & \downarrow \theta_i \\ G'_j & \xrightarrow{\varphi'_{ij}} & G'_i \end{array}$$

**Remarque 1.3.1.** [22]

On peut composer de manière naturelle deux morphismes de systèmes projectifs

$$\Theta : (G_i, \varphi_{ij}) \longrightarrow (G'_i, \varphi'_{ij}) \quad \text{et} \quad \Psi : (G'_i, \varphi'_{ij}) \longrightarrow (G''_i, \varphi''_{ij})$$

afin de donner le morphisme

$$\Psi \circ \Theta : (G_i, \varphi_{ij}) \longrightarrow (G''_i, \varphi''_{ij})$$

dont les composantes sont :

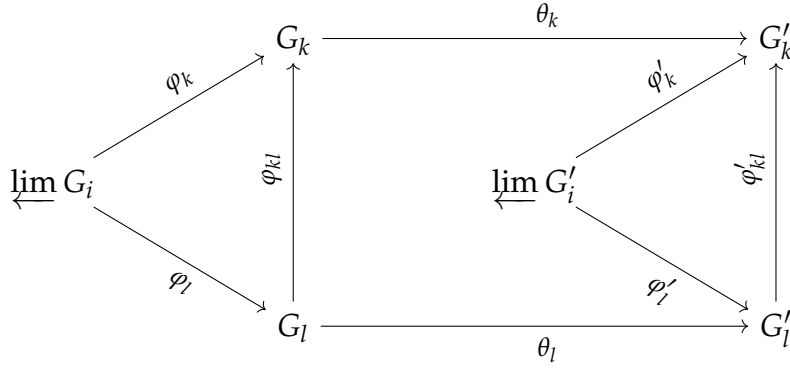
$$(\Psi \circ \Theta)_i = \psi_i \circ \theta_i.$$

On définit ainsi la catégorie des systèmes projectifs d'objets de  $\mathcal{C}$ , que l'on note  $\mathbf{Proj}_{\mathcal{C}}$ .

Dans ce qui suit, supposons que  $\mathcal{C}$  est une catégorie dans laquelle le produit de toute famille d'objets ainsi que les limites projectives existent.

**Théorème 1.3.2.** [22]

Soit  $\Theta : (G_i, \varphi_{ij}) \longrightarrow (G'_i, \varphi'_{ij})$  un morphisme d'objets de  $\mathbf{Proj}_{\mathcal{C}}$ ,  $G = \varprojlim G_i$  et  $G' = \varprojlim G'_i$ . Pour tout  $l \in I$ , on peut définir un morphisme de  $\varprojlim G_i$  dans  $G'_l$  en faisant  $\theta_l \circ \varphi_l$  et un morphisme de  $\varprojlim G_i$  dans  $G'_k$  en faisant  $\theta_k \circ \varphi_k$  illustré par le diagramme commutatif suivant, pour  $k \leq l$  [22] :



Ces morphismes induisent un autre morphisme, noté  $\varprojlim \theta_i$  ou  $\varprojlim \Theta$ , de  $G$  dans  $G'$ .

**Preuve :**

Les morphismes  $\theta_i \circ \varphi_i$  sont compatibles pour le système  $(G'_i, \varphi'_{ij})$ .

**En effet :**

Définissons  $\theta_i \circ \varphi_i$  comme étant la composée de morphismes :

$$\theta_i \circ \varphi_i : G_j \rightarrow G'_i.$$

Montrons que cette famille est compatible avec le système  $(G'_i, \varphi'_{ij})$ , c'est-à-dire que pour tout  $i \leq j$  :

$$\varphi'_{ij} \circ (\theta_j \circ \varphi_j) = (\theta_i \circ \varphi_i).$$

Alors,

$$\varphi'_{ij} \circ (\theta_j \circ \varphi_j) = (\varphi'_{ij} \circ \theta_j) \circ \varphi_j.$$

Or, d'après la commutativité du diagramme précédent, on obtient :

$$\varphi'_{ij} \circ \theta_j = \theta_i \circ \varphi_{ij}.$$

Donc,  $(\theta_i \circ \varphi_{ij}) \circ \varphi_j = \theta_i \circ (\varphi_{ij} \circ \varphi_j)$ . Par compatibilité des morphismes du système  $(G_i, \varphi_{ij})$ , on a  $\varphi_{ij} \circ \varphi_j = \varphi_i$ .

Ainsi,  $\theta_i \circ \varphi_i = \theta_i \circ \varphi_i$ .

Ce qui prouve que  $\varphi'_{ij} \circ (\theta_j \circ \varphi_j) = \theta_i \circ \varphi_i$ .

La propriété universelle de la limite projective du système  $(G'_i, \varphi'_{ij})$  assure donc l'existence d'un unique morphisme  $\varprojlim \Theta : G \rightarrow G'$ .

## 1.4 Complété Profini d'un Groupe

**Définition 1.4.1.** [30]

Un complété profini d'un groupe abstrait  $G$  est la limite projective notée  $\widehat{G}$  du système projectif  $(G/N)_{N \in \mathcal{N}}$  de groupes finis, où  $\mathcal{N}$  est la collection de tous les sous-groupes normaux d'indices finis de  $G$ , c'est-à-dire

$$\widehat{G} = \varprojlim_{N \in \mathcal{N}} G/N.$$

**Proposition 1.4.1.** [30]

Le complété profini d'un groupe est unique à isomorphisme près, c'est-à-dire si  $(\widehat{G}_1, j_1)$  et

---

$(\widehat{G}_2, j_2)$  sont deux complétés de  $G$ , alors il existe un isomorphisme  $\widehat{\alpha} : \widehat{G}_1 \rightarrow \widehat{G}_2$  tel que  $\widehat{\alpha}j_1 = j_2$ .

# Représentations linéaires d'un produit de deux groupes finis.

## 2.1 Représentation et sous-représentation linéaire d'un groupe fini

Dans cette section sans mention contraire,  $\mathbb{K}$  désignera le corps  $\mathbb{C}$  ou  $\mathbb{R}$ . Les espaces vectoriels seront définis sur  $\mathbb{K}$ . Tout groupe sera aussi fini.

### 2.1.1 Définitions et exemples

#### Définition 2.1.1. [13]

Une représentation  $\mathbb{K}$ -linéaire d'un groupe fini  $G$  est un homomorphisme de groupes  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  où  $V$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $\text{GL}(V)$  est le groupe des applications linéaires bijectives de  $V$  sur lui-même.

#### Remarque 2.1.1. [13]

Si  $V$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ , on dit que  $n$  est le degré de la représentation. De plus, en choisissant une base de  $V$ , le groupe  $\text{GL}(V)$  est isomorphe au groupe  $\text{GL}(n, \mathbb{K}) = \{A \in \text{M}(n, \mathbb{K}) \mid \det(A) \neq 0\}$ , où  $\text{GL}(n, \mathbb{K})$  est le groupe des matrices inversibles de taille  $n \times n$  équipé de la multiplication des matrices à coefficients dans  $\mathbb{K}$ ,  $\det(A)$  pour  $A \in \text{M}(n, \mathbb{K})$  désignant le déterminant de la matrice  $A$ .

#### Définition 2.1.2. [15]

Une matrice de permutation de taille  $n \times n$  est une matrice obtenue de la matrice identité  $I_n$  en permutant ses lignes.

#### Exemple 2.1.1.

1. La représentation linéaire triviale définie par  $\forall g \in G, \rho(g) = \text{Id}_V$ .
2. Représentation linéaire standard du groupe symétrique  $S_3$  :  
 Nous définissons une représentation linéaire du groupe symétrique  $S_3$  sur  $\mathbb{R}^3$  en associant à chaque permutation  $\sigma \in S_3$  une matrice de permutation  $\rho(\sigma)$ . Les éléments de  $S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$  sont utilisés pour définir la représentation  $\rho : S_3 \rightarrow \text{GL}(3, \mathbb{R})$  comme suit :

$$\rho(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \rho((12)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \rho((13)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho((23)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \rho((123)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \rho((132)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Notation 2.1.1.**

Dans la suite, une représentation linéaire  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  sera notée par  $(V, \rho)_G$ .

**Définition 2.1.3. [8]**

Soit  $V$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie.

Une représentation  $(V, \rho)_G$  est dite unitaire si  $\rho$  prend ses valeurs dans le groupe des matrices unitaires.

**Définition 2.1.4. [13]**

Soient  $(V, \rho)_G$  et  $(W, \psi)_G$  deux représentations linéaires. Un opérateur d'entrelacement, ou morphisme de représentations est une application linéaire  $\alpha : V \rightarrow W$  telle que

$$\alpha \circ \rho(g) = \psi(g) \circ \alpha, \text{ pour tout } g \in G.$$

On dit que  $\alpha$  est équivariante.

Lorsque  $\alpha : V \rightarrow W$  est un isomorphisme, on dit que les représentations  $(V, \rho)_G$  et  $(W, \psi)_G$  sont isomorphes.

## 2.1.2 Sous-représentations

Soient  $W$  un sous-espace vectoriel de  $V$  et  $G$  un groupe.

**Définition 2.1.5. [13]**

Soit  $(V, \rho)_G$  une représentation linéaire. On dit que  $W$  est stable (ou invariant) sous l'action de  $G$  ou encore  $G$ -stable si pour tout  $g \in G$  et tout  $w \in W$ , on a  $\rho_g(w) \in W$ .

**Définition 2.1.6. [13]**

Une sous-représentation d'une représentation linéaire  $(V, \rho)_G$  est la restriction  $\rho_W : G \rightarrow \text{GL}(W)$  où  $W$  est stable sous  $G$ . Elle est définie par :

$$\rho_W(g) = \rho(g)|_W, \quad \forall g \in G.$$

**Proposition 2.1.1. [13]**

Soit  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  une représentation linéaire sur  $G$  tel que  $W$  soit un sous-espace vectoriel de  $V$  stable sous l'action de  $G$ . Alors, l'application restreinte  $\rho_W : G \rightarrow \text{GL}(W)$  définie par  $\rho_W(g) = \rho(g)|_W$  pour tout  $g \in G$  est un homomorphisme de groupes.

**Preuve :**

Pour démontrer que  $\rho_W$  est un homomorphisme de groupes, il suffit de vérifier que, pour tous  $g_1, g_2 \in G$  et tout  $w \in W$ , l'égalité suivante est satisfaite dans  $W$  :

$$\rho_W(g_1 g_2)(w) = \rho_W(g_1) \circ \rho_W(g_2)(w).$$

Étant donné que  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  est un homomorphisme de groupes, nous avons :

$$\rho(g_1 g_2)(w) = \rho(g_1) \circ \rho(g_2)(w) \quad \text{dans } V.$$



Montrons que  $\rho(g_1 g_2)(w) = \rho(g_1) \circ \rho(g_2)(w)$  appartient à  $W$ .

Puisque  $W$  est stable sous l'action de  $G$ , nous savons que :

- $\rho(g_2)(w) \in W$ , car  $w \in W$  et  $G$  agit sur  $W$ .
- En posant  $w_0 = \rho(g_2)(w)$ , on a également  $\rho(g_1)(w_0) \in W$ , car  $W$  reste stable par l'action de  $G$ .

Ainsi, pour tous  $g_1, g_2 \in G$  et tout  $w \in W$ , l'égalité suivante est vérifiée dans  $W$  :

$$\rho_W(g_1 g_2)(w) = \rho_W(g_1) \circ \rho_W(g_2)(w).$$

Par conséquent,  $\rho_W : G \rightarrow \text{GL}(W)$  est un homomorphisme de groupes.

### Remarque 2.1.2.

Il découle du résultat de la proposition 2.1.1 que, pour établir que  $\rho_W : G \rightarrow \text{GL}(W)$  est une sous-représentation linéaire de  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ , il suffit de montrer que  $W$  est un sous-espace vectoriel de  $V$  stable sous l'action du groupe  $G$ .

### Lemme 1. [8]

Soient  $\varphi : G \rightarrow \text{GL}(V_1)$  et  $\psi : G \rightarrow \text{GL}(V_2)$  deux représentations linéaires de  $G$ .

Soit  $f : V_1 \rightarrow V_2$  un morphisme de représentations linéaires. Alors :

- $\rho_{\ker(f)} : G \rightarrow \text{GL}(\ker(f))$  est une sous-représentation linéaire de  $\varphi : G \rightarrow \text{GL}(V_1)$ ;
- l'image  $\text{im}(f)$   $\rho_{\text{im}(f)} : G \rightarrow \text{GL}(\text{im}(f))$  est une sous-représentation linéaire de  $\psi : G \rightarrow \text{GL}(V_2)$ ;
- $V_1 / \ker(f) \cong \text{im}(f)$ .

## 2.1.3 Produit tensoriel de deux espaces vectoriels et représentation linéaire d'un produit de deux groupes finis.

### 2.1.3.1 Produit tensoriel de deux espaces vectoriels .

Soient  $V_1, V_2$  et  $V_3$  trois  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

### Définition 2.1.7. [29]

Une application  $\varphi : V_1 \times V_2 \rightarrow V_3$  est dite bilinéaire si elle satisfait les conditions suivantes :

- $\varphi(\lambda v_1 + \mu v_2, w) = \lambda \varphi(v_1, w) + \mu \varphi(v_2, w), \quad \forall v_1, v_2 \in V_1, w \in V_2, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$
- $\varphi(v, \lambda w_1 + \mu w_2) = \lambda \varphi(v, w_1) + \mu \varphi(v, w_2), \quad \forall v \in V_1, \quad \forall w_1, w_2 \in V_2.$

### Propriété 2.1.1. (Propriété universelle) [29]

Soient  $E, F, G$  et  $H$  quatre  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $\otimes : E \times F \rightarrow G$  une application bilinéaire.

On dit que  $\otimes$  satisfait la propriété universelle si elle vérifie les conditions suivantes :

- Les vecteurs  $x \otimes y$  ( $x \in E, y \in F$ ) engendrent  $G$ , ou équivalamment,  $\text{Im } \otimes = G$ .
- Si  $\varphi : E \times F \rightarrow H$  est une application bilinéaire, alors il existe une application linéaire  $f : G \rightarrow H$  telle que le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} E \times F & \xrightarrow{\otimes} & G \\ & \searrow \varphi & \swarrow f \\ & H & \end{array} \quad (1.1)$$

Les deux conditions ci-dessus sont équivalentes à l'unique condition suivante :

iii) pour toute application bilinéaire  $\varphi : E \times F \rightarrow H$ , il existe une unique application linéaire  $f : G \rightarrow H$  telle que le diagramme (1.1) commute.

**Définition 2.1.8.** [29]

Le produit tensoriel de deux espaces vectoriels  $E$  et  $F$  est un couple  $(G, \otimes)$ , où  $\otimes : E \times F \rightarrow G$  est une application bilinéaire vérifiant la propriété universelle.

L'espace  $G$  est noté  $E \otimes F$ .

**Propriété 2.1.2.** [29]

Le couple  $(E \otimes F, \otimes)$  est unique à un isomorphisme près.

**Définition 2.1.9.** [25]

Si  $\dim E = n$  et  $\dim F = m$ , alors la dimension du produit tensoriel  $E \otimes F$  est

$$\dim(E \otimes F) = (\dim E)(\dim F) = nm.$$

**Propriété 2.1.3.** [29]

Si  $E$  et  $F$  sont deux espaces vectoriels, alors  $E \otimes F \cong F \otimes E$ .

**2.1.3.2 Représentation linéaire d'un produit de deux groupes finis**

**Définition 2.1.10.** [8]

Soient  $\rho^1 : G_1 \rightarrow \text{GL}(V_1)$  et  $\rho^2 : G_2 \rightarrow \text{GL}(V_2)$  les représentations linéaires des groupes finis  $G_1$  et  $G_2$  respectivement. Le produit tensoriel des représentations  $\rho^1$  et  $\rho^2$  est une représentation linéaire

$$\begin{aligned} \rho_{V_1 \otimes V_2} : G_1 \times G_2 &\rightarrow \text{GL}(V_1 \otimes V_2) \\ (g_1, g_2) &\mapsto (x \otimes y \mapsto (\rho^1(g_1)(x) \otimes \rho^2(g_2)(y))). \end{aligned}$$

Dans la suite sauf mention contraire,  $G$  désignera un groupe fini (pas forcément commutatif), noté multiplicativement avec pour élément neutre 1. La plupart des résultats utiliseront les propriétés des corps algébriquement clos de caractéristique zéro d'où nous supposons par défaut le corps des nombres complexes  $\mathbb{C}$ . Les espaces vectoriels seront définis sur  $\mathbb{C}$  et de dimension finie.

## 2.2 Caractère d'une représentation linéaire d'un groupe fini

**Définition 2.2.1.** [13]

Soit  $(\rho, V)_G$  une représentation linéaire sur  $G$ . Le caractère de  $(\rho, V)_G$ , noté  $\chi_V$ , est la fonction

$$\chi_V : G \rightarrow \mathbb{C}$$

définie pour tout  $g \in G$  par

$$\chi_V(g) := \text{Tr}(\rho(g)),$$

où  $\text{Tr}$  désigne la trace.

**Définition 2.2.2.** [13]

Soit  $G$  un groupe fini. Une fonction centrale sur  $G$  est une fonction  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  telle que, pour

tous  $g, h \in G$ , la relation suivante est satisfaite :

$$f(ghg^{-1}) = f(h).$$

Autrement dit, une fonction centrale est une fonction qui reste constante sur les classes de conjugaison de  $G$ . L'ensemble des fonctions centrales sur  $G$  forme un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel noté  $C(G)$ , dont la dimension est égale au nombre  $c(G)$  de classes de conjugaison de  $G$ .

**Remarque 2.2.1. [8]**

Les fonctions centrales sont particulièrement importantes car tout caractère d'une représentation de  $G$  est une fonction centrale. En effet, si  $(V, \rho)$  est une représentation de  $G$ , le caractère  $\chi_V$  associé satisfait la relation suivante pour tous  $g, h \in G$  :

$$\begin{aligned} \chi_V(ghg^{-1}) &= \text{Tr}(\rho(ghg^{-1})) \\ &= \text{Tr}(\rho(g)\rho(h)\rho(g^{-1})) \\ &= \text{Tr}(\rho(h)\rho(g^{-1})\rho(g)) \\ &= \text{Tr}(\rho(h)\rho(g^{-1}g)) \\ &= \text{Tr}(\rho(h)\rho(1)) \\ &= \text{Tr}(\rho(h)) \\ &= \chi_V(h). \end{aligned}$$

ce qui montre que  $\chi_V$  est constante sur les classes de conjugaison de  $G$ .

**Proposition 2.2.1. [13]**

Soient  $\rho_V : G \rightarrow \text{GL}(V)$  et  $\rho_W : G \rightarrow \text{GL}(W)$  deux représentations linéaires sur  $G$  de degrés  $n$  et  $m$  ( $n, m \in \mathbb{N}^*$ ), et de Caractères  $\chi_V$  et  $\chi_W$  respectivement. On a :

- i)  $\chi_V(1) = \dim V$ ;
- ii)  $\chi(g)^* = \chi(g)^{-1} \quad \forall g \in G$ .

**Théorème 2.2.1 (Frobenius). [13]**

Le nombre de représentations linéaires irréductibles non-isomorphes deux à deux d'un groupe  $G$  est égal au nombre  $c(G)$  de classes de conjugaison de  $G$ .

**Proposition 2.2.2. [8]**

Deux représentations linéaires d'un groupe  $G$  sont isomorphes si et seulement si elles ont le même caractère.

## 2.3 Représentations linéaires irréductibles

**Définition 2.3.1. [13]**

On dit qu'une représentation linéaire  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  d'un groupe  $G$  est irréductible si l'espace vectoriel  $V$  n'est pas réduit à  $\{0\}$  et si  $V$  ne possède aucun sous-espace invariant par  $\rho$  autre que  $\{0\}$  et  $V$ .

**Exemple 2.3.1.**

1. Toute représentation de degré 1 est irréductible.

2. Prenons le groupe cyclique d'ordre 3,  $G = C_3 = \langle g \mid g^3 = e \rangle$ , où  $e$  est l'élément neutre. Considérons  $V = \mathbb{R}^2$ . Définissons une représentation  $\rho$  de  $G$  sur  $V$  comme suit :

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Cette matrice représente une rotation dans  $\mathbb{R}^2$  de  $120^\circ$  dans le sens trigonométrique. Comme  $g^3 = e$ , on a bien que  $\rho(g)^3 = I_2$  (la matrice identité) et  $\det(\rho(g)) = 1 \neq 0$ , la matrice  $\rho(g)$  est inversible et par conséquent  $\rho$  est bien une représentation du groupe  $C_3$ . Montrons que les sous-espaces vectoriels propres de  $\mathbb{R}^2$  qui sont :  $W_1 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\}$ ,  $W_2 = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\}$ , et  $W_3 = \{(z, z) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\}$  ne sont pas stables par  $\rho$ .

Soient  $(x, 0) \in W_1$ ,  $(0, y) \in W_2$ , et  $(z, z) \in W_3$ . On a :

$$\rho(g) \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x \end{pmatrix} \notin W_1.$$

Ce qui montre que  $W_1$  n'est pas stable par  $\rho$ .

$$\rho(g) \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}y \\ -\frac{1}{2}y \end{pmatrix} \notin W_2.$$

Donc  $W_2$  n'est pas stable par  $\rho$ .

$$\rho(g) \begin{pmatrix} z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}z - \frac{1}{2}z \\ \frac{\sqrt{3}}{2}z - \frac{1}{2}z \end{pmatrix} \notin W_3.$$

Ce qui montre que  $W_3$  n'est pas stable par  $\rho$ .

Il en résulte que  $\rho$  est irréductible.

### **Théorème 2.3.1.** [13]

Soit  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  une représentation linéaire de  $G$  dans  $V$  et soit  $W$  un sous-espace vectoriel de  $V$  stable sous  $G$ . Alors, il existe un complément  $W^0$  de  $W$  dans  $V$  qui est stable sous  $G$ .

#### **Preuve :**

Soit  $p : V \rightarrow V$  une projection linéaire sur  $W$ , c'est-à-dire que  $p \circ p = p$  et  $\text{Im}(p) = W$ . Considérons l'application

$$p^0 : V \rightarrow V \quad \text{définie par} \quad p^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \circ p \circ \rho(g)^{-1}.$$

où  $|G|$  est l'ordre de  $G$ . Cette application est bien définie car, pour tout  $g \in G$ ,  $\rho(g) \circ p \circ \rho(g)^{-1} \in \text{End}(V)$ , et la somme d'endomorphismes est encore un endomorphisme. Montrons que  $p^0$  est une projection.

$p^0$  est linéaire car somme finie d'applications linéaires.

Soit  $x \in W$ . Comme  $W$  est stable par  $\rho$ , on a  $\rho(g)^{-1}(x) \in W$ , donc :

$$p(\rho(g)^{-1}(x)) = \rho(g)^{-1}(x) \quad \text{car } p|_W = \text{Id}_W.$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} p^0(x) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \circ p(\rho(g)^{-1}(x)) \quad (\text{par définition de } p^0) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)(\rho(g)^{-1}(x)) \quad (\text{par définition de } p) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(gg^{-1})(x) \quad (\text{par définition de } \rho) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(1)(x) \\ &= \frac{|G|}{|G|} x \\ &= x. \end{aligned}$$

On en déduit que  $p^0(x) = x$  pour tout  $x \in W$ . Il vient que  $p^0 \circ p^0(x) = p^0(x)$  pour tout  $x \in W$  et que  $W \subseteq \text{Im}(p^0)$ .

Soit  $y \in V$ . Alors,

$$p^0(y) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)(p(\rho(g)^{-1}(y))).$$

Puisque  $p(\rho(g)^{-1}(y)) \in W$  (car  $p$  prend ses valeurs dans  $W$ ), et comme  $W$  est stable sous  $\rho(g)$ , on a

$$\rho(g)(p(\rho(g)^{-1}(y))) \in W.$$

La somme finie d'éléments de  $W$  est aussi dans  $W$ , donc

$$p^0(y) \in W.$$

Comme  $y$  est arbitraire, cela implique

$$\text{Im}(p^0) \subseteq W.$$

Donc  $\text{Im}(p^0) = W$ , donc  $p^0$  est une projection sur  $W$ .

Définissons  $W^0 := \ker(p^0) = \{x \in V \mid p^0(x) = 0\}$ .

Comme  $p^0$  est une projection, on a la décomposition directe :

$$V = \text{Im}(p^0) \oplus \ker(p^0) = W \oplus W^0.$$

Montrons maintenant que  $W^0$  est stable sous l'action de  $G$ .

Soit  $x \in W^0$  et  $h \in G$ . Alors :

$$\begin{aligned}
 \rho(h) \circ p^0 \circ \rho(h)^{-1} &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(h) \circ \rho(g) \circ p \circ \rho(g)^{-1} \circ \rho(h)^{-1} \\
 &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(hg) \circ p \circ \rho(hg)^{-1} \\
 &= \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G} \rho(g') \circ p \circ \rho(g')^{-1} \quad (\text{en posant } g' = hg) \\
 &= p^0.
 \end{aligned}$$

Donc  $\rho(h) \circ p^0 = p^0 \circ \rho(h)$ , ce qui signifie que  $p^0$  commute avec  $\rho(h)$  pour tout  $h \in G$ . En particulier, si  $x \in W^0$ , alors  $p^0(x) = 0 \Rightarrow p^0(\rho(h)(x)) = \rho(h)(p^0(x)) = \rho(h)(0) = 0$ , donc  $\rho(h)(x) \in W^0$ .

Il en résulte que  $W^0$  est stable sous l'action de  $G$ , et c'est un complément de  $W$  dans  $V$  stable sous  $G$ .

**Théorème 2.3.2** (Théorème de Maschke). [13]

Toute représentation linéaire  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  sur  $G$  dans un espace vectoriel complexe de dimension finie se décompose en somme directe de représentations irréductibles.

**Preuve :**

Soit  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  une représentation linéaire et  $W$  un sous-espace vectoriel stable par  $\rho$ . Nous montrons que  $W$  admet un supplémentaire  $W'$  dans  $V$ , également stable par  $\rho$ .

Soient  $p : V \rightarrow W$  et  $p^0 : V \rightarrow W$  définie par  $p^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \circ p \circ \rho(g)^{-1}$  deux projections linéaires.

On a d'après le **théorème 2.3.1**  $V = W \oplus W^0$  avec  $W^0 = \ker(p^0)$ . (\*)

Nous déduisons le résultat par récurrence sur  $\dim(V)$ .

- Si  $\dim(V) = 1$ , le résultat est trivial.  
Supposons que  $\dim(V) > 1$ .
- Si  $V$  est irréductible, la situation est triviale.
- Si  $V$  n'est pas irréductible, alors il existe un sous-espace vectoriel  $W$  de  $V$  stable par  $\rho$  avec  $0 < \dim(W) < \dim(V)$ . Par (\*), il existe un sous-espace  $W'$  de  $V$  stable par  $\rho$  tel que  $V = W \oplus W'$ . Ainsi, en appliquant ce processus à  $W$  et  $W'$ , on a le résultat.

**Théorème 2.3.3** (Lemme de Schur). [13]

Soient  $\rho_1 : G \rightarrow V_1$  et  $\rho_2 : G \rightarrow V_2$  deux représentations irréductibles de  $G$ .

Soit  $f : V_1 \rightarrow V_2$  une application linéaire vérifiant

$$\forall g \in G, \quad f \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ f.$$

On a les propriétés suivantes :

- Si  $\rho_1$  et  $\rho_2$  ne sont pas isomorphes, alors  $f = 0$ .
- Si  $V_1 = V_2$  et  $\rho_1 = \rho_2$ , alors  $f$  est une homothétie.

---

**Preuve :**

- i) Supposons par la contraposée que  $f \neq 0$  et montrons que  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont isomorphes. Le sous-espace  $\ker(f)$  de  $V_1$  est stable par  $\rho_1$ . Comme  $f \neq 0$ , on a  $\ker(f) = \{0\}$  par irréductibilité de  $\rho_1$ . De même, le sous-espace  $\text{Im}(f)$  de  $V_2$  est stable par  $\rho_2$ . Comme  $f \neq 0$ , on en déduit que  $\text{Im}(f) = V_2$  par irréductibilité de  $\rho_2$ . Par hypothèse,  $f$  est un morphisme de représentations linéaires. Donc  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont isomorphes. Il en résulte que si  $\rho_1$  et  $\rho_2$  ne sont pas isomorphes, alors  $f = 0$ .
- ii) Supposons que  $V_1 = V_2 = V$  et que  $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ . Soit  $f : V \rightarrow V$  un endomorphisme tel que :

$$\forall g \in G, \quad f \circ \rho(g) = \rho(g) \circ f.$$

Cela signifie que  $f$  commute avec la représentation  $\rho$ .

Comme  $\mathbb{C}$  est un corps algébriquement clos, l'endomorphisme  $f$  possède au moins une valeur propre  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Cela signifie qu'il existe un vecteur non nul  $v \in V$  tel que  $f(v) = \lambda v$ . Posons :

$$f' := f - \lambda \text{id}_V.$$

Alors  $f'$  est un endomorphisme de  $V$  qui commute également avec  $\rho$ , car pour tout  $g \in G$ , on a :

$$\begin{aligned} f' \circ \rho(g) &= (f - \lambda \text{id}_V) \circ \rho(g) \\ &= f \circ \rho(g) - \lambda \text{id}_V \circ \rho(g) \\ &= f \circ \rho(g) - \lambda \rho(g) \\ &= \rho(g) \circ f - \lambda \rho(g) \\ &= \rho(g) \circ (f - \lambda \text{id}_V) \\ &= \rho(g) \circ f'. \end{aligned}$$

$f(v) = \lambda v$  implique que  $f'(v) = 0$ . Ainsi,  $f'$  n'est pas injectif. Il s'en suit que  $f'$  n'est pas bijectif et que  $\ker(f') \neq \{0\}$ .

Par ailleurs, pour tout  $g \in G$ , et tout  $v \in \ker(f')$ , on a :

$$f'(\rho(g)(v)) = \rho(g)f'(v) = \rho(g) \cdot 0 = 0.$$

Il vient que  $\ker(f')$  est stable par  $\rho$ . Or, comme  $\rho$  est irréductible, le seul sous-espace non trivial stable par  $G$  est  $V$  lui-même. Donc,  $\ker(f') = V$ . Cela signifie que  $\forall v \in V, \quad f'(v) = 0$ .

On en déduit que  $f = \lambda \text{id}_V$ , ce qui montre que  $f$  est une homothétie.

**Corollaire 2.3.1. [13]**

Soient  $\rho_1 : G \rightarrow V_1$  et  $\rho_2 : G \rightarrow V_2$  deux représentations irréductibles de  $G$ .

Soit  $h : V_1 \rightarrow V_2$  une application linéaire. Posons :

$$h_0 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\rho_2(g))^{-1} \circ h \circ \rho_1(g).$$

Alors :

---

i) Si  $\rho_1$  et  $\rho_2$  ne sont pas isomorphes, on a  $h_0 = 0$ .

ii) Si  $V_1 = V_2$  et  $\rho_1 = \rho_2$ ,  $h_0$  est une homothétie de rapport  $\frac{1}{n}\text{Tr}(h)$ , où  $n = \dim(V)$ .

**Preuve :**

i) En appliquant le lemme de Schur à  $f = h_0$ , on a  $h_0 = 0$ .

ii)  $h_0$  est une homothétie par le lemme de Schur. De plus,

$$\begin{aligned}\text{Tr}(h_0) &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{Tr}((\rho_1(g))^{-1} \circ h \circ \rho_1(g)) \\ &= \text{Tr}(h).\end{aligned}$$

On en déduit alors que  $h^0 = \frac{\text{Tr}(h)}{n} \text{I}_n$ , vu que la trace de l'identité est  $n$

**Définition 2.3.2.** [13]

Soit  $G$  un groupe. Le produit scalaire hermitien sur l'espace vectoriel  $\mathcal{F}(G, \mathbb{C})$  des fonctions de  $G$  dans  $\mathbb{C}$ , par la formule :

$$(\varphi|\psi) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varphi(g) \overline{\psi(g)}.$$

Ceci est un produit scalaire.

Si  $\varphi$  et  $\psi$  sont des caractères, les deux formules coïncident car dans ce cas  $\overline{\varphi(g)} = \varphi(g^{-1})$ .

**Théorème 2.3.4.** [13]

i) Soit  $\chi$  le caractère d'une représentation irréductible  $\rho$  de  $G$ . Alors,  $(\chi|\chi) = 1$ .

ii) Soient  $\chi_1$  et  $\chi_2$  les caractères de deux représentations irréductibles non isomorphes  $(V_1, \rho_1)_G$  et  $(V_2, \rho_2)_G$ . Alors,  $(\chi_1|\chi_2) = 0$ .

**Théorème 2.3.5.** [13]

Soit  $G$  un groupe. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i)  $G$  est abélien.

(ii) Toutes les représentations irréductibles de  $G$  sont de degré 1.



## Produit tensoriel arbitraire de représentation linéaire d'un produit arbitraire de groupes finis

### 3.1 Produit tensoriel arbitraire d'espaces vectoriels

Dans la suite, sauf mention contraire, tous les espaces vectoriels seront supposés de dimension finie et définis sur un corps commutatif  $\mathbb{K}$ , où  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ .

**Propriété 3.1.1. (Propriété universelle.)** [29]

Soient  $V_1, V_2, \dots, V_p$  et  $T$  des espaces vectoriels,

$$\otimes : V_1 \times \cdots \times V_p \rightarrow T$$

une application  $p$ -linéaire. Cette application est dite avoir la propriété universelle si elle satisfait les conditions suivantes :

- i) Les vecteurs  $x_1 \otimes \cdots \otimes x_p$ , ( $x_i \in V_i$ ) engendrent  $T$ .
- ii) Toute application  $p$ -linéaire  $\varphi : V_1 \times \cdots \times V_p \rightarrow H$  ( $H$  étant un espace vectoriel quelconque) peut s'écrire sous la forme

$$\varphi(x_1, \dots, x_p) = f(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p)$$

ou  $f : T \rightarrow H$  est une application linéaire.

**Définition 3.1.1.** [29]

Le produit tensoriel des espaces  $V_1, V_2, \dots, V_p$  est un couple  $(T, \otimes)$  où

$$\otimes : V_1 \times \cdots \times V_p \rightarrow T$$

est une application  $p$ -linéaire avec la propriété universelle.  $T$  est également appelé le produit tensoriel des espaces  $V_i$  et est noté

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_p.$$

---

**Propriété 3.1.2. [29]**

Le couple  $(T, \otimes)$  est unique à isomorphisme près.

**Définition 3.1.2. [29]**

Si  $V_1, V_2, \dots, V_p$  sont des espaces vectoriels sur un corps  $\mathbb{K}$ , alors la dimension du produit tensoriel  $V_1 \otimes \dots \otimes V_p$  est donnée par :

$$\dim(V_1 \otimes \dots \otimes V_p) = \prod_{i=1}^p \dim(V_i).$$

**Proposition 3.1.1. [29]**

Étant donnés trois espaces  $V_1, V_2, V_3$ , il existe un isomorphisme linéaire

$$f : V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \cong (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$$

tel que

$$f(x \otimes y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z.$$

**Proposition 3.1.2. (Généralisation) [29]**

Étant donnés  $p$  ( $p \geq 4$ ) espaces vectoriels  $V_1, V_2, \dots, V_p$ , il existe un isomorphisme linéaire

$$f : V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_p \cong ((\dots((V_1 \otimes V_2) \otimes V_3) \dots) \otimes E_p),$$

défini récursivement, tel que pour tout  $x_1 \in V_1, x_2 \in V_2, \dots, x_p \in V_p$ ,

$$f(x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_p) = (((\dots((x_1 \otimes x_2) \otimes x_3) \dots) \otimes x_{p-1}) \otimes x_p).$$

**Proposition 3.1.3. [1]**

Soit  $(V_i)_{i \in I}$  une famille non vide d'espaces vectoriels sur un même corps commutatif  $\mathbb{K}$ . Soit  $(u_i)_{i \in I}$  une famille non vide de vecteurs non nuls tels que, pour tout  $i \in I$ , le vecteur  $u_i$  appartienne à  $V_i$ . Pour tous sous-ensembles finis  $J$  et  $K$  de  $I$  tels que  $J \subseteq K$ , considérons l'application linéaire injective

$$\begin{aligned} \varphi_{J,K} : \bigotimes_{i \in J} V_i &\longrightarrow \bigotimes_{i \in K} V_i \\ \bigotimes_{i \in J} v_i &\longmapsto \bigotimes_{i \in J} v_i \otimes \left( \bigotimes_{i \in K \setminus J} u_i \right). \end{aligned}$$

Soit  $\mathcal{F}(I)$  l'ensemble de tous les sous-ensembles finis de  $I$ .

i) Le système  $(\bigotimes_{i \in J} V_i, \varphi_{J,K})_{J \in \mathcal{F}(I)}$  est inductif.

ii) La limite inductive du système inductif  $(\bigotimes_{i \in J} V_i, \varphi_{J,K})_{J \in \mathcal{F}(I)}$ , notée  $\bigotimes_{i \in I} V_i$ , est le produit tensoriel infini des espaces vectoriels  $(V_i)_{i \in I}$ .

**3.1.1 Représentation linéaire d'un produit arbitraire de groupes finis****Proposition 3.1.4.**

Soit  $(V_i)_{i \in I}$  une famille non vide d'espaces vectoriels sur un même corps commutatif  $\mathbb{K}$ . Soit  $(u_i)_{i \in I}$  une famille non vide de vecteurs non nuls tels que, pour tout  $i \in I$ , le vecteur  $u_i$

appartienne à  $V_i$ . Pour tous sous-ensembles finis  $J$  et  $K$  de  $I$  tels que  $J \subseteq K$ , l'application

$$\begin{aligned}\psi_{J,K} : GL(\bigotimes_{i \in K} V_i) &\longrightarrow GL(\bigotimes_{i \in J} V_i) \\ f &\longmapsto \psi_{J,K}(f) = f_{J,K}\end{aligned}$$

avec  $f_{J,K}$  défini comme suit : pour tout  $f \in GL(\bigotimes_{i \in K} V_i)$  et tout  $\bigotimes_{i \in J} v_i \in \bigotimes_{i \in J} V_i$ ,

$$f_{J,K}(\bigotimes_{i \in J} v_i) = \bigotimes_{i \in J} v'_i \text{ si } f((\bigotimes_{i \in J} v_i) \otimes (\bigotimes_{i \in K \setminus J} t_i)) = (\bigotimes_{i \in J} v'_i) \otimes (\bigotimes_{i \in K \setminus J} v'_i) = \bigotimes_{i \in K} v'_i,$$

pour un certain  $\bigotimes_{i \in K \setminus J} t_i \in \bigotimes_{i \in K \setminus J} V_i$ , est un homomorphisme de groupes.

**Preuve :**

1. D'une part, prouvons que pour tout sous-ensemble fini  $J$  et  $K$  de  $I$  tels que  $J \subseteq K$ , l'application  $\psi_{J,K}$  est bien définie. Pour cela, nous procéderons selon les étapes suivantes :

- Pour tout  $f \in GL(\bigotimes_{i \in K} V_i)$  et tout  $\bigotimes_{i \in J} v_i \in \bigotimes_{i \in J} V_i$ , si  $f((\bigotimes_{i \in J} v_i) \otimes (\bigotimes_{i \in K \setminus J} t_i)) = \bigotimes_{i \in K} w_i$  et  $f((\bigotimes_{i \in J} v_i) \otimes (\bigotimes_{i \in K \setminus J} t'_i)) = \bigotimes_{i \in K} w'_i$  pour tout  $\bigotimes_{i \in K \setminus J} t_i$  et  $\bigotimes_{i \in K \setminus J} t'_i$  dans  $\bigotimes_{i \in K \setminus J} V_i$ , alors  $\bigotimes_{i \in J} w_i = \bigotimes_{i \in J} w'_i$ . En effet,  $f_{J,K}(\bigotimes_{i \in J} v_i) = \bigotimes_{i \in J} w_i$  et  $f_{J,K}(\bigotimes_{i \in J} v_i) = \bigotimes_{i \in J} w'_i$ . Ainsi,  $\bigotimes_{i \in J} w_i = \bigotimes_{i \in J} w'_i$ .
- Soit  $f \in GL(\bigotimes_{i \in K} V_i)$ . Pour tout  $\bigotimes_{i \in J} v_i \in \bigotimes_{i \in J} V_i$ , nous avons  $(\bigotimes_{i \in J} v_i) \otimes (\bigotimes_{i \in K \setminus J} u_i) \in \bigotimes_{i \in K} V_i$ .

Puisque  $f$  est bijective, il existe un unique  $\bigotimes_{i \in K} w_i \in \bigotimes_{i \in K} V_i$  tel que :

$$\begin{aligned}f(\bigotimes_{i \in K} w_i) &= f((\bigotimes_{i \in J} w_i) \otimes (\bigotimes_{i \in K \setminus J} w_i)) \\ &= (\bigotimes_{i \in J} v_i) \otimes (\bigotimes_{i \in K \setminus J} u_i)\end{aligned}$$

Il en découle, par définition de  $f_{J,K}$ , que  $f_{J,K}(\bigotimes_{i \in J} w_i) = \bigotimes_{i \in J} v_i$ . Cela signifie clairement que l'application  $f_{J,K}$  est surjective.

- Maintenant, considérons  $\bigotimes_{i \in J} v_i \neq \bigotimes_{i \in J} t_i$  dans  $\bigotimes_{i \in J} V_i$ . Alors, nous avons  $(\bigotimes_{i \in J} v_i) \otimes (\bigotimes_{i \in K \setminus J} u_i) \neq (\bigotimes_{i \in J} t_i) \otimes (\bigotimes_{i \in K \setminus J} u_i)$  dans  $\bigotimes_{i \in K} V_i$ . Et pour tout  $f \in GL(\bigotimes_{i \in K} V_i)$ , on observe facilement que  $f((\bigotimes_{i \in J} v_i) \otimes (\bigotimes_{i \in K \setminus J} u_i)) \neq f((\bigotimes_{i \in J} t_i) \otimes (\bigotimes_{i \in K \setminus J} u_i))$  puisque  $f$  est injective. Il en résulte que  $f_{J,K}(\bigotimes_{i \in J} v_i) \neq f_{J,K}(\bigotimes_{i \in J} t_i)$ . Ainsi,  $f_{J,K}$  est injective.

- Prouvons que  $f_{J,K}$  est linéaire. Considérons  $\bigotimes_{i \in J} v_i$  et  $\bigotimes_{i \in J} t_i$ , deux éléments de  $\bigotimes_{i \in J} V_i$ , et soit  $\alpha \in F$ .

Prouvons que :

$$f_{J,K}(\bigotimes_{i \in J} v_i + \alpha \bigotimes_{i \in J} t_i) = f_{J,K}(\bigotimes_{i \in J} v_i) + \alpha f_{J,K}(\bigotimes_{i \in J} t_i).$$

Considérons  $f_{J,K}(\bigotimes_{i \in J} v_i) = \bigotimes_{i \in J} v'_i$  et  $f_{J,K}(\bigotimes_{i \in J} t_i) = \bigotimes_{i \in J} t'_i$ , où

$$f((\bigotimes_{i \in J} v_i) \otimes (\bigotimes_{i \in K \setminus J} h_i)) = \bigotimes_{i \in K} v'_i$$

et

$$f((\bigotimes_{i \in J} t_i) \otimes (\bigotimes_{i \in K \setminus J} k_i)) = \bigotimes_{i \in K} t'_i$$

pour certains éléments  $\bigotimes_{i \in K \setminus J} h_i$  et  $\bigotimes_{i \in K \setminus J} k_i$  de  $\bigotimes_{i \in K \setminus J} V_i$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} f(((\bigotimes_{i \in J} v_i) \otimes (\bigotimes_{i \in K \setminus J} h_i)) + \alpha((\bigotimes_{i \in J} t_i) \otimes (\bigotimes_{i \in K \setminus J} k_i))) &= \\ f((\bigotimes_{i \in J} v_i) \otimes (\bigotimes_{i \in K \setminus J} h_i)) + \alpha f((\bigotimes_{i \in J} t_i) \otimes (\bigotimes_{i \in K \setminus J} k_i)) & \end{aligned}$$

puisque  $f$  est linéaire. Et

$$\begin{aligned} f((\bigotimes_{i \in J} v_i) \otimes (\bigotimes_{i \in K \setminus J} h_i)) + \alpha f((\bigotimes_{i \in J} t_i) \otimes (\bigotimes_{i \in K \setminus J} k_i)) &= (\bigotimes_{i \in K} v'_i) + (\bigotimes_{i \in K} \alpha t'_i) \\ &= \bigotimes_{i \in K} (v'_i + \alpha t'_i) \\ &= (\bigotimes_{i \in J} (v'_i + \alpha t'_i)) \otimes (\bigotimes_{i \in K \setminus J} (v'_i + \alpha t'_i)) \end{aligned}$$

De plus,

$$f(((\bigotimes_{i \in J} v_i) \otimes (\bigotimes_{i \in K \setminus J} h_i)) + \alpha((\bigotimes_{i \in J} t_i) \otimes (\bigotimes_{i \in K \setminus J} k_i))) = f(\bigotimes_{i \in J} (v_i + \alpha t_i) + \bigotimes_{i \in K \setminus J} (h_i + \alpha k_i))$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f_{J,K}(\bigotimes_{i \in J} (v_i + \alpha t_i)) &= \bigotimes_{i \in J} (v'_i + \alpha t'_i) \\ &= (\bigotimes_{i \in J} v'_i) + \alpha (\bigotimes_{i \in J} t'_i) \\ &= f_{J,K}(\bigotimes_{i \in J} v_i) + \alpha f_{J,K}(\bigotimes_{i \in J} t_i) \end{aligned}$$

Par conséquent,  $f_{J,K} \in GL(\bigotimes_{i \in K} V_i)$  pour tout  $f \in GL(\bigotimes_{i \in J} V_i)$ .

Ainsi,  $\psi_{J,K}$  est bien défini.

2. Prouvons maintenant que  $\psi_{J,K}$  est un homomorphisme de groupe qui est surjectif. Soit  $g \in GL(\bigotimes_{i \in J} V_i)$ . Il est clair que  $f = g \otimes 1_{\bigotimes_{i \in K \setminus J} V_i}$  appartient à  $GL(\bigotimes_{i \in K} V_i)$ .

Pour tout  $\bigotimes_{i \in J} v_i \in \bigotimes_{i \in J} V_i$ , on a  $(\bigotimes_{i \in J} v_i) \otimes (\bigotimes_{i \in K \setminus J} u_i) \in \bigotimes_{i \in K} V_i$ , et

$$f((\bigotimes_{i \in J} v_i) \otimes (\bigotimes_{i \in K \setminus J} u_i)) = g(\bigotimes_{i \in J} v_i) \otimes (\bigotimes_{i \in K \setminus J} u_i).$$

Ainsi,  $f_{J,K}(\bigotimes_{i \in J} v_i) = g(\bigotimes_{i \in J} v_i)$  et  $\psi_{J,K}(f) = g$ . Cela montre que  $\psi_{J,K}$  est surjectif.

Il reste à prouver que  $\psi_{J,K}$  est un homomorphisme de groupe. Considérons  $f, g \in GL(\bigotimes_{i \in J} V_i)$ . Nous devons montrer que

$$\psi_{J,K}(f \circ g) = \psi_{J,K}(f) \circ \psi_{J,K}(g).$$

En effet,  $(f \circ g) \otimes 1_{\bigotimes_{i \in K \setminus J} V_i} \in GL\left(\bigotimes_{i \in K} V_i\right)$  et, comme vu précédemment,

$$\psi_{J,K}((f \circ g) \otimes 1_{\bigotimes_{i \in K \setminus J} V_i}) = f \circ g = \psi_{J,K}(f) \circ \psi_{J,K}(g).$$

Cela conclut la démonstration.

**Proposition 3.1.5.**

Le système  $(GL(\bigotimes_{i \in J} V_i), \psi_{J,K})$  est projectif, avec pour limite projective

$$\varprojlim_{J \in \mathcal{F}(I)} GL\left(\bigotimes_{i \in J} V_i\right),$$

où  $\mathcal{F}(I)$  désigne l'ensemble des sous-ensembles finis de  $I$ .

Preuve :

**1. Identité sur chaque composante :**

Montrons que  $\psi_{J,J} = \text{id}_{GL(\bigotimes_{i \in J} V_i)}$ , c'est-à-dire que  $\psi_{J,J}(f) = f$  pour tout  $f \in GL(\bigotimes_{i \in J} V_i)$ .

Soient  $f \in GL(\bigotimes_{i \in J} V_i)$  et  $\bigotimes_{i \in J} v_i \in \bigotimes_{i \in J} V_i$ . Par définition de  $\psi_{J,J}(f)$ , on a :

$$\psi_{J,J}(f)\left(\bigotimes_{i \in J} v_i\right) = f_{J,J}\left(\bigotimes_{i \in J} v_i\right) = f\left(\bigotimes_{i \in J} v_i\right).$$

Donc  $\psi_{J,J}(f) = f$ .

**2. Compatibilité des morphismes :**

Soient  $J \subseteq K \subseteq L$  des sous-ensembles finis de  $I$ .

Montrons que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} GL\left(\bigotimes_{i \in L} V_i\right) & \xrightarrow{\psi_{K,L}} & GL\left(\bigotimes_{i \in K} V_i\right) \\ & \searrow \psi_{J,L} & \downarrow \psi_{J,K} \\ & & GL\left(\bigotimes_{i \in J} V_i\right) \end{array}$$

Soit  $f \in GL(\bigotimes_{i \in L} V_i)$  et soit  $\bigotimes_{i \in J} v_i \in \bigotimes_{i \in J} V_i$ . Considérons un élément :

$$\bigotimes_{i \in L} v_i = \left(\bigotimes_{i \in J} v_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{i \in L \setminus J} u_i\right).$$

Alors :

$$f\left(\bigotimes_{i \in L} v_i\right) = \bigotimes_{i \in L} v'_i.$$

Par définition, on a :

$$\psi_{J,L}(f)(\bigotimes_{i \in J} v_i) = f_{J,L}(\bigotimes_{i \in J} v_i) = \bigotimes_{i \in J} v'_i.$$

En notant que :

$$\bigotimes_{i \in L} v_i = \left[ \left( \bigotimes_{i \in J} v_i \right) \otimes \left( \bigotimes_{i \in K \setminus J} u_i \right) \right] \otimes \left( \bigotimes_{i \in L \setminus K} u_i \right),$$

on obtient :

$$f_{K,L} \left( \left( \bigotimes_{i \in J} v_i \right) \otimes \left( \bigotimes_{i \in K \setminus J} u_i \right) \right) = \left( \bigotimes_{i \in J} v'_i \right) \otimes \left( \bigotimes_{i \in K \setminus J} v'_i \right).$$

Puis, par définition de  $\psi_{J,K}$  :

$$\psi_{J,K}(\psi_{K,L}(f))(\bigotimes_{i \in J} v_i) = f_{J,L}(\bigotimes_{i \in J} v_i) = \bigotimes_{i \in J} v'_i.$$

Ainsi :

$$\psi_{J,K} \circ \psi_{K,L}(f)(\bigotimes_{i \in J} v_i) = \psi_{J,L}(f)(\bigotimes_{i \in J} v_i),$$

ce qui prouve la commutativité du diagramme.

Le système  $(GL(\bigotimes_{i \in J} V_i), \psi_{J,K})$  est donc un système projectif.

Puisque :

- chaque  $GL(\bigotimes_{i \in J} V_i)$  est un objet de la catégorie des groupes (**Grp**),
- **Grp** admettant les limites projectives (elle est complète),

alors le système projectif  $(GL(\bigotimes_{i \in J} V_i), \psi_{J,K})$  admet une limite projective :

$$\varprojlim_{J \in \mathcal{F}(I)} GL \left( \bigotimes_{i \in J} V_i \right).$$

### Proposition 3.1.6.

Soit  $\mathcal{F}(I)$  l'ensemble des sous-ensembles finis de  $I$ , muni de l'inclusion, que l'on considère comme une catégorie. Définissons une catégorie  $\text{Vect}_{\bigotimes V_i}$  associée à une famille d'espaces vectoriels  $(V_i)_{i \in I}$ , de la manière suivante :

1. Les objets de  $\text{Vect}_{\bigotimes V_i}$  sont les produits tensoriels finis  $\bigotimes_{i \in J} V_i$  de la famille  $(V_i)_{i \in I}$  où  $J \subseteq I$  est un sous-ensemble fini.
2. pour chaque paire ordonnée d'objets  $(\bigotimes_{i \in J} V_i, \bigotimes_{i \in K} V_i)$ , l'ensemble des morphismes de  $\bigotimes_{i \in J} V_i$  vers  $\bigotimes_{i \in K} V_i$  est défini comme :

$$\text{Vect}_{\bigotimes V_i} \left( \bigotimes_{i \in J} V_i, \bigotimes_{i \in K} V_i \right) = \begin{cases} \{\varphi_{J,K}\} & \text{si } J \subseteq K \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

---

**Proposition 3.1.7.**

Soit la correspondance  $GL : \text{Vect}_{\otimes V_i} \rightarrow \text{Grp}$  entre les catégories  $\text{Vect}_{\otimes V_i}$  et  $\text{Grp}$  où  $\text{Grp}$  désigne la catégorie des groupes.  $GL$  est un foncteur contravariant.

**Preuve :**

Soient  $J, K, L \in \mathcal{F}(I)$  tels que  $J \subseteq K \subseteq L$ . On a :

**1. Objets :**

À chaque produit tensoriel

$$\bigotimes_{i \in J} V_i \in \text{Vect}_{\otimes V_i} ,$$

on associe

$$GL \left( \bigotimes_{i \in J} V_i \right) \in \text{Grp}.$$

**2. Morphismes :**

À chaque application linéaire

$$\varphi_{J,K} : \bigotimes_{i \in J} V_i \rightarrow \bigotimes_{i \in K} V_i ,$$

on associe l'homomorphisme de groupes

$$GL(\varphi_{J,K}) = \psi_{J,K} : GL \left( \bigotimes_{i \in K} V_i \right) \rightarrow GL \left( \bigotimes_{i \in J} V_i \right).$$

Cela est bien un morphisme de la catégorie  $\text{Grp}$  d'après la proposition 3.1.4.

**Vérification des deux axiomes :****(i) Identité :**

On a

$$\psi_{J,J} = \text{id}.$$

d'après la proposition 3.1.5. Il vient que

$$GL \left( \text{id}_{\bigotimes_{i \in J} V_i} \right) = \text{id}_{GL(\bigotimes_{i \in J} V_i)}.$$

**(ii) Compatibilité à la composition :**

Pour  $J \subseteq K \subseteq L$ , on a :

$\psi_{J,K} \circ \psi_{K,L} = \psi_{J,L}$  d'après 3.1.5. Ce qui correspond à

$$GL(\varphi_{J,K}) \circ GL(\varphi_{K,L}) = GL(\varphi_{J,L}) = \psi_{J,L}.$$

Donc

$$GL(\varphi_{J,L}) = GL(\varphi_{K,L} \circ \varphi_{J,K}) = GL(\varphi_{J,K}) \circ GL(\varphi_{K,L}).$$

Il en résulte que  $GL$  est un foncteur contravariant.

**Proposition 3.1.8.**

Soit  $J$  un sous-ensemble fini d'un ensemble  $I$  et  $(G_i)_{i \in J}$  une famille finie de groupes finis. Soit  $(V_i)_{i \in J}$  une famille finie d'espaces vectoriels de dimension finie sur le même corps  $F$  et pour chaque  $i \in J$ , soit  $\varphi_i : G_i \rightarrow GL(V_i)$  une représentation linéaire de  $G_i$  dans  $V_i$ . Alors, le produit tensoriel  $\varphi_J = \bigotimes_{i \in J} \varphi_i$  des applications  $(\varphi_i)_{i \in J}$  défini par :

$$\begin{aligned} \varphi_J = \bigotimes_{i \in J} \varphi_i : \prod_{i \in J} G_i &\longrightarrow GL\left(\bigotimes_{i \in J} V_i\right) \\ (g_i)_{i \in J} &\longmapsto \bigotimes_{i \in J} \varphi_i((g_i)_{i \in J}) = \bigotimes_{i \in J} \varphi_i(g_i) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \bigotimes_{i \in J} \varphi_i(g_i) : \bigotimes_{i \in J} V_i &\longrightarrow \bigotimes_{i \in J} V_i \\ \bigotimes_{i \in J} v_i &\longmapsto \left(\bigotimes_{i \in J} \varphi_i(g_i)\right)\left(\bigotimes_{i \in J} v_i\right) = \bigotimes_{i \in J} \varphi_i(g_i)(v_i) \end{aligned}$$

est une représentation linéaire du produit direct fini  $\prod_{i \in J} G_i$  des groupes  $(G_i)_{i \in J}$  dans le produit tensoriel fini  $\bigotimes_{i \in J} V_i$ .

**Preuve :**

Pour tout ensemble fini  $J$ ,  $i \in J$  et tout  $g_i \in G_i$ , on a  $\varphi_i(g_i) \in GL(V_i)$ . Il en découle, par la définition du produit tensoriel d'applications, que  $\bigotimes_{i \in J} \varphi_i(g_i) \in GL\left(\bigotimes_{i \in J} V_i\right)$ . On obtient par induction que  $\varphi_J = \bigotimes_{i \in J} \varphi_i$  est un homomorphisme de groupes. Ainsi,  $\varphi_J$  est une représentation linéaire du produit direct fini  $\prod_{i \in J} G_i$  des groupes  $(G_i)_{i \in J}$  dans l'espace vectoriel  $\bigotimes_{i \in J} V_i$  comme voulu, et la démonstration est terminée.

**Proposition 3.1.9.**

Soient  $(I, \leq)$  un ensemble dirigé et  $(G_i)_{i \in I}$  une famille non vide de groupes finis. Pour tout sous-ensemble fini  $J$  de  $I$ , définissons  $G_J = \prod_{i \in J} G_i$ . Si  $J$  et  $K$  sont des sous-ensembles de  $I$  tels que  $J \subseteq K$ , alors nous considérons la projection :

$$\begin{aligned} \varphi_{J,K} : G_K &\longrightarrow G_J \\ (g_i)_{i \in K} &\longmapsto (g_i)_{i \in J}. \end{aligned}$$

Le système  $(G_J, \varphi_{J,K})$  est projectif avec limite projective  $\prod_{i \in I} G_i$ .

**Preuve :**

Soit  $(I, \leq)$  un ensemble dirigé et  $(G_i)_{i \in I}$  une famille non vide de groupes finis. Pour tout sous-ensemble fini  $J$  de  $I$ , définissons  $G_J = \prod_{i \in J} G_i$ . Nous allons montrer que le système  $(G_J, \varphi_{J,K})$  est un système projectif et que sa limite projective est  $\prod_{i \in I} G_i$ .

**Vérification du système projectif**

Le système projectif est défini par les ensembles  $G_J$  indexés par les sous-ensembles finis  $J \subseteq I$ , et les applications de transition  $\varphi_{J,K}$  définies pour  $J \subseteq K$  par :

$$\varphi_{J,K} : G_K \rightarrow G_J, \quad (g_i)_{i \in K} \mapsto (g_i)_{i \in J}.$$

Les homomorphismes  $\varphi_{J,K}$  sont bien définis et sont clairement des homomorphismes



de groupes car ils consistent en des projections sur un sous-produit de groupes.

**Identité :**

Pour tout  $J$ , on a trivialement  $\varphi_{J,J} = \text{id}_{G_J}$ .

**Compatibilité avec l'inclusion :**

Supposons  $J \subseteq K \subseteq L$  et montrons que

$$\varphi_{J,L} = \varphi_{J,K} \circ \varphi_{K,L}.$$

Pour tout élément  $g = (g_i)_{i \in L} \in G_L$ , on a :

$$\varphi_{K,L}(g) = (g_i)_{i \in K} \in G_K,$$

puis

$$\varphi_{J,K}(\varphi_{K,L}(g)) = \varphi_{J,K}((g_i)_{i \in K}) = (g_i)_{i \in J}.$$

Par définition de  $\varphi_{J,L}$ , nous avons bien  $\varphi_{J,L}(g) = (g_i)_{i \in J}$ . Ainsi, la compatibilité est vérifiée.

Ces deux propriétés assurent que  $(G_J, \varphi_{J,K})$  forme bien un système projectif.

**Détermination de la limite projective**

La limite projective d'un tel système est définie comme :

$$\varprojlim_{J \in \mathcal{F}(I)} G_J = \left\{ (g_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} G_i \mid \forall J \subseteq K, \varphi_{J,K}((g_i)_{i \in K}) = (g_i)_{i \in J} \right\}.$$

Mais ici, les projections sont simplement les projections naturelles de  $\prod_{i \in I} G_i$  sur les sous-produits indexés par les parties finies de  $I$ . Ainsi, tout élément de  $\prod_{i \in I} G_i$  satisfait trivialement la condition de compatibilité, donc :

$$\varprojlim_{J \in \mathcal{F}(I)} G_J = \prod_{i \in I} G_i.$$

Par construction, les projections  $\varphi_J : \prod_{i \in I} G_i \rightarrow G_J$  définies par  $(g_i)_{i \in I} \mapsto (g_i)_{i \in J}$  vérifient  $\varphi_{J,K} \circ \varphi_K = \varphi_J$ , montrant que  $\prod_{i \in I} G_i$  satisfait l'universalité de la limite projective. Il en résulte que  $(G_J, \varphi_{J,K})$  définit bien un système projectif, et que sa limite projective est  $\prod_{i \in I} G_i$ , ce qui conclut la preuve.

Nous avons le résultat suivant d'après le théorème 1.3.1.

**Lemme 2.**

Soit  $(V_i)_{i \in I}$  une famille non vide d'espaces vecteurs de dimension finie sur le même corps  $\mathbb{K}$  et soit  $\bigotimes_{i \in I} V_i$  le produit tensoriel infini des espaces vectoriels  $(V_i)_{i \in I}$  où chaque  $V_i$  ( $i \in I$ ) est un espace vectoriel non nul. Soit  $\mathcal{F}(I)$  l'ensemble des sous-ensembles finis de  $I$ . Alors,

$$\varprojlim_{J \in \mathcal{F}(I)} GL \left( \bigotimes_{i \in J} V_i \right) = GL \left( \varinjlim_{J \in \mathcal{F}(I)} \left( \bigotimes_{i \in J} V_i \right) \right)$$

---

**Théorème 3.1.1.**

Soit  $(G_i)_{i \in I}$  une famille non vide de groupes et  $(\varphi_i)_{i \in I}$  une famille de représentations linéaires, où chaque

$$\varphi_i : G_i \rightarrow \text{GL}(V_i)$$

est une représentation du groupe  $G_i$  sur un espace vectoriel  $V_i$ . Alors, la représentation linéaire sur le produit tensoriel des espaces  $V_i$  est donnée par :

$$\varphi_I = \bigotimes_{i \in I} \varphi_i : \prod_{i \in I} G_i \longrightarrow \text{GL} \left( \bigotimes_{i \in I} V_i \right).$$

**Preuve :**

Soient  $J, K \in \mathcal{F}(I)$  avec  $\mathcal{F}(I)$  l'ensemble de partie finie de  $I$  tels que  $J \subseteq K$ . Le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i \in K} G_i & \xrightarrow{\varphi_K} & \text{GL} \left( \bigotimes_{i \in K} V_i \right) \\ \downarrow \varphi_{J,K} & & \downarrow \psi_{J,K} \\ \prod_{i \in J} G_i & \xrightarrow{\varphi_J} & \text{GL} \left( \bigotimes_{i \in J} V_i \right) \end{array}$$

En effet, soient  $J$  et  $K$  deux sous-ensembles finis de  $I$  tels que  $J \subseteq K$ . Soit  $(g_i)_{i \in K}$  un élément de  $\prod_{i \in K} G_i$ . Il est clair que :

$$\psi_{J,K} \circ \varphi_K((g_i)_{i \in K}) = \psi_{J,K}(\varphi_K((g_i)_{i \in J})) = \psi_{J,K} \left( \bigotimes_{i \in J} \varphi_i(g_i) \right)$$

et

$$\varphi_J \circ \varphi_{J,K}((g_i)_{i \in K}) = \varphi_J(\varphi_{J,K}((g_i)_{i \in K})) = \varphi_J((g_i)_{i \in J}) = \bigotimes_{i \in J} \varphi_i(g_i).$$

Soit  $\bigotimes_{i \in J} v_i$  un élément de  $\bigotimes_{i \in J} V_i$ . Alors  $(\bigotimes_{i \in J} v_i) \otimes (\bigotimes_{i \in K \setminus J} u_i) \in \bigotimes_{i \in K} V_i$ . Ainsi,

$$\bigotimes_{i \in K} \varphi_i(g_i) \left( \left( \bigotimes_{i \in J} v_i \right) \otimes \left( \bigotimes_{i \in K \setminus J} u_i \right) \right) = \left( \bigotimes_{i \in J} \varphi_i(g_i)(v_i) \right) \otimes \left( \bigotimes_{i \in K \setminus J} \varphi_i(g_i)(u_i) \right).$$

Cela découle de la définition de  $\psi_{J,K}$  que :

$$\psi_{J,K} \left( \bigotimes_{i \in K} \varphi_i(g_i) \right) \left( \bigotimes_{i \in J} v_i \right) = \bigotimes_{i \in J} \varphi_i(g_i)(v_i) = \bigotimes_{i \in J} \varphi_i(g_i) \left( \bigotimes_{i \in J} v_i \right).$$

Par conséquent, le diagramme ci-dessus commute. Ainsi, d'après théorème 1.3.2, il existe un unique homomorphisme de groupes :

$$\varphi_I = \varprojlim_{J \in \mathcal{F}(I)} \left( \bigotimes_{i \in J} \varphi_i \right) : \prod_{i \in I} G_i \longrightarrow \text{GL} \left( \bigotimes_{i \in I} V_i \right),$$

qui est une représentation linéaire du produit direct infini  $\prod_{i \in I} G_i$  des groupes  $G_i$  dans  $\bigotimes_{i \in I} V_i$ . Le théorème est donc démontré.

### Théorème 3.1.2.

Soit  $(G_i)_{i \in I}$  une famille non vide de groupes, et  $(\varphi_i)_{i \in I}$  une famille de représentations linéaires, où chaque

$$\varphi_i : G_i \rightarrow \text{GL}(V_i)$$

est une représentation du groupe  $G_i$  sur un espace vectoriel  $V_i$ . Alors, il existe une représentation linéaire naturelle sur le produit tensoriel des espaces  $V_i$ , définie par :

$$\varphi_I = \bigotimes_{i \in I} \varphi_i : \prod_{i \in I} G_i \longrightarrow \text{GL} \left( \bigotimes_{i \in I} V_i \right).$$

#### Preuve :

Soient  $J, K \in \mathcal{F}(I)$ , l'ensemble des parties finies de  $I$ , avec  $J \subseteq K$ . Le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i \in K} G_i & \xrightarrow{\varphi_K} & \text{GL} \left( \bigotimes_{i \in K} V_i \right) \\ \pi_{J,K} \downarrow & & \downarrow \psi_{J,K} \\ \prod_{i \in J} G_i & \xrightarrow{\varphi_J} & \text{GL} \left( \bigotimes_{i \in J} V_i \right) \end{array}$$

où  $\pi_{J,K}$  est la projection de  $\prod_{i \in K} G_i$  sur  $\prod_{i \in J} G_i$  et  $\psi_{J,K}$  la restriction de l'action de  $\bigotimes_{i \in K} \varphi_i(g_i)$  sur le sous-espace  $\bigotimes_{i \in J} V_i$ .

Soit  $(g_i)_{i \in K} \in \prod_{i \in K} G_i$ . Alors

$$\psi_{J,K} \circ \varphi_K((g_i)_{i \in K}) = \psi_{J,K} \left( \bigotimes_{i \in K} \varphi_i(g_i) \right),$$

et

$$\varphi_J \circ \pi_{J,K}((g_i)_{i \in K}) = \varphi_J((g_i)_{i \in J}) = \bigotimes_{i \in J} \varphi_i(g_i).$$

Soient  $\bigotimes_{i \in J} v_i \in \bigotimes_{i \in J} V_i$  et  $\bigotimes_{i \in K \setminus J} u_i \in \bigotimes_{i \in K \setminus J} V_i$ . Leur produit tensoriel est dans  $\bigotimes_{i \in K} V_i$  et on a :

$$\left( \bigotimes_{i \in K} \varphi_i(g_i) \right) \left( \left( \bigotimes_{i \in J} v_i \right) \otimes \left( \bigotimes_{i \in K \setminus J} u_i \right) \right) = \left( \bigotimes_{i \in J} \varphi_i(g_i)(v_i) \right) \otimes \left( \bigotimes_{i \in K \setminus J} \varphi_i(g_i)(u_i) \right).$$

Par définition de  $\psi_{J,K}$ , on en déduit que :

$$\psi_{J,K} \left( \bigotimes_{i \in K} \varphi_i(g_i) \right) \left( \bigotimes_{i \in J} v_i \right) = \bigotimes_{i \in J} \varphi_i(g_i)(v_i) = \varphi_J((g_i)_{i \in J}) \left( \bigotimes_{i \in J} v_i \right).$$

Par conséquent, le diagramme commute. Ainsi, d'après théorème 1.3.2, il existe un unique homomorphisme de groupes :

$$\varphi_I = \varprojlim_{J \in \mathcal{F}(I)} \left( \bigotimes_{i \in J} \varphi_i \right) : \prod_{i \in I} G_i \longrightarrow GL\left(\bigotimes_{i \in I} V_i\right),$$

qui est une représentation linéaire du produit direct infini  $\prod_{i \in I} G_i$  des groupes  $G_i$  dans  $\bigotimes_{i \in I} V_i$ .

### 3.1.2 Caractère d'une représentation linéaire d'un produit de groupes

Dans cette section, sauf mention contraire, tous les espaces vectoriels considérés seront supposés de dimension finie et définis sur  $\mathbb{C}$ .

#### Définition 3.1.3. [13]

Soient  $G_1$  et  $G_2$  des groupes, et  $\rho_1$  et  $\rho_2$  des représentations linéaires respectives de  $G_1$  et  $G_2$ , avec  $\chi_1$  et  $\chi_2$  les caractères associés à ces représentations. Le caractère  $\chi$  du produit tensoriel des représentations  $\rho_1 \otimes \rho_2$  de  $G_1 \times G_2$  est défini par la formule :

$$\chi(g_1, g_2) = \chi_1(g_1)\chi_2(g_2),$$

pour tout  $g_1 \in G_1$  et  $g_2 \in G_2$ .

#### Proposition 3.1.10.

Soit  $J$  un ensemble fini et  $\varphi_J$  la représentation définie par :

$$\varphi_J = \bigotimes_{i \in J} \varphi_i : \prod_{i \in J} G_i \longrightarrow GL\left(\bigotimes_{i \in J} V_i\right)$$

où  $\forall i \in J$ ,  $\varphi_i : G_i \rightarrow GL(V_i)$  est une représentation de chaque groupe  $G_i$  et  $V_i$  est l'espace vectoriel associé.

Le caractère  $\chi_{\varphi_J}$  de la représentation  $\varphi_J$  du produit direct fini  $\prod_{i \in J} G_i$  est donné par :

$$\chi_{\varphi_J}((g_i)_{i \in J}) = \prod_{i \in J} \chi_{\varphi_i}(g_i), \quad \forall (g_i)_{i \in J} \in \prod_{i \in J} G_i,$$

où  $\chi_{\varphi_i}$  est le caractère de la représentation  $\varphi_i$  du groupe  $G_i$ .

#### Proposition 3.1.11.

Soit  $\varphi_I$  la représentation définie par :

$$\varphi_I = \bigotimes_{i \in I} \varphi_i : \prod_{i \in I} G_i \longrightarrow GL\left(\bigotimes_{i \in I} V_i\right),$$

où  $\varphi_i : G_i \rightarrow GL(V_i)$  est une représentation linéaire de chaque groupe  $G_i$ , et  $V_i$  est l'espace vectoriel complexe associé.

À chaque représentation linéaire  $\varphi_i$ , associons le caractère (une fonction de  $i$ )

$$\chi_{\varphi_i} : G_i \rightarrow \mathbb{C}$$

défini pour tout  $g_i \in G_i$  par :

$$\chi_{\varphi_i}(g_i) := \text{Tr}(\varphi_i(g_i)).$$

Définissons la suite  $(a_i)_{i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ , dont chaque terme est donné par :

$$a_i := \chi_{\varphi_i}(g_i), \quad i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Considérons la suite des produits partiels associée à  $(a_i)_{i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ , définie par :

$$P_N = \prod_{i=1}^N \chi_{\varphi_i}(g_i), \quad N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Si la suite  $(P_N)_{N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$  converge, alors le caractère  $\chi_{\varphi_I}$  de la représentation tensorielle infinie  $\varphi_I$  est défini par :

$$\chi_{\varphi_I}((g_i)_{i \in I}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N \chi_{\varphi_i}(g_i) = \prod_{i \in I} \chi_{\varphi_i}(g_i).$$

Dans le cas contraire, le caractère  $\chi_{\varphi_I}$  n'est pas défini.

### 3.1.3 Irréductibilité des représentations d'un produit de groupes

Soient  $G_1, G_2$  deux groupes finis et  $V_1, V_2$  deux espaces vectoriels.

**Théorème 3.1.3.** [13]

- i) Si  $\rho^1 : G_1 \rightarrow \text{GL}(V_1)$  et  $\rho^2 : G_2 \rightarrow \text{GL}(V_2)$  sont des représentations irréductibles de  $G_1$  et  $G_2$  respectivement, alors le produit tensoriel  $\rho^1 \otimes \rho^2$  est une représentation irréductible de  $G_1 \times G_2$ .
- ii) Chaque représentation irréductible de  $G_1 \times G_2$  est isomorphe à un produit tensoriel  $\rho^1 \otimes \rho^2$ , où  $\rho^1$  est une représentation irréductible de  $G_1$  et  $\rho^2$  est une représentation irréductible de  $G_2$ .

**Lemme 3.**

Soit  $(G_i)_{i \in I}$  une famille non vide de groupes finis abéliens et  $(\varphi_i)_{i \in I}$  une famille de représentations linéaires, où chaque

$$\varphi_i : G_i \rightarrow \text{GL}(V_i)$$

est une représentation du groupe  $G_i$  sur un espace vectoriel  $V_i$ . Alors, toute représentation irréductible de  $G = \prod_{i \in I} G_i$  est de degré 1.

**Preuve :**

Étant donné que chaque  $G_i$  est un groupe abélien, leur produit  $G = \prod_{i \in I} G_i$  est également un groupe abélien. Il est connu que toute représentation irréductible d'un groupe abélien est de degré 1. Par conséquent, toute représentation irréductible de  $G = \prod_{i \in I} G_i$  est de degré 1.

**Théorème 3.1.4.**

Soit  $(G_i)_{i \in I}$  une famille non vide de groupes finis d'ordre premier chacun,  $(V_i)_{i \in I}$  une famille

non vide d'espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ , et

$$(\varphi_i : G_i \rightarrow \text{GL}(V_i))_{i \in I}$$

une famille de représentations linéaires Soit  $G = \prod_{i \in I} G_i$

- i) Si chaque  $G_i$  est un groupe cyclique, alors toute représentation irréductible de  $G$  est de degré 1.
- ii) Si chaque  $G_i$  est un groupe d'ordre premier, alors toute représentation irréductible de  $G$  est de degré 1.
- iii) Si presque toutes les représentations  $\varphi_i$  sont triviales, alors la représentation induite sur le produit tensoriel des espaces  $V_i$

$$\varphi_I = \bigotimes_{i \in I} \varphi_i : G = \prod_{i \in I} G_i \longrightarrow \text{GL} \left( \bigotimes_{i \in I} V_i \right),$$

est irréductible si et seulement si chaque représentation  $\varphi_i$  non triviale est irréductible ainsi que leur produit tensoriel.

**Preuve :**

- i) Chaque  $G_i$  est cyclique d'ordre fini, donc  $G_i$  est abélien. Le produit  $G = \prod_{i \in I} G_i$  est un groupe abélien. par le lemme 3, toute représentation irréductible de  $G$  est de degré 1.
- ii) Chaque groupe d'ordre premier est cyclique. Par i), il vient que toute représentation irréductible de  $G$  est de degré 1.

iii) **Sens direct**

Supposons que  $\varphi_I$  est irréductible.

**Montrons que chaque  $\varphi_i$  non triviale est irréductible :**

Supposons par l'absurde que pour un certain  $j \in I$ , la représentation non triviale  $\varphi_j$  ne soit pas irréductible. Cela signifie qu'il existe un sous-espace propre non trivial  $W_j \subset V_j$  qui est stable sous  $\varphi_j$ .

Soit  $W = \left( \bigotimes_{i \neq j} V_i \right) \otimes W_j \subset \bigotimes_{i \in I} V_i$ . Ce sous-espace est stable sous  $\varphi_I$ .

**En effet :**

Soit  $g = (g_i)_{i \in I} \in G = \prod_{i \in I} G_i$  et  $v = \bigotimes_{i \in I} v_i \in \bigotimes_{i \in I} V_i$ . On a

$$\varphi_I(g)(v) = \varphi_I((g_i)_{i \in I}) \left( \bigotimes_{i \in I} v_i \right) = \bigotimes_{i \in I} \varphi_i(g_i)(v_i).$$

Si  $v \in W$ , alors  $v = \left( \bigotimes_{i \neq j} v_i \right) \otimes w_j$  avec  $w_j \in W_j$ . Il vient que

$$\varphi_I(g)(v) = \left( \bigotimes_{i \neq j} \varphi_i(g_i)(v_i) \right) \otimes \varphi_j(g_j)(w_j).$$

Étant donné que  $W_j$  est stable sous  $\varphi_j$ , on a  $\varphi_j(g_j)(w_j) \in W_j$ . Par conséquent,

$$\varphi(g)(v) \in \left( \bigotimes_{i \neq j} V_i \right) \otimes W_j = W.$$

Ainsi,  $W$  est stable sous l'action de  $\varphi$ . Cette stabilité contredit l'irréductibilité de  $\varphi$ , car un sous-espace propre non trivial stable ne devrait pas exister dans une représentation irréductible. Ainsi, chaque  $\varphi_i$  non triviale doit être irréductible.

**Montrons que le produit tensoriel des représentations linéaires non triviales  $\varphi_i$  est irréductible :**

Soit  $J \subset I$  l'ensemble des indices correspondant aux représentations  $\varphi_i$  non triviales. On peut écrire :

$$\bigotimes_{i \in I} V_i = \left( \bigotimes_{i \in J} V_i \right) \otimes \left( \bigotimes_{i \notin J} V_i \right).$$

Puisque  $\bigotimes_{i \notin J} V_i$  est constitué de représentations triviales, il n'affecte pas l'irréductibilité. Par conséquent, l'irréductibilité de  $\varphi$  entraîne l'irréductibilité de  $\bigotimes_{i \in J} \varphi_i$ .

**Sens réciproque**

**Montrons que  $\varphi$  est irréductible. :**

Supposons que chaque  $\varphi_i$  non triviale est irréductible et que leur produit tensoriel est irréductible. Nous devons montrer que  $\varphi_I$  est irréductible. Considérons un sous-espace stable  $W \subset \bigotimes_{i \in I} V_i$ . Soit  $J$  une partie finie de  $I$ . Nous avons :

$$\bigotimes_{i \in I} V_i = \left( \bigotimes_{i \in J} V_i \right) \otimes \left( \bigotimes_{i \notin J} V_i \right).$$

Comme  $\bigotimes_{i \notin J} V_i$  est trivial, tout sous-espace stable sous  $\varphi_I$  est en réalité stable sous  $\bigotimes_{i \in J} \varphi_i$ . L'irréductibilité de  $\bigotimes_{i \in J} \varphi_i$  entraîne l'irréductibilité de  $\varphi_I$ . Par hypothèse,  $\bigotimes_{i \in J} \varphi_i$  est irréductible. Donc,  $W$  doit être soit  $\{0\}$ , soit  $\bigotimes_{i \in J} V_i$ . Cela montre que  $\varphi$  est irréductible.

### 3.2 Traité du cas de $\widehat{\mathbb{Z}}$ , le complété profini de $\mathbb{Z}$ .

Le groupe  $\widehat{\mathbb{Z}}$ , complété profini de  $\mathbb{Z}$ , est un exemple des groupes profinis. Dans cette section, nous analysons ses propriétés, ses représentations linéaires, ses caractères, et ses représentations irréductibles, en exploitant sa structure spécifique.

Dans cette section, sauf indication contraire, tous les espaces vectoriels seront supposés de dimension finie et définis sur  $\mathbb{C}$ .

**Définition 3.2.1. [16]**

Le complété profini  $\widehat{\mathbb{Z}}$  est la limite projective du système  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \varphi_{m,n})$ , où :

- i)  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est le groupe des classes d'équivalence modulo  $n$ , et
- ii)  $\varphi_{m,n} : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est la surjection canonique définie lorsque  $n$  divise  $m$ .

**Notation 3.2.1.**

$$\widehat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

### 3.2.1 Propriétés du complété profini $\widehat{\mathbb{Z}}$

- i)  $\widehat{\mathbb{Z}}$  est un groupe topologique compact et totalement discontinu [16].
- ii)  $\widehat{\mathbb{Z}}$  est isomorphe au produit des groupes  $\prod_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{Z}_p$ , où  $\mathbb{Z}_p$  est le groupe des entiers  $p$ -adiques, et  $\mathcal{P}$  est l'ensemble des nombres premiers [16].
- iii) L'homomorphisme canonique  $\mathbb{Z} \rightarrow \widehat{\mathbb{Z}}$  est injectif, et l'image de  $\mathbb{Z}$  est dense dans  $\widehat{\mathbb{Z}}$  pour la topologie profinie [16].

**Proposition 3.2.1.**

$(\widehat{\mathbb{Z}}, +)$  est un sous-groupe fermé du groupe produit  $(\prod_{n \geq 1} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$  avec  $+$  l'addition composante par composante définie par :  
pour tous  $x = (x_n)_{n \geq 1}$  et  $y = (y_n)_{n \geq 1}$  dans  $\widehat{\mathbb{Z}}$ , on a :

$$x + y = (x_n + y_n)_{n \geq 1},$$

où  $x_n + y_n$  est l'addition modulo  $n$ .

**Remarque 3.2.1. [5]**

- i) Chaque  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est un groupe abélien, car l'addition dans  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est commutative.
- ii)  $\widehat{\mathbb{Z}}$  est un sous-groupe d'un groupe abélien  $(\prod_{n \geq 1} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ . Donc  $\widehat{\mathbb{Z}}$  est un groupe abélien.

### 3.2.2 Représentations linéaires de $\widehat{\mathbb{Z}}$

**Proposition 3.2.2.**

Soit  $N$  un sous-ensemble fini de  $\mathbb{N}$  et soit  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{n \in N}$  une famille finie de groupes cycliques. Soit  $(V_n)_{n \in N}$  une famille finie non vide d'espaces vectoriels de dimension finie, et pour chaque  $n \in N$ , soit

$$\varphi_n : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \text{GL}(V_n)$$

une représentation linéaire.

Alors, on a la représentation linéaire :

$$\varphi_N = \bigotimes_{n \in N} \varphi_n : \prod_{n \in N} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \text{GL} \left( \bigotimes_{n \in N} V_n \right)$$

tel que :

$$\varphi_N((g_n)_{n \in N}) = \bigotimes_{n \in N} \varphi_n(g_n).$$



De plus, en passant à la limite inverse, on a la représentation linéaire sur un produit tensoriel infini

$$\varphi_{\mathbb{N}} = \bigotimes_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n : \varprojlim_{N \in \mathcal{F}(\mathbb{N})} \prod_{n \in N} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{GL} \left( \bigotimes_{n \in \mathbb{N}} V_n \right).$$

**Lemme 4.**

Si  $N, M \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$  avec  $\mathcal{F}(\mathbb{N})$  l'ensemble de partie finie de  $\mathbb{N}$  tel que  $M \subseteq N$ , alors nous avons une projection naturelle :

$$\pi_{N,M} : \prod_{n \in N} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \prod_{m \in M} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z},$$

donnée par la restriction des coordonnées aux indices  $M$ .

Ces projections sont compatibles, c'est-à-dire si  $L \subseteq M \subseteq N$ , on a :

$$\pi_{M,L} \circ \pi_{N,M} = \pi_{N,L}.$$

**Théorème 3.2.1.**

L'application

$$\Phi : \widehat{\mathbb{Z}} \rightarrow \varprojlim_{N \in \mathcal{F}(\mathbb{N})} \prod_{n \in N} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

définie par :

$$\Phi((x_n)_{n \geq 1}) = (x_N)_{N \in \mathcal{F}(\mathbb{N})}, \quad \text{où } x_N = (x_n)_{n \in N}$$

est un isomorphisme de groupes .

Ainsi, d'après les résultats précédents, nous obtenons la représentation linéaire suivante :

$$\varphi_{\mathbb{N}} : \widehat{\mathbb{Z}} = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{GL} \left( \bigotimes_{n \in \mathbb{N}} V_n \right).$$

### 3.2.3 Caractères de $\widehat{\mathbb{Z}}$

**Définition 3.2.2.**

Un caractère de  $\widehat{\mathbb{Z}}$  est un homomorphisme de groupe continu :

$$\chi : \widehat{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{C}^\times.$$

**Théorème 3.2.2. [16]**

L'ensemble des caractères continus de  $\widehat{\mathbb{Z}}$  est isomorphe à  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  via la dualité de Pontryagin :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\widehat{\mathbb{Z}}, \mathbb{C}^\times) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

**Proposition 3.2.3.**

- i) Toutes les représentations irréductibles de  $\widehat{\mathbb{Z}}$  sont de degré 1.
- ii) Soient  $\mathrm{Irr}(\widehat{\mathbb{Z}})$  l'ensemble des représentations irréductibles de  $\widehat{\mathbb{Z}}$  et  $\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\widehat{\mathbb{Z}}, \mathbb{C}^\times)$  l'ensemble de ses caractères continus. Il existe un isomorphisme :

$$\Phi : \mathrm{Irr}(\widehat{\mathbb{Z}}) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\widehat{\mathbb{Z}}, \mathbb{C}^\times),$$

- 
- iii)  $\widehat{\mathbb{Z}}$  possède une infinité non dénombrable de représentations irréductibles.
- iv) Les représentations irréductibles de  $\widehat{\mathbb{Z}}$  peuvent être interprétées comme des représentations sur chaque composante  $\mathbb{Z}_p$ .

---

# CONCLUSION

---

Parvenus au terme de notre travail, où il était principalement question pour nous d'étendre les représentations linéaires aux groupes infinis, il en ressort que nous avons construit les représentations linéaires des groupes infinis vus comme produits infinis de groupes finis. Les caractères de tels groupes sont construits comme des suites, dont l'existence est liée aux propriétés de convergence de ces suites. Nous avons donné quelques propriétés des représentations irréductibles de ces groupes. Enfin, nous avons étudié le cas particulier de  $\hat{\mathbb{Z}}$  qui est le complété profini de  $\mathbb{Z}$ . Ici, nous avons construit explicitement les représentations linéaires, calculé les caractères associés, et donné quelques propriétés d'irréductibilité.

Excellence M. le président du jury, très chers honorables membres du jury, à vos titres et grades respectifs, nous n'avons pas la prétention d'avoir effectué un travail parfait. Nous admettons que notre travail puisse comporter des imperfections et c'est pour cette raison que nous nous soumettons à vos différentes remarques et suggestions tout en vous rassurant de les prendre en considération pour améliorer le présent travail.

Merci pour votre aimable attention, J'en ai fini.

---

# Bibliographie

---

- [1] Alain Guichardet. *Tensor products of  $\mathbb{C}^*$ -Algebras, Part II. Infinite tensor products*. Lecture Notes Series N<sup>o</sup> 13, 1969.
- [2] Alistair SAVAGE. *Linear Algebra I*. 2018.
- [3] Bruno Deschamps. *Groupes profinis et théorie de Galois*. Clarendon Press, Oxford, 1998.
- [4] Christoph Schwarzweller. *The Chinese Remainder Theorem, its Proofs and its Generalizations in Mathematical Repositories*. Studies in Logic, Grammar and Rhetoric, volume 18, number 31, pages 103–119, Bialystok University Press, 2009.
- [5] Daniel Schaub. *Éléments de la Théorie de Groupes*. Cours de licence de Mathématiques, Université d'Angers, 1997/98.
- [6] David A. Harville. *Matrix Algebra from a Statistician's Perspective*. Springer, 1997, pages 49–53.
- [7] David Harari. *Représentations linéaires des groupes finis*.
- [8] David Renard and Laurent Schwartz. *Groupes et représentations*. École polytechnique, 2009.
- [9] Dragomir Z. Dokovic. *Pairs of Involutions in the General Linear Group*. Journal of Algebra, 100, 214–223, 1986.
- [10] Farhi, Bakir. *Polycopié d'Algèbre bilinéaire (Algèbre 4)*. National Higher School of Mathematics-Alger, 2024.
- [11] Hermann Minkowski. *Gesammelte Abhandlungen*. BG Teubner, volume 2, 1911.
- [12] Henri Cartan and Samuel Eilenberg. *Homological Algebra*. Volume 19, Princeton University Press, 1999.
- [13] Jean-Pierre Serre. *Représentation linéaire des groupes finis*. Hermann, Paris, 1971.
- [14] Kazimierz Kuratowski. *Topology : Volume I*. Academic Press, 2014.
- [15] Kevin Cheung et Mathieu Lemire. *Algèbre Linéaire et Applications*. 2018.
- [16] Luis Ribes and Pavel Zalesskii. *Profinite Groups*. Springer, Berlin, 2010.

- [17] Mark Bridger. *Limits : A New Approach to Real Analysis*. Springer, New York, 2001.
- [18] Marshall Hall. *The theory of groups*. Courier Dover Publications, 2018.
- [19] Michael David Fried and Moshe Jarden. Infinite Galois Theory and Profinite Groups. In *Field Arithmetic*, pages 1–19. Springer Nature Switzerland, Cham, 2023.
- [20] Nicolas BOURBAKI. *General topology : chapters 1–4*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [21] Pei, Dingyi, Salomaa, Arto, et Ding, Cunsheng. *Chinese remainder theorem : applications in computing, coding, cryptography*. World Scientific, 1996.
- [22] Rafael Guglielmetti *Groupes profinis et cohomologie galoisienne*. École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL), 2021.
- [23] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*. Springer, New York, 1971.
- [24] Serge Lang. *Algebra*. Volume 211, Springer Science & Business Media, 2012.
- [25] Sheldon Axler. *Linear algebra done right*. Springer Nature, 2024.
- [26] Sheldon Axler, Frederick Gehring , and Kenneth Alan Ribet. *Graduate Texts in Mathematics 111*. Springer, 2004.
- [27] Srishti D. Chatterji *Cours d'analyse*. Volume 1, EPFL Press, 1997.
- [28] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, 3rd edition, 1976.
- [29] Werner H. Greub *Linear Algebra*. Springer Science & Business Media, volume 23, 2012.
- [30] Wolfgang Herfort *Introduction to Profinite Groups*. Mimar Sinan Fine Arts University, 2012.