Isomorphisme de représentations et caractères

Théorème 1. *Soient $\rho, \rho' : G \to \mathrm{GL}(V), \mathrm{GL}(V')$ deux représentations complexes de dimension finie d'un groupe fini G. Alors :*

$$\rho \cong \rho' \quad \Leftrightarrow \quad \chi_\rho = \chi_{\rho'},$$

où χ_ρ et $\chi_{\rho'}$ sont les caractères des représentations ρ et ρ'.

Preuve :
Soient $\rho, \rho' : G \to \mathrm{GL}(V), \mathrm{GL}(V')$ deux représentations complexes de dimension finie d'un groupe fini G.
Sens direct :
Supposons que $\rho \cong \rho'$. Il existe alors un isomorphisme d'espaces vectoriels $T : V \to V'$ tel que :

$$T \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ T \quad \text{pour tout } g \in G.$$

Cela implique que $\rho(g)$ et $\rho'(g)$ sont semblables, donc ont la même trace :

$$\chi_\rho(g) = \mathrm{Tr}(\rho(g)) = \mathrm{Tr}(\rho'(g)) = \chi_{\rho'}(g),$$

pour tout $g \in G$. Ainsi, $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$.

Sens réciproque :
Supposons que $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$. par le théorème de Maschke, on peut écrire

$$\rho \cong \bigoplus_i n_i \rho_i, \quad \rho' \cong \bigoplus_i n_i' \rho_i,$$

où les ρ_i sont des représentations irréductibles non isomorphes deux à deux, et $n_i, n_i' \in \mathbb{N}$ sont les multiplicités.

Le caractère d'une somme directe est la somme des caractères :

$$\chi_\rho = \sum_i n_i \chi_i, \quad \chi_{\rho'} = \sum_i n_i' \chi_i,$$

où χ_i est le caractère de ρ_i.

Comme $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$ et que les caractères irréductibles χ_i sont linéairement indépendants dans l'espace des fonctions de classe, on en déduit que :

$$n_i = n_i' \quad \text{pour tout } i.$$

Ainsi, $\rho \cong \rho'$.

Théorème 2. *Le degré d'un caractère irréductible est égal à la dimension de la représentation irréductible dont il est le caractère.*

Démonstration. Soit G un groupe fini, et soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation irréductible complexe de G, où V est un espace vectoriel complexe de dimension finie.

On note $\chi_\rho : G \to \mathbb{C}$ le caractère associé à la représentation ρ. Le *degré* du caractère χ_ρ est défini par sa valeur en l'élément neutre du groupe :

$$\chi_\rho(1) = \chi_\rho(e),$$

où e est l'élément neutre de G.

Par définition du caractère :

$$\chi_\rho(g) = \mathrm{Tr}(\rho(g)) \quad \text{pour tout } g \in G.$$

En particulier, pour $g = e$, on a :

$$\chi_\rho(e) = \mathrm{Tr}(\rho(e)).$$

Or, comme ρ est une représentation, on a $\rho(e) = \mathrm{Id}_V$, donc :

$$\chi_\rho(e) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Id}_V) = \dim V.$$

Ainsi,

$$\chi_\rho(1) = \dim V.$$

Cela montre que le degré du caractère irréductible est égal à la dimension de la représentation irréductible.

□

Propriété 1. *Soit G un groupe. On note*

$$\widehat{G} := \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$$

l'ensemble des caractères de G, c'est-à-dire l'ensemble des morphismes de groupes de G dans le groupe multiplicatif des complexes non nuls $\mathbb{C}^\times$. Alors $\widehat{G}$ muni de la multiplication point par point :

$$(\chi_1 \cdot \chi_2)(g) := \chi_1(g) \cdot \chi_2(g), \quad \forall g \in G,$$

forme un groupe abélien.

Démonstration. **1. Fermeture.** Soient $\chi_1, \chi_2 \in \widehat{G}$, c'est-à-dire deux morphismes de groupes $G \to \mathbb{C}^\times$. On définit :

$$(\chi_1 \cdot \chi_2)(g) := \chi_1(g) \cdot \chi_2(g), \quad \forall g \in G.$$

Pour montrer que $\chi_1 \cdot \chi_2 \in \widehat{G}$, vérifions que c'est un morphisme :

$$(\chi_1 \cdot \chi_2)(gh) = \chi_1(gh)\chi_2(gh) = \chi_1(g)\chi_1(h) \cdot \chi_2(g)\chi_2(h) = (\chi_1(g)\chi_2(g))(\chi_1(h)\chi_2(h)) = (\chi_1 \cdot \chi_2)(g)$$

2. Associativité. La multiplication dans $\mathbb{C}^\times$ étant associative, on a pour $\chi_1, \chi_2, \chi_3 \in \widehat{G}$:

$$((\chi_1 \cdot \chi_2) \cdot \chi_3)(g) = (\chi_1(g) \cdot \chi_2(g)) \cdot \chi_3(g) = \chi_1(g) \cdot (\chi_2(g) \cdot \chi_3(g)) = (\chi_1 \cdot (\chi_2 \cdot \chi_3))(g).$$

3. Élément neutre. L'application constante $\mathbf{1}_G : G \to \mathbb{C}^\times$ définie par $\mathbf{1}_G(g) = 1$ pour tout $g \in G$ est un morphisme de groupes (trivialement). Elle vérifie :

$$(\chi \cdot \mathbf{1}_G)(g) = \chi(g) \cdot 1 = \chi(g), \quad \forall \chi \in \widehat{G},\ \forall g \in G.$$

4. Inverses. Pour $\chi \in \widehat{G}$, définissons $\chi^{-1} : G \to \mathbb{C}^\times$ par $\chi^{-1}(g) = \chi(g)^{-1}$. On a :

$$\chi^{-1}(gh) = (\chi(gh))^{-1} = (\chi(g)\chi(h))^{-1} = \chi(h)^{-1}\chi(g)^{-1} = \chi^{-1}(g)\chi^{-1}(h),$$

(car $\mathbb{C}^\times$ est abélien). Donc $\chi^{-1} \in \widehat{G}$ et :

$$(\chi \cdot \chi^{-1})(g) = \chi(g) \cdot \chi(g)^{-1} = 1 = \mathbf{1}_G(g).$$

5. Commutativité. Pour $\chi_1, \chi_2 \in \widehat{G}$, et $g \in G$, on a :

$$(\chi_1 \cdot \chi_2)(g) = \chi_1(g)\chi_2(g) = \chi_2(g)\chi_1(g) = (\chi_2 \cdot \chi_1)(g).$$

Ainsi, $\widehat{G}$ est un groupe abélien pour la multiplication point par point.

□

Théorème 3. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$. Alors il existe un isomorphisme canonique :*

$$E \otimes F \cong F \otimes E.$$

Démonstration. Nous construisons un isomorphisme linéaire entre $E \otimes F$ et $F \otimes E$, sans choisir de bases.

Étape 1 : Définition d'une application bilinéaire.

Considérons l'application :

$$\beta : E \times F \to F \otimes E, \quad (e, f) \mapsto f \otimes e.$$

Elle est bilinéaire car la multiplication tensorielle est linéaire en chaque variable. Par la propriété universelle du produit tensoriel, cette application induit un unique morphisme linéaire :

$$T : E \otimes F \to F \otimes E, \quad \text{défini par } T(e \otimes f) = f \otimes e.$$

Étape 2 : Construction de l'inverse.

De façon symétrique, on définit :

$$\gamma : F \times E \to E \otimes F, \quad (f, e) \mapsto e \otimes f,$$

qui est également bilinéaire, et induit un morphisme linéaire :

$$S : F \otimes E \to E \otimes F, \quad \text{défini par } S(f \otimes e) = e \otimes f.$$

Étape 3 : Vérification que T et S sont inverses.

Pour tout $e \in E$, $f \in F$:

$$(S \circ T)(e \otimes f) = S(f \otimes e) = e \otimes f,$$

$$(T \circ S)(f \otimes e) = T(e \otimes f) = f \otimes e.$$

Donc $S \circ T = \mathrm{id}_{E \otimes F}$ et $T \circ S = \mathrm{id}_{F \otimes E}$, ce qui prouve que T est un isomorphisme, avec inverse S.

Conclusion : L'application T est un isomorphisme canonique :

$$\boxed{E \otimes F \cong F \otimes E}.$$

□

Théorème 4. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$. Alors le couple $(E \otimes F, \otimes)$, constitué de l'espace tensoriel et de l'application bilinéaire canonique, est unique à isomorphisme près. Autrement dit, si (T, φ) est un autre couple avec $\varphi : E \times F \to T$ bilinéaire vérifiant la même propriété universelle, alors il existe un unique isomorphisme linéaire $u : E \otimes F \to T$ tel que :*

$$u(e \otimes f) = \varphi(e, f), \quad \forall (e, f) \in E \times F.$$

Démonstration. Par définition, le couple $(E \otimes F, \otimes)$ vérifie la propriété universelle suivante :

Pour tout espace vectoriel G et toute application bilinéaire $B : E \times F \to G$, il existe un unique morphisme linéaire $\tilde{B} : E \otimes F \to G$ tel que $\tilde{B}(e \otimes f) = B(e, f)$.

Soit maintenant (T, φ) un autre couple vérifiant la même propriété universelle. On applique cette propriété dans deux directions :

1. Application de la propriété universelle de $E \otimes F$ à $B = \varphi$.
Il existe un unique morphisme linéaire $u : E \otimes F \to T$ tel que :

$$u(e \otimes f) = \varphi(e, f), \quad \forall (e, f) \in E \times F.$$

2. Application de la propriété universelle de T à $B = \otimes$.
Il existe un unique morphisme linéaire $v : T \to E \otimes F$ tel que :

$$v(\varphi(e, f)) = e \otimes f, \quad \forall (e, f) \in E \times F.$$

3. Vérification que u et v sont inverses.
Pour tout $e \otimes f \in E \otimes F$, on a :

$$(v \circ u)(e \otimes f) = v(u(e \otimes f)) = v(\varphi(e, f)) = e \otimes f,$$

donc $v \circ u = \mathrm{id}_{E \otimes F}$.

Pour tout $\varphi(e, f) \in T$, on a :

$$(u \circ v)(\varphi(e, f)) = u(v(\varphi(e, f))) = u(e \otimes f) = \varphi(e, f),$$

donc $u \circ v = \mathrm{id}_T$.

Ainsi, u est un isomorphisme, et il est unique par unicité dans la propriété universelle.

□