Transformation des colimites en limites par un foncteur contravariant

1 Énoncé du résultat

Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur **contravariant** entre deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$. Alors, si X est une **colimite** dans $\mathcal{C}$, alors $F(X)$ est une **limite** dans $\mathcal{D}$, c'est-à-dire :

$$F(\varinjlim X_i) = \varprojlim F(X_i).$$

2 Définitions et preuve

2.1 Colimite dans $\mathcal{C}$

Un système inductif dans $\mathcal{C}$ est une famille (X_i, f_{ij}) où les objets X_i sont indexés par un ensemble ordonné I, et où les $f_{ij} : X_i \to X_j$ sont des morphismes satisfaisant :

- $f_{ii} = \mathrm{id}_{X_i}$ (identité),
- $f_{jk} \circ f_{ij} = f_{ik}$ pour $i \leq j \leq k$.

La colimite de ce système, notée $X = \varinjlim X_i$, est un objet X de $\mathcal{C}$ muni de morphismes $u_i : X_i \to X$ tels que :

1. Pour tout $i \leq j$, on a $u_j \circ f_{ij} = u_i$.
2. Si un autre objet Y et des morphismes $v_i : X_i \to Y$ satisfont $v_j \circ f_{ij} = v_i$, alors il existe un unique morphisme $v : X \to Y$ tel que $v \circ u_i = v_i$.

Autrement dit, X est **universel** parmi les objets recevant des morphismes compatibles depuis les X_i.

2.2 Application du foncteur contravariant

Puisque F est contravariant, il applique chaque morphisme $f_{ij} : X_i \to X_j$ à un morphisme inversé $F(f_{ij}) : F(X_j) \to F(X_i)$ dans $\mathcal{D}$. Ainsi, $(F(X_i), F(f_{ij}))$ forme un **système projectif** dans $\mathcal{D}$.

Nous voulons montrer que l'objet $F(X)$ est la **limite** de ce système projectif.

2.3 Limite dans $\mathcal{D}$

Un **système projectif** dans $\mathcal{D}$ est une famille (Y_i, g_{ij}) où les $g_{ij} : Y_j \to Y_i$ sont des morphismes satisfaisant :

- $g_{ii} = \mathrm{id}_{Y_i}$,
- $g_{ij} \circ g_{jk} = g_{ik}$ pour $i \leq j \leq k$.

Une **limite projective** de ce système, notée $Y = \varprojlim Y_i$, est un objet muni de morphismes $v_i : Y \to Y_i$ tels que :

1. Pour tout $i \leq j$, on a $g_{ij} \circ v_j = v_i$.
2. Si un autre objet Z et des morphismes $w_i : Z \to Y_i$ satisfont $g_{ij} \circ w_j = w_i$, alors il existe un unique morphisme $w : Z \to Y$ tel que $v_i \circ w = w_i$.

Autrement dit, Y est universel parmi les objets recevant des morphismes compatibles vers les Y_i.

2.4 Preuve que $F(X) = \varprojlim F(X_i)$

En appliquant F à la propriété universelle de la colimite $X = \varinjlim X_i$, on obtient :

- Pour chaque i, le morphisme $u_i : X_i \to X$ devient $F(u_i) : F(X) \to F(X_i)$.
- La compatibilité $u_j \circ f_{ij} = u_i$ devient $F(u_i) = F(f_{ij}) \circ F(u_j)$, ce qui signifie que les morphismes $F(u_i)$ forment une **famille compatible de morphismes** sur le système projectif $(F(X_i), F(f_{ij}))$.
- L'unicité du morphisme v dans la propriété universelle de X garantit que $F(X)$ est bien l'objet universel pour cette famille compatible.

Donc, $F(X)$ satisfait exactement la **définition d'une limite projective**, et on conclut que :

$$F(\varinjlim X_i) = \varprojlim F(X_i).$$

3 Conclusion

Un **foncteur contravariant** échange systématiquement **limites inductives** (colimites) et **limites projectives** (limites). Cette propriété découle directement de la définition des colimites et limites via leurs propriétés universelles.

Lemme 1. *Soit $(V_i)_{i\in I}$ une famille non vide de vecteurs de dimension finie sur le même corps F et soit $\bigotimes_{i\in I} V_i$ le produit tensoriel infini des espaces vectoriels $(V_i)_{i\in I}$ où chaque V_i $(i \in I)$ est un espace vectoriel non nul. Soit $\mathcal{F}(I)$ l'ensemble des sous-ensembles finis de I. Alors,*

$$\varprojlim_{J\in\mathcal{F}(I)} GL\left(\bigotimes_{i\in J} V_i\right) = GL\left(\varinjlim_{J\in\mathcal{F}(I)} \left(\bigotimes_{i\in J} V_i\right)\right)$$