Représentation linéaire, caractère et représentations linéaires irréductibles d'un groupe infini.

DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES - INFORMATIQUE
Mémoire présenté par : SOUNKOUA Roger
Sous la direction du
Dr. Gilbert MANTIKA
(Chargée de Cours, UMa, FS)
Pr. Dieukam
(Maître de Conférences, UMa, FS)

30 juin 2025

Introduction

La théorie des représentations linéaires des groupes est un outil fondamental permettant de représenter les éléments d'un groupe abstrait par des matrices inversibles sur un corps donné. Cette approche, traduisant les problèmes d'algèbre abstraite complexes en des problèmes d'algèbre linéaire plus accessibles, repose sur la notion de représentation linéaire. Etant donné un corps $\mathbb{K}$, une représentation $\mathbb{K}$-linéaire d'un groupe fini G est un homomorphisme de groupes

$$\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$$

où V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathrm{GL}(V)$ désigne le groupe des applications linéaires bijectives de V sur lui-même. La théorie des représentations linéaires des groupes finis a été développée pour la première fois par le mathématicien allemand Ferdinand Georg Frobenius en 1897. Il a introduit la notion de représentation linéaire des groupse finis et a jetté les bases sur la théorie des caractères de ces groupes. Ces travaux a ete approfondi par le mathématicien francais Jean-Pierre Serre où il a formalisé cette théorie dans son livre intitulé **"Représentations linéaires des groupes finis"** publié en 1968. Ces deux auteurs qu'on vient de voir ont travaille dans le cadre de groupes finis et il n y a pas de resultats recents accessibles generalisant cela au groupe infinis. D'où notre thème : **représentation linéaires, caractères et représentations linéaires irréductibles d'un groupe infini.** Le but principal de ce projet est d'étendre les représentations linéaires aux groupes infinis. Pour atteindre les objectifs de ce travail, nous allons suivre cette démarche dans la presentation :

Sommaire

Définition d'un Groupe

Definition

Un groupe est un couple $(G, *)$ où G est un ensemble non vide et

$$* : G \times G \longrightarrow G$$

$$(x, y) \longmapsto x * y$$

une loi vérifiant :

i) $*$ est associative, c'est-à-dire, $\forall x, y, z \in G,\ (x * y) * z = x * (y * z)$;

ii) G possède un élément neutre pour la loi $*$, c'est-à-dire, $\exists e \in G$ tel que $\forall x \in G,\ x * e = e * x = x$;

iii) Tout élément de G est inversible (ou possède un élément symétrique) dans G, c'est-à-dire, $\forall x \in G,\ \exists y \in G$ tel que $x * y = y * x = e$.

Definition

Si $(G, *)$ est un groupe tel que la loi $*$ satisfasse à la propriété

$$\forall x, y \in G,\ x * y = y * x,$$

le groupe $(G, *)$ est dit **commutatif** ou encore **abélien**.

Definition

Soit $(G_i, \circ_i)$ une famille de groupes finis indexée par l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$, où $n \in \mathbb{N}^*$. Le *produit direct fini* de cette famille est un groupe $\left(\prod_{i=1}^{n} G_i, \circ\right)$, défini par les propriétés suivantes :

i) L'ensemble sous-jacent est constitué des familles indexées par $\{1, 2, \ldots, n\}$:

$$\prod_{i=1}^{n} G_i = \{(g_i)_{i=1}^{n} \mid g_i \in G_i \text{ pour tout } i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}.$$

ii) La loi de composition $\circ$ est définie composante par composante :

$$(g_i)_{i=1}^{n} \circ (g_i')_{i=1}^{n} = (g_i \circ_i g_i')_{i=1}^{n},$$

où $\circ_i$ désigne l'opération du groupe G_i pour chaque $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

iii) L'élément neutre de $\prod_{i=1}^{n} G_i$ est la famille $(e_i)_{i=1}^{n}$, où e_i est l'élément neutre de G_i pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

iv) L'inverse d'une famille $(g_i)_{i=1}^{n} \in \prod_{i=1}^{n} G_i$ est donné par :

$$(g_i)_{i=1}^{n}{}^{-1} = (g_i^{-1})_{i=1}^{n},$$

où g_i^{-1} est l'inverse de g_i dans G_i pour chaque $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Remarque

Soit $(G_i, \circ_i)$ *une famille de groupes finis indexée par* $i = 1, \ldots, n$*. Le cardinal du produit direct de ces groupes vérifie la relation suivante :*

$$\left|\prod_{i=1}^{n} G_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |G_i|,$$

où $|G_i|$ *désigne le cardinal du groupe* G_i*.*

Propriété

Si chaque $(G_i, \circ_i)$ *est un groupe abélien, alors* $\left(\prod_{i=1}^{n} G_i, \circ\right)$ *est aussi un groupe abélien.*

Definition

Soient $(G, \cdot)$ et $(G', *)$ deux groupes. Un homomorphisme de groupes de G dans G' est une application $f : G \to G'$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in G \times G, \quad f(x \cdot y) = f(x) * f(y).$$

Definition

Une catégorie $\mathcal{C}$ consiste en les données suivantes :

i) Une classe $|\mathcal{C}|$, dont les éléments sont appelés objets de $\mathcal{C}$;

ii) À chaque couple d'objets (X, Y) de $\mathcal{C}$, est associé un ensemble $\mathcal{C}(X, Y)$ (ou $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$), dont les éléments sont appelés morphismes (ou flèches) de X dans Y ;

iii) À chaque triplet (X, Y, Z) d'objets de $\mathcal{C}$, une application (appelée application de composition)
$$\mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \to \mathcal{C}(X, Z), \quad (f, g) \mapsto g \circ f;$$

iv) À chaque objet $X \in \mathcal{C}$, est associé un élément $1_X \in \mathcal{C}(X, X)$ appelé morphisme d'identité de X.

Ces données vérifient les axiomes suivants :

Associativité de la composition : si $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$ sont des morphismes dans $\mathcal{C}$, alors on a
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Neutralité de l'identité : pour tous $X, Y \in |\mathcal{C}|$, et pour tout $f \in \mathcal{C}(X, Y)$, on a $f \circ 1_X = f \quad \text{et} \quad 1_Y \circ f = f$.

Définition d'un foncteur contravariant

Definition

Un *foncteur contravariant* est une loi de passage d'une catégorie $\mathcal{C}$ à une catégorie $\mathcal{D}$, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, qui satisfait les propriétés suivantes :

i) À tout objet C de $\mathcal{C}$ associe un objet $F(C)$ de $\mathcal{D}$,

ii) À tout morphisme $X \xrightarrow{f} Y$ de $\mathcal{C}$ associe un morphisme $F(Y) \xrightarrow{F(f)} F(X)$ de $\mathcal{D}$, et les conditions suivantes doivent être vérifiées :

$F(1_X) = 1_{F(X)}$ pour tout objet X,

$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ pour tous morphismes $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$.

Definition

Un ensemble $(I, \leq)$ est dit ordonné filtrant si $(I, \leq)$ est un ensemble partiellement ordonné et si pour tous $i, j \in I$, il existe $k \in I$ vérifiant $i \leq k$ et $j \leq k$.

Definition

Soit $(I, \leq)$ un ensemble ordonné filtrant. Un système inductif de groupes sur I est la donnée d'un couple $(X_i, \phi_{ij})_{i,j \in I}$ où X_i sont les groupes et les $\phi_{ij} : X_i \to X_j$ (pour $i \leq j$) sont des homomorphismes de groupes, vérifiant :

i) Pour tout $i \in I$, $\phi_{ii} = \mathrm{Id}_{X_i}$;

ii) Pour tous $(i, j, k) \in I^3$, $i \leq j \leq k \Rightarrow \phi_{jk} \circ \phi_{ij} = \phi_{ik}$.

Ce qui se traduit par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[rr, "\phi_{ij}"] \arrow[dr, "\phi_{ik}"'] & & X_j \arrow[dl, "\phi_{jk}"] \\ & X_k & \end{tikzcd}$$

Definition

Soit X un groupe et (X_i, ϕ_{ij}) un système inductif de groupes. La famille $(X, \phi_i : X_i \to X)$ est dite compatible avec (X_i, ϕ_{ij}) si pour tous $i, j \in I$ tels que $i \leq j$, on a $\phi_i = \phi_j \circ \phi_{ij}$. Ce qui est illustré par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "\phi_{ij}"] \arrow[dr, "\phi_i"'] & X_j \arrow[d, "\phi_j"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Definition

Soit (X_i, ϕ_{ij}) un système inductif de groupes. La limite inductive ou limite directe, lorsqu'elle existe, est une famille compatible $(X, \phi_i : X_i \to X)$ avec (X_i, ϕ_{ij}) vérifiant la propriété universelle (PU) suivante :

> *Pour toute autre famille $(X, \psi_i)_{i \in I}$ compatible avec (X_i, ϕ_{ij}), il existe un unique homomorphisme de groupes $u : X \to Y$ tel que le diagramme suivant soit commutatif pour tous $i \leq j$:*

$$\begin{tikzcd}
X_i \arrow[rr, "\phi_{ij}"] \arrow[dr, "\phi_i"] \arrow[ddr, "\psi_i"'] & & X_j \arrow[dl, "\phi_j"'] \arrow[ddl, "\psi_j"] \\
& X \arrow[d, dashed, "u"] & \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

Proposition

Notation

La limite inductive $(X, \phi_i)_{i \in I}$ *d'un système inductif* $(X_i, \phi_{ij})_{j \in I}$ *est notée* $X = \varinjlim X_i$.

Soit $(I, \leq)$ un ensemble ordonné filtrant.

Definition

Un système projectif de groupes sur $(I, \leq)$ est un couple $(X_i, \phi_{ij})_{i,j \in I}$ où les X_i sont les groupes et les $\phi_{ij} : X_j \to X_i$ $(i \leq j)$ sont les homomorphismes de groupes vérifiant :

i) $\phi_{ii} = \mathrm{Id}_{X_i}$ pour tout $i \in I$;

ii) pour tout $(i, j, k) \in I^3$ tels que $i \leq j \leq k$, on a $\phi_{ik} = \phi_{ij} \circ \phi_{jk}$.

Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
X_k \arrow[rr, "\phi_{jk}"] \arrow[dr, "\phi_{ik}"'] & & X_j \arrow[dl, "\phi_{ij}"] \\
& X_i &
\end{tikzcd}$$

Definition

Soient X un groupe et $(X_i, \phi_{ij})_{i,j\in I}$ un système projectif de groupes. La famille de homomorphismes $(\phi_i : X \to X_i)_{i\in I}$, qu'on note (X, ϕ_i), est dite compatible avec le système projectif $(X_i, \phi_{ij})_{i,j\in I}$ si pour tous $i, j \in I$ tels que $i \leq j$, on a : $\phi_{ij} \circ \phi_j = \phi_i$. Ce qui se traduit par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\phi_j"] \arrow[dr, "\phi_i"'] & & X_j \arrow[dl, "\phi_{ij}"] \\ & X_i & \end{tikzcd}$$

Definition

Soit $(X_i, \phi_{ij})_{i,j\in I}$ un système projectif de groupes. La limite projective ou limite inverse du système projectif $(X_i, \phi_{ij})_{i,j\in I}$ est une famille $(X, (\phi_i)_{i\in I})$ de homomorphismes compatibles avec $(X_i, \phi_{ij})_{i,j\in I}$, vérifiant la propriété universelle suivante : Si $(\psi_i : Y \to X_i)_{i\in I}$ $(Y \in |\mathcal{C}|)$ est une famille de morphismes compatibles, alors il existe un unique morphisme $\psi : Y \to X$ tel que le diagramme suivant commute pour tous $i \leq j$:

$$\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[d, dashed, "\psi"] \arrow[ddl, "\psi_j"'] \arrow[ddr, "\psi_i"] & \\
 & X \arrow[dl, "\phi_j"] \arrow[dr, "\phi_i"'] & \\
X_j \arrow[rr, "\phi_{ij}"'] & & X_i
\end{tikzcd}$$

$$\psi_i = \phi_i \circ \psi$$

$$\psi_j = \phi_j \circ \psi$$

Proposition sur le Complété Profini

Proposition (Unicité de la limite projective)

Si une limite projective d'un système projectif existe, elle est unique à isomorphisme près.

Notation

Une telle limite est notée $\varprojlim_I X_i$ *ou* $\varprojlim_{i \in I} X_i$.

Definition (Groupe profini)

La limite projective d'un système projectif de groupes finis est appelée groupe profini.

Proposition

Le complété profini d'un groupe est unique à isomorphisme près, c'est-à-dire si $(\widehat{G}_1, j_1)$ *et* $(\widehat{G}_2, j_2)$ *sont deux complétés de* G, *alors il existe un isomorphisme* $\widehat{\alpha} : \widehat{G}_1 \to \widehat{G}_2$ *tel que* $\widehat{\alpha} j_1 = j_2$.

Theorem

Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur contravariant entre deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$. Alors, l'image d'une limite inductive par le foncteur F est une limite projective.

1. Départ : système inductif (X_i, f_{ij}) dans $\mathcal{C}$

   $f_{ii} = \mathrm{id}_{X_i}$

   $f_{jk} \circ f_{ij} = f_{ik}$

   $X = \varinjlim X_i$, avec $u_i : X_i \to X$

Par définition de la limite inductive $X = \varinjlim X_i$, on a :

   Pour toute famille compatible $v_i : X_i \to Y$ dans $\mathcal{C}$, c'est-à-dire $v_j \circ f_{ij} = v_i$,

   Il existe un unique morphisme $v : X \to Y$ tel que $v \circ u_i = v_i$

2. Application du foncteur contravariant F

   $f_{ij} : X_i \to X_j \Rightarrow F(f_{ij}) : F(X_j) \to F(X_i)$

   On obtient un système projectif dans $\mathcal{D}$ et

3. Famille compatible $(F(X), F(u_i))$

   $u_j \circ f_{ij} = u_i \Rightarrow F(f_{ij}) \circ F(u_j) = F(u_i)$

4. Propriété universelle

Par la propriété universelle dans $\mathcal{C}$, il existe $v : X \to Y$ tel que $v \circ u_i = v_i$

En appliquant F, on obtient un morphisme $F(v) : F(Y) \to F(X)$ tel que :

$$F(u_i) \circ F(v) = F(v_i)$$

Conclusion : $F(X)$ satisfait la définition d'une limite projective, donc :

$$F\left(\varinjlim X_i\right) = \varprojlim F(X_i)$$

Definition

Soit $\mathbb{K}$ un corps. Une représentation $\mathbb{K}$-linéaire d'un groupe fini G est un homomorphisme de groupes

$$\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$$

où V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathrm{GL}(V)$ est le groupe des applications linéaires bijectives de V sur lui-même.

Remarque

Si V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, on dit que n est le degré de la représentation. De plus, en choisissant une base de V, le groupe $\mathrm{GL}(V)$ est isomorphe au groupe

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathrm{M}(n, \mathbb{K}) \mid \det(A) \neq 0\},$$

où $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ est le groupe des matrices inversibles de taille $n \times n$ équipées de la multiplication des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$, et $\det(A)$ désigne le déterminant de la matrice A.

Definition

[?] Soient $(V,\rho)_G$ et $(W,\psi)_G$ deux représentations linéaires. Un opérateur d'entrelacement, ou morphisme de représentations, est une application linéaire $\alpha : V \to W$ telle que

$$\alpha \circ \rho(g) = \psi(g) \circ \alpha, \quad \forall g \in G.$$

On dit que α est équivariante. Lorsque $\alpha : V \to W$ est un isomorphisme, on dit que les représentations $(V,\varphi)_G$ et $(W,\psi)_G$ sont isomorphes.

Definition

Soit W un sous-espace vectoriel de V et G un groupe. On dit que W est stable (ou invariant) sous l'action de G, ou encore G-stable, si pour tout $g \in G$ et tout $w \in W$, on a $\rho_g(w) \in W$.

Definition

Une sous-représentation de $(V,\rho)_G$ est la restriction $\rho_W : G \to \mathrm{GL}(W)$ où W est stable sous G. Elle est définie par

$$\rho_W(g) = \rho(g)|_W, \quad \forall g \in G.$$

Proposition

Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation linéaire sur G telle que W soit un sous-espace vectoriel de V stable sous l'action de G. Alors, l'application restreinte $\rho_W : G \to \mathrm{GL}(W)$ définie par $\rho_W(g) = \rho(g)|_W$ pour tout $g \in G$ est un homomorphisme de groupes.

Lemma

Soient $\varphi : G \to \mathrm{GL}(V_1)$ et $\psi : G \to \mathrm{GL}(V_2)$ deux représentations linéaires de G. Soit $f : V_1 \to V_2$ un morphisme de représentations linéaires. Alors :

- *i)* $\rho_{\mathsf{ker}(f)} : G \to \mathrm{GL}(\mathsf{ker}(f))$ *est une sous-représentation linéaire de* $\varphi : G \to \mathrm{GL}(V_1)$ *;*
- *ii) L'image* $\mathrm{im}(f)$, $\rho_{\mathrm{im}(f)} : G \to \mathrm{GL}(\mathrm{im}(f))$, *est une sous-représentation linéaire de* $\psi : G \to \mathrm{GL}(V_2)$ *;*
- *iii)* $V_1/\,\mathsf{ker}(f) \cong \mathrm{im}(f)$ *au sens de représentations linéaires de* G.

Definition

Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation linéaire sur G. Le caractère de V, noté χ_V, est la fonction

$$\chi_V : G \to \mathbb{C}$$

définie pour tout $g \in G$ par

$$\chi_V(g) := \mathrm{Tr}(\rho(g)),$$

où Tr désigne la trace.

Theorem

Soit $(\rho, V)_G$ une représentation linéaire. On peut munir V d'un produit hermitien $(.,.)_V$ qui rend la représentation linéaire $(\rho, V)_G$ unitaire.

Proposition

Soient $\rho_V : G \to \mathrm{GL}(V)$ *et* $\rho_W : G \to \mathrm{GL}(W)$ *deux représentations linéaires sur* G *de degrés* n *et* m $(n, m \in \mathbb{N}^*)$*, et de caractères* χ_V *et* χ_W *respectivement. On a :*

i) $\chi_V(1) = \dim V$ *;*

ii) $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$ *;*

iii) $\chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$ *pour* $\forall g \in G$.

Theorem (Frobenius)

Pour tout groupe fini G*, le nombre de représentations irréductibles non-isomorphes deux à deux de* G *est exactement égal au nombre* $c(G)$ *de classes de conjugaison de* G.

Proposition

Deux représentations d'un groupe G *sont isomorphes si et seulement si elles ont le même caractère.*

Definition

On dit qu'une représentation linéaire $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ est *irréductible* si l'espace vectoriel V n'est pas réduit à $\{0\}$ et si V ne possède aucun sous-espace invariant par ρ autre que $\{0\}$ et V.

Theorem

Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation linéaire de G dans V et soit W un sous-espace vectoriel de V stable sous G. Alors, il existe un complément W^0 de W dans V qui est stable sous G.

Theorem (Théorème de Maschke)

Toute représentation linéaire $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ sur G dans un espace vectoriel complexe de dimension finie se décompose en somme directe de représentations irréductibles.

Theorem (Lemme de Schur)

Soient $\rho_1 : G \to V_1$ *et* $\rho_2 : G \to V_2$ *deux représentations irréductibles de* G.
Soit $f : V_1 \to V_2$ *une application linéaire vérifiant*

$$\forall g \in G, \quad f \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ f.$$

On a les propriétés suivantes :

(i) Si ρ_1 *et* ρ_2 *ne sont pas isomorphes, alors* $f = 0$.

(ii) Si $V_1 = V_2$ *et* $\rho_1 = \rho_2$, *alors* f *est une homothétie.*

Corollary

Soit $h : V \to W$ *une application linéaire. Posons :*

$$h_0 = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} (\rho_W(g))^{-1} \circ h \circ \rho_V(g),$$

où $N = \mathrm{Card}(G)$. *Alors :*

i) Si ρ_V *et* ρ_W *ne sont pas isomorphes, on a* $h_0 = 0$.

ii) Si $V = W$ *et* $\rho_V = \rho_W$, *alors* h_0 *est une homothétie de rapport* $\frac{1}{n} Tr(h)$, *où* $n = \dim(V)$.

Remarque

Une traduction matricielle du corollaire précédent est : si φ et ψ sont des fonctions $G \to \mathbb{C}$, alors

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \varphi(t^{-1})\psi(t) = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \varphi(t)\psi(t^{-1}). \tag{1}$$

Proposition

Pour $g \in G$, soient $(r_{i_1 j_1}(g))$ et $(u_{i_2 j_2}(g))$ les matrices respectives de $\rho_V(g)$ et $\rho_W(g)$ dans les bases $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ de V_1, V_2. Alors :

- i) *Si ρ_V et ρ_W ne sont pas isomorphes, on a $\langle u_{i_2 j_2}, r_{j_1 i_1} \rangle = 0$ pour tous indices i_1, j_1, i_2, j_2.*
- ii) *Si $V_1 = V_2$ est de dimension n et $\rho_V = \rho_W$ (auquel cas on prend $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$ et on a $r_{ij} = u_{ij}$ pour tous indices i, j), alors $\langle r_{i_2 j_2}, r_{j_1 i_1} \rangle = 0$ si $i_1 \neq i_2$ ou $j_1 \neq j_2$, et $\langle r_{ij}, r_{ji} \rangle = \frac{1}{n}$ pour tous indices i, j.*

Théorème

i) *Soit* χ *le caractère d'une représentation irréductible* ρ *de* G. *Alors,* $(\chi|\chi) = 1$.

ii) *Soient* χ_1 *et* χ_2 *les caractères de deux représentations irréductibles non isomorphes* ρ_1 *et* ρ_2. *Alors,* $(\chi_1|\chi_2) = 0$.

Théorème

Soit G *un groupe. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) G *est abélien.*

(ii) *Toutes les représentations irréductibles de* G *sont de degré 1.*

Convention générale

Dans la suite, sauf mention contraire, tous les espaces vectoriels seront supposés de dimension finie et définis sur un corps commutatif $\mathbb{K}$, où :

$$\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}.$$

Propriété Universelle

Soient $V_1, V_2, \ldots, V_p$ et T des espaces vectoriels, et

$$\otimes : V_1 \times \cdots \times V_p \to T$$

une application p-linéaire. Cette application a la **propriété universelle** si :

i) Les vecteurs $x_1 \otimes \cdots \otimes x_p$, pour $x_i \in V_i$, engendrent T.

ii) Toute application p-linéaire $\varphi : V_1 \times \cdots \times V_p \to H$ (où H est un espace vectoriel quelconque) s'écrit :

$$\varphi(x_1, \ldots, x_p) = f(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p)$$

avec $f : T \to H$ linéaire.

Definition

Le **produit tensoriel** des espaces $V_1, V_2, \ldots, V_p$ est un couple $(T, \otimes)$ tel que :

$$\otimes : V_1 \times \cdots \times V_p \to T$$

est une application p-linéaire vérifiant la propriété universelle.
L'espace T est noté :

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_p.$$

Propriété

Le couple $(T, \otimes)$ est **unique à isomorphisme près**.

Definition

Si $V_1, V_2, \ldots, V_p$ sont des espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$, alors la dimension du produit tensoriel $V_1 \otimes \cdots \otimes V_p$ est donnée par :

$$\dim(V_1 \otimes \cdots \otimes V_p) = \prod_{i=1}^{p} \dim(V_i).$$

Proposition

Soit $(V_i)_{i\in I}$ *une famille non vide d'espaces vectoriels sur un même corps commutatif* $\mathbb{K}$. *Soit* $(u_i)_{i\in I}$ *une famille non vide de vecteurs non nuls tels que, pour tout* $i \in I$, *le vecteur* u_i *appartienne à* V_i. *Pour tous sous-ensembles finis* J *et* K *de* I *tels que* $J \subseteq K$, *considérons l'application linéaire injective*

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{J,K} : & \bigotimes\limits_{i\in J} V_i & \longrightarrow & \bigotimes\limits_{i\in K} V_i \\ & \bigotimes\limits_{i\in J} v_i & \longmapsto & \bigotimes\limits_{i\in J} v_i \otimes \Big(\bigotimes\limits_{i\in K\setminus J} u_i\Big). \end{array}$$

Soit $\mathcal{F}(I)$ *l'ensemble de tous les sous-ensembles finis de* I.

i) *Le système* $\Big(\bigotimes\limits_{i\in J} V_i, \varphi_{J,K}\Big)_{J\in\mathcal{F}(I)}$ *est inductif.*

ii) *La limite inductive du système inductif* $\Big(\bigotimes\limits_{i\in J} V_i, \varphi_{J,K}\Big)_{J\in\mathcal{F}(I)}$, *notée* $\bigotimes\limits_{i\in I} V_i$, *est le produit tensoriel infini des espaces vectoriels* $(V_i)_{i\in I}$.

Proposition

Soit $(V_i)_{i\in I}$ une famille non vide d'espaces vectoriels sur un même corps commutatif $\mathbb{K}$. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille non vide de vecteurs non nuls tels que, pour tout $i \in I$, le vecteur u_i appartienne à V_i. Pour tous sous-ensembles finis J et K de I tels que $J \subseteq K$, l'application

$$\begin{array}{rcl} \psi_{J,K} : GL(\bigotimes_{i\in K} V_i) & \longrightarrow & GL(\bigotimes_{i\in J} V_i) \\ f & \longmapsto & \psi_{J,K}(f) = f_{J,K} \end{array}$$

avec $f_{J,K}$ défini comme suit : pour tout $f \in GL(\bigotimes_{i\in K} V_i)$ et tout $\bigotimes_{i\in J} v_i \in \bigotimes_{i\in J} V_i$,

$$f_{J,K}(\bigotimes_{i\in J} v_i) = \bigotimes_{i\in J} v_i' \text{ si } f((\bigotimes_{i\in J} v_i) \otimes (\bigotimes_{i\in K\setminus J} t_i)) = (\bigotimes_{i\in J} v_i') \otimes (\bigotimes_{i\in K\setminus J} v_i') = \bigotimes_{i\in K} v_i',$$

pour un certain $\bigotimes_{i\in K\setminus J} t_i \in \bigotimes_{i\in K\setminus J} V_i$, est un homomorphisme de groupes.

Proposition

Le système $\left(GL(\bigotimes_{i\in J} V_i), \psi_{J,K}\right)$ *est projectif, avec pour limite projective*

$$\varprojlim_{J\in\mathcal{F}(I)} GL\left(\bigotimes_{i\in J} V_i\right),$$

où $\mathcal{F}(I)$ *désigne l'ensemble des sous-ensembles finis de* I.

Esquisse de la preuve

Pour chaque $J \in \mathcal{F}(I)$, on considère le groupe :

$$GL\left(\bigotimes_{i \in J} V_i\right)$$

Pour tout $J \subseteq K$, on définit un morphisme :

$$\psi_{J,K} : GL\left(\bigotimes_{i \in K} V_i\right) \longrightarrow GL\left(\bigotimes_{i \in J} V_i\right)$$

On vérifie deux propriétés fondamentales :

- Identité : $\psi_{J,J} = \mathrm{id}$
- Compatibilité : $\psi_{J,K} \circ \psi_{K,L} = \psi_{J,L}$ pour $J \subseteq K \subseteq L$

On obtient un système projectif :

$$\left(GL\left(\bigotimes_{i \in J} V_i\right), \ \psi_{J,K}\right)$$

Comme **Grp** est complète, la limite projective existe :

$$\varprojlim_{J \in \mathcal{F}(I)} GL\left(\bigotimes_{i \in J} V_i\right)$$

Proposition

Soit la correspondance $GL : Vect_{\otimes V_i} \to Grp$ entre les catégories $Vect_{\otimes V_i}$ et Grp où Grp désigne la catégorie des groupes. GL est un foncteur contravariant.

Proposition

Soit J un sous-ensemble fini d'un ensemble I et $(G_i)_{i\in J}$ une famille finie de groupes finis. Soit $(V_i)_{i\in J}$ une famille finie d'espaces vectoriels de dimension finie sur le même corps F et pour chaque $i \in J$, soit $\varphi_i : G_i \to GL(V_i)$ une représentation linéaire de G_i dans V_i. Alors, le produit tensoriel $\varphi_J = \bigotimes_{i\in J} \varphi_i$ des applications $(\varphi_i)_{i\in J}$ défini par :

$$\begin{array}{rcl} \varphi_J = \bigotimes_{i\in J} \varphi_i : \prod_{i\in J} G_i & \longrightarrow & GL(\bigotimes_{i\in J} V_i) \\ (g_i)_{i\in J} & \longmapsto & \bigotimes_{i\in J} \varphi_i((g_i)_{i\in J}) = \bigotimes_{i\in J} \varphi_i(g_i) \end{array}$$

avec

$$\begin{array}{rcl} \bigotimes_{i\in J} \varphi_i(g_i) : \bigotimes_{i\in J} V_i & \longrightarrow & \bigotimes_{i\in J} V_i \\ \bigotimes_{i\in J} v_i & \longmapsto & (\bigotimes_{i\in J} \varphi_i(g_i))(\bigotimes_{i\in J} v_i) = \bigotimes_{i\in J} \varphi_i(g_i)(v_i) \end{array},$$

est une représentation linéaire du produit direct fini $\prod_{i\in J} G_i$ des groupes $(G_i)_{i\in J}$ dans le produit tensoriel fini $\bigotimes_{i\in J} V_i$.

Proposition

Soient $(I, \leq)$ un ensemble dirigé et $(G_i)_{i\in I}$ une famille non vide de groupes finis. Pour tout sous-ensemble fini J de I, définissons $G_J = \prod_{i\in J} G_i$. Si J et K sont des sous-ensembles de I tels que $J \subseteq K$, alors nous considérons la projection :

$$\begin{array}{rcl} \varphi_{J,K} : G_K & \longrightarrow & G_J \\ (g_i)_{i\in K} & \longmapsto & (g_i)_{i\in J}. \end{array}$$

Le système $(G_J, \varphi_{J,K})$ est projectif avec limite projective $\prod_{i\in I} G_i$.

Lemma

Soit $(V_i)_{i\in I}$ une famille non vide d'espaces vecteurs de dimension finie sur le même corps $\mathbb{K}$ et soit $\bigotimes_{i\in I} V_i$ le produit tensoriel infini des espaces vectoriels $(V_i)_{i\in I}$ où chaque V_i $(i \in I)$ est un espace vectoriel non nul. Soit $\mathcal{F}(I)$ l'ensemble des sous-ensembles finis de I. Alors,

$$\varprojlim_{J\in\mathcal{F}(I)} GL\left(\bigotimes_{i\in J} V_i\right) = GL\left(\varinjlim_{J\in\mathcal{F}(I)} \left(\bigotimes_{i\in J} V_i\right)\right)$$

Theorem

Soit $(G_i)_{i\in I}$ une famille non vide de groupes et $(\varphi_i)_{i\in I}$ une famille de représentations linéaires, où chaque

$$\varphi_i : G_i \to \mathrm{GL}(V_i)$$

est une représentation du groupe G_i sur un espace vectoriel V_i. Alors, la représentation linéaire sur le produit tensoriel des espaces V_i est donnée par :

$$\varphi_I = \bigotimes_{i\in I} \varphi_i : \prod_{i\in I} G_i \longrightarrow \mathrm{GL}\left(\bigotimes_{i\in I} V_i\right).$$

Preuve :

Soient $J, K \in \mathcal{F}(I)$ avec $\mathcal{F}(I)$ l'ensemble de partie finie de I tels que $J \subseteq K$. Le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\prod\limits_{i\in K} G_i \arrow[r, "\varphi_K"] \arrow[d, "\varphi_{J,K}"'] & GL(\bigotimes\limits_{i\in K} V_i) \arrow[d, "\psi_{J,K}"] \\
\prod\limits_{i\in J} G_i \arrow[r, "\varphi_J"] & GL(\bigotimes\limits_{i\in J} V_i)
\end{tikzcd}$$

En effet, soient J et K deux sous-ensembles finis de I tels que $J \subseteq K$. Soit $(g_i)_{i\in K}$ un élément de $\prod\limits_{i\in K} G_i$. Il est clair que :

$$\psi_{J,K} \circ \varphi_K((g_i)_{i\in K}) = \psi_{J,K}(\varphi_K((g_i)_{i\in J})) = \psi_{J,K}(\bigotimes_{i\in J} \varphi_i(g_i))$$

et

$$\varphi_J \circ \varphi_{J,K}((g_i)_{i\in K}) = \varphi_J(\varphi_{J,K}((g_i)_{i\in K})) = \varphi_J((g_i)_{i\in J}) = \bigotimes_{i\in J} \varphi_i(g_i).$$

Soit $\bigotimes\limits_{i\in J} v_i$ un élément de $\bigotimes\limits_{i\in J} V_i$. Alors $(\bigotimes\limits_{i\in J} v_i) \otimes (\bigotimes\limits_{i\in K\setminus J} u_i) \in \bigotimes\limits_{i\in K} V_i$.

Ainsi,

$$\bigotimes_{i\in K}\varphi_i(g_i)\left((\bigotimes_{i\in J}v_i)\otimes(\bigotimes_{i\in K\setminus J}u_i)\right)=(\bigotimes_{i\in J}\varphi_i(g_i)(v_i))\otimes(\bigotimes_{i\in K\setminus J}\varphi_i(g_i)(u_i)).$$

Cela découle de la définition de $\psi_{J,K}$ que :

$$\psi_{J,K}(\bigotimes_{i\in K}\varphi_i(g_i))(\bigotimes_{i\in J}v_i)=\bigotimes_{i\in J}\varphi_i(g_i)(v_i)=\bigotimes_{i\in J}\varphi_i(g_i)(\bigotimes_{i\in J}v_i).$$

Par conséquent, le diagramme ci-dessus commute. Ainsi il existe un unique homomorphisme de groupes :

$$\varphi_I=\varprojlim_{J\in\mathcal{F}(I)}(\bigotimes_{i\in J}\varphi_i):\prod_{i\in I}G_i\longrightarrow GL(\bigotimes_{i\in I}V_i),$$

qui est une représentation linéaire du produit direct infini $\prod_{i\in I}G_i$ des groupes G_i dans $\bigotimes_{i\in I}V_i$.

Le théorème est donc démontré.

Definition

Soient G_1 et G_2 des groupes, et ρ_1 et ρ_2 des représentations linéaires respectives de G_1 et G_2, avec χ_1 et χ_2 les caractères associés à ces représentations. Le caractère χ du produit tensoriel des représentations $\rho_1 \otimes \rho_2$ de $G_1 \times G_2$ est défini par la formule :

$$\chi(g_1, g_2) = \chi_1(g_1)\chi_2(g_2),$$

pour tout $g_1 \in G_1$ et $g_2 \in G_2$.

Proposition

Soit J un ensemble fini et φ_J la représentation définie par :

$$\varphi_J = \bigotimes_{i \in J} \varphi_i : \prod_{i \in J} G_i \longrightarrow GL\left(\bigotimes_{i \in J} V_i\right)$$

où $\forall i \in J$, $\varphi_i : G_i \to GL(V_i)$ est une représentation de chaque groupe G_i et V_i est l'espace vectoriel associé.

Le caractère χ_{φ_J} de la représentation φ_J du produit direct fini $\prod_{i\in J} G_i$ est donné par :

$$\chi_{\varphi_J}((g_i)_{i\in J}) = \prod_{i\in J} \chi_{\varphi_i}(g_i), \quad \forall (g_i)_{i\in J} \in \prod_{i\in J} G_i,$$

où χ_{φ_i} est le caractère de la représentation φ_i du groupe G_i.

Proposition

Soit φ_I la représentation définie par :

$$\varphi_I = \bigotimes_{i\in I} \varphi_i : \prod_{i\in I} G_i \longrightarrow GL\left(\bigotimes_{i\in I} V_i\right),$$

où $\varphi_i : G_i \to GL(V_i)$ est une représentation linéaire de chaque groupe G_i, et V_i est l'espace vectoriel complexe associé.
À chaque représentation linéaire φ_i, associons le caractère (une fonction de i)

$$\chi_{\varphi_i} : G_i \to \mathbb{C}$$

défini pour tout $g_i \in G_i$ par :

$$\chi_{\varphi_i}(g_i) := \mathrm{Tr}(\varphi_i(g_i)).$$

Définissons la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$, dont chaque terme est donné par :

$$a_i := \chi_{\varphi_i}(g_i), \quad i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Considérons la suite des produits partiels associée à $(a_i)_{i\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$, définie par :

$$P_N = \prod_{i=1}^{N} \chi_{\varphi_i}(g_i), \quad N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Si la suite $(P_N)_{N\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ converge, alors le caractère χ_{φ_I} de la représentation tensorielle infinie φ_I est défini par :

$$\chi_{\varphi_I}((g_i)_{i\in I}) = \lim_{N\to\infty} \prod_{i=1}^{N} \chi_{\varphi_i}(g_i) = \prod_{i\in I} \chi_{\varphi_i}(g_i).$$

Dans le cas contraire, le caractère χ_{φ_I} n'est pas défini.

Représentations irréductibles du produit de groupes

Soient G_1, G_2 deux groupes finis et V_1, V_2 deux espaces vectoriels.

Theorem

i) Si $\rho^1 : G_1 \to \mathrm{GL}(V_1)$ et $\rho^2 : G_2 \to \mathrm{GL}(V_2)$ sont des représentations irréductibles respectives de G_1 et G_2, alors

$$\rho^1 \otimes \rho^2 : G_1 \times G_2 \to \mathrm{GL}(V_1 \otimes V_2)$$

est une représentation irréductible de $G_1 \times G_2$.

ii) Réciproquement, toute représentation irréductible de $G_1 \times G_2$ est isomorphe à un produit tensoriel $\rho^1 \otimes \rho^2$, avec ρ^1 irréductible de G_1 et ρ^2 irréductible de G_2.

Lemma

Soit $(G_i)_{i\in I}$ une famille non vide de groupes finis abéliens et $(\varphi_i)_{i\in I}$ une famille de représentations linéaires, où chaque

$$\varphi_i : G_i \to \mathrm{GL}(V_i)$$

est une représentation du groupe G_i sur un espace vectoriel V_i. Alors, toute représentation irréductible de $G = \prod_{i\in I} G_i$ est de degré 1.

Theorem

Soit $(G_i)_{i\in I}$ une famille non vide de groupes finis d'ordre premier chacun , $(V_i)_{i\in I}$ une famille non vide d'espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, et

$$(\varphi_i : G_i \to \mathrm{GL}(V_i))_{i\in I}$$

une famille de représentations linéaires Soit $G = \prod_{i\in I} G_i$

i) Si chaque G_i est un groupe cyclique, alors toute représentation irréductible de G est de degré 1.

ii) Si chaque G_i est un groupe d'ordre premier, alors toute représentation irréductible de G est de degré 1.

iii) Si presque toutes les représentations φ_i sont triviales, alors la représentation induite sur le produit tensoriel des espaces V_i

$$\varphi_I = \bigotimes_{i\in I} \varphi_i : G = \prod_{i\in I} G_i \longrightarrow \mathrm{GL}\left(\bigotimes_{i\in I} V_i\right),$$

est irréductible si et seulement si chaque représentation φ_i non triviale est irréductible ainsi que leur produit tensoriel.

Preuve :

i) Chaque G_i est cyclique d'ordre fini, donc G_i est abélien. Le produit $G = \prod_{i \in I} G_i$ est un groupe abélien. Il vient que toute représentation irréductible de G est de degré 1.

ii) Chaque groupe d'ordre premier est cyclique. Par i), il vient que toute représentation irréductible de G est de degré 1.

iii) **Sens direct**
Supposons que φ_I est irréductible.
Montrons que chaque φ_i non triviale est irréductible :
Supposons par l'absurde que pour un certain $j \in I$, la représentation non triviale φ_j ne soit pas irréductible. Cela signifie qu'il existe un sous-espace propre non trivial $W_j \subset V_j$ qui est stable sous φ_j.
Soit $W = \left(\bigotimes_{i \neq j} V_i \right) \otimes W_j \subset \bigotimes_{i \in I} V_i$. Ce sous-espace est stable sous φ_I.
Cette stabilité contredit l'irréductibilité de φ, car un sous-espace propre non trivial stable ne devrait pas exister dans une représentation irréductible. Ainsi, chaque φ_i non triviale doit être irréductible.

Montrons que le produit tensoriel des représentations linéaires non triviales

φ_i est irréductible :
Soit $J \subset I$ l'ensemble des indices correspon Soit $J \subset I$ l'ensemble des indices correspondant aux représentations φ_i non triviales.
On peut écrire :

$$\bigotimes_{i \in I} V_i = \left(\bigotimes_{i \in J} V_i \right) \otimes \left(\bigotimes_{i \notin J} V_i \right).$$

Puisque $\bigotimes_{i \notin J} V_i$ est constitué de représentations triviales, il n'affecte pas l'irréductibilité. Par conséquent, l'irréductibilité de φ entraîne celle de $\bigotimes_{i \in J} \varphi_i$.

Sens réciproque

Montrons que φ est irréductible :
Supposons que chaque φ_i non triviale est irréductible et que leur produit tensoriel est irréductible.
Considérons un sous-espace stable $W \subset \bigotimes_{i \in I} V_i$. Soit J une partie finie de I.
On a :

$$\bigotimes_{i \in I} V_i = \left(\bigotimes_{i \in J} V_i \right) \otimes \left(\bigotimes_{i \notin J} V_i \right).$$

Comme $\bigotimes_{i \notin J} V_i$ est trivial, tout sous-espace stable sous φ_I est en réalité stable sous $\bigotimes_{i \in J} \varphi_i$.
Par hypothèse, $\bigotimes_{i \in J} \varphi_i$ est irréductible. Donc $W = \{0\}$ ou $\bigotimes_{i \in I} V_i$.
Cela montre que φ est irréductible.

Convention : Tous les espaces vectoriels sont supposés de dimension finie et définis sur $\mathbb{C}$, sauf mention contraire.

Définition de $\widehat{\mathbb{Z}}$

Definition

Le complété profini $\widehat{\mathbb{Z}}$ est défini comme la limite projective du système :

$$\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ \varphi_{m,n}\right),$$

où :

i) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est le groupe des classes d'équivalence modulo n,

ii) $\varphi_{m,n} : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est la surjection canonique définie lorsque $n \mid m$.

Proposition

Soit N un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$ et soit $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{n\in N}$ une famille finie de groupes cycliques. Soit $(V_n)_{n\in N}$ une famille finie non vide d'espaces vectoriels de dimension finie, et pour chaque $n \in N$, soit

$$\varphi_n : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathrm{GL}(V_n)$$

une représentation linéaire.
Alors, on a la représentation linéaire :

$$\varphi_N = \bigotimes_{n\in N} \varphi_n : \prod_{n\in N} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathrm{GL}\left(\bigotimes_{n\in N} V_n\right)$$

tel que :

$$\varphi_N((g_n)_{n\in N}) = \bigotimes_{n\in N} \varphi_n(g_n).$$

De plus, en passant à la limite inverse, on a la représentation linéaire sur un produit tensoriel infini

$$\varphi_{\mathbb{N}} = \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n : \varprojlim_{N\in\mathcal{F}(\mathbb{N})} \prod \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{GL}\left(\bigotimes_{n\in\mathbb{N}} V_n\right).$$

Theorem

L'application

$$\Phi : \widehat{\mathbb{Z}} \to \varprojlim_{N \in \mathcal{F}(\mathbb{N})} \prod_{n \in N} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

définie par :

$$\Phi((x_n)_{n \geq 1}) = (x_N)_{N \in \mathcal{F}(\mathbb{N})}, \quad où\ x_N = (x_n)_{n \in N}$$

est un isomorphisme de groupes .

Ainsi, d'après les résultats précédents, nous obtenons la représentation linéaire suivante :

$$\varphi_{\mathbb{N}} : \widehat{\mathbb{Z}} = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{GL}\left(\bigotimes_{n \in \mathbb{N}} V_n \right).$$

Definition

Un caractère de $\widehat{\mathbb{Z}}$ est un homomorphisme de groupe continu :

$$\chi : \widehat{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}^\times.$$

Theorem

L'ensemble des caractères continus de $\widehat{\mathbb{Z}}$ *est isomorphe à* $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ *via la dualité de Pontryagin :*

$$\mathrm{Hom}_{cont}(\widehat{\mathbb{Z}}, \mathbb{C}^\times) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Proposition

i) *Toutes les représentations irréductibles de* $\widehat{\mathbb{Z}}$ *sont de degré* 1.

ii) *Soient* $\mathrm{Irr}(\widehat{\mathbb{Z}})$ *l'ensemble des représentations irréductibles de* $\widehat{\mathbb{Z}}$ *et* $\mathrm{Hom}_{cont}(\widehat{\mathbb{Z}}, \mathbb{C}^\times)$ *l'ensemble de ses caractères continus. Il existe un isomorphisme :*

$$\Phi : \mathrm{Irr}(\widehat{\mathbb{Z}}) \to \mathrm{Hom}_{cont}(\widehat{\mathbb{Z}}, \mathbb{C}^\times)),$$

iii) $\widehat{\mathbb{Z}}$ *possède une infinité non dénombrable de représentations irréductibles.*

iv) *Les représentations irréductibles de* $\widehat{\mathbb{Z}}$ *peuvent être interprétées comme des représentations sur chaque composante* $\mathbb{Z}_p$.

Conclusion

Parvenus au terme de notre travail, où il était principalement question pour nous d'étendre les représentations linéaires aux groupes infinis, il en ressort que nous avons construit les représentations linéaires des groupes infinis vus comme produits infinis de groupes finis. Les caractères de tels groupes sont construits comme des suites, dont l'existence est liée aux propriétés de convergence de ces suites. Nous avons donné quelques propriétés des représentations irréductibles de ces groupes. Enfin, nous avons étudié le cas particulier de $\widehat{\mathbb{Z}}$ qui est le complété profini de $\mathbb{Z}$. Ici, nous avons construit explicitement les représentations linéaires, calculé les caractères associés, et donné quelques proprietés d'irréductibilité.
Excellence M. le president du jury, très chers honorables membres du jury, à vos titres et grades respectifs, nous n'avons pas la pretention d'avoir effectue un travail parfait. Nous admettons que notre travil puiss comporter des impertions et c'est pour cette raison que nous nous soumettons a vos differentes remarques et suggestion tout en vous rasurant de les prendre en consideration pour ameliorer le present travail.
Merci pour votre aimable attention, J'en ai fini.