Représentation linéaire, caractère et représentations linéaires irréductibles d'un groupe infini.

DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES - INFORMATIQUE
Mémoire présenté par : SOUNKOUA Roger
Sous la direction du
Dr. Gilbert MANTIKA
(Chargée de Cours, UMa, FS)
Pr. Dieukam
(Maître de Conférences, UMa, FS)

1er juillet 2025

Introduction.

Sommaire

1. Préliminaires
2. Représentations linéaires d'un produit de deux groupes
3. Représentations linéaires d'un produit arbitraire des groupes
4. Conclusion

Définition d'un Groupe

Definition

Un groupe est un couple $(G, *)$ où G est un ensemble non vide et

$$* : G \times G \longrightarrow G$$

$$(x, y) \longmapsto x * y$$

est une loi telle que :

i) $*$ est associative, c'est-à-dire, $\forall x, y, z \in G,\ (x * y) * z = x * (y * z)$;

ii) G possède un élément neutre pour la loi $*$, c'est-à-dire, $\exists e \in G$ tel que $\forall x \in G,\ x * e = e * x = x$;

iii) Tout élément de G est inversible (ou possède un élément symétrique) dans G, c'est-à-dire, $\forall x \in G,\ \exists y \in G$ tel que $x * y = y * x = e$.

Definition

Si $(G, *)$ est un groupe tel que la loi $*$ satisfasse à la propriété

$$\forall x, y \in G,\ x * y = y * x,$$

le groupe $(G, *)$ est dit **commutatif** ou encore **abélien**.

Remarque

Soit $(G_i, \circ_i)$ *une famille de groupes finis indexée par* $i = 1, \ldots, n$. *Le cardinal du produit direct de ces groupes vérifie la relation suivante :*

$$\left|\prod_{i=1}^{n} G_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |G_i|,$$

où $|G_i|$ *désigne le cardinal du groupe* G_i.

Definition

Une catégorie $\mathcal{C}$ consiste en les données suivantes :

i) Une classe $|\mathcal{C}|$, dont les éléments sont appelés objets de $\mathcal{C}$;

ii) À chaque couple d'objets (X, Y) de $\mathcal{C}$, est associé un ensemble $\mathcal{C}(X, Y)$ (ou $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$), dont les éléments sont appelés morphismes (ou flèches) de X dans Y ;

iii) À chaque triplet (X, Y, Z) d'objets de $\mathcal{C}$, une application (appelée application de composition)
$$\mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \to \mathcal{C}(X, Z), \quad (f, g) \mapsto g \circ f;$$

iv) À chaque objet $X \in \mathcal{C}$, est associé un élément $1_X \in \mathcal{C}(X, X)$ appelé morphisme d'identité de X.

Ces données vérifient les axiomes suivants :

Associativité de la composition : si $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$ sont des morphismes dans $\mathcal{C}$, alors on a
$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Neutralité de l'identité : pour tous $X, Y \in |\mathcal{C}|$, et pour tout $f \in \mathcal{C}(X, Y)$, on a $f \circ 1_X = f \quad \text{et} \quad 1_Y \circ f = f$.

Définition d'un foncteur contravariant

Definition

Un *foncteur contravariant* est une loi de passage d'une catégorie $\mathcal{C}$ à une catégorie $\mathcal{D}$, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, qui satisfait les propriétés suivantes :

i) À tout objet C de $\mathcal{C}$ associe un objet $F(C)$ de $\mathcal{D}$,

ii) À tout morphisme $X \xrightarrow{f} Y$ de $\mathcal{C}$ associe un morphisme $F(Y) \xrightarrow{F(f)} F(X)$ de $\mathcal{D}$, et les conditions suivantes doivent être vérifiées :

$$F(1_X) = 1_{F(X)} \text{ pour tout objet } X,$$

$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g) \text{ pour tous morphismes } X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z.$$

Definition

Soit (X_i, ϕ_{ij}) un système inductif de groupes. La limite inductive ou limite directe, lorsqu'elle existe, est une famille compatible $(X, \phi_i : X_i \to X)$ avec (X_i, ϕ_{ij}) vérifiant la propriété universelle (PU) suivante :

> *Pour toute autre famille $(X, \psi_i)_{i \in I}$ compatible avec (X_i, ϕ_{ij}), il existe un unique homomorphisme de groupes $u : X \to Y$ tel que le diagramme suivant soit commutatif pour tous $i \leq j$:*

$$
\begin{tikzcd}
X_i \arrow[rr, "\phi_{ij}"] \arrow[dr, "\phi_i"] \arrow[ddr, "\psi_i"'] & & X_j \arrow[dl, "\phi_j"'] \arrow[ddl, "\psi_j"] \\
& X \arrow[d, dashed, "u"] & \\
& Y &
\end{tikzcd}
$$

Definition

Soit $(X_i, \phi_{ij})_{i,j \in I}$ un système projectif de groupes. La limite projective ou limite inverse du système projectif $(X_i, \phi_{ij})_{i,j \in I}$ est une famille $(X, (\phi_i)_{i \in I})$ de homomorphismes compatibles avec $(X_i, \phi_{ij})_{i,j \in I}$, vérifiant la propriété universelle suivante : Si $(\psi_i : Y \to X_i)_{i \in I}$ $(Y \in |\mathcal{C}|)$ est une famille de morphismes compatibles, alors il existe un unique morphisme $\psi : Y \to X$ tel que le diagramme suivant commute pour tous $i \leq j$:

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[d, dashed, "\psi"] \arrow[ddl, "\psi_j"'] \arrow[ddr, "\psi_i"] & \\
& X \arrow[dl, "\phi_j"'] \arrow[dr, "\phi_i"] & \\
X_j \arrow[rr, "\phi_{ij}"'] & & X_i
\end{tikzcd}$$

$$\psi_i = \phi_i \circ \psi$$

$$\psi_j = \phi_j \circ \psi$$

Théorème

Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur contravariant entre deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$. Alors, l'image d'une limite inductive par le foncteur F est une limite projective.

1. Départ : système inductif (X_i, f_{ij}) dans $\mathcal{C}$

   $f_{ii} = \mathrm{id}_{X_i}$

   $f_{jk} \circ f_{ij} = f_{ik}$

   $X = \varinjlim X_i$, avec $u_i : X_i \to X$

Par définition de la limite inductive $X = \varinjlim X_i$, on a :

   Pour toute famille compatible $v_i : X_i \to Y$ dans $\mathcal{C}$, c'est-à-dire $v_j \circ f_{ij} = v_i$,

   Il existe un unique morphisme $v : X \to Y$ tel que $v \circ u_i = v_i$

2. Application du foncteur contravariant F

   $f_{ij} : X_i \to X_j \Rightarrow F(f_{ij}) : F(X_j) \to F(X_i)$

   On obtient un système projectif dans $\mathcal{D}$ et

3. Famille compatible $(F(X), F(u_i))$

   $u_j \circ f_{ij} = u_i \Rightarrow F(f_{ij}) \circ F(u_j) = F(u_i)$

4. Propriété universelle

Par la propriété universelle dans $\mathcal{C}$, il existe $v : X \to Y$ tel que $v \circ u_i = v_i$

En appliquant F, on obtient un morphisme $F(v) : F(Y) \to F(X)$ tel que :

$$F(u_i) \circ F(v) = F(v_i)$$

Conclusion : $F(X)$ satisfait la définition d'une limite projective, donc :

$$F\left(\varinjlim X_i\right) = \varprojlim F(X_i)$$

Definition

Soit $\mathbb{K}$ un corps. Une représentation $\mathbb{K}$-linéaire d'un groupe fini G est un homomorphisme de groupes

$$\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$$

où V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathrm{GL}(V)$ est le groupe des applications linéaires bijectives de V sur lui-même.

Remarque

Si V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, on dit que n est le degré de la représentation. De plus, en choisissant une base de V, le groupe $\mathrm{GL}(V)$ est isomorphe au groupe

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathrm{M}(n, \mathbb{K}) \mid \det(A) \neq 0\},$$

où $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ est le groupe des matrices inversibles de taille $n \times n$ équipées de la multiplication des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$, et $\det(A)$ désigne le déterminant de la matrice A.

Definition

Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation linéaire sur G. Le caractère de V, noté χ_V, est la fonction

$$\chi_V : G \to \mathbb{C}$$

définie pour tout $g \in G$ par

$$\chi_V(g) := \mathrm{Tr}(\rho(g)),$$

où Tr désigne la trace.

Théorème

Soit G un groupe. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) G est abélien.

(ii) Toutes les représentations irréductibles de G sont de degré 1.

Proposition

Soit $(V_i)_{i\in I}$ une famille non vide d'espaces vectoriels sur un même corps commutatif $\mathbb{K}$. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille non vide de vecteurs non nuls tels que, pour tout $i \in I$, le vecteur u_i appartienne à V_i. Pour tous sous-ensembles finis J et K de I tels que $J \subseteq K$, considérons l'application linéaire injective

$$\begin{array}{rccl}\varphi_{J,K} : & \bigotimes\limits_{i\in J} V_i & \longrightarrow & \bigotimes\limits_{i\in K} V_i \\ & \bigotimes\limits_{i\in J} v_i & \longmapsto & \bigotimes\limits_{i\in J} v_i \otimes \Big(\bigotimes\limits_{i\in K\setminus J} u_i\Big).\end{array}$$

Soit $\mathcal{F}(I)$ l'ensemble de tous les sous-ensembles finis de I.

i) Le système $\big(\bigotimes\limits_{i\in J} V_i, \varphi_{J,K}\big)_{J\in\mathcal{F}(I)}$ est inductif.

ii) La limite inductive du système inductif $\big(\bigotimes\limits_{i\in J} V_i, \varphi_{J,K}\big)_{J\in\mathcal{F}(I)}$, notée $\bigotimes\limits_{i\in I} V_i$, est le produit tensoriel infini des espaces vectoriels $(V_i)_{i\in I}$.

Proposition

Soit $(V_i)_{i\in I}$ une famille non vide d'espaces vectoriels sur un même corps commutatif $\mathbb{K}$. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille non vide de vecteurs non nuls tels que, pour tout $i \in I$, le vecteur u_i appartienne à V_i. Pour tous sous-ensembles finis J et K de I tels que $J \subseteq K$, l'application

$$\begin{array}{rcl} \psi_{J,K} : GL(\bigotimes_{i\in K} V_i) & \longrightarrow & GL(\bigotimes_{i\in J} V_i) \\ f & \longmapsto & \psi_{J,K}(f) = f_{J,K} \end{array}$$

avec $f_{J,K}$ défini comme suit : pour tout $f \in GL(\bigotimes_{i\in K} V_i)$ et tout $\bigotimes_{i\in J} v_i \in \bigotimes_{i\in J} V_i$,

$$f_{J,K}(\bigotimes_{i\in J} v_i) = \bigotimes_{i\in J} v_i' \text{ si } f((\bigotimes_{i\in J} v_i) \otimes (\bigotimes_{i\in K\setminus J} t_i)) = (\bigotimes_{i\in J} v_i') \otimes (\bigotimes_{i\in K\setminus J} v_i') = \bigotimes_{i\in K} v_i',$$

pour un certain $\bigotimes_{i\in K\setminus J} t_i \in \bigotimes_{i\in K\setminus J} V_i$, est un homomorphisme de groupes.

Proposition

Le système $\left(GL(\bigotimes_{i\in J} V_i), \psi_{J,K}\right)$ *est projectif, avec pour limite projective*

$$\varprojlim_{J\in\mathcal{F}(I)} GL\left(\bigotimes_{i\in J} V_i\right),$$

où $\mathcal{F}(I)$ *désigne l'ensemble des sous-ensembles finis de* I.

Esquisse de la preuve

Pour chaque $J \in \mathcal{F}(I)$, on considère le groupe :

$$GL\left(\bigotimes_{i\in J} V_i\right)$$

Pour tout $J \subseteq K$, on définit un morphisme :

$$\psi_{J,K} : GL\left(\bigotimes_{i\in K} V_i\right) \longrightarrow GL\left(\bigotimes_{i\in J} V_i\right)$$

On vérifie deux propriétés fondamentales :

- Identité : $\psi_{J,J} = \mathrm{id}$
- Compatibilité : $\psi_{J,K} \circ \psi_{K,L} = \psi_{J,L}$ pour $J \subseteq K \subseteq L$

On obtient un système projectif :

$$\left(GL\left(\bigotimes_{i\in J} V_i\right),\ \psi_{J,K}\right)$$

Comme **Grp** est complète, la limite projective existe :

$$\varprojlim_{J\in\mathcal{F}(I)} GL\left(\bigotimes_{i\in J} V_i\right)$$

Proposition

Soit la correspondance $GL : Vect_{\otimes V_i} \to Grp$ *entre les catégories* $Vect_{\otimes V_i}$ *et* Grp *où* Grp *désigne la catégorie des groupes.* GL *est un foncteur contravariant.*

Proposition

Soit J *un sous-ensemble fini d'un ensemble* I *et* $(G_i)_{i\in J}$ *une famille finie de groupes finis. Soit* $(V_i)_{i\in J}$ *une famille finie d'espaces vectoriels de dimension finie sur le même corps* F *et pour chaque* $i \in J$*, soit* $\varphi_i : G_i \to GL(V_i)$ *une représentation linéaire de* G_i *dans* V_i*. Alors, le produit tensoriel* $\varphi_J = \bigotimes_{i\in J} \varphi_i$ *des applications* $(\varphi_i)_{i\in J}$ *défini par :*

$$\begin{array}{rcl} \varphi_J = \bigotimes_{i\in J} \varphi_i : \prod_{i\in J} G_i & \longrightarrow & GL(\bigotimes_{i\in J} V_i) \\ (g_i)_{i\in J} & \longmapsto & \bigotimes_{i\in J} \varphi_i((g_i)_{i\in J}) = \bigotimes_{i\in J} \varphi_i(g_i) \end{array}$$

avec

$$\begin{array}{rcl} \bigotimes_{i\in J} \varphi_i(g_i) : \bigotimes_{i\in J} V_i & \longrightarrow & \bigotimes_{i\in J} V_i \\ \bigotimes_{i\in J} v_i & \longmapsto & (\bigotimes_{i\in J} \varphi_i(g_i))(\bigotimes_{i\in J} v_i) = \bigotimes_{i\in J} \varphi_i(g_i)(v_i) \end{array},$$

est une représentation linéaire du produit direct fini $\prod_{i\in J} G_i$ *des groupes* $(G_i)_{i\in J}$ *dans le produit tensoriel fini* $\bigotimes_{i\in J} V_i$*.*

Proposition

Soient $(I, \leq)$ *un ensemble dirigé et* $(G_i)_{i\in I}$ *une famille non vide de groupes finis. Pour tout sous-ensemble fini* J *de* I*, définissons* $G_J = \prod_{i\in J} G_i$*. Si* J *et* K *sont des sous-ensembles de* I *tels que* $J \subseteq K$*, alors nous considérons la projection :*

$$\begin{array}{rcl} \varphi_{J,K} : G_K & \longrightarrow & G_J \\ (g_i)_{i\in K} & \longmapsto & (g_i)_{i\in J}. \end{array}$$

Le système $(G_J, \varphi_{J,K})$ *est projectif avec limite projective* $\prod_{i\in I} G_i$*.*

Lemma

Soit $(V_i)_{i\in I}$ *une famille non vide d'espaces vecteurs de dimension finie sur le même corps* $\mathbb{K}$ *et soit* $\bigotimes_{i\in I} V_i$ *le produit tensoriel infini des espaces vectoriels* $(V_i)_{i\in I}$ *où chaque* V_i $(i \in I)$ *est un espace vectoriel non nul. Soit* $\mathcal{F}(I)$ *l'ensemble des sous-ensembles finis de* I*. Alors,*

$$\varprojlim_{J\in\mathcal{F}(I)} GL\left(\bigotimes_{i\in J} V_i\right) = GL\left(\varinjlim_{J\in\mathcal{F}(I)}\left(\bigotimes_{i\in J} V_i\right)\right)$$

Théorème

Soit $(G_i)_{i\in I}$ une famille non vide de groupes et $(\varphi_i)_{i\in I}$ une famille de représentations linéaires, où chaque

$$\varphi_i : G_i \to \mathrm{GL}(V_i)$$

est une représentation du groupe G_i sur un espace vectoriel V_i. Alors, la représentation linéaire sur le produit tensoriel des espaces V_i est donnée par :

$$\varphi_I = \bigotimes_{i\in I} \varphi_i : \prod_{i\in I} G_i \longrightarrow \mathrm{GL}\left(\bigotimes_{i\in I} V_i\right).$$

Preuve :

Soient $J, K \in \mathcal{F}(I)$ avec $\mathcal{F}(I)$ l'ensemble de partie finie de I tels que $J \subseteq K$. Le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\prod\limits_{i\in K} G_i \arrow[r, "\varphi_K"] \arrow[d, "\varphi_{J,K}"'] & GL(\bigotimes\limits_{i\in K} V_i) \arrow[d, "\psi_{J,K}"] \\
\prod\limits_{i\in J} G_i \arrow[r, "\varphi_J"] & GL(\bigotimes\limits_{i\in J} V_i)
\end{tikzcd}$$

En effet, soient J et K deux sous-ensembles finis de I tels que $J \subseteq K$. Soit $(g_i)_{i\in K}$ un élément de $\prod\limits_{i\in K} G_i$. Il est clair que :

$$\psi_{J,K} \circ \varphi_K((g_i)_{i\in K}) = \psi_{J,K}(\varphi_K((g_i)_{i\in J})) = \psi_{J,K}(\bigotimes_{i\in J} \varphi_i(g_i))$$

et

$$\varphi_J \circ \varphi_{J,K}((g_i)_{i\in K}) = \varphi_J(\varphi_{J,K}((g_i)_{i\in K})) = \varphi_J((g_i)_{i\in J}) = \bigotimes_{i\in J} \varphi_i(g_i).$$

Soit $\bigotimes\limits_{i\in J} v_i$ un élément de $\bigotimes\limits_{i\in J} V_i$. Alors $(\bigotimes\limits_{i\in J} v_i) \otimes (\bigotimes\limits_{i\in K\setminus J} u_i) \in \bigotimes\limits_{i\in K} V_i$.

Ainsi,

$$\bigotimes_{i\in K}\varphi_i(g_i)\left((\bigotimes_{i\in J}v_i)\otimes(\bigotimes_{i\in K\setminus J}u_i)\right)=(\bigotimes_{i\in J}\varphi_i(g_i)(v_i))\otimes(\bigotimes_{i\in K\setminus J}\varphi_i(g_i)(u_i)).$$

Cela découle de la définition de $\psi_{J,K}$ que :

$$\psi_{J,K}(\bigotimes_{i\in K}\varphi_i(g_i))(\bigotimes_{i\in J}v_i)=\bigotimes_{i\in J}\varphi_i(g_i)(v_i)=\bigotimes_{i\in J}\varphi_i(g_i)(\bigotimes_{i\in J}v_i).$$

Par conséquent, le diagramme ci-dessus commute. Ainsi il existe un unique homomorphisme de groupes :

$$\varphi_I=\varprojlim_{J\in\mathcal{F}(I)}(\bigotimes_{i\in J}\varphi_i):\prod_{i\in I}G_i\longrightarrow GL(\bigotimes_{i\in I}V_i),$$

qui est une représentation linéaire du produit direct infini $\prod_{i\in I}G_i$ des groupes G_i dans $\bigotimes_{i\in I}V_i$.

Le théorème est donc démontré.

Definition

Soient G_1 et G_2 des groupes, et ρ_1 et ρ_2 des représentations linéaires respectives de G_1 et G_2, avec χ_1 et χ_2 les caractères associés à ces représentations. Le caractère χ du produit tensoriel des représentations $\rho_1 \otimes \rho_2$ de $G_1 \times G_2$ est défini par la formule :

$$\chi(g_1, g_2) = \chi_1(g_1)\chi_2(g_2),$$

pour tout $g_1 \in G_1$ et $g_2 \in G_2$.

Proposition

Soit J un ensemble fini et φ_J la représentation définie par :

$$\varphi_J = \bigotimes_{i \in J} \varphi_i : \prod_{i \in J} G_i \longrightarrow GL\left(\bigotimes_{i \in J} V_i\right)$$

où $\forall i \in J$, $\varphi_i : G_i \to GL(V_i)$ est une représentation de chaque groupe G_i et V_i est l'espace vectoriel associé.

Le caractère χ_{φ_J} de la représentation φ_J du produit direct fini $\prod_{i\in J} G_i$ est donné par :

$$\chi_{\varphi_J}((g_i)_{i\in J}) = \prod_{i\in J} \chi_{\varphi_i}(g_i), \quad \forall (g_i)_{i\in J} \in \prod_{i\in J} G_i,$$

où χ_{φ_i} est le caractère de la représentation φ_i du groupe G_i.

Proposition

Soit φ_I la représentation définie par :

$$\varphi_I = \bigotimes_{i\in I} \varphi_i : \prod_{i\in I} G_i \longrightarrow GL\left(\bigotimes_{i\in I} V_i\right),$$

où $\varphi_i : G_i \to GL(V_i)$ est une représentation linéaire de chaque groupe G_i, et V_i est l'espace vectoriel complexe associé.
À chaque représentation linéaire φ_i, associons le caractère (une fonction de i)

$$\chi_{\varphi_i} : G_i \to \mathbb{C}$$

défini pour tout $g_i \in G_i$ par :

$$\chi_{\varphi_i}(g_i) := \mathrm{Tr}(\varphi_i(g_i)).$$

Définissons la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$, dont chaque terme est donné par :

$$a_i := \chi_{\varphi_i}(g_i), \quad i \in \mathbb{N}\setminus\{0\}.$$

Considérons la suite des produits partiels associée à $(a_i)_{i\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$, définie par :

$$P_N = \prod_{i=1}^{N} \chi_{\varphi_i}(g_i), \quad N \in \mathbb{N}\setminus\{0\}.$$

Si la suite $(P_N)_{N\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ converge, alors le caractère χ_{φ_I} de la représentation tensorielle infinie φ_I est défini par :

$$\chi_{\varphi_I}((g_i)_{i\in I}) = \lim_{N\to\infty} \prod_{i=1}^{N} \chi_{\varphi_i}(g_i) = \prod_{i\in I} \chi_{\varphi_i}(g_i).$$

Dans le cas contraire, le caractère χ_{φ_I} n'est pas défini.

Théorème

Soit $(G_i)_{i\in I}$ une famille non vide de groupes finis d'ordre premier chacun , $(V_i)_{i\in I}$ une famille non vide d'espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, et

$$(\varphi_i : G_i \to \mathrm{GL}(V_i))_{i\in I}$$

une famille de représentations linéaires Soit $G = \prod_{i\in I} G_i$

i) Si chaque G_i est un groupe cyclique, alors toute représentation irréductible de G est de degré 1.

ii) Si chaque G_i est un groupe d'ordre premier, alors toute représentation irréductible de G est de degré 1.

iii) Si presque toutes les représentations φ_i sont triviales, alors la représentation induite sur le produit tensoriel des espaces V_i

$$\varphi_I = \bigotimes_{i\in I} \varphi_i : G = \prod_{i\in I} G_i \longrightarrow \mathrm{GL}\left(\bigotimes_{i\in I} V_i\right),$$

est irréductible si et seulement si chaque représentation φ_i non triviale est irréductible ainsi que leur produit tensoriel.

Définition de $\widehat{\mathbb{Z}}$

Definition

Le complété profini $\widehat{\mathbb{Z}}$ est défini comme la limite projective du système :

$$\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ \varphi_{m,n}\right),$$

où :

i) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est le groupe des classes d'équivalence modulo n,

ii) $\varphi_{m,n} : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est la surjection canonique définie lorsque $n \mid m$.

Proposition

Soit N un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$ et soit $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{n\in N}$ une famille finie de groupes cycliques. Soit $(V_n)_{n\in N}$ une famille finie non vide d'espaces vectoriels de dimension finie, et pour chaque $n \in N$, soit

$$\varphi_n : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathrm{GL}(V_n)$$

une représentation linéaire.
Alors, on a la représentation linéaire :

$$\varphi_N = \bigotimes_{n\in N} \varphi_n : \prod_{n\in N} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathrm{GL}\left(\bigotimes_{n\in N} V_n\right)$$

tel que :

$$\varphi_N((g_n)_{n\in N}) = \bigotimes_{n\in N} \varphi_n(g_n).$$

De plus, en passant à la limite inverse, on a la représentation linéaire sur un produit tensoriel infini

$$\varphi_{\mathbb{N}} = \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n : \varprojlim_{N\in\mathcal{F}(\mathbb{N})} \prod \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{GL}\left(\bigotimes_{n\in\mathbb{N}} V_n\right).$$

Théorème

L'application

$$\Phi : \widehat{\mathbb{Z}} \to \varprojlim_{N \in \mathcal{F}(\mathbb{N})} \prod_{n \in N} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

définie par :

$$\Phi((x_n)_{n \geq 1}) = (x_N)_{N \in \mathcal{F}(\mathbb{N})}, \quad \textit{où } x_N = (x_n)_{n \in N}$$

est un isomorphisme de groupes .

Ainsi, d'après les résultats précédents, nous obtenons la représentation linéaire suivante :

$$\varphi_{\mathbb{N}} : \widehat{\mathbb{Z}} = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{GL}\left(\bigotimes_{n \in \mathbb{N}} V_n \right).$$

Definition

Un caractère de $\widehat{\mathbb{Z}}$ est un homomorphisme de groupe continu :

$$\chi : \widehat{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}^{\times}.$$

Théorème

L'ensemble des caractères continus de $\widehat{\mathbb{Z}}$ est isomorphe à $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ via la dualité de Pontryagin :

$$\mathrm{Hom}_{cont}(\widehat{\mathbb{Z}}, \mathbb{C}^{\times}) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Proposition

i) *Toutes les représentations irréductibles de $\widehat{\mathbb{Z}}$ sont de degré* 1.

ii) *Soient* $\mathrm{Irr}(\widehat{\mathbb{Z}})$ *l'ensemble des représentations irréductibles de $\widehat{\mathbb{Z}}$ et* $\mathrm{Hom}_{cont}(\widehat{\mathbb{Z}}, \mathbb{C}^{\times})$ *l'ensemble de ses caractères continus. Il existe un isomorphisme :*

$$\Phi : \mathrm{Irr}(\widehat{\mathbb{Z}}) \to \mathrm{Hom}_{cont}(\widehat{\mathbb{Z}}, \mathbb{C}^{\times})),$$

iii) *$\widehat{\mathbb{Z}}$ possède une infinité non dénombrable de représentations irréductibles.*

Conclusion

Merci pour votre aimable attention, J'en ai fini.