

# Isomorphisme de représentations et caractères

**Théorème 1.** Soient  $\rho, \rho' : G \rightarrow \text{GL}(V), \text{GL}(V')$  deux représentations complexes de dimension finie d'un groupe fini  $G$ . Alors :

$$\rho \cong \rho' \quad \Leftrightarrow \quad \chi_\rho = \chi_{\rho'},$$

où  $\chi_\rho$  et  $\chi_{\rho'}$  sont les caractères des représentations  $\rho$  et  $\rho'$ .

*Démonstration.* **Sens direct :** Supposons que  $\rho \cong \rho'$ . Il existe alors un isomorphisme d'espaces vectoriels  $T : V \rightarrow V'$  tel que :

$$T \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ T \quad \text{pour tout } g \in G.$$

Cela implique que  $\rho(g)$  et  $\rho'(g)$  sont semblables, donc ont la même trace :

$$\chi_\rho(g) = \text{Tr}(\rho(g)) = \text{Tr}(\rho'(g)) = \chi_{\rho'}(g),$$

pour tout  $g \in G$ . Ainsi,  $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$ .

**Sens réciproque :** Supposons que  $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$ . On sait que toute représentation complexe d'un groupe fini est complètement réductible (théorème de Maschke). On peut donc écrire :

$$\rho \cong \bigoplus_i n_i \rho_i, \quad \rho' \cong \bigoplus_i n'_i \rho_i,$$

où les  $\rho_i$  sont des représentations irréductibles non isomorphes deux à deux, et  $n_i, n'_i \in \mathbb{N}$  sont les multiplicités.

Le caractère d'une somme directe est la somme des caractères :

$$\chi_\rho = \sum_i n_i \chi_i, \quad \chi_{\rho'} = \sum_i n'_i \chi_i,$$

où  $\chi_i$  est le caractère de  $\rho_i$ .

Comme  $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$  et que les caractères irréductibles  $\chi_i$  sont linéairement indépendants dans l'espace des fonctions de classe, on en déduit que :

$$n_i = n'_i \quad \text{pour tout } i.$$

Ainsi,  $\rho \cong \rho'$ .

□

**Théorème 2.** *Le degré d'un caractère irréductible est égal à la dimension de la représentation irréductible dont il est le caractère.*

*Démonstration.* Soit  $G$  un groupe fini, et soit  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$  une représentation irréductible complexe de  $G$ , où  $V$  est un espace vectoriel complexe de dimension finie.

On note  $\chi_\rho : G \rightarrow \mathbb{C}$  le caractère associé à la représentation  $\rho$ . Le *degré* du caractère  $\chi_\rho$  est défini par sa valeur en l'élément neutre du groupe :

$$\chi_\rho(1) = \chi_\rho(e),$$

où  $e$  est l'élément neutre de  $G$ .

Par définition du caractère :

$$\chi_\rho(g) = \text{Tr}(\rho(g)) \quad \text{pour tout } g \in G.$$

En particulier, pour  $g = e$ , on a :

$$\chi_\rho(e) = \text{Tr}(\rho(e)).$$

Or, comme  $\rho$  est une représentation, on a  $\rho(e) = \text{Id}_V$ , donc :

$$\chi_\rho(e) = \text{Tr}(\text{Id}_V) = \dim V.$$

Ainsi,

$$\chi_\rho(1) = \dim V.$$

Cela montre que le degré du caractère irréductible est égal à la dimension de la représentation irréductible.

□

**Propriété 1.** Soit  $G$  un groupe. On note

$$\widehat{G} := \text{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$$

l'ensemble des caractères de  $G$ , c'est-à-dire l'ensemble des morphismes de groupes de  $G$  dans le groupe multiplicatif des complexes non nuls  $\mathbb{C}^\times$ . Alors  $\widehat{G}$  muni de la multiplication point par point :

$$(\chi_1 \cdot \chi_2)(g) := \chi_1(g) \cdot \chi_2(g), \quad \forall g \in G,$$

forme un groupe abélien.

*Démonstration.* **1. Fermeture.** Soient  $\chi_1, \chi_2 \in \widehat{G}$ , c'est-à-dire deux morphismes de groupes  $G \rightarrow \mathbb{C}^\times$ . On définit :

$$(\chi_1 \cdot \chi_2)(g) := \chi_1(g) \cdot \chi_2(g), \quad \forall g \in G.$$

Pour montrer que  $\chi_1 \cdot \chi_2 \in \widehat{G}$ , vérifions que c'est un morphisme :

$$(\chi_1 \cdot \chi_2)(gh) = \chi_1(gh) \chi_2(gh) = \chi_1(g) \chi_1(h) \cdot \chi_2(g) \chi_2(h) = (\chi_1(g) \chi_2(g)) (\chi_1(h) \chi_2(h)) = (\chi_1 \cdot \chi_2)(g) (\chi_1 \cdot \chi_2)(h)$$

**2. Associativité.** La multiplication dans  $\mathbb{C}^\times$  étant associative, on a pour  $\chi_1, \chi_2, \chi_3 \in \widehat{G}$  :

$$((\chi_1 \cdot \chi_2) \cdot \chi_3)(g) = (\chi_1(g) \cdot \chi_2(g)) \cdot \chi_3(g) = \chi_1(g) \cdot (\chi_2(g) \cdot \chi_3(g)) = (\chi_1 \cdot (\chi_2 \cdot \chi_3))(g).$$

**3. Élément neutre.** L'application constante  $\mathbf{1}_G : G \rightarrow \mathbb{C}^\times$  définie par  $\mathbf{1}_G(g) = 1$  pour tout  $g \in G$  est un morphisme de groupes (trivialement). Elle vérifie :

$$(\chi \cdot \mathbf{1}_G)(g) = \chi(g) \cdot 1 = \chi(g), \quad \forall \chi \in \widehat{G}, \quad \forall g \in G.$$

**4. Inverses.** Pour  $\chi \in \widehat{G}$ , définissons  $\chi^{-1} : G \rightarrow \mathbb{C}^\times$  par  $\chi^{-1}(g) = \chi(g)^{-1}$ . On a :

$$\chi^{-1}(gh) = (\chi(gh))^{-1} = (\chi(g) \chi(h))^{-1} = \chi(h)^{-1} \chi(g)^{-1} = \chi^{-1}(g) \chi^{-1}(h),$$

(car  $\mathbb{C}^\times$  est abélien). Donc  $\chi^{-1} \in \widehat{G}$  et :

$$(\chi \cdot \chi^{-1})(g) = \chi(g) \cdot \chi(g)^{-1} = 1 = \mathbf{1}_G(g).$$

**5. Commutativité.** Pour  $\chi_1, \chi_2 \in \widehat{G}$ , et  $g \in G$ , on a :

$$(\chi_1 \cdot \chi_2)(g) = \chi_1(g) \chi_2(g) = \chi_2(g) \chi_1(g) = (\chi_2 \cdot \chi_1)(g).$$

Ainsi,  $\widehat{G}$  est un groupe abélien pour la multiplication point par point. □

**Théorème 3.** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur un corps  $\mathbb{K}$ . Alors il existe un isomorphisme canonique :

$$E \otimes F \cong F \otimes E.$$

*Démonstration.* Nous construisons un isomorphisme linéaire entre  $E \otimes F$  et  $F \otimes E$ , sans choisir de bases.

**Étape 1 : Définition d'une application bilinéaire.**

Considérons l'application :

$$\beta : E \times F \rightarrow F \otimes E, \quad (e, f) \mapsto f \otimes e.$$

Elle est bilinéaire car la multiplication tensorielle est linéaire en chaque variable. Par la propriété universelle du produit tensoriel, cette application induit un unique morphisme linéaire :

$$T : E \otimes F \rightarrow F \otimes E, \quad \text{défini par } T(e \otimes f) = f \otimes e.$$

**Étape 2 : Construction de l'inverse.**

De façon symétrique, on définit :

$$\gamma : F \times E \rightarrow E \otimes F, \quad (f, e) \mapsto e \otimes f,$$

qui est également bilinéaire, et induit un morphisme linéaire :

$$S : F \otimes E \rightarrow E \otimes F, \quad \text{défini par } S(f \otimes e) = e \otimes f.$$

**Étape 3 : Vérification que  $T$  et  $S$  sont inverses.**

Pour tout  $e \in E, f \in F$  :

$$(S \circ T)(e \otimes f) = S(f \otimes e) = e \otimes f,$$

$$(T \circ S)(f \otimes e) = T(e \otimes f) = f \otimes e.$$

Donc  $S \circ T = \text{id}_{E \otimes F}$  et  $T \circ S = \text{id}_{F \otimes E}$ , ce qui prouve que  $T$  est un isomorphisme, avec inverse  $S$ .

**Conclusion :** L'application  $T$  est un isomorphisme canonique :

$$\boxed{E \otimes F \cong F \otimes E}.$$

□

**Théorème 4.** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels sur un corps  $\mathbb{K}$ . Alors le couple  $(E \otimes F, \otimes)$ , constitué de l'espace tensoriel et de l'application bilinéaire canonique, est unique à isomorphisme près. Autrement dit, si  $(T, \varphi)$  est un autre couple avec  $\varphi : E \times F \rightarrow T$  bilinéaire vérifiant la même propriété universelle, alors il existe un unique isomorphisme linéaire  $u : E \otimes F \rightarrow T$  tel que :

$$u(e \otimes f) = \varphi(e, f), \quad \forall (e, f) \in E \times F.$$

*Démonstration.* Par définition, le couple  $(E \otimes F, \otimes)$  vérifie la propriété universelle suivante :

Pour tout espace vectoriel  $G$  et toute application bilinéaire  $B : E \times F \rightarrow G$ , il existe un unique morphisme linéaire  $\tilde{B} : E \otimes F \rightarrow G$  tel que  $\tilde{B}(e \otimes f) = B(e, f)$ .

Soit maintenant  $(T, \varphi)$  un autre couple vérifiant la même propriété universelle. On applique cette propriété dans deux directions :

**1. Application de la propriété universelle de  $E \otimes F$  à  $B = \varphi$ .**

Il existe un unique morphisme linéaire  $u : E \otimes F \rightarrow T$  tel que :

$$u(e \otimes f) = \varphi(e, f), \quad \forall (e, f) \in E \times F.$$

**2. Application de la propriété universelle de  $T$  à  $B = \otimes$ .**

Il existe un unique morphisme linéaire  $v : T \rightarrow E \otimes F$  tel que :

$$v(\varphi(e, f)) = e \otimes f, \quad \forall (e, f) \in E \times F.$$

**3. Vérification que  $u$  et  $v$  sont inverses.**

Pour tout  $e \otimes f \in E \otimes F$ , on a :

$$(v \circ u)(e \otimes f) = v(u(e \otimes f)) = v(\varphi(e, f)) = e \otimes f,$$

donc  $v \circ u = \text{id}_{E \otimes F}$ .

Pour tout  $\varphi(e, f) \in T$ , on a :

$$(u \circ v)(\varphi(e, f)) = u(v(\varphi(e, f))) = u(e \otimes f) = \varphi(e, f),$$

donc  $u \circ v = \text{id}_T$ .

Ainsi,  $u$  est un isomorphisme, et il est unique par unicité dans la propriété universelle.

□