

Représentation linéaire, caractère et représentations linéaires irréductibles d'un groupe infini.

DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES - INFORMATIQUE

Mémoire présenté par : SOUNKOUA Roger

Sous la direction du

Dr. Gilbert MANTIKA

(Chargée de Cours, UMa, FS)

Pr. Dieukam

(Maître de Conférences, UMa, FS)

30 juin 2025

La théorie des représentations linéaires des groupes est un outil fondamental permettant de représenter les éléments d'un groupe abstrait par des matrices inversibles sur un corps donné. Cette approche, traduisant les problèmes d'algèbre abstraite complexes en des problèmes d'algèbre linéaire plus accessibles, repose sur la notion de représentation linéaire. Etant donné un corps \mathbb{K} , une représentation \mathbb{K} -linéaire d'un groupe fini G est un homomorphisme de groupes

$$\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$$

où V est un \mathbb{K} -espace vectoriel et $\text{GL}(V)$ désigne le groupe des applications linéaires bijectives de V sur lui-même. La théorie des représentations linéaires des groupes finis a été développée pour la première fois par le mathématicien allemand Ferdinand Georg Frobenius en 1897. Il a introduit la notion de représentation linéaire des groupes finis et a jeté les bases sur la théorie des caractères de ces groupes. Ces travaux ont été approfondis par le mathématicien français Jean-Pierre Serre où il a formalisé cette théorie dans son livre intitulé **"Représentations linéaires des groupes finis"** publié en 1968. Ces deux auteurs qu'on vient de voir ont travaillé dans le cadre de groupes finis et il n'y a pas de résultats récents accessibles généralisant cela au groupe infini. D'où notre thème : **représentation linéaires, caractères et représentations linéaires irréductibles d'un groupe infini**. Le but principal de ce projet est d'étendre les représentations linéaires aux groupes infinis. Pour atteindre les objectifs de ce travail, nous allons suivre cette démarche dans la présentation :

- 1 Préliminaires
- 2 Représentations linéaires d'un produit de deux groupes.
 - Définitions et exemples
- 3 Résultats
- 4 Conclusion

Définition d'un Groupe

Definition

Un groupe est un couple $(G, *)$ où G est un ensemble non vide et

$$* : G \times G \longrightarrow G$$

$$(x, y) \longmapsto x * y$$

une loi vérifiant :

- i) $*$ est associative, c'est-à-dire, $\forall x, y, z \in G, (x * y) * z = x * (y * z)$;
- ii) G possède un élément neutre pour la loi $*$, c'est-à-dire, $\exists e \in G$ tel que $\forall x \in G, x * e = e * x = x$;
- iii) Tout élément de G est inversible (ou possède un élément symétrique) dans G , c'est-à-dire, $\forall x \in G, \exists y \in G$ tel que $x * y = y * x = e$.

Definition

Si $(G, *)$ est un groupe tel que la loi $*$ satisfasse à la propriété

$$\forall x, y \in G, x * y = y * x,$$

le groupe $(G, *)$ est dit **commutatif** ou encore **abélien**.

Definition

Soit (G_i, \circ_i) une famille de groupes finis indexée par l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$, où $n \in \mathbb{N}^*$. Le *produit direct fini* de cette famille est un groupe $(\prod_{i=1}^n G_i, \circ)$, défini par les propriétés suivantes :

- i) L'ensemble sous-jacent est constitué des familles indexées par $\{1, 2, \dots, n\}$:

$$\prod_{i=1}^n G_i = \{(g_i)_{i=1}^n \mid g_i \in G_i \text{ pour tout } i \in \{1, 2, \dots, n\}\}.$$

- ii) La loi de composition \circ est définie composante par composante :

$$(g_i)_{i=1}^n \circ (g'_i)_{i=1}^n = (g_i \circ_i g'_i)_{i=1}^n,$$

où \circ_i désigne l'opération du groupe G_i pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

- iii) L'élément neutre de $\prod_{i=1}^n G_i$ est la famille $(e_i)_{i=1}^n$, où e_i est l'élément neutre de G_i pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

- iv) L'inverse d'une famille $(g_i)_{i=1}^n \in \prod_{i=1}^n G_i$ est donné par :

$$(g_i)_{i=1}^n{}^{-1} = (g_i^{-1})_{i=1}^n,$$

où g_i^{-1} est l'inverse de g_i dans G_i pour chaque $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Remarque

Soit (G_i, \circ_i) une famille de groupes finis indexée par $i = 1, \dots, n$. Le cardinal du produit direct de ces groupes vérifie la relation suivante :

$$\left| \prod_{i=1}^n G_i \right| = \prod_{i=1}^n |G_i|,$$

où $|G_i|$ désigne le cardinal du groupe G_i .

Propriété

Si chaque (G_i, \circ_i) est un groupe abélien, alors $(\prod_{i=1}^n G_i, \circ)$ est aussi un groupe abélien.

Définition

Soient (G, \cdot) et $(G', *)$ deux groupes. Un homomorphisme de groupes de G dans G' est une application $f : G \rightarrow G'$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in G \times G, \quad f(x \cdot y) = f(x) * f(y).$$

Definition

Une catégorie \mathcal{C} consiste en les données suivantes :

- i) Une classe $|\mathcal{C}|$, dont les éléments sont appelés objets de \mathcal{C} ;
- ii) À chaque couple d'objets (X, Y) de \mathcal{C} , est associé un ensemble $\mathcal{C}(X, Y)$ (ou $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$), dont les éléments sont appelés morphismes (ou flèches) de X dans Y ;
- iii) À chaque triplet (X, Y, Z) d'objets de \mathcal{C} , une application (appelée application de composition)
$$\mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \rightarrow \mathcal{C}(X, Z), \quad (f, g) \mapsto g \circ f;$$
- iv) À chaque objet $X \in \mathcal{C}$, est associé un élément $1_X \in \mathcal{C}(X, X)$ appelé morphisme d'identité de X .

Ces données vérifient les axiomes suivants :

Associativité de la composition : si $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$ sont des morphismes dans \mathcal{C} , alors on a

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Neutralité de l'identité : pour tous $X, Y \in |\mathcal{C}|$, et pour tout $f \in \mathcal{C}(X, Y)$, on a $f \circ 1_X = f$ et $1_Y \circ f = f$.

Definition

Un *foncteur contravariant* est une loi de passage d'une catégorie \mathcal{C} à une catégorie \mathcal{D} , $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, qui satisfait les propriétés suivantes :

- i) À tout objet C de \mathcal{C} associe un objet $F(C)$ de \mathcal{D} ,
- ii) À tout morphisme $X \xrightarrow{f} Y$ de \mathcal{C} associe un morphisme $F(Y) \xrightarrow{F(f)} F(X)$ de \mathcal{D} , et les conditions suivantes doivent être vérifiées :

$$F(1_X) = 1_{F(X)} \text{ pour tout objet } X,$$

$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g) \text{ pour tous morphismes } X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z.$$

Definition

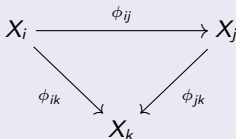
Un ensemble (I, \leq) est dit *ordonné filtrant* si (I, \leq) est un ensemble partiellement ordonné et si pour tous $i, j \in I$, il existe $k \in I$ vérifiant $i \leq k$ et $j \leq k$.

Definition

Soit (I, \leq) un ensemble ordonné filtrant. Un système inductif de groupes sur I est la donnée d'un couple $(X_i, \phi_{ij})_{i,j \in I}$ où X_i sont les groupes et les $\phi_{ij} : X_i \rightarrow X_j$ (pour $i \leq j$) sont des homomorphismes de groupes, vérifiant :

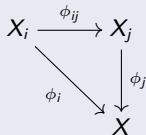
- i) Pour tout $i \in I$, $\phi_{ii} = \text{Id}_{X_i}$;
- ii) Pour tous $(i, j, k) \in I^3$, $i \leq j \leq k \Rightarrow \phi_{jk} \circ \phi_{ij} = \phi_{ik}$.

Ce qui se traduit par le diagramme commutatif suivant :



Definition

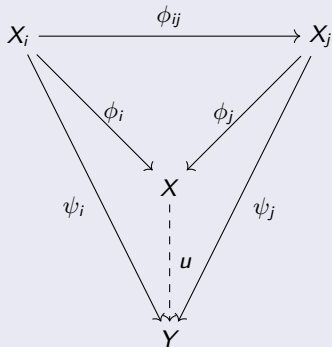
Soit X un groupe et (X_i, ϕ_{ij}) un système inductif de groupes. La famille $(X, \phi_i : X_i \rightarrow X)$ est dite compatible avec (X_i, ϕ_{ij}) si pour tous $i, j \in I$ tels que $i \leq j$, on a $\phi_i = \phi_j \circ \phi_{ij}$. Ce qui est illustré par le diagramme commutatif suivant :



Definition

Soit (X_i, ϕ_{ij}) un système inductif de groupes. La limite inductive ou limite directe, lorsqu'elle existe, est une famille compatible $(X, \phi_i : X_i \rightarrow X)$ avec (X_i, ϕ_{ij}) vérifiant la propriété universelle (PU) suivante :

Pour toute autre famille $(X, \psi_i)_{i \in I}$ compatible avec (X_i, ϕ_{ij}) , il existe un unique homomorphisme de groupes $u : X \rightarrow Y$ tel que le diagramme suivant soit commutatif pour tous $i \leq j$:



Proposition

Notation

La limite inductive $(X, \phi_i)_{i \in I}$ d'un système inductif $(X_i, \phi_{ij})_{j \in I}$ est notée $X = \varinjlim X_i$.

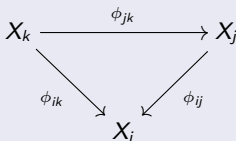
Soit (I, \leq) un ensemble ordonné filtrant.

Definition

Un système projectif de groupes sur (I, \leq) est un couple $(X_i, \phi_{ij})_{i, j \in I}$ où les X_i sont les groupes et les $\phi_{ij} : X_j \rightarrow X_i$ ($i \leq j$) sont les homomorphismes de groupes vérifiant :

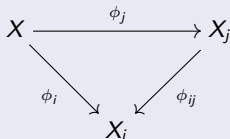
- i) $\phi_{ii} = \text{Id}_{X_i}$ pour tout $i \in I$;
- ii) pour tout $(i, j, k) \in I^3$ tels que $i \leq j \leq k$, on a $\phi_{ik} = \phi_{ij} \circ \phi_{jk}$.

Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif :



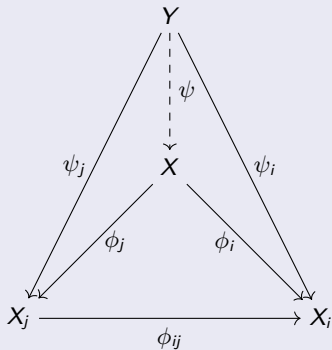
Definition

Soient X un groupe et $(X_i, \phi_{ij})_{i,j \in I}$ un système projectif de groupes. La famille de homomorphismes $(\phi_i : X \rightarrow X_i)_{i \in I}$, qu'on note (X, ϕ_i) , est dite compatible avec le système projectif $(X_i, \phi_{ij})_{i,j \in I}$ si pour tous $i, j \in I$ tels que $i \leq j$, on a : $\phi_{ij} \circ \phi_j = \phi_i$. Ce qui se traduit par le diagramme commutatif suivant :



Definition

Soit $(X_i, \phi_{ij})_{i,j \in I}$ un système projectif de groupes. La limite projective ou limite inverse du système projectif $(X_i, \phi_{ij})_{i,j \in I}$ est une famille $(X, (\phi_i)_{i \in I})$ de homomorphismes compatibles avec $(X_i, \phi_{ij})_{i,j \in I}$, vérifiant la propriété universelle suivante : Si $(\psi_i : Y \rightarrow X_i)_{i \in I}$ ($Y \in |\mathcal{C}|$) est une famille de morphismes compatibles, alors il existe un unique morphisme $\psi : Y \rightarrow X$ tel que le diagramme suivant commute pour tous $i \leq j$:



$$\psi_i = \phi_i \circ \psi$$

$$\psi_j = \phi_j \circ \psi$$

Proposition (Unicité de la limite projective)

Si une limite projective d'un système projectif existe, elle est unique à isomorphisme près.

Notation

Une telle limite est notée $\varprojlim_I X_i$ ou $\varprojlim_{i \in I} X_i$.

Définition (Groupe profini)

La limite projective d'un système projectif de groupes finis est appelée groupe profini.

Proposition

Le complété profini d'un groupe est unique à isomorphisme près, c'est-à-dire si (\widehat{G}_1, j_1) et (\widehat{G}_2, j_2) sont deux complétés de G , alors il existe un isomorphisme $\hat{\alpha} : \widehat{G}_1 \rightarrow \widehat{G}_2$ tel que $\hat{\alpha}j_1 = j_2$.

Theorem

Soit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur contravariant entre deux catégories \mathcal{C} et \mathcal{D} . Alors, l'image d'une limite inductive par le foncteur F est une limite projective.

1. Départ : système inductif (X_i, f_{ij}) dans \mathcal{C}

$$f_{ii} = \text{id}_{X_i}$$

$$f_{jk} \circ f_{ij} = f_{ik}$$

$$X = \varinjlim X_i, \text{ avec } u_i : X_i \rightarrow X$$

Par définition de la limite inductive $X = \varinjlim X_i$, on a :

Pour toute famille compatible $v_i : X_i \rightarrow Y$ dans \mathcal{C} , c'est-à-dire $v_j \circ f_{ij} = v_i$,

Il existe un unique morphisme $v : X \rightarrow Y$ tel que $v \circ u_i = v_i$

2. Application du foncteur contravariant F

$$f_{ij} : X_i \rightarrow X_j \Rightarrow F(f_{ij}) : F(X_j) \rightarrow F(X_i)$$

On obtient un système projectif dans \mathcal{D} et

3. Famille compatible $(F(X), F(u_i))$

$$u_j \circ f_{ij} = u_i \Rightarrow F(f_{ij}) \circ F(u_j) = F(u_i)$$

4. Propriété universelle

Par la propriété universelle dans \mathcal{C} , il existe $v : X \rightarrow Y$ tel que $v \circ u_i = v_i$

En appliquant F , on obtient un morphisme $F(v) : F(Y) \rightarrow F(X)$ tel que :

$$F(u_i) \circ F(v) = F(v_i)$$

Conclusion : $F(X)$ satisfait la définition d'une limite projective, donc :

$$F\left(\varprojlim X_i\right) = \varprojlim F(X_i)$$

Definition

Soit \mathbb{K} un corps. Une représentation \mathbb{K} -linéaire d'un groupe fini G est un homomorphisme de groupes

$$\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$$

où V est un \mathbb{K} -espace vectoriel et $\mathrm{GL}(V)$ est le groupe des applications linéaires bijectives de V sur lui-même.

Remarque

Si V est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n , on dit que n est le degré de la représentation. De plus, en choisissant une base de V , le groupe $\mathrm{GL}(V)$ est isomorphe au groupe

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathrm{M}(n, \mathbb{K}) \mid \det(A) \neq 0\},$$

où $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ est le groupe des matrices inversibles de taille $n \times n$ équipées de la multiplication des matrices à coefficients dans \mathbb{K} , et $\det(A)$ désigne le déterminant de la matrice A .

Definition

[?] Soient $(V, \rho)_G$ et $(W, \psi)_G$ deux représentations linéaires. Un opérateur d'entrelacement, ou morphisme de représentations, est une application linéaire $\alpha : V \rightarrow W$ telle que

$$\alpha \circ \rho(g) = \psi(g) \circ \alpha, \quad \forall g \in G.$$

On dit que α est équivariante. Lorsque $\alpha : V \rightarrow W$ est un isomorphisme, on dit que les représentations $(V, \varphi)_G$ et $(W, \psi)_G$ sont isomorphes.

Definition

Soit W un sous-espace vectoriel de V et G un groupe. On dit que W est stable (ou invariant) sous l'action de G , ou encore G -stable, si pour tout $g \in G$ et tout $w \in W$, on a $\rho_g(w) \in W$.

Definition

Une sous-représentation de $(V, \rho)_G$ est la restriction $\rho_W : G \rightarrow \text{GL}(W)$ où W est stable sous G . Elle est définie par

$$\rho_W(g) = \rho(g)|_W, \quad \forall g \in G.$$

Proposition

Soit $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ une représentation linéaire sur G telle que W soit un sous-espace vectoriel de V stable sous l'action de G . Alors, l'application restreinte $\rho_W : G \rightarrow \text{GL}(W)$ définie par $\rho_W(g) = \rho(g)|_W$ pour tout $g \in G$ est un homomorphisme de groupes.

Lemma

Soient $\varphi : G \rightarrow \text{GL}(V_1)$ et $\psi : G \rightarrow \text{GL}(V_2)$ deux représentations linéaires de G . Soit $f : V_1 \rightarrow V_2$ un morphisme de représentations linéaires. Alors :

- i) $\rho_{\ker(f)} : G \rightarrow \text{GL}(\ker(f))$ est une sous-représentation linéaire de $\varphi : G \rightarrow \text{GL}(V_1)$;
- ii) L'image $\text{im}(f)$, $\rho_{\text{im}(f)} : G \rightarrow \text{GL}(\text{im}(f))$, est une sous-représentation linéaire de $\psi : G \rightarrow \text{GL}(V_2)$;
- iii) $V_1 / \ker(f) \cong \text{im}(f)$ au sens de représentations linéaires de G .

Definition

Soit $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ une représentation linéaire sur G . Le caractère de V , noté χ_V , est la fonction

$$\chi_V : G \rightarrow \mathbb{C}$$

définie pour tout $g \in G$ par

$$\chi_V(g) := \text{Tr}(\rho(g)),$$

où Tr désigne la trace.

Theorem

Soit $(\rho, V)_G$ une représentation linéaire. On peut munir V d'un produit hermitien $(\cdot, \cdot)_V$ qui rend la représentation linéaire $(\rho, V)_G$ unitaire.

Proposition

Soient $\rho_V : G \rightarrow \text{GL}(V)$ et $\rho_W : G \rightarrow \text{GL}(W)$ deux représentations linéaires sur G de degrés n et m ($n, m \in \mathbb{N}^*$), et de caractères χ_V et χ_W respectivement. On a :

- i) $\chi_V(1) = \dim V$;
- ii) $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$;
- iii) $\chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$ pour $\forall g \in G$.

Theorem (Frobenius)

Pour tout groupe fini G , le nombre de représentations irréductibles non-isomorphes deux à deux de G est exactement égal au nombre $c(G)$ de classes de conjugaison de G .

Proposition

Deux représentations d'un groupe G sont isomorphes si et seulement si elles ont le même caractère.

Definition

On dit qu'une représentation linéaire $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ est *irréductible* si l'espace vectoriel V n'est pas réduit à $\{0\}$ et si V ne possède aucun sous-espace invariant par ρ autre que $\{0\}$ et V .

Theorem

Soit $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ une représentation linéaire de G dans V et soit W un sous-espace vectoriel de V stable sous G . Alors, il existe un complément W^0 de W dans V qui est stable sous G .

Theorem (Théorème de Maschke)

Toute représentation linéaire $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ sur G dans un espace vectoriel complexe de dimension finie se décompose en somme directe de représentations irréductibles.

Theorem (Lemme de Schur)

Soient $\rho_1 : G \rightarrow V_1$ et $\rho_2 : G \rightarrow V_2$ deux représentations irréductibles de G .
Soit $f : V_1 \rightarrow V_2$ une application linéaire vérifiant

$$\forall g \in G, \quad f \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ f.$$

On a les propriétés suivantes :

- (i) Si ρ_1 et ρ_2 ne sont pas isomorphes, alors $f = 0$.
- (ii) Si $V_1 = V_2$ et $\rho_1 = \rho_2$, alors f est une homothétie.

Corollary

Soit $h : V \rightarrow W$ une application linéaire. Posons :

$$h_0 = \frac{1}{N} \sum_{g \in G} (\rho_W(g))^{-1} \circ h \circ \rho_V(g),$$

où $N = \text{Card}(G)$. Alors :

- i) Si ρ_V et ρ_W ne sont pas isomorphes, on a $h_0 = 0$.
- ii) Si $V = W$ et $\rho_V = \rho_W$, alors h_0 est une homothétie de rapport $\frac{1}{n} \text{Tr}(h)$, où $n = \dim(V)$.

Remarque

Une traduction matricielle du corollaire précédent est : si φ et ψ sont des fonctions $G \rightarrow \mathbb{C}$, alors

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \varphi(t^{-1}) \psi(t) = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \varphi(t) \psi(t^{-1}). \quad (1)$$

Proposition

Pour $g \in G$, soient $(r_{i_1 j_1}(g))$ et $(u_{i_2 j_2}(g))$ les matrices respectives de $\rho_V(g)$ et $\rho_W(g)$ dans les bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ de V_1, V_2 . Alors :

- i) Si ρ_V et ρ_W ne sont pas isomorphes, on a $\langle u_{i_2 j_2}, r_{j_1 i_1} \rangle = 0$ pour tous indices i_1, j_1, i_2, j_2 .
- ii) Si $V_1 = V_2$ est de dimension n et $\rho_V = \rho_W$ (auquel cas on prend $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$ et on a $r_{ij} = u_{ij}$ pour tous indices i, j), alors $\langle r_{i_2 j_2}, r_{j_1 i_1} \rangle = 0$ si $i_1 \neq i_2$ ou $j_1 \neq j_2$, et $\langle r_{ij}, r_{ji} \rangle = \frac{1}{n}$ pour tous indices i, j .

Théorème

- i) Soit χ le caractère d'une représentation irréductible ρ de G . Alors, $(\chi|\chi) = 1$.
- ii) Soient χ_1 et χ_2 les caractères de deux représentations irréductibles non isomorphes ρ_1 et ρ_2 . Alors, $(\chi_1|\chi_2) = 0$.

Théorème

Soit G un groupe. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) G est abélien.
- (ii) Toutes les représentations irréductibles de G sont de degré 1.

Les groupes non abéliens infinis, comme les groupes de Lie, sont plus complexes et ne se décomposent pas facilement.

Exemple : Le groupe de Heisenberg, utilisé en mécanique quantique.

La théorie des représentations de ces groupes nécessite des outils avancés comme l'analyse spectrale et la cohomologie des groupes.

Parvenus au terme de notre travail, où il était principalement question pour nous d'étendre les représentations linéaires aux groupes infinis, il en ressort que nous avons construit les représentations linéaires des groupes infinis vus comme produits infinis de groupes finis. Les caractères de tels groupes sont construits comme des suites, dont l'existence est liée aux propriétés de convergence de ces suites. Nous avons donné quelques propriétés des représentations irréductibles de ces groupes. Enfin, nous avons étudié le cas particulier de $\widehat{\mathbb{Z}}$ qui est le complété profini de \mathbb{Z} . Ici, nous avons construit explicitement les représentations linéaires, calculé les caractères associés, et donné quelques propriétés d'irréductibilité.

Excellence M. le president du jury, très chers honorables membres du jury, à vos titres et grades respectifs, nous n'avons pas la pretention d'avoir effectue un travail parfait. Nous admettons que notre travail puiss comporter des impertions et c'est pour cette raison que nous nous soumettons a vos differentes remarques et suggestion tout en vous rassurant de les prendre en consideration pour ameliorer le present travail.

Merci pour votre aimable attention, J'en ai fini.