

Représentation linéaire, caractère et représentations linéaires irréductibles d'un groupe infini.

DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES - INFORMATIQUE

Mémoire présenté par : SOUNKOUA Roger

Sous la direction du

Dr. Gilbert MANTIKA

(Chargée de Cours, UMa, FS)

Pr. Dieukam

(Maître de Conférences, UMa, FS)

23 juillet 2025

Introduction.

- 1 Préliminaires
- 2 Représentations linéaires d'un produit de deux groupes
- 3 Représentations linéaires d'un produit arbitraire des groupes
- 4 Conclusion

Définition d'un Groupe

Definition

Un groupe est un couple $(G, *)$ où G est un ensemble non vide et

$$* : G \times G \longrightarrow G$$

$$(x, y) \longmapsto x * y$$

est une loi telle que :

- i) $*$ est associative, c'est-à-dire, $\forall x, y, z \in G, (x * y) * z = x * (y * z)$;
- ii) G possède un élément neutre pour la loi $*$, c'est-à-dire, $\exists e \in G$ tel que $\forall x \in G, x * e = e * x = x$;
- iii) Tout élément de G est inversible (ou possède un élément symétrique) dans G , c'est-à-dire, $\forall x \in G, \exists y \in G$ tel que $x * y = y * x = e$.

Definition

Si $(G, *)$ est un groupe tel que la loi $*$ satisfasse à la propriété

$$\forall x, y \in G, x * y = y * x,$$

le groupe $(G, *)$ est dit **commutatif** ou encore **abélien**.

Remarque

Soit (G_i, \circ_i) une famille de groupes finis indexée par $i = 1, \dots, n$. Le cardinal du produit direct de ces groupes vérifie la relation suivante :

$$\left| \prod_{i=1}^n G_i \right| = \prod_{i=1}^n |G_i|,$$

où $|G_i|$ désigne le cardinal du groupe G_i .

Definition

Une catégorie \mathcal{C} consiste en les données suivantes :

- i) Une classe $|\mathcal{C}|$, dont les éléments sont appelés objets de \mathcal{C} ;
- ii) À chaque couple d'objets (X, Y) de \mathcal{C} , est associé un ensemble $\mathcal{C}(X, Y)$ (ou $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$), dont les éléments sont appelés morphismes (ou flèches) de X dans Y ;
- iii) À chaque triplet (X, Y, Z) d'objets de \mathcal{C} , une application (appelée application de composition)
$$\mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \rightarrow \mathcal{C}(X, Z), \quad (f, g) \mapsto g \circ f;$$
- iv) À chaque objet $X \in \mathcal{C}$, est associé un élément $1_X \in \mathcal{C}(X, X)$ appelé morphisme d'identité de X .

Ces données vérifient les axiomes suivants :

Associativité de la composition : si $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$ sont des morphismes dans \mathcal{C} , alors on a

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Neutralité de l'identité : pour tous $X, Y \in |\mathcal{C}|$, et pour tout $f \in \mathcal{C}(X, Y)$, on a $f \circ 1_X = f$ et $1_Y \circ f = f$.

Definition

Un *foncteur contravariant* est une loi de passage d'une catégorie \mathcal{C} à une catégorie \mathcal{D} , $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, qui satisfait les propriétés suivantes :

- i) À tout objet C de \mathcal{C} associe un objet $F(C)$ de \mathcal{D} ,
- ii) À tout morphisme $X \xrightarrow{f} Y$ de \mathcal{C} associe un morphisme $F(Y) \xrightarrow{F(f)} F(X)$ de \mathcal{D} , et les conditions suivantes doivent être vérifiées :

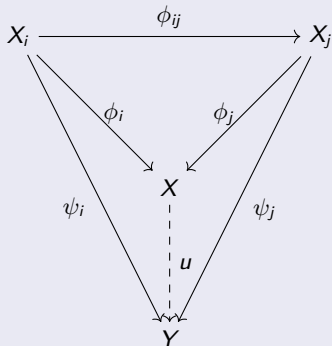
$$F(1_X) = 1_{F(X)} \text{ pour tout objet } X,$$

$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g) \text{ pour tous morphismes } X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z.$$

Definition

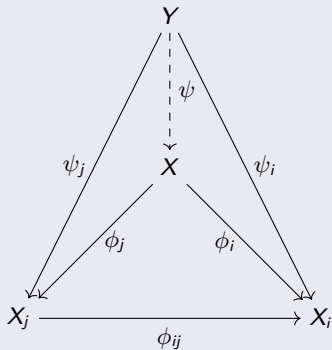
Soit (X_i, ϕ_{ij}) un système inductif de groupes. La limite inductive ou limite directe, lorsqu'elle existe, est une famille compatible $(X, \phi_i : X_i \rightarrow X)$ avec (X_i, ϕ_{ij}) vérifiant la propriété universelle (PU) suivante :

Pour toute autre famille $(X, \psi_i)_{i \in I}$ compatible avec (X_i, ϕ_{ij}) , il existe un unique homomorphisme de groupes $u : X \rightarrow Y$ tel que le diagramme suivant soit commutatif pour tous $i \leq j$:



Definition

Soit $(X_i, \phi_{ij})_{i,j \in I}$ un système projectif de groupes. La limite projective ou limite inverse du système projectif $(X_i, \phi_{ij})_{i,j \in I}$ est une famille $(X, (\phi_i)_{i \in I})$ de homomorphismes compatibles avec $(X_i, \phi_{ij})_{i,j \in I}$, vérifiant la propriété universelle suivante : Si $(\psi_i : Y \rightarrow X_i)_{i \in I}$ ($Y \in |\mathcal{C}|$) est une famille de morphismes compatibles, alors il existe un unique morphisme $\psi : Y \rightarrow X$ tel que le diagramme suivant commute pour tous $i \leq j$:



$$\psi_i = \phi_i \circ \psi$$

$$\psi_j = \phi_j \circ \psi$$

Théorème

Soit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un foncteur contravariant entre deux catégories \mathcal{C} et \mathcal{D} . Alors, l'image d'une limite inductive par le foncteur F est une limite projective.

1. Départ : système inductif (X_i, f_{ij}) dans \mathcal{C}

$$f_{ii} = \text{id}_{X_i}$$

$$f_{jk} \circ f_{ij} = f_{ik}$$

$$X = \varinjlim X_i, \text{ avec } u_i : X_i \rightarrow X$$

Par définition de la limite inductive $X = \varinjlim X_i$, on a :

Pour toute famille compatible $v_i : X_i \rightarrow Y$ dans \mathcal{C} , c'est-à-dire $v_j \circ f_{ij} = v_i$,

Il existe un unique morphisme $v : X \rightarrow Y$ tel que $v \circ u_i = v_i$

2. Application du foncteur contravariant F

$$f_{ij} : X_i \rightarrow X_j \Rightarrow F(f_{ij}) : F(X_j) \rightarrow F(X_i)$$

On obtient un système projectif dans \mathcal{D} et

3. Famille compatible $(F(X), F(u_i))$

$$u_j \circ f_{ij} = u_i \Rightarrow F(f_{ij}) \circ F(u_j) = F(u_i)$$

4. Propriété universelle

Par la propriété universelle dans \mathcal{C} , il existe $v : X \rightarrow Y$ tel que $v \circ u_i = v_i$

En appliquant F , on obtient un morphisme $F(v) : F(Y) \rightarrow F(X)$ tel que :

$$F(u_i) \circ F(v) = F(v_i)$$

Conclusion : $F(X)$ satisfait la définition d'une limite projective, donc :

$$F\left(\varprojlim X_i\right) = \varprojlim F(X_i)$$

Definition

Soit \mathbb{K} un corps. Une représentation \mathbb{K} -linéaire d'un groupe fini G est un homomorphisme de groupes

$$\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$$

où V est un \mathbb{K} -espace vectoriel et $\mathrm{GL}(V)$ est le groupe des applications linéaires bijectives de V sur lui-même.

Remarque

Si V est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n , on dit que n est le degré de la représentation. De plus, en choisissant une base de V , le groupe $\mathrm{GL}(V)$ est isomorphe au groupe

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathrm{M}(n, \mathbb{K}) \mid \det(A) \neq 0\},$$

où $\mathrm{GL}(n, \mathbb{K})$ est le groupe des matrices inversibles de taille $n \times n$ équipées de la multiplication des matrices à coefficients dans \mathbb{K} , et $\det(A)$ désigne le déterminant de la matrice A .

Definition

Soit $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ une représentation linéaire sur G . Le caractère de V , noté χ_V , est la fonction

$$\chi_V : G \rightarrow \mathbb{C}$$

définie pour tout $g \in G$ par

$$\chi_V(g) := \text{Tr}(\rho(g)),$$

où Tr désigne la trace.

Théorème

Soit G un groupe. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) G est abélien.*
- (ii) Toutes les représentations irréductibles de G sont de degré 1.*

Proposition

Soit $(V_i)_{i \in I}$ une famille non vide d'espaces vectoriels sur un même corps commutatif \mathbb{K} .
Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille non vide de vecteurs non nuls tels que, pour tout $i \in I$, le vecteur u_i appartienne à V_i . Pour tous sous-ensembles finis J et K de I tels que $J \subseteq K$, considérons l'application linéaire injective

$$\begin{aligned}\varphi_{J,K} : \bigotimes_{i \in J} V_i &\longrightarrow \bigotimes_{i \in K} V_i \\ \bigotimes_{i \in J} v_i &\longmapsto \bigotimes_{i \in J} v_i \otimes \left(\bigotimes_{i \in K \setminus J} u_i \right).\end{aligned}$$

Soit $\mathcal{F}(I)$ l'ensemble de tous les sous-ensembles finis de I .

- i) Le système $(\bigotimes_{i \in J} V_i, \varphi_{J,K})_{J \in \mathcal{F}(I)}$ est inductif.
- ii) La limite inductive du système inductif $(\bigotimes_{i \in J} V_i, \varphi_{J,K})_{J \in \mathcal{F}(I)}$, notée $\bigotimes_{i \in I} V_i$, est le produit tensoriel infini des espaces vectoriels $(V_i)_{i \in I}$.

Proposition

Soit $(V_i)_{i \in I}$ une famille non vide d'espaces vectoriels sur un même corps commutatif \mathbb{K} . Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille non vide de vecteurs non nuls tels que, pour tout $i \in I$, le vecteur u_i appartienne à V_i . Pour tous sous-ensembles finis J et K de I tels que $J \subseteq K$, l'application

$$\begin{aligned} \psi_{J,K} : GL\left(\bigotimes_{i \in K} V_i\right) &\longrightarrow GL\left(\bigotimes_{i \in J} V_i\right) \\ f &\longmapsto \psi_{J,K}(f) = f_{J,K} \end{aligned}$$

avec $f_{J,K}$ défini comme suit : pour tout $f \in GL\left(\bigotimes_{i \in K} V_i\right)$ et tout $\bigotimes_{i \in J} v_i \in \bigotimes_{i \in J} V_i$,

$$f_{J,K}\left(\bigotimes_{i \in J} v_i\right) = \bigotimes_{i \in J} v'_i \text{ si } f\left(\left(\bigotimes_{i \in J} v_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{i \in K \setminus J} t_i\right)\right) = \left(\bigotimes_{i \in J} v'_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{i \in K \setminus J} v'_i\right) = \bigotimes_{i \in K} v'_i,$$

pour un certain $\bigotimes_{i \in K \setminus J} t_i \in \bigotimes_{i \in K \setminus J} V_i$, est un homomorphisme de groupes.

Proposition

Le système $(GL(\bigotimes_{i \in J} V_i), \psi_{J,K})$ est projectif, avec pour limite projective

$$\varprojlim_{J \in \mathcal{F}(I)} GL\left(\bigotimes_{i \in J} V_i\right),$$

où $\mathcal{F}(I)$ désigne l'ensemble des sous-ensembles finis de I .

Esquisse de la preuve

Pour chaque $J \in \mathcal{F}(I)$, on considère le groupe :

$$GL \left(\bigotimes_{i \in J} V_i \right)$$

Pour tout $J \subseteq K$, on définit un morphisme :

$$\psi_{J,K} : GL \left(\bigotimes_{i \in K} V_i \right) \longrightarrow GL \left(\bigotimes_{i \in J} V_i \right)$$

On vérifie deux propriétés fondamentales :

Identité : $\psi_{J,J} = \text{id}$

Compatibilité : $\psi_{J,K} \circ \psi_{K,L} = \psi_{J,L}$ pour $J \subseteq K \subseteq L$

On obtient un système projectif :

$$\left(GL \left(\bigotimes_{i \in J} V_i \right), \psi_{J,K} \right)$$

Comme **Grp** est complète, la limite projective existe :

$$\varprojlim_{J \in \mathcal{F}(I)} GL \left(\bigotimes_{i \in J} V_i \right)$$

Proposition

Soit la correspondance $GL : \text{Vect}_{\otimes V_i} \rightarrow \text{Grp}$ entre les catégories $\text{Vect}_{\otimes V_i}$ et Grp où Grp désigne la catégorie des groupes. GL est un foncteur contravariant.

Proposition

Soit J un sous-ensemble fini d'un ensemble I et $(G_i)_{i \in J}$ une famille finie de groupes finis. Soit $(V_i)_{i \in J}$ une famille finie d'espaces vectoriels de dimension finie sur le même corps F et pour chaque $i \in J$, soit $\varphi_i : G_i \rightarrow GL(V_i)$ une représentation linéaire de G_i dans V_i . Alors, le produit tensoriel $\varphi_J = \otimes_{i \in J} \varphi_i$ des applications $(\varphi_i)_{i \in J}$ défini par :

$$\begin{aligned} \varphi_J = \otimes_{i \in J} \varphi_i : \prod_{i \in J} G_i &\longrightarrow GL(\otimes_{i \in J} V_i) \\ (g_i)_{i \in J} &\longmapsto \otimes_{i \in J} \varphi_i((g_i)_{i \in J}) = \otimes_{i \in J} \varphi_i(g_i) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \otimes_{i \in J} \varphi_i(g_i) : \otimes_{i \in J} V_i &\longrightarrow \otimes_{i \in J} V_i \\ \otimes_{i \in J} v_i &\longmapsto (\otimes_{i \in J} \varphi_i(g_i))(\otimes_{i \in J} v_i) = \otimes_{i \in J} \varphi_i(g_i)(v_i) \end{aligned}$$

est une représentation linéaire du produit direct fini $\prod_{i \in J} G_i$ des groupes $(G_i)_{i \in J}$ dans le produit tensoriel fini $\otimes_{i \in J} V_i$.

Proposition

Soient (I, \leq) un ensemble dirigé et $(G_i)_{i \in I}$ une famille non vide de groupes finis. Pour tout sous-ensemble fini J de I , définissons $G_J = \prod_{i \in J} G_i$. Si J et K sont des sous-ensembles de I tels que $J \subseteq K$, alors nous considérons la projection :

$$\begin{aligned} \varphi_{J,K} : G_K &\longrightarrow G_J \\ (g_i)_{i \in K} &\longmapsto (g_i)_{i \in J}. \end{aligned}$$

Le système $(G_J, \varphi_{J,K})$ est projectif avec limite projective $\prod_{i \in I} G_i$.

Lemma

Soit $(V_i)_{i \in I}$ une famille non vide d'espaces vecteurs de dimension finie sur le même corps \mathbb{K} et soit $\bigotimes_{i \in I} V_i$ le produit tensoriel infini des espaces vectoriels $(V_i)_{i \in I}$ où chaque V_i ($i \in I$) est un espace vectoriel non nul. Soit $\mathcal{F}(I)$ l'ensemble des sous-ensembles finis de I . Alors,

$$\varprojlim_{J \in \mathcal{F}(I)} GL \left(\bigotimes_{i \in J} V_i \right) = GL \left(\varinjlim_{J \in \mathcal{F}(I)} \left(\bigotimes_{i \in J} V_i \right) \right)$$

Théorème

Soit $(G_i)_{i \in I}$ une famille non vide de groupes et $(\varphi_i)_{i \in I}$ une famille de représentations linéaires, où chaque

$$\varphi_i : G_i \rightarrow \mathrm{GL}(V_i)$$

est une représentation du groupe G_i sur un espace vectoriel V_i . Alors, la représentation linéaire sur le produit tensoriel des espaces V_i est donnée par :

$$\varphi_I = \bigotimes_{i \in I} \varphi_i : \prod_{i \in I} G_i \longrightarrow \mathrm{GL} \left(\bigotimes_{i \in I} V_i \right).$$

Preuve :

Soient $J, K \in \mathcal{F}(I)$ avec $\mathcal{F}(I)$ l'ensemble de partie finie de I tels que $J \subseteq K$. Le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i \in K} G_i & \xrightarrow{\varphi_K} & GL\left(\bigotimes_{i \in K} V_i\right) \\ \downarrow \varphi_{J,K} & & \downarrow \psi_{J,K} \\ \prod_{i \in J} G_i & \xrightarrow{\varphi_J} & GL\left(\bigotimes_{i \in J} V_i\right) \end{array}$$

En effet, soient J et K deux sous-ensembles finis de I tels que $J \subseteq K$. Soit $(g_i)_{i \in K}$ un élément de $\prod_{i \in K} G_i$. Il est clair que :

$$\psi_{J,K} \circ \varphi_K((g_i)_{i \in K}) = \psi_{J,K}(\varphi_K((g_i)_{i \in J})) = \psi_{J,K}\left(\bigotimes_{i \in J} \varphi_i(g_i)\right)$$

et

$$\varphi_J \circ \varphi_{J,K}((g_i)_{i \in K}) = \varphi_J(\varphi_{J,K}((g_i)_{i \in K})) = \varphi_J((g_i)_{i \in J}) = \bigotimes_{i \in J} \varphi_i(g_i).$$

Soit $\bigotimes_{i \in J} v_i$ un élément de $\bigotimes_{i \in J} V_i$. Alors $\left(\bigotimes_{i \in J} v_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{i \in K \setminus J} u_i\right) \in \bigotimes_{i \in K} V_i$.

Ainsi,

$$\bigotimes_{i \in K} \varphi_i(g_i) \left(\left(\bigotimes_{i \in J} v_i \right) \otimes \left(\bigotimes_{i \in K \setminus J} u_i \right) \right) = \left(\bigotimes_{i \in J} \varphi_i(g_i)(v_i) \right) \otimes \left(\bigotimes_{i \in K \setminus J} \varphi_i(g_i)(u_i) \right).$$

Cela découle de la définition de $\psi_{J,K}$ que :

$$\psi_{J,K} \left(\bigotimes_{i \in K} \varphi_i(g_i) \right) \left(\bigotimes_{i \in J} v_i \right) = \bigotimes_{i \in J} \varphi_i(g_i)(v_i) = \bigotimes_{i \in J} \varphi_i(g_i) \left(\bigotimes_{i \in J} v_i \right).$$

Par conséquent, le diagramme ci-dessus commute. Ainsi il existe un unique homomorphisme de groupes :

$$\varphi_I = \varprojlim_{J \in \mathcal{F}(I)} \left(\bigotimes_{i \in J} \varphi_i \right) : \prod_{i \in I} G_i \longrightarrow GL \left(\bigotimes_{i \in I} V_i \right),$$

qui est une représentation linéaire du produit direct infini $\prod_{i \in I} G_i$ des groupes G_i dans $\bigotimes_{i \in I} V_i$.

Le théorème est donc démontré.

Definition

Soient G_1 et G_2 des groupes, et ρ_1 et ρ_2 des représentations linéaires respectives de G_1 et G_2 , avec χ_1 et χ_2 les caractères associés à ces représentations. Le caractère χ du produit tensoriel des représentations $\rho_1 \otimes \rho_2$ de $G_1 \times G_2$ est défini par la formule :

$$\chi(g_1, g_2) = \chi_1(g_1)\chi_2(g_2),$$

pour tout $g_1 \in G_1$ et $g_2 \in G_2$.

Proposition

Soit J un ensemble fini et φ_J la représentation définie par :

$$\varphi_J = \bigotimes_{i \in J} \varphi_i : \prod_{i \in J} G_i \longrightarrow GL \left(\bigotimes_{i \in J} V_i \right)$$

où $\forall i \in J$, $\varphi_i : G_i \rightarrow GL(V_i)$ est une représentation de chaque groupe G_i et V_i est l'espace vectoriel associé.

Le caractère χ_{φ_J} de la représentation φ_J du produit direct fini $\prod_{i \in J} G_i$ est donné par :

$$\chi_{\varphi_J}((g_i)_{i \in J}) = \prod_{i \in J} \chi_{\varphi_i}(g_i), \quad \forall (g_i)_{i \in J} \in \prod_{i \in J} G_i,$$

où χ_{φ_i} est le caractère de la représentation φ_i du groupe G_i .

Proposition

Soit φ_I la représentation définie par :

$$\varphi_I = \bigotimes_{i \in I} \varphi_i : \prod_{i \in I} G_i \longrightarrow GL \left(\bigotimes_{i \in I} V_i \right),$$

où $\varphi_i : G_i \rightarrow GL(V_i)$ est une représentation linéaire de chaque groupe G_i , et V_i est l'espace vectoriel complexe associé.

À chaque représentation linéaire φ_i , associons le caractère (une fonction de i)

$$\chi_{\varphi_i} : G_i \rightarrow \mathbb{C}$$

défini pour tout $g_i \in G_i$ par :

$$\chi_{\varphi_i}(g_i) := \text{Tr}(\varphi_i(g_i)).$$

Définissons la suite $(a_i)_{i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$, dont chaque terme est donné par :

$$a_i := \chi_{\varphi_i}(g_i), \quad i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Considérons la suite des produits partiels associée à $(a_i)_{i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$, définie par :

$$P_N = \prod_{i=1}^N \chi_{\varphi_i}(g_i), \quad N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Si la suite $(P_N)_{N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ converge, alors le caractère χ_{φ_I} de la représentation tensorielle infinie φ_I est défini par :

$$\chi_{\varphi_I}((g_i)_{i \in I}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N \chi_{\varphi_i}(g_i) = \prod_{i \in I} \chi_{\varphi_i}(g_i).$$

Dans le cas contraire, le caractère χ_{φ_I} n'est pas défini.

Théorème

Soit $(G_i)_{i \in I}$ une famille non vide de groupes finis d'ordre premier chacun, $(V_i)_{i \in I}$ une famille non vide d'espaces vectoriels sur \mathbb{K} , et

$$(\varphi_i : G_i \rightarrow \mathrm{GL}(V_i))_{i \in I}$$

une famille de représentations linéaires Soit $G = \prod_{i \in I} G_i$

- i) Si chaque G_i est un groupe cyclique, alors toute représentation irréductible de G est de degré 1.
- ii) Si chaque G_i est un groupe d'ordre premier, alors toute représentation irréductible de G est de degré 1.
- iii) Si presque toutes les représentations φ_i sont triviales, alors la représentation induite sur le produit tensoriel des espaces V_i

$$\varphi_I = \bigotimes_{i \in I} \varphi_i : G = \prod_{i \in I} G_i \longrightarrow \mathrm{GL} \left(\bigotimes_{i \in I} V_i \right),$$

est irréductible si et seulement si chaque représentation φ_i non triviale est irréductible ainsi que leur produit tensoriel.

Definition

Le complété profini $\hat{\mathbb{Z}}$ est défini comme la limite projective du système :

$$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \varphi_{m,n}),$$

où :

- i) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est le groupe des classes d'équivalence modulo n ,
- ii) $\varphi_{m,n} : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est la surjection canonique définie lorsque $n \mid m$.

Proposition

Soit N un sous-ensemble fini de \mathbb{N} et soit $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{n \in N}$ une famille finie de groupes cycliques. Soit $(V_n)_{n \in N}$ une famille finie non vide d'espaces vectoriels de dimension finie, et pour chaque $n \in N$, soit

$$\varphi_n : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathrm{GL}(V_n)$$

une représentation linéaire.

Alors, on a la représentation linéaire :

$$\varphi_N = \bigotimes_{n \in N} \varphi_n : \prod_{n \in N} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rightarrow \mathrm{GL} \left(\bigotimes_{n \in N} V_n \right)$$

tel que :

$$\varphi_N((g_n)_{n \in N}) = \bigotimes_{n \in N} \varphi_n(g_n).$$

De plus, en passant à la limite inverse, on a la représentation linéaire sur un produit tensoriel infini

$$\varphi_{\mathbb{N}} = \bigotimes_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n : \varprojlim_{N \in \mathcal{F}(\mathbb{N})} \prod \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{GL} \left(\bigotimes_{n \in \mathbb{N}} V_n \right).$$

Théorème

L'application

$$\Phi : \widehat{\mathbb{Z}} \rightarrow \varprojlim_{N \in \mathcal{F}(\mathbb{N})} \prod_{n \in N} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

définie par :

$$\Phi((x_n)_{n \geq 1}) = (x_N)_{N \in \mathcal{F}(\mathbb{N})}, \quad \text{où } x_N = (x_n)_{n \in N}$$

est un isomorphisme de groupes .

Ainsi, d'après les résultats précédents, nous obtenons la représentation linéaire suivante :

$$\varphi_{\mathbb{N}} : \widehat{\mathbb{Z}} = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{GL} \left(\bigotimes_{n \in \mathbb{N}} V_n \right).$$

Definition

Un caractère de $\widehat{\mathbb{Z}}$ est un homomorphisme de groupe continu :

$$\chi : \widehat{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{C}^\times.$$

Théorème

L'ensemble des caractères continus de $\widehat{\mathbb{Z}}$ est isomorphe à \mathbb{Q}/\mathbb{Z} via la dualité de Pontryagin :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\widehat{\mathbb{Z}}, \mathbb{C}^\times) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Proposition

- i) Toutes les représentations irréductibles de $\widehat{\mathbb{Z}}$ sont de degré 1.*
- ii) Soient $\mathrm{Irr}(\widehat{\mathbb{Z}})$ l'ensemble des représentations irréductibles de $\widehat{\mathbb{Z}}$ et $\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\widehat{\mathbb{Z}}, \mathbb{C}^\times)$ l'ensemble de ses caractères continus. Il existe un isomorphisme :*

$$\Phi : \mathrm{Irr}(\widehat{\mathbb{Z}}) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\widehat{\mathbb{Z}}, \mathbb{C}^\times),$$

- iii) $\widehat{\mathbb{Z}}$ possède une infinité non dénombrable de représentations irréductibles.*

Merci pour votre aimable attention, J'en ai fini.