REPUBLIC OF CAMEROON
PEACE-WORK-FATHERLAND
****
UNIVERSITY OF MAROUA
****
FACULTY OF SCIENCES
****
DEPARTEMENT OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCES
****

RÉPUBLIQUE DU CAMEROUN
PAIX-TRAVAIL-PATRIE
****
UNIVERSITÉ DE MAROUA
****
FACULTÉ DES SCIENCES
****
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET D' INFORMATIQUE
****

DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES - INFORMATIQUE

REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES, CARACTÈRES ET REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES IRRÉDUCTIBLES D'UN PRODUIT INFINI DE GROUPES FINIS.

Mémoire présenté en vue de l'obtention du diplôme de :

Master II mathématiques.

Spécialité : Algèbre et Géometrie (ALG).

Option : Algèbre.

Par

SOUNKOUA Roger

Matricule : 21A1754FS

Licence (en mathématiques)

Sous la Direction de :

Dr Gilbert MANTIKA , CC (FS/UMA)

Année académique 2024-2025

Dédicace

À toute ma Famille.

Remerciements

Ce travail a été réalisé au laboratoire de Mathématiques de la Faculté des Sciences de l'Université de Maroua, sous l'encadrement du **Dr. GILBERT MANTIKA**.

Je souhaite exprimer mes remerciements à :

- À **Madame le Doyen de la Faculté des Sciences de l'Université de Maroua**, **Pr. NGO BUM ELISABETH**, pour son engagement constant en faveur de la qualité de l'enseignement et pour l'attention bienveillante qu'elle nous a toujours accordée ;
- À **Dr. GILBERT MANTIKA**, mon encadreur, pour son accompagnement, ses conseils avisés, sa disponibilité et son engagement constant tout au long de la réalisation de ce mémoire. Sa rigueur scientifique et sa bienveillance ont grandement contribué à la qualité de ce travail ;
- À **Monsieur le Président du jury**, **Pr. DONGHO JOSEPH**, Chef du Département de Mathématiques et Informatique, pour sa disponibilité, son encadrement académique rigoureux et ses précieux conseils tout au long de cette formation ;
- À **Monsieur l'éxaminateur**, **Pr. DIEKOUAM FOTSO L.E.**, pour la qualité de ses enseignements, ses encouragements soutenus et ses orientations constructives dans la réalisation de ce mémoire ;
- À **Dr. AMINATOU PECHA**, pour son accompagnement pédagogique et sa bienveillance constante ;
- À **Dr. KEMAJOU THEOPHILE**, pour ses encouragements continus à persévérer dans le domaine de la géométrie et son soutien académique ;
- À ma chère mère, **MASSA SALOME**, dont les sacrifices personnels ont été essentiels à la poursuite de mes études ;
- À mon père, **KOGE ANDRE**, pour son soutien indéfectible et son appui multiforme durant mon parcours ;
- À mes frères et sœurs, pour leur soutien moral, leurs conseils avisés et leur aide financière précieuse ;
- À mes camarades de promotion, pour leur esprit d'entraide, leur solidarité et leur amitié sincère tout au long de notre formation commune.

Table des matières

Resumé

Ce mémoire explore les représentations linéaires des groupes infinis, en mettant un accent particulier sur les groupes profinis. Ces groupes, définis comme des limites projectives de groupes finis sont des sous-groupes de produits arbitraires de groupes finis. Dans une première partie, nous avons établi les bases des représentations linéaires des groupes finis, incluant les caractères et les représentations irréductibles. La seconde partie étend ces concepts aux groupes infinis à l'aide des produits tensoriels infinis, permettant de définir et d'étudier les représentations de ces structures complexes. L'étude du complété profini $\widehat{\mathbb{Z}}$ illustre concrètement ces concepts et met en évidence des liens entre les propriétés topologiques et algébriques des groupes profinis. En conclusion, ce travail ouvre des perspectives prometteuses, notamment en théorie de Galois, en cryptographie, et dans l'analyse des interactions entre les structures algébriques et topologiques des groupes compacts.

Mots-clés

Groupes infinis, groupes profinis, complété profini, représentations linéaires, caractères et produit tensoriel.

Abstract

This thesis explores the linear representations of infinite groups, with a particular focus on profinite groups. These groups, defined as projective limits of finite groups, are subgroups of arbitrary products of finite groups. In the first part, we established the foundations of linear representations of finite groups, including characters and irreducible representations. The second part extends these concepts to infinite groups using infinite tensor products, enabling the definition and study of representations of these complex structures. The study of the profinite completion $\hat{\mathbb{Z}}$ concretely illustrates these concepts and highlights the connections between the topological and algebraic properties of profinite groups. In conclusion, this work opens promising perspectives, particularly in Galois theory, cryptography, and the analysis of interactions between the algebraic and topological structures of compact groups.

Keywords

Infinite groups, profinite groups, profinite completion, linear representations, characters and tensor product.

Introduction

La théorie des représentations linéaires d'un groupe constitue un outil fondamental permettant de représenter les éléments d'un groupe abstrait par des matrices inversibles sur un corps donné. Cette approche, qui traduit des problèmes complexes d'algèbre abstraite en des problèmes d'algèbre linéaire plus accessibles, repose sur la notion de représentation linéaire. Etant donné un corps $\mathbb{K}$, une représentation $\mathbb{K}$-linéaire d'un groupe fini G est un homomorphisme de groupes

$$\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$$

où V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathrm{GL}(V)$ désigne le groupe des applications linéaires bijectives de V sur lui-même [16]. La théorie des représentations linéaires des groupes finis a été développée pour la première fois par le mathématicien allemand Ferdinand Georg Frobenius en 1897. Il introduit notamment la notion de représentation linéaire d'un groupe fini et jette les bases de la théorie des caractères des groupes [29]. Par la suite, Jean-Pierre Serre a approfondi ces travaux et a formalisé cette théorie dans son ouvrage **"Représentations linéaires des groupes finis"**, publié en 1968, où il développe une analyse détaillée des représentations linéaires et des caractères des groupes finis [16]. Il existe peu de résultats récents généralisant ce concept aux groupes infinis, d'où le choix de notre thème : **représentations linéaires, caractères et représentations linéaires irréductibles d'un produit infini de groupes finis.** Le but principal de ce projet est d'étendre les représentations linéaires aux groupes infinis. Pour atteindre les objectifs de ce travail, nous suivrons une démarche en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous présenterons les préliminaires nécessaires à notre étude. Il s'agira notamment de rappeler les notions de groupes, de sous-groupes, de topologie, de groupes topologiques, ainsi que celles d'espaces vectoriels et d'applications linéaires. Ce chapitre introduisera également les concepts de catégories, foncteurs, limites inductives et projectives, et se terminera par une première approche du complété profini d'un groupe. Ces notions fondamentales permettront d'aborder les représentations linéaires avec un socle théorique solide.

Dans le deuxième chapitre, nous aborderons l'étude des représentations linéaires des groupes finis. Il va s'agir de définir quelques concepts de base et quelques résultats immédiats relatifs aux représentations linéaires des groupes finis; ensuite définir la notion de caractère d'une représentation linéaire d'un groupe fini et donner quelques unes de ses propriétés. Aussi, il sera question de définir les notions de représentation

linéaire irréductible d'un groupe fini, puis donner quelques propriétés relatives.
Dans le troisième chapitre, nous élargirons notre étude au cadre des groupes infinis. Ainsi, nous rappellerons le produit tensoriel infini d'espaces vectoriels sur un même corps comme une limite inductive. Puis nous définirons une représentation linéaire d'un produit arbitraire de groupes finis sur un produit tensoriel infini d'espaces vectoriels sur un même corps, définir son caractère ; puis caractériser les représentations irréductibles de ce groupe infini. Enfin, nous déterminerons une représentation linéaire du complété profini d'un groupe qui est une construction d'un groupe profini.

CHAPITRE

1

Préliminaires

Introduction

Ce premier chapitre pose les bases essentielles pour l'étude des représentations linéaires des groupes en introduisant les concepts fondamentaux et les outils mathématiques indispensables. Nous commençons par un rappel sur la théorie des groupes [1], en définissant les groupes, sous-groupes et homomorphismes, ainsi que les notions de groupe topologique et d'espace topologique. Ensuite, nous abordons les espaces vectoriels et les applications linéaires [2], qui constituent le cadre naturel des représentations. Afin de généraliser ces concepts, nous introduisons les catégories et foncteurs, ainsi que les limites projectives et inductives [3], qui permettent d'unifier et d'étendre les constructions algébriques. Enfin, nous présentons la notion de complété profini d'un groupe, qui intervient notamment dans l'étude des représentations continues des groupes topologiques. Ces éléments constituent le socle théorique indispensable pour comprendre la structure et le comportement des représentations linéaires et serviront de fondation aux développements ultérieurs.

1.1 Groupes, sous-groupes et homomorphismes de groupes

1.1.1 Sur les groupes

Définition 1.1.1. *[1]*
Un groupe est un couple $(G, *)$ où G un ensemble non vide et $*$ une loi

$$* : G \times G \longrightarrow G$$

$$(x, y) \longmapsto x * y$$

vérifiant :

i) $*$ *est associative, c'est-à-dire,* $\forall x, y, z \in G,\ (x * y) * z = x * (y * z)$ *;*

ii) *G possède un élément neutre pour la loi $*$, c'est-à-dire, $\exists e \in G$ tel que $\forall x \in G$,* $x * e = e * x = x$ *;*

iii) tout élément de G est inversible (ou possède un élément symetrique) dans G, c'est-à-dire $\forall x \in G,\ \exists y \in G$ tel que $x * y = y * x = e$ avec $e \in G$.

Propriété 1.1.1. *[1]*

i) L'élément neutre e est unique.

ii) Le symétrique d'un élément dans un groupe est unique.

Exemple 1.1.1.

1. *L'ensemble des nombres entiers relatifs muni de l'addition est un groupe, noté $(\mathbb{Z}, +)$.*
2. *$(M_n(\mathbb{C}), +)$, où $M_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices (n, n) à coefficients dans $\mathbb{C}$.*
3. *$(GL_n(\mathbb{C}), \times)$, où $GL_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices (n, n) inversibles à coefficients dans $\mathbb{C}$. Ce groupe est appelé groupe général linéaire.*

Définition 1.1.2. *[4]*
Si $(G, *)$ est un groupe tel que la loi $*$ satisfasse à la propriété

$$\forall x, y \in G,\ x * y = y * x,$$

, alors le groupe $(G, *)$ est dit commutatif ou encore abélien.

Exemple 1.1.2.
Les groupes $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}^*, \times)$, $(M_n(\mathbb{C}), +)$ sont des groupes abéliens.

Définition 1.1.3. *[1]*

i) On appelle ordre de $(G, *)$ le cardinal (nombre d'éléments) de G.

ii) Le groupe $(G, *)$ est dit fini si l'ensemble sous-jacent G est fini, sinon il sera dit infini.

Notation 1.1.1.
Dans la suite, un groupe $(G, *)$ sera noté par G et le cardinal de G par $|G|$.

Définition 1.1.4. *[1]*
Soit $(G_i, \circ_i)$ une famille de groupes finis indexée par l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$, où $n \in \mathbb{N}^*$. Le produit direct fini de cette famille est un groupe $(\prod_{i=1}^{n} G_i, \circ)$, défini par les propriétés suivantes :

*i) **Ensemble sous-jacent.***
L'ensemble sous-jacent est constitué des familles indexées par $\{1, 2, \ldots, n\}$:

$$\prod_{i=1}^{n} G_i = \{(g_i)_{i=1}^{n} \mid g_i \in G_i \text{ pour tout } i \in \{1, 2, \ldots, n\}\}.$$

*ii) **Loi de composition.***
La loi de composition $\circ$ est définie composante par composante :

$$(g_i)_{i=1}^{n} \circ (g'_i)_{i=1}^{n} = (g_i \circ_i g'_i)_{i=1}^{n},$$

où $\circ_i$ désigne l'opération du groupe G_i pour chaque $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

iii) ***Élément neutre.***
L'élément neutre de $\prod_{i=1}^{n} G_i$ *est la famille* $(e_i)_{i=1}^{n}$*, où* e_i *est l'élément neutre de* G_i *pour tout* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$*.*

iv) ***Inverse.***
L'inverse d'une famille $(g_i)_{i=1}^{n} \in \prod_{i=1}^{n} G_i$ *est donné par :*

$$(g_i)_{i=1}^{n^{-1}} = (g_i^{-1})_{i=1}^{n},$$

où g_i^{-1} *est l'inverse de* g_i *dans* G_i *pour chaque* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$*.*

Remarque 1.1.1. *[1]*
Les propriétés de groupe ($\circ$ *associative, existence d'un neutre et d'inverses) découlent directement des propriétés des groupes* G_i*. La famille de groupes* $(G_i, \circ_i)$ *satisfait :*

$$\left| \prod_{i=1}^{n} G_i \right| = \prod_{i=1}^{n} |G_i|,$$

avec $|G_i|$ *le cardinal de* G_i*.*

Propriété 1.1.2. *[1]*
Si chaque $(G_i, \circ_i)$ *est un groupe abélien, alors* $(\prod_{i=1}^{n} G_i, \circ)$ *est aussi un groupe abélien.*

Théorème 1.1.1. *[5]*
Soit $m_1, m_2, \ldots, m_r$ *une suite d'entiers positifs premiers entre eux deux à deux. Alors le système de congruences :*

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \vdots \\ x \equiv a_r \pmod{m_r} \end{cases}$$

a une solution unique x modulo $M = m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_r$ *:*

$$x = a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2 + \cdots + a_r M_r y_r$$

avec

$$M_i = \frac{M}{m_i}, \quad y_i M_i \equiv 1 \pmod{m_i}.$$

Théorème 1.1.2. *[6]*
Soit $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$ *la décomposition en facteurs premiers de n, où les* p_i *sont des nombres premiers distincts et les* e_i *des entiers positifs. Alors l'anneau des entiers modulo n,* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$*, est isomorphe au produit direct des anneaux des entiers modulo* $p_i^{e_i}$*, c'est-à-dire :*

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/p_1^{e_1}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p_2^{e_2}\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p_k^{e_k}\mathbb{Z}.$$

Remarque 1.1.2. *[6]*
Ce résultat permet de réduire les calculs modulo n à des calculs modulo les puissances des facteurs premiers $p_i^{e_i}$*, et de résoudre des systèmes d'équations congruentes.*

Définition 1.1.5. *[1]*
Soient $(G, \cdot)$ et $(G', *)$ deux groupes.
Un homomorphisme de groupes de G dans G' est une application $f : G \to G'$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in G \times G, \quad f(x \cdot y) = f(x) * f(y).$$

Notation 1.1.2.

i) On note $\mathrm{Hom}(G, G')$ l'ensemble des homomorphismes de groupes de G dans G'.

ii) On note $\mathrm{End}(G)$ l'ensemble des homomorphismes de groupes de G dans lui-même, qu'on appelle endomorphismes de G.

Définition 1.1.6. *[1]*
Un élément f de $\mathrm{Hom}(G, G')$ est un isomorphisme s'il existe un homomorphisme réciproque g de $\mathrm{Hom}(G', G)$ vérifiant $g \circ f = \mathrm{id}_G$ et $f \circ g = \mathrm{id}_{G'}$.

Proposition 1.1.1. *[7]*
Soient G et G' deux groupes et $f : G \to G'$ une application.

(i) f est un isomorphisme si et seulement si f est un homomorphisme bijectif.

(ii) Si f est un isomorphisme, l'application réciproque f^{-1} est un isomorphisme.

Définition 1.1.7. *[1]*
Soit G est un groupe.
G est dit monogène s'il admet un unique générateur $a \in G$, c'est-à-dire si :

$$G = \langle a \rangle = \{a^k \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

De plus, G est dit cyclique s'il est fini.

Théorème 1.1.3. *[1]*
Si G est un groupe cyclique d'ordre $n \geq 1$, alors G est isomorphe au groupe additif $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Théorème 1.1.4. *[1]*
Tout groupe fini d'ordre premier est cyclique.

Définition 1.1.8. *[1]*
Soit G un groupe et $g \in G$. La classe de conjugaison de g dans G est l'ensemble :

$$Cl(g) = \{hgh^{-1} \mid h \in G\}.$$

Propriété 1.1.3. *[1]*
Soit G un groupe fini. Si le nombre de classes de conjugaison de G est égal à l'ordre du groupe, alors G est abélien.

1.1.2 Sous-groupes

Définition 1.1.9. *[7]*
Un sous-groupe d'un groupe G est un sous-ensemble non vide H de G tel que H muni de la loi induite par celle de G est un groupe.

Théorème 1.1.5. *[7]*
Une partie H non vide de G est un sous-groupe de $(G, *)$ si :

i) pour tous $x, y \in H$, on a $x * y \in H$;

ii) si $x \in H$, alors $x^{-1} \in H$.

Remarque 1.1.3. *[7]*
Soit $(G, *)$ un groupe. Un critère pratique et plus rapide pour prouver qu'un sous-ensemble non vide H de G est un sous-groupe de $(G, *)$ est :

i) H contient l'élément neutre de G;

ii) pour tout $x, y \in H$, $x * y^{-1} \in H$.

Notation 1.1.3.
Si H est un sous-groupe de G, on notera $H \leqslant G$.

Exemple 1.1.3.

1. $(\mathbb{Z}, +) < (\mathbb{Q}, +) < (\mathbb{R}, +) < (\mathbb{C}, +)$.
2. *Pour tout groupe G, on considère*

$$Z(G) = \{g \in G \mid \forall x \in G, gx = xg\}.$$

C'est un sous-groupe de G, appelé le centre de G.

Définition 1.1.10. *[4]*
Un sous-groupe H de G est distingué *(on note $H \triangleleft G$) si pour tout $g \in G$, $Hg = gH$ (on dit aussi : invariant ou normal).*

Propriété 1.1.4. *[4]*
Soit G un groupe abélien. Tout sous-groupe H de G est aussi abélien.

1.1.3 Notion d'espace topologique et de groupe topologique

Définition 1.1.11. *[8]*
On appelle structure topologique (ou tout simplement une topologie) sur un ensemble X un ensemble $\mathcal{O}$ de parties de X vérifiant :

i) $\emptyset \in \mathcal{O}$ et *$X \in \mathcal{O}$;*

ii) Toute réunion d'éléments de $\mathcal{O}$ est dans $\mathcal{O}$;

iii) Toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{O}$ est dans $\mathcal{O}$.

Les éléments de $\mathcal{O}$ sont appelés ouverts et ceux de X sont appelés points.

Définition 1.1.12. *[8]*
Un espace topologique est un couple $(X, \mathcal{O})$, où $\mathcal{O}$ est une structure topologique définie sur X.

Définition 1.1.13. *[8]*
Soit X un espace topologique et A une partie quelconque de X. Un voisinage de A est tout sous-ensemble de X qui contient un ouvert contenant A. Les voisinages d'un sous-ensemble $\{x\}$ constitué d'un seul point sont également appelés voisinages du point x.

Proposition 1.1.2. *[8]*
Un ensemble est un voisinage de chacun de ses points si et seulement si il est ouvert.

Définition 1.1.14. *[8]*
La clôture d'un sous-ensemble A d'un espace topologique X est l'ensemble de tous les points $x \in X$ tels que tout voisinage de x intersecte A, et est notée par $\overline{A}$.

Définition 1.1.15. *[8]*
Un sous-ensemble A d'un espace topologique X est dit dense dans X (ou simplement dense, s'il n'y a pas d'ambiguïté sur X) si $\overline{A} = X$, c'est-à-dire si tout ouvert non vide U de X rencontre A.

Proposition 1.1.3. *[8]*
Soit X un espace topologique, $x \in X$ et $\mathcal{B}(x)$ l'ensemble de tous les voisinages de x. Les ensembles $\mathcal{B}(x)$ satisfont les propriétés suivantes :

(V_1) Pour tout ensemble $U \subset X$, si $U \supset V$ pour un certain $V \in \mathcal{B}(x)$, alors $U \in \mathcal{B}(x)$.

(V_2) Pour tout entier naturel non nul n, si $V_1, V_2, \dots, V_n \in \mathcal{B}(x)$, alors

$$V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n \in \mathcal{B}(x).$$

(V_3) Pour tout $V \in \mathcal{B}(x)$, on a $x \in V$.

(V_4) Pour tout $V \in \mathcal{B}(x)$, il existe un ensemble $W \in \mathcal{B}(x)$ tel que $W \subset V$ et, pour tout $y \in W$, on a $V \in \mathcal{B}(y)$.

Définition 1.1.16. *[8]*
Une application $f : E \to F$ entre espaces topologiques est dite continue en un point $a \in E$ si l'image réciproque de tout voisinage de $f(a)$ est un voisinage de a.
Elle est dite continue si elle est continue en tout point de E.

Définition 1.1.17. *[8]*
Soit $\{X_i\}_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Leur produit topologique est l'ensemble

$$X = \prod_{i\in I} X_i$$

muni de la topologie produit, qui est la topologie initiale engendrée par les projections canoniques :

$$\pi_i : X \to X_i, \quad \text{où} \quad \pi_i((x_j)_{j\in I}) = x_i.$$

Remarque 1.1.4. *[8]*
La topologie produit $X = \prod_{i\in I} X_i$ est la plus grossière (la plus faible) rendant toutes les projections $\pi_i : X \to X_i$ continues.

Propriété 1.1.5. *[8]*
Une application $f : \prod_{i\in I} Y_i \to \prod_{i\in I} X_i$ entre deux produits topologiques est continue si et seulement si chaque application

$$\pi_i \circ f : \prod_{i\in I} Y_i \to X_i$$

est continue pour tout $i \in I$.

Soient $(X, \mathcal{O})$ un espace topologique et Y une partie de X.

Définition 1.1.18. *[8]*
$(X, \mathcal{O})$ est dit séparé (ou de Hausdorff) si pour tous points distincts $x, y \in X$, il existe des ouverts $U, V \in \mathcal{O}$ tels que $x \in U$, $y \in V$ et $U \cap V = \emptyset$.

Définition 1.1.19. *[9]*
On appelle recouvrement de X une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de X telle que

$$X = \bigcup_{i\in I} A_i.$$

Dans ce cas, un sous-recouvrement fini de $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de X de la forme $(A_j)_{j\in J}$ avec $J \subseteq I$ et J fini.

Définition 1.1.20. *[9]*
On dit que $(X, \mathcal{O})$ est compact si X est séparé et de tout recouvrement de X , on peut extraire un sous-recouvrement fini.

Définition 1.1.21. *[9]*
La topologie induite sur Y est la famille d'ensembles définie par :

$$\mathcal{O}_Y = \{O \cap Y \mid O \in \mathcal{O}\}.$$

Les éléments de $\mathcal{O}_Y$ sont appelés les ouverts de Y pour la topologie induite.

Définition 1.1.22. *[9]*
Un espace topologique X est totalement discontinu si ses seules parties connexes non vides sont les singletons.

Définition 1.1.23. *[8]*
Un espace topologique X est connexe si ses seuls sous-ensembles à la fois ouverts et fermés de X sont $\emptyset$ et X

Définition 1.1.24. *[9]*
Une partie A d'un espace topologique X est dite connexe si elle est un espace connexe lorsqu'elle est munie de la topologie induite.

Définition 1.1.25. *[9]*
On dit que X est un espace topologie discrète si tout sous-ensemble de X est à la fois un ouvert et un fermé.

Définition 1.1.26. *[8]*
Une topologie profinie est une topologie compacte et totalement discontinue.

Théorème 1.1.6. *[8]*
Soit $\{X_i\}_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Si chaque X_i est compact, alors le produit $\prod_{i\in I} X_i$ est compact dans la topologie produit.

Définition 1.1.27. *[10]*
Un groupe topologique est un groupe $(G, \star)$ muni d'une topologie telle que les deux applications suivantes soient continues :

$$\mu : G \times G \to G, \quad (x, y) \mapsto x \star y,$$
$$\iota : G \to G, \quad x \mapsto x^{-1},$$

où $G \times G$ est muni de la topologie produit.

1.2 Espaces vectoriels et applications linéaires

1.2.1 Espaces vectoriels

Définition 1.2.1. *[2]*
Un anneau est un ensemble A non vide muni de deux opérations binaires $+$ (addition) et $\cdot$ (multiplication), telles que :

i) $(A, +)$ *est un groupe abélien ;*

ii) La multiplication est associative : $\forall a, b, c \in A, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ *;*

iii) La multiplication est distributive par rapport à l'addition :

(a) $\forall a, b, c \in R, a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$*;*

(b) $\forall a, b, c \in R, (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$*.*

Définition 1.2.2. *[2]*
Un anneau $(A, +, \cdot)$ est dit commutatif *ou* abélien *si la multiplication est commutative, c'est-à-dire que pour tous $a, b \in A$, on a $a \cdot b = b \cdot a$.*

Définition 1.2.3. *[2]*
Un anneau $(A, +, \cdot)$ est appelé anneau unitaire si la multiplication possède un élément neutre noté 1.

Exemple 1.2.1.

1. *L'anneau nul* $\{0\}$.
2. $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ *est un anneau commutatif unitaire.*

Définition 1.2.4. *[2]*
Un corps $\mathbb{K}$ est un anneau dans lequel tout élément non nul admet un inverse pour la multiplication.
Si de plus la loi . est commutative, alors $\mathbb{K}$ est un corps commutatif.

Exemple 1.2.2.

1. *Le corps des nombres complexes ($\mathbb{C}, +, \cdot$) est un corps commutatif.*
2. *Le corps des nombres réels ($\mathbb{R}, +, \cdot$) est un corps commutatif.*

Définition 1.2.5. *[2]*
Un corps $\mathbb{K}$ est dit algébriquement clos si pour tout polynôme non constant $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geq 1$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, il existe un élément $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $P(\alpha) = 0$.

Définition 1.2.6. *[2]*
La caractéristique d'un corps $\mathbb{K}$, notée car$(\mathbb{K})$, est le plus petit entier positif nommé p s'il existe tel que

$$1 + 1 + \cdots + 1 \quad (p \text{ fois}) = 0.$$

Si aucun tel entier n'existe, on dit que la caractéristique de K est 0.

Notation 1.2.1.
Un corps ($\mathbb{K}, +, \cdot$) sera noté $\mathbb{K}$.

Remarque 1.2.1.
Dans la suite, nous allons considérer le corps $\mathbb{K}$ commutatif.

Définition 1.2.7. *[2]*
Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ou espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est un tripet $(V, +, \cdot)$ tel que $(V, +)$ est un groupe abélien, $\cdot$ une multiplication par les scalaires, c'est-à-dire une application

$$(a, x) \in \mathbb{K} \times V \mapsto a \cdot x \in V$$

vérifiant les propriétés suivantes :

i) $1 \cdot x = x$;

ii) $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$ *(pour tout* $(a, b) \in K \times K$ *et* $(x, y) \in V \times E$*)*;

iii) $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$;

iv) $(a \cdot b) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$.

Notation 1.2.2.
Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(V, +, \cdot)$ sera noté V.

Définition 1.2.8. *[2]*
Une partie non vide F de V est un sous-espace vectoriel de E si F est un sous-groupe de V tel que pour tout $(a, x) \in \mathbb{K} \times V$,

$$(x \in F) \Rightarrow (ax \in F).$$

Définition 1.2.9. *[11]*
Supposons que $V_1, \ldots, V_m$ soient des sous-espaces de V.

- *La somme $V_1 + \cdots + V_m$ est appelée somme directe si chaque élément de $V_1 + \cdots + V_m$ peut être écrit de manière unique comme une somme $v_1 + \cdots + v_m$, où chaque $v_k \in V_k$.*
- *Si $V_1 + \cdots + V_m$ est une somme directe, alors $V_1 \oplus \cdots \oplus V_m$ désigne $V_1 + \cdots + V_m$, avec la notation $\oplus$ indiquant qu'il s'agit d'une somme directe.*

Définition 1.2.10. *[12]*
Soit V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Un produit hermitien est une application :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$$

qui satisfait les propriétés suivantes pour tous $x, y, z \in V$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$:

i) ***Linéarité à gauche*** *:*
$$\langle \lambda x + y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle.$$

ii) ***Conjugaison à droite (anti-linéarité)*** *:*

$$\langle x, \lambda y + z \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle.$$

iii) ***Hermitianité (symétrie conjuguée)*** *:*

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}.$$

iv) ***Positivité définie*** *:*

$$\langle x, x\rangle \geq 0 \quad et \quad \langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0.$$

Définition 1.2.11. *[11]*
Soient E_1 et E_2 deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. L'ensemble produit $E = E_1 \times E_2$ est muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel définie comme suit :

i) Le vecteur nul de E est donné par :

$$0_E = (0_{E_1}, 0_{E_2}).$$

ii) L'addition est définie pour tous $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in E$ par :

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2).$$

iii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(x_1, x_2) \in E$, on définit :

$$\lambda \cdot (x_1, x_2) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2).$$

Ainsi, $E_1 \times E_2$ hérite d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel en considérant les opérations coordonnées.

Définition 1.2.12. *[11]*
Soit $E_1, E_2, \ldots, E_n$ une famille d'espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$, avec $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On définit l'espace produit

$$E = \prod_{i=1}^{n} E_i = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in E_i \text{ pour tout } i = 1, 2, \ldots, n\}$$

muni d'une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel comme suit :

i) Le vecteur nul de E est donné par

$$0_E = (0_{E_1}, 0_{E_2}, \ldots, 0_{E_n});$$

ii) L'addition est définie par

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n);$$

iii) La multiplication externe est définie par

$$\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n);$$

iv) (si applicable) La multiplication terme à terme dans E est donnée par

$$(x_1, \ldots, x_n) \cdot (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 y_1, \ldots, x_n y_n).$$

Définition 1.2.13. *[2]*

Soit V est $\mathbb{K}$-espace vectoriel . Si $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ et $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$, alors le vecteur

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n$$

est appelé une combinaison linéaire de $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Les scalaires $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sont appelés des coefficients.

Définition 1.2.14. *[2]*
Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel sur F et que $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Alors

$$Span\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} = \{c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n \mid c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}\}$$

est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de $v_1, v_2, \ldots, v_n$ et est appelé l'enveloppe linéaire de cet ensemble de vecteurs.

Définition 1.2.15. *[2]*
Le sous-espace $Span(A)$ est le sous-espace vectoriel de V engendré par A. L'ensemble A est appelé un ensemble générateur de $Span(A)$. Si $Span(A) = V$, on dit que A engendre V.

Définition 1.2.16. *[2]*
Soient $v_1, v_2, \ldots, v_n$ des vecteurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V. Ils sont linéairement dépendants s'il existe des scalaires $c_1, c_2, \ldots, c_n$, non tous nuls, tels que :

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n = 0.$$

Ils sont linéairement indépendants si :

$$c_1v_1 + \cdots + c_nv_n = 0 \implies c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0.$$

Définition 1.2.17. *[2]*
Une liste finie de vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V est appelée une base de V si elle est à la fois indépendante et génératrice. Autrement dit, chaque vecteur $v \in V$ peut être écrit de façon unique comme une combinaison linéaire :

$$v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n.$$

Les coefficients $a_1, .., a_n$ sont appelés les coordonnées de v par rapport à la base $v_1, \ldots, v_n$.

Remarque 1.2.2. *[2]*
Le nombre minimal de vecteurs qui engendrent un $\mathbb{K}$-espace vectoriel est constant, et il est donné par la dimension de cet espace.

Définition 1.2.18. *[2]*
Supposons que V soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Si $V \neq \{0\}$, alors le nombre de vecteurs dans toute base de V est appelé la dimension de V et est noté $\dim V$.

Lemme 1. *[2]*
Soit que V un espace vectoriel. Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ engendre V, alors $\dim V \leq n$. Si $\{w_1, \ldots, w_m\}$ est une famille libre, alors $m \leq \dim V$.

Lemme 2. *[2]*
Soit $\{v_1, \ldots, v_n\}$ une famille libre d'un espace vectoriel V et que v soit un vecteur de V. Alors la famille $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est liée si et seulement si $v \notin \mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Théorème 1.2.1. *[2]*
Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Alors, les affirmations suivantes sont équivalentes :

(a) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *engendre* V.

(b) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *est libre.*

(c) $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *est une base de* V.

Théorème 1.2.2. *[2]*
Tout espace vectoriel non nul et de dimension finie possède une base.

Lemme 3. *[2]*
Tout ensemble de vecteurs linéairement indépendants dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie V peut être étendu en une base de V.

Théorème 1.2.3. *[2]*
Soit V et W des espaces vectoriels de dimension finie. Alors $V \cong W$ si et seulement si $\dim V = \dim W$.

Définition 1.2.19. *[2]*
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Un complément de F dans E est un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel G de E tel que :

$$E = F \oplus G$$

où le symbole $\oplus$ signifie somme directe.

Définition 1.2.20. *[2]*
Une projection est un opérateur linéaire $p : V \to V$ définie sur un espace vectoriel V tel que :

$$p \circ p = p.$$

Proposition 1.2.1. *[2]*
Soit $p : V \to V$ une projection.

i) $\mathrm{Im}(p) = \{v \in V \mid p(v) = v\}$.

ii) L'espace V se décompose en une somme directe :

$$V = \mathrm{Im}(p) \oplus \ker(p).$$

Définition 1.2.21. *[13]*
Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.
Le module de z est défini par :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Définition 1.2.22. *[13]*
Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$.
Le conjugué de z, noté $\overline{z}$, est défini par

$$\overline{z} = a - ib.$$

Définition 1.2.23. *[14]*
Une suite numérique à valeurs dans $\mathbb{C}$ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$:

$$n \in \mathbb{N} \longmapsto u_n \in \mathbb{C}.$$

On note cette suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geq 0}$, et l'on appelle u_n le terme général de la suite.

Définition 1.2.24. *[14]*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite sur $\mathbb{C}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que (u_n) a pour limite ℓ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Propriété 1.2.1. *[14]*
Si (u_n) est une suite convergente, alors sa limite ℓ est unique.

Définition 1.2.25. *[14]*
Le produit infini des termes d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est la limite, si elle existe, de la suite des produits partiels $\left(\prod_{n=0}^{N} u_n\right)_N$ quand N tend vers l'infini. Il est défini par :

$$\prod_{n=0}^{\infty} u_n \overset{def}{:=} \lim_{N\to\infty} \prod_{n=0}^{N} u_n.$$

1.2.2 Applications linéaires

Dans cette section, $\mathbb{K}$ désignera le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et tous les espaces vectoriels seront définis sur $\mathbb{K}$.

Définition 1.2.26. *[2]*
Soient V et W deux espaces vectoriels.
Une application $T : V \to W$ est dite linéaire si :

i) ***Additivité*** *:*
$T(v + w) = T(v) + T(w)$ *pour tout* $v, w \in V$ *;*

ii) ***Homogénéité*** *:*
$T(cv) = cT(v)$ *pour tout* $c \in \mathbb{K}$ *et* $v \in V$.

Si $V = W$, alors T est appelée endomorphisme de V.

Notation 1.2.3.
On note $\mathcal{L}(V, W)$ l'ensemble des applications linéaires de V dans W, et $\mathcal{L}(V)$ si $V = W$.

Définition 1.2.27. *[11]*
Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. L'espace vectoriel dual de V, noté V', est l'ensemble des applications linéaires de V dans $\mathbb{K}$. Autrement dit :

$$V' = \{\phi : V \to \mathbb{K} \mid \phi \text{ est linéaire}\}.$$

Les éléments de V' sont appelés des formes linéaires sur V.

Définition 1.2.28. *[15]*
Soient V et W deux espaces vectoriels de dimension finie , avec $\dim V = n$ et $\dim W = m$, et

soit $T : V \to W$ une application linéaire. Supposons que $B = (v_1, \ldots, v_n)$ soit une base de V, et $D = (w_1, \ldots, w_m)$ une base de W.
Pour chaque vecteur v_j de la base de V, l'image $T(v_j)$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs de la base de W :

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i, \quad pour\ j = 1, \ldots, n.$$

Les scalaires a_{ij} sont les coordonnées de $T(v_j)$ dans la base D de W. La matrice formée par les éléments a_{ij}, notée $[T]_B^D$, est appelée la matrice de l'application linéaire T relative aux bases B de V et D de W. C'est une matrice de taille $m \times n$ (m lignes et n colonnes).

Notation 1.2.4.
L'ensemble des matrices de taille $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $M_{m,n}(\mathbb{K})$. Si $m = n$, l'ensemble des matrices carrées d'ordre n sur F est noté $M_n(\mathbb{K})$.

Définition 1.2.29. *[15]*
Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, où $n \geq 2$. On note $A_{i,j}$ la matrice obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A. L'élément situé à la position (i, j) dans la matrice A est noté $a_{i,j}$. La fonction déterminant, notée $det : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, est définie de manière récursive selon la taille n de la matrice :

(a) Pour $n = 1$, on définit :

$$det(A) := a_{1,1}.$$

(b) Pour $n \geq 2$, le déterminant de A est donné par le développement par cofacteurs le long de la première colonne :

$$det(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} det(A_{i,1}) \cdot a_{i,1}.$$

Le scalaire $(-1)^{i+j} det(A_{i,j})$ est appelé le cofacteur de l'élément $a_{i,j}$. La valeur $det(A)$ est appelée le déterminant de la matrice A.

Définition 1.2.30. *[16]*
Soit V un espace vectoriel ayant une base (e_j) de n éléments, et soit φ une application linéaire de V dans lui-même, avec une matrice (a_{ij}) relative à cette base. La trace de φ, est :

$$Tr(\varphi) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}.$$

Définition 1.2.31. *[17]*
Soit $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$.
La transposée de A, notée A^T, est la matrice $A^T = (a_{ji}) \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A. Autrement dit, l'élément en position (i, j) de A devient l'élément en position (j, i) de A^T.

Définition 1.2.32. *[17]*
Soit $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{C})$.
La conjuguée de A, notée $\overline{A}$, est la matrice $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$ obtenue en prenant le conjugué complexe de chaque coefficient de A.

Définition 1.2.33. *[16]*
Soit $U \in M_{m,n}(\mathbb{C})$.
On dit que U est unitaire si

$$U^*U = UU^* = I_n,$$

où :

- *U^* désigne la transposée conjuguée de U, c'est-à-dire $\overline{U}^T$,*
- *I_n est la matrice identité d'ordre n.*

Propriété 1.2.2. *[17]*

1. $\mathrm{Tr}(A + B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$
2. $\mathrm{Tr}(A^T) = \mathrm{Tr}(A)$
3. $\mathrm{Tr}(I_n) = n$
4. $\mathrm{Tr}(A_1 A_2 \cdots A_k) = \mathrm{Tr}(A_{j+1} \cdots A_k A_1 \cdots A_j)$, $(j = 1, ..., k-1)$.

1.3 Notions de catégories, foncteurs, limites projectives et limites inductives

1.3.1 Catégories

Définition 1.3.1. *[3]*
Une catégorie $\mathcal{C}$ consiste en les données suivantes :

i) Une classe $|\mathcal{C}|$, dont les éléments sont appelés objets de $\mathcal{C}$;

ii) À chaque couple d'objets (X, Y) de $\mathcal{C}$, est associé un ensemble $\mathcal{C}(X, Y)$ (ou $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$), dont les éléments sont appelés morphismes (ou flèches) de X dans Y ;

iii) À chaque triplet (X, Y, Z) d'objets de $\mathcal{C}$, une application (appelée application de composition)

$$\mathcal{C}(X, Y) \times \mathcal{C}(Y, Z) \to \mathcal{C}(X, Z), \quad (f, g) \mapsto g \circ f;$$

iv) À chaque objet $X \in \mathcal{C}$, est associé un élément $1_X \in \mathcal{C}(X, X)$ appelé morphisme d'identité de X.

Ces données vérifient les axiomes suivants :

- ***Associativité de la composition :** si $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$ sont des morphismes dans $\mathcal{C}$, alors on a*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

- ***Neutralité de l'identité :** pour tous $X, Y \in |\mathcal{C}|$, et pour tout $f \in \mathcal{C}(X, Y)$, on a*

$$f \circ 1_X = f,$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "1_X"] \arrow[dr, "f"'] & & X \arrow[dl, "f"] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

et

$$1_Y \circ f = f,$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "1_Y"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Remarque 1.3.1. *[3]*

1. *Le morphisme unité d'un objet X d'une catégorie est unique.*
2. *Si la catégorie $\mathcal{C}$ est un ensemble, on dit que c'est une petite catégorie.*

Exemple 1.3.1.
*La catégorie des groupes, notée **Grp**, consiste en les données suivantes :*

i) ***Objets*** *:*
Les objets sont des groupes.

ii) ***Morphismes*** *:*
Les morphismes sont des homomorphismes de groupes.

iii) ***Composition*** *:*
La composition de deux homomorphismes de groupes est un autre homomorphisme de groupes.

iv) ***Identité*** *:*
Pour chaque groupe G, le morphisme d'identité est la fonction qui envoie chaque élément sur lui-même.

Vérification des axiomes :

- **Associativité** :
Pour tout $f : G_1 \to G_2$, $g : G_2 \to G_3$, et $h : G_3 \to G_4$, on a :

$$(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h).$$

- **Identité** :
Pour tout homomorphisme f entre deux groupes, on a :

$$f \circ id_G = f \quad \text{et} \quad id_H \circ f = f.$$

1.3.2 Foncteurs

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories.

Définition 1.3.2. *[3]*
Un foncteur contravariant est une règle de passage d'une catégorie $\mathcal{C}$ à une catégorie $\mathcal{D}$, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, qui :

i) à tout objet C de $\mathcal{C}$ associe un objet $F(C)$ de $\mathcal{D}$,

ii) à tout morphisme $X \xrightarrow{f} Y$ de $\mathcal{C}$ associe un morphisme $F(Y) \xrightarrow{F(f)} F(X)$ de $\mathcal{D}$ satisfaisant :

(a) *pour tout objet X de $\mathcal{C}$, on a $F(1_X) = 1_{F(X)}$;*

(b) *pour tous morphismes $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ de $\mathcal{C}$, on a $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.*

1.3.3 Limites inductives

Définition 1.3.3. *[3]*
Une propriété universelle (PU) est un énoncé sur les objets mathematiques qui stipule que sous certaines conditions, il existe un unique morphisme qui satisfait certaines propriétés.

Définition 1.3.4. *[18]*
Un ensemble partiellement ordonné est un couple $(I, \leq)$ où I est un ensemble non vide et $\leq$ est une relation binaire sur I vérifiant les propriétés suivantes pour tous $a, b, c \in I$:

i) ***Réflexivité*** *: $a \leq a$;*

ii) ***Anti-symétrie*** *: si $a \leq b$ et $b \leq a$, alors $a = b$;*

iii) ***Transitivité*** *: si $a \leq b$ et $b \leq c$, alors $a \leq c$.*

Définition 1.3.5. *[18]*
Un ensemble $(I, \leq)$ est dit ordonné filtrant si $(I, \leq)$ est un ensemble partiellement ordonné et si pour tous $i, j \in I$, il existe $k \in I$ vérifiant $i \leq k$ et $j \leq k$.

Exemple 1.3.2.
$(\mathbb{N}, \leq)$ *est ordonné filtrant.*

Définition 1.3.6. *[18]*
Soit $(I, \leq)$ un ensemble ordonné filtrant. Un système inductif de groupes sur I est la donnée d'un couple $(X_i, \phi_{ij})_{i,j \in I}$ où les X_i sont les groupes et les $\phi_{ij} : X_i \to X_j$ ($i \leq j$) les homomorphismes de groupes , vérifiant :

i) $\forall i \in I,\ \phi_{ii} = \mathrm{Id}_{X_i}$;

ii) $\forall (i, j, k) \in I^3,\ i \leq j \leq k \Rightarrow \phi_{jk} \circ \phi_{ij} = \phi_{ik}$.
Ce qui se traduit par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[rr, "\phi_{ij}"] \arrow[dr, "\phi_{ik}"'] & & X_j \arrow[dl, "\phi_{jk}"] \\ & X_k & \end{tikzcd}$$

Définition 1.3.7. *[18]*
Soient X un groupe et (X_i, ϕ_{ij}) un système inductif de groupes finis.
La famille $(X, \phi_i : X_i \to X)$ est dite compatible avec (X_i, ϕ_{ij}) si pour tous $i, j \in I$ tels que $i \leq j$, on a $\phi_i = \phi_j \circ \phi_{ij}$. Ce qui est illustré par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "\phi_{ij}"] \arrow[dr, "\phi_i"'] & X_j \arrow[d, "\phi_j"] \\ & X \end{tikzcd}$$

Définition 1.3.8. *[18]*
Soit (X_i, ϕ_{ij}) un système inductif de groupes. La limite inductive ou limite directe, lorsqu'elle existe, est une famille compatibile $(X, \phi_i : X_i \to X)$ avec (X_i, ϕ_{ij}) vérifiant la PU : pour toute autre famille $(Y, \psi_i)_{i \in I}$ compatible avec (X_i, ϕ_{ij}), il existe un unique homomorphisme de groupes $u : X \to Y$ telle que le diagramme :

$$
\begin{tikzcd}
X_i \arrow[rr, "\phi_{ij}"] \arrow[dr, "\phi_i"] \arrow[ddr, "\psi_i"'] & & X_j \arrow[dl, "\phi_j"'] \arrow[ddl, "\psi_j"] \\
& X \arrow[d, dashed, "u"] & \\
& Y &
\end{tikzcd}
$$

soit commutatif pour tous $i \leq j$.

Proposition 1.3.1. *[18]*
La limite inductive lorsqu'elle existe est unique à isomorphisme près.

Notation 1.3.1.
La limite inductive $(X, \phi_i)_{i \in I}$ d'un système inductif $(X_i, \phi_{ij})_{j \in I}$ est notée $X = \varinjlim X_i$.

Proposition 1.3.2.
Un ensemble ordonné filtrant $(I, \leq)$ est une catégorie.

<u>Preuve</u> :
Appelons $\mathcal{I}$ cette catégorie. Elle est donnée comme suit :

i) Une classe $|\mathcal{I}|$ dont les objets sont les éléments I ;

ii) À chaque couple $(i, j) \in I \times I$ est associé un ensemble $\mathcal{I}(i, j)$ défini par :

$$\mathcal{I}(i,j) = \begin{cases} \{*\} & \text{si } i \leq j, \\ \varnothing & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $*$ désigne un unique morphisme de i vers j lorsque $i \leq j$;

iii) À chaque triplet $(i, j, k) \in I \times I \times I$, une application de composition

$$\mathcal{I}(i,j) \times \mathcal{I}(j,k) \to \mathcal{I}(i,k), \quad (f, g) \mapsto g \circ f,$$

définie par la transitivité de l'ordre : si $i \leq j$ et $j \leq k$, alors $i \leq k$, donc $g \circ f = *$ est le morphisme unique de i vers k ;

iv) À chaque objet $i \in I$, on associe un morphisme identité $1_i \in \mathcal{I}(i, i)$, défini par $1_i = *$, car $i \leq i$ par réflexivité.

Ces données vérifient les axiomes suivants :

- **Associativité de la composition :** étant donné $i \leq j \leq k \leq \ell$, les compositions possibles coïncident puisqu'il n'y a qu'un seul morphisme entre deux objets liés par $\leq$. On a donc :

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

- **Neutralité de l'identité :** pour tout $i \leq j$, le morphisme unique $f \in \mathcal{I}(i,j)$ satisfait :

$$f \circ 1_i = f \quad \text{et} \quad 1_j \circ f = f,$$

car $f = *$ est unique.

Donc tout ensemble ordonné filtrant $(I, \leq)$ est une catégorie.

1.3.4 Limites projectives

Soit $(I, \leq)$ est dit ordonné filtrant.

Définition 1.3.9. *[3]*
Un système projectif de groupes sur $(I, \leq)$ est un couple $(X_i, \phi_{ij})_{i,j \in I}$ où les X_i sont les groupes et les $\phi_{ij} : X_j \to X_i$ ($i \leq j$) sont les homomorphismes de groupes vérifiant :

i) $\phi_{ii} = Id_{X_i}$ pour tout $i \in I$;

ii) pour tout $(i,j,k) \in I^3$ tels que $i \leq j \leq k$, on a $\phi_{ik} = \phi_{ij} \circ \phi_{jk}$.

Autrement dit, le diagramme

$$\begin{tikzcd} X_k \arrow[rr, "\phi_{jk}"] \arrow[dr, "\phi_{ik}"'] & & X_j \arrow[dl, "\phi_{ij}"] \\ & X_i & \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Définition 1.3.10. *[3]*
Soient X un groupe et $(X_i, \phi_{ij})_{i,j \in I}$ un système projectif de groupes.La famille de homomorphismes $(\phi_i : X \to X_i)_{i \in I}$ qu'on note (X, ϕ_i) est dite compatible avec le système projectif $(X_i, \phi_{ij})_{i,j \in I}$ si pour tous $i, j \in I$ tels que $i \leq j$, on a : $\phi_{ij} \circ \phi_j = \phi_i$. Ce qui se traduit par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\phi_j"] \arrow[dr, "\phi_i"'] & & X_j \arrow[dl, "\phi_{ij}"] \\ & X_i & \end{tikzcd}$$

Définition 1.3.11. *[3]*
Soit $(X_i, \phi_{ij})_{i,j \in I}$ un système projectif de groupes.La limite projective ou limite inverse du système projectif $(X_i, \phi_{ij})_{i,j \in I}$ est une famille $(X, (\phi_i)_{i \in I})$ de homomorphismes compatibles avec $(X_i, \phi_{ij})_{i,j \in I}$ vérifiant la PU suivante :
Si $(\psi_i : Y \to X_i)_{i \in I}$ ($Y \in |\mathcal{C}|$) est une famille de morphismes compatibles, alors il existe un unique morphisme $\psi : Y \to X$ tel que le diagramme suivant commute pour tous $i \leq j$:

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[d, dashed, "\psi"] \arrow[ddl, "\psi_j"'] \arrow[ddr, "\psi_i"] & \\
& X \arrow[dl, "\phi_j"] \arrow[dr, "\phi_i"'] & \\
X_j \arrow[rr, "\phi_{ij}"'] & & X_i
\end{tikzcd}$$

$$\psi_i = \phi_i \circ \psi$$
$$\psi_j = \phi_j \circ \psi$$

Proposition 1.3.3. *[3]*
Si une limite projective d'un système projectif existe, elle est unique à isomorphisme près.

Notation 1.3.2.
Une telle limite est notée $\varprojlim_I X_i$ *ou* $\varprojlim_{i \in I} X_i$.

Définition 1.3.12. *[3]*
La limite projective d'un système projectif de groupe finis est appelé groupe profini.

Exemple 1.3.3.

1. *Tout groupe fini est profini. Ainsi,* $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ *est un groupe profini.*
2. *La limite projective du système projectif* $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \varphi_{mn})_{N\setminus\{0\}}$ *où* φ_{mn} *désigne, pour* n *divisant* m*, la surjection définie par :*

$$\varphi_{mn} : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$
$$\overline{x} \longmapsto \tilde{x}$$

où $\overline{x}$ *et* $\tilde{x}$ *sont respectivement les classes de l'entier* x *modulo* $m\mathbb{Z}$ *et modulo* $n\mathbb{Z}$*, est un groupe profini. On le note* $\widehat{\mathbb{Z}}$ *et on l'appelle le complété profini de* $\mathbb{Z}$.

Théorème 1.3.1.
Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *un foncteur contravariant entre deux catégories* $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{D}$*. Alors, l'image d'une limite inductive par le foncteur* F *est une limite projective.*

Preuve :

Soit (X_i, f_{ij}) un système inductif indexé par I. On a $f_{ij} : X_i \to X_j$ $(i \leq j)$ satisfaisant :

- $f_{ii} = \mathrm{id}_{X_i}$ (identité),
- $f_{jk} \circ f_{ij} = f_{ik}$ pour $i \leq j \leq k$.

La limite inductive de ce système, notée $X = \varinjlim X_i$, est un objet X de $\mathcal{C}$ muni de morphismes $u_i : X_i \to X$ tels que :

1. Pour tout $i \leq j$, on a $u_j \circ f_{ij} = u_i$.

2. Si un autre objet Y et des morphismes $v_i : X_i \to Y$ satisfont $v_j \circ f_{ij} = v_i$, alors il existe un unique morphisme $v : X \to Y$ tel que $v \circ u_i = v_i$.

Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur contravariant entre deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

Montrons que $(F(X_i), F(f_{ij}))$ est un système projectif dans $\mathcal{D}$:

En appliquant F au système inductif (X_i, f_{ij}),

- Chaque morphisme $f_{ij} : X_i \to X_j$ dans $\mathcal{C}$ devient un morphisme $F(f_{ij}) : F(X_j) \to F(X_i)$ dans $\mathcal{D}$.
- L'identité $f_{ii} = \mathrm{id}_{X_i}$ dans $\mathcal{C}$ devient $F(f_{ii}) = \mathrm{id}_{F(X_i)}$. En effet, F est contravariant et donc $F(\mathrm{id}_{X_i}) = \mathrm{id}_{F(X_i)}$.
- Pour $i \leq j \leq k$, $f_{jk} \circ f_{ij} = f_{ik}$ dans $\mathcal{C}$ devient $F(f_{ij}) \circ F(f_{jk}) = F(f_{ik})$ dans $\mathcal{D}$.

Montrons que $(F(X), F(u_i) : F(X) \to F(X_i))$ est une famille de morphismes compatibles dans $\mathcal{D}$:

Les morphismes $u_i : X_i \to X$ dans $\mathcal{C}$ deviennent $F(u_i) : F(X) \to F(X_i)$ dans $\mathcal{D}$. Il vient que pour tout $i \leq j$, $u_j \circ f_{ij} = u_i$ dans $\mathcal{C}$ devient $F(f_{ij}) \circ F(u_j) = F(u_i)$ dans $\mathcal{D}$. Donc $(F(X), F(u_i) : F(X) \to F(X_i))$ est une famille de morphismes compatibles dans $\mathcal{D}$.

Vérifions la propriété universelle :

La Propriété universelle dans $\mathcal{C}$ implique en appliquant F qu'on a $F(v_i) : F(Y) \to F(Y_i)$ satisfont $F(f_{ij}) \circ F(v_j) = F(v_i)$ et l'existence d'un morphisme unique $F(v) : F(Y) \to F(X)$ tel que $F(u_i) \circ F(v) = F(v_i)$.

Il en résulte que $F(X)$ satisfait exactement la définition d'une limite projective et par conséquent $F(\varinjlim X_i) = \varprojlim F(X_i)$.

Définition 1.3.13. *(Morphisme de systèmes projectifs) [20]*
Soit C une catégorie et (G_i, φ_{ij}), (G'_i, φ'_{ij}) deux systèmes projectifs d'objets de C sur un même ensemble filtrant I. Un morphisme de systèmes projectifs

$$\Theta : (G_i, \varphi_{ij}) \longrightarrow (G'_i, \varphi'_{ij})$$

est la donnée pour chaque $i \in I$ d'un morphisme $\theta_i : G_i \to G'_i$ tel que pour tous $i \leq j$ le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
G_j \arrow[r, "\varphi_{ij}"] \arrow[d, "\theta_j"'] & G_i \arrow[d, "\theta_i"] \\
G'_j \arrow[r, "\varphi'_{ij}"'] & G'_i
\end{tikzcd}$$

Remarque 1.3.2. *[20]*
On peut composer de manière naturelle deux morphismes de systèmes projectifs

$$\Theta : (G_i, \varphi_{ij}) \longrightarrow (G'_i, \varphi'_{ij}) \quad \textit{et} \quad \Psi : (G'_i, \varphi'_{ij}) \longrightarrow (G''_i, \varphi''_{ij})$$

afin de donner le morphisme

$$\Psi \circ \Theta : (G_i, \varphi_{ij}) \longrightarrow (G''_i, \varphi''_{ij})$$

dont les composantes sont :

$$(\Psi \circ \Theta)_i = \psi_i \circ \theta_i.$$

On définit ainsi la catégorie des systèmes projectifs d'objets de $\mathcal{C}$, que l'on note $\mathbf{Proj}_{\mathcal{C}}$.

Dans ce qui suit, supposons que $\mathcal{C}$ est une catégorie dans laquelle le produit de toute famille d'objets ainsi que les limites projectives existent.

Théorème 1.3.2. *[20]*
Soit $\Theta : (G_i, \varphi_{ij}) \longrightarrow (G'_i, \varphi'_{ij})$ un morphisme d'objets de $\mathbf{Proj}_{\mathcal{C}}$, $G = \varprojlim G_i$ et $G' = \varprojlim G'_i$. Pour tout $l \in I$, on peut définir un morphisme de $\varprojlim G_i$ dans G'_l en faisant $\theta_l \circ \varphi_l$ et un morphisme de $\varprojlim G_i$ dans G'_k en faisant $\theta_k \circ \varphi_k$ illustré par le diagramme commutatif suivant, pour $k \leq l$ [20] :

$$\begin{tikzcd}
 & G_k \arrow[rr, "\theta_k"] & & G'_k \\
\varprojlim G_i \arrow[ur, "\varphi_k"] \arrow[dr, "\varphi_l"'] & & \varprojlim G'_i \arrow[ur, "\varphi'_k"] \arrow[dr, "\varphi'_l"'] & \\
 & G_l \arrow[uu, "\varphi_{kl}"] \arrow[rr, "\theta_l"'] & & G'_l \arrow[uu, "\varphi'_{kl}"']
\end{tikzcd}$$

Ces morphismes induisent un autre morphisme, noté $\varprojlim \theta_i$ ou $\varprojlim \Theta$, de G dans G'.

<u>Preuve</u> :
Les morphismes $\theta_i \circ \varphi_i$ sont compatibles pour le système (G'_i, φ'_{ij}).
<u>En effet</u> :
Définissons $\theta_i \circ \varphi_i$ comme étant la composée de morphismes :

$$\theta_i \circ \varphi_i : G \to G'_i.$$

Montrons que cette famille est compatible avec le système (G'_i, φ'_{ij}), c'est-à-dire que pour tout $i \leq j$:

$$\varphi'_{ij} \circ (\theta_j \circ \varphi_j) = (\theta_i \circ \varphi_i).$$

Alors,

$$\varphi'_{ij} \circ (\theta_j \circ \varphi_j) = (\varphi'_{ij} \circ \theta_j) \circ \varphi_j.$$

Or, d'après la commutativité du diagramme précédent, on obtient :

$$\varphi'_{ij} \circ \theta_j = \theta_i \circ \varphi_{ij}.$$

Donc, $(\theta_i \circ \varphi_{ij}) \circ \varphi_j = \theta_i \circ (\varphi_{ij} \circ \varphi_j)$. Par compatibilité des morphismes du système (G_i, φ_{ij}), on a $\varphi_{ij} \circ \varphi_j = \varphi_i$.
Ainsi, $\theta_i \circ \varphi_i = \theta_i \circ \varphi_i$.
Ce qui prouve que $\varphi'_{ij} \circ (\theta_j \varphi_j) = \theta_i \circ \varphi_i$.

La propriété universelle de la limite projective du système (G'_i, φ'_{ij}) assure donc l'existence d'un unique morphisme $\varprojlim \Theta : G \longrightarrow G'$.

1.4 Complété Profini d'un Groupe

Définition 1.4.1. *[21]*
Un complété profini d'un groupe abstrait G est la limite projective notée $\widehat{G}$ du système projectif $(G/N)_{N\in\mathcal{N}}$ de groupes finis, où $\mathcal{N}$ est la collection de tous les sous-groupes normaux d'indices finis de G, c'est-à-dire

$$\hat{G} = \varprojlim_{N\in\mathcal{N}} G/N.$$

Proposition 1.4.1. *[21]*
Le complété profini d'un groupe est unique à isomorphisme près, c'est-à-dire si $(\widehat{G_1}, j_1)$ et $(\widehat{G_2}, j_2)$ sont deux complétés de G, alors il existe un isomorphisme $\widehat{\alpha} : \widehat{G_1} \to \widehat{G_2}$ tel que $\widehat{\alpha} j_1 = j_2$.

Proposition 1.4.2. *[21]*

$$\hat{G} = \varprojlim_{N\in\mathcal{N}} G/N \quad \text{est un sous-groupe du produit direct} \quad \prod_{N\in\mathcal{N}} G/N.$$

Propriété 1.4.1. *[21]*
Lorsque G est doté de la topologie profinie, alors on a un homomorphisme continu $j : G \to \widehat{G}$ vérifiant la propriété universelle suivante : pour tout $\theta : G \to H$ un homomorphisme continu dans un groupe discret H, il existe un unique homomorphisme continu $\widehat{\theta} : \widehat{G} \to H$ tel que $\theta = \widehat{\theta} j$. On dit que le couple $(\widehat{G}, j)$ est le complété profini de G.

On a les propriétés suivantes des complétés profinis.

Proposition 1.4.3. *[18]*
Soit $(\widehat{G}, j)$ le complété profini de G. Alors :

(a) $j(G)$ *est dense dans* $\widehat{G}$.

(b) $\ker j = \bigcap_{K\in\mathcal{N}} K$.

Définition 1.4.2. *[18]*
On dit que les groupes G_1 et G_2 sont profiniment équivalents si leurs complétés profinis sont isomorphes, c'est-à-dire si $\widehat{G_1} \cong \widehat{G_2}$.

Théorème 1.4.1. *[21]*
Des groupes de type fini avec la même collection de quotients finis ont des complétions profinies isomorphes, autrement dit sont profiniment équivalents.

Conclusion

Ce chapitre a établi les fondements théoriques nécessaires à l'étude des représentations linéaires des groupes infinis. Nous avons introduit les notions de groupes, sous-groupes et homomorphismes, suivies des concepts d'espaces vectoriels et d'applications linéaires, essentiels pour appréhender les représentations linéaires. Enfin, les outils de la théorie des catégories, tels que les foncteurs, limites projectives et inductives, ont été présentés afin de fournir une structure générale pour les développements ultérieurs. Ces préliminaires fournissent un cadre rigoureux qui facilitera l'étude des représentations linéaires, des caractères, et des représentations irréductibles dans le contexte des groupes infinis, thème central de ce mémoire.

CHAPITRE

2

Représentations linéaires d'un produit de deux groupes finis.

Introduction

Les représentations linéaires de groupes finis constituent un outil fondamental en mathématiques, notamment dans les domaines de l'algèbre, de la théorie des nombres, et de la physique mathématique. Elles permettent de traduire des problèmes abstraits en termes de matrices et d'espaces vectoriels, rendant ainsi plus accessibles l'étude des structures et des symétries. Dans ce chapitre, nous explorons les bases des représentations linéaires appliquées aux groupes finis. Nous commencerons par définir ce qu'est une représentation linéaire d'un groupe fini [16], en précisant les propriétés essentielles qui s'y rattachent. Ensuite, nous abordons le concept de caractère, un invariant crucial qui permet de distinguer les représentations et de simplifier leur étude. Enfin, nous introduirons les représentations linéaires irréductibles, qui constituent les briques élémentaires dans la décomposition de toute représentation en composantes simples.

2.1 Représentation et sous-représentation linéaire d'un groupe fini

Dans cette section sans mention contraire, $\mathbb{K}$ désignera le corps $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$. Les espaces vectoriels seront définis sur $\mathbb{K}$. Tout groupe sera aussi fini.

2.1.1 Définitions et exemples

Définition 2.1.1. *[16]*
Une représentation $\mathbb{K}$-linéaire d'un groupe fini G est un homomorphisme de groupes $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ où V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathrm{GL}(V)$ est le groupe des applications linéaires bijectives de V sur lui-même.

Remarque 2.1.1. *[16]*
Si V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, on dit que n est le degré de la représentation. De plus, en choisissant une base de V, le groupe $\mathrm{GL}(V)$ est isomorphe au groupe

$\mathrm{GL}(n,\mathbb{K}) = \{A \in \mathrm{M}(n,\mathbb{K}) \mid \det(A) \neq 0\}$, *où* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ *est le groupe des matrices inversibles de taille* $n \times n$ *équipé de la multiplication des matrices à coefficients dans* $\mathbb{K}$, $\det(A)$ *pour* $A \in \mathrm{M}(n,\mathbb{K})$ *désignant le déterminant de la matrice* A.

Définition 2.1.2. *[19]*
Une matrice de permutation de taille $n \times n$ *est une matrice obtenue de la matrice identité* I_n *en permutant ses lignes.*

Exemple 2.1.1.

1. *La représentation linéaire triviale définie par* $\forall g \in G,\ \rho(g) = \mathrm{Id}_V$.
   Preuve :
   Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ *une représentation linéaire de* G *de degré* 1*, c'est-à-dire telle que* $\dim V = 1$*. Dans ce cas,* $V \cong \mathbb{C}$*, et le groupe général linéaire* $\mathrm{GL}(V)$ *s'identifie à* $\mathbb{C}^\times$*, le groupe multiplicatif des complexes non nuls. Ainsi,* ρ *peut être vu comme un morphisme de groupes :*
   $$\rho : G \to \mathbb{C}^\times.$$
   L'action de G *sur* V *est donnée par multiplication scalaire :*
   $$\rho(g)(v) = \lambda_g v, \quad \text{où } \lambda_g \in \mathbb{C}^\times \text{ et } v \in V.$$
   Soit $W \subseteq V$ *un sous-espace vectoriel stable par* ρ*, c'est-à-dire tel que* $\rho(g)(w) \in W$ *pour tout* $g \in G$ *et tout* $w \in W$.

   Or, comme $\dim V = 1$*, les seuls sous-espaces vectoriels de* V *sont* $\{0\}$ *et* V *lui-même.*

   Donc, les seuls sous-espaces stables par ρ *sont triviaux.*

   Par définition, une représentation est dite irréductible si elle ne possède aucun sous-espace G*-stable non trivial. Ainsi,* ρ *est irréductible*

2. *Représentation linéaire standard du groupe symétrique* S_3 *:*
   Nous définissons une représentation linéaire du groupe symétrique S_3 *sur* $\mathbb{R}^3$ *en associant à chaque permutation* $\sigma \in S_3$ *une matrice de permutation* $\rho(\sigma)$*. Les éléments de* $S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$ *sont utilisés pour définir la représentation* $\rho : S_3 \to \mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$ *comme suit :*
   $$\rho(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ \rho((12)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\ \rho((13)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   $$\rho((23)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ \rho((123)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ \rho((132)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Notation 2.1.1.
Dans la suite, une représentation linéaire $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ *sera notée par* $(V,\rho)_G$.

Définition 2.1.3. *[22]*
Soit V *un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel de dimension finie.*
Une représentation $(V,\rho)_G$ *est dite unitaire si* ρ *prend ses valeurs dans le groupe des matrices unitaires.*

Définition 2.1.4. *[16]*
Soient $(V,\rho)_G$ et $(W,\psi)_G$ deux représentations linéaires. Un opérateur d'entrelacement, ou morphisme de représentations est une application linéaire $\alpha : V \to W$ telle que $\alpha \circ \rho(g) = \psi(g) \circ \alpha$, pour tout $g \in G$. Ce qui est illustré par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho(g)"] \arrow[d, "\alpha"'] & V \arrow[d, "\alpha"] \\ W \arrow[r, "\psi(g)"'] & W \end{tikzcd}$$

On dit que α est équivariante.
Lorsque $\alpha : V \to W$ est un isomorphisme, on dit que les représentations $(V,\varphi)_G$ et $(W,\psi)_G$ sont isomorphes.

2.1.2 Sous-représentations

Soient W un sous-espace vectoriel de V et G un groupe.

Définition 2.1.5. *[16]*
Soit $(V,\rho)_G$ une représentation linéaire. On dit que W est stable (ou invariant) sous l'action de G ou encore G-stable si pour tout $g \in G$ et tout $w \in W$, on a $\rho_g(w) \in W$.

Définition 2.1.6. *[16]*
Une sous-représentation d'une représentation linéaire $(V,\rho)_G$ est la restriction $\rho_W : G \to \mathrm{GL}(W)$ où W est stable sous G. Elle est définie par :

$$\rho_W(g) = \rho(g)|_W, \quad \forall g \in G.$$

Proposition 2.1.1. *[16]*
Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation linéaire sur G tel que W soit un sous-espace vectoriel de V stable sous l'action de G. Alors, l'application restreinte $\rho_W : G \to \mathrm{GL}(W)$ définie par $\rho_W(g) = \rho(g)|_W$ pour tout $g \in G$ est un homomorphisme de groupes.

Preuve :
Pour démontrer que ρ_W est un homomorphisme de groupes, il suffit de vérifier que, pour tous $g_1, g_2 \in G$ et tout $w \in W$, l'égalité suivante est satisfaite dans W :

$$\rho_W(g_1g_2)(w) = \rho_W(g_1) \circ \rho_W(g_2)(w).$$

Étant donné que $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ est un homomorphisme de groupes, nous avons :

$$\rho(g_1g_2)(w) = \rho(g_1) \circ \rho(g_2)(w) \quad \text{dans } V.$$

Montrons que $\rho(g_1g_2)(w) = \rho(g_1) \circ \rho(g_2)(w)$ appartient à W.
Puisque W est stable sous l'action de G, nous savons que :

- $\rho(g_2)(w) \in W$, car $w \in W$ et G agit sur W.
- En posant $w_0 = \rho(g_2)(w)$, on a également $\rho(g_1)(w_0) \in W$, car W reste stable par l'action de G.

Ainsi, pour tous $g_1, g_2 \in G$ et tout $w \in W$, l'égalité suivante est vérifiée dans W :

$$\rho_W(g_1 g_2)(w) = \rho_W(g_1) \circ \rho_W(g_2)(w).$$

Par conséquent, $\rho_W : G \to \mathrm{GL}(W)$ est un homomorphisme de groupes.

Remarque 2.1.2.
Il découle du résultat de la proposition 2.1.1 que, pour établir que $\rho_W : G \to \mathrm{GL}(W)$ est une sous-représentation linéaire de $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$, il suffit de montrer que W est un sous-espace vectorel de V stable sous l'action du groupe G.

Exemple 2.1.2.
Soit $V = \mathbb{R}^3$ l'espace vectoriel sur lequel le groupe symétrique S_3 agit par permutation des coordonnées. Pour une permutation $\sigma \in S_3$, l'action de σ sur un vecteur $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ est donnée par :

$$\sigma \cdot (x_1, x_2, x_3) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}).$$

Cela définit une représentation linéaire $\rho : S_3 \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^3)$, où chaque permutation est associée à une matrice de permutation réarrangeant les coordonnées.
Considérons le sous-espace vectoriel $W \subset V$ défini par :

$$W = Span((1,1,1)) = \{(x, x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

$\rho_W : S_3 \to \mathrm{GL}(W)$ *est une sous-représentation linéaire de* $(V, \rho)_{S_3}$.

En effet :
Pour toute permutation $\sigma \in S_3$ et pour tout $v \in W$, nous devons avoir $\sigma \cdot v \in W$.
Soient $v = (x, x, x) \in W$ et $\sigma \in S_3$, alors :

$$\rho_W(\sigma)((x, x, x)) = (x, x, x) \in W.$$

Donc W est stable sous l'action de S_3. Ce qui montre que $\rho_W : S_3 \to \mathrm{GL}(W)$ est une sous-représentation de $(V, \rho)_{S_3}$.

Lemme 4. *[22]*
Soient $\varphi : G \to \mathrm{GL}(V_1)$ et $\psi : G \to \mathrm{GL}(V_2)$ deux représentations linéaires de G.
Soit $f : V_1 \to V_2$ un morphisme de représentations linéaires. Alors :

i) $\rho_{\ker(f)} : G \to \mathrm{GL}(\ker(f))$ *est une sous-représentation linéaire de* $\varphi : G \to \mathrm{GL}(V_1)$;

ii) *l'image* $\mathrm{im}(f)$ $\rho_{\mathrm{im}(f)} : G \to \mathrm{GL}(\mathrm{im}(f))$ *est une sous-représentation linéaire de* $\psi : G \to \mathrm{GL}(V_2)$;

iii) $V_1 / \ker(f) \cong \mathrm{im}(f)$.

Preuve :
(i) Soit $v \in \ker(f)$, c'est-à-dire $f(v) = 0$. Pour tout $g \in G$, nous devons montrer que $\varphi(g) \cdot v \in \ker(f)$.
Puisque f est un morphisme de représentations, nous avons :

$$f \circ \varphi(g) = \psi(g) \circ f.$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} f(\varphi(g)(v)) &= (f(\varphi(g)))(v) \\ &= (\psi(g) \circ f)(v) \\ &= \psi(g) \circ f(v) \\ &= \psi(g)(0) \\ &= \psi(g)(0 \cdot 1) \\ &= 0 \cdot \psi(g)(1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc $\varphi(g) \cdot v \in \ker(f)$. Ce qui prouve que $\ker(f)$ est stable par l'action de G.
Par ailleurs, $\ker(f)$ est un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel de V_1. Ainsi,

$$\rho_{\ker(f)} : G \to \mathrm{GL}(\ker(f))$$

est une sous-représentation linéaire de $\varphi : G \to \mathrm{GL}(V_1)$.
(ii) Soit $w \in \mathrm{im}(f)$, c'est-à-dire qu'il existe $v \in V_1$ tel que $f(v) = w$. Nous devons montrer que, pour tout $g \in G$, $\psi(g) \cdot w \in \mathrm{im}(f)$.
On a :

$$\begin{aligned} \psi(g)(w) &= \psi(g)(f(v)) \\ &= (\psi(g) \circ f)(v) \\ &= (f \circ \varphi(g))(v) \\ &= f(\varphi(g)(v)). \end{aligned}$$

Ainsi, $\psi(g) \cdot w \in \mathrm{im}(f)$. Ce qui prouve que $\mathrm{im}(f)$ est stable par l'action de G.
De plus, $\mathrm{im}(f)$ est un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel de V_2. Il s'ensuit que

$$\rho_{\mathrm{im}(f)} : G \to \mathrm{GL}(\mathrm{im}(f))$$

est une sous-représentation linéaire de $\psi : G \to \mathrm{GL}(V_2)$.

(iii) Soit $f : V_1 \to V_2$ un morphisme de représentations de G.
L'application f induit une application
$\tilde{f} : V_1 / \ker(f) \to \mathrm{im}(f)$ défini par $\tilde{f}([v]) = f(v) \quad \forall v \in V_1$,
où $[v]$ désigne la classe d'équivalence de v dans l'espace quotient $V_1 / \ker(f)$.

Bonne définition de $\overline{f}$:
L'application $\overline{f}$ est bien définie si pour tous $v_1, v_2 \in V_1$, $v_1 \sim v_2$ (c'est-à-dire $v_1 - v_2 \in \ker(f)$), nous avons $f(v_1) = f(v_2)$.
Si $v_1 - v_2 \in \ker(f)$, alors :

$$\begin{aligned} f(v_1 - v_2) = 0 &\Rightarrow f(v_1) - f(v_2) = 0 \\ &\Rightarrow f(v_1) = f(v_2). \end{aligned}$$

Ce qui garantit que $\overline{f}([v_1]) = \overline{f}([v_2])$. Donc $\overline{f}$ est bien définie.

Surjectivité de $\overline{f}$:
Soit $w \in \mathrm{im}(f)$. Il existe un $v \in V_1$ tel que $f(v) = w$. Donc $\overline{f}([v]) = f(v) = w$. Ainsi,

chaque élément de $\mathrm{im}(f)$ est l'image d'une classe d'équivalence dans $V_1/\ker(f)$, ce qui prouve que $\overline{f}$ est surjective.

Injectivité de $\overline{f}$:
Supposons que $\overline{f}([v]) = 0$, c'est-à-dire que $f(v) = 0$. Cela implique que $v \in \ker(f)$. Donc $[v] = [0]$. Par conséquent, $\overline{f}$ est injective.
L'application $\overline{f}$ est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $V_1/\ker(f)$ et $\mathrm{im}(f)$.
Enfin, montrons que $\tilde{f}$ est un morphisme de représentations linéaires.
Pour tout $g \in G$ et $v \in V_1$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\tilde{f} \circ (\varphi(g)([v])) &= \tilde{f}([\varphi(g)(v)]) \\
&= f(\varphi(g)(g)) \\
&= \psi(g) \circ f(v) \\
&= \psi(g) \circ \tilde{f}([v]).
\end{aligned}$$

Cela montre que $\overline{f}$ est un morphisme de représentations linéaires.
Il en resulte que l'application $\overline{f} : V_1/\ker(f) \to \mathrm{im}(f)$ est un isomorphisme de représentations linéaires de G et par consequent,

$$V_1/\ker(f) \cong \mathrm{im}(f)$$

au sens de représentations linéaires de G.

2.1.3 Produit tensoriel de deux espaces vectoriels et représentation linéaire d'un produit de deux groupes finis.

2.1.3.1 Produit tensoriel de deux espaces vectoriels .

Soient V_1, V_2 et V_3 trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Définition 2.1.7. *[24]*
Une application $\varphi : V_1 \times V_2 \to V_3$ est dite bilinéaire si elle satisfait les conditions suivantes :

i) $\varphi(\lambda v_1 + \mu v_2, w) = \lambda\varphi(v_1, w) + \mu\varphi(v_2, w), \quad \forall v_1, v_2 \in V_1,\ w \in V_2, \quad \forall \lambda, \mu \in \Gamma.$

ii) $\varphi(v, \lambda w_1 + \mu w_2) = \lambda\varphi(v, w_1) + \mu\varphi(v, w_2), \quad \forall v \in V_1, \quad \forall w_1, w_2 \in V_2.$

Propriété 2.1.1. ***(Propriété universelle)*** *[24]*
Soient E, F, G et H quatre $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\otimes : E \times F \to G$ une application bilinéaire. On dit que $\otimes$ satisfait la propriété universelle si elle vérifie les conditions suivantes :

i) Les vecteurs $x \otimes y$ ($x \in E$, $y \in F$) engendrent G, ou équivalemment, $\mathrm{Im} \otimes = G$.

ii) Si $\varphi : E \times F \to H$ est une application bilinéaire, alors il existe une application linéaire $f : G \to H$ telle que le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd}
E \times F \arrow[rr, "\otimes"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & G \arrow[dl, "f"] \\
& H &
\end{tikzcd} \qquad (1.1)$$

Les deux conditions ci-dessus sont équivalentes à l'unique condition suivante :

iii) pour toute application bilinéaire $\varphi : E \times F \to H$, il existe une unique application linéaire $f : G \to H$ telle que le diagramme (1.1) commute.

Définition 2.1.8. *[24]*
Le produit tensoriel de deux espaces vectoriels E et F est un couple $(G, \otimes)$, où $\otimes : E \times F \to G$ est une application bilinéaire vérifiant la propriété universelle 2.1.1.
L'espace G est noté $E \otimes F$.

Propriété 2.1.2. *[24]*
Le couple $(E \otimes F, \otimes)$ est unique à un isomorphisme près.

Preuve :
Nous voulons montrer que : si (T, φ) est un autre couple avec $\varphi : E \times F \to T$ bilinéaire vérifiant la même propriété universelle, alors il existe un unique isomorphisme linéaire $u : E \otimes F \to T$ tel que :

$$u(e \otimes f) = \varphi(e, f), \quad \forall (e, f) \in E \times F.$$

Par définition, le couple $(E \otimes F, \otimes)$ vérifie la propriété universelle suivante :
Pour tout espace vectoriel G et toute application bilinéaire $B : E \times F \to G$, il existe un unique morphisme linéaire $\tilde{B} : E \otimes F \to G$ tel que $\tilde{B}(e \otimes f) = B(e, f)$.
Soit maintenant (T, φ) un autre couple vérifiant la même propriété universelle. On applique cette propriété dans deux directions :
Appliquons la propriété universelle de $E \otimes F$ à $B = \varphi$.
Il existe un unique morphisme linéaire $u : E \otimes F \to T$ tel que :

$$u(e \otimes f) = \varphi(e, f), \quad \forall (e, f) \in E \times F.$$

Appliquons également la propriété universelle de T à $B = \otimes$.
Il existe un unique morphisme linéaire $v : T \to E \otimes F$ tel que :

$$v(\varphi(e, f)) = e \otimes f, \quad \forall (e, f) \in E \times F.$$

Montrons que u et v sont inverses.
Pour tout $e \otimes f \in E \otimes F$, on a :

$$(v \circ u)(e \otimes f) = v(u(e \otimes f)) = v(\varphi(e, f)) = e \otimes f,$$

donc $v \circ u = \mathrm{id}_{E \otimes F}$.
Pour tout $\varphi(e, f) \in T$, on a :

$$(u \circ v)(\varphi(e, f)) = u(v(\varphi(e, f))) = u(e \otimes f) = \varphi(e, f),$$

donc $u \circ v = \mathrm{id}_T$.
Ainsi, u est un isomorphisme, et il est unique par unicité dans la propriété universelle.

Définition 2.1.9. *[11]*
Si $\dim E = n$ et $\dim F = m$, alors la dimension du produit tensoriel $E \otimes F$ est

$$\dim(E \otimes F) = (\dim E)(\dim F) = nm.$$

Exemple 2.1.3.
Soient $V_1 = \mathbb{R}^2$ *et* $V_2 = \mathbb{R}^2$*, avec des bases respectives* $\{e_1, e_2\}$ *et* $\{f_1, f_2\}$*.*
Le produit tensoriel $V_1 \otimes V_2$ *est alors un espace vectoriel de dimension* 4*, avec une base donnée par les éléments* $\{e_i \otimes f_j \mid i, j = 1, 2\}$*, soit* $\{e_1 \otimes f_1, e_1 \otimes f_2, e_2 \otimes f_1, e_2 \otimes f_2\}$*.*
Soit $v_1 = 2e_1 + 3e_2 \in V_1$ *et* $v_2 = 4f_1 + f_2 \in V_2$*. Nous calculons* $v_1 \otimes v_2$ *dans* $V_1 \otimes V_2$ *en utilisant la linéarité du produit tensoriel :*

$$\begin{aligned} v_1 \otimes v_2 &= (2e_1 + 3e_2) \otimes (4f_1 + f_2) \\ &= 2e_1 \otimes (4f_1 + f_2) + 3e_2 \otimes (4f_1 + f_2) \\ &= 2 \cdot 4\, e_1 \otimes f_1 + 2 \cdot 1\, e_1 \otimes f_2 + 3 \cdot 4\, e_2 \otimes f_1 + 3 \cdot 1\, e_2 \otimes f_2 \\ &= 8e_1 \otimes f_1 + 2e_1 \otimes f_2 + 12e_2 \otimes f_1 + 3e_2 \otimes f_2. \end{aligned}$$

Ainsi, dans la base $\{e_1 \otimes f_1, e_1 \otimes f_2, e_2 \otimes f_1, e_2 \otimes f_2\}$*, on peut exprimer* $v_1 \otimes v_2$ *comme :*

$$v_1 \otimes v_2 = 8\, e_1 \otimes f_1 + 2\, e_1 \otimes f_2 + 12\, e_2 \otimes f_1 + 3\, e_2 \otimes f_2.$$

Propriété 2.1.3. *[24]*
Si E *et* F *sont deux espaces vectoriels, alors* $E \otimes F \;\cong\; F \otimes E$*.*

<u>Preuve :</u>
Nous construisons un isomorphisme linéaire entre $E \otimes F$ et $F \otimes E$, sans choisir de bases.
Considérons l'application :

$$\beta : E \times F \to F \otimes E, \quad (e, f) \mapsto f \otimes e.$$

Elle est bilinéaire car la multiplication tensorielle est linéaire en chaque variable. Par la propriété universelle du produit tensoriel, cette application induit un unique morphisme linéaire :

$$T : E \otimes F \to F \otimes E, \quad \text{défini par } T(e \otimes f) = f \otimes e.$$

De façon symétrique, on définit :

$$\gamma : F \times E \to E \otimes F, \quad (f, e) \mapsto e \otimes f,$$

qui est également bilinéaire, et induit un morphisme linéaire :

$$S : F \otimes E \to E \otimes F, \quad \text{défini par } S(f \otimes e) = e \otimes f.$$

Vérifions que T et S sont inverses.
Pour tout $e \in E$, $f \in F$:

$$(S \circ T)(e \otimes f) = S(f \otimes e) = e \otimes f,$$

$$(T \circ S)(f \otimes e) = T(e \otimes f) = f \otimes e.$$

Donc $S \circ T = \mathrm{id}_{E \otimes F}$ et $T \circ S = \mathrm{id}_{F \otimes E}$, ce qui prouve que T est un isomorphisme, avec inverse S.

Il vient que l'application T est un isomorphisme canonique et par conséquent,

$$E \otimes F \cong F \otimes E.$$

2.1.3.2 Représentation linéaire d'un produit de deux groupes finis

Définition 2.1.10. *[22]*
Soient $\rho^1 : G_1 \to \mathrm{GL}(V_1)$ et $\rho^2 : G_2 \to \mathrm{GL}(V_2)$ les représentations linéaires des groupes finis G_1 et G_2 respectivement. Le produit tensoriel des représentations ρ^1 et ρ^2 est une représentation linéaire

$$\rho_{V_1 \otimes V_2} : G_1 \times G_2 \to \mathrm{GL}(V_1 \otimes V_2)$$
$$(g_1, g_2) \mapsto (x \otimes y \mapsto (\rho^1(g_1)(x) \otimes \rho^2(g_2)(y))).$$

Dans la suite sauf mention contraire, G désignera un groupe fini (pas forcément commutatif), noté multiplicativement avec pour élément neutre 1. La plupart des résultats utiliseront les propriétés des corps algébriquement clos de caractéristique zéro d'où nous supposerons par défaut le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. Les espaces vectoriels seront définis sur $\mathbb{C}$ et de dimension finie.

2.2 Caractère d'une représentation linéaire d'un groupe fini

Définition 2.2.1. *[16]*
Soit $(\rho, V)_G$ une représentation linéaire sur G. Le caractère de $(\rho, V)_G$, noté χ_V, est la fonction

$$\chi_V : G \to \mathbb{C}$$

définie pour tout $g \in G$ par

$$\chi_V(g) := \mathrm{Tr}(\rho(g)),$$

où Tr *désigne la trace.*

Théorème 2.2.1. *[22]*
Soit $(\rho, V)_G$ une représentation linéaire. On peut munir V d'un produit hermitien $(.,.)_V$ qui rend la représentation linéaire $(\rho, V)_G$ unitaire.

Preuve :
Munissons V d'un produit hermitien $(.,.)_0$ quelconque. Définissons un nouveau produit $(.,.)_1$ par

$$(v, w)_1 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\rho(g)(v), \rho(g)(w))_0, \quad \forall v, w \in V.$$

C'est un produit hermitien.
En effet :
Sesquilinéarité

Nous avons déjà supposé que $(.,.)_0$ est un produit hermitien, donc il est sesquilinéaire, c'est-à-dire linéaire à gauche et semi-linéaire à droite.

$$(\lambda v + \mu v', w)_0 = \lambda (v, w)_0 + \mu (v', w)_0, \quad \forall v, v', w \in V,\ \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$$

L'opérateur $\rho(g)$ étant linéaire, on en déduit que la somme pondérée définissant $(.,.)_1$ conserve la sesquilinéarité :

$$(v, w)_1 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\rho(g)(v), \rho(g)(w))_0$$

hérite donc de cette propriété.

Symétrie hermitienne

Par définition du produit hermitien, nous avons :

$$(v, w)_0 = \overline{(w, v)_0}.$$

En appliquant cette propriété à chaque terme de la somme, on obtient :

$$\begin{aligned}
(v, w)_1 &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\rho(g)(v), \rho(g)(w))_0 \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{(\rho(g)(w), \rho(g)(v))_0} \\
&= \overline{(w, v)_1}.
\end{aligned}$$

Donc $(.,.)_1$ vérifie la symétrie hermitienne.

Positivité

Nous devons montrer que $(v, v)_1 \geq 0$ avec égalité si et seulement si $v = 0$.
Par définition :

$$(v, v)_1 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\rho(g)(v), \rho(g)(w))_0.$$

Chaque terme de la somme est positif ou nul car $(.,.)_0$ est un produit hermitien.
De plus, si $(v, v)_1 = 0$, alors chaque terme de la somme est nul, ce qui implique que $(\rho(g)(v), \rho(g)(v))_0 = 0$ pour tout $g \in G$. Puisque $(.,.)_0$ est un produit hermitien, cela entraîne $\rho(g) \cdot v = 0$ pour tout $g \in G$, et en particulier $v = 0$. Ainsi, $(.,.)_1$ est un produit hermitien défini positif.

Invariance par ρ

Il reste à prouver que $(.,.)_1$ est invariant sous l'action de ρ, c'est-à-dire que

$$(\rho(h)(v), \rho(h)(w))_1 = (v, w)_1, \quad \forall h \in G.$$

En utilisant la définition de $(.,.)_1$:

$$\begin{aligned}
(\rho(h)(v), \rho(h)(w))_1 &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\rho(g) \cdot \rho(h)(v), \rho(g) \cdot \rho(h)(w))_0 \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\rho(gh)(v), \rho(gh)(w))_0 \quad (\text{par définition de } \rho) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G} (\rho(g')(v), \rho(g')(w))_0 \quad (\text{avec } g' = gh) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G} (\rho(g')(v), \rho(g')(w))_0 \quad (\text{car } g' \text{ parcourt } G \text{ lorsque } g \text{ parcourt } G) \\
&= (v, w)_1.
\end{aligned}$$

Ainsi, $(.,.)_1$ est invariant par ρ, ce qui montre que $(\rho, V)_G$ est bien une représentation unitaire.

Définition 2.2.2. *[16]*
Soit G un groupe fini. Une fonction centrale sur G est une fonction $f : G \to \mathbb{C}$ telle que, pour tous $g, h \in G$, la relation suivante est satisfaite :

$$f(ghg^{-1}) = f(h).$$

Autrement dit, une fonction centrale est une fonction qui reste constante sur les classes de conjugaison de G. L'ensemble des fonctions centrales sur G forme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel noté $C(G)$, dont la dimension est égale au nombre $c(G)$ de classes de conjugaison de G.

Remarque 2.2.1. *[22]*
Les fonctions centrales sont particulièrement importantes car tout caractère d'une représentation de G est une fonction centrale. En effet, si (V, ρ) est une représentation de G, le caractère χ_V associé satisfait la relation suivante pour tous $g, h \in G$:

$$\begin{aligned}
\chi_V(ghg^{-1}) &= \mathrm{Tr}(\rho(ghg^{-1})) \\
&= \mathrm{Tr}(\rho(g)\rho(h)\rho(g^{-1})) \\
&= \mathrm{Tr}(\rho(h)\rho(g^{-1})\rho(g)) \\
&= \mathrm{Tr}(\rho(h)\rho(g^{-1}g)) \\
&= \mathrm{Tr}(\rho(h)\rho(1)) \\
&= \mathrm{Tr}(\rho(h)) \\
&= \chi_V(h).
\end{aligned}$$

ce qui montre que χ_V est constante sur les classes de conjugaison de G.

Proposition 2.2.1. *[16]*
Soient $\rho_V : G \to \mathrm{GL}(V)$ et $\rho_w : G \to \mathrm{GL}(W)$ deux représentations linéaires sur G de dégres n et m $(n, m \in \mathbb{N}^*)$, et de Caractères χ_V et χ_W respectivemet.On a :

i) $\chi_V(1) = \dim V$;

ii) $\chi(g)^* = \chi^{-1}_{(g)} \quad \forall g \in G.$

Preuve :

i) On a :

$$\begin{aligned}\chi_V(1) &= \mathrm{Tr}(\rho(1))\\ &= \mathrm{Tr}(\mathrm{Id}_V)\\ &= \dim V.\end{aligned}$$

Donc $\chi_V(1) = \dim V$.

ii) On a :

$$\begin{aligned}\chi(g)^* &= \mathrm{Tr}(\rho_g)^*\\ &= \sum \lambda_i^*\\ &= \sum \lambda_i^{-1}\\ &= \mathrm{Tr}(\rho_{g^{-1}})\\ &= \chi(g^{-1}).\end{aligned}$$

Donc $\chi(g)^* = \chi_(g)^{-1} \quad \forall g \in G$.

Théorème 2.2.2 (Frobenius). *[16]*
Le nombre de représentations linéaires irréductibles non-isomorphes deux à deux d'un groupe G est égal au nombre $c(G)$ de classes de conjugaison de G.

Proposition 2.2.2. *[22]*
Soient $\rho, \rho' : G \to \mathrm{GL}(V), \mathrm{GL}(V')$ deux représentations complexes de dimension finie d'un groupe fini G. Alors :

$$\rho \cong \rho' \quad \Leftrightarrow \quad \chi_\rho = \chi_{\rho'},$$

où χ_ρ et $\chi_{\rho'}$ sont les caractères des représentations ρ et ρ'.

Preuve :
Soient $\rho, \rho' : G \to \mathrm{GL}(V), \mathrm{GL}(V')$ deux représentations complexes de dimension finie d'un groupe fini G.
Sens direct :
Supposons que $\rho \cong \rho'$. Il existe alors un isomorphisme d'espaces vectoriels $T : V \to V'$ tel que :

$$T \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ T \quad \text{pour tout } g \in G.$$

Cela implique que $\rho(g)$ et $\rho'(g)$ sont semblables, donc ont la même trace :

$$\chi_\rho(g) = \mathrm{Tr}(\rho(g)) = \mathrm{Tr}(\rho'(g)) = \chi_{\rho'}(g),$$

pour tout $g \in G$. Ainsi, $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$.

Sens réciproque :
Supposons que $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$. par le théorème de Maschke, on peut écrire

$$\rho \cong \bigoplus_i n_i \rho_i, \quad \rho' \cong \bigoplus_i n'_i \rho_i,$$

où les ρ_i sont des représentations irréductibles non isomorphes deux à deux, et $n_i, n_i' \in \mathbb{N}$ sont les multiplicités.

Le caractère d'une somme directe est la somme des caractères :

$$\chi_\rho = \sum_i n_i \chi_i, \quad \chi_{\rho'} = \sum_i n_i' \chi_i,$$

où χ_i est le caractère de ρ_i.

Comme $\chi_\rho = \chi_{\rho'}$ et que les caractères irréductibles χ_i sont linéairement indépendants dans l'espace des fonctions de classe, on en déduit que :

$$n_i = n_i' \quad \text{pour tout } i.$$

Ainsi, $\rho \cong \rho'$.

Propriété 2.2.1. *[22]*
Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation linéaire d'un groupe G. L'ensemble des caractères de ρ, noté $\widehat{G}$, est défini comme :

$$\widehat{G} := \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times).$$

Il forme un groupe abélien pour la multiplication point par point, définie par :

$$(\chi_1 \cdot \chi_2)(g) := \chi_1(g) \cdot \chi_2(g), \quad \forall g \in G.$$

Preuve :

1. Fermeture.
Soient $\chi_1, \chi_2 \in \widehat{G}$, c'est-à-dire deux morphismes de groupes $G \to \mathbb{C}^\times$. On définit :

$$(\chi_1 \cdot \chi_2)(g) := \chi_1(g) \cdot \chi_2(g), \quad \forall g \in G.$$

Pour montrer que $\chi_1 \cdot \chi_2 \in \widehat{G}$, vérifions que c'est un morphisme :

$$\begin{aligned}(\chi_1 \cdot \chi_2)(gh) &= \chi_1(gh)\, \chi_2(gh) \\ &= \chi_1(g)\chi_1(h) \cdot \chi_2(g)\chi_2(h) \\ &= (\chi_1(g)\chi_2(g))\, (\chi_1(h)\chi_2(h)) \\ &= (\chi_1 \cdot \chi_2)(g)\, (\chi_1 \cdot \chi_2)(h).\end{aligned}$$

2. Associativité.
La multiplication dans $\mathbb{C}^\times$ étant associative, on a pour $\chi_1, \chi_2, \chi_3 \in \widehat{G}$:

$$((\chi_1 \cdot \chi_2) \cdot \chi_3)(g) = (\chi_1(g) \cdot \chi_2(g)) \cdot \chi_3(g) = \chi_1(g) \cdot (\chi_2(g) \cdot \chi_3(g)) = (\chi_1 \cdot (\chi_2 \cdot \chi_3))(g).$$

3. Élément neutre.
L'application constante $\mathbf{1}_G : G \to \mathbb{C}^\times$ définie par $\mathbf{1}_G(g) = 1$ pour tout $g \in G$ est un morphisme de groupes (trivialement). Elle vérifie :

$$(\chi \cdot \mathbf{1}_G)(g) = \chi(g) \cdot 1 = \chi(g), \quad \forall \chi \in \widehat{G},\ \forall g \in G.$$

4. Inverses.

Pour $\chi \in \widehat{G}$, définissons $\chi^{-1} : G \to \mathbb{C}^\times$ par $\chi^{-1}(g) = \chi(g)^{-1}$. On a :

$$\chi^{-1}(gh) = (\chi(gh))^{-1} = (\chi(g)\chi(h))^{-1} = \chi(h)^{-1}\chi(g)^{-1} = \chi^{-1}(g)\chi^{-1}(h),$$

(car $\mathbb{C}^\times$ est abélien). Donc $\chi^{-1} \in \widehat{G}$ et :

$$(\chi \cdot \chi^{-1})(g) = \chi(g) \cdot \chi(g)^{-1} = 1 = \mathbf{1}_G(g).$$

5. Commutativité.
Pour $\chi_1, \chi_2 \in \widehat{G}$, et $g \in G$, on a :

$$(\chi_1 \cdot \chi_2)(g) = \chi_1(g)\chi_2(g) = \chi_2(g)\chi_1(g) = (\chi_2 \cdot \chi_1)(g).$$

Ainsi, $\widehat{G}$ est un groupe abélien pour la multiplication point par point.

2.3 Représentations linéaires irréductibles

Définition 2.3.1. *[16]*
On dit qu'une représentation linéaire $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ d'un groupe G est rréductible si l'espace vectoriel V n'est pas réduit à $\{0\}$ et si V ne possède aucun sous-espace invariant par ρ autre que $\{0\}$ et V.

Exemple 2.3.1.

1. *Toute représentation de degré 1 est irréductible.*
   Preuve :
   Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation linéaire de G de degré 1, c'est-à-dire telle que $\dim V = 1$.

   Dans ce cas, $V \cong \mathbb{C}$, et le groupe général linéaire $\mathrm{GL}(V)$ s'identifie à $\mathbb{C}^\times$, le groupe multiplicatif des complexes non nuls. Ainsi, ρ peut être vu comme un morphisme de groupes :

   $$\rho : G \to \mathbb{C}^\times.$$

   L'action de G sur V est donnée par multiplication scalaire :

   $$\rho(g)(v) = \lambda_g v, \quad \text{où } \lambda_g \in \mathbb{C}^\times \text{ et } v \in V.$$

   Soit $W \subseteq V$ un sous-espace vectoriel stable par ρ, c'est-à-dire tel que $\rho(g)(w) \in W$ pour tout $g \in G$ et tout $w \in W$.

   Or, comme $\dim V = 1$, les seuls sous-espaces vectoriels de V sont $\{0\}$ et V lui-même.

   Donc, les seuls sous-espaces stables par ρ sont triviaux.

   Par définition, une représentation est dite irréductible si elle ne possède aucun sous-espace G-stable non trivial. Ainsi, ρ est irréductible

2. *Prenons le groupe cyclique d'ordre 3, $G = C_3 = \langle g \mid g^3 = e \rangle$, où e est l'élément neutre.*

Considérons $V = \mathbb{R}^2$. Définissons une représentation ρ de G sur V comme suit :

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Cette matrice représente une rotation dans $\mathbb{R}^2$ de 120° dans le sens trigonométrique. Comme $g^3 = e$, on a bien que $\rho(g)^3 = I_2$ (la matrice identité) et $\det(\rho(g)) = 1 \neq 0$, la matrice $\rho(g)$ est inversible et par consequent ρ est bien une représentation du groupe C_3.
Montrons que les sous-espaces vectoriels propres de $\mathbb{R}^2$ qui sont : $W_1 = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\}$, $W_2 = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\}$, et $W_3 = \{(z,z) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\}$ ne sont pas stables par ρ.
Soient $(x,0) \in W_1$, $(0,y) \in W_2$, et $(z,z) \in W_3$. On a :

$$\rho(g)\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x \end{pmatrix} \notin W_1.$$

Ce qui montre que W_1 n'est pas stable par ρ.

$$\rho(g)\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}y \\ -\frac{1}{2}y \end{pmatrix} \notin W_2.$$

Donc W_2 n'est pas stable par ρ.

$$\rho(g)\begin{pmatrix} z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2}z - \frac{1}{2}z \\ \frac{\sqrt{3}}{2}z - \frac{1}{2}z \end{pmatrix} \notin W_3.$$

Ce qui montre que W_3 n'est pas stable par ρ.
Il en resulte que ρ est irréductible.

Théorème 2.3.1. *[16]*
Soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation linéaire de G dans V et soit W un sous-espace vectoriel de V stable sous G. Alors, il existe un complément W^0 de W dans V qui est stable sous G.

Preuve :
Soit $p : V \to V$ une projection linéaire sur W, c'est-à-dire que $p \circ p = p$ et $\operatorname{Im}(p) = W$.
Considérons l'application

$$p^0 : V \to V \quad \text{définie par} \quad p^0 = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \rho(g) \circ p \circ \rho(g)^{-1}.$$

où $|G|$ est l'ordre de G. Cette application est bien définie car, pour tout $g \in G$, $\rho(g) \circ p \circ \rho(g)^{-1} \in \operatorname{End}(V)$, et la somme d'endomorphismes est encore un endomorphisme.
Montrons que p^0 est une projection.
p^0 est linéaire car somme finie d'applications linéaires.
Soit $x \in W$. Comme W est stable par ρ, on a $\rho(g)^{-1}(x) \in W$, donc :

$$p(\rho(g)^{-1}(x)) = \rho(g)^{-1}(x) \quad \text{car } p|_W = \operatorname{Id}_W.$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
p^0(x) &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)\circ p(\rho(g)^{-1}(x)) \quad \text{(par définition de } p^0\text{)}\\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)(\rho(g)^{-1}(x)) \quad \text{(par définition de } p\text{)}\\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(gg^{-1})(x) \quad \text{(par définition de } \rho\text{)}\\
&= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(1)(x)\\
&= \frac{|G|}{|G|}x\\
&= x.
\end{aligned}$$

On en déduit que $p^0(x) = x$ pour tout $x \in W$. Il vient que $p^0 \circ p^0(x) = p^0(x)$ pour tout $x \in W$ et que $W \subseteq \mathrm{Im}(p^0)$.
Soit $y \in V$. Alors,

$$p^0(y) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)\big(p(\rho(g)^{-1}(y))\big).$$

Puisque $p(\rho(g)^{-1}(y)) \in W$ (car p prend ses valeurs dans W), et comme W est stable sous $\rho(g)$, on a

$$\rho(g)\big(p(\rho(g)^{-1}(y))\big) \in W.$$

La somme finie d'éléments de W est aussi dans W, donc

$$p^0(y) \in W.$$

Comme y est arbitraire, cela implique

$$\mathrm{Im}(p^0) \subseteq W.$$

Donc $\mathrm{Im}(p^0) = W$, donc p^0 est une projection sur W.
Définissons $W^0 := \ker(p^0) = \{x \in V \mid p^0(x) = 0\}$.
Comme p^0 est une projection, on a la décomposition directe :

$$V = \mathrm{Im}(p^0) \oplus \ker(p^0) = W \oplus W^0.$$

Montrons maintenant que W^0 est stable sous l'action de G.

Soit $x \in W^0$ et $h \in G$. Alors :

$$\begin{aligned}
\rho(h) \circ p^0 \circ \rho(h)^{-1} &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(h) \circ \rho(g) \circ p \circ \rho(g)^{-1} \circ \rho(h)^{-1} \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(hg) \circ p \circ \rho(hg)^{-1} \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{g' \in G} \rho(g') \circ p \circ \rho(g')^{-1} \quad \text{(en posant } g' = hg) \\
&= p^0.
\end{aligned}$$

Donc $\rho(h) \circ p^0 = p^0 \circ \rho(h)$, ce qui signifie que p^0 commute avec $\rho(h)$ pour tout $h \in G$. En particulier, si $x \in W^0$, alors $p^0(x) = 0 \Rightarrow p^0(\rho(h)(x)) = \rho(h)(p^0(x)) = \rho(h)(0) = 0$, donc $\rho(h)(x) \in W^0$.
Il en résulte que W^0 est stable sous l'action de G, et c'est un complément de W dans V stable sous G.

Théorème 2.3.2 (Théorème de Maschke). *[16]*
Toute représentation linéaire $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ sur G dans un espace vectoriel complexe de dimension finie se décompose en somme directe de représentations irréductibles.

Preuve :
Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation linéaire et W un sous-espace vectoriel stable par ρ. Nous montrons que W admet un supplémentaire W' dans V, également stable par ρ.
Soient $p : V \to W$ et $p^0 : V \to W$ définie par $p^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g) \circ p \circ \rho(g)^{-1}$ deux projections linéaires.
On a d'après le **théorème 2.3.1** $V = W \oplus W^0$ avec $W^0 = \ker(p^0)$. (*)
Nous déduisons le résultat par récurrence sur $\dim(V)$.

- Si $\dim(V) = 1$, le résultat est trivial.
  Supposons que $\dim(V) > 1$.
- Si V est irréductible, la situation est triviale.
- Si V n'est pas irréductible, alors il existe un sous-espace vectoriel W de V stable par ρ avec $0 < \dim(W) < \dim(V)$. Par (*), il existe un sous-espace W' de V stable par ρ tel que $V = W \oplus W'$. Ainsi, en appliquant ce processus à W et W' , on a le résultat.

Théorème 2.3.3 (Lemme de Schur). *[16]*
Soient $\rho_1 : G \to V_1$ et $\rho_2 : G \to V_2$ deux représentations irréductibles de G.
Soit $f : V_1 \to V_2$ une application linéaire vérifiant

$$\forall g \in G, \quad f \circ \rho_1(g) = \rho_2(g) \circ f.$$

On a les propriétés suivantes :

(i) Si ρ_1 et ρ_2 ne sont pas isomorphes, alors $f = 0$.

(ii) Si $V_1 = V_2$ et $\rho_1 = \rho_2$, alors f est une homothétie.

Preuve :

i) Supposons par la contraposée que $f \neq 0$ et montrons que ρ_1 et ρ_2 sont isomorphes. Le sous-espace $\ker(f)$ de V_1 est stable par ρ_1. Comme $f \neq 0$, on a $\ker(f) = \{0\}$ par irréductibilité de ρ_1.
De même, le sous-espace $\mathrm{Im}(f)$ de V_2 est stable par ρ_2. Comme $f \neq 0$, on en déduit que $\mathrm{Im}(f) = V_2$ par irréductibilité de ρ_2.
Par hypothèse, f est un morphisme de représentations linéaires. Donc ρ_1 et ρ_2 sont isomorphes.
Il en résulte que si ρ_1 et ρ_2 ne sont pas isomorphes, alors $f = 0$.

ii) Supposons que $V_1 = V_2 = V$ et que $\rho_1 = \rho_2 = \rho$. Soit $f : V \to V$ un endomorphisme tel que :

$$\forall g \in G, \quad f \circ \rho(g) = \rho(g) \circ f.$$

Cela signifie que f commute avec la représentation ρ.
Comme $\mathbb{C}$ est un corps algébriquement clos, l'endomorphisme f possède au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Cela signifie qu'il existe un vecteur non nul $v \in V$ tel que $f(v) = \lambda v$. Posons :

$$f' := f - \lambda\, \mathrm{id}_V.$$

Alors f' est un endomorphisme de V qui commute également avec ρ, car pour tout $g \in G$, on a :

$$\begin{aligned}
f' \circ \rho(g) &= (f - \lambda\, \mathrm{id}_V) \circ \rho(g) \\
&= f \circ \rho(g) - \lambda\, \mathrm{id}_V \circ \rho(g) \\
&= f \circ \rho(g) - \lambda \rho(g) \\
&= \rho(g) \circ f - \lambda \rho(g) \\
&= \rho(g) \circ (f - \lambda\, \mathrm{id}_V) \\
&= \rho(g) \circ f'.
\end{aligned}$$

$f(v) = \lambda v$ implique que $f'(v) = 0$. Ainsi, f' n'est pas injectif. Il s'en suit que f' n'est pas bijectif et que $\ker(f') \neq \{0\}$.
Par ailleurs, pour tout $g \in G$, et tout $v \in \ker(f')$, on a :

$$f'(\rho(g)(v)) = \rho(g) f'(v) = \rho(g) \cdot 0 = 0.$$

Il vient que $\ker(f')$ est stable par ρ. Or, comme ρ est irréductible, le seul sous-espace non trivial stable par G est V lui-même. Donc, $\ker(f') = V$. Cela signifie que $\forall v \in V, \quad f'(v) = 0$.
On en déduit que $f = \lambda\, \mathrm{id}_V$, ce qui montre que f est une homothétie.

Corollaire 2.3.1. *[16]*
Soient $\rho_1 : G \to V_1$ et $\rho_2 : G \to V_2$ deux représentations irréductibles de G.
Soit $h : V_1 \to V_2$ une application linéaire. Posons :

$$h_0 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (\rho_2(g))^{-1} \circ h \circ \rho_1(g).$$

Alors :

i) Si ρ_1 et ρ_2 ne sont pas isomorphes, on a $h_0 = 0$.

ii) Si $V_1 = V_2$ et $\rho_1 = \rho_2$, h_0 est une homothétie de rapport $\frac{1}{n}Tr(h)$, où $n = \dim(V)$.

Preuve :

i) En appliquant le lemme de Schur à $f = h_0$, on a $h_0 = 0$.

ii) h_0 est une homothétie par le lemme de Schur. De plus,

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(h_0) &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathrm{Tr}((\rho_1(g))^{-1}\circ h\circ \rho_1(g))\\ &= \mathrm{Tr}(h).\end{aligned}$$

On en déduit alors que $h^0 = \frac{\mathrm{Tr}(h)}{n}\mathrm{I_n}$, vu que la trace de l'identité est n

Nous réécrivons maintenant le corollaire 2.3.1 en supposant que ρ_1 et ρ_2 sont donnés sous forme matricielle :

$$\rho_1 = (r_{i_1 j_1}(t)), \quad \rho_2 = (r_{i_2 j_2}(t)).$$

L'application linéaire h est définie par une matrice $(x_{i_2 i_1})$ et de même h^0 est définie par $(x^0_{i_2 i_1})$. Par définition de h^0 :

$$x^0_{i_2 i_1} = \frac{1}{|G|}\sum_{t,j_1,j_2} r_{i_2 j_2}(t^{-1})x_{j_2 j_1} r_{j_1 i_1}(t).$$

Le membre de droite est une forme linéaire par rapport aux $x_{j_2 j_1}$; dans le cas i) cette forme s'annule pour tout système de valeurs des $x_{j_2 j_1}$; donc ses coefficients sont nuls. On a le résultat qui suit

Corollaire 2.3.2. *[16]*
Dans le cas i), on a :

$$\frac{1}{|G|}\sum_{t\in G} r_{i_2 j_2}(t^{-1}) r_{j_1 i_1}(t) = 0$$

pour tout choix de i_1, i_2, j_1, j_2.

Dans le cas ii), on a de même $x^0_{i_2 i_1} = \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(h)\delta_{i_2 i_1}$. D'où l'égalité :

$$\frac{1}{|G|}\sum_{t,j_1,j_2} r_{i_2 j_2}(t^{-1})x_{j_2 j_1} r_{j_1 i_1}(t) = \frac{1}{n}\sum_{j_1,j_2}\delta_{i_2 i_1}\delta_{j_2 j_1}x_{j_2 j_1}.$$

En identifiant les coefficients des $x_{j_2 j_1}$, on obtient :

Corollaire 2.3.3. *[16]*

Dans le cas ii), on a :

$$\frac{1}{|G|}\sum_{t\in G} r_{i_2 j_2}(t^{-1}) r_{j_1 i_1}(t) = \frac{1}{n}\delta_{i_2 i_1}\delta_{j_2 j_1} = \begin{cases}\frac{1}{n} & \text{si } i_1 = i_2 \text{ et } j_1 = j_2\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Définition 2.3.2. *[16]*
Soit G un groupe. Le produit scalaire hermitien sur l'espace vectoriel $\mathscr{F}(G,\mathbb{C})$ des fonctions de G dans $\mathbb{C}$, par la formule :

$$(\varphi|\psi) := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\varphi(g)\overline{\psi(g)}.$$

Ceci est un produit scalaire.
Si φ et ψ sont des caractères, les deux formules coïncident car dans ce cas $\overline{\varphi(g)} = \varphi(g^{-1})$.

Remarque 2.3.1. *[16]*
Avec cette notation, les corollaires 2.3.2 et 2.3.3 deviennent respectivement :

$$\langle r_{i_2j_2}, r_{j_1i_1}\rangle = 0 \quad et \quad \langle r_{i_2j_2}, r_{j_1i_1}\rangle = \frac{1}{n}\delta_{i_2i_1}\delta_{j_2j_1}.$$

Théorème 2.3.4. *[16]*

i) Soit χ le caractère d'une représentation irréductible ρ de G. Alors, $(\chi|\chi) = 1$.

ii) Soient χ_1 et χ_2 les caractères de deux représentations irréductibles non isomorphes $(V_1,\rho_1)_G$ et $(V_2,\rho_2)_G$. Alors, $(\chi_1|\chi_2) = 0$.

Preuve :

i) Supposons ρ de degré n, donnée sous forme matricielle $\rho(g) = (r_{ij}(g))$. Alors

$$\chi(g) = \sum_i r_{ii}(g),$$

d'où

$$\langle\chi|\chi\rangle = \langle\chi,\chi\rangle = \sum_{i,j}\langle r_{ii}, r_{jj}\rangle.$$

D'après la remarque 2.3.1, on a $\langle r_{ii}, r_{jj}\rangle = 0$ si $i \neq j$ et $\langle r_{ii}, r_{jj}\rangle = 1/n$ si $i = j$, ce qui donne finalement

$$\langle\chi|\chi\rangle = \left(\sum_{i,j}\delta_{ij}\right)/n = n/n = 1.$$

ii) Écrivons encore les formes matricielles respectives $r_{i_1j_1}(g)$ et $r_{i_2j_2}(g)$ de ρ_1 et ρ_2. Alors

$$\langle\chi_1|\chi_2\rangle = \sum_{i,j}\langle r_{i_1j_1}, r_{i_2j_2}\rangle$$

qui est nul d'après la remarque 2.3.1.

Définition 2.3.3. *[22]*
Le caractère irréductible est le caractère associé à une représentation irréductible.

Propriété 2.3.1. *[22]*
Le degré d'un caractère irréductible est égal à la dimension de la représentation irréductible dont il est le caractère.

Preuve :

Soit G un groupe fini, et soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation irréductible complexe de G, où V est un espace vectoriel complexe de dimension finie.

On note $\chi_\rho : G \to \mathbb{C}$ le caractère associé à la représentation ρ. Le *degré* du caractère χ_ρ est défini par sa valeur en l'élément neutre du groupe :

$$\chi_\rho(1) = \chi_\rho(e),$$

où e est l'élément neutre de G.

Par définition du caractère :

$$\chi_\rho(g) = \mathrm{Tr}(\rho(g)) \quad \text{pour tout } g \in G.$$

En particulier, pour $g = e$, on a :

$$\chi_\rho(e) = \mathrm{Tr}(\rho(e)).$$

Or, comme ρ est une représentation, on a $\rho(e) = \mathrm{Id}_V$, donc :

$$\chi_\rho(e) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Id}_V) = \dim V.$$

Ainsi,

$$\chi_\rho(1) = \dim V.$$

Cela montre que le degré du caractère irréductible est égal à la dimension de la représentation irréductible.

Propriété 2.3.2. *[22]*
Soient $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation linéaire d'un groupe fini G et $\widehat{G}$ l'ensemble des caractères irréductibles de ρ. Alors, la somme des carrés des degrés des représentations irréductibles de G est égale à l'ordre de G. C'est-à-dire :

$$\sum_{\chi \in \widehat{G}} (\deg \chi)^2 = |G|.$$

Théorème 2.3.5. *[16]*
Soit G un groupe.Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) G est abélien.

(ii) Toutes les représentations irréductibles de G sont de degré 1.

Preuve :
$\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation irréductible de G tel que $\dim(V) = n$.
(i) $\Rightarrow$ (ii)
Soit G une groupe abélien. Montrons que $n = 1$.
Comme G est abélien, pour tous $g, h \in G$, on a :

$$gh = hg \quad \Rightarrow \quad \rho(g)\rho(h) = \rho(h)\rho(g).$$

Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos et que le $\mathbb{C}$-vectoriel V est de dimension finie, il existe un vecteur $v \in V$, $v \neq 0$, tel que pour tout $g \in G$,

$$\rho(g)(v) = \lambda_g v, \quad \text{avec } \lambda_g \in \mathbb{C}.$$

Soit

$$W = \text{Vect}(v) = \{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{C}\} \subset V.$$

Alors, pour tout $g \in G$, on a :

$$\rho(g)(\lambda v) = \lambda \rho(g)(v) = \lambda \lambda_g v \in W.$$

Donc W est un sous-espace propre non nul et stable par G.
Par hypothèse, la représentation est irréductible, donc V ne contient pas de sous-espace propre non nul stable. Ainsi, $W = V$. Donc $\dim(V) = 1$.

(ii) $\Rightarrow$ (i)
Soit $\widehat{G}$ l'ensemble des caractères de G. $\widehat{G}$ muni de la multiplication est un groupe (voir la propriété 2.2.1).
Par ailleurs, on sait que le nombre de classes de conjugaison de G est égal au nombre de caractères de $(V, \rho)_G$.
D'autre part, on a d'après la propriété 2.3.2 :

$$\sum_{\chi \in \widehat{G}} (\deg \chi)^2 = |G|.$$

Comme toutes les représentations irréductibles sont de degré 1, alors on a :

$$\sum_{\chi \in \widehat{G}} 1^2 = |\widehat{G}| = |G|.$$

Puisque $|\widehat{G}| = |G|$, G est abélien d'après la propriété 1.1.3.

Conclusion

Ce chapitre a permis de poser les bases essentielles pour appréhender les représentations linéaires des groupes finis, en mettant en lumière leurs définitions, propriétés et applications. Dans un premier temps, nous avons examiné les fondements théoriques en définissant les représentations linéaires et en illustrant ces concepts à travers des exemples concrets. Par ailleurs, la notion de sous-représentations a été approfondie, soulignant leur rôle clé dans l'analyse des structures internes des représentations. Ensuite, l'étude des caractères associés à une représentation linéaire a révélé des invariants déterminants qui permettent de caractériser et de différencier les représentations. En effet, ces outils algébriques offrent une approche méthodique et rigoureuse pour classifier efficacement les représentations. Enfin, nous avons abordé les représentations linéaires irréductibles, qui forment les éléments constitutifs fondamentaux de cette théorie. Leur importance réside notamment dans leur capacité à décomposer les représentations complexes et à analyser les symétries inhérentes aux structures algébriques. Ainsi, ce chapitre constitue une base solide pour une compréhension approfondie des représentations linéaires, tout en ouvrant la voie aux applications plus avancées qui seront développées dans les chapitres suivants, tant dans le cadre des groupes finis que dans des contextes élargis.

CHAPITRE

3

Produit tensoriel arbitraire de représentation linéaire d'un produit arbitraire de groupes finis

Introduction

Le produit tensoriel et les représentations linéaires jouent un rôle crucial dans l'étude des structures algébriques, notamment dans la théorie des groupes et des espaces vectoriels. Cette partie explore les concepts fondamentaux du produit tensoriel, appliqué aux espaces vectoriels et aux groupes, ainsi que leur utilisation dans le cadre des représentations linéaires.Dans un premier temps, nous présentons la notion de produit tensoriel d'espaces vectoriels, qui permet de construire un nouvel espace vectoriel à partir de deux espaces donnés [24]. Cela permet de décrire les interactions entre les éléments de ces espaces, tout en maintenant les propriétés d'une structure linéaire. Nous abordons également le cas du produit tensoriel arbitraire, c'est-à-dire la généralisation de ce concept à un ensemble quelconque d'espaces vectoriels.Ensuite, nous introduirons la représentation linéaire d'un produit de groupes finis. L'objectif est de comprendre comment les représentations de plusieurs groupes peuvent être combinées pour former une représentation globale. Nous commençons par le produit de deux groupes finis [16] et élargissons ensuite cette étude au cas d'un produit arbitraire de groupes finis. Enfin, nous traitons du caractère et de l'irréductibilité d'une représentation linéaire d'un produit de groupes finis. Cette analyse permet de caractériser la manière dont les représentations se décomposent et d'identifier les représentations irréductibles, qui jouent un rôle central dans la théorie des représentations.

3.1 Produit tensoriel arbitraire d'espaces vectoriels

Dans la suite, sauf mention contraire, tous les espaces vectoriels seront supposés de dimension finie et définis sur un corps commutatif $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Propriété 3.1.1. ***(Propriété universelle.)*** *[24]*
Soient $V_1, V_2, ..., V_p$ et T des espaces vectoriels ,

$$\otimes : V_1 \times \cdots \times V_p \to T$$

une application p-linéaire. Cette application est dite avoir la propriété universelle si elle satisfait les conditions suivantes :

i) Les vecteurs $x_1 \otimes \cdots \otimes x_p$, $(x_i \in V_i)$ engendrent T.

ii) Toute application p-linéaire $\varphi : V_1 \times \cdots \times V_p \to H$ (H étant un espace vectoriel quelconque) peut s'écrire sous la forme

$$\varphi(x_1, \ldots, x_p) = f(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p)$$

avec $f : T \to H$ est une application linéaire.

Définition 3.1.1. *[24]*
Le produit tensoriel des espaces $V_1, V_2, ..., V_p$ est un couple $(T, \otimes)$ où

$$\otimes : V_1 \times \cdots \times V_p \to T$$

est une application p-linéaire avec la propriété universelle. T est également appelé le produit tensoriel des espaces V_i et est noté

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_p.$$

Propriété 3.1.2. *[24]*
Le couple $(T, \otimes)$ est unique à isomorphisme près.

Définition 3.1.2. *[24]*
Si $V_1, V_2, ..., V_p$ sont des espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$, alors la dimension du produit tensoriel $V_1 \otimes \cdots \otimes V_p$ est donnée par :

$$\dim(V_1 \otimes \cdots \otimes V_p) = \prod_{i=1}^{p} \dim(V_i).$$

Proposition 3.1.1. *[24]*
Étant donnés trois espaces V_1, V_2, V_3, il existe un isomorphisme linéaire

$$f : V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \;\cong\; (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$$

tel que

$$f(x \otimes y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z.$$

Proposition 3.1.2. ***(Généralisation)*** *[24]*
Étant donnés p $(p \geq 4)$ espaces vectoriels $V_1, V_2, \ldots, V_p$, il existe un isomorphisme linéaire

$$f : V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_p \;\cong\; ((\cdots((V_1 \otimes V_2) \otimes V_3) \cdots) \otimes E_p),$$

défini récursivement, tel que pour tout $x_1 \in V_1, x_2 \in V_2, \dots, x_p \in V_p$,

$$f(x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_p) = (((\cdots((x_1 \otimes x_2) \otimes x_3) \cdots) \otimes x_{p-1}) \otimes x_p).$$

Proposition 3.1.3. *[31]*
Soit $(V_i)_{i\in I}$ une famille non vide d'espaces vectoriels sur un même corps commutatif $\mathbb{K}$. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille non vide de vecteurs non nuls tels que, pour tout $i \in I$, le vecteur u_i appartienne à V_i. Pour tous sous-ensembles finis J et K de I tels que $J \subseteq K$, considérons l'application linéaire injective

$$\begin{array}{rcl} \varphi_{J,K} : \underset{i\in J}{\otimes} V_i & \longrightarrow & \underset{i\in K}{\otimes} V_i \\ \underset{i\in J}{\otimes} v_i & \longmapsto & \underset{i\in J}{\otimes} v_i \otimes (\underset{i\in K\setminus J}{\otimes} u_i). \end{array}$$

Soit $\mathcal{F}(I)$ l'ensemble de tous les sous-ensembles finis de I.

i) Le système $(\underset{i\in J}{\otimes} V_i, \varphi_{J,K})_{J\in\mathcal{F}(I)}$ est inductif.

ii) La limite inductive du système inductif $(\underset{i\in J}{\otimes} V_i, \varphi_{J,K})_{J\in\mathcal{F}(I)}$, notée $\underset{i\in I}{\otimes} V_i$, est le produit tensoriel infini des espaces vectoriels $(V_i)_{i\in I}$.

3.1.1 Représentation linéaire d'un produit arbitraire de groupes finis

Proposition 3.1.4.
Soit $(V_i)_{i\in I}$ une famille non vide d'espaces vectoriels sur un même corps commutatif $\mathbb{K}$. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille non vide de vecteurs non nuls tels que, pour tout $i \in I$, le vecteur u_i appartienne à V_i. Pour tous sous-ensembles finis J et K de I tels que $J \subseteq K$, l'application

$$\begin{array}{rcl} \psi_{J,K} : GL(\underset{i\in K}{\otimes} V_i) & \longrightarrow & GL(\underset{i\in J}{\otimes} V_i) \\ f & \longmapsto & \psi_{J,K}(f) = f_{J,K} \end{array}$$

avec $f_{J,K}$ défini comme suit : pour tout $f \in GL(\underset{i\in K}{\otimes} V_i)$ et tout $\underset{i\in J}{\otimes} v_i \in \underset{i\in J}{\otimes} V_i$,

$$f_{J,K}(\underset{i\in J}{\otimes} v_i) = \underset{i\in J}{\otimes} v'_i \text{ si } f((\underset{i\in J}{\otimes} v_i) \otimes (\underset{i\in K\setminus J}{\otimes} t_i)) = (\underset{i\in J}{\otimes} v'_i) \otimes (\underset{i\in K\setminus J}{\otimes} v'_i) = \underset{i\in K}{\otimes} v'_i,$$

pour un certain $\underset{i\in K\setminus J}{\otimes} t_i \in \underset{i\in K\setminus J}{\otimes} V_i$, est un homomorphisme de groupes.

<u>Preuve :</u>

1. D'une part, prouvons que pour tout sous-ensemble fini J et K de I tels que $J \subseteq K$, l'application $\psi_{J,K}$ est bien définie. Pour cela, nous procéderons selon les étapes suivantes :
   • Pour tout $f \in GL(\underset{i\in K}{\otimes} V_i)$ et tout $\underset{i\in J}{\otimes} v_i \in \underset{i\in J}{\otimes} V_i$, si $f((\underset{i\in J}{\otimes} v_i) \otimes (\underset{i\in K\setminus J}{\otimes} t_i)) = \underset{i\in K}{\otimes} w_i$ et $f((\underset{i\in J}{\otimes} v_i) \otimes (\underset{i\in K\setminus J}{\otimes} t'_i)) = \underset{i\in K}{\otimes} w'_i$ pour tout $\underset{i\in K\setminus J}{\otimes} t_i$ et $\underset{i\in K\setminus J}{\otimes} t'_i$ dans $\underset{i\in K\setminus J}{\otimes} V_i$, alors $\underset{i\in J}{\otimes} w_i = \underset{i\in J}{\otimes} w'_i$. En effet, $f_{J,K}(\underset{i\in J}{\otimes} v_i) = \underset{i\in J}{\otimes} w_i$ et $f_{J,K}(\underset{i\in J}{\otimes} v_i) = \underset{i\in J}{\otimes} w'_i$. Ainsi, $\underset{i\in J}{\otimes} w_i = \underset{i\in J}{\otimes} w'_i$.

• Soit $f \in GL(\underset{i\in K}{\otimes} V_i)$. Pour tout $\underset{i\in J}{\otimes} v_i \in \underset{i\in J}{\otimes} V_i$, nous avons $(\underset{i\in J}{\otimes} v_i) \otimes (\underset{i\in K\setminus J}{\otimes} u_i) \in \underset{i\in K}{\otimes} V_i$. Puisque f est bijective, il existe un unique $\underset{i\in K}{\otimes} w_i \in \underset{i\in K}{\otimes} V_i$ tel que :

$$\begin{aligned} f(\underset{i\in K}{\otimes} w_i) &= f((\underset{i\in J}{\otimes} w_i) \otimes (\underset{i\in K\setminus J}{\otimes} w_i)) \\ &= (\underset{i\in J}{\otimes} v_i) \otimes (\underset{i\in K\setminus J}{\otimes} u_i) \end{aligned}$$

Il en découle, par définition de $f_{J,K}$, que $f_{J,K}(\underset{i\in J}{\otimes} w_i)) = \underset{i\in J}{\otimes} v_i$. Cela signifie clairement que l'application $f_{J,K}$ est surjective.

• Maintenant, considérons $\underset{i\in J}{\otimes} v_i \neq \underset{i\in J}{\otimes} t_i$ dans $\underset{i\in J}{\otimes} V_i$. Alors, nous avons $(\underset{i\in J}{\otimes} v_i) \otimes (\underset{i\in K\setminus J}{\otimes} u_i) \neq (\underset{i\in J}{\otimes} t_i) \otimes (\underset{i\in K\setminus J}{\otimes} u_i)$ dans $\underset{i\in K}{\otimes} V_i$. Et pour tout $f \in GL(\underset{i\in K}{\otimes} V_i)$, on observe facilement que $f((\underset{i\in J}{\otimes} v_i) \otimes (\underset{i\in K\setminus J}{\otimes} u_i)) \neq f((\underset{i\in J}{\otimes} t_i) \otimes (\underset{i\in K\setminus J}{\otimes} u_i))$ puisque f est injective. Il en résulte que $f_{J,K}(\underset{i\in J}{\otimes} v_i) \neq f_{J,K}(\underset{i\in J}{\otimes} t_i)$. Ainsi, $f_{J,K}$ est injective.

• Prouvons que $f_{J,K}$ est linéaire. Considérons $\underset{i\in J}{\otimes} v_i$ et $\underset{i\in J}{\otimes} t_i$, deux éléments de $\underset{i\in J}{\otimes} V_i$, et soit $\alpha \in F$.

Prouvons que :

$$f_{J,K}(\underset{i\in J}{\otimes} v_i + \alpha \underset{i\in J}{\otimes} t_i) = f_{J,K}(\underset{i\in J}{\otimes} v_i) + \alpha f_{J,K}(\underset{i\in J}{\otimes} t_i).$$

Considérons $f_{J,K}(\underset{i\in J}{\otimes} v_i) = \underset{i\in J}{\otimes} v'_i$ et $f_{J,K}(\underset{i\in J}{\otimes} t_i) = \underset{i\in J}{\otimes} t'_i$, où

$$f((\underset{i\in J}{\otimes} v_i) \otimes (\underset{i\in K\setminus J}{\otimes} h_i)) = \underset{i\in K}{\otimes} v'_i$$

et

$$f((\underset{i\in J}{\otimes} t_i) \otimes (\underset{i\in K\setminus J}{\otimes} k_i)) = \underset{i\in K}{\otimes} t'_i$$

pour certains éléments $\underset{i\in K\setminus J}{\otimes} h_i$ et $\underset{i\in K\setminus J}{\otimes} k_i$ de $\underset{i\in K\setminus J}{\otimes} V_i$. Nous avons :

$$\begin{gathered} f(((\underset{i\in J}{\otimes} v_i) \otimes (\underset{i\in K\setminus J}{\otimes} h_i)) + \alpha((\underset{i\in J}{\otimes} t_i) \otimes (\underset{i\in K\setminus J}{\otimes} k_i))) = \\ f((\underset{i\in J}{\otimes} v_i) \otimes (\underset{i\in K\setminus J}{\otimes} h_i)) + \alpha f((\underset{i\in J}{\otimes} t_i) \otimes (\underset{i\in K\setminus J}{\otimes} k_i)) \end{gathered}$$

puisque f est linéaire. Et

$$\begin{aligned} f((\underset{i\in J}{\otimes} v_i) \otimes (\underset{i\in K\setminus J}{\otimes} h_i)) + \alpha f((\underset{i\in J}{\otimes} t_i) \otimes (\underset{i\in K\setminus J}{\otimes} k_i)) &= (\underset{i\in K}{\otimes} v'_i) + (\underset{i\in K}{\otimes} \alpha t'_i)) \\ &= \underset{i\in K}{\otimes} (v'_i + \alpha t'_i) \\ &= (\underset{i\in J}{\otimes} (v'_i + \alpha t'_i)) \otimes (\underset{i\in K\setminus J}{\otimes} (v'_i + \alpha t'_i)) \end{aligned}$$

De plus,

$$f\Big(\big((\bigotimes_{i\in J} v_i)\otimes(\bigotimes_{i\in K\setminus J} h_i)\big)+\alpha\big((\bigotimes_{i\in J} t_i)\otimes(\bigotimes_{i\in K\setminus J} k_i)\big)\Big) \;=\; f\big(\bigotimes_{i\in J}(v_i+\alpha t_i)+\bigotimes_{i\in K\setminus J}(h_i+\alpha k_i)\big)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f_{J,K}(\bigotimes_{i\in J}(v_i+\alpha t_i)) &= \bigotimes_{i\in J}(v'_i+\alpha t'_i) \\ &= (\bigotimes_{i\in J} v'_i)+\alpha(\bigotimes_{i\in J} t'_i)) \\ &= f_{J,K}(\bigotimes_{i\in J} v_i)+\alpha f_{J,K}(\bigotimes_{i\in J} t_i) \end{aligned}$$

Par conséquent, $f_{J,K}\in GL(\bigotimes_{i\in K} V_i)$ pour tout $f\in GL(\bigotimes_{i\in K} V_i)$.
Ainsi, $\psi_{J,K}$ est bien défini.

2. Prouvons maintenant que $\psi_{J,K}$ est un homomorphisme de groupe qui est surjectif. Soit $g\in GL(\bigotimes_{i\in J} V_i)$. Il est clair que $f=g\otimes 1_{\bigotimes_{i\in K\setminus J} V_i}$ appartient à $GL(\bigotimes_{i\in K} V_i)$.

   Pour tout $\bigotimes_{i\in J} v_i\in\bigotimes_{i\in J} V_i$, on a $(\bigotimes_{i\in J} v_i)\otimes(\bigotimes_{i\in K\setminus J} u_i)\in\bigotimes_{i\in K} V_i$, et

$$f((\bigotimes_{i\in J} v_i)\otimes(\bigotimes_{i\in K\setminus J} u_i))=g(\bigotimes_{i\in J} v_i)\otimes(\bigotimes_{i\in K\setminus J} u_i).$$

   Ainsi, $f_{J,K}(\bigotimes_{i\in J} v_i)=g(\bigotimes_{i\in J} v_i)$ et $\psi_{J,K}(f)=g$. Cela montre que $\psi_{J,K}$ est surjectif.

   Il reste à prouver que $\psi_{J,K}$ est un homomorphisme de groupe. Considérons $f,g\in GL(\bigotimes_{i\in J} V_i)$. Nous devons montrer que

$$\psi_{J,K}(f\circ g)=\psi_{J,K}(f)\circ\psi_{J,K}(g).$$

   En effet, $(f\circ g)\otimes 1_{\bigotimes_{i\in K\setminus J} V_i}\in GL(\bigotimes_{i\in K} V_i)$ et, comme vu précédemment,

$$\psi_{J,K}((f\circ g)\otimes 1_{\bigotimes_{i\in K\setminus J} V_i})=f\circ g=\psi_{J,K}(f)\circ\psi_{J,K}(g).$$

   Cela conclut la démonstration.

Proposition 3.1.5.
Le système $\big(GL(\bigotimes_{i\in J} V_i),\psi_{J,K}\big)$ *est projectif, avec pour limite projective*

$$\varprojlim_{J\in\mathcal{F}(I)} GL\left(\bigotimes_{i\in J} V_i\right),$$

où $\mathcal{F}(I)$ *désigne l'ensemble des sous-ensembles finis de* I.

Preuve :

1. **Identité sur chaque composante :**
   Montrons que $\psi_{J,J}=\mathrm{id}_{GL(\bigotimes_{i\in J} V_i)}$, c'est-à-dire que $\psi_{J,J}(f)=f$ pour tout $f\in GL(\bigotimes_{i\in J} V_i)$.

Soient $f \in GL(\underset{i\in J}{\otimes} V_i)$ et $\underset{i\in J}{\otimes} v_i \in \underset{i\in J}{\otimes} V_i$. Par définition de $\psi_{J,J}(f)$, on a :

$$\psi_{J,J}(f)(\underset{i\in J}{\otimes} v_i) = f_{J,J}(\underset{i\in J}{\otimes} v_i) = f(\underset{i\in J}{\otimes} v_i).$$

Donc $\psi_{J,J}(f) = f$.

2. **Compatibilité des morphismes :**
Soient $J \subseteq K \subseteq L$ des sous-ensembles finis de I.
Montrons que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
GL\left(\underset{i\in L}{\otimes} V_i\right) \arrow[r, "\psi_{K,L}"] \arrow[dr, "\psi_{J,L}"'] & GL\left(\underset{i\in K}{\otimes} V_i\right) \arrow[d, "\psi_{J,K}"] \\
& GL\left(\underset{i\in J}{\otimes} V_i\right)
\end{tikzcd}$$

Soit $f \in GL(\underset{i\in L}{\otimes} V_i)$ et soit $\underset{i\in J}{\otimes} v_i \in \underset{i\in J}{\otimes} V_i$. Considérons un élément :

$$\underset{i\in L}{\otimes} v_i = \left(\underset{i\in J}{\otimes} v_i\right) \otimes \left(\underset{i\in L\setminus J}{\otimes} u_i\right).$$

Alors :

$$f\left(\underset{i\in L}{\otimes} v_i\right) = \underset{i\in L}{\otimes} v_i'.$$

Par définition, on a :

$$\psi_{J,L}(f)(\underset{i\in J}{\otimes} v_i) = f_{J,L}(\underset{i\in J}{\otimes} v_i) = \underset{i\in J}{\otimes} v_i'.$$

En notant que :

$$\underset{i\in L}{\otimes} v_i = \left[\left(\underset{i\in J}{\otimes} v_i\right) \otimes \left(\underset{i\in K\setminus J}{\otimes} u_i\right)\right] \otimes \left(\underset{i\in L\setminus K}{\otimes} u_i\right),$$

on obtient :

$$f_{K,L}\left(\left(\underset{i\in J}{\otimes} v_i\right) \otimes \left(\underset{i\in K\setminus J}{\otimes} u_i\right)\right) = \left(\underset{i\in J}{\otimes} v_i'\right) \otimes \left(\underset{i\in K\setminus J}{\otimes} v_i'\right).$$

Puis, par définition de $\psi_{J,K}$:

$$\psi_{J,K}\left(\psi_{K,L}(f)\right)(\underset{i\in J}{\otimes} v_i) = f_{J,L}(\underset{i\in J}{\otimes} v_i) = \underset{i\in J}{\otimes} v_i'.$$

Ainsi :

$$\psi_{J,K} \circ \psi_{K,L}(f)(\underset{i\in J}{\otimes} v_i) = \psi_{J,L}(f)(\underset{i\in J}{\otimes} v_i),$$

ce qui prouve la commutativité du diagramme.

Le système $\big(GL(\underset{i\in J}{\otimes} V_i), \psi_{J,K}\big)$ est donc un système projectif.
Puisque :

- chaque $GL\left(\bigotimes_{i\in J} V_i\right)$ est un objet de la catégorie des groupes $(\mathbf{Grp})$,
- **Grp** admettant les limites projectives (elle est complète),

alors le système projectif $\left(GL\left(\bigotimes_{i\in J} V_i\right), \psi_{J,K}\right)$ admet une limite projective :

$$\varprojlim_{J\in\mathcal{F}(I)} GL\left(\bigotimes_{i\in J} V_i\right).$$

Proposition 3.1.6.
Soit $\mathcal{F}(I)$ l'ensemble des sous-ensembles finis de I, muni de l'inclusion, que l'on considère comme une catégorie. Définissons une catégorie $Vect_{\otimes V_i}$ associée à une famille d'espaces vectoriels $(V_i)_{i\in I}$, de la manière suivante :

1. *Les objets de $Vect_{\otimes V_i}$ sont les produits tensoriels finis $\bigotimes_{i\in J} V_i$ de la famille $(V_i)_{i\in I}$ où $J \subseteq I$ est un sous-ensemble fini.*
2. *pour chaque paire ordonnée d'objets $\left(\bigotimes_{i\in J} V_i, \bigotimes_{i\in K} V_i\right)$, l'ensemble des morphismes de $\bigotimes_{i\in J} V_i$ vers $\bigotimes_{i\in K} V_i$ est défini comme :*

$$Vect_{\otimes V_i}\left(\bigotimes_{i\in J} V_i, \bigotimes_{i\in K} V_i\right) = \begin{cases} \{\varphi_{J,K}\} & si\ J \subseteq K \\ \varnothing & sinon. \end{cases}$$

Proposition 3.1.7.
Soit la correspondance $GL : Vect_{\otimes V_i} \to Grp$ entre les catégories $Vect_{\otimes V_i}$ et Grp où Grp désigne la catégorie des groupes. GL est un foncteur contravariant.

Preuve :
Soient $J, K, L \in \mathcal{F}(I)$ tels que $J \subseteq K \subseteq L$. On a :

1. **Objets :**
   À chaque produit tensoriel

$$\bigotimes_{i\in J} V_i \in \mathrm{Vect}_{\otimes V_i} \quad ,$$

on associe

$$GL\left(\bigotimes_{i\in J} V_i\right) \in \mathrm{Grp}.$$

2. **Morphismes :**
À chaque application linéaire

$$\varphi_{J,K} : \bigotimes_{i\in J} V_i \to \bigotimes_{i\in K} V_i \quad ,$$

on associe l'homomorphisme de groupes

$$GL(\varphi_{J,K}) = \psi_{J,K} : GL\left(\bigotimes_{i\in K} V_i\right) \to GL\left(\bigotimes_{i\in J} V_i\right).$$

Cela est bien un morphisme de la catégorie Grp d'après la proposition 3.1.4.

<u>**Vérification des deux axiomes :**</u>

(i) **Identité :**
On a

$$\psi_{J,J} = \mathrm{id}.$$

d'après la proposition 3.1.5. Il vient que

$$GL\left(\mathrm{id}_{\bigotimes_{i\in J} V_i}\right) = \mathrm{id}_{GL\left(\bigotimes_{i\in J} V_i\right)}.$$

(ii) **Compatibilité à la composition :**
Pour $J \subseteq K \subseteq L$, on a :
$\psi_{J,K} \circ \psi_{K,L} = \psi_{J,L}$ d'après 3.1.5. Ce qui correspond à

$$GL(\varphi_{J,K}) \circ GL(\varphi_{K,L}) = GL(\varphi_{J,L}) = \psi_{J,L}.$$

Donc

$$GL(\varphi_{J,L}) = GL(\varphi_{K,L} \circ \varphi_{J,K}) = GL(\varphi_{J,K}) \circ GL(\varphi_{K,L}).$$

Il en résulte que GL est un foncteur contravariant.

Proposition 3.1.8.
Soit J un sous-ensemble fini d'un ensemble I et $(G_i)_{i\in J}$ une famille finie de groupes finis. Soit $(V_i)_{i\in J}$ une famille finie d'espaces vectoriels de dimension finie sur le même corps F et pour chaque $i \in J$, soit $\varphi_i : G_i \to GL(V_i)$ une représentation linéaire de G_i dans V_i. Alors, le produit tensoriel $\varphi_J = \bigotimes_{i\in J} \varphi_i$ des applications $(\varphi_i)_{i\in J}$ défini par :

$$\begin{array}{rcl} \varphi_J = \bigotimes_{i\in J} \varphi_i : \prod_{i\in J} G_i & \longrightarrow & GL(\bigotimes_{i\in J} V_i) \\ (g_i)_{i\in J} & \longmapsto & \bigotimes_{i\in J} \varphi_i((g_i)_{i\in J}) = \bigotimes_{i\in J} \varphi_i(g_i) \end{array}$$

avec

$$\begin{array}{rcl} \bigotimes_{i\in J} \varphi_i(g_i) : \bigotimes_{i\in J} V_i & \longrightarrow & \bigotimes_{i\in J} V_i \\ \bigotimes_{i\in J} v_i & \longmapsto & (\bigotimes_{i\in J} \varphi_i(g_i))(\bigotimes_{i\in J} v_i) = \bigotimes_{i\in J} \varphi_i(g_i)(v_i) \end{array} ,$$

est une représentation linéaire du produit direct fini $\prod_{i\in J} G_i$ des groupes $(G_i)_{i\in J}$ dans le produit *tensoriel fini* $\underset{i\in J}{\otimes} V_i$.

Preuve :
Pour tout ensemble fini J, $i \in J$ et tout $g_i \in G_i$, on a $\varphi_i(g_i) \in GL(V_i)$. Il en découle, par la définition du produit tensoriel d'applications, que $\underset{i\in J}{\otimes} \varphi_i(g_i) \in GL(\underset{i\in J}{\otimes} V_i)$. On obtient par induction que $\varphi_J = \underset{i\in J}{\otimes} \varphi_i$ est un homomorphisme de groupes. Ainsi, φ_J est une représentation linéaire du produit direct fini $\prod\limits_{i\in J} G_i$ des groupes $(G_i)_{i\in J}$ dans l'espace vectoriel $\underset{i\in J}{\otimes} V_i$ comme voulu, et la démonstration est terminée.

Proposition 3.1.9.
Soient $(I, \leq)$ un ensemble dirigé et $(G_i)_{i\in I}$ une famille non vide de groupes finis. Pour tout sous-ensemble fini J de I, définissons $G_J = \prod\limits_{i\in J} G_i$. Si J et K sont des sous-ensembles de I tels que $J \subseteq K$, alors nous considérons la projection :

$$\begin{array}{rcl} \varphi_{J,K} : G_K & \longrightarrow & G_J \\ (g_i)_{i\in K} & \longmapsto & (g_i)_{i\in J}. \end{array}$$

Le système $(G_J, \varphi_{J,K})$ est projectif avec limite projective $\prod\limits_{i\in I} G_i$.

Preuve :
Soit $(I, \leq)$ un ensemble dirigé et $(G_i)_{i\in I}$ une famille non vide de groupes finis. Pour tout sous-ensemble fini J de I, définissons $G_J = \prod_{i\in J} G_i$. Nous allons montrer que le système $(G_J, \varphi_{J,K})$ est un système projectif et que sa limite projective est $\prod_{i\in I} G_i$.

Vérification du système projectif
Le système projectif est défini par les ensembles G_J indexés par les sous-ensembles finis $J \subseteq I$, et les applications de transition $\varphi_{J,K}$ définies pour $J \subseteq K$ par :

$$\varphi_{J,K} : G_K \to G_J, \quad (g_i)_{i\in K} \mapsto (g_i)_{i\in J}.$$

Les homomorphismes $\varphi_{J,K}$ sont bien définis et sont clairement des homomorphismes de groupes car ils consistent en des projections sur un sous-produit de groupes.

Identité :
Pour tout J, on a trivialement $\varphi_{J,J} = \mathrm{id}_{G_J}$.

Compatibilité avec l'inclusion :
Supposons $J \subseteq K \subseteq L$ et montrons que

$$\varphi_{J,L} = \varphi_{J,K} \circ \varphi_{K,L}.$$

Pour tout élément $g = (g_i)_{i\in L} \in G_L$, on a :

$$\varphi_{K,L}(g) = (g_i)_{i\in K} \in G_K,$$

puis

$$\varphi_{J,K}(\varphi_{K,L}(g)) = \varphi_{J,K}((g_i)_{i\in K}) = (g_i)_{i\in J}.$$

Par définition de $\varphi_{J,L}$, nous avons bien $\varphi_{J,L}(g) = (g_i)_{i\in J}$. Ainsi, la compatibilité est vérifiée.
Ces deux propriétés assurent que $(G_J, \varphi_{J,K})$ forme bien un système projectif.

Détermination de la limite projective
La limite projective d'un tel système est définie comme :

$$\varprojlim_{J\in\mathcal{F}(I)} G_J = \left\{ (g_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} G_i \mid \forall J \subseteq K, \varphi_{J,K}((g_i)_{i\in K}) = (g_i)_{i\in J} \right\}.$$

Mais ici, les projections sont simplement les projections naturelles de $\prod_{i\in I} G_i$ sur les sous-produits indexés par les parties finies de I. Ainsi, tout élément de $\prod_{i\in I} G_i$ satisfait trivialement la condition de compatibilité, donc :

$$\varprojlim_{J\in\mathcal{F}(I)} G_J = \prod_{i\in I} G_i.$$

Par construction, les projections $\varphi_J : \prod_{i\in I} G_i \to G_J$ définies par $(g_i)_{i\in I} \mapsto (g_i)_{i\in J}$ vérifient $\varphi_{J,K} \circ \varphi_K = \varphi_J$, montrant que $\prod_{i\in I} G_i$ satisfait l'universalité de la limite projective. Il en resulte que $(G_J, \varphi_{J,K})$ définit bien un système projectif, et que sa limite projective est $\prod_{i\in I} G_i$, ce qui conclut la preuve.

Nous avons le résultat suivant d'après le théorème 1.3.1.

Lemme 5.
Soit $(V_i)_{i\in I}$ une famille non vide d'espaces vecteurs de dimension finie sur le même corps $\mathbb{K}$ et soit $\bigotimes_{i\in I} V_i$ le produit tensoriel infini des espaces vectoriels $(V_i)_{i\in I}$ où chaque V_i $(i \in I)$ est un espace vectoriel non nul. Soit $\mathcal{F}(I)$ l'ensemble des sous-ensembles finis de I. Alors,

$$\varprojlim_{J\in\mathcal{F}(I)} GL\left(\bigotimes_{i\in J} V_i\right) = GL\left(\varinjlim_{J\in\mathcal{F}(I)} \left(\bigotimes_{i\in J} V_i\right)\right)$$

Théorème 3.1.1.
Soit $(G_i)_{i\in I}$ une famille non vide de groupes, et $(\varphi_i)_{i\in I}$ une famille de représentations linéaires, où chaque

$$\varphi_i : G_i \to \mathrm{GL}(V_i)$$

est une représentation du groupe G_i sur un espace vectoriel V_i. Alors, il existe une représentation linéaire naturelle sur le produit tensoriel des espaces V_i, définie par :

$$\varphi_I = \bigotimes_{i\in I} \varphi_i : \prod_{i\in I} G_i \longrightarrow \mathrm{GL}\left(\bigotimes_{i\in I} V_i\right).$$

Preuve :
Soient $J, K \in \mathcal{F}(I)$, l'ensemble des parties finies de I, avec $J \subseteq K$. Le diagramme

suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i\in K} G_i \arrow[r, "\varphi_K"] \arrow[d, "\pi_{J,K}"'] & \mathrm{GL}\left(\bigotimes_{i\in K} V_i\right) \arrow[d, "\psi_{J,K}"] \\
\prod_{i\in J} G_i \arrow[r, "\varphi_J"] & \mathrm{GL}\left(\bigotimes_{i\in J} V_i\right)
\end{tikzcd}$$

où $\pi_{J,K}$ est la projection de $\prod_{i\in K} G_i$ sur $\prod_{i\in J} G_i$ et $\psi_{J,K}$ la restriction de l'action de $\bigotimes_{i\in K} \varphi_i(g_i)$ sur le sous-espace $\bigotimes_{i\in J} V_i$. En effet,
Soit $(g_i)_{i\in K} \in \prod_{i\in K} G_i$. Alors

$$\psi_{J,K} \circ \varphi_K((g_i)_{i\in K}) = \psi_{J,K}\left(\bigotimes_{i\in K} \varphi_i(g_i)\right),$$

et

$$\varphi_J \circ \pi_{J,K}((g_i)_{i\in K}) = \varphi_J((g_i)_{i\in J}) = \bigotimes_{i\in J} \varphi_i(g_i).$$

Soient$\bigotimes_{i\in J} v_i \in \bigotimes_{i\in J} V_i$ et $\bigotimes_{i\in K\setminus J} u_i \in \bigotimes_{i\in K\setminus J} V_i$. Leur produit tensoriel est dans $\bigotimes_{i\in K} V_i$ et on a :

$$\left(\bigotimes_{i\in K} \varphi_i(g_i)\right)\left(\left(\bigotimes_{i\in J} v_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{i\in K\setminus J} u_i\right)\right) = \left(\bigotimes_{i\in J} \varphi_i(g_i)(v_i)\right) \otimes \left(\bigotimes_{i\in K\setminus J} \varphi_i(g_i)(u_i)\right).$$

Par définition de $\psi_{J,K}$, on en déduit que :

$$\psi_{J,K}\left(\bigotimes_{i\in K} \varphi_i(g_i)\right)\left(\bigotimes_{i\in J} v_i\right) = \bigotimes_{i\in J} \varphi_i(g_i)(v_i) = \varphi_J\left((g_i)_{i\in J}\right)\left(\bigotimes_{i\in J} v_i\right).$$

Par conséquent, le diagramme commute. Ainsi, d'après théorème 1.3.2, il existe un unique homomorphisme de groupes :

$$\varphi_I = \varprojlim_{J\in\mathcal{F}(I)} (\bigotimes_{i\in J}\varphi_i) : \prod_{i\in I} G_i \longrightarrow GL(\underset{i\in I}{\otimes} V_i),$$

qui est une représentation linéaire du produit direct infini $\prod_{i\in I} G_i$ des groupes G_i dans $\underset{i\in I}{\otimes} V_i$.

3.1.2 Caractère d'une représentation linéaire d'un produit de groupes

Dans cette section, sauf mention contraire, tous les espaces vectoriels considérés seront supposés de dimension finie et définis sur $\mathbb{C}$.

Définition 3.1.3. *[16]*
Soient G_1 et G_2 des groupes, et ρ_1 et ρ_2 des représentations linéaires respectives de G_1 et G_2,

avec χ_1 et χ_2 les caractères associés à ces représentations. Le caractère χ du produit tensoriel des représentations $\rho_1 \otimes \rho_2$ de $G_1 \times G_2$ est défini par la formule :

$$\chi(g_1, g_2) = \chi_1(g_1)\chi_2(g_2),$$

pour tout $g_1 \in G_1$ et $g_2 \in G_2$.

Proposition 3.1.10.
Soit J un ensemble fini et φ_J la représentation définie par :

$$\varphi_J = \bigotimes_{i \in J} \varphi_i : \prod_{i \in J} G_i \longrightarrow GL\left(\bigotimes_{i \in J} V_i\right)$$

où $\forall i \in J$, $\varphi_i : G_i \to GL(V_i)$ est une représentation de chaque groupe G_i et V_i est l'espace vectoriel associé.
Le caractère χ_{φ_J} de la représentation φ_J du produit direct fini $\prod_{i \in J} G_i$ est donné par :

$$\chi_{\varphi_J}((g_i)_{i \in J}) = \prod_{i \in J} \chi_{\varphi_i}(g_i), \quad \forall (g_i)_{i \in J} \in \prod_{i \in J} G_i,$$

où χ_{φ_i} est le caractère de la représentation φ_i du groupe G_i.

<u>Preuve</u> :
Par définition du caractère d'une représentation, on a :

$$\chi_{\varphi_J}((g_i)_{i \in J}) = \mathrm{Tr}(\varphi_J((g_i)_{i \in J})).$$

Or, par définition du produit tensoriel de représentations, on a :

$$\varphi_J((g_i)_{i \in J}) = \bigotimes_{i \in J} \varphi_{i \in J}(g_{i \in J})$$

avec j une partie finie de I. Comme la trace du produit tensoriel fini de matrices est le produit des traces, il vient que :

$$\mathrm{Tr}(\varphi_J((g_i)_{i \in J})) = \prod_{i \in J} \mathrm{Tr}(\varphi_i(g_i)).$$

D'où :

$$\chi_{\varphi_J}((g_i)_{i \in J}) = \prod_{i \in J} \chi_{\varphi_i}(g_i).$$

Ceci prouve la proposition.

Proposition 3.1.11.
Soit φ_I la représentation définie par :

$$\varphi_I = \bigotimes_{i \in I} \varphi_i : \prod_{i \in I} G_i \longrightarrow GL\left(\bigotimes_{i \in I} V_i\right),$$

où $\varphi_i : G_i \to GL(V_i)$ est une représentation linéaire de chaque groupe G_i, et V_i est l'espace

vectoriel complexe associé.
À chaque représentation linéaire φ_i, associons le caractère (une fonction de i)

$$\chi_{\varphi_i} : G_i \to \mathbb{C}$$

défini pour tout $g_i \in G_i$ par :

$$\chi_{\varphi_i}(g_i) := \mathrm{Tr}(\varphi_i(g_i)).$$

Définissons la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$, dont chaque terme est donné par :

$$a_i := \chi_{\varphi_i}(g_i), \quad i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Considérons la suite des produits partiels associée à $(a_i)_{i\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$, définie par :

$$P_N = \prod_{i=1}^{N} \chi_{\varphi_i}(g_i), \quad N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Si la suite $(P_N)_{N\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ converge, alors le caractère χ_{φ_I} de la représentation tensorielle infinie φ_I est défini par :

$$\chi_{\varphi_I}((g_i)_{i\in I}) = \lim_{N\to\infty} \prod_{i=1}^{N} \chi_{\varphi_i}(g_i) = \prod_{i\in I} \chi_{\varphi_i}(g_i).$$

Dans le cas contraire, le caractère χ_{φ_I} n'est pas défini.

3.1.3 Irréductibilité des représentations d'un produit de groupes

Soient G_1, G_2 deux groupes finis et V_1, V_2 deux espaces vectoriels.

Théorème 3.1.2. *[16]*

i) Si $\rho^1 : G_1 \to \mathrm{GL}(V_1)$ et $\rho^2 : G_2 \to \mathrm{GL}(V_2)$ sont des représentations irréductibles de G_1 et G_2 respectivement, alors le produit tensoriel $\rho^1 \otimes \rho^2$ est une représentation irréductible de $G_1 \times G_2$.

ii) Chaque représentation irréductible de $G_1 \times G_2$ est isomorphe à un produit tensoriel $\rho^1 \otimes \rho^2$, où ρ^1 est une représentation irréductible de G_1 et ρ^2 est une représentation irréductible de G_2.

Lemme 6.
Soit $(G_i)_{i\in I}$ une famille non vide de groupes finis abéliens et $(\varphi_i)_{i\in I}$ une famille de représentations linéaires, où chaque

$$\varphi_i : G_i \to \mathrm{GL}(V_i)$$

est une représentation du groupe G_i sur un espace vectoriel V_i. Alors, toute représentation irréductible de $G = \prod_{i\in I} G_i$ est de degré 1.

Preuve :
Étant donné que chaque G_i est un groupe abélien, leur produit $G = \prod_{i\in I} G_i$ est également un groupe abélien. Il est connu que toute représentation irréductible d'un groupe abélien est de degré 1. Par conséquent, toute représentation irréductible de $G = \prod_{i\in I} G_i$ est de degré 1.

Théorème 3.1.3.
Soit $(G_i)_{i\in I}$ une famille non vide de groupes finis d'ordre premier chacun , $(V_i)_{i\in I}$ une famille non vide d'espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, et

$$(\varphi_i : G_i \to \mathrm{GL}(V_i))_{i\in I}$$

une famille de représentations linéaires Soit $G = \prod_{i\in I} G_i$

i) Si chaque G_i est un groupe cyclique, alors toute représentation irréductible de G est de degré 1.

ii) Si chaque G_i est un groupe d'ordre premier, alors toute représentation irréductible de G est de degré 1.

iii) Si presque toutes les représentations φ_i sont triviales, alors la représentation induite sur le produit tensoriel des espaces V_i

$$\varphi_I = \bigotimes_{i\in I} \varphi_i : G = \prod_{i\in I} G_i \longrightarrow \mathrm{GL}\left(\bigotimes_{i\in I} V_i\right),$$

est irréductible si et seulement si chaque représentation φ_i non triviale est irréductible ainsi que leur produit tensoriel.

Preuve :

i) Chaque G_i est cyclique d'ordre fini, donc G_i est abélien. Le produit $G = \prod_{i\in I} G_i$ est un groupe abélien. par le lemme 6, toute représentation irréductible de G est de degré 1.

ii) Chaque groupe d'ordre premier est cyclique. Par i), il vient que toute représentation irréductible de G est de degré 1.

iii) **Sens direct**
Supposons que φ_I est irréductible.
Montrons que chaque φ_i non triviale est irréductible :
Supposons par l'absurde que pour un certain $j \in I$, la représentation non triviale φ_j ne soit pas irréductible. Cela signifie qu'il existe un sous-espace propre non trivial $W_j \subset V_j$ qui est stable sous φ_j.
Soit $W = \left(\bigotimes_{i\neq j} V_i\right) \otimes W_j \subset \bigotimes_{i\in I} V_i$. Ce sous-espace est stable sous φ_I.
En effet :
Soit $g = (g_i)_{i\in I} \in G = \prod_{i\in I} G_i$ et $v = \otimes_{i\in I} v_i \in \otimes_{i\in I} V_i$. On a

$$\varphi_I(g)(v) = \varphi_I((g_i)_{i\in I})\left(\bigotimes_{i\in I} v_i\right) = \bigotimes_{i\in I} \varphi_i(g_i)(v_i).$$

Si $v \in W$, alors $v = \left(\bigotimes_{i\neq j} v_i\right) \otimes w_j$ avec $w_j \in W_j$. Il vient que

$$\varphi_I(g)(v) = \left(\bigotimes_{i\neq j} \varphi_i(g_i)(v_i)\right) \otimes \varphi_j(g_j)(w_j).$$

Étant donné que W_j est stable sous φ_j, on a $\varphi_j(g_j)(w_j) \in W_j$. Par conséquent,

$$\varphi(g)(v) \in \left(\bigotimes_{i\neq j} V_i\right) \otimes W_j = W.$$

Ainsi, W est stable sous l'action de φ. Cette stabilité contredit l'irréductibilité de φ, car un sous-espace propre non trivial stable ne devrait pas exister dans une représentation irréductible. Ainsi, chaque φ_i non triviale doit être irréductible.

Montrons que le produit tensoriel des représentations linéaires non triviales φ_i est irréductible :
Soit $J \subset I$ l'ensemble des indices correspondant aux représentations φ_i non triviales. On peut écrire :

$$\bigotimes_{i\in I} V_i = \left(\bigotimes_{i\in J} V_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{i\notin J} V_i\right).$$

Puisque $\bigotimes_{i\notin J} V_i$ est constitué de représentations triviales, il n'affecte pas l'irréductibilité. Par conséquent, l'irréductibilité de φ entraîne l'irréductibilité de $\bigotimes_{i\in J} \varphi_i$.

Sens réciproque
Montrons que φ est irréductible. :
Supposons que chaque φ_i non triviale est irréductible et que leur produit tensoriel est irréductible. Nous devons montrer que φ_I est irréductible. Considérons un sous-espace stable $W \subset \bigotimes_{i\in I} V_i$. Soit J une partie finie de I. Nous avons :

$$\bigotimes_{i\in I} V_i = \left(\bigotimes_{i\in J} V_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{i\notin J} V_i\right).$$

Comme $\bigotimes_{i\notin J} V_i$ est trivial, tout sous-espace stable sous φ_I est en réalité stable sous $\bigotimes_{i\in J} \varphi_i$. L'irréductibilité de $\bigotimes_{i\in J} \varphi_i$ entraîne l'irréductibilité de φ_I. Par hypothèse, $\bigotimes_{i\in J} \varphi_i$ est irréductible. Donc, W doit être soit $\{0\}$, soit $\bigotimes_{i\in J} V_i$. Cela montre que φ est irréductible.

3.2 Traité du cas de $\widehat{\mathbb{Z}}$, le complété profini de $\mathbb{Z}$.

Le groupe $\widehat{\mathbb{Z}}$, complété profini de $\mathbb{Z}$, est un exemple des groupes profinis. Dans cette section, nous analysons ses propriétés, ses représentations linéaires, ses caractères, et ses représentations irréductibles, en exploitant sa structure spécifique.

Dans cette section, sauf indication contraire, tous les espaces vectoriels seront supposés de dimension finie et définis sur $\mathbb{C}$.

Définition 3.2.1. *[18]*
Le complété profini $\widehat{\mathbb{Z}}$ est la limite projective du système $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \varphi_{m,n})$, où :

i) $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *est le groupe des classes d'équivalence modulo n, et*

ii) $\varphi_{m,n} : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *est la surjection canonique définie lorsque n divise m.*

Notation 3.2.1.

$$\widehat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Définition 3.2.2. *[3]*
Soit un système projectif d'ensembles $(E_n, \pi_{m,n})$*, où :*

i) Chaque E_n *est un ensemble indexé par* $n \geq 1$ *, et*

ii) $\pi_{m,n} : E_m \to E_n$ *est une application de transition, définie pour* $n \mid m$*, satisfaisant :*

- $\pi_{n,n} = id_{E_n}$, *(identité sur* E_n*) ,*
- $\pi_{m,n} \circ \pi_{k,m} = \pi_{k,n}$, *pour* $k \mid m \mid n$ *cohérence des projections.*

Une suite cohérente est une suite $(x_n)_{n\geq 1} \in \prod_{n\geq 1} E_n$ *telle que, pour tout* $n \mid m$*, on a :*

$$\pi_{m,n}(x_m) = x_n.$$

Dans le cas de $\widehat{\mathbb{Z}}$*, une suite* $(x_n)_{n\geq 1} \in \prod_{n\geq 1} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *est* ***cohérente*** *si, pour tout* $n \mid m$*, on a :*

$$x_m \mod n = x_n.$$

Autrement dit, les éléments $x_n \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *doivent être compatibles entre eux via les projections modulo n. Cette condition garantit que les suites cohérentes forment une limite projective.Ainsi,*

$$\widehat{\mathbb{Z}} = \left\{ (x_n) \in \prod_{n\geq 1} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid \forall m, n, \text{ si } n \mid m, \text{ alors } x_m \equiv x_n \mod n \right\}.$$

3.2.1 Propriétés du complété profini $\widehat{\mathbb{Z}}$

i) $\widehat{\mathbb{Z}}$ est un groupe topologique compact et totalement discontinu [18].

ii) $\widehat{\mathbb{Z}}$ est isomorphe au produit des groupes $\prod_{p\in\mathcal{P}} \mathbb{Z}_p$, où $\mathbb{Z}_p$ est le groupe des entiers p-adiques, et $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers [18].

iii) L'homomorphisme canonique $\mathbb{Z} \to \widehat{\mathbb{Z}}$ est injectif, et l'image de $\mathbb{Z}$ est dense dans $\widehat{\mathbb{Z}}$ pour la topologie profinie [18].

Proposition 3.2.1.
$(\widehat{\mathbb{Z}}, +)$ *est un sous-groupe fermé du groupe produit* $(\prod_{n\geq 1} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ *avec + l'addition composante par composante définie par :*
pour tous $x = (x_n)_{n\geq 1}$ *et* $y = (y_n)_{n\geq 1}$ *dans* $\widehat{\mathbb{Z}}$*, on a :*

$$x + y = (x_n + y_n)_{n\geq 1},$$

où $x_n + y_n$ *est l'addition modulo n.*

Preuve :

Montrons que $\widehat{\mathbb{Z}}$ est un sous-groupe de $\prod_{n\geq 1}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

La stabilité par addition :
Soient $(x_n), (y_n) \in \widehat{\mathbb{Z}}$.
Par définition, cela signifie que pour tout m, n avec $n \mid m$, on a :

$$x_m \equiv x_n \pmod n \quad \text{et} \quad y_m \equiv y_n \pmod n.$$

Ainsi, $(x_m + y_m) \equiv (x_n + y_n) \pmod n$ pour tout $n \mid m$, ce qui montre que la suite $(x_n + y_n)$ est cohérente. Par conséquent, $(x_n + y_n) \in \widehat{\mathbb{Z}}$, ce qui prouve que $\widehat{\mathbb{Z}}$ est stable par addition.

La présence de l'élément neutre :
La suite (0_n), où 0_n désigne l'élément neutre dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, appartient à $\widehat{\mathbb{Z}}$, car pour tout m, n, on a :

$$0_m \equiv 0_n \pmod n.$$

Ainsi, (0_n) satisfait la condition de cohérence pour toutes les projections et appartient à $\widehat{\mathbb{Z}}$, ce qui montre la présence de l'élément neutre.

La stabilité par opposé :
Si $(x_n) \in \widehat{\mathbb{Z}}$, alors $(-x_n)$ est également cohérent.
En effet, pour tout m, n avec $n \mid m$, on a :

$$-x_m \equiv -x_n \pmod n.$$

Cela montre que $(-x_n) \in \widehat{\mathbb{Z}}$, donc $\widehat{\mathbb{Z}}$ est stable par opposé.
Il en resulte que $\widehat{\mathbb{Z}}$ est un sous-groupe de $\prod_{n\geq 1}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Montrer que $\widehat{\mathbb{Z}}$ est fermé.
Montrons qes applications $f_{m,n}$ sont continues.
L'espace $\prod_{n\geq 1}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est muni de la topologie produit, où chaque facteur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est discret. Dans cette topologie :

- Les projections $p_k : \prod_{n\geq 1}\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ sont continues.
- Les opérations algébriques (addition, soustraction) dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont continues car $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est discret.

L'application $f_{m,n}$ se décompose comme suit :

$$f_{m,n}(x) = x_m \mod n - x_n,$$

où :

- $x \mapsto x_m$ est une projection, donc continue.
- $x_m \mapsto x_m \mod n$ est un homomorphisme de groupes discret, donc continu.
- La soustraction dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est continue car $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est discret.

Ainsi, $f_{m,n}$ est une composition d'applications continues, donc continue.

$$\ker(f_{m,n}) = \left\{ (x_n)_n \in \prod_{n\geq 1} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid f_{m,n}(x) = 0 \right\}.$$

On a :

$$\widehat{\mathbb{Z}} = \bigcap_{n|m} \ker(f_{m,n}).$$

En effet :
$\widehat{\mathbb{Z}} \subseteq \bigcap_{n|m} \ker(f_{m,n})$
Soit $x = (x_n) \in \widehat{\mathbb{Z}}$.
Par définition de $\widehat{\mathbb{Z}}$, cela signifie que pour tout $n \mid m$, la suite x est cohérente, c'est-à-dire que pour chaque $n \mid m$, on a :

$$x_m \equiv x_n \pmod{n}.$$

Cela implique que la différence $x_m - x_n$ est divisible par n, c'est-à-dire :

$$x_m - x_n \equiv 0 \pmod{n}.$$

En d'autres termes, x appartient au noyau de $f_{m,n}$, c'est-à-dire :

$$f_{m,n}(x) = x_m - x_n \equiv 0 \pmod{n}.$$

Ainsi, $x \in \ker(f_{m,n})$ pour chaque $n \mid m$. Par conséquent, $x \in \bigcap_{n|m} \ker(f_{m,n})$. Cela montre que :

$$\widehat{\mathbb{Z}} \subseteq \bigcap_{n|m} \ker(f_{m,n}).$$

$\bigcap_{n|m} \ker(f_{m,n}) \subseteq \widehat{\mathbb{Z}}$
Soit $x = (x_n) \in \bigcap_{n|m} \ker(f_{m,n})$.
Cela signifie que pour chaque $n \mid m$, on a :

$$f_{m,n}(x) = x_m - x_n \equiv 0 \pmod{n}.$$

En d'autres termes, pour chaque $n \mid m$, on a :

$$x_m \equiv x_n \pmod{n}.$$

Cela montre que la suite (x_n) est cohérente, c'est-à-dire que $x \in \widehat{\mathbb{Z}}$. Par conséquent :

$$\bigcap_{n|m} \ker(f_{m,n}) \subseteq \widehat{\mathbb{Z}}.$$

Donc

$$\widehat{\mathbb{Z}} = \bigcap_{n|m} \ker(f_{m,n}).$$

L'application $f_{m,n}$ est continue, et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est discret. Dans un espace topologique, le

préimage d'un singleton sous une application continue est un ensemble fermé. Par conséquent, $f_{m,n}^{-1}(\{0\}) = \ker(f_{m,n})$ est fermé.
L'intersection d'ensembles fermés est fermée, donc $\widehat{\mathbb{Z}}$ est fermé.
Il en resulte que $\widehat{\mathbb{Z}}$ est un sous-groupe fermé du groupe produit $\prod_{n\geq 1} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Remarque 3.2.1. *[1]*

i) Chaque $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un groupe abélien, car l'addition dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est commutative.

ii) $\widehat{\mathbb{Z}}$ est un sous-groupe d'un groupe abélien ($\prod_{n\geq 1} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, +). Donc $\widehat{\mathbb{Z}}$ est un groupe abélien.

3.2.2 Représentations linéaires de $\widehat{\mathbb{Z}}$

Proposition 3.2.2.
Soit N un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$ et soit $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_{n\in N}$ une famille finie de groupes cycliques. Soit $(V_n)_{n\in N}$ une famille finie non vide d'espaces vectoriels de dimension finie, et pour chaque $n \in N$, soit

$$\varphi_n : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathrm{GL}(V_n)$$

une représentation linéaire.
Alors, on a la représentation linéaire :

$$\varphi_N = \bigotimes_{n\in N} \varphi_n : \prod_{n\in N} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathrm{GL}\left(\bigotimes_{n\in N} V_n\right)$$

tel que :

$$\varphi_N((g_n)_{n\in N}) = \bigotimes_{n\in N} \varphi_n(g_n).$$

De plus, en passant à la limite inverse, on a la représentation linéaire sur un produit tensoriel infini

$$\varphi_{\mathbb{N}} = \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n : \varprojlim_{N\in\mathcal{F}(\mathbb{N})} \prod \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{GL}\left(\bigotimes_{n\in\mathbb{N}} V_n\right).$$

Lemme 7.
Si $N, M \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ avec $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ l'ensemble de partie finie de $\mathbb{N}$ tel que $M \subseteq N$, alors nous avons une projection naturelle :

$$\pi_{N,M} : \prod_{n\in N} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \prod_{m\in M} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z},$$

donnée par la restriction des coordonnées aux indices M.
Ces projections sont compatibles, c'est-à-dire si $L \subseteq M \subseteq N$, on a :
$\pi_{M,L} \circ \pi_{N,M} = \pi_{N,L}$.

Théorème 3.2.1.
L'application

$$\Phi : \widehat{\mathbb{Z}} \to \varprojlim_{N\in\mathcal{F}(\mathbb{N})} \prod_{n\in N} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

définie par :

$$\Phi((x_n)_{n\geq 1}) = (x_N)_{N\in\mathcal{F}(\mathbb{N})}, \quad \text{où } x_N = (x_n)_{n\in N}$$

est un isomorphisme de groupes .

Preuve :
On sait que :

$$\widehat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

$$\widehat{\mathbb{Z}} = \left\{ (x_n)_n \in \prod_{n\geq 1} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid \forall m,n,\ \text{si } n \mid m,\ \text{alors } x_m \equiv x_n \mod n \right\}.$$

$$\varprojlim_{N\in\mathcal{F}(\mathbb{N})} \prod_{n\in N} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \left\{ (x_N)_{N\in\mathcal{F}(\mathbb{N})} \mid x_N \in \prod_{n\in N} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \quad \forall M \subseteq N, \quad \pi_{N,M}(x_N) = x_M \right\}.$$

Autrement dit, chaque x_N est une suite de résidus compatibles.

Montrons que Φ est bien définie :
Soit $(x_n)_{n\geq 1} \in \widehat{\mathbb{Z}}$ où $x_n \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On a :

$$x_m = x_n \mod m, \quad \text{si } m \mid n.$$

$\Phi((x_n)_{n\geq 1}) = (x_N)_{N\in\mathcal{F}(\mathbb{N})}$ où :

$$x_N = (x_n)_{n\in N} \in \prod_{n\in N} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Montrons que $(x_N)_{N\in\mathcal{F}(\mathbb{N})} \in \varprojlim_{N\in\mathcal{F}(\mathbb{N})} \prod_{n\in N} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, c'est-à-dire que pour tout $M \subseteq N$, on a :

$$\pi_{N,M}(x_N) = x_M.$$

Cela découle directement de la compatibilité des résidus :

$$\pi_{N,M}(x_N) = (x_n)_{n\in M} = x_M.$$

Donc, Φ est bien définie.

Montrons que Φ est un homomorphisme de groupes :
Soient $x = (x_n)_{n\geq 1}, y = (y_n)_{n\geq 1} \in \widehat{\mathbb{Z}}$. Montrons que :

$$\Phi(x+y) = \Phi(x) + \Phi(y).$$

Dans $\widehat{\mathbb{Z}}$, l'addition est définie par :

$$(x+y)_n = x_n + y_n \mod n.$$

Par définition de Φ, nous avons :

$$\Phi(x+y) = ((x_n + y_n)_{n\in N})_{N\in\mathcal{F}(\mathbb{N})} \quad (1).$$

Or, dans la limite projective, la somme est définie composante par composante :

$$(x_N)_{N\in\mathcal{F}(\mathbb{N})} + (y_N)_{N\in\mathcal{F}(\mathbb{N})} = ((x_n + y_n)_{n\in N})_{N\in\mathcal{F}(\mathbb{N})} \quad (2).$$

Il vient que de (1) et (2) que $\Phi(x+y) = \Phi(x) + \Phi(y)$. Donc, Φ est bien un homomorphisme de groupes.

Montrons que Φ est injective :
Soient $x = (x_n)_{n\geq 1}, y = (y_n)_{n\geq 1} \in \widehat{\mathbb{Z}}$. Montrons que :

$$\Phi(x) = \Phi(y) \Rightarrow x = y.$$

Si $\Phi(x) = \Phi(y)$, alors pour tout N,

$$x_N = y_N.$$

Comme $x_N = (x_n)_{n\in N}$ et $y_N = (y_n)_{n\in N}$, on a :

$$x_n = y_n, \quad \forall n \in N.$$

Puisque cette égalité est vraie pour tous les ensembles finis N, cela implique que :

$$x_n = y_n, \quad \forall n \geq 1.$$

Donc, $x = y$ dans $\widehat{\mathbb{Z}}$, prouvant que Φ est injective.

Montrons que Φ est surjective :
Nous devons montrer que tout élément de la limite projective $(x_N)_{N\in\mathcal{F}(\mathbb{N})}$ provient d'un élément de $\widehat{\mathbb{Z}}$.
Soit $(x_N)_{N\in\mathcal{F}(\mathbb{N})} \in \varprojlim_{N\in\mathcal{F}(\mathbb{N})} \prod_{n\in N} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Cela signifie que pour tout $M \subseteq N$, nous avons :

$$\pi_{N,M}(x_N) = x_M.$$

Définissons la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ par :

$$x_n = x_{\{n\}}.$$

Nous devons vérifier la compatibilité :

$$x_m = x_n \mod m, \quad \text{si } m \mid n.$$

Puisque $(x_N)_{N\in\mathcal{F}(\mathbb{N})} \in \varprojlim_{N\in\mathcal{F}(\mathbb{N})} \prod_{n\in N} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on a :

$$x_m = \pi_{N,\{m\}}(x_N) = x_n \mod m.$$

Ainsi, la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est bien un élément de $\widehat{\mathbb{Z}}$ et son image par Φ est exactement $(x_N)_{N\in\mathcal{F}(\mathbb{N})}$. Cela prouve que Φ est surjective.
Il en resulte que Φ est un isomorphisme de groupes. Donc $\widehat{\mathbb{Z}} \simeq \varprojlim_{N\in\mathcal{F}(\mathbb{N})} \prod_{n\in N} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Ainsi, d'après les résultats précédents, nous obtenons la représentation linéaire suivante :

$$\varphi_{\mathbb{N}} : \widehat{\mathbb{Z}} = \prod_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{GL}\left(\bigotimes_{n\in\mathbb{N}} V_n\right).$$

3.2.3 Caractères de $\widehat{\mathbb{Z}}$

Définition 3.2.3.
Un caractère de $\widehat{\mathbb{Z}}$ est un homomorphisme de groupe continu :

$$\chi : \widehat{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}^{\times}.$$

Remarque 3.2.2. *[18]*

i) Chaque groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ étant cyclique d'ordre n, ses caractères sont donnés par :

$$\chi_n(a) = e^{2i\pi a/n}, \quad \forall a \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

ii) Puisque $\widehat{\mathbb{Z}}$ est la limite projective des $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, un tel χ est entièrement déterminé par ses valeurs sur chaque quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Théorème 3.2.2. *[18]*
L'ensemble des caractères continus de $\widehat{\mathbb{Z}}$ est isomorphe à $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ via la dualité de Pontryagin :

$$\mathrm{Hom}_{cont}(\widehat{\mathbb{Z}}, \mathbb{C}^{\times}) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

3.2.4 Représentations irréductibles de $\widehat{\mathbb{Z}}$

Chaque $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un groupe cyclique fini, et ses représentations irréductibles sont bien connues.
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ possède n représentations irréductibles de degré 1, correspondant aux caractères continus $\chi_k : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^*$ définis par :

$$\chi_k(a) = e^{2\pi i k a/n}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Proposition 3.2.3.

i) Toutes les représentations irréductibles de $\widehat{\mathbb{Z}}$ sont de degré 1.

ii) Soient $\mathrm{Irr}(\widehat{\mathbb{Z}})$ l'ensemble des représentations irréductibles de $\widehat{\mathbb{Z}}$ et $\mathrm{Hom}_{cont}(\widehat{\mathbb{Z}}, \mathbb{C}^{\times})$ l'ensemble de ses caractères continus. Il existe un isomorphisme :

$$\Phi : \mathrm{Irr}(\widehat{\mathbb{Z}}) \to \mathrm{Hom}_{cont}(\widehat{\mathbb{Z}}, \mathbb{C}^{\times})),$$

iii) $\widehat{\mathbb{Z}}$ possède une infinité non dénombrable de représentations irréductibles.

iv) Les représentations irréductibles de $\widehat{\mathbb{Z}}$ peuvent être interprétées comme des représentations sur chaque composante $\mathbb{Z}_p$.

Preuve :

i) Les représentations irréductibles des groupes finis abéliens $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont de degré 1, données par des caractères :

$$\chi_n : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{C}^{\times}.$$

Les représentations irréductibles de $\widehat{\mathbb{Z}}$ sont obtenues comme limites projectives de celles des $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, et elles sont donc aussi de degré 1. Toute représentation irréductible de $\widehat{\mathbb{Z}}$ est donc un homomorphisme continu :

$$\widehat{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}^{\times}.$$

ii) Définissons l'application :

$$\Phi : \mathrm{Irr}(\widehat{\mathbb{Z}}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\widehat{\mathbb{Z}}, \mathbb{C}^{\times})).$$

Soit $\rho : \widehat{\mathbb{Z}} \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation irréductible. Nous avons établi que toute représentation irréductible de $\widehat{\mathbb{Z}}$ est de degré 1, ce qui implique que V est un espace vectoriel de dimension 1. Par conséquent, l'image de ρ est contenue dans le groupe multiplicatif des scalaires :

$$\mathrm{GL}(V) \simeq \mathbb{C}^{\times}.$$

Ainsi, ρ définit un caractère continu de $\widehat{\mathbb{Z}}$, et on pose :

$$\Phi(\rho) = \rho.$$

Définissons maintenant l'application réciproque :

$$\Psi : \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\widehat{\mathbb{Z}}, \mathbb{C}^{\times}) \to \mathrm{Irr}(\widehat{\mathbb{Z}}).$$

Soit $\chi : \widehat{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}^{\times}$ un caractère continu. Nous construisons une représentation linéaire associée sur un espace vectoriel V de dimension 1.
Nous définissons :

$$\rho_{\chi} : \widehat{\mathbb{Z}} \to \mathrm{GL}(V), \quad \rho_{\chi}(a)v = \chi(a)(v), \quad \forall v \in V.$$

Puisque $\chi(a) \in \mathbb{C}^{\times}$, cette application définit bien une représentation irréductible de $\widehat{\mathbb{Z}}$. Nous posons alors :

$$\Psi(\chi) = \rho_{\chi}.$$

Vérifions que Φ et Ψ sont réciproques.
Montrons que $\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}$ Soit $\chi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\widehat{\mathbb{Z}}, \mathbb{C}^{\times})$. Alors :

$$\Phi(\Psi(\chi)) = \Phi(\rho_{\chi}) = \rho_{\chi} = \chi.$$

Montrons que $\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}$ Soit $\rho \in \mathrm{Irr}(\widehat{\mathbb{Z}})$. Alors :

$$\Psi(\Phi(\rho)) = \Psi(\rho) = \rho.$$

Comme chaque application est l'inverse de l'autre, nous obtenons une bijection.
Il en resulte que :

$$\mathrm{Irr}(\widehat{\mathbb{Z}}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\widehat{\mathbb{Z}}, \mathbb{C}^{\times}).$$

iii) Les représentations irréductibles de $\widehat{\mathbb{Z}}$ correspondent aux caractères continus.Donc

$$\mathrm{Irr}(\widehat{\mathbb{Z}}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\widehat{\mathbb{Z}}, \mathbb{C}^\times).$$

Par ailleurs, on a :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{cont}}(\widehat{\mathbb{Z}}, \mathbb{C}^\times) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Le groupe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est non dénombrable, ce qui prouve que $\widehat{\mathbb{Z}}$ possède une infinité non dénombrable de représentations irréductibles.

iv) Le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ se factorise en sous-groupes comme suit :

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \prod_{p^k | n} \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}.$$

En passant à la limite projective :

$$\widehat{\mathbb{Z}} = \varprojlim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \prod_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{Z}_p.$$

Ainsi, tout caractère de $\widehat{\mathbb{Z}}$ est de la forme :

$$\chi : \widehat{\mathbb{Z}} \to \mathbb{C}^\times, \quad \chi((x_p)_{p\in\mathcal{P}}) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \chi_p(x_p),$$

où chaque χ_p est un caractère de $\mathbb{Z}_p$. Cela justifie l'interprétation des représentations irréductibles de $\widehat{\mathbb{Z}}$ comme des caractères sur chaque $\mathbb{Z}_p$.

Conclusion

Ce chapitre a exploré les interrelations profondes entre le produit tensoriel d'espaces vectoriels, les représentations linéaires de produits de groupes finis et les propriétés du complété profini $\widehat{\mathbb{Z}}$. Nous avons commencé par établir les fondements théoriques du produit tensoriel, en étudiant à la fois le cas de deux espaces vectoriels et son extension à des espaces arbitraires. Cette structure, fondamentale en algèbre linéaire, a fourni les bases nécessaires pour aborder les représentations linéaires des produits de groupes finis. La seconde section a mis en lumière les spécificités des représentations linéaires, en distinguant les cas de produits de deux groupes et de produits arbitraires. Les résultats obtenus ont été renforcés par une analyse des caractères et de l'irréductibilité de ces représentations, culminant dans une présentation du théorème de décomposition spectrale. Enfin, l'étude du complété profini $\widehat{\mathbb{Z}}$ a permis d'approfondir la théorie en examinant ses propriétés algébriques et topologiques, ainsi que ses représentations linéaires et leurs caractères. En particulier, nous avons identifié et analysé les représentations irréductibles de $\widehat{\mathbb{Z}}$, en mettant en évidence leur rôle central dans la théorie des groupes profinis. Ce chapitre illustre ainsi comment des outils fondamentaux tels que le produit tensoriel et les représentations linéaires se généralisent et s'enrichissent dans le cadre des groupes finis et profinis, offrant une compréhension unifiée et étendue des structures algébriques et topologiques sous-jacentes.

Conclusion

Ce mémoire a exploré les représentations linéaires des groupes finis et infinis, avec un accent particulier sur le complété profini des groupes. Nous avons étudié les notions de base des groupes, sous-groupes, homomorphismes, espaces vectoriels et applications linéaires. Cela a permis de poser une base solide pour comprendre les représentations linéaires, leurs caractères et leurs propriétés. Les propriétés fondamentales des représentations irréductibles de groupes finis ont été détaillées, en mettant en évidence leur rôle dans la décomposition des représentations générales. Le lien avec les caractères, notamment à travers l'orthogonalité, a été particulièrement mis en avant. Une partie significative du mémoire a été dédiée à l'étude du produit tensoriel d'espaces vectoriels et de son rôle dans la construction des représentations de produits de groupes finis. Les critères d'irréductibilité et les relations entre les caractères des produits ont été caractérisés. L'étude du complété profini $\widehat{G}$ a permis de lier les propriétés algébriques et topologiques des groupes. Le cas particulier du complété profini de $\mathbb{Z}$ a été traité en détail, montrant la richesse de cette construction dans le contexte des représentations linéaires. Une voie naturelle serait d'étendre les concepts étudiés aux groupes localement compacts, en explorant leurs représentations unitaires et leurs applications en analyse harmonique. Les groupes profinis et leurs représentations trouvent des applications dans des domaines comme la cryptographie et la théorie des nombres. Cela pourrait constituer une extension pratique de ce travail. La simulation numérique des représentations linéaires des groupes infinis pourrait ouvrir de nouvelles perspectives, en permettant de tester expérimentalement certaines hypothèses.Nous avons donc contribué à enrichir notre compréhension des représentations linéaires, en liant des notions abstraites à des constructions concrètes. Les résultats obtenus jettent les bases pour des recherches futures, aussi bien théoriques qu'appliquées, dans le domaine des mathématiques pures et de leurs applications.

Bibliographie

[1] Daniel Schaub. *Éléments de la Théorie de Groupes*. Cours de licence de Mathématiques, Université d'Angers, 1997/98.

[2] Serge Lang. *Algebra*. Volume 211, Springer Science & Business Media, 2012.

[3] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*. Springer, New York, 1971.

[4] Sheldon Axler, Frederick Gehring , and Kenneth Alan Ribet. *Graduate Texts in Mathematics 111*. Springer, 2004.

[5] Pei, Dingyi, Salomaa, Arto, et Ding, Cunsheng. *Chinese remainder theorem : applications in computing, coding, cryptography*. World Scientific, 1996.

[6] Christoph Schwarzweller. *The Chinese Remainder Theorem, its Proofs and its Generalizations in Mathematical Repositories*. Studies in Logic, Grammar and Rhetoric, volume 18, number 31, pages 103–119, Bialystok University Press, 2009.

[7] Marshall Hall. *The theory of groups*. Courier Dover Publications, 2018.

[8] Nicolas BOURBAKI. *General topology : chapters 1–4*. Springer Science & Business Media, 2013.

[9] Kazimierz Kuratowski. *Topology : Volume I*. Academic Press, 2014.

[10] Taqdir Husain *Introduction to Topological Groups*. Courier Dover Publications, 2018.

[11] Sheldon Axler. *Linear algebra done right*. Springer Nature, 2024.

[12] Farhi, Bakir. *Polycopié d'Algèbre bilinéaire (Algèbre 4)*. National Higher School of Mathematics-Alger, 2024.

[13] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, 3rd edition, 1976.

[14] Srishti D. Chatterji *Cours d'analyse*. Volume 1, EPFL Press, 1997.

[15] Alistair SAVAGE. *Linear Algebra I*. 2018.

[16] Jean-Pierre Serre. Représentation linéaire des groupes finis. Hermann, Paris, 1971.

[17] David A. Harville. *Matrix Algebra from a Statistician's Perspective*. Springer, 1997, pages 49–53.

[18] Luis Ribes and Pavel Zalesskii. Profinite Groups. Springer, Berlin, 2010.

[19] Kevin Cheung et Mathieu Lemire. *Algèbre Linéaire et Applications*. 2018.

[20] Rafael Guglielmetti *Groupes profinis et cohomologie galoisienne*. École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL), 2021.

[21] Wolfgang Herfort *Introduction to Profinite Groups*. Mimar Sinan Fine Arts University, 2012.

[22] David Renard and Laurent Schwartz. *Groupes et représentations*. École polytechnique, 2009.

[23] Bruno Deschamps. *Groupes profinis et théorie de Galois*. Clarendon Press, Oxford, 1998.

[24] Werner H. Greub *Linear Algebra*. Springer Science & Business Media, volume 23, 2012.

[25] Michael David Fried and Moshe Jarden. Infinite Galois Theory and Profinite Groups. In *Field Arithmetic*, pages 1–19. Springer Nature Switzerland, Cham, 2023.

[26] David Harari. *Représentations linéaires des groupes finis*.

[27] Mark Bridger. Limits : A New Approach to Real Analysis. Springer, New York, 2001.

[28] Henri Cartan and Samuel Eilenberg. *Homological Algebra*. Volume 19, Princeton University Press, 1999.

[29] Hermann Minkowski. *Gesammelte Abhandlungen*. BG Teubner, volume 2, 1911.

[30] Dragomir Z. Dokovic. *Pairs of Involutions in the General Linear Group*. Journal of Algebra, 100, 214–223, 1986.

[31] Alain Guichardet. *Tensor products of* $\mathbb{C}^*-$*Algebras, Part II. Infinite tensor products*. Lecture Notes Series N^0 13, 1969.