第十一章 动态规划方法

谭　忠

厦门大学数学科学学院

目录

1 源头问题与当今应用

在现实生活和生产实际中，有一类事件或现象发展变化的过程，可分为若干个互相联系的阶段，在其每个阶段都需要作出决策，从而使整个过程达到最佳效果.

源头问题与当今应用

因此，各个阶段决策的选取不是任意确定的，它依赖于当前面临的状态，又影响以后的发展. 当各个阶段决策确定后，就组成了一个决策序列，因而也就决定了整个过程的一条活动路线.

这种把一个问题看作是一个前后关联具有链状结构的多阶段过程就称为多阶段决策过程(multistep decision process)，也称序贯决策过程，这种问题就称为多阶段决策问题.

20 世纪50 年代初R. E. Bellman 等人在研究多阶段决策过程(multistep decision process)的优化问题时，提出了著名的最优性原理（principle of optimality），把多阶段过程转化为一系列单阶段问题，逐个求解，创立了解决这类过程优化问题的新方法一动态规划（dynamic programming），成为运筹学的一个重要分支.

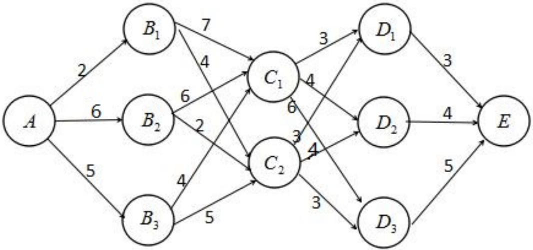
在多阶段决策问题中，各个阶段采取的决策，依赖于当前的状态，又随即引起状态的转移，一个决策序列就是在变化的状态中产生出来的，故有“动态”的含义. 因此，称处理它的方法为动态规划方法.

源头问题与当今应用

但一些静态规划(如线性规划、非线性规划等)问题，只要合理地引进“时间”因素，也可被视为多阶段决策问题，应用动态规划方法去解决.

源头问题与当今应用

例11.1某厂引进一台设备，由工厂A至港口E有多条通路可供选择，其路线及费用如图11.1所示，



现要确定一条从A到E的使距离最短（或费用最省）的路线. 如何解决这个问题呢? 可以采取穷举法. 即把由A到E所有可能的每一条路线的距离都算出来，然后互相比较找出最短者，得出最短路线.

这样，由A 到E的4个阶段中，一共有$\mathbf{3\times 2\times 3\times 1=18}$ 条不同的路线，比较18 条不同的路线的距离值，才找出最短路线为

$$\boldsymbol{A\rightarrow B_1\rightarrow C_2\rightarrow D_1\rightarrow E}$$

相应最短距离为12.

显然，这样作计算是相当繁杂的．如果当段数很多，各段的不同选择也很多时，这种解法的计算将变得极其繁杂．如下问题也是多阶段决策问题．

例11.2 生产计划问题 工厂生产某种产品，每单位（千件）的成本为1（千元），每次开工的固定成本为3（千元），工厂每季度的最大生产能力为6（千件）.

经调查，市场对该产品的需求量第一、二、三、四季度分别为2，3，2，4（千件）．如果工厂在第一、二季度将全年的需求都生产出来，自然可以降低成本（少付固定成本费），但是对于第三、四季度才能上市的产品需付存储费，每季每千件的存储费为0.5（千元）．

还规定年初和年末这种产品均无库存. 试制定一个生产计划，即安排每个季度的产量，使一年的总费用即生产成本和存储费最少.

谢　谢!

2 动态规划思想与建模方法

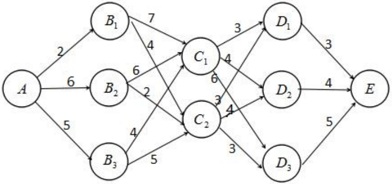
动态规划问世以来，在经济管理、生产调度、工程技术和最优控制等方面得到了广泛的应用.

例如最短路线、库存管理、资源分配、设备更新、排序、装载等问题，用动态规划方法比用其它方法求解更为方便.

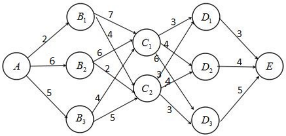
一个多阶段决策过程最优化问题的动态规划模型通常包含以下要素.

(1)**阶段**阶段(step)是对整个过程的划分，通常根据时间顺序或空间顺序特征来划分，以便按阶段的次序解优化问题.

阶段变量一般用$k=1,2,\cdots,n$表示．在例11.1中由A出发为$k=1$，由$B_i(i=1,2,3)$出发为$k=2$，依此下去，从$C_i(i=1,2)$出发为$k=3$，共$k=4$个阶段.

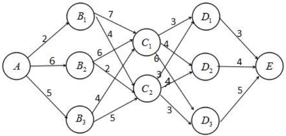


(2) **状态**状态（state）表示每个阶段开始时过程所处的自然状况或客观条件. 在例11.1 中，状态就是某阶段的出发位置，它既是该阶段某支路的起点，又是前一阶段某支路的终点.



通常一个阶段有若干个状态，描述状态的变量称为状态变量（state variable），它可以是一个数或一个向量. 变量允许取值的范围称允许状态集合(set of admissible states). 用$\boldsymbol{x}_k$ 表示第$\boldsymbol{k}$ 阶段的状态变量. 用$\boldsymbol{X}_k$ 表示第k 阶段的允许状态集合.

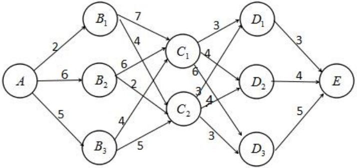
在例11.1 中第二阶段x_2有三个状态，可取B_1, B_2, B_3. 第三阶段有两个状态，则状态变量x_3可取两个值，即C_1、C_2．点集合$\{C_1, C_2\}$就称为第三阶段的允许状态集合，记为$X_3 = \{C_1, C_2\}$. 有时为了方便起见，将该阶段的状态编上号码$1, 2, \cdots$，这时也可记$X_3 = \{1, 2\}$.



这里所说的状态应具有下面的性质：如果某阶段状态给定后，则在这阶段以后过程的发展不受这阶段以前各段状态的影响，即当某阶段的状态变量给定时，这个阶段以后过程的演变与该阶段以前各阶段的状态无关.

换句话说，过程的过去历史只能通过当前的状态去影响它未来的发展，当前的状态是以往历史的一个总结. 这个性质称为无后效性(即马尔科夫性). n 个阶段的决策过程有n +1个状态变量，x_{n+1}表示x_n 演变的结果.

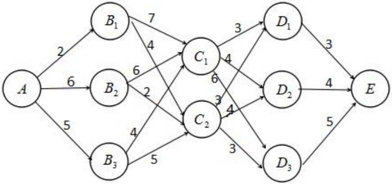
在例11.1 中x_5取E ，或定义为1，即$x_5 = 1$. 根据过程演变的具体情况，状态变量可以是离散的或连续的. 为计算方便有时将连续变量离散化；为分析方便有时又将离散变量视为连续的. 状态变量简称为状态.



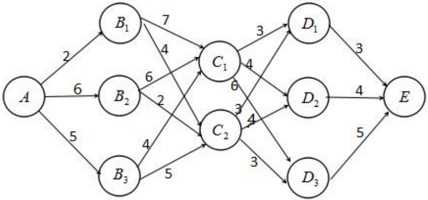
(3)**决策**当一个阶段的状态确定后，可以作出各种选择，从而演变到下一阶段的某个状态，这种选择手段称为决策（decision），在最优控制问题中也称为控制（control）.描述决策的变量称决策变量（decision variable），它可用一个数、一组数或一向量来描述，

变量允许取值的范围称允许决策集合（set of admissible decisions）. 用$\boldsymbol{u}_k(\boldsymbol{x}_k)$ 表示第k 阶段处于状态$\boldsymbol{x}_k$ 时的决策变量，它是状态变量$\boldsymbol{x}_k$ 的函数，决策变量简称决策.

用$U_k(x_k)$表示第k阶段从状态x_k出发的允许决策集合，显然有$u_k(x_k) \in U_k(x_k)$. 在例11.1中$u_2(B_1)$可取C_1或C_2，可记作$u_2(1)=1, or 2$.



若选取的点为C_2，则C_2是状态B_1。在决策$u_2(B_1)$作用下的一个新的状态，记作$u_2(B_1)=C_2$，而第2阶段从状态B_1出发的允许决策集合$U_2(1)=\{1,2\}$.



谢　谢!

(4)策略

决策组成的序列称为策略（policy）. 由初始状态x_1开始的全过程的策略记作$p_{1,n}(x_1)$，即

$$\boldsymbol{p_{1,n}(x_1) = u_1(x_1), u_2(x_2), \cdots, u_n(x_n)}$$

由第k 阶段的状态x_k开始到终止状态的后部子过程的策略记作$p_{k,n}(x_k)$，即

$$p_{k,n}(x_k) = u_k(x_k), \cdots, u_n(x_n),$$

$$k = 1, 2, \cdots, n-1$$

类似地，由第k到第j 阶段的子过程的策略记作

$\boldsymbol{p_{k,j}(x_k) = u_k(x_k), \cdots, u_j(x_j)}$

在实际问题中，可供选择的策略有一定的范围，称为允许策略集合(set of admissible policies)，用$\boldsymbol{P_{1,n}(x_1)}$, $\boldsymbol{P_{k,n}(x_k)}$, $\boldsymbol{P_{k,j}(x_k)}$表示．从允许策略集合中找出达到最优效果的策略称为最优策略.

(5)状态转移方程

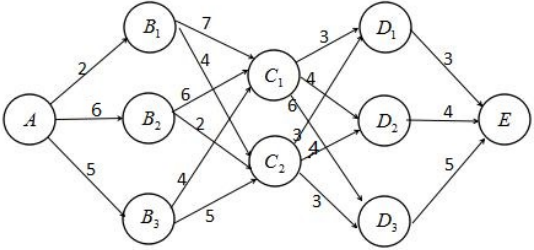
状态转移方程是确定过程由一个状态到另一个状态的演变过程。在确定性过程中，一旦某阶段的状态和决策为已知，下阶段的状态便完全确定，即若给定第k阶段状态变量x_k的值，如果该段的决策变量u_k一经确定，第$k+1$阶段的状态变量x_{k+1}的值也就完全确定.

即x_{k+1} 的值随x_k 和u_k 的值变化而变化，这种确定的对应关系，记为

$$x_{k+1} = T_k(x_k, u_k), k = 1, 2, \cdots, n$$

上式描述了由k 阶段到$k+1$ 阶段的状态演变规律，称为状态转移方程（equation of state transition）. T_k 称为状态转移函数.

在例11.1 中状态转移方程为$x_{k+1} = u_k(x_k)$.



(6)指标函数和最优值函数

阶段指标是对过程中某一个阶段的决策效果衡量其优劣的一种数量指标，第k阶段初始状态为x_k且采取决策$u_k(x_k)$ 时的阶段指标记为$v_k(x_k, u_k(s_k))$。

指标函数(objective function)是衡量过程优劣的数量指标，它是定义在全过程和所有后部子过程上的数量函数，用

$$V_{k,n}(x_k, u_k, x_{k+1}, \cdots, x_{n+1})$$

表示，$k = 1, 2, \cdots, n$.

指标函数应具有可分离性，即$V_{k,n}$,可表为x_k, u_k, V_{k+1}

函数，记为

$$V_{k,n}(x_k, u_k, x_{k+1}, \cdots, x_{n+1})$$
$$= \varphi_k(x_k, u_k, V_{k+1,n}(x_{k+1}, \cdots, x_{n+1}))$$

并且函数φ_k对于变量$V_{k+1,n}$是严格单调的.

过程在第j 阶段的阶段指标取决于状态x_j和决策u_j，用$v_j(x_j, u_j)$ 表示。指标函数由$v_j(j = 1, 2, \cdots, n)$ 组成，常见的形式有：

阶段指标之和，即

$$V_{k,n}(x_k, u_k, x_{k+1}, \cdots, x_{n+1}) = \sum_{j=k}^{n} v_j(x_j, u_j),$$

阶段指标之积，即

$$V_{k,n}(x_k, u_k, x_{k+1}, \cdots, x_{n+1}) = \prod_{j=k}^{n} v_j(x_j, u_j),$$

阶段指标之极大（或极小），即

$$V_{k,n}(x_k, u_k, x_{k+1}, \cdots, x_{n+1})$$

$$= \max_{k \le j \le n} (min) v_j(x_j, u_j).$$

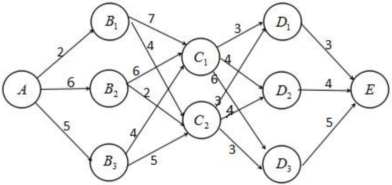
根据状态转移方程，指标函数$V_{k,n}$ 还可以表示为状态x_k和策略p_{kn} 的函数，即$V_{k,n}(x_k,p_{kn})$.

在x_k给定时，指标函数$V_{k,n}$对p_{kn} 的最优值称为最优值函数（optimal value function），记为$f_k(x_k)$，即

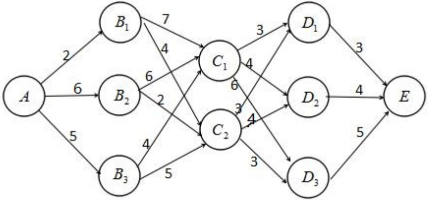
$$f_k(x_k) = opt\ V_{k,n}(x_k, p_{kn})$$

其中opt 可根据具体情况取max 或min .

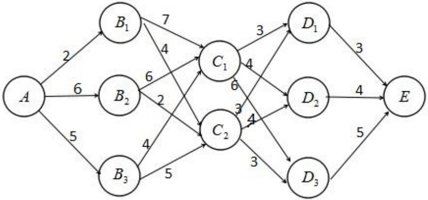
在不同的问题中，指标函数的含义是不同的，它可能是距离利润、成本产品的产量或资源消耗等。如：在例11.1中，指标函数$V_{k,n}$就表示在第k 阶段由点x_k至终点E的距离。



用$d_k(x_k,u_k)=v_k(x_k,u_k)$表示在第$k$阶段由点$x_k$到点$x_{k+1}=u_k(x_k)$的距离，如$d_2(B_1,C_1)=7$，就表示在第2 阶段中由点$B_1$ 到点C_1的距离为7。



这里最优值函数$f_k(x_k)$表示从第k阶段点x_k到终点E的最短距离，如$f_2(B_1)$ 就表示从第2 阶段中的点B_1到点E 的最短距离.



谢　谢!

(7) **动态规划方法的基本思想**

现在, 结合求解例11.1来介绍动态规划方法的基本思想。经验告诉我们，最短路线有一个重要特性:

如果由起点A经过P 点和H 点而到达终点E是一条最短路线。则由点P 出发经过H 点到达终点E的这条子路线，对于从点P 出发到达终点的所有可能选择的不同路线来说，必定也是最短路线。

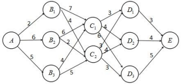
例11.1中, 若找到了

$$\boldsymbol{A \to B_1 \to C_2 \to D_1 \to E}$$

是由A 到E的最短路线, 则

$$\boldsymbol{C_2 \to D_1 \to E}$$

应该是由$\boldsymbol{C_2}$ 出发到$\boldsymbol{E}$ 点的所有可能选择的不同路线中的最短路线。



否则，从点P 到E点有另一条距离更短的路线存在，把它和原来最短路线由A 点到达P 点的那部分连接起来，就会得到一条由A 点到E点的新路线，它比原来那条最短路线的距离还要短些。这与假设矛盾，是不可能的。

根据这一特性,

寻找最短路线的方法,

就是从最后一段开始,

用由后向前

逐步递推的方法,

求出各点到$\boldsymbol{E}$点
的最短路线,
最后求得由A点
到$\boldsymbol{E}$点的
最短路线。

动态规划思想与建模方法

所以，动态规划的方法

是从终点逐段

向始点方向

寻找最短路线

的一种方法。

以A 为始端，E为终端，从E到A 的解法称为逆序解法。以E为始端、A 为终端的从A 到E的解法称为顺序解法。顺序解法和逆序解法只表示行进方向的不同或对始端终端相反的定义。

但用动态规划方法
求最优解时,
都是在行进
方向规定后,

均要按照这个规定的

行进方向的逆向，

从最后一段

向前逆推计算，

逐段找出最优途径。

谢　谢!

下面按照动态规划的方法，将例11.1从最后一段开始计算，由后向前逐步推移至A 点。把问题分为4个阶段：

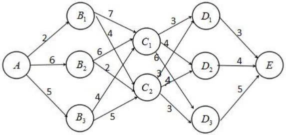
$k=1$：$A \to B$(可选B_1, B_2, B_3);

$k=2$：$B \to C$(可选C_1, C_2);

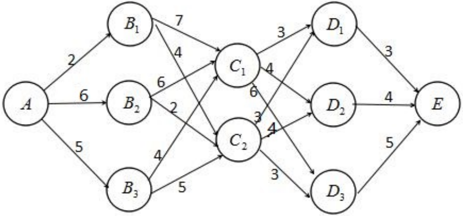
$k=3$：$C \to D$(可选D_1, D_2, D_3);

$k=4$：$D \to E$.

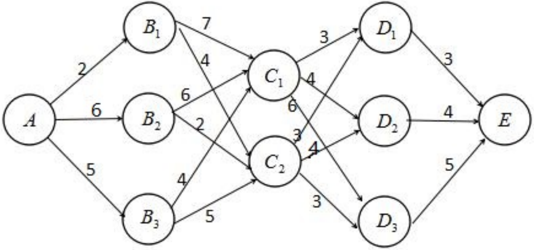
各为一个阶段。



(1)k $=$ 4时，由D_1、D_2、D_3到终点均只有一条路线，有$f_4(D_1)=3, f_4(D_2)=4, f_4(D_3)=5$。最短为$f_4(D_1)=3$，即相应的决策为$u_4(D_1)=E$。



(2)k $=$ 3时，出发点有C_1 、C_2两个。若从C_1出发，则有三个选择：一是到D_1 ;二是到D_2;三是到D_3



则：

$$f_3(C_1) = \min \begin{Bmatrix} d_3(C_1, D_1) + f_4(D_1) \\ d_3(C_1, D_2) + f_4(D_2) \\ d_3(C_1, D_3) + f_4(D_3) \end{Bmatrix}$$

$$= \min \begin{Bmatrix} 3+3 \\ 4+4 \\ 6+5 \end{Bmatrix} = 6 \tag{1}$$

其相应的决策为$u_3(C_1) = D_1$。这说明，由C_1至终点E的最短距离为6 ,其最短路线是

$C_1 \rightarrow D_1 \rightarrow E$

同理, 从C_2出发, 有

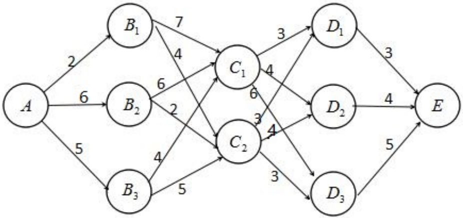
$$f_3(C_2) = \min \begin{Bmatrix} d_3(C_2, D_1) + f_4(D_1) \\ d_3(C_2, D_2) + f_4(D_2) \\ d_3(C_2, D_3) + f_4(D_3) \end{Bmatrix}$$

$$= \min \left\{ \begin{array}{c} 3+3 \\ 4+4 \\ 3+5 \end{array} \right\} = 6 \qquad (2)$$

其相应的决策为$u_3(C_2) = D_1$。这说明：由C_2至终点E的最短距离为6，其最短路线是

$$C_2 \to D_1 \to E$$

(3)k =2时，出发点有B_1、B_2 、B_3三个。若从B_1出发，则有两个选择：一是到C_1；二是到C_2，



则

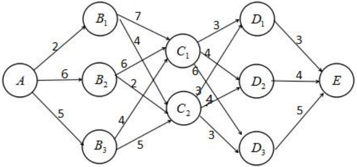
$$
\begin{aligned}
f_2(B_1) &= \min \left\{ \begin{array}{c} d_2(B_1, C_1) + f_3(C_1) \\ d_2(B_1, C_2) + f_3(C_2) \end{array} \right\} \\
&= \min \left\{ \begin{array}{c} 7+6 \\ 4+6 \end{array} \right\} = 10
\end{aligned} \tag{3}
$$

其相应的决策为$u_2(B_1) = C_2$。

这说明，由B_1至终点E的最短距离为10 ,其最短路线是

$$B_1 \to C_2 \to D_1 \to E$$

同理, 从B_2出发,



有

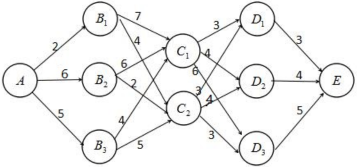
$$f_2(B_2) \ = \ \min\left\{ \begin{array}{c} d_2(B_2, C_1) + f_3(C_1) \\ d_2(B_2, C_2) + f_3(C_2) \end{array} \right\}$$

$$= \min\begin{Bmatrix} 6+6 \\ 2+6 \end{Bmatrix} = 8 \tag{4}$$

其相应的决策为$u_2(B_2) = C_2$。这说明，由B_2至终点E的最短距离为8 ,其最短路线是

$$B_2 \to C_2 \to D_1 \to E$$

同理, 从B_3出发,



有

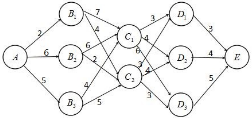
$$f_2(B_3) = \min\left\{\begin{array}{c} d_2(B_3, C_1) + f_3(C_1) \\ d_2(B_3, C_2) + f_3(C_2) \end{array}\right\}$$

$$= \min \left\{ \begin{array}{c} 4+6 \\ 3+6 \end{array} \right\} = 9 \tag{5}$$

其相应的决策为$u_2(B_3) = C_2$。这说明，由B_3至终点E的最短距离为9 ,其最短路线是

$B_3 \to C_2 \to D_1 \to E$

(4)k=1时，出发点只有一个A 点,



则

$$f_1(A) \quad = \quad \min \left\{ \begin{array}{l} d_1(A, B_1) + f_2(B_1) \\ d_1(A, B_2) + f_2(B_2) \\ d_1(A, B_3) + f_2(B_3) \end{array} \right\}$$

$$= \min \begin{Bmatrix} 2+10 \\ 6+8 \\ 5+9 \end{Bmatrix} = 12 \qquad (6)$$

其相应的决策为$u_1(A) = B_1$。这说明，由A至终点E的最短距离为12 ,其最短路线是

$$A \to B_1 \to C_2 \to D_1 \to E$$

由此可求出最优决策函数序列$\{u_k\}$，即由

$u_1(A) = B_1,\ u_2(B_1) = C_2,$

$u_3(C_2) = D_1,\ u_4(D_1) = E$

组成一个最优策略。

因而, 找出相应的

最短路线为

$AB_1C_2D_1E$,

相应的最短距离为12.

由此可见，

根据动态规划方法的

逆序解法，

它们的动态规划

基本方程

可如下来表述：

设指标函数是取

各阶段指标的

和的形式，即

$$\sum_{j=k}^{n} v_j(x_j, u_j)$$

其中$v_j(x_j, u_j)$表示第j段的指标。

它显然是满足

指标函数三个性质的。

所以上式可写成

$$V_{k,n} = v_k(x_k, u_k) + V_{k+1,n}[x_{k+1}, \cdots, x_{n+1}]$$

当初始状态给定时,
过程的策略就被确定,
则指标函数也就确定了。
因此, 指标函数
是初始状态和策略的函数。

可记为$\boldsymbol{V_{k,n}[x_k, p_{k,n}(x_k)]}$。

故上面递推关系又可写成

$$\boldsymbol{V_{k,n}[x_k, p_{k,n}] = v_k(x_k, u_k) + V_{k+1,n}[x_{k+1}, p_{k+1,n}]}$$

其子策略$p_{k,n}(x_k)$

可看成是

由决策$u_k(x_k)$

和$p_{k+1,n}(x_{k+1})$

组合而成。

即$p_{k,n}=\{u_k(x_k),p_{k+1,n}(x_{k+1})\}$

如果用$p_{k,n}^*(x_k)$表示

初始状态为x_k的

后部子过程

所有子策略中的

最优子策略,

则最优值函数为

$$\begin{aligned} f_k(x_k) &= V_{k,n}[x_k, p^*_{k,n}(x_k)] \\ &= opt_{p_{k,n}} V_{k,n}[x_k, p_{k,n}(x_k)] \end{aligned} \tag{7}$$

而

$$opt_{p_{k,n}} V_{k,n}[x_k, p_{k,n}(x_k)]$$

$$= opt_{u_k, p_{k+1,n}} \{v_k(x_k, u_k) + V_{k+1,n}(x_{k+1}, p_{k+1,n})\}$$

$$= opt_{u_k} \{v_k(x_k, u_k) + opt_{p_{k+1,n}} V_{k+1,n}\}$$

但

$$f_{k+1}(x_{k+1}) = opt_{p_{k+1,n}} V_{k+1,n}(x_{k+1}, p_{k+1,n})$$

所以

$$f_k(x_k) = opt_{u_k \in U_k(x_k)}[v_k(x_k, u_k) + f_{k+1}(x_{k+1})],$$

$$k = n, n-1, \cdots, 1$$

边界条件为$f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$。

这就是动态规划

逆序解法的

基本方程。

式中$x_{k+1} = T_k(x_k, u_k)$,

其求解过程,

根据边界条件,

从$k = n$ 开始,

由后向前逆推,

从而逐步可求得

各段的最优决策

和相应的最优值,

最后求出$f_1(x_1)$时,

就得到整个

问题的最优解。

谢　谢!

3 案例分析

3.1线性动态规划案例分析

案例一、生产计划问题

问题背景：对于例11.2工厂生产某种产品，每单位（千件）的成本为1（千元），每次开工的固定成本为3（千元），工厂每季度的最大生产能力为6（千件）.

案例分析

经调查，市场对该产品的需求量第一、二、三、四季度分别为2，3，2，4（千件）. 如果工厂在第一、二季度将全年的需求都生产出来，自然可以降低成本（少付固定成本费），但是对于第三、四季度才能上市的产品需付存储费，每季每千件的存储费为0.5（千元）.

还规定年初和年末这种产品均无库存．试制定一个生产计划，即安排每个季度的产量，使一年的总费用即生产成本和存储费最少．

这类生产计划问题（Production planning problem），阶段按计划时间自然划分，状态定义为每阶段开始时的储存量x_k，决策为每个阶段的产量u_k，记每个阶段的需求量（已知量）为d_k，则状态转移方程为

$$x_{k+1} = x_k + u_k - d_k, x_k \geq 0, k = 1, 2, \cdots, n, (11.3)$$

【模型构建】

设每阶段开工的固定成本费为a，生产单位数量产品的成本费为b，每阶段的产量为u_k，那么每阶段的生产成本为$a+bu_k$。每阶段单位数量产品的储存费为c，每阶段开始时的储存量为x_k，那么每阶段的储存费为cx_k。

最后阶段指标为阶段的生产成本和储存费之和，即

$$v_k(x_k, u_k) = cx_k + \begin{cases} a + bu_k, u_k > 0 \\ 0 \end{cases} \tag{11.4}$$

指标函数V_{kn}为v_k之和。最优值函数$f_k(x_k)$为从第k段的状态x_k出发到过程终结的最小费用，满足

$$f_k(x_k) = min\left[v_k(x_k, u_k) + f_{k+1}(x_{k+1})\right], \qquad (11.5)$$

$$k = n, \cdots, 1$$

其中允许决策集合U_k由每阶段的最大生产能力决定.

案例分析

若设过程终结时允许存储量为$\boldsymbol{x_{n+1}^0}$，则终端条件是

$$\boldsymbol{f_{n+1}(x_{n+1}^0)=0}$$

（11.3）—（11.5）构成该问题的动态规划模型.

案例二、资源分配问题

问题背景： 机器可以在高、低两种负荷下生产。u台机器在高负荷下的年产量是$g(u)$，在低负荷下的年产量是$h(u)$，高、低负荷下机器的年损耗率分别是a_1和$b_1(0 < b_1 < a_1 < 1)$.

案例分析

现有m台机器，要安排一个n年的负荷分配计划，即每年初决定多少台机器投入高、低负荷运行，使n年的总产量最大。

案例分析

如果进一步假设$g(u) = \alpha u$，$h(u) = \beta u (\alpha > \beta > 0)$，即高、低负荷下每台机器的年产量分别为$\alpha$和$\beta$，结果将有什么特点.

【问题分析】

年度为阶段变量$\boldsymbol{k=1,2,\cdots,n}$。状态$\boldsymbol{x_k}$ 为第k 年初完好的机器数，决策$\boldsymbol{u_k}$为第k 年投入高负荷运行的台数。当$\boldsymbol{x_k}$ 或$\boldsymbol{u_k}$ 不是整数时，将小数部分理解为一年中正常工作时间或投入高负荷运行时间的比例.

【模型构建】

机器在高、低负荷下的年完好率分别记为a 和b，则由于高负荷下机器的年损耗率是a_1，所以$a = 1 - a_1$，

由于低负荷下机器的年损耗率是b_1，所以$b = 1 - b_1$

因为$0 < b_1 < a_1 < 1$所以有$a < b$.

因为第k 年投入高负荷运行的机器台数为u_k、低负荷运行的台数为$x_k - u_k$，机器在高、低负荷下保持完好的台数分别记为au_k和$b(x_k - u_k)$，来年可以投入。所以状态转移方程是

$$x_{k+1} = au_k + b(x_k - u_k) \tag{11.6}$$

　　由于u台机器在高负荷下的年产量是$g(u)$，在低负荷下的年产量是$h(u)$，第k年投入高负荷运行的机器台数为u_k、低负荷运行的台数为$x_k - u_k$，于是在高、低负荷下的年产量分别是$g(u_k)$和$h(x_k - u_k)$。

案例分析

所以用阶段指标v_k 表示第k 年的产量，则有

$$v_k(x_k, u_k) = g(u_k) + h(x_k - u_k) \tag{11.7}$$

案例分析

指标函数是阶段指标之和，最优值函数$f_k(x_k)$ 满足

$$f_k(x_k) = max\left[v_k(x_k, u_k) + f_{k+1}(x_{k+1})\right]$$

$$0 \le x_k \le m, k = n, \cdots, 2, 1 \qquad (11.8)$$

及自由终端条件

$$f_{n+1}(x_{n+1}) = 0, 0 \le x_{n+1} \le m \qquad (11.9)$$

【模型求解】

当v_k中的g,h用较简单的函数表达式给出时，对于每个k 可以用解析方法求解极值问题。特别，若

$$g(u)=\alpha u, \qquad h(u)=\beta u,$$

(11.8)中的$[v_k(x_k,u_k)+f_{k+1}(x_{k+1})]$将是$u_k$的线性函数，

最大值点必在区间$0 \le u_k \le x_k$的左端点$u_k = 0$或右端点$u_k = x_k$取得，即每年初将完好的机器全部投入低负荷或高负荷运行.

谢　谢!

3.2非线性动态规划案例分析

案例三、投资分配

问题背景： 某公司拥有资金10万元，若投资于项目$i(i=1,2,3)$的投资金额为x_i时，其收益分别为

$$g_1(x_1)=4x_1,\ g_2(x_2)=9x_2,\ g_3(x_3)=2x_3^2,$$

问应该如何分配投资数额才能使总收益最大？

【问题分析】

这是一个与时间无明显关系的静态最优化问题，可列出其静态模型为

$$max z = 4x_1 + 9x_2 + 2x_3^2$$

s.t.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \end{cases}$$

【模型构建】

1.分阶段：

设阶段变量k表示依次对第k个项目投资，因此，阶段总数$n=3(k=1,2,3)$;

2.状态变量：

用s_k表示已经对第1至第k-1个项目投资后的剩余资金；即第k段初拥有的可以分配给第k到第3个项目的资金额(单位：万元);

案例分析

3.决策变量：

用x_k表示第k个项目投资的资金数量(单位:万元);

4.状态转移方程为:

$$s_{k+1} = s_k - x_k;$$

5.决策变量的取值：

$$0 \leq x_k \leq s_k;$$

6.基本方程：

最优指标函数$f_k(s_k)$表示第k阶段，初始状态为s_k时，从第k到第3个项目所获最大收益

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max\limits_{0 \le x_k \le s_k} \{g_k(x_k) + f_{k+1}(s_{k+1})\}, \\ k = 1, 2, 3 \\ f_4(s_4) = 0 \end{cases}$$

案例分析

【模型求解】

(1)当k=3时：

$$f_3(s_3) = \max_{0 \le x_k \le s_3} \{2x_3^2\}$$

取$x_3^* = s_3$得

$$f_3(s_3) = \max_{0 \le x_k \le s_3} \{2x_3^2\} = 2s_3^2$$

案例分析

(2)当$k=2$时：

$$f_2(s_2)=\max_{0\le x_k\le s_2}\{9x_2+f_3(s_3)\}$$
$$=\max_{0\le x_k\le s_2}\{9x_2+2s_3^2\}$$
$$=\max_{0\le x_k\le s_2}\{9x_2+2(s_2-x_2)^2\}$$

令$h_2(s_2, x_2) = 9x_2 + 2(s_2 - x_2)^2$,

由$\frac{dh_2}{dx_2} = 9 + 4(s_2 - x_2)(-1) = 0$

解得：$x_2 = s_2 - \frac{9}{4}$。而$\frac{d^2h_2}{dx_2^2} = 4 > 0$，所以$x_2 = s_2 - \frac{9}{4}$是极小点。极大值只可能在$[0, s_2]$端点取得，

案例分析

$f_2(0) = 2s_2^2$或$f_2(s_2) = 9s_2$.

当$2s_2^2 = 9s_2$时解得$s_2 = \frac{9}{2}$

所以当$s_2 > \frac{9}{2}$时，$2s_2^2 > 9s_2$，此时应有$x_2^* = 0$

当$s_2 < \frac{9}{2}$时，$2s_2^2 < 9s_2$，此时应有$x_2^* = s_2$

案例分析

(3)当$k=1$时：

$$f_1(s_1)=\max_{0\le x_k\le s_1}\{4x_1+f_2(s_2)\}$$

当$s_2<\frac{9}{2}$时，这时取$f_2(s_2)=9s_2$,

$$f_1(10)=\max_{0\le x_k\le 10}\{4x_1+9s_1-9x_1\}$$

$$=\max_{0\le x_k\le 10}\{9s_1-5x_1\}=9s_1,$$

但此时$s_2 = s_1 - x_1 = 10 > \frac{9}{2}$,

矛盾，舍去.

当$s_2 > \frac{9}{2}$时，这时取$f_2(s_2) = 2s_2^2$,

$$f_1(10) = \max_{0 \leq x_k \leq 10} \{4x_1 + 2(s_1 - x_1)^2\},$$

令$h_1(s_1, x_1) = 4x_1 + 2(s_1 - x_1)^2$

由$\frac{dh_1}{dx_1}=4+4(s_1-x_1)\cdot(-1)=0$,

解之得驻点$x_1 = s_1 - 1$, 而$\frac{d^2h_1}{dx^2} = 1 > 0$。所以$x_1 = s_1 - 1$是极小值.

故极大值只能在$[0,10]$的端点取得，比较$[0,10]$两个端点的函数值. 当$x_1 = 0$时，$f_1(10) = 200$，而当$x_1 = 10$时，$f_1(10) = 40$.

$$x_1^* = 0,$$

$$s_2 = s_1 - x_1^* = 10,$$

$$s_2 > \frac{9}{2},$$

$$x_2^* = 0,$$

$$s_3 = s_2 - x_2^* = 10.$$

所以$x_3^* = s_3 = 10$，即全部资金投入第3个项目.

谢　谢!

案例四、背包问题

问题背景：

有n件物品，第i件物品的重量为ω_i，价值为c_i，背包限量为a。问此人应如何选择携带物品使价值总和最大？

【问题分析】

设x_i为第i种物品的装入件数；那么问题的数学模型是：

$$max \quad f=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

约束条件：

案例分析

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i x_i \le a \\ x_i = 0\text{或}1, (i = 1, 2, \cdots, n) \end{cases}$$

【模型构建】

下面用动态规划方法建立模型：设按可装入物品的n种类划分为n个阶段。状态变量s_k：表示用于装第k种物品的总质量;

案例分析

决策变量x_k：

$$x_k = \begin{cases} 1 & \text{物品k放入包中} \\ 0 & \text{物品k不放入包中} \end{cases}$$

状态转移方程：

$s_k = s_{k-1} + x_k \omega_k;$

允许决策的集合：

$x_k = 0, 1;$

目标函数$f_k(s_k)$：

案例分析

当重量不超过s_k时，背包中可以装下第一种到第k种物品的最大价值

$$\begin{cases} f_k(s_k) = \max\limits_{x_k=0,1} \{c_k x_k + f_{k-1}(s_k - x_k\omega_k)\}, \\ 2 \le k \le n \\ f_1(s_1) = \max\limits_{x_1=0,1} c_1 x_1, k = 1 \end{cases}$$

最后求出$f_n(a)$即为所求的最大值.

谢　谢!