

## 习题 3

## 一、应用积分思想建模

1. 某企业想购买一台设备, 该设备成本为 5000 元,  $t$  年后该设备的报废价值为  $S(t) = 5000 - 400t$  (元), 使用该设备  $t$  年时可使企业增加收入  $850 - 40t$  (元), 若年利率为 5%, 计算连续复利, 企业应该在什么时候报废设备? 此时总利润的现值是多少?

2. (水电投资项目的投资回收期) 有一家大型水电投资项目, 投资总成本为  $10^5$  万元, 竣工后每年可得收入  $5.5 \times 10^4$  万元, 若年利率为 5%, 计算连续复利, 求投资回收期及该投资为无限期时纯收入的贴现值.

3. (完成订单所需成本的现值) 某公司在 2002 年底接到一份将于 2003 年 10 月交付的订单, 公司在 2003 年初开始生产. 公司的成本由生产成本和存储成本构成, 设在 2003 年第  $t$  个月底公司的累积生产量 (即存货量, 单位: 吨) 为:  $Q(t) = 1200(e^{0.005t} - 1) - t$  ( $0 \leq t \leq 10$ ), 公司在时刻单位时间内的生产成本为  $500[Q'(t)]^2$  元, 其中  $Q'(t)$  为生产率, 即单位时间内的产量, 存储成本为每月每吨货物 50 元, 折现率为 0.005, 并计算连续复利, 求公司总成本的现值.

4. (10 年后酒店利润问题) 外资公司管理层期望今后  $t$  年其利润增长率为  $1 + t^{\frac{2}{3}}$  (10 万美元/年), 该公司经营的是连锁酒店, 由于酒店不断进行革新及改善和新酒店的开张, 该公司今后 10 年利润的增长率可为  $t - 2\sqrt{t} + 4$  (10 万美元/年), 假定该公司按现有增长率进行, 那么在今后 10 年能得到的利润比期望的增加多少?

5. (指数增长模型) 如果经济量  $y$  随时间  $t$  连续变化, 函数关系为  $y = f(t)$ ,  $f(t) > 0$  且可导, 则  $y$  在时刻  $t$  的增长率 (growth rate) 定义为:  $G = \frac{f'(t)}{f(t)}$  (即  $y$  的变化率  $y'$  相对于  $y$  的相对变化速度), 用百分数表示. 如果  $y = y_0 e^{kt}$ ,  $k$  为常数, 则可求得增长率为  $G = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{y_0 \cdot k \cdot e^{kt}}{y_0 e^{kt}} = k$ , 可见任意时刻增长率为常量  $k$  时,  $y$  以增长率  $k$  呈连续的指数增长, 这就是指数增长模型 (exponential growth model).

(1) 如果世界人口以每年 2.6% 的速度呈连续的指数增长, 需要多少年人口将翻番?

(2)江苏省 1990 年人口数为 6766.9 万人, 假定人口数连续以 0.8%的速度呈指数增长, 计算江苏省 1990-2000 年的平均人口数.

6. (新工人学习曲线)在电视机、电冰箱、汽车等行业中, 装配工人的工作是一种重复性的熟练运动, 在这些行业中, 新工人的学习过程如下: 刚开始的时候由于技术不熟练, 生产单位产品需要较多的劳动时间, 随着不断的工作, 新工人的熟练程度逐步提高, 生产单位产品所需的劳动时间越来越短; 当工人达到完全熟练程度以后, 生产单位产品所需劳动时间就会稳定在一个定值.

设  $x$  为新工人累计完成的生产量,  $y$  表示他生产第  $x$  个单位产品所需的劳动时间, 根据统计分析,  $y$  一般可表示为如下形式:

$$\begin{cases} y = Cx^k, x \leq A \\ y = CA^k, x > A \end{cases} \quad (C > 0, A > 0, -1 \leq k < 0)$$

试分析这个函数所反映的新工人的学习过程 (通常被称为学习曲线 (learning curve), 又称练习曲线、经验曲线).

7. (估计超市的客流量)一家新开张的大型超市刚举办完开业庆典, 庆典期间进行酬宾活动以吸引顾客, 共接待顾客 5 万人. 对超市客流量的研究表明, 在  $A$  个第一次来超市的新顾客中, 在  $t$  周后的一周内还将有  $Af(t)$  个顾客来超市购物, 这里  $f(t) = e^{-\frac{1}{10}t}$ . 超市管理部门估计以后每周越有新顾客 2000 人. 试估计从现在开始 20 周后的一周内 (即从现在开始的第 21 周内)的客流量.

8. (洛伦茨曲线与基尼系数)在判断某一社会收入分配的平均程度时, 洛伦茨曲线是最常用的工具, 基尼系数是最常用的指标 (基尼是 20 世纪初意大利经济学家). 我们利用下图来说明基尼系数 (或称洛伦茨系数)的计算

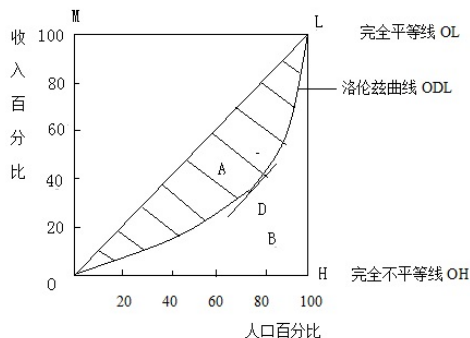


图 3.5

图中横轴 OH 表示人口 (按收入由低到高排列) 的累计百分比, 纵轴 OM 表示收入的累计百分比, 三角形 OHL 的面积为最大不平等面积.

从图中可以看出当面积 A 为 0 时, 即曲线 ODL (称为洛伦茨曲线 (Lorenz curve), 方程为  $M=L(p)$ ) 与对角线 OL 重合 (称为完全平等线), 则表示社会收入分配完全平等. 例如 70% 的社会成员平均占有 70% 的社会收入; 如果面积 A 接近三角形 OHL 的面积时 (或 B 的面积接近 0, 其中 B 为洛伦茨曲线 ODL 和折线 OHL 所围曲边三角形的面积), 即曲线 ODL 几乎成为折线 OHL, 则表示社会收入分配完全不平等, 例如接近 1% 的社会成员几乎占有 100% 的社会收入.

一个国家的社会收入分配既不会完全平等, 也不会完全不平等, 而是介于两者之间. 一般地, 收入分配不平等的程度则由曲线 ODL (洛伦茨曲线) 与对角线 OL (完全平等线) 的偏离程度的大小所决定, 即由面积 A 的大小所决定 (因此, 经济学上称 A 为不平等面积). 为了便于比较和准确刻画, 经济学上采用不平等面积 A 占最大不平等面积  $A+B$  的比例来衡量社会收入分配的不平等程度. 这个比值在经济学上称为基尼系数 (或称洛伦兹系数), 通常用 G 表示, 则  $G = \frac{A}{A+B}$ , 所以计算基尼系数的关键在于求出面积 A, B 的值.  $A=0$ , 基尼系数  $G=0$ , 分配绝对平均;  $B=0$ , 基尼系数  $G=1$ , 分配绝对不平均. A 越接近于 0 (或 1), 分配越平均 (或不平均), 贫富差距越小 (或大).

若  $L'(p_0) = 1$  时, 表示在点  $(p_0, M_0)$  处, 当人口累积比例值  $p_0$  增加 1% 时, 占社会收入的比例值  $M_0 = L(p_0)$  也增加 1%, 说明在人口累积中处于此位置的人的收入恰好是社会平均收入, 而处于此累积人口位置之下的  $p_0\%$  的人的收入是在社会平均收入水平之下的.

例如: 某城市对统计调查所得到的社会收入分配数据进行分析后知, 其洛伦茨曲线近似由  $L(p) = p^{5/3}$  表示.

- (1) 求基尼系数;
- (2) 该城市的贫富差距的情况如何呢?
- (3) 讨论有多少人的收入在社会平均收入之下?

联合国有关组织规定: 若基尼系数低于 0.2 表示社会收入分配绝对平均; 0.2 ~ 0.3 表示社会收入分配比较平均; 0.3 ~ 0.4 表示社会收入分配相对合理; 0.4 ~ 0.5 表示社会收入分配差距较大; 0.6 以上表示社会收入分配差距悬殊.

## 二、应用导数思想建模

1. (弹性分析方法) 试分析: (1) 需求的价格弹性; (2) 需求的收入弹性; (3) 收益的价格弹性; (4) 供给的价格弹性.

2. 在英国, 假设对新能源汽车需求的价格弹性  $E_d = -1.2$ , 需求的收入弹性  $E_m = 3.0$ , 计算:

- (1) 其他条件不变, 价格提高 3% 对需求的影响;
- (2) 其他条件不变, 收入增加 2% 对需求的影响;

(3)假设价格提高 8%，收入增加 10%，1980 年的汽车销售量为 800 万辆，利用有关弹性系数的数据估计 1981 年新汽车的销售量。

3. 设汽油的需求价格弹性为 -0.15，其价格现为每升 500 元，试问汽油价格上涨多少才能使其消费量减少 10%。

4. 甲公司生产皮鞋，现为每双 600 元，2016 年的销售量每月大约 10000 双。2016 年 1 月其竞争者乙公司把皮鞋价格从每双 650 元降到 550 元。甲公司 2 月份销售量跌到 8000 双。若甲公司皮鞋价格的弧弹性是 -2.0，乙公司把皮鞋价格保持在 550 元，甲公司想把销售量恢复到每月 10000 双的水平，问每双要降价到多少？

5. 某企业计划年度预计生产并销售产品 25000 件。上年每件销售价格为 385 元，销售量为 18500 件，价格弹性为 -3.8。经测定该产品的需求还是为线性函数  $Q = a - bp$  ( $a, b > 0$  且为常数， $Q$  为销售量， $P$  为价格)。问计划产品价格应定为多少较为合理？

6. 设某产品产量为  $q$  (单位:吨)时的总成本函数 (单位:元)为  $C(q) = 1000 + 7q + 50q^2$ ，求

(1)产量为 100 吨时的总成本；

(2)产量为 100 吨时的平均成本；

(3)产品从 100 吨增加到 225 吨时,总成本的平均变化率；

(4)产品为 100 吨时,总成本的变化率 (边际成本)。

7. 在一个某种商品的需求量对价格、收入和其它变量的回归方程中，收入的回归系数是 10。

(1)计算当收入为 100000 元，商品销售量是 80000 单位时，该商品的收入弹性；

(2)如果该商品销售量从 80000 上升到 90000 单位，收入从 100000 元上升到 110000 元，商品的收入弹性是多少？该商品属于哪种产品？

### 三、初等优化方法

1. (薄膜渗透率的确定)某种医用薄膜有允许一种物质的分子穿透它 (从高浓度的溶液向低浓度的溶液扩散) 的功能, 在试制时需测定薄膜被这种分子穿透的能力. 测定方法如下: 用面积为  $S$  的薄膜将容器分成体积分别为  $V_A, V_B$  的两部分, 如下图所示. 在两部分中分别注满该物质的两种不同浓度的溶液, 此时, 该物质分子就会穿过薄膜从高浓度溶液向低浓度溶液扩散. 已知通过单位面积薄膜分子扩散的速度与膜两侧溶液的浓度差成正比, 比例系数  $K$  表征了薄膜被该物质分子穿透的能力, 称为渗透率. 定时测量容器中薄膜某一侧的溶液浓度值, 可以确定  $K$  的数值, 试用数学建模的方法解决  $K$  值的求解问题.

2. (森林救火模型)消防站接到火警后, 立即决定派消防队员前去救火. 一般情况下, 派往的队员越多, 火被扑灭的越快, 火灾所造成的损失越小, 但是救援的开支就越大; 相反, 派往的队员越少, 救援开支越少, 但灭火时间越长, 而且可能由于不能及时灭火而造成更大的损失, 那末消防站应派出多少队员前去救火呢?