线性与整数规划方法

谭　忠

厦门大学数学科学学院

目录

1 源头问题与当今应用

1.1 催生运筹学产生的源头问题

1.2 运筹学的当今应用

2 线性规划思想与建模方法

2.1 线性规划方法

2.1.1 线性规划的基本概念

2.1.2 前述问题的建模举例

2.2 整数规划方法

2.3 灵敏度分析

3 案例分析

1 源头问题与当今应用

1.1催生运筹学诞生的源头问题

运筹学（管理科学）的萌芽，

来自于人们对数学的敬仰.

源头问题与当今应用

有人认为，公元前212年，
叙拉古请阿基米德设计的
用以打破罗马人
海上封锁的计划，
就可以看做是运筹学的开端.

源头问题与当今应用

在中国，人们也认为，
战国李冰父子
在四川修建的都江堰，
就是古代的系统工程.

源头问题与当今应用

北宋真宗年间丁胃

修皇宫的故事：

取土、运料

和处理垃圾的

系统思维方法

源头问题与当今应用

体现了运筹学的思想.

我国古代的《孙子兵法》、

春秋战国时代

诸侯战争的案例:

《围魏救赵》、
三十六计等
都是对策论
辉煌的篇章.

源头问题与当今应用

1909 年，丹麦数学家厄兰，

帮助电话公司

解决了哥本哈根

街道上的电话线继线问题，

源头问题与当今应用

发表论文

《概率论与电话会话》,

成为创立现代

排队论概念的先驱.

源头问题与当今应用

1924年，贝尔实验室的

道奇、罗米格、休哈特

创造了统计抽样表，

用于取样检验

源头问题与当今应用

和质量控制,

这是概率论

用于管理的先声,

但当时并未被人们所接受.

到1928 年,

贝尔实验室的

另一成员弗莱,

出版了《概率及其工程应用》,

源头问题与当今应用

对排队论的
统计基础理论
做出了贡献.

源头问题与当今应用

在这一方面
成果较多的
要数费希尔，
他在1925年集中
研究统计理论，

提出了χ^2 测验、

贝叶斯统计、

抽样理论、

试验设计

等一系列统计方法.

源头问题与当今应用

另外，1916 年

英国的兰彻斯特

曾提出过军事行为中

双方人力、火力数量

与战争结果关系的计算公式，

源头问题与当今应用

这是现代军事运筹

最早提出的战争模型.

同年，美国的爱迪生

也曾设计过一个
海军作战程序,
分析了商船在海战中
走Z 形路线的优缺点.

源头问题与当今应用

但是，在当时的
社会环境条件下，
无论是在军事方面，
还是在工商企业的
管理方面，

源头问题与当今应用

都对这些成果不屑一顾.

数学方法和管理实践,

在当时并未能够结合起来.

源头问题与当今应用

但是，多数人认为，由于数学手段的局限性，
特别是过去一直缺乏对
不确定的模糊概念进行数学求解的方法，
加之没有大型计算工具，
所以到19世纪运筹学尚未能诞生.

源头问题与当今应用

运筹学/管理科学的真正诞生并投入实际应用，是在第二次世界大战期间.

英国人在战争中

最早采用运筹方法.

源头问题与当今应用

当时，为了对付

德国的空袭，

解决英伦三岛的

防空协同作战问题，

源头问题与当今应用

英国成立了

第一批运筹学小组.

他们主要研究

复杂的战略战术问题，如：

源头问题与当今应用

1）如何合理运用雷达有效地对付德军的空袭

2）对商船如何进行编队护航，使船队遭受德军潜艇攻击时损失最少

3）在各种情况下如何调整反潜深水炸弹的爆炸深度，才能增加对德军潜艇的杀伤力等.

美国也很快发现了运筹学的潜力，国防研究委员会主席科南特(James B.Conant)和参谋长联席会议新武器装备委员会主席布什(Vannevar Bush)，在美国海军和第八轰炸机司令部建立了运筹学小组，进行护航和反潜作战、轰炸德国、轰炸日本的方案设计，并取得了相应成果.

谢　谢!

2、运筹学的当今应用

本章只介绍运筹学的一个重要分支：线性规划的应用，主要介绍如何应用线性规划和整数规划方法建模，来解决实际问题。运筹学的其他内容在后续章节介绍。

源头问题与当今应用

线性规划问题：

该类问题的目标函数

和约束条件都是

变量的线性函数。比如：

例9.1.1仓库里

存有20m长的钢管，

现场施工需要

100根6m长和

源头问题与当今应用

80根8m长的钢管，

问最少需要

领取多少根

20m 长的钢管?

源头问题与当今应用

分析： 用一根

20m长的钢管，

截出8m管或6m管

的方法只有三种：

源头问题与当今应用

截法1：一根长管截成两根8m管的根数；

截法2：一根长管截成一根8m管和两根6m管；

截法3：一根长管截成三根6m管.

设x_1为采用截法1所花费长管的根数；

x_2为采用截法2所花费长管的根数；

x_3为采用截法3所花费长管的根数；

该问题的目标函数为

$$minn = x_1 + x_2 + x_3$$

源头问题与当今应用

现场施工需要

80根8m长和

100根6m长的钢管,

即约束条件为

源头问题与当今应用

$$
\begin{aligned}
&2x_1 + x_2 \geq 80, \\
&2x_2 + 3x_3 \geq 100, \\
&x_i \geq 0, i = 1, 2, 3
\end{aligned}
$$

$$minn = x_1 + x_2 + x_3$$

s.t.

$$2x_1 + x_2 \geq 80,$$

$$2x_2 + 3x_3 \geq 100,$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3$$

例9.1.2 成本收益最优问题

在某建筑工程施工中

需要制作10000套钢筋，

每套钢筋由2.9m，2.lm

和1.5m三种不同长度的

钢筋各一根组成，

它们的直径

和材质相同.

源头问题与当今应用

目前在市场上
采购到的同类
钢筋的长度
每根均为7.4m.

源头问题与当今应用

问应购进多少根

这样长的钢筋才能

满足工程的需要?

例9.1.3 网络配送最优问题

某公司从两个

产地$\boldsymbol{A_1}$，$\boldsymbol{A_2}$

将物品运往三个销地

$\boldsymbol{B_1}$，$\boldsymbol{B_2}$，$\boldsymbol{B_3}$，

源头问题与当今应用

各产地的产量、

各销地的销量

和各产地运往

各销地每件物品的

运费如表9.1，

(表格9.1)

	销地B_1	销地B_2	销地B_3	产量
产地A_1	13	15	12	78
产地A_2	11	29	22	45
销量	43	35	45	产销平衡

问如何调运,

才能使得总运输费最小?

例9.1.4 投资组合优化问题

某部门在今后五年内

考虑给下列项目投资:

源头问题与当今应用

项目A：从第一年

到第四年每年年初

都可以投资，

并于次年年末

收回本利115%；

项目B：第三年年初
可以投资，
到第五年年末
收回本利125%，
但规定最大额
不超过4万元；

源头问题与当今应用

项目C：第二年年初

可以投资，

到第五年年末

收回本利140%，

但规定最大额

不超过3万元；

项目D：五年内
每年年初都可以
购买公债，

并于当年年末归还，

并加利息6%

即收回本利106%，

源头问题与当今应用

该部门现有资金10万元，

问如何确定

这些项目的投资额，

才使得第五年年末

拥有的资金的

本利总额最大?

例9.1.5 排班问题

某昼夜服务的

公交系统

每天每4小时

所需的值班人数如下表9.2,

(表格9.2)

班次	时间段	所需人数
1	6:00-10:00	60
2	10:00-14:00	70
3	14:00-18:00	60
4	18:00-22:00	50
5	22:00-2:00	20
6	2:00-6:00	30

源头问题与当今应用

这些值班人员

在某一时段

开始上班后

要连续工作8h

(包括轮流用餐时间在内),
问该系统至少
需多少名工作人员
才能满足值班的需要.

源头问题与当今应用

现实工作中

还有许许多多的问题

可以应用

线性规划方法解决。

谢　谢!

2 线性规划思想与建模方法

在现实生产活动中，我们常常遇到需要合理利用资源或使某个(多个)因素达到最优值的问题，这些要寻求优化的因素又是其他因素的线性组合，

这些要寻求优化的因素称为**目标函数**，

其他因素称为**决策变量**.

在什么条件下可以最优呢？

这样的条件就称为**约束条件**.

我们将这类问题称为**线性规划问题**.

当决策变量一定要求为整数时，

就称之为**整数规划问题**.

解决这些问题的方法

称为**线性规划方法**

一、线性规划方法

为了解决这个问题，

我们需要引入

线性规划的知识

1、线性规划的基本概念

线性规划的定义应为：

在$m(m \geq 1)$个线性等式

或不等式方程组约束条件下，

求$n(n \geq 2)$个
非负的决策变量,
使一个线性的目标函数
达到极值的数学规划.

线性规划模型

由决策变量、

目标函数和

约束条件等构成.

在约束条件范围内变化

且能影响（或限定）

目标函数大小的变量，

称为**决策变量**.

决策变量取非负值.

约束条件:

包括非负变量

及线性方程

或线性不等式两部分.

人们希望获得的
最优目标值，
该目标值可以
表达成决策变量的
一个线性组合函数，
称为**目标函数**.

根据需要，

目标函数

可以取极大化、

极小化两种类型.

线性规划的一般形式：

$$max(min)Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq (\geq, =) b_i, i = 1, 2, \cdots, m$$

$$x_{ij} \geq 0, i, j = 1, 2, \cdots, n$$

式中x_j为决策变量，

c_j为价值系数；

a_{ij}为技术系数；

b_i为资源限量.

单纯形法是求解线性规划问题的最常用、最有效的算法之一.

我们希望线性规划模型建立后使用Matlab求解.

谢　谢!

2、前述问题的建模举例

例9.1.2 成本收益最优问题

【问题重述】

要制作10000套钢筋，

每套钢筋由2.9m，2.1m

和1.5m三种不同长度的
钢筋各一根组成，
其直径和材质相同.
仅有长度均为
7.4m的钢筋

问应购进多少根
这样长的钢筋才能
满足工程的需要?

解：【问题分析】

该问题最简单的

处理方法是:

在每根7.4m长的钢筋上

截取2.9m，2.1m和

1.5m的短钢筋各一根，

剩下料头0.9m，

共用去10000根长钢筋.

但这样做不经济，

若改用套裁

就会节约原材料.

为此，必须分析

共有多少种不同的裁法，

因此将该问题可能的

裁料方案用表9.3表示

(表格9.3)

下料长度/m	方案	1	2	3	4	5	6	7	8
2.9		2	1	1	1	0	0	0	0
2.1		0	2	1	0	3	2	1	0
1.5		1	0	1	3	0	2	3	4
料头长度/m		0.1	0.3	0.9	0	1.1	0.2	0.8	1.4

(1)决策变量

设$x_i(i=1,2,\cdots,8)$表示

按第i种裁料方案

所需7.4m长的

原材料根数.

(2)目标函数

至少购进多少根

7.4m长的钢筋

才能满足工程的需要，

即所需7.4m长的

钢筋根数最少

因此目标函数为

$$Min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

$$+x_5 + x_6 + x_7 + x_8$$

(3)约束条件

①2.9m长的钢筋10000根:

$$\mathbf{2}\boldsymbol{x}_{\mathbf{1}}+\boldsymbol{x}_{\mathbf{2}}+\boldsymbol{x}_{\mathbf{3}}$$

$$+\boldsymbol{x}_{\mathbf{4}} \geq \mathbf{10000}$$

②2.1m长度的钢筋10000根:

$$\boldsymbol{2x_2 + x_3 + 3x_5 + 2x_6}$$

$$\boldsymbol{+x_7 \geq 10000}$$

③1.5m长度的钢筋10000根:

$$\boldsymbol{x_1 + x_3 + 3x_4 + 2x_6}$$

$$\boldsymbol{+3x_7 + 4x_8 \geq 10000}$$

④非负:

$$x_i \geq 0(i = 1,2,3,4,5,6,7,8)$$

【模型构建】

$$Min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 10000 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_5 + 2x_6 + x_7 \geq 10000 \\ x_1 + x_3 + 3x_4 + 2x_6 + 3x_7 + 4x_8 \geq 10000 \\ x_i \geq 0 (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) \end{cases}$$

例9.1.3 网络配送最优问题

【问题重述】

产地A_1，A_2

销地B_1，B_2，B_3，

	销地B_1	销地B_2	销地B_3	产量
产地A_1	13	15	12	78
产地A_2	11	29	22	45
销量	43	35	45	产销平衡

问如何调运，

才能使得总运输费最小?

解:【问题分析】

知道每件物品的运费,

又需要总运费最少,

自然需要知道

运输的物品数量. 因此

(1)决策变量

设$\boldsymbol{x_i (i=1,2,3)}$分别表示

从产地$\boldsymbol{A_1}$运往销地

$\boldsymbol{B_1}$、$\boldsymbol{B_2}$、$\boldsymbol{B_3}$的物品数量，

$x_j(j = 4, 5, 6)$分别表示

从产地A_2运往

销地B_1、B_2、B_3的物品数量.

(2)目标函数

总运输费最小，即

$$
\begin{aligned}
Min z = & 13x_1 + 15x_2 + 12x_3 \\
& + 11x_4 + 29x_5 + 22x_6
\end{aligned}
$$

(3)约束条件

①产地A_1: $x_1 + x_2 + x_3 = 78$

②产地A_2: $x_4 + x_5 + x_6 = 45$

③销地B_1: $x_1 + x_4 = 43$

④销地B_2: $x_2 + x_5 = 35$

⑤销地B_3: $x_3 + x_6 = 45$

⑥非负: $x_i \geq 0 (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$

【模型构建】

$$Min z = 13x_1 + 15x_2 + 12x_3$$
$$+11x_4 + 29x_5 + 22x_6$$

$$
s.t.\begin{cases}
x_1 + x_2 + x_3 = 78 \\
x_4 + x_5 + x_6 = 45 \\
x_1 + x_4 = 43 \\
x_2 + x_5 = 35 \\
x_3 + x_6 = 45 \\
x_i \geq 0 (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)
\end{cases}
$$

例9.1.4 投资组合优化问题

【问题重述】

某部门在今后五年内考虑给下列项目投资:

项目A：从第一年到第四年每年年初都可以投资，并于次年年末收回本利115%；

项目B：第三年年初可以投资，到第五年年末收回本利125%，但规定最大额不超过4万元；

项目C：第二年年初可以投资，到第五年年末收回本利140%，但规定最大额不超过3万元；

项目D：五年内每年年初都可以购买公债，并于当年年末归还，并加利息6%即收回本利106%，：

	项目A	项目B	项目C	项目D
第一年	投			买公债当年年末归还
第二年	投、收		投	买公债当年年末归还
第三年	投、收	投		买公债当年年末归还
第四年	投、收			买公债当年年末归还
第五年	收	收	收	买公债当年年末归还

该部门现有资金10万元，
问如何确定
这些项目的投资额，
才使得第五年年末
拥有的资金的
本利总额最大？

【问题分析】

目标：本利总额最大，

自然需要知道

每个项目投资额多少时

可以达到这个目标.

如何通过这个目标

将决策变量引入？

(1)决策变量

设$\boldsymbol{x_i(i=1,2,3,\cdots)}$

为投资额(万元),

根据给定的条件,

将决策变量列于表格9.4

	项目A	项目B	项目C	项目D
第一年	x_1			x_7
第二年	x_2		x_6	x_8
第三年	x_3	x_5		x_9
第四年	x_4			x_{10}
第五年				x_{11}

(2)约束条件

①第一年初：

由于只有项目A和

项目D可以投资，

因此应把10万元

资金全投出去，

于是有:

$$x_1 + x_7 = 10$$

②第二年初：

由于项目A

要次年年末

才可以收回投资，

因此第二年初的资金

只有第一年年初

对项目D投资后，

在年末收回的本利106%，

而投资项目有A,C,D，

于是有:

$$x_2 + x_6 + x_8 = 106\% x_7$$

③第三年初:

年初的资金为

第二年初对项目D投资后,

在年末收回的本利$106\%x_8$

以及第一年初

对项目A投资后,

在次年年末

收回本利$115\% x_1$,

而投资项目有A,B,D,

于是有:

$$\boldsymbol{x_3 + x_5 + x_9}$$

$$\boldsymbol{= 115\% x_1 + 106\% x_8}$$

④第四年初：

年初的资金为

第三年初对项目D投资后，

在年末收回的本利$106\% x_9$

以及第二年初

对项目A投资后，

在次年年末

收回本利$115\%x_2$，

而投资项目有A、D,

于是有:

$$\boldsymbol{x_4 + x_{10} = 115\% x_2 + 106\% x_9}$$

⑤第五年初：

年初的资金为

第四年初对项目D投资后，

在年末收回的本利$106\%x_{10}$

以及第三年初

对项目A投资后，

在次年年末

收回本利$115\%x_3$，

而投资项目只有D,

于是有:

$$x_{11} = 115\% x_3 + 106\% x_{10}$$

⑥项目B投资

不超过4万元:

$$\boldsymbol{x_5 \leq 4}$$

⑦项目C投资

不超过3万元:

$$x_6 \leq 3$$

⑧非负:

$$x_i \geq 0 (i = 1, \cdots, 11)$$

(3)目标函数

第五年年末

拥有的资金的本利

总额最大,

而第五年年末的本利
获得有四项:
第四年初对项目A投资后,
在次年年末
收回的本利$115\% x_4$;

第三年初

对项目B投资后，

在年末收回的

本利$125\% x_5$;

第二年初

对项目C投资后,

在年末收回的

本利$140\%x_6$;

第五年初

对项目D投资后,

在年末收回的

本利$106\% x_{11}$.

于是得到目标函数:

$$\begin{aligned} Max z = {} & 115\% x_4 + 125\% x_5 \\ & + 140\% x_6 + 106\% x_{11} \end{aligned}$$

【模型构建】

$$Maxz = 115\%x_4 + 125\%x_5 + 140\%x_6 + 106\%x_{11}$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_7 = 10 \\ x_2 + x_6 + x_8 = 106\%x_7 \\ x_3 + x_5 + x_9 = 115\%x_1 + 106\%x_8 \\ x_4 + x_{10} = 115\%x_2 + 106\%x_9 \\ x_{11} = 115\%x_3 + 106\%x_{10} \\ x_5 \le 4 \\ x_6 \le 3 \\ x_i \ge 0 (i = 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11) \end{cases}$$

谢　谢!

二、整数规划方法

变量取整数值的规划

称为**整数规划**.

所有变量都

取整数的规划

称为**纯整数规划**，

部分变量

取整数的规划

称为**混合整数规划**.

所有变量

都取0、1两个值的规划

称为$\mathbf{0-1}$ **规划**,

部分变量

取0、1 两个值的规划

称为$\mathbf{0-1}$**混合规划.**

例9.2.1 背包问题

有一只背包，

最大装载重量

为W公斤，

现有k种物品，

每种物品数量无限.

第i种物品

每件重量为w_i公斤，

价值为v_i元.

每种物品

各取多少件装入背包，

使其中物品的

总价值最高？

解:【问题分析】

直接提出了

未知变量:

每个物品各取多少件,

这就是决策变量.

(1)决策变量

设取第i种物品

$\boldsymbol{x_i}$件$(\boldsymbol{i = 1, 2, \cdots, k})$.

(2)目标函数

使其中物品的

总价值最高

$$\max z = v_1x_1 + v_2x_2 + \cdots + v_kx_k$$

(3)约束条件

最大装载重量

为$\boldsymbol{W}$公斤：

$$\boldsymbol{w_1 x_1} + \boldsymbol{w_2 x_2} + \cdots + \boldsymbol{w_k x_k} \le \boldsymbol{W}$$

非负：

$$x_1, x_2, \cdots, x_k \geq 0$$

为整：

$x_1, x_2, \cdots, x_k$为整数

【模型构建】

$$\max z = v_1 x_1 + v_2 x_2 + \cdots + v_k x_k$$

$$\begin{cases} w_1 x_1 + w_2 x_2 + \cdots + w_k x_k \leq W \\ x_1, x_2, \cdots, x_k \geq 0 \\ x_1, x_2, \cdots, x_k \text{为整数} \end{cases}$$

具体设背包容量
为50公斤，
三种物品的
重量和价值如下表：

(表格9.5)

物品	1	2	3
单件价值（元/件）	17	72	35
单件总量（公斤/件）	10	41	20

设三种物品

分别取x_1, x_2, x_3件，

这个背包问题的

整数规划模型为

$$\max z = 17x_1 + 72x_2 + 35x_3$$

$$\begin{cases} 10x_1 + 41x_2 + 20x_3 \leq 50 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ x_1, x_2, x_3 \text{为整数} \end{cases}$$

如果忽略变量的
整数要求，
以上问题是一个
线性规划问题，

它的最优解为

$x_1 = 0, x_2 = \frac{50}{41},$

$x_3 = 0,$

最优解的目标函数值

为$z = 87.8.$

而整数规划的最优解是

$x_1 = 1, x_2 = 0,$

$x_3 = 2,$

目标函数值为$z = 87.$

例9.2.2 厂址选择问题

在5个地点中

选3处建生产

同一产品的工厂.

在这5个地点

建厂所需投资，

占用农田，

建成以后的生产能力等

数据如下表格9.6

地点	1	2	3	4	5
所需投资（万元）	320	280	240	210	180
占用农田（亩）	20	18	15	11	8
生产能力（万吨）	70	55	42	28	11

现在有总投资800万元，

占用农田指标60亩，

应如何选择厂址，

使建成后

总生产能力最大？

解：【问题分析】

(1)决策变量

五个地点可选可不选，

因此设五个$0-1$变量

$$\boldsymbol{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5},$$

其中

$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{表示在}i\text{地不建厂} \\ 1 & \text{表示在}i\text{地建厂} \end{cases}$$

$$i = 1, 2, 3, 4, 5$$

(2)目标函数

选择合适建厂地址，

使得建厂后

总生产能力最大

$$\max z = 70x_1 + 55x_2 + 42x_3 + 28x_4 + 11x_5$$

(3)约束条件

总投资额度：

$$\boldsymbol{320x_1 + 280x_2 + 240x_3 + 210x_4 + 180x_5 \leq 800}$$

占用农田指标：

$$20x_1 + 18x_2 + 15x_3 + 11x_4 + 8x_5 \le 60$$

5个地方中只选3处：

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3,$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = 0, 1$$

【模型构建】

整数规划模型为

$$\max z = 70x_1 + 55x_2 + 42x_3 + 28x_4 + 11x_5$$

$$\begin{cases} 320x_1 + 280x_2 + 240x_3 + 210x_4 + 180x_5 \le 800 \\ 20x_1 + 18x_2 + 15x_3 + 11x_4 + 8x_5 \le 60 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 = 0, 1 \end{cases}$$

这是一个$0-1$规划问题,

最优解为

$$x_1=1, x_2=0,$$

$$x_3=1, x_4=1,$$

$x_5 = 0$,

$max z = 100$万吨,

即在地点1、3、4建厂,

地点2、5不建厂.

总投资770万元，

占用农地46 亩，

总生产能力

可以达到140 万吨，

由以上例题可以看出，
整数规划模型
在实际问题的建模过程中
确实起着很重要的作用.

谢　谢!

三、灵敏度分析

在前面讨论线性规划问题时，价值系数c_j、各种资源的消耗额a_{ij}、右端常数(限制量)b_i 都是确定值．但在实际中，这些系数并非不变. 例如, 价值系数往往会随着市场营销情况而波动，资源限制量往往是通过预测甚至是估算得到的.

因此可以如下提问：

当这些系数有一个或几个发生变化时，已求得的线性规划问题的最优解会有什么变化？

或者这些系数在什么范围内变化时，线性规划问题的最优解保持不变？

如果系数的变化超出了范围，怎样才能以最简便的方法、最少的工作量求出新的最优解？

当资源限制量有所放宽的情况下，会带来多少效益？

这些都称为**灵敏度分析**，类似于动力系统的解对初值的连续依赖性.

例9.2.4 资源分配问题

某工厂利用

A、B、C三种资源

生产甲、乙两种产品，

已知生产单位产品

所需的各种

资源的数量

以及利润如表9.8 所示.

(表格9.8)

	甲	乙	资源限量
资源A	1	2	8kg
资源B	4	0	16kg
资源C	0	4	12kg
利润（元/kg）	2	3	

该工厂生产甲产品

可获利2元/kg，

乙产品可获利3元/kg，问：

(1)如何安排生产计划获利最多？

(2)各资源可以从别处节省下来，如资源A的数量由8变为12，试分析对原最优计划有什么影响？

(3)又市场上某产品价格可能会改变，如问乙产品的利润在什么范围内变化时已经计算的最优生产方案不用改变？

(4)市场上有丙产品出售，经预测，生产1kg此产品需2kg资源A，6kg资源B，3kg资源C，利润为5元，问是否安排此产品的生产？

(5)生产产品的工艺结构可能会发生变化，如生产甲产品的工艺结构有了改进，生产1kg此产品需2kg资源A，5kg资源B，2kg资源C，利润为4 元，试分析对原最优计划有什么影响？

解：(1)设x_1表示
生产甲的数量，
x_2表示生产乙的数量，
则x_1, x_2是决策变量，

目标函数为

$$maxz = 2x_1 + 3x_2,$$

约束条件为

$$x_1 + 2x_2 \leq 8,$$

$$4x_1 \leq 16,$$

$$4x_2 \leq 12,$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2,$$

得到如下线性规划：

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2 \end{cases}$$

当甲、乙产品

分别为4kg和2kg时,

工厂利润最大

为$z^* = \mathbf{14.}$

下面就各种情况分别进行讨论：

1、资源限量变化的灵敏度分析

资源限量变化是指系数b_r发生变化，即

$$b'_r = b + \Delta b_r.$$

假设问题的

其它系数都不变.

可以通过列式求解

以了解资源限量变化

对最优解的影响.

考虑例9.2.4的第(2)问：

(2)各资源可以从别处节省下来，如资源A的数量由**8**变为**12**，试分析对原最优计划有什么影响？

解：资源A的数量由8变为12，得到：

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_j \ge 0, j = 1, 2 \end{cases}$$

求得该厂最优生产方案

应改为生产甲产品4kg,

生产乙产品3kg,

工厂利润为

$$z^* = \mathbf{17}\text{元}.$$

这表明增大资源$\boldsymbol{A}$,

利润提高到17元.

2、价值系数c_j的灵敏度分析价值系数变化是指系数c_j发生变化，考虑例9.2.4的第(3)问：

(3)市场上某产品价格可能会改变，如问乙产品的利润在什么范围内变化时已经计算的最优生产方案不用改变？

解：由MATLAB求解结果

知当乙产品的利润

$\boldsymbol{c_2}$在$[0,\ 4]$之间变化时，

最优生产方案不会改变.

3、技术系数a_{ij}变化的灵敏度分析分两种情况来讨论技术系数a_{ij}的变化，下面考虑例9.2.4的第(4)问来说明.

(4)市场上有丙产品出售，经预测，生产1kg此产品需2kg资源A，6kg资源B，3kg资源C，利润为5元，问是否安排此产品的生产？

解：首先设生产

丙产品x_3台，

于是得到如下线性规划:

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 8 \\ 4x_1 + 6x_3 \leq 16 \\ 4x_2 + 3x_3 \leq 12 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

这时得最优解：

$\boldsymbol{x_1 = 1, x_2 = 3/2,}$

$\boldsymbol{x_3 = 2}.$

总的利润为$33/2$元，

比原计划

增加了$5/2$元.

因此需要生产此产品.

4、生产产品的工艺结构变化的灵敏度分析考虑例9.2.4的第(5)问来说明:

(5)生产产品的工艺结构可能会发生变化，如生产甲产品的工艺结构有了改进，生产1kg此产品需2kg资源A，5kg资源B，2kg资源C，利润为4元，试分析对原最优计划有什么影响？

解：把改进

工艺结构的甲产品

看作产品甲$'$,

设x_1'为其产量.

得到如下线性规划:

$$\max z = 4x_1' + 3x_2'$$

$$\begin{cases} 2x_1' + 2x_2' \le 8 \\ 5x_1' \le 16 \\ 2x_1' + 4x_2' \le 12 \\ x_j' \ge 0, j = 1, 2 \end{cases}$$

即应当生产产品

甲′ $16/5$单位，

生产乙产品$4/5$单位，

可获利$76/5$元，

利润相对原计划的

14元有提高,

因此可以改进

甲产品的工艺结构.

谢　谢!

3 案例分析

案例一、排班问题的求解：

每天每4小时

所需的值班人数如下表

案例分析

班次	时间段	所需人数
1	6:00-10:00	60
2	10:00-14:00	70
3	14:00-18:00	60
4	18:00-22:00	50
5	22:00-2:00	20
6	2:00-6:00	30

案例分析

这些值班人员

在某一时段

开始上班后

要连续工作8小时

案例分析

(包括轮流用餐时间在内),

问该系统至少

需多少名工作人员

才能满足值班的需要.

解：【问题分析】

在本例中，每一时段

上班的工作人员，

案例分析

既包括本时段

开始上班的人，

又包括上一时段

开始上班的人.

案例分析

因此，我们最关心的是
每个时段开始
上班的人员数.

案例分析

(1)决策变量

设$x_i(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$

为第i个时段

开始上班(注意!!!)

的人员数.

案例分析

(2)目标函数

该系统至少需多少人

才能满足值班的需要，即：

$$Minz = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

(3)约束条件

显然第一时段

开始上班人数

与第二时段

开始上班人数

是构成第二时间段的

全部工作人员

因此要≥ 70

才满足需要，即：

$$x_1 + x_2 \geq 70$$

同理有

$$x_2 + x_3 \geq 60$$

$$x_3 + x_4 \geq 50$$

案例分析

$$x_4 + x_5 \geq 20$$

$$x_5 + x_6 \geq 30$$

$$x_6 + x_1 \geq 60$$

【模型构建】

$$Min z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

案例分析

$$
s.t.\begin{cases}
x_1+x_2\geq 70\\
x_2+x_3\geq 60\\
x_3+x_4\geq 50\\
x_4+x_5\geq 20\\
x_5+x_6\geq 30\\
x_6+x_1\geq 60\\
x_i\geq 0(i=1,cdots,6)
\end{cases}
$$

案例二、指派问题的求解：

有一份中文说明书，

需译成英、日、德、俄

四种文字，

分别记为E、J、G、R.

案例分析

现有甲、乙、丙、丁四人.

他们将中文说明

翻译成不同语种的

说明书所需时间

如下表所示.

(表格9.7)

	E	J	G	R
甲	2	15	13	4
乙	10	4	14	15
丙	9	14	16	13
丁	7	8	11	9

案例分析

问应指派何人

去完成何工作，

使总时间最少?

案例分析

类似有：有n项加工任务，

怎样指派到

n台机床上

分别完成的问题；

案例分析

有n条航线,

怎样指定n个航班

去航行问题······

案例分析

对应每个指派问题，

需有类似上述的数据，

称为效率矩阵

或系数矩阵，

案例分析

其元素$c_{ij} > 0(i, j = 1, \cdots, n)$

表示指派第i人

去完成第j项任务时的

效率（或时间、成本等）.

案例分析

解：【问题分析】

(1)决策变量

引入变量x_{ij}；

其取值只能是1或0，

案例分析

并令

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{当指派第i人去完成第j项任务}\\ 0 & \text{当不指派第i人去完成第j项任务}\end{cases}$$

使总时间最短.

案例分析

因此，设表中值

用c_{ij}表示

第i行第j列位置

所需要的时间

或效率、成本等.

则问题要求极小化时数学模型是：

$$minz = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_i x_{ij} = 1 & j = 1, 2, \cdots, n \\ \sum_j x_{ij} = 1 & i = 1, 2, \cdots, n \\ x_{ij} = 0 \; or \; 1 \end{cases}$$

谢　谢!