一、初等代数方法建模

1. 某地区有三个重要产业，一个煤矿、一个发电厂和一条地方铁路.开采 1.0 元的煤，煤矿要支付 0.25 元的电费和 0.25 元的运输费．生产 1.0 元电力，发电厂要支付 0.65 元煤费和 0.05 元的运输费．创收 1.0 元的运输费，铁路要支付 0.55 元的煤费和 0.10 元的电费．在某一周内，煤矿接到外地金额为 50000 元的订货，发电厂接到外地金额为 2500 元的订货，外界对地方铁路没有需求，问：三个企业在这一周内总产值各为多少？

2. 设在一个大城市中的总人口是固定的．人口的分布则因居民在市区和郊区之间迁徙而变化.每年有 6%的市区居民搬到郊区去住，而有 2%的郊区居民搬到市区．假如开始时有 30%的

居民住在市区，70%的居民住在郊区，问十年后市区和郊区的居民人口比例是多少？30 年、50 年后又如何？

3. 现有一个木工，电工，油漆工，相互装修他们的房子，他们有如下协议:

(1) 每人工作 10 天 (包括在自己家的日子)，

(2) 每人的日工资一般的市价在 60 80 元之间，

(3) 日工资数应使每人的总收入和总支出相等.

表 4.1　第 3 题表格

	木工	电工	油漆工
木工家	2	1	6
电工家	4	5	1
油漆工家	4	4	3

求每人的日工资.

4. 人们对各种群体的基因的频率进行了研究. 假设有人报道了如下的相对频率，见下表.

表 4.2　第 4 题表格

	爱斯基摩人 f1i	班图人 f2i	英国人 f3i	朝鲜人 f4i
A	0.2914	0.1034	0.2090	0.2208
AB	0.0000	0.0866	0.0696	0.0000
B	0.0316	0.1200	0.0612	0.2069
O	0.6770	0.6900	0.6602	0.5723

问题: 一个群体与另一群体的接近程度如何？换句话说，就是要一个表示基因的“距离”的合宜的量度?

5. 交通流量问题：见图 4.1 中给出了某城市部分单行街道的交通流量 (每小时过车数)

假设：(1)全部流入网络的流量等于全部流出网络的流量；

(2)全部流人一个节点的流量等于全部流出此节点的流量.

试建立数学模型确定该交通网络未知部分的具体流量.

6. 平面图形的旋转和放缩都很容易用矩阵乘法实现，但是图形的平移并不是线性运算，不能直接用矩阵乘法表示. 现在要求用一种方法使平移、旋转、放缩能统一用矩阵乘法来实现.

7. 某试验性生产线每年一月份进行熟练工与非熟练工的人数统计, 然后将 $\frac{1}{6}$ 熟练工支援其他生产部门，其缺额由招收新的非熟练工补齐. 新、老非熟练工经过培训及实践至年终考核有 $\frac{2}{5}$ 成为熟练工. 假设第一年一月份统计的熟练工和非熟练工各占一半，求以后每年一月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比.

8. 金融机构为保证现金充分支付，设立一笔总额 5400 万的基金, 分开放置在位于 A 城和 B 城的两家公司，基金在平时可以使用，但每周末结算时必须确保总额仍然为 5400 万．经过相当长的一段时期的现金流动，发现每过一周，各公司的支付基金在流通过程中多数还留在自己的公司内，而 A 城公司有 10%支付基金流动到 B 城公司．B 城公司则有 12%支付基金流动到 A 城公司．起初 A 城公司基金为 2600 万，B 城公司基金为 2800 万．按此规律，两公司支付基金数额变化趋势如何? 如果金融专家认为每个公司的支付基金不能少于 2200 万．那么是否需要在必要时调动基金?

9. 经过统计，某地区猫头鹰和森林鼠的数量具有如下规律：如果没有森林鼠做食物，每个月只有一半的猫头鹰可以存活，如果没有猫头鹰作为捕食者，老鼠的数量每个月会增加 10%. 如果老鼠充足 (数量为 R)，则下个月猫头鹰的数量将会增加 0.4R．平均每个月每只猫头鹰的捕食会导致的 104 只老鼠的死亡数．试确定该系统的演化情况．(不考虑其他因素对猫头鹰和森林鼠的数量的影响．)

二、初等几何方法建模

1. 驾驶盲区问题：在汽车驾驶过程中会出现这种情况：在拥挤的道路变换车道与转弯时，后方或侧方突然有车辆或人出现，司机防范不及，造成车祸．试分析车祸原因，并给出解决方案．

汽车上共有内外三面后视镜，驾驶员通过这三面镜子来观察后面的车流情况，以决定何时可以转弯，而不会有危险发生．但是由于后视镜的尺寸都不是很大，这样使驾驶员能看到的范围就很小．需要看到的地方没办法看到，那块地方就是所谓的盲区．存在着盲区就存在着一定的安全问题，车祸出现的原因就在于此．若想避免此类车祸的发生，必须改善后视镜的设计，使盲区的范围缩小或者消失．

后视镜的角度虽然可调节，但一般都由司机固定在其最习惯的地方，即可观察到的区域范围已确定，如图 4.7 所示．

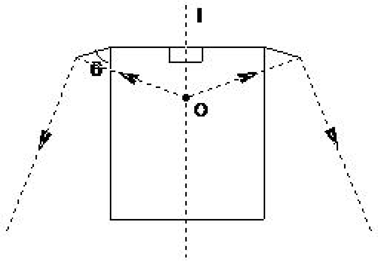

图 4.7

（1）设汽车为长方体，俯视为长方形，且关于直线 l 对称，司机位于其对称轴上一点（在车内）;

（2）假设两外后视镜与车身的夹角为 θ，此值固定不变；

（3）假设汽车所行驶的车道两旁分别只有一个车道．由对称性，我们只研究左侧车道上的车辆．

通常汽车所安装的后视镜均为平面镜，这样设计是为了使驾驶员观察到的物体不变形，符合人的视觉习惯，但缺点是视野较小．扩大视野是解决此问题的关键．众所周知，凸面镜的成像区域要比平面镜大很多，试考虑将平面镜换为凸面镜是否可以．

2. 四足动物的躯干与其体重之间的关系问题：四足动物的躯干与其体重之间有什么关系？此问题有一定的实际意义．比如在生猪收购站，工作人员希望能从生猪的身长估计出它的体重．把四足动物的躯干视为圆柱体，长度为 l，直径为 d，底面积为 s．如图 4.8 所示，将此圆柱体的躯干类比作一根支撑在四肢上的弹性梁，以便利用弹性力学的研究结果．

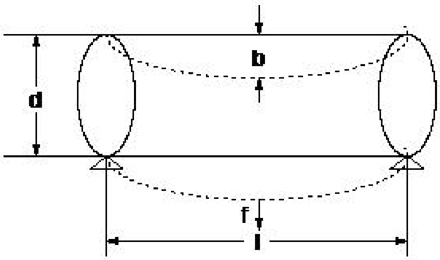

图 4.8

设动物在自身体重 f 作用下，躯干的最大下垂度为 b，也即是梁的最大弯曲度．建立了该问题的几何模型，可以用来判断动物的种类？

3. 病床能否顺利地推过拐角问题：如图 4.9 所示，在医院的外科手术室，往往需要将病人安置在活动病床上，沿走廊推到手术室或送回病房．然而有的医院走廊较窄，病床必须沿过道推过直角拐角．我们想知道标准的病床能否安适地推过拐角？为未来的医院走廊设计一个节省空间的方案，需求出病床可以顺利通过的走廊的最小宽度．

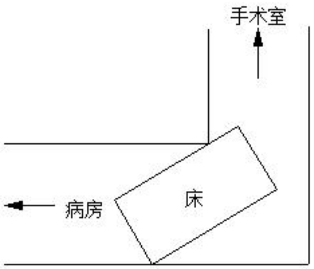

图 4.9

4. 数码相机定位：数码相机定位在交通监管（电子警察）等方面有广泛的应用.所谓数码相机定位是指用数码相机摄制物体的相片确定物体表面某些特征点的位置．最常用的定位方法是双目定位，即用两部相机来定位.对物体上一个特征点，用两部固定于不同位置的相机摄得物体的像，分别获得该点在两部相机像平面上的坐标.只要知道两部相机精确的相对位置，就可用几何的方法得到该特征点在固定一部相机的坐标系中的坐标，即确定了特征点的位置．于是对双目定位，精确地确定两部相机的相对位置就是关键，这一过程称为系统标定.

标定的一种做法是：在一块平板上画若干个点，同时用这两部相机照相，分别得到这些点在它们像平面上的像点，利用这两组像点的几何关系就可以得到这两部相机的相对位置．然而，无论在物平面或像平面上我们都无法直接得到没有几何尺寸的“点”．实际的做法是在物平面上画若干个圆（称为靶标），它们的圆心就是几何的点了．而它们的像一般会变形，如图 4.10 所示，所以必须从靶标上的这些圆的像中把圆心的像精确地找到，标定就可实现.

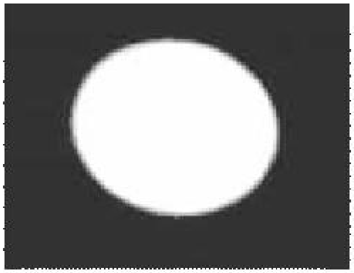

图 4.10

有人设计靶标如下，取 1 个边长为 100mm 的正方形，分别以四个顶点（对应为 A、C、D、E）为圆心，12mm 为半径作圆．以 AC 边上距离 A 点 30mm 处的 B 为圆心，12mm 为半径作圆，如图 4.11 所示.

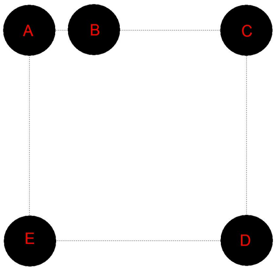

图 4.11

用一位置固定的数码相机摄得其像，如图 4.12 所示：

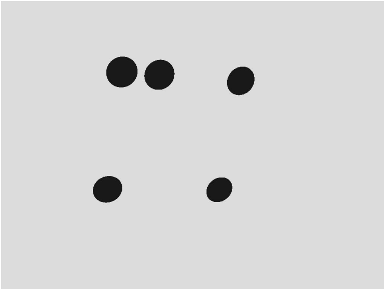

图 4.12

请你们：

（1）建立数学模型和算法以确定靶标上圆的圆心在该相机像平面的像坐标，这里坐标系原点取在该相机的光学中心，$x-y$ 平面平行于像平面；

（2）对由图 4.11、图 4.12 分别给出的靶标及其像，计算靶标上圆的圆心在像平面上的像坐标, 该相机的像距（即光学中心到像平面的距离）是 1577 个像素单位 (1 毫米约为 3.78 个像素单位)，相机分辨率为 1024×768；

（3）设计一种方法检验你们的模型，并对方法的精度和稳定性进行讨论；

（4）建立用此靶标给出两部固定相机相对位置的数学模型和方法.

5. 柏拉图问题：B 是一个细长条形的薄板，轴 O 是垂直于包含 B 的平面.B 以角速度 $\omega(t)$ 绕着轴 O 旋转.B 是被放在箱子 C 里面的，槽 F 跟 B 平行.盒子 C 里面有一个设备，包含了一盏灯和一个凹透镜.这个凹透镜能够把 B 板上的信息投影到屏幕 E.投影高为 H，H 等于 B 板上下切线距离.如果投影对光线敏感，开放槽 F，并让 B 以速度 V 绕轴 O 旋转，那么 B 的图像就会产生了．图像是一个丝带状的图形，我们称之为 B 的“运动图像”.

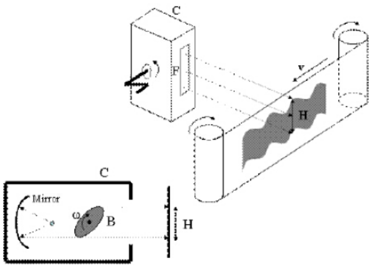

图 4.13　设备工作图

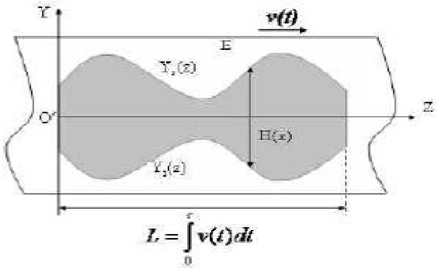

图 4.14　B 的投影

图像分别以 $Y_s(z)$ 与 $Y_i(z)$ 为上下界限，则宽度为 $H(z)=Y_s(z)-Y_i(z)$，那么以下问题产生了：

i)给定 B 的几何图形，角速度为 $w(t)$ 和线速度为 $v(t)$，如果以给定时间 t_0 下的 $H(z,t_0)=H(z)$.

ii)给定 $Y_s(z)$,$Y_i(z)$ 和 $H(Z_0)$，如何取 B 的几何形状？解是否唯一？

6. (刀具廓形的建模)复杂形状刀具种类繁多，包含各种立铣刀，螺旋锉等.以立铣刀为例.常见的有圆柱铣刀，圆锥头铣刀，带角圆锥铣刀等．这些刀具的一些共同特点就是刀刃位于简单回转面上，如圆柱面、圆锥面、球面等，因而可以用一个统一的模型来表示.通过选用不同的参数，即可得到相应的廓形.

如图 4.15 所示，刀体可分为柄部、颈部、工作部分，工作部分又分为杆部和头部，刀柄部分较简单，不同种类刀具的差异主要体现在刀头上．如图 4.16 所示，当 $R=R_2=h=\frac{D}{2},\alpha=\beta=R_1=0$ 时，为圆柱球头铣刀（图 4.17）；当 $\alpha=\beta=0,R+R_1=\frac{D}{2},R_2=R$ 时，为带圆角圆柱立铣刀（图 4.18）.

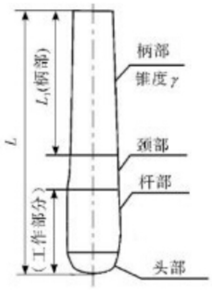

图 4.15　刀体结构图

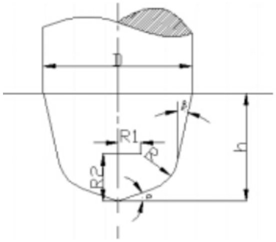

图 4.16　刀头统一模型

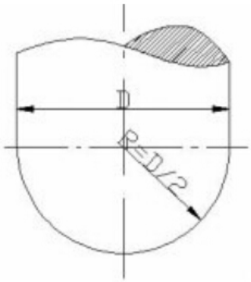

图 4.17　圆柱球头立铣刀

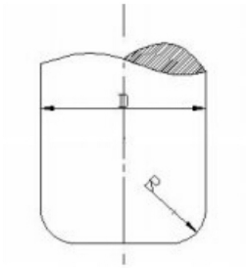

图 4.18　带圆角圆柱立铣刀

此模型可涵盖圆柱平端铣刀、圆锥平端铣刀、圆柱球头铣刀、带角圆柱球头铣刀、带角圆锥球头铣刀以及球头螺旋锉等多种刀具．选择一种刀具，建立几何模型来描述相应的廓形．

7. (淋雨量问题)人们外出行走，途中遇雨，走多快才会少淋雨呢？只考虑人在雨中沿直线从一处走向另一处进行时，雨的速度 (大小和方向)已知，问行人走的速度多大才能使淋雨量最少？

该问题的主要考虑因素：(i)降雨的大小；(ii)风 (降雨)的方向 (iii)路程的远近和人跑得快慢.

8. (冰山问题)英国最大的供水厂商泰晤士自来水公司正在考虑将北极冰山拖运到伦敦，以化解可能面临的百年来最严重的水荒. 该公司在伦敦举行的一次会议上说：“我们不得不考虑任何可能的方案，包括从北极拖运冰山及人工造雨. 尽管许多人可能觉得利用冰山的想法愚蠢荒唐，但不能排除这种可能性.”

那么拖运冰山这一想法可行吗？试建立数学模型解决这一问题，可否取代淡化海水的办法？

9. 试分析：2014 高教社杯全国大学生数学建模竞赛 B 题：创意平板折叠桌.