习题 8

1. 厦门鼓浪屿日光岩每天都游客满满，上山走台阶，下山也走台阶，不仅慢还非常危险。试设计一个滑滑梯让人仅在重力作用下最快到达山下.

2. 试求下列函数的微分 dF 和变分 δF，其中 a，b，c，d 均为常数.

(1)$F = a_0 x + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y'^2$；　(2)$F = y\sqrt{1+y'^2}$；　(3)$f = \sqrt{a + by' + cy'^2}$[3].

3. 试求下列泛函的一阶变分

(1)$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} y^2\sqrt{1+y'^2}dx$；　(2)$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1}(xy + y^2 - 2y^2y')dx$

4. 求下列泛函的极值曲线

(1)$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1}(y' + x^2y'^2)dx$，边界条件为 $y(x_0) = y_0$，$y(x_1) = y_1$；

(2)$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1}\frac{y'^2}{x^k}dx$，$k > 0$.

5. (火箭飞行问题)设有一质量为 m 的火箭作水平飞行，用 $s(t)$ 表示飞行距离，其升力 L 与重力 mg(g 为重力加速度)相平衡，空气阻力 R 与火箭飞行速度 $v = \frac{ds}{dt}$ 及升力 L 有以下天系：

$$R = av^2 + b_0L^2$$

式中，$a > 0$，$b > 0$ 为常数．试求火箭飞行的最大距离.

6. 求自原点 $(0,0)$ 到直线 $x + y - 1 = 0$ 的最速降线.

7. 求泛函 $J[y(x)] = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(y''^2 - 4y'^2)dx$ 满足条件 $y(0) = y(\frac{\pi}{4}) = 0$，$y'(0) = -1$，$y'(\frac{\pi}{4}) = 1$ 的极值曲线.

8. 在高超音速中零攻角下旋转体在流体中受到的压阻力可以精确地表示为

$$J[y(x)] = 2\pi q[y(x_f)]^2 + \int_0^{t_f - l}\frac{yu^2}{1 + u^2}dx$$

其中，$y(x)$ 表示旋转体各处半径，$u = -\frac{dy}{dx}$，a 是旋转体最大半径，l 是旋转体的长度，q 为给定常数．求其欧拉方程.

9. 求泛函 $J[y(x), z(x)] = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(y'^2 + z'^2 + 2yz)dx$ 满足条件 $y(0) = 0, y(\frac{\pi}{2}) = -1$，$z(0) = 0$，$z(\frac{\pi}{2}) = 1$ 的极值曲线.

10. 设质点以速度 $\nu = x$ 从 $A(x_0, y_0)$ 沿曲线 $y = y(x)$ 移动到 $B(x_1, y_1)$，求曲线 $y = y(x)$ 为何形状时质点移动时间最少？

11. 求过边界为两定点的曲线，使之绕横轴旋转而得面积为最小的旋转曲面.

12. 设受控系统为

$$\dot{x}(t) = u(t), \qquad x(0) = 1$$

性能指标为

$$J(u) = ax^2(t_f) + \int_0^{t_f}[u^2(t) + 1]dt$$

其中，$a > 1$ 为常数，求当 t_f 自由时的最优控制 $u^*(t)$ 及最优轨线 $x^*(t)$.

13. 在生产设备或科学仪器中长期运行的零部件，如滚珠、轴承、电器元件等会突然发生故障或损坏，即使是及时更换也已经造成了一定的经济损失．如果在零部件运行一定时期后，就对尚属正常的零件做预防性更换，以避免一旦发生故障带来的损失，从经济上看是否更为合算？如果合算，做这种预防性更换的时间如何确定呢？

14. (反应器控制问题)考虑在反应器重如何控制反应温度，使某一目标达到最优.

设有一连续反应 $x \to y \to z$，物料 x 的浓度记为 $x(t)$，物料 y 的浓度记为 $y(t)$，时刻 t 的反应温度为 $\theta(t)$，时间区间为 $[0, T]$，反应方程式为

$\begin{cases} \dot{x}(t) = -a(\theta)F(x), \\ \dot{y}(t) = na(\theta)F(x) - b(\theta)G(y) \end{cases}$ 其中,n 为常数,a, b, F, G 为已知函数，$x(0) = x_0, y(0) = y_0$，目标是指在 $[0,T]$ 时间内，控制反应温度，使物料 y 的浓度 $y(t)$ 最大（产量最高），另外，反应温度要求在一定范围内.$|\theta(t)| \leq k$ 试建立模型并求解.

15. 渔场中鱼的数量由鱼的自然增长和捕捞量决定．设鱼的增长服从 logistic 模型，而单位时间的捕捞量是当时鱼的总数的一个确定的函数．设 1 吨鱼的价格为 p，捕捞 1 吨鱼的费用是鱼总数的一个已知函数，鱼越多费用越省．试建立数学模型求使渔场长期效益最好的捕捞策略.

16. 设 $x(t)$ 为 t 时库存量，$u(t)$ 为 t 时生产率，$s(t)$ 为 t 时销售率，三者满足关系

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u(t) - s(t), x(0) = x_0 \\ x(t) \geq 0 \end{cases}$$

(1)求管理决策变量——生产率 $u(t)$,使生产费用和库存费用总的总和最小。

(2)求 $u(t)$,使 $u(t)$ 接近于理想的生产率 $\hat{u}(t)$,$x(t)$ 接近于理想的库存量 $\hat{x}(t)$。

17. 生产 -库存管理系统

设 $u(i)$ 表示某厂第 i 季度 (或月)生产产品的数量，$x(i)$ 表示该厂第 i 季度 (或月)的库存量，$S(i)$ 表示该厂第 i 季度 (或月)的销售量 (已知)．列出控制变量 $u(i)$，状态变量 $x(i)$ 与外生变量 $S(i)$ 之间应满足的状态方程并在满足该状态方程的条件下，求每个季度 (或月)的最优生产量 $u^*(i)$ 和相应的最优库存量 $x^*(i)$,使生产费用与库存费用之和为最小.

18. 月球精确软着陆三维球体动力学模型

月心惯性坐标系 $OXYZ$:原点位于月球中心,OZ 轴指向动力下降起始点，OX 轴位于环月轨道平面内切指向前进方向，OY 轴按照右手定则确定，着陆器在 $OXYZ$ 系下的位置，用极坐标 (r, α, β) 来表示,r 为月心到着陆器的距离矢量（rb 表示大小），α 和 β 表示经度和纬度.

轨道坐标系 $O'xyz$:原点位于着陆器的质心，$O'z$ 轴为月心指向着陆器方向，$O'x$ 轴位于当地水平面内指向着陆器运动方向，$O'y$ 轴按照右手定则确定．制动推力 F 的方向与着陆器本体轴重合，着陆器相对于轨道坐标系的姿态角分别为偏航角 ψ 和俯仰角 θ．ψ 绕正 $O'z$ 轴逆时针旋转为正，θ 绕正 $O'y$ 轴顺时针旋转为正．忽略月球的非球形摄动和自转影响，列出着陆器的质心运动方程为，并探讨使得着陆燃料最省的路线.

19. 考虑一个简单的经济机构，其资金储备 $K(t)$ 为唯一的生产因素．令 $F(K)$ 为该经济机构的产出速率（当 K 为资本储备时）．假定 $F(0) = 0, F(K) > 0, F'(K) > 0$, 以及当 $K > 0$ 时 $F''(K) < 0$．后一条件（即 $F''(K) < 0$）是指减少的边际资金生产率．这个产出既可以被消费也可以用来再投资，作为进一步的资金积累，令 (t) 为分配给消费者的产出量,$I(t) = F(K(t)) - C(t)$ 为投资量，δ 为定常的资本贬值率令 $u(c(t))$ 为消费的社会收益，ρ 表示社会回扣率，T 表示有限时间范围，并假定 $u'(0) = \infty$

(1)建立资本储备状态方程;

(2)建立一个选举任期 T 年的政府最优资金积累模型.

20. 物体在液体中作直线运动时，它所受到的阻力与运动速度的平方成正比．现假设该物体要在规定的时间 $[0, x_f]$ 内，从起点 $y(0) = 0$ 到达终点 $y(x_f) = S$，且终点速度不受限制．问该物体采用什么运动方式 $y(x)$，它所消耗的能量最少?

21. 矿山修路，一是要求连接各点的路程短，二是要求坡度不太大 (规定 $0 \le \frac{dz}{ds} \le R$，其中，$z$ 表示高度，s 表示弧长，R 为常数)，求最佳路线.

22. 最优推力方向角选择问题：设推力 ma 作用于质量为 m 的质点，质点在二维空间里的运动用惯性坐标系 x、y 来确定位置。质心的速度分量分别为 u 和 v，推力方向角 $\beta(t)$ 是控制变量，它是时间 t 的函数．设重力加速度和空气阻力忽略不计，推力加速度 a 是时间的已知函数．规定终端时间为 t_f，终端时间质点的垂直坐标为 h，如图 8.18 所示．试确定推力方向角随时间变化的规律，使终端时间的水平速度 $u(t_f)$ 达到最大.

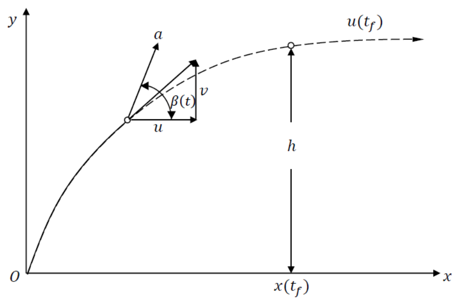

图 8.18

23. (气体流动的最小阻力问题)旋转体以速度 u 穿过稀薄气体在大气层外运动．要求设计旋转体的表面形状，使其具有最小阻力．假设气体分子与旋转体表面接触时无摩擦.

24. 求在抛物面 $2z = x^2$ 上求连接原点 $O(0,0,0)$ 和点 $B(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 的短程线.

25. 试求泛函 $J[y] = \frac{1}{2}\int_0^2 y''^2 dx$ 的最小值．这里 $y = y(x)$ 满足端点条件 $y(0) = 1$，$y'(0) = 1$，$y(2) = 1$，$y'(2) = 1$.

26. 试求泛函 $J[y, z] = \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1}(y^2 + z^2)dx$ 在固定边界条件 $y(x_0) = y_0$，$z(x_0) = z_0$，和约束条件 $y' = z$ 下的极值函数 $y = y(x)$ 和 $z = z(x)$.

27. 试在过定点 A、B 长为 L 的曲线中求出重心最低的一条悬线，设线密度 ρ 为常数．并求出当 $L = 2a\sinh 1$，$y_0(-a) = y_1(a) = a\cosh 1$ 时的曲线方程.

28. 在有定长 L 的所有光滑封闭曲线中，求围成最大面积的曲线.