习题 6

1. 思考下列问题如何列式：

(1)人口 P 关于时间的变化率与 P 的平方根成比例.

(2)汽船速度 v 关于时间的变化率与 v 的平方成比例.

(3)汽车的加速度 $\frac{dv}{dt}$ 与汽车速度和 $120km/h$ 的差成比例.

(4)在一个有固定人口的城市中，已经听到谣传的人总数 N 关于时间的变化率与还没有听到谣传的人总数成比例.

(5)在一个有固定人口数量 P 的城市中，被传染上一种传染疾病的总人数 N 关于时间的变化率与已经传染和没有传染疾病的总人数的乘积成比例.

2. 一个肇事司机声称他的行驶速度仅为 45 千米/小时，而警察给这台车做试验时发现，当车行驶速度为 45 千米/小时时开始制动，车行驶 10 米后停下来. 但肇事司机的制动距离为 21 米. 假设同样 (常数)的减速度，试通过构建数学模型确定他肇事之前实际行驶速度为多少?

3. (开发区人口预测模型)由于经济发展的需要，国家总是定期在一些地区设立特定优惠政策的各类开发区.比如由国务院和省、自治区、直辖市人民政府批准在城市规划区内设立的经济技术开发区、保税区、高新技术产业开发区、国家旅游度假区等.

开发区的居住人口与劳动人口是制定地区社会事业发展规划的基本依据. 人口的年龄、性别、社会结构，将直接关系到开发区社会的发展速度，层次和规模. 人口模型也决定教育事业、医疗卫生事业、体育事业、社会保障事业、文化事业的发展.试研究开发区人口科学合理的预测

模型.

4. (新产品推销模型)一种新产品问世，经营者关心产品的卖出情况．试根据两种不同的假设建立两种推销速度的模型.

假设 A：产品是以自然推销的方式卖出，换句话说，被卖出去的产品实际上起着宣传的作用，吸引着未购买的消费者.

假设 B：设需求量的上界为 Mx，假设经营者可通过其它方式推销产品，这样，产品的增长也与尚未购买产品的顾客有关.

5. 根据产品推销模型的结论，经营者在某产品的整个生产期间内，应对产量制定什么样的策略?

6. 在新产品推销的模型中，证明从 20% 的用户采用新产品到 80% 的用户采用此产品所用的时间为 $4ln2/(Mk)$.

7. (独家销售的广告模型)在信息社会中，广告在产品销售中起着极其重要的作用．当生产者产出一批新产品后，下一步便去思考如何更快更多地卖出该产品. 由于广告的大众性和快捷性，使它在促销活动中大受经营者青睐. 试建立广告与新产品销售关系的数学模型.

8. (竞争销售的广告模型)假设:

(1)两家公司销售同一产品，而市场容量 $M(t)$ 有限；

(2)每一公司增加它的销售量是与可获得的市场成正比的比例系数为 $C_i(i=1,2)$；

(3)设 $S_i(t)$ 是销售量，$i=1,2$，$N(t)$ 是可获得的市场.

试建立广告与该产品销售关系的数学模型.

9. (最佳生产批量问题)试建立数学模型分析在大批量生产的企业中，在同一台机器上轮换生产几种产品的情况下，每批应生产多少产品?全年应分几批生产?使得成本最低.

生产之前的准备工作所耗用的成本称为**准备成本**，例如调试机器、清理现场、准备工具、布置生产线、下达派工单、领取原材料等所用成本即为准备成本，仓库费、保险费、资金占用、利息支出、损坏等库存成本称为**持有成本**.

10. (订货库存问题)试在下列三种情况下建立数学模型，使订货与存货费用之和最小，应该何时订货?订购多少?

(1)恰当库存，不出现缺货的情形；

(2)出现缺货，需要补充进货情形；

(3)订货多者优惠的情形.

11. 对于技术革新的推广，在下列几种情况下建立模型.

(1)推广工作通过已经采用新技术的人进行，推广速度与已采用新技术人数成正比，推广是无限的.

(2)设人数有限，因而推广速度随着尚未采用新技术人数的减少而降低.

(3)在上述条件下还要考虑广告等媒介的传播作用.

12. 测定考古发掘物年龄最精确的方法之一，是大约在 1949 年 W.Labby 发明的碳 14(C^{14}) 年龄测定法，其主要原理是利用考古物木炭样品中的放射性碳 C^{14} 的原子衰变速率与现在木炭样品中 C^{14} 的衰变速率的差异，来测定考古物的年代，设 $R(t)$ 是当样品形成时的 C^{14} 衰变速率，通常用现在活树中木炭祥品的衰变率来替代，其 C^{14} 的衰变率平均为 $R(t)$ 个/克分; 设 $R(t)$ 是考古物木炭样品现在的 C^{14} 衰变率，则由

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t), \quad N(0) = N_0$$

可得到考古物年代的计算公式

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{R(0)}{R(t)}$$

其中 λ 是衰变常数，C^{14} 的半衰期 $T = 5568$ 年，而 $\lambda = \frac{ln2}{T}$，利用上述方法解决下列问题：

(1)1956 年，在我国西北某地发现了新石器时代居民遗址，从遗址发掘的考古物炭样品中，测得每克木炭每分钟 C^{14} 的平均衰变数为 3.06，试估计遗址的年代.

(2)70 年代中期从我国南方某处发掘的古墓中，测得墓中木制样品中的 C^{14} 是初始值的 78%.试估计该古墓的年代.

13. 现代哲学家卢梭 (Jean-Jacques Rousseau)基于以下假设建立了 18 世纪的英国的人口增长的一个简单模型：

(1)伦敦市的出生率低于英国农村的出生率；

(2)伦敦的死亡率高于英国农村的死亡率；

(3)由于英国的工业化，越来越多的人从农村移居到伦敦；

由此，卢梭推出，由于伦敦的出生率偏低，死亡率偏高，以及农村人口移居伦敦，因而英国的人口数量最终会变为零.请评价卢梭的这个结论.

14. 考虑在一个人口数量为 N 的孤岛上，有一种高传染性的疾病在蔓延.一部分到岛外旅游的居民回来使该岛感染了这种疾病.请预测在某时刻 t 将会被感染的人数 X.考虑以下模型，其中 $k > 0$ 为常数:

$$\frac{dX}{dt} = kX(N - X)$$

(a)列出这个模型所隐含的两条主要假设.这些假设有什么依据？

(b)画出 dX/dt 关于 X 的图形；

(c)若初始被感染人数为 $X_1 < N/2$，画出 X 关于 t 的图形；若初始被感染人数为 $X_2 > N/2$，画出 X 关于 t 的图形；

(d)把 X 作为 t 的函数，解出前面给出的模型；

(e)由 (d)，当 t 趋于无穷时求 X 的极限.

(f)设岛上的人口有 5000 人.在传染期的不同时刻被感染人数如下表

天数t	2	6	10
被感染的人数X	1887	4087	4853
$ln(X/(N-X))$	-0.5	1.5	3.5

问这些数据能否支持所给的模型?

(g)利用 (f)的结果估计模型中的常数，并预测 $t=12$ 天时被感染的人数.

15. 考虑鲸的生存情况.假定鲸的数量减少到最低存活量级 m 以下时，就会导致灭绝. 还假定鲸的数量受到环境容纳量 M 的限制. 这就是说，当鲸的数量超过 M 时就会减少，因为环境承受不了那么多数量的鲸.

(a)讨论下面关于鲸数的模型

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}=k(M-P)(p-m)$$

其中 $P(t)$ 代表鲸在 t 时刻的数量，k 是正常数；

(b)做出 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t$ 关于 P 和 P 关于 t 的图形.考虑初始数量 $P(0)=P_0$ 满足 $P_0<m$、$m<P_0<M$ 和 $M<P_0$ 的三种情形；

(c)假设对所有时刻都满足 $m<P<M$，解 (a)中的模型，证明 t 趋于无穷时，P 的极限是 M；

(d)讨论如何检验 (a)中的模型.如何确定 M 和 m；

(e)假设该模型合理地估计了鲸数变化情况，那么这对捕鱼有什么启示?建议如何控制?

16. 社会学家发现了一种被称为社会流传的现象，指的是一条信息、一项技术创新或一种文化时尚在人群中的传播. 这样的人群可以分为两类：一类接收到该信息，另一类没有.在一个人口数量已知的固定人群中，有理由假设流传率与已接收到信息的人数和待接收的人数的乘积成正比. 若 X 表示 N 个人的居民中已接收到信息的人数，那么关于社会流传的数学模型为 $dX/dt=kX(N-X)$，其中 t 表示时间，k 是正常数.

(a)解这个模型，并证明它的解是一条逻辑斯蒂曲线.

(b)什么时候此信息传播最快?

(c)最终会有多少人接收到此信息?

17. 考虑用单级火箭发射卫星到轨道. 火箭的质量连续减少，这些物质被高速推出. 我们关注的是预测火箭能达到的最大速度.

(a)假设质量为 m 的火箭以速度 v 运动.它在一个很小的时间增量 $\triangle t$ 内减少了一个很小的质量 $\triangle m_p$，这些质量的物质以速度 u 沿 v 的反方向离开火箭.这里，$\triangle m_p$ 是推进燃料的质量.火

箭的后来速度变为 $v+\triangle v$.忽略所有外力 (重力，大气阻力等)，并且假设牛顿第二运动定律成立：

$$力 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(系统的动量)$$

其中动量等于质量乘以速度.请推导模型

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{-c}{m}\right)\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

其中 $c = u + v$ 是排气的相对速度 (燃烧气体相对于火箭的速度).

(b)假设初始时刻 $t = 0$ 时速度 $v = 0$，且火箭质量为 $m = M + P$，其中 P 是承载卫星的质量，而 $M = \varepsilon M + (1-\varepsilon)M(0 < \varepsilon < 1)$ 为初始的燃料质量 εM 加上火箭的外壳与设备质量 $(1-\varepsilon)M$.解 (a)中的模型可得速度为

$$v = -c\, ln\frac{m}{M+P}$$

(c)证明当所有的燃料都耗尽时，火箭的速度为

$$v_f = -c\ln[1 - \frac{\varepsilon}{1+\beta}]$$

其中 $\beta = P/M$ 是承载质量与火箭质量之比.

(d)若 $c = 3$ 千米/秒，$\varepsilon = 0.8$ 及 $\beta = 1/100$(这些是卫星发射的典型数值)，求 v_f.

(e)假定科学家计划往离地表高 h 公里的圆形轨道发射一颗卫星.假设地心引力由牛顿的平方反比吸引律给出：

$$\frac{\gamma M_e m}{(h+R_e)^2}$$

其中 γ 为宇宙万有引力常数，m 为卫星质量，M_e 为地球质量，R_e 为地球半径.假设引力需与离心力 $mv^2/(h+R_e)$ 平衡，其中 v 是卫星的速度.火箭需要达到多大的速度才能把卫星发射到离地表 100 公里高的轨道?根据 (d)中的计算，一个单级火箭能否把卫星发射到这样高度的轨道?

18. 国民生产总值 (GNP)表示商品与服务的消费额、政府对商品与服务的收购，以及私人的总投资 (它是库存加上建筑物及所需设备的增长量)之和．假设 GNP 以每年 3% 的速率增长，而国债随着 GNP 成比例增长.

(a)用含两个常微分方程的系统建立 GNP 和国债模型；

(b)假设在第 0 年时的 GNP 为 M_0 国债为 N_0，求解 (a)中的系统；

(c)国债是否最终会超过 GNP?考虑国债与 GNP 之比.

19. 一碗放在房间里桌上的热汤，它的温度会怎样变化呢?我们知道汤会冷却，但作为时间的函数时，一般的温度曲线会是什么样的呢?

20. 设有一些物种中有一群健康物种生长在有限的环境中，其当前数量 P_0.非常接近容纳量 M_0. 可以想像是一群生活在野外纯净湖中的鱼.突如其来的灾变，如圣希伦斯火山爆发，使湖水

受到污染，鱼失去了所依赖的食物和氧气的主要来源.结果导致了新环境的容纳量 M_1 远小于 M_0，事实上还小于当前数量 P_0.建立模型并从灾变前某个时刻开始，画出“前后”曲线，以表明鱼的数量是如何受环境变化影响的.

21. 鹿控制某地区，相关部门决定发放捕猎许可证，用以控制鹿的数量 (一张许可证只能捕猎一头鹿).已知如果鹿的数量降到一定量级 m 以下，鹿就会灭绝. 又知如果鹿的数量超过了容纳量 M，它们的数量就会由于疾病和缺乏营养而降回到 M.

(a)将鹿的增长率看成时间的函数，讨论下面模型的合理性

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = rP(M-P)(P-m)$$

其中 P 是鹿的数量，r 是正的比例常数，包括相直线.

(b)解释该模型与逻辑斯蒂模型 $\mathrm{d}P/\mathrm{d}t = rP(M-P)$ 有什么不同，它比逻辑斯蒂模型好还是差?

(c)证明若对所有的 t，$P > M$，则 $\lim\limits_{t\to\infty} P(t) = M$.

(d)若对所有的 t 都有 $P < M$，会发生什么情况?

(e)讨论该微分方程的解.模型的平衡点是什么?解释 P 的定态值对 P 的初值的依赖性.应发放大约多少张捕猎许可证?

22. (竞争捕猎模型)(1)设想一个小池塘，它的环境足以维持一些野生动植物的存活. 我们想在池塘里放置一些供垂钓的鱼，如鳟鱼和妒鱼.设 $r(t)$ 表示鳟鱼在时刻 t 时的数量，$y(t)$ 表示妒鱼的数量. 问这两种鱼是否能在池塘中共存?如果是的话，那么这两种鱼数量的最终解受到一开始放入池塘的鱼的数量以及外部干扰的教感程度有多大?

(2)列举出本节的竞争狩猎模型讨论中所忽略的三点重要的想法.

(3)扩展缚鱼和妒鱼的增长模型，假设缚鱼在孤立的情况下呈指数衰减，而妒鱼的数量实际按逻辑斯蒂的方式增长，有数量上限 M. 用图形法分析你的模型在静止点附近的运动情况.这两个物种能否共存?

23. 考虑下面的竞争狩猎模型

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a(1-x/k_1)x - bxy \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = m(1-x/k_2)y - nxy \end{cases}$$

其中 x 表示缚鱼的数量，y 表示妒鱼的数量.

(a)鳟鱼和妒鱼在没有竞争情形隐含着什么假设?

(b)通过物理问题来解释常数 a、b、m、n、k_1 和 k_2.

(c)运用图形分析法回答下列问题:

I)可能的平衡状态是什么?(注:应考虑到至少有五种情况，应当分析所有这五种情况，其中一种是重合线情形).

II)能否共存?

III)在相平面上选取一些典型的初始点并画出相应的轨线.

IV)通过常数 a、b、m、n、k_1 和 k_2 解释用图形分析法预测的结果.

24. 考虑下面的经济学模型：设 P 是某物品市场价格，Q 是该物品在市场上的数量. P 和 Q 都是时间的函数.如果把价格和数量看成是两个相互作用的物种，则可以提出下面的模型:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = aP(b/Q - P) \\ \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = cQ(fP - Q) \end{cases}$$

其中 a、b、c 和 f 为正常数.判断并讨论模型的合理性.

(a)若 a=1, b=20 000, c=1 和 f=30，找出方程组的平衡点. 对每个平衡点按稳定性进行可能的分类.如果有的平衡点不易分类，请解释原因.

(b)通过图形的稳定性分来确定 P 和 Q 的量级当时间增加时所发生的情况.

(C)对于确定平衡点的曲线，给出经济上的解释.

25. 广告在商业活动中大量存在，是促销手段之一，尤其是一种新产品问世时，有必要以广告的形成加以宣传，吸引消费者购买，但单位时间内的广告量受消费者对该商品需求量的影响；另一方面，消费者在单位时间内的购买量显然会受该商品广告多少的影响，广告不超过一定限度，广告越多，顾客越多，但广告超过一定限度，广告太滥，消费者会出现对该商品的一种逆反心理，甚至顾虑该商品是否有质量问题等等而影响了顾客的购买量，当然顾客购买该商品的速度还与该商品是否已经买足，与足够用差多少有关系，如果与够用差距大，则购买速度快，试建立广告与购物的数学模型.

26. 由产量的增加而引起的投资称为诱发投资，产品之增加，需要更多之资本而诱发了新投资.设 $Y(t)$ 是时刻 t 之产量，$I(t)$ 是时刻 t 之诱发投资，试建立 I 与 Y 的数学模型.

27. 经济发展当中，如果产值随时间波动得太厉害，则会造成经济生活与社会生活的不稳定，必须进行经济调整，使其比较稳定地健康发展. 设 $Y(t)$ 是产值，$I(t)$ 是诱发投资，A 是自发投资，$C(t)$ 是消费，试建立总需要与消费、投资的数学模型.

28. 一个复杂的过程或系统常常能被拆分成较简单的子系统或能够单独分析的“间隔室”. 整个系统可以拆分成相互作用的间隔室. 这样，一个化学工厂可以由一系列分开的阶段 (甚至是物理间隔室)构成，在其中各种反应物和产品结合或被混合在一起. 也可能发生这样的情况，一个独立的微分方程描述系统的每一个间隔室，于是一个微分方程方程组描述整个物理系统. 三个盐水罐是三阶段方程组的一个简单的例子. 三个罐分别装有 V_1 , V_2 , V_3 千克的盐水，淡水流人罐 1，同时混合了盐水，从罐 1 流入罐 2，从罐 2 流人罐 3，然后流出罐 3. 用 $x_i(t)$ 表示罐 $i(i = 1, 2, 3)$ 在时刻 t 的含盐量. 如果流人的速度是 r 千克/分，分析将产生的一阶方程组。

29. 下图给出了三个相互连接的物体，并且由四根弹簧连在两个墙之间. 假设物体的滑动无摩擦，每条弹簧都服从胡克定律，即它的伸展或压缩 x 与反作用力 F 的关系满足公式 $F = -kx$.

若三个物体 (从它们相对平衡的位置开始的)向右的位移 x_1，x_2，x_3 都是正的，则第一个弹簧被拉长距离 x_1，第二个弹簧被拉长距离 $x_2 - x_1$；第三个弹簧被拉长距离 $x_3 - x_2$；第四个弹簧被压缩距离 x_3．试应用牛顿定律 $F = ma$ 到三个物体，建立它们的运动方程．

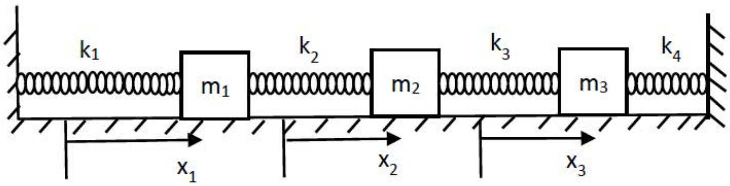

图 6.3　弹簧

30. (人口增长)某一城市 1960 年时的人口总数为 25000 人，1970 年时人口总数为 30000 人．假设它的人口总数以不变增长率指数地增长，预计到 2000 年时该城市的人口总数是多少?

31. (细菌增长)一种细菌的数量 1 小时增长 6 倍，求增长 2 倍需多长时间?

32. (放射性碳的碳定年)从古代颅骨游离出来的碳的含量相当于现代骨中 C 含量的 1/6. 求该颅骨的碳定年?

33. (放射性碳的碳定年)一种公元时代的遗物，每克遗物含有 4.6×10^{10} 个 ^{14}C 原子，而今天同一种物质的标本含有 5.0×10^{10} 个 ^{14}C 原子，求该遗物的大约碳定年，对它的真实性你有何观点?

34. (连续复利)一对夫妻在他们的小孩出生时，在银行存款 50000 元，银行以 8%付给他们连续复利，而且利息可以累加到他们的存单中，问当他们的小孩 18 岁时，他们存单中有多少钱?

35.(连续复利)假设你在顶楼上发现一本过期的书，而且 100 年前你的祖父应交给图书馆 30 分的罚金. 如果过期罚金以每年 5%的比率指数地增长，间如果你把这本书还给图书馆应交多少罚金?

36. (药效的失效)为使狗昏迷，使用一种麻醉药给狗注射．在狗的每公斤体重中，狗的血液中至少含有 45 千克的药量，狗才会昏迷．假设这种药的药性在狗的血流中 5 小时消失一半，问为了麻醉一条 50 千克的狗 1 小时，需要用药多少?

37. 放射性钴的半衰期是 5. 27 年．假设在一地区发生过核事故，且存在放射性钴的标准与人类可居住的标准为 1 : 100，求该地区再一次可居住需用多长时间?

38. 假设在古代穴变 (也可能是地球本身)中形成一种矿物质，它含有铀同位素 ^{238}U(它具有 4.51×10^9 年的半衰期)，但不含有铅 (^{238}U 放射性衰变的最终物质)如果今天的一种矿物质，它

的 ^{238}U 原子对铅原子的比率为 0.9，求穴变是何时发生的?

39. 一种月球上陨石含有相同数量的钾和氢原子．假设所有氢原子都是由钾原子 (它的半衰期大约为 1.28×10^9 年)放射性衰变所产生的结果，而且每 9 个钾原子的蜕变产生一个氢原子．从它含有钾原子时算起，这块岩石的石定年是多少?

40. 在一个 100000 人口的城市流传一条谣言，说自来水中含苯乙基胺，而且在一周内就有 10000 人听到该消息．假定听到该消息的人数与没有听到该消息的人数成正比例，有一半的人听到该消息需要多长时间?

41. 根据宇宙理论，在宇宙大爆炸中存在两种数量相同的放射性铀 ^{235}U 和 ^{238}U. 现今每个 ^{235}U 的原子存在 137. 7 个 ^{238}U 的原子. 利用 ^{238}U 的半衰期是 4.51×10^9 年和 ^{235}U 的半衰期是 7.10×10^8 年计算宇宙的年龄.

42. 从 210°F 的烤箱中取出一块蛋糕，然后放在具有 70°F 的室内. 经过半小时，蛋糕的温度是 140°F，求何时蛋糕的温度降到 100°F?

43. 在一山谷中大气污染总量 $A(t)$ 自然增长，并且每 7. 5 年增长 3 倍．

(1)若初始总量为 10pu(污染单位)，求出经过 t 年以后关于污染总量 $A(t)$ 的公式.

(2)经过 5 年以后山谷中大气污染的总量为多少 (pu)?

(3)若大气污染总量达到 100pu，住在山谷中就会发生危险，那么达到这种程度需要多长时间?

44. 在核泄漏事故中，周围的环境被一种自然衰变的放射性材料污染. 开始时放射性材料的总量为 15su(安全单位)，经过 5 个月以后为 10su.

(1)求经过 t 个月以后，放射性材料总量为多少 su?

(2)求经过 8 个月以后放射性材料总量为多少 su?

(3)经过多长时间 (以月为单位)为 lsu?(此时人们可以安全地返回该地方．)

45. 世界上现有 3300 种“语言系”. 假设这些语种都是由一种原始语言转化而来，并且每 6 千年就转化成 1. 5 种语言系．求大约多少年前人们开始讲原始语言?

46. 几千年以前，当地美国人的祖先从亚洲穿过白令海峡到达西半球．从那时开始，他们经过南美洲和北美洲开始分散居住．由当地美国人讲的一种语言分解为许多印度“语言系”. 假设每 6000 年这些语言系增长 3 倍，现在在西半球有 150 种本地美国语言系．问大约什么时候今天的本地美国人的祖先到那里?

47. 一个直圆柱形水箱，里面盛水的高度为 9 英尺. 在 t=0 分时，把底面的塞打开，经过 1 分后，里面水的高度为 4 英尺，经过多长时间水箱的水全部流出?

48. 一个高为 16 英尺的圆锥，盛满了水．在 t=0 时刻，把底部的塞打开，经过 1 小时后，圆锥内水的高度为 9 英尺，问何时水全部流空?

49. 假设一个圆柱形容器盛有 V_0 升水，容器内的水可以在 T min 内从底部小洞排完．应用托里拆利定律证明，经过 $t \leq T$ min 后，容器内水的体积是 $V = V_0[1-(t/T)]^2$.

50. 一个盛水容器的形状是由曲线 $y = x^{\frac{4}{3}}$ 绕 y 轴旋转而成，容器内水的深度为 12ft．中午 12:00 时把底部塞打开，下午 1:00 时水的深度为 6ft，问何时容器中水流完？

51. 一个盛水容器的形状是由抛物线 $x^2 = by$ 绕 y 轴旋转而成，中午 12:00 时把底部塞打开时，容器内水的深度为 0ft，下午 1：00 时水的深度为 1ft.

(1)求经过 th 后水的深度为 $y(t)$.

(2)何时容器中水流空?

(3)若水表面的半径为 2ft，那么底部塞的半径为多少?

52. 一天早上以不变的速率下雪，早上 7:00 开始用扫雪机清雪.到 8:00 清雪 2m，到 10:00 又清雪 2m.

(1)设开始下雪时 $t = 0$, x 表示在时刻 t 清雪的距离．假设扫雪机以不变的速率清雪 (比如 ft^2/h)，证明：$k\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$，其中 k 为一个常数;

(2)何时开始下雪?

53. 一个念珠无摩擦地从一根电线上 P 点滑向 Q 点．念珠问题是，电线是什么形状时所需要时间最短．在 1696 年伯努利提出这样一个公开问题，期限为 6 个月 (后来在莱布尼茨的请求下延期到 1697 年的复活节)．牛顿从学术界退休之后，在 1697 年 2 月 29 日接到伯努利的挑战，仅第二天他就向伦敦皇家社会学院宣布他的结果，即倒摆线弧．为推导这个结果，假设念珠从原始点静止状态开始滑动，并且设 $y = y(x)$ 为在 y 轴向下的坐标系下的该曲线方程，由光学中的 Snell 定律的机械类比情况可知

$$\frac{sin\alpha}{v} = 常数$$

其中．代表切线对曲线的反射角 (从垂线开始)，所以 $cot\alpha = y'(x)$(为什么). 那么当念珠下降 (垂直)距离为 y 时，根据动能 $=\frac{1}{2}mv^2 = mgy = -$ 势能，它的速度为 $v = \sqrt{2gy}$.

(1)试推导微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2\alpha - y}{y}}$$

其中 α 为一适当正常数.

(2)把 $y = 2\alpha sin^2 t, dy = 4\alpha sintcostdt$ 代人上式推导解为多少？

54. 一位 30 岁的妇女找到起薪为每年 60000 元的一份工作．而 t 年以后的年薪为 $S(t) = 30e^{\frac{t}{20}}$，$S(t)$ 以指数形式增加．同时，她年薪的 12%存人银行作为退休金，而且以 6%的年利率连续计息.

(1)推导经过 t 年以后她的退休金总量 $A(t)$ 所满足的微分方程，用 $\triangle t$ 估计 $\triangle A$;

(2)计算 $A(40)$，即她在 70 岁时所领到的退休金.

55. 假设密度 $\rho=1$ 的冰雹从静止状态开始下落，开始下落时半径近似看为 0．在下落过程中半径逐渐增大，且 $r=kt(k$ 是常数)．建立并求解初值问题

$$\frac{d}{dt}(mv)=mg,\ v(0)=0$$

其中 m 为冰雹变化的质量，$v=\frac{dy}{dt}$ 是速度，y 轴正向向下．证明

$$\frac{dv}{dy}=\frac{g}{4}$$

56. 假设在时刻 t=0 时，某湖中的鱼群受到某种疾病袭击，鱼群的开始数量为 $P(t)$，且鱼停止繁殖后代 (所以出生率 $\beta=0$)，死亡率 (条鱼/星期)与 $1/\sqrt{P}$ 成比例.如果刚开始湖中有 900 条鱼，且 6 个星期后剩 441 条，问经过多长时间湖里的鱼全部死亡?

57. 假设某时刻某湖中有鱼，出生率 β 和死亡率 δ 都与 $\sqrt{P}$ 成反比.

(1)证明：$P(t)=\left(\frac{1}{2}kt+\sqrt{P}\right)^2$，这里 k 为常数.

(2)如果 $P_0=100$，而且经过 6 个月后湖中有 169 条鱼，问 1 年后此湖中有多少条鱼?

58. 在沼泽中一个鳄鱼群数量 P 的时间变化率同 P^2 成比例．在 1988 年此沼泽中有 12 条鳄鱼，1998 年中有 24 条，问何时此沼泽中会有 48 条鳄鱼，并且预测以后将会发生什么情况?

59. 考虑一多产的兔子群，它的出生率 β 和死亡率 δ 都与兔子的数量 $P=P(t)$ 成比例，且 $\beta>\delta$.

(1)证明：$P(t)=\frac{P_0}{1-kP_0t}$，k 为常数. 注意到，当 $t\to 1/(kP_0)$ 时，$P(t)\to+\infty$，这是“世界末日”情形;

(2)假设 $P_0=6$，且 t_0 个月后有 9 只兔子，问“世界末日”何时发生?

(3)当 $\beta<\delta$ 时，问长期来看，兔子数量将会怎样?

60. 假设某动物数量满足逻辑斯谛方程 $\frac{dP}{dt}=aP-bP^2$，这里 $B=aP$ 为该动物群出生的时间变化率，且 $D=bP^2$ 是死亡的时间变化率. 如果开始数量 $P(0)=P_0$，且在时刻 $t=0$ 每月有 B_0 只出生，D_0 只死亡，证明极限数量为

$$M=B_0P_0/D_0.$$

61. 考虑一个物群数量 $P(t)$ 满足灭绝 -爆炸方程 $\frac{dP}{dt}=aP^2-bP$，这里 $B=aP^2$ 为该动物群出生的时间变化率，且 $D=bP$ 是死亡的时间变化率. 如果开始数量 $P(0)=P_0$，且在时刻 $t=0$，每月有 B_0 只出生，D_0 只死亡，证明门槛数量为 $M=D_0P_0B_0$.

62. 考虑一群鳄鱼数量 $P(t)$ 满足 32 题中的灭绝 –爆炸方程．如果初始时有 100 条鳄鱼，则在时刻 $t=0$ 每月有 10 条出生，9 条死亡．问需要多少个月 P(t)达到门槛数量 M 的 10 倍?

63. 动物的出生率和死亡率一般不是稳定的，而是随着季节周期性地变化．设动物数量 P 满足微分方程

$$\frac{dP}{dt}=(k+bcos2\pi t)P$$

其中 t 以年计，k 和 b 都为正常数，求解 $P(t)$．这样，增长率函数 $r(t)=k+bcos2\pi t$ 关于其均值 k 周期性地变化．建立一个图形来比较这个动物数量的增长与另外一个具有相同的初始值 P_0，但满足自然增长指数方程 $P'=kP$(同一常数 k)的动物数量的增长．经过多年之后如何比较这两种动物的数量?

64. 令 $x(t)$ 是一种害虫的总体数量，在自然条件下，它在某种程度上被有益的捕食者总体数量 y(t> 所控制．设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 满足式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-150y+2xy}{200x-4xy}$$

中的捕食者一被捕食者方程，并使稳定平衡总体数量为 $x_E=b/q$，$y_E=a/p$，现假设用杀虫剂以 (每单位时间)同样的分数 $f<a$ 来杀死两种昆虫．证明害虫的总体数量 x_E 是增加的，而益虫的总体数量 y_E 是减少的．于是，杀虫剂的使用起到了反作用．这是应用数学分析揭示了对自然界的动机是良好的，但产生了不好的结果的例子．