第七章　偏微分方程方法I

谭　忠

厦门大学数学科学学院

目录

5 弦振动方程的建立

6 位势方程的建立

7 热传导方程的建立

8 高阶偏微分方程(组)模型的建立

1 引子

1、为什么产生数学？

量化思想以及可量化条件：变量识别

引子

2、什么是偏微分方程？

与代数方程的比较

引子

3、为什么会产生(偏)微分方程?

四种可以建模微分方程模型的情形

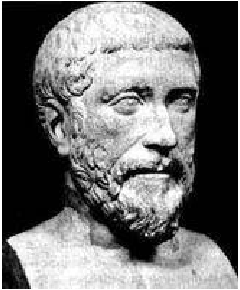
2 历史源头问题–从音乐审美谈起

1、历史源头问题之一：音乐审美

历史源头问题–从音乐审美谈起

由2500年前古希腊

著名的哲学家、数学家毕达哥拉斯



开创了音乐审美.

历史源头问题—从音乐审美谈起

传说有一天，

毕达哥拉斯外出散步，

经过一家铁匠铺，

发现里面传出打铁的声音，

历史源头问题–从音乐审美谈起

要比别的铁匠铺

更加协调、悦耳.

他走进铺子,

量了量铁锤和铁砧的大小,

历史源头问题–从音乐审美谈起

发现了一个规律，

音响的和谐

与发声体体积的

一定比例有关.

历史源头问题—从音乐审美谈起

尔后，他又在琴弦上做试验，
进一步发现只要按比例
划分一根振动着的弦，
就可以产生悦耳的音程.

历史源头问题—从音乐审美谈起

就这样，毕达哥拉斯
在世界上首次发现了
音乐和数学的联系,
并创建了毕氏音律.

历史源头问题–从音乐审美谈起

千百年来，研究

音乐和数学的关系

在西方一直

是一个热门的课题，

历史源头问题–从音乐审美谈起

开普勒、伽利略、

欧拉、傅立叶、哈代等人

都潜心研究过

音乐与数学的关系.

历史源头问题—从音乐审美谈起

到“文艺复兴”时期，

人们已经知道：

声音都是由发音体

发出的一系列频率、振幅

各不相同的振动复合而成，

历史源头问题–从音乐审美谈起

这些振动中有一个

频率最低的振动，

由它发出的音就是基音，

其余为泛音，

历史源头问题–从音乐审美谈起

而响度较小、

频率加倍的辅助音

被称为谐音.

飞利浦·拉莫（Jean-Philippe Rameau)

在1722 年

关于和声理论

阐述如下事实：

历史源头问题—从音乐审美谈起

一声音的频率

是基音频率的整数倍

则称为乐声是和谐的.

由此激起了人们

运用数学来研究

乐声的和谐问题.

现今已有专门的

音乐与数学的书籍

Dave Benson，《Music: A Mathematical Offering》，

也有专门的

音乐与数学的杂志

《Journal of Mathematics and Music》.

1713-1714年，

布鲁克·泰勒(Brook Taylor)

就研究了这一古老的主题，

他导出了一根

拉紧的振动弦的基频，

历史源头问题–从音乐审美谈起

得到了一个

二阶常微分方程

$$a^2\ddot{x} = \dot{s}y\dot{y}$$

这里$\dot{s} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$，

而微商$\dot{s}$，$\dot{x}$，$\dot{y}$

是对时间取的，

历史源头问题—从音乐审美谈起

关于偏微分方程

第一次真正意义上的成功

来自于对以小提琴弦

为代表的弦振动问题的研究.

历史源头问题–从音乐审美谈起

1746年，达朗贝尔

在论文《张紧的弦振动时形成的曲线的研究》中，

受1727年约翰·伯努利(Johann Bernoulli)

给他儿子丹尼尔·伯努利的

一封信和一篇论文的启发，

历史源头问题–从音乐审美谈起

考虑了一根弹性弦,

在弦上等间隔的地方

放置着n个等质量的质点.

弦被当成“小珠的弦”,

即弦被看成

由n 个离散的、相等的、等间隔的，

并且彼此间用没有重量的

柔软的弹性绳

相连接的“珠子”构成.

历史源头问题–从音乐审美谈起

为了处理连续的弦，
“珠子”的数目
允许变成无穷多个，
同时每一个“珠子”的
大小和质量都减小，

历史源头问题–从音乐审美谈起

使得当“珠子”个数

增加时总质量

趋近连续弦的质量.

Johann考虑：

如果弦的长度是l，

第k个“珠子”的横坐标

是x_k，$k = 1, \cdots, n-1$

在$x = l$ 处的

第n个"珠子"是不动的，

那么

$$x_k = k \cdot \frac{l}{n},\ \ k = 1, \cdots, n.$$

通过分析第k个“珠子”的力，

约翰·伯努利已经证明，

如果y_k是第k个“珠子”的位移，则

$$\frac{d^2y_k}{dt^2}=\left(\frac{na}{l}\right)^2(y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}),$$

$$k=1,\cdots,n-1$$

其中$a^2 = \frac{lT}{M}$,

T是弦中的张力

（弦振动时它被当作常数）,

M是总质点,

这些研究最终只对

二阶常微分方程的理论有贡献.

历史源头问题–从音乐审美谈起

在丹尼尔·伯努利的解答中

有两点失误：

第一，只考虑“珠子”所在点的位移

是时间的函数，

历史源头问题–从音乐审美谈起

从而，他的研究工作

只能停留在

常微分方程的范围；

历史源头问题–从音乐审美谈起

第二，不提他认识到的

那些简单运动模式（泛音）

可以迭加成更复杂的运动

的线性叠加原理.

达朗贝尔在他的论文中,

从另一个角度重新考虑了

Johann Bernoulli推出的方程

$$\frac{d^2 y_k}{dt^2} = \left(\frac{na}{l}\right)^2 (y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}),$$

$$k = 1, \cdots, n-1$$

历史源头问题–从音乐审美谈起

他用$y(x,t)$代替y_k,

用Δx代替$\frac{l}{n}$,

于是上述方程变为

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2\left[\frac{y(x+\Delta x,t)-2y(x,t)+y(x-\Delta x,t)}{(\Delta x)^2}\right].$$

然后他注意到

当n变成无穷时，

Δx趋于0，

方括号内的表达式

就变成了$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$.

因此他推出了

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad (1.1)$$

其中$a^2 = \frac{T}{\sigma}$是常数，

历史源头问题─从音乐审美谈起

这样一来，弦振动方程

就第一次出现了.

这个方程含有

对时间变量和

空间变量的偏导数，

这时空间变量只有一维，

因而称为**一维波动方程**.

显然，D’Alembert的做法

强烈地依赖微积分的思想，

在当时微积分理论

并没有完善而且也不严密.

然而，D’Alembert的大胆试验

却为人类应用微积分、

历史源头问题—从音乐审美谈起

完善微积分的理论

作出了重要贡献,

也因此拉开了建立

偏微分方程学科的序幕.

综上所述，

对音乐的欣赏

与理性分析

产生了偏微分方程学科，

历史源头问题—从音乐审美谈起

正是对小提琴

弦振动发声的研究

导致了首个偏微分方程的出现,

并最终形成了一个强大的学科.

音乐和科学

在同一个地点开始,

文明本身也从这里开始,

而站在源头的

是毕达哥拉斯(Pythagoras)

神话般的身影.

历史源头问题–从音乐审美谈起

英国作家亚瑟·凯斯特勒(Arthur Koestler)

用了一个音乐的比喻来描述它：

公元前6世纪的场面

唤起了一个期待定调的、

每个演奏者

只专注于自己的乐器

历史源头问题—从音乐审美谈起

而对别人的抱怨

充耳不闻的管弦乐队的形象.

然后是一片戏剧的静场,

指挥走进舞台,

历史源头问题–从音乐审美谈起

用他的指挥棒轻敲了三下，

于是，和谐从混乱中浮现.

这个艺术大师就是

萨摩斯(Samos)岛的毕达哥拉斯.

谢　谢!

历史源头问题–从音乐审美谈起

2、历史源头问题之二：确定一个物体对另一物体的万有引力的大小

历史源头问题—从音乐审美谈起

随着弦振动方程的建立，

另一类物理问题的研究

也推动了偏微分方程

学科的发展，

历史源头问题–从音乐审美谈起

这是十八世纪

物理学中的主要问题之一，

即确定牛顿提出的

一个物体对另一物体

历史源头问题—从音乐审美谈起

产生的万有引力的大小，

比如：太阳对一个行星，

地球对它外部或

内部的一个质点，

那么如何描述这种引力呢？

3、历史源头问题之三：作为实际问题，冶炼金属；作为科学问题，是企图确定地球内部的温度

历史源头问题–从音乐审美谈起

1807年，傅里叶
向巴黎科学院
提交了一篇关于
热传导的基本论文，

历史源头问题–从音乐审美谈起

经拉格朗日,

拉普拉斯和勒让德评审

后被拒绝了.

历史源头问题–从音乐审美谈起

但科学院确实
想鼓励傅里叶发展
他的思想，所以
把热传导问题
确定为将于1812年
授予高额奖金的课题.

历史源头问题–从音乐审美谈起

傅里叶在1811年

提交了修改过的论文，

受到上述诸人和

另外一些人评审，

得到了奖金，

历史源头问题–从音乐审美谈起

但因受到缺乏
严密性的批评
而未发表在
当时的科学院的
《报告》里.

傅里叶对他
所受到的待遇
感到愤恨，
但他继续研究热的课题，

在1822年发表了

数学的经典文献之一

《热的解析理论》

(Theoorie analytique de la chaleur),

此书是傅里叶思想

的主要出处.

历史源头问题–从音乐审美谈起

在吸收或释放
热的物体内部，
温度分布一般
是不均匀的，
在任何点上都
随时间而变化.

所以温度T

是空间和时间的函数，

这个函数依赖于

物体的形状、密度、

材料的比热、

T的初始分布

(即在时刻$t = 0$时T的分布)

以及保持于物体

表面上的条件.

Fourier在他的书中

考虑的第一个

主要问题是

在均匀和各向同性的物体内

历史源头问题–从音乐审美谈起

确定作为x，y，z，t的

函数的温度T.

根据物理原理

他证明了T必须

满足偏微分方程

$$k^2\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

此方程叫做

三维空间的热方程，

其中k^2是一个常数，

其值依赖于

物体的某些性质.

谢　谢!

3 当今世界的应用–万物皆方程

1、来自大自然的启示

(1)灾害的启示

当今世界的应用–万物皆方程

地震：地震后的可怕景象：

当今世界的应用–万物皆方程

地震灾害对人类威胁巨大，我们能预测它吗？

地震波的改变给我们什么信息？

地震波的传播有什么规律？

由此可以预报地震吗？

当今世界的应用–万物皆方程

海啸： 海啸对人类威胁巨大，它能被我们预测吗？

当今世界的应用–万物皆方程

台风、飓风与龙卷风：这些特定的风也都是空气的运动形成的，我们能够运用流体运动的特征通过偏微分方程建模预测它们吗？

当今世界的应用–万物皆方程

沙尘暴是如何形成的？风沙是一种特殊的流体，了解它们的运动可以预测它们的走势并及时治理沙尘暴！沙丘如何形成？如何运动？能有效防止它们吗？

当今世界的应用–万物皆方程

如何准确预报天气或局部地区烟雾(雾霾)消散时间

观察鞭炮在空中爆炸时，

我们看到放出的烟雾

以爆炸点为中心

向四周迅速扩散，

当今世界的应用—万物皆方程

形成一个近于

圆形的不透光区域。

起初这个区域逐渐增大，

后来它的边界变得明亮起来，

不透光区域渐渐变小，

最后烟雾完全消失。

我们可以建立一个偏微分方程模型

描述观察到的

烟雾扩散和消失过程，

分析消失的时间

与哪些因素有关，

以及怎样预报消失的时刻。

(2)大自然趣妙现象的启示

水龙头里流啥有讲究

孤立波Soliton的发现

1834年秋，英国科学家、

造船工程师

拉塞尔（John Scott Russell，也译为“罗素”）

当今世界的应用–万物皆方程

在运河河道上看到了

由两匹骏马拉着的

一只迅速前进的船突然停止时，

被船所推动的一大团水却不停止，

它积聚在船头周围激烈地扰动，

然后形成一个滚园、

光滑而又轮廓分明的大水包，

高度约为0.3～0.5 米，长约10米，

以每小时约13公里的速度

沿着河面向前滚动。

当今世界的应用–万物皆方程

罗素骑马沿运河

跟踪这个水包时发现,

它的大小、形状和速度变化很慢,

直到3～4公里后,

才在河道上渐渐地消失。

当今世界的应用–万物皆方程

罗素马上意识到，

他所发现的这个水包

决不是普通的水波。

普通水波由水面的振动形成，

振动沿水平面上下进行，

当今世界的应用–万物皆方程

水波的一半高于水面，

另一半低于水面，

并且由于能量的衰减会很快消失。

他所看到的这个水包

却完全在水面上，

能量的衰减也非常缓慢。

并且由于它具有圆润、光滑的波形，
所以它也不是激波。
罗素将他发现的这种奇特的波包
称为**孤立波**。

当今世界的应用–万物皆方程

他用大水槽模拟运河，

并模拟当时情形

给水以适当的推动，

再现了他所发现的孤立波。

当今世界的应用–万物皆方程

罗素认为孤立波

应是流体力学的一个解,

并试图找到这种解，但没有成功。

罗素十年后向英国科学促进会

报告了自己所发现的孤立波现象和观点,

但未能引起人们的注意。

当今世界的应用–万物皆方程

50年以后，即1895 年，

两位数学家科特韦格（Korteweg）

与得佛里斯（de Vries）从数学上

导出了有名的浅水波Korteweg-DeVries 方程，

当今世界的应用–万物皆方程

并给出了一个类似于

罗素孤立波的解析解,

即孤立波解,

孤立波的存在才得到普遍承认。

当今世界的应用–万物皆方程

在罗素逝世100 周年即1982 年,

人们在罗素发现孤立波的运河河边

树起了一座罗素像纪念碑,

以纪念148 年前

他的这一不寻常的发现.

谢　谢!

当今世界的应用–万物皆方程

2、对人类社会活动的深思

金融危机与经济危机

在衍生证券的定价理论中，

著名经济学家、

诺贝尔奖获得者

布莱克-斯克尔斯Black-Scholes

建立的期权定价理论

成为华尔街的操盘法律，

而Black-Scholes公式

则是一个偏微分方程!

当今世界的应用–万物皆方程

人口问题

拥挤的城市与纷繁的交通：

当今世界的应用–万物皆方程

人口问题是当今世界上
最令人关注的问题之一。
以前人们建立了
人口的指数增长模型和
阻滞增长(logistic)模型，

当今世界的应用–万物皆方程

这些模型只考虑

人口总数和总的增长率，

不涉及年龄结构，

因而建立的是常微分方程。

当今世界的应用–万物皆方程

事实上，在人口预测中
人口按年龄分布状况
是十分重要的，
因为不同年龄人的生育率和
死亡率有着很大的差别。

当今世界的应用—万物皆方程

两个国家或地区

目前人口总数一样，

如果一个国家或地区

当今世界的应用–万物皆方程

青年人的比例

高于另一国家或地区，

那么二者人口的

发展状况将大不一样。

当今世界的应用–万物皆方程

我们需要考虑人口

按年龄分布，

即除了时间变量外，

年龄是另一自变量.

这样描述人口发展规律的

模型也是偏微分方程。

红绿灯下的交通流

各种类型的汽车一辆

接着一辆沿公路飞驶而过，

其情景就像在湍急的江河中

奔腾的水流一样，

当今世界的应用–万物皆方程

在这种情况下

人们不去分析

每辆汽车的运动规律，

而是把车队看作连续的流体，

称为**交通流或车流**。

当今世界的应用–万物皆方程

研究每一时刻通过公路上

每一点的交通流的流量、

速度和密度等变量间的关系，

特别是在出现譬如红绿灯改变，

当今世界的应用–万物皆方程

交通事故等干扰的情况下

交通流的变化过程。

人们建立交通流的

基本方程是偏微分方程。

谢　谢!

4 一阶偏微分方程模型的建立

用微元分析法，

就是变量自身

及其未知函数的

变化率自身之间

不满足物理等自然定律，

一阶偏微分方程模型的建立

但变量的微元之间

符合某些规律与定律，

这样，首先确立

实际问题中的变量，

一阶偏微分方程模型的建立

再确立一些

与这些变量的微元

有关的规律及定律，

列出等式，

加以整理变成偏微分方程式.

一阶偏微分方程模型的建立

这既能建成常微分方程模型

又能建成偏微分方程模型,

既能建成一阶模型

又能建成二阶模型.

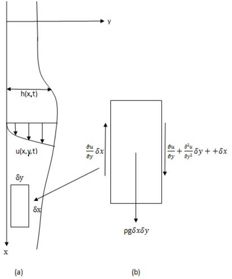
一阶偏微分方程模型的建立

变分原理也能导出
偏微分方程的模型,
这将在变分方法中讲述.
下面，我们依据产生
不同阶数偏微分方程的
顺序讲解其方法.

一阶偏微分方程模型的建立

例题2.1　沿墙壁流下的油漆薄层：

如图所示



一阶偏微分方程模型的建立

考察沿墙壁流下的油漆薄层运动.

【模型构建】

由于油漆层很薄,

因此速度$u(x, y, t)$近似地

只沿墙壁向下一个方向.

油漆的黏性抵抗

油漆自身的重力,

从而产生剪应力.

假设剪应力

与速度的梯度$\frac{\partial u}{\partial y}$成正比.

一阶偏微分方程模型的建立

由流体微元的力平衡

可以得到$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

是一个常数$-c$,

该常数与重力成正比.

一阶偏微分方程模型的建立

假设油漆粘在墙上，

因此在$y = 0$ 上，$u = 0$.

又由于在油漆表面$y = h(x, t)$，

剪应力为0，

故$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

一阶偏微分方程模型的建立

于是需要求解如下问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -c \\ u = 0,\ \text{当} y = 0 \text{时} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0,\ \text{当} y = h(x,t) \text{时} \end{cases}$$

解得

$$u = \frac{1}{2}cy(2h - y)$$

一阶偏微分方程模型的建立

最后，由薄层的质量守恒定律，

油漆厚度的变化速度

与沿墙壁向下的

油漆流的变化是平衡的.

一阶偏微分方程模型的建立

记流量为$q(x,t)=\int_0^h udy$,

经过一小段时间$\triangle t$,

长度为$\triangle x$的

小单元质量损失约

$(q(x,t)-q(x+\triangle x,t))\triangle t$

一阶偏微分方程模型的建立

增加的质量为

$$(h(x, t+\triangle t) - h(x,t))\triangle x$$

于是

$$(q(x,t) - q(x+\triangle x, t))\triangle t$$
$$= (h(x, t+\triangle t) - h(x,t))\triangle x$$

一阶偏微分方程模型的建立

整理并关于$\triangle t$，$\triangle x$取极限得到

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\int_0^h u dy=0$$

将$u=\frac{1}{2}cy(2h-y)$代入上式得

$$\frac{\partial h}{\partial t}+ch^2\frac{\partial h}{\partial x}=0.$$

谢　谢!

5 弦振动方程的建立

弦振动问题的现代提法与弦振动方程的建立

D'Alembert的工作

经过后人整理

成为现代教科书上的标准形式.

先考虑如下的物理模型：

例题2.2　弦的横振动：

一长为l的柔软、

有弹性的、均匀的

细弦拉紧以后，

让它离开平衡位置

弦振动方程的建立

在垂直于弦线的
外力作用下
作**微小横振动**，
即弦的运动发生
在同一平面内，

弦振动方程的建立

且弦上各点的位移

与平衡位置垂直.

求在不同时刻

弦线的形状.

【问题分析】

看上去像几何问题,

因为求“形状”,

实际上从物理上看是求位移.

弦振动方程的建立

在数学上有两个角度
看这个问题：
一是从几何角度，
称为弦的几何形状；

弦振动方程的建立

二是从分析的角度看，

就是将它放在坐标系中，

这个几何形状的

函数表达式是如何的？

它依赖于什么变量？

弦振动方程的建立

首先建立坐标系，

取弦的平衡位置为x轴，

在弦线运动的平面内，

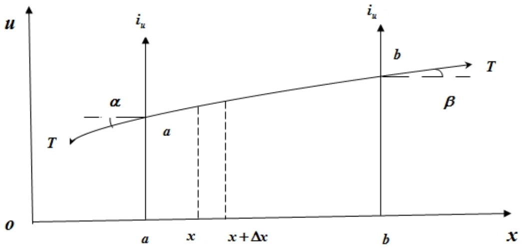
垂直于弦线的平衡位置

且通过弦线的一个

端点的直线为u轴.

弦振动方程的建立

如下图：



这样在任意时刻t，

弦线上各点的位移为

$u = u(x, t)$

由于做微小横振动，

在这弦上任取一弦段$(x, x+\Delta x)$，

它的弧长为

$$\Delta s = \int_{x}^{x+\Delta x} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \mathrm{d}x,$$

由微小横振动知$\frac{\partial u}{\partial x}$很小，

弦振动方程的建立

于是$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$与$1$相比

可以忽略不计，

从而

$$\Delta s \approx \int_x^{x+\Delta x} \mathrm{d}x = \Delta x.$$

弦振动方程的建立

这样，可以认为

这段弦在振动过程中并未伸长，

弦的往返运动的主要原因

是强迫外力和张力的影响.

弦振动方程的建立

弦在运动过程中，

各点的位移、加速度、张力等

都在不断变化，

但它们遵循动量守恒定律.

弦振动方程的建立

【问题假设】

假设1(量纲假设)

设ρ为弦的线密度（千克/米），

f_0为作用在弦线上

且垂直于平衡位置的

强迫外力密度（牛顿/米）；

弦振动方程的建立

假设2 设α，β是

两端点处的切线

与x轴正向的夹角.

设弦线是均匀的,

弦振动方程的建立

弦作微小横振动，

故可以认为：

$|\alpha|, |\beta| \ll 1,$

$\sin\alpha \sim \alpha, \quad \sin\beta \sim \beta;$

$\sin\alpha \sim \tan\alpha, \quad \sin\beta \sim \tan\beta;$

假设3 设在区域

$(0, l) \times (0, \infty)$内，

u存在二阶连续偏导数

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$和$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

弦振动方程的建立

【模型构建】

动量守恒定律

物体在某一时段

即时间间隔内的

弦振动方程的建立

动量的增量

等于作用在该物体上

所有外力在

这一时段内产生的冲量.

弦振动方程的建立

即

动量$(t = t_2)$−动量$(t = t_1)$

=外力在时段$(t_1 \leq t \leq t_2)$内

产生的冲量

弦振动方程的建立

我们应用这个定律

建立弦上各点的位移

所满足的偏微分方程.

弦振动方程的建立

如果物体具有

均匀质量m

且按匀速v运动,

那么动量为mv.

弦振动方程的建立

因此，在弦上

任意截取一段$[a,b]$，

考虑它在任意时段

$[t_1,t_2]$动量的变化.

从而在任意时刻t,

将弦段$[a, b]$分划

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$$

那么在一小段$[x_{i-1}, x_i]$的

质量$\rho(\xi_i)\triangle x_i$,

弦振动方程的建立

速度为位移

关于时间的导数，即$\frac{\partial u}{\partial t}$.

因此，在此时刻

这个小区间上的动量为：

$$\rho\Delta s_i\frac{\partial u}{\partial t} = \rho\frac{\partial u}{\partial t}\Delta x_i$$

弦振动方程的建立

弦段$[a,b]$上总的动量为

$\Sigma\rho\Delta s_i\frac{\partial u}{\partial t}=\Sigma\rho\frac{\partial u}{\partial t}\Delta x_i$

故由定积分定义

$$\lim_{||\triangle||\to 0}\Sigma\rho\Delta x_i\frac{\partial u}{\partial t}=\int_a^b\rho\frac{\partial u}{\partial t}dx.$$

这里$||\triangle||=\max\limits_{1\le i\le n}(\triangle x_i)$.

弦振动方程的建立

在时段$[t_1, t_2]$内的

动量变化为

$$\int_a^b \left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=t_2} dx - \int_a^b \left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=t_1} dx. \quad (2.1)$$

弦振动方程的建立

为了求出作用

在弦段$[a,b]$上

所有垂直于弦线的外力

产生的冲量,

注意到作用于

弦段$[a,b]$上的外力有两类:

外加强迫力和周围弦线

通过端点$x=a,b$

作用于弦段$[a,b]$的张力.

弦振动方程的建立

外加强迫力

在时段$[t_1, t_2]$内

所产生的冲量是

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \Sigma f_0 \Delta x \Delta t = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_a^b f_0 dx. \quad (2.2)$$

弦振动方程的建立

由胡克定律知道,

弦上每一点所受张力

在运动过程中保持不变,

即张力与时间无关.

弦振动方程的建立

将在x 点处的张力记为T_x,

它表示在x 点处

弦的左边部分

对右边部分的拉力

与弦的右边部分

对左边部分的拉力大小均为T_x,

而张力T_x 的方向

总是沿着弦

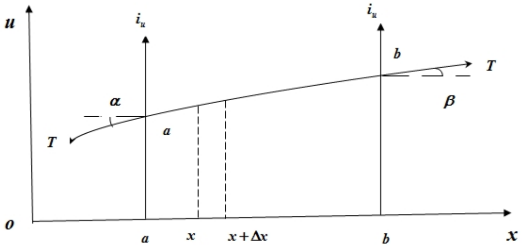
在x点处的切线方向.

因此，作用在端点$x = a$

和$x = b$的张力T_a，T_b，

它们的方向如图.

弦振动方程的建立



弦振动方程的建立

它们在u 轴方向的分量

才是引起弦

上下振动的作用力，为

$$\boldsymbol{T}_a \cdot \boldsymbol{i}_u = |\boldsymbol{T}_a| \cos(\boldsymbol{T}_a, \boldsymbol{i}_u) = -|\boldsymbol{T}_a| \sin \boldsymbol{\alpha},$$

$$\boldsymbol{T}_b \cdot \boldsymbol{i}_u = |\boldsymbol{T}_b| \cos(\boldsymbol{T}_b, \boldsymbol{i}_u) = |\boldsymbol{T}_b| \sin \beta.$$

这里$\boldsymbol{i}_u$表示u轴上的单位向量.

弦振动方程的建立

由假设2，弦线是均匀的，

弦作微小横振动，

故可以认为：$|\alpha|, |\beta| \ll 1$,

$$\sin\alpha \sim \tan\alpha, \quad \sin\beta \sim \tan\beta.$$

以及$|T_a| = |T_b| = T_0$,

其中T_0为常数.

思考题：为什么这样假设？

如果取$\sin\alpha \sim \alpha$

和$\sin\beta \sim \beta$会怎样？

弦振动方程的建立

因此，张力T_a，T_b的垂直于

弦线的分量在时段$[t_1, t_2]$内

产生的冲量是:

$$\int_{t_1}^{t_2} T_0 \tan\beta dt - \int_{t_1}^{t_2} T_0 \tan\alpha dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(T_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=b} - \left(T_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=a} \right] dt. \quad (2.3)$$

考虑到表达式(2.1)、(2.2)、(2.3)，
从而由动量守恒定律
得到弦线作微小横振动
所满足的方程

弦振动方程的建立

$$\int_a^b \left[\left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=t_2} - \left(\rho\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{t=t_1}\right] dx$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(T_0\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=b} - \left(T_0\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=a}\right] dt$$
$$+ \int_{t_1}^{t_2} dt \int_a^b f_0 dx. \quad (2.4)$$

其中$[a,b]$是包含在

弦线$[0,l]$内的任意弦段,

弦振动方程的建立

$[t_1, t_2]$是包含

在振动期间$[0,\infty)$的任意时段.

由假设3，在区域$(0,l)\times(0,\infty)$内,

u存在二阶连续微商

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$和$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

弦振动方程的建立

那么由牛顿-莱布尼兹公式,

表达式(2.4)可改写为

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_a^b [\frac{\partial}{\partial t}(\varrho \frac{\partial u}{\partial t}) - \frac{\partial}{\partial x}(T_0 \frac{\partial u}{\partial x}) - f_0] dx = 0.$$

弦振动方程的建立

由(a,b)，(t_1,t_2)的任意性，

立即得到u适合的微分方程

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho\frac{\partial u}{\partial t})-\frac{\partial}{\partial x}(T_0\frac{\partial u}{\partial x})=f_0\ (0<x<l,t>0).$$

弦振动方程的建立

由于弦是均匀的，故ϱ=常数.

因此方程亦可改写为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t)\ (0 < x < l, t > 0).$$

其中$a^2=\frac{T_0}{\varrho}$，$f(x,t) = \frac{f_0(x,t)}{\varrho}$.

谢　谢!

6 位势方程的建立

位势理论的现代提法与位势方程的建立

例题2.3 位势方程的建立：

位势方程的建立

一个连续物体

对一个被看作质点的

单位质量的质点P

所作用的万有引力

位势方程的建立

是构成该物体的

全体质量微元对质点P

所作的力的总和.

位势方程的建立

【问题分析】

设吸引体物体为Ω，

如果物体的小体积元

$d\xi d\eta d\zeta$非常小，

位势方程的建立

以至可看作集中

在点(ξ, η, ζ)的一个质点.

如果P的坐标是(x, y, z).

那么，Ω中密度为ρ的小质量

对单位质点的引力

是从P指向质量微元的

一个向量$\left(\frac{\xi-x}{r}, \frac{\eta-y}{r}, \frac{\zeta-z}{r}\right)$,

大小为$k\rho\frac{d\xi d\eta d\zeta}{r^2}$.

位势方程的建立

【模型构建】

按牛顿万有引力定律，

写成分量形式为

$$k\rho\frac{d\xi d\eta d\zeta}{r^2}\left(\frac{\xi-x}{r},\frac{\eta-y}{r},\frac{\zeta-z}{r}\right).$$

其中k是牛顿万有引力定律中的常数，

位势方程的建立

并且$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$

为这两点之间的距离.

当然密度ρ可以是ξ,η,ζ的函数，记为$\rho(\xi,\eta,\zeta)$

但在均匀物体中是一个常数，$\rho(\xi,\eta,\zeta)\equiv\rho_0$.

位势方程的建立

整个物体对P处

单位质量的引力分量是

$$\mathbf{F}(x,y,z)=$$

$$k\left(\int_{\Omega}\rho\frac{\xi-x}{r^3}d\xi d\eta d\zeta,\int_{\Omega}\rho\frac{\eta-y}{r^3}d\xi d\eta d\zeta,\int_{\Omega}\rho\frac{\zeta-z}{r^3}d\xi d\eta d\zeta\right)$$

$\mathbf{F}(x,y,z)$称为引力场函数，

位势方程的建立

当ρ是常数时，直接计算可知$\mathbf{F}(x,y,z)$是函数

$$V(x,y,z)=k\iiint\limits_{\Omega}\frac{\rho}{r}d\xi d\eta d\zeta$$

的梯度，即

$$\mathbf{F}(x,y,z)=\bigtriangledown V=\left(\frac{\partial V}{\partial x},\frac{\partial V}{\partial y},\frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

位势方程的建立

简记为$\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla V$,

函数V称为**位势函数**.

进一步直接计算可以验证,

位势方程的建立

$P(x,y,z)$在Ω以外,

即对吸引体外部的点(x,y,z),

它满足偏微分方程

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

简记为$\Delta V=0$

位势方程的建立

这个方程首先由拉普拉斯提出，

所以称为拉普拉斯方程，

也称为**位势方程**.

位势方程的建立

若$\rho(x, y, z)$充分光滑，

则P在Ω内满足

$$\Delta V = -4\pi\rho$$

这个方程称为

泊松(Poisson)**方程**.

谢　谢!

7 热传导方程的建立

热传导问题的现代提法与热传导方程的建立

例题2.4 热传导问题：

热传导方程的建立

在三维空间中，

考虑一均匀、各向同性的物体，

假定它内部有热源，

并且与周围介质有热交换，

来研究物体内部温度的分布和变化.

热传导方程的建立

【问题分析】

物体内部由于

各部分温度不同

产生热量的传递，

它们遵循能量守恒定律.

热传导方程的建立

能量守恒定律

物体内部的热量的增加

等于通过物体的边界

流入的热量

与由物体内部的热源

所生成的热量的总和.

热传导方程的建立

t_2时刻热量$-t_1$时刻热量

$=$在$[t_1, t_2]$时段

通过边界的流入量

$+$在$[t_1, t_2]$时段

热源的生成量;

热传导方程的建立

在物体Ω内

任意截取一块D,

并在时段$[t_1,t_2]$上

对D使用能量守恒定律.

【问题假设】

假设1(量纲假设)

u是温度(度),

c是比热(焦耳/度·千克),

ρ是密度(千克/米^3),

热传导方程的建立

q是热流密度又称热通量，

表示单位时间内

通过单位面积的热量；

焦耳/秒·米^2，

f_0是热源强度(焦耳/千克·秒.

假设2

u在柱体$\Omega\times(0,\infty)$内

具有连续偏导数

$\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$,

热传导方程的建立

【模型构建】

注意到在dt时段内

通过D的边界∂D上面积微元dS

进入区域D的热量为$-q\cdot\nu dSdt$

ν是∂D的单位外法向,

从而由能量守恒定律有

$$\iiint_D c\varrho(u|_{t=t_1} - u|_{t=t_2})dxdydz$$

$$= -\int_{t_1}^{t_2} dt \iint_{\partial D} q \cdot \nu ds$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_D \varrho f_0 dxdydz. (2.6)$$

热传导方程的建立

物理学的实验表明,

在一定条件下,

热流向量与温度梯度成正比:

$$\boldsymbol{q} = -\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}.(2.7)$$

负号表明热量是由高温向低温运动.

热传导方程的建立

$\boldsymbol{\kappa}$是物体的导热系数，

(2.7)称为**Fourier定律**.

把(2.7)代入(2.6)，注意到

$$\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{\nu}=-\boldsymbol{\kappa}\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}$$

从而(2.6)式可改写为

$$\iiint_D c\varrho(u|_{t=t_1} - u|_{t=t_2}))dxdydz$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_{\partial D} \kappa \frac{\partial u}{\partial \nu} ds$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_D \varrho f_0 dxdydz.$$

热传导方程的建立

由假设2，u在柱体$\Omega\times(0,\infty)$内

具有连续偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial t},\quad \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

热传导方程的建立

则应用Gauss公式，立得

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_D c\varrho \frac{\partial u}{\partial t} dxdydz$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \iiint_D [\nabla \cdot (\kappa \nabla u) + \varrho f_0] dxdydz$$

热传导方程的建立

由于被积函数

在$\Omega\times(0,\infty)$内连续，

以及$[t_1,t_2]$，D的任意性

又由于物体均匀，

各向同性，

c,ϱ,κ都是常数，

热传导方程的建立

立得

$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f, (2.8)$

其中$a^2 = \frac{\kappa}{\varrho c}$,

$f = \frac{f_0}{c}$,

Δ是三维Laplace算子,

当$f \geq 0$时表示热源;

当$f \leq 0$时表示热汇.

方程(2.8)称为热传导方程.

热传导方程的建立

其中，当$f(x,y,z,t)\equiv 0$时，

方程称为齐次热传导方程，

而当$f(x,y,z,t)\neq 0$时，

方程称为非齐次热传导方程.

通过扩散的物理现象

也可以得到类似的模型.

谢　谢!

8　高阶偏微分方程(组)模型的建立

高阶偏微分方程和偏微分方程组模型的建立

1、高阶偏微分方程模型的建立

例题2.5　卡恩-希利亚德（The Cahn－Hilliard）方程：

卡恩-希利亚德Cahn-Hilliard方程是

二元合金中

相分离过程的数学模型

高阶偏微分方程(组)模型的建立

它的物理应用

已扩展到诸多科学领域，

如调幅分解，

嵌段聚合物，

高阶偏微分方程(组)模型的建立

如调幅分解，嵌段聚合物，

图像修复，多相流体，

具有弹性不均匀性质的微观结构，

肿瘤生长模拟与拓扑优化，

高阶偏微分方程(组)模型的建立

即

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(x,t) = \bigtriangledown \cdot [M(\psi(x,t)) \bigtriangledown \mu(x,t)],$$

$$x \in \Omega, t > 0$$

$$\mu(x,t) = F'(\psi(x,t) - \varepsilon^2 \triangle \psi(x,t))$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial \mu}{\partial \eta}(x,t) = 0, \; x \in \partial\Omega$$

这里$\Omega \subset R^d (d = 1, 2, 3)$

是有边界$\partial\Omega$的有界区域.

量$\phi(x, t) = m_\alpha - m_\beta$

是定义为两个分子式之差的相场,

其中m_α和m_β

分别是相α和β分子式.

$F(\phi) = 0.25(\phi^2 - 1)^2$是

组分ϕ的齐次系统的双井位势.

$M(\phi(x,t))$是正迁移,

ε是正常数,

$\frac{\partial \phi}{\partial n}$是在区域边界的单位外法向导数.

例题2.6　黏性薄膜流体问题:

另外一类导致

四阶抛物型方程的问题

是有关在表面张力作用下的

黏性薄膜流体,

如油漆式涂料的流动.

通常令薄膜的厚度为h,

压力为p,

与没有重力的影响下

压力约等于它

在薄膜表面的值的情况不同,

现在它等于表面张力

与曲率的乘积,

所以p与$-\triangle h$近似成比例,

假设膜很薄且$|\nabla h|$非常小,

这里∇为

在薄膜表面上的二维梯度.

仍然能用近似润滑理论

得到平面内速度

与$-h^2\nabla p$成正比,

所以流体的通量

与$-h^3\nabla^2 p$成正比.

最后，由质量守恒定律，

在适当的尺度下，得到

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\nabla \cdot (h^3 \nabla(\triangle h))$$

即得到了具有三次扩散系数

四阶扩散方程.

类似于Cahn-Hilliard方程,

上述方程有很多问题

没有解决

因为在$h = 0$时的退化

比多孔介质方程更加严重.

2、偏微分方程组模型的建立

例题2.7　气体动力学：

气体动力学建立的模型
都是偏微分方程组，
可以参考李大潜先生的
【物理学与偏微分方程】.

谢　谢!