第5章 决策概念与贝叶斯决策

§ 5.1　决策基本概念

5.1.1　决策问题三要素

决策是指在一定的环境和条件下，按照一定的准则，在各种可能的做法（或方案或策略）中，挑选一个最优（佳）的做法（或方案或策略）。为了统一各种说法，一个做法或一个方案或一个策略都统称为一个行动。自从有了人类，就存在决策问题，然而决策理论却是萌芽于十七世纪，当时就已有期望值的概念了。此后，决策理论随着时间进程一直不断的在演变发展中。到了二十世纪上半叶，瓦尔德(A. Wald，1939，1950)通过引入损失函数和决策概念，把统计的各种推断如估计、假设检验等都看成是一个特殊的决策问题，从而纳入到决策理论的框架内并形成统计决策理论。而后，萨维奇(L. J. Savage，1954)、雷法和施莱弗(H. Raiffa and R. Schlaifer，1961)以及伯杰(J. O. Berger, 1985)等学者进一步把（贝叶斯）统计决策的研究推向前进，得到不少漂亮的理论结果，也在很多领域找到了应用。下面我们首先通过三个例子来理解决策问题的基本概念。

 

A. Wald

例 5.1 你想成为现代农民吗？不要以为做农民是很容易的事，现代农民也需要学习贝叶斯统计。请看如下简化的例子。某农作物有 2 个各有优缺点的品种：（1）产量高但抗旱能力弱；（2）抗旱能力强但产量低。这样农民明年种植这种农作物就面临 2 种选择：（1）选择产量高但抗旱能力弱的品种，记此选择为行动a_1；（2）选择抗旱能力强但产量低的品种，记为行动a_2。农民种植作物当然希望能够取得最大收益，但是，在现有的科技水平下，明年的雨量状态无法准确预知，为简单起见并参考历年的情况，以明年 800mm 雨量为界限来区分雨量充足（记为θ_1）和雨量不足（记为θ_2）两种状态。在这里，自然界的状态（即雨量）可以认为是随机的，而且只有人有主观能动性，能够做决策。为了做好决策，人会观察自然界的现象，收集和分析各种信息，比如说预测明年雨量充足和不足的概率分别为 0.62 和 0.48，并估算出在不同的状态下，选择不同行动时每亩的收益，这样，我们可以把各种可能的收益写成收益矩阵（单位：百元）

$$\begin{array}{cc} a_1 & a_2 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 100 & 20 \\ -20 & 40 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \theta_1\ 0.62 \\ \theta_2\ 0.48 \end{array}$$

以-20 这个矩阵元素为例来说明含义，它表明当采取行动a_1（选择产量高但抗旱能力弱的品种）并且雨量不足（即状态为θ_2）时农民将得到的每亩收益，由于是负值，所以在这种情况下，农民实际上是亏损的。其它元素可以类似解释。实际上，我们看到收益是状态和行动的函数$G(\theta,a)$，只是在本例中它是离散的，因此用矩阵的形式来表示，以达到一目了然的效果。

例 5.2 当今中国是投资的热土。现在一位投资者有一笔资金想要投资，有三个投资方向供他选择：（1）购买股票（记为行动 a_1），根据市场情况，可能净赚 8000 元，但也可能亏损 9000 元；（2）购买股票型基金（记为行动 a_2），根据市场情况，可能净赚 6000 元，但也可能亏损 7000 元；（3）存入银行（记为行动 a_3），不管市场情况怎样总可净赚 1800 元。未来的金融市场是随机变化的，但是可简化分为两种状态：上涨（记为 θ_1）与下跌（记为 θ_2）。由此，可写出投资者的收益矩阵如下

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 8000 & 6000 & 1800 \\ 9000 & 7000 & 1800 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \end{array} \end{array}$$

投资者可以依据此收益矩阵和适当的准则来决定他的资金投资方向。

例 5.3 某大学毕业生响应国家号召自己创业，开了一家时令水果店，但一直为水果的进货量大伤脑筋。现在又到了南方佳果荔枝上市的时节，她准备购进一批投放市场，购进价格（包括运费）为每公斤 6.5 元，售出价格为每公斤 11.0 元。荔枝在整个购销过程中将损耗 10%，此外，如果购进数量超过市场需求量，超出部分就必须以每公斤 3.0 元的价格贱卖掉。市场需求量一般认为是随机的，无法事先知道。你能帮助该创业大学生做出进货量的决策吗？

不要小看了这个经营决策问题。实际上，任何大卖场都有类似但复杂得多的经营决策问题，而且对各种商品的进货量都会进行仔细的决策，以达到取得最大的利润。虽然该毕业生经营的只是一家小水果店，如果她有决策的知识又能够把经营数据详细记录下来，那么，通过贝叶斯统计决策，她就更容易取得好收益。

虽然市场需求量（记为θ）是随机的，但是根据过去的经验，我们可以给它一个范围，比如说，在过去该区域市场需求量θ至少为 500 公斤，但不会超过 2000 公斤，也就是说，市场需求量θ在区间$\Theta=[500,2000]$内，即市场需求量所有可能的状态为$\Theta=[500,2000]$，这个区间就称为市场需求状态集或状态空间。另一方面，为适应市场需求，该大学毕业生生采取的行动a（即购进荔枝的数量）显然也应该在这个区间内，这样行动集$A=\Theta=[500,2000]$。最后，我们来讨论本决策问题的收益函数$G(\theta,a)$，即市场需求量为θ且进货量为a时的收益。可以分两种情况考虑，当实际销售量$0.9a$不超过市场需求量θ时，水果店的收益为

$$(11.0-6.5)\times0.9a-6.5\times0.1a$$

当实际销售量$0.9a$超过市场需求量θ时，水果店的收益为

$$(11.0-6.5)\theta+(3.0-6.5)(0.9a-\theta)-6.5\times0.1a$$

把以上两式化简，就可写出该水果店的收益函数为（单位：元）

$$G(\theta,a)=\begin{cases}8\theta-3.8a, 500\le\theta\le0.9a\\ 3.4a, \quad 0.9a<\theta\le2000\end{cases}$$

至此，我们帮助该创业大学生明确了要决策的问题，但是，如何做出最优决策还有待于进一步的学习。

我们可以总结出构成一个决策问题的三要素如下：

（1）状态集$\Theta=\{\theta\}$，其中每个元素θ表示在特定的环境中自然界（或社会）可能出现的一种状态，有时也称为状态参数。在这个特定的环境中所有可能的状态全体就组成状态集（也称为状态空间）。状态集可以是离散的也可以是连续的。另外，状态（参数）是不能被人所控制的，但往往可以把它看成是一个随机变量，有一个概率分布，由于在此并没有进行试验或抽样，这个概率分布就是一种先验分布$\pi(\theta)$。

（2）行动集$A=\{a\}$。一个行动a就是一个做法或方案，它既可以是数量型的（例 5.3）也可以是非数量型的（例 5.1 和例 5.2），在一个决策问题中所有可行的行动就构成了行动集（也称为行动空间）。

（3）收益函数$G(\theta,a)$。这是定义在集合$\Theta\times A=\{(\theta,a);\theta\in\Theta,a\in A\}$上的二元函数（这个集合称为$\Theta$和$A$的笛卡尔积），表示当状态为$\theta$且采取行动$a$时得到的收益。收益函数的取值可正可负，其正值表示盈利，负值表示亏损，收益函数值的单位最常用的是货币单位，但有时也用其它容易比较好坏的单位，如产量、销售量等等。

当状态集和行动集都是有限个元素组成的时，可以用收益矩阵来表示收益值全体，正如例 5.1 和例 5.2 所做的那样。显然，收益矩阵是收益函数的一种特殊形式，其作用与收益函数是一样的，但它有一目了然的优点。另外，需要注意的是，在实际的决策问题中，有时可能不用收益函数，而是用与收益函数对等地位的亏损函数、支付函数或成本函数等等。

状态集Θ、行动集A和收益函数$G(\theta,a)$构成了一个决策问题必不可少的三要素。一个决策问题是否确定了，就是要看这三要素是否已经明确地定义下来。三要素中只要任何一个有变化，都会导致决策问题的改变，形成另一个决策问题，因此结论就可能会不一样。我们约定今后讲一个决策问题就意味着它的状态集Θ、行动集A和收益函数$G(\theta,a)$这三要素全都给定了。所谓决策就是首先明确决策问题的各个要素，然后按照一定的准则，通过分析比较，寻找出最优行动。

5.1.2　行动的容许性与先验期望准则

现在我们先来考虑行动集 A 中的行动。设 A 中有两个行动 a_1 与 a_2 对收益函数满足

$$G(\theta, a_1) \le G(\theta, a_2), \forall \theta \in \Theta$$

即行动 a_1 的收益总是小于等于行动 a_2 的收益，同时至少存在一个 θ 使 $G(\theta, a_1) < G(\theta, a_2)$，那么行动 a_1 显然可以从行动集 A 中剔除掉，这种行动被称为非容许行动。下面给出容许行动和非容许行动的定义。

定义 5.1 在给定的决策问题中，行动集 A 中的行动 a_1 称为是容许的，假如在 A 中不存在同时满足如下两个条件的行动 a_2：（1）对所有的 $\theta \in \Theta$，有 $G(\theta, a_1) \le G(\theta, a_2)$；（2）至少存在一个 θ，使 $G(\theta, a_1) < G(\theta, a_2)$ 成立。假如这样的 a_2 存在，则称 a_1 是非容许的。此外，如果两个行动 a_1 和 a_2 的收益函数在状态集 Θ 上处处相等即

$$G(\theta, a_1) \equiv G(\theta, a_2),\quad \forall \theta \in \Theta$$

则称行动 a_1 与 a_2 是等价的。

行动集 A 中如有非容许行动则必须剔除出去，这样行动集中只存在容许行动，从而使决策得以简化。今后总假定行动集 A 中没有非容许行动。

现在假设给定了一个决策问题，那么该如何去做决策呢？对给定的决策问题做决策就是按照一定准则在行动集 $A=\{a\}$ 中选取一个行动，它满足这个准则，从而这个行动就是决策结果。因此，做决策首先要明确做决策的准则是什么。在此，介绍一个常用的准则---先验期望准则及连带的二阶矩准则。

定义 5.2 对给定的决策问题，设状态（参数）的正常先验分布为 $\pi(\theta)$，则收益函数 $G(\theta,a)$ 对 $\pi(\theta)$ 的期望与方差

$$\bar{G}(a)=E^{\theta}[G(\theta,a)]，\quad \sigma^2(a)=Var[G(\theta,a)]=E^{\theta}[G(\theta,a)^2]-[E^{\theta}G(\theta,a)]^2$$

分别称为先验期望收益和收益的先验方差。使先验期望收益达到最大的行动 a^*，即满足方程

$$\bar{G}(a^*)=\max_{a\in A}\bar{G}(a)$$

的行动 a^* 称为先验期望准则下的最优行动。若在同一个决策问题中此种最优行动不止一个，则要用收益的先验方差来进一步判定，使收益的先验方差达到最小的行动称为二阶矩准则下的最优行动。

注：上述讨论是针对收益函数来进行的，对于支付函数（亏损函数或成本函数等）可类似进行讨论，差别仅在于标准上，对收益函数而言，收益是越大越好，而对支付函数（亏损函数或成本函数等）而言，支付是越少越好。例如，对于成本函数 $C(\theta,a)$，最优行动 a^* 是满足如下方程的行动

$$\bar{C}(a^*)=\min_{a\in A}\bar{C}(a)$$

例 5.4 某公司准备生产一种新产品，如今有三个方案供选择，a_1：改建本公司原有生产线；a_2：从国外引进一条自动化生产线；a_3：与关联公司合作生产。为了简化决策，经理把市场对此新产品的需求量分为三种状态：高θ_1；中θ_2；低θ_3。财会人员还为经理估算出收益矩阵为（单位：万元）

$$
\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} & \\
\begin{pmatrix} 700 & 980 & 400 \\ 250 & -500 & 90 \\ -200 & -800 & -30 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{array}
\end{array}
$$

但是，经理不同的顾问给出了需求量的不同先验概率分布，悲观先生给出的是π_1，乐观先生给出的是π_2，统计分析师给出的是π，具体的概率分布列见表 5.1。请按照不同的先验概率分布帮助经理进行决策。

表 5.1　不同的先验分布

需求量	高	中	低
先验分布 π_1	0	0	1
先验分布 π_2	1	0	0
先验分布 π	0.6	0.3	0.1

解：（1）先验概率分布为π_1时，容易算得各行动的先验期望收益

$$\bar{G}(a_1)=-200，\quad \bar{G}(a_2)=-800，\quad \bar{G}(a_3)=-30$$

从而根据先验期望准则，行动a_3是最优行动。

（2）先验概率分布为π_2时，同样容易算得各行动的先验期望收益

$$\bar{G}(a_1)=700，\quad \bar{G}(a_2)=980，\quad \bar{G}(a_3)=400$$

从而根据先验期望准则，行动a_2是最优行动。

（3）先验概率分布为π时，各行动的先验期望收益

$$\bar{G}(a_1)=420+75-20=475$$

$$\bar{G}(a_2)=588-150-80=358$$

$$\bar{G}(a_3)=240+27-3=264$$

从而根据先验期望准则，行动a_1是最优行动。

注：从本例我们看到由于先验概率分布的不同，按照同样的准则得到的最优行动完全不同。不难看出先验概率分布π_1和π_2是很不合理的，一个认为需求量低的概率为 1，对未来市场极端悲观；另一个认为需求量高的概率为 1，对未来市场太过乐观，这些显然都不符合常识。在这里，关键是要预估出符合市场实际状况的先验概率分布，而先验概率分布π就较为合理。

例 5.3 续 现在我们可以帮助大学生创业者完成决策工作了。在那里收益函数为

$$G(\theta,a)=\begin{cases}8\theta-3.8a, 500\le\theta\le 0.9a\\ 3.4a, \quad 0.9a<\theta\le 2000\end{cases}$$

其中θ为市场需求量，而a为采购量。假设大学生创业者的店刚开张不久，没有可用的数据，因此采用区间[500,2000]上的均匀分布作为θ的先验分布，于是采购量a的先验期望收益为

$$\bar{G}(a)=\int_{500}^{0.9a}\frac{(8\theta-3.8a)}{1500}d\theta+\int_{0.9a}^{2000}\frac{3.4a}{1500}d\theta$$

$$=\frac{1}{1500}[-3.24a^2+8700a-1000000]$$

不难求得当$a=1343$时先验期望收益达到最大，故大学生创业者购进 1343 公斤荔枝是最优行动。

5.1.3 先验期望准则两性质

定理 5.1 在状态的先验分布不变的情况下，收益函数 $G(\theta,a)$ 的线性变换 $G_1(\theta,a)=kG(\theta,a)+c\ (k>0)$ 不会改变先验期望准则下的最优行动。

事实上，新的收益函数 G_1 的先验期望收益为

$$\bar{G}_1(a)=E^{\theta}[G_1(\theta,a)]=kE^{\theta}[G(\theta,a)]+c=k\bar{G}(a)+c$$

由于 $k>0$，所以 $\bar{G}_1(a)$ 与 $\bar{G}(a)$ 在同一点达到最大期望收益值，故不会改变决策结果。

定理 5.2 设 Θ_1 为状态集 Θ 的一个非空子集，在 Θ_1 上收益函数 $G(\theta,a)$ 被加上一个常数 c，那么在先验期望准则下的最优行动不变。

事实上，新的收益函数 G_1 为

$$G_1(\theta,a)=\begin{cases}G(\theta,a)+c, & \theta\in\Theta_1\\ G(\theta,a), & \theta\in\Theta-\Theta_1\end{cases}$$

在状态集 Θ 是连续的情况下，G_1 的先验期望为

$$\bar{G}_1(a)=E^{\theta}[G_1(\theta,a)]=\int_{\Theta_1}[G(\theta,a)+c]\pi(\theta)d\theta+\int_{\Theta-\Theta_1}G(\theta,a)\pi(\theta)d\theta$$

$$=\int_{\Theta}G(\theta,a)\pi(\theta)d\theta+\int_{\Theta_1}c\pi(\theta)d\theta=\bar{G}(a)+cP_{\pi}(\theta\in\Theta_1)$$

显然上式第二项 $cP_{\pi}(\theta\in\Theta_1)$ 是与行动 a 无关的常数，故 $\bar{G}_1(a)$ 与 $\bar{G}(a)$ 在同一点达到最大期望收益值，因此在先验期望准则下的最优行动不变。当状态集 Θ 为离散时也容易证得类似结果。

§5.2　损失函数

5.2.1　什么是损失函数

收益函数$G(\theta,a)$是决策问题三要素之一，它度量状态为θ并且采用行动a时所得到的收益。它是把决策与经济效益联系在一起的桥梁，但此种桥梁并不局限于收益函数，还可以是亏损函数、成本函数、支付函数等等。这些表面大不相同的函数，通过数学变换，可以统一用另一个更为有效的概念“损失函数”来取代。

那么，什么是损失函数呢？我们举例来说明之。如果某公司一个月的经营收益为－2000 元，即亏损 2000 元，那么这是针对成本而言的，但不是我们定义的损失。在决策理论和实践中，损失是指“该赚而没有赚到的钱”，是一种机会损失。例如，该公司如采用最优行动本可以赚 3000 元，由于决策失误而少赚了 1000 元，那么我们说，该商店损失 2000 元。这里不是没有正收益而是由于没有抓住机会使得收益少了。又如，一次加班本来只需 3 位工人就可以按时完成，可车间主任叫来了 4 位工人，工作虽然完成了，可工厂多支付的 1 位工人的加班费就是损失。

假设在一个决策问题中状态集$\Theta=\{\theta\}$，行动集$A=\{a\}$，定义在$\Theta\times A$上的二元函数$L(\theta,a)$称为损失函数，如果它表示在自然界（或社会）某个环境处于状态θ，而人们采取行动a时引起的（经济）损失。在统计决策理论和实践中损失函数常取代收益函数（亏损函数、成本函数、支付函数），并与状态集和行动集组成决策问题的三要素。

实际上，损失函数与收益函数$G(\theta,a)$是有密切联系的，当收益函数已知时不难获得损失函数。因为当自然界（或社会）处于状态θ时，可能的最大收益为$\max\limits_{a\in A}G(\theta,a)$，而如果决策者采取行动$a$则收益只为$G(\theta,a)$，从而引起的损失为

$$L(\theta,a)=\max_{a\in A}G(\theta,a)-G(\theta,a)$$

于是就得到了损失函数$L(\theta,a)$。类似地，当决策用成本函数（亏损函数或支付函数等）$C(\theta,a)$做度量时，损失函数则为

$$L(\theta,a)=C(\theta,a)-\min_{a\in A}C(\theta,a)$$

例 5.5 某高校毕业生创办的公司计划购进一批货物投放市场，如果购进数量a低于市场需求量θ，则每吨可赚 10 万元；如果购进数量a超过市场需求量θ，超过部分每吨反而要亏 30 万元。试为该公司写出收益函数和损失函数。

解：其收益函数为

$$G(\theta,a)=\begin{cases}10a, & a\le\theta\\ 10\theta-30(a-\theta), & a>\theta\end{cases}$$

不难看出，当购进量a等于市场需求量时，收益达到最大，此时收益为10θ，再根据损失函数与收益函数的关系，可以写出损失函数

$$L(\theta,a)=\begin{cases}10(\theta-a), & a\le\theta\\ 30(a-\theta), & a>\theta\end{cases}$$

注：在这里，第一种情况是供给不能满足需求引起的损失$10(\theta-a)$万元（理论上该赚而没有赚到）；第二种情况是供给超过需求引起的损失$30(a-\theta)$万元（理论上不该亏而亏了）。在实际的经营管理中，这两种损失都会出现，决策的目的就是要使得损失最小。

5.2.2 损失函数下的先验期望准则

对给定的决策问题，如果关于状态θ的正常先验分布为$\pi(\theta)$，则可使用损失函数下的先验期望准则做决策。

定义 5.3 对给定的决策问题，如果状态θ的正常先验分布为$\pi(\theta)$，则损失函数$L(\theta,a)$对$\pi(\theta)$的期望与方差

$$\bar{L}(a)=E^{\theta}L(\theta,a),\quad Var[L(\theta,a)]=E^{\theta}[L(\theta,a)]^2-[E^{\theta}L(\theta,a)]^2$$

分别称为先验期望损失（也称为先验风险）和损失的先验方差。使先验期望损失达到最小的行动a^*，即满足方程

$$\bar{L}(a^*)=\min_{a\in A}\bar{L}(a)$$

的行动a^*称为先验期望准则下的最优行动，如果这种最优行动不止一个，则要用损失的先验方差来进一步判定，使损失的先验方差达到最小的行动称为二阶矩准则下的最优行动。

注：1. 损失函数下的先验期望准则与收益函数下的先验期望准则是等价的。

事实上，设行动 a^* 是按损失函数下的先验期望准则求出的最优行动，即有

$$\bar{L}(a^*) = \min_{a\in A} \bar{L}(a)$$

由于

$$\bar{L}(a^*) = E^\theta L(\theta, a^*) = E^\theta[\max_{a\in A} G(\theta, a)] - E^\theta[G(\theta, a^*)]$$

$$\min_{a\in A} \bar{L}(a) = \min_{a\in A}\{E^\theta[\max_{a\in A} G(\theta, a)] - E^\theta[G(\theta, a)]\}$$

$$= E^\theta[\max_{a\in A} G(\theta, a)] - \max_{a\in A}\{E^\theta[G(\theta, a)]\}$$

那么

$$E^\theta[\max_{a\in A} G(\theta, a)] - E^\theta[G(\theta, a^*)] = E^\theta[\max_{a\in A} G(\theta, a)] - \max_{a\in A}\{E^\theta[G(\theta, a)]\}$$

$$E^\theta[G(\theta, a^*)] = \max_{a\in A}\{E^\theta[G(\theta, a)]\}$$

即 a^* 是收益函数下的先验期望准则下的最优行动。以上等式显然可以从下到上倒推上去，因此等价性成立。

2. 无论是用收益函数还是损失函数下的先验期望准则，当最优行动不止一个时，我们要进一步用相应的先验方差来确定最终的最优行动。从方差的定义可知它是用来测度偏离均值（期望值）程度的，也就是说它是波动或风险的一种度量，收益（或损失）的方差小就表明收益（或损失）的波动（风险）小，也就意味着决策风险小，因此在最优行动不止一个时，进一步用相应的先验方差进行决策。有时，次优行动与最优行动的收益（或损失）相差不大，而次优行动的收益（或损失）的先验方差比最优行动的收益（或损失）的先验方差小很多，那么从风险管理的角度考虑，我们可以选取次优行动作为最终的采纳行动。

例 5.6　某采购决策问题已推导出如下损失矩阵

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 4 & 8 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3.7 & 1.8 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{array} \end{array}$$

其中a_1，a_2，a_3分别表示大批量采购、中批量采购、小批量采购，而θ_1，θ_2，θ_3分别表示市场需求量高、中、低。如今公司经理经过专家咨询和自身的经验给出如下先验分布

$$\pi(\theta_1)=0.2, \pi(\theta_2)=0.7, \pi(\theta_3)=0.1$$

请你帮助经理进行决策。

解：用先验分布可以算得行动a_1，a_2，a_3的先验期望损失分别为

$$\bar{L}(a_1)=1.07, \bar{L}(a_2)=0.98, \bar{L}(a_3)=3.00$$

损失的先验方差分别为

$$VarL(\theta,a_1)=0.9241, VarL(\theta,a_2)=2.5636, VarL(\theta,a_3)=6.60$$

通过比较各个行动的先验期望损失大小，得a_2是先验期望准则下的最优行动。另一方面，注意到a_1的先验期望损失仅比a_2的先验期望损失多 1.07－0.98＝0.09，而a_1对应的先验方差比a_2对应的先验方差却小很多，所以，就本决策问题而言，为避免风险，a_1也是可采用的行动。

例 5.7 某大学药学院下属制药公司试制成功一种新的止痛剂。为了决定此新药是否投放市场，投放多少，价格如何等问题，需要先估计这种新的止痛剂在止痛剂市场中的占有率θ是多少。

解： 在这个决策问题中，新止痛剂在市场的状态就是占有率θ，所以状态集是$\Theta=\{\theta\}=[0,1]$。而决策者所要采取的行动是选一个$a\in[0,1]$作为θ的估计值，所以行动集$A=[0,1]$。

在前面的例子中，我们通过先确定收益函数，然后由损失函数与收益函数的关系再把损失函数确定下来。但在本例中，要估计收益函数本身就困难，所以我们改为直接估算损失。显然，偏低估计或偏高估计θ都会给制药公司带来损失。如果偏低估计θ，将会导致药物供不应求，本来能赚到的利润没有赚到，造成工厂损失。另一方面，偏高估计θ则导致药物供过于求，而且会给工厂造成更大的损失。因为供不应求只损失本应得到的利润；而供过于求将会造成库存增加，原材料和设备浪费，影响再生产。根据经验，公司经理认为供过于求给公司带来的损失要比供不应求带来的损失高一倍，而损失与供需误差的绝对值$|\theta-a|$成正比，即公司经理采用如下损失函数

$$L(\theta,a)=\begin{cases}(\theta-a), & \text{当} a\le\theta\le 1 \text{时}\\ 2(a-\theta), & \text{当} 0\le\theta<a \text{时}\end{cases}$$

由于这是全新的一种止痛剂，对于市场占有率θ无任何先验信息，因此采用区间[0,1]上的均匀分布作为θ的先验分布。于是行动a的先验期望损失为

$$\bar{L}(a)=\int_0^a 2(a-\theta)d\theta+\int_a^1(\theta-a)d\theta=\frac{3}{2}a^2-a+\frac{1}{2}$$

易知当$a=1/3$时使$\bar{L}(a)$达到最小，这样$a=1/3$就是先验期望准则下的最优行动。这里$a=1/3$实际上是市场占有率θ的估计值，故可记$\hat{\theta}=a=1/3$。

5.2.3 二行动线性决策问题的损失函数

在实际应用中常会遇到这样一类决策问题，其行动 a 只有两个可能：接受（a_1）与拒绝（a_2），而且在每个行动下的收益函数都是状态 θ 的线性函数

$$G(\theta,a)=\begin{cases} b_1+m_1\theta, & a=a_1 \\ b_2+m_2\theta, & a=a_2 \end{cases}$$

这类决策问题称为二行动线性决策问题，是一类既简单又常用的决策问题。

下面来讨论二行动线性决策问的损失函数。在这类问题中两个线性收益函数有一个交点为 $\theta_0=(b_1-b_2)/(m_2-m_1)$，并称 θ_0 为 θ 的平衡值（点）。为了确定起见，设 $m_1>m_2$。那么，当 $\theta\le\theta_0$ 时，$G(\theta,a_2)>G(\theta,a_1)$，故可得行动 a_1 和 a_2 的损失函数

$$L(\theta,a_1)=\max_a G(\theta,a)-G(\theta,a_1)=(b_2-b_1)-(m_2-m_1)\theta$$

$$L(\theta,a_2)=\max_a G(\theta,a)-G(\theta,a_2)=G(\theta,a_2)-G(\theta,a_2)=0$$

类似地，当 $\theta>\theta_0$ 时，$G(\theta,a_1)>G(\theta,a_2)$，故有

$$L(\theta,a_1)=\max_a G(\theta,a)-G(\theta,a_1)=0 \quad L(\theta,a_2)=\max_a G(\theta,a)-G(\theta,a_2)=(b_1-b_2)+(m_1-m_2)\theta$$

综合以上两种情况，二行动线性决策问题的损失函数是

$$L(\theta,a_1)=\begin{cases} (b_2-b_1)+(m_2-m_1)\theta, & \theta\le\theta_0 \\ 0, & \theta>\theta_0 \end{cases}$$

$$L(\theta,a_2)=\begin{cases} 0, & \theta\le\theta_0 \\ (b_1-b_2)+(m_1-m_2)\theta, & \theta>\theta_0 \end{cases}$$

当 $m_1<m_2$ 时，可以类似地写出损失函数。

例 5.8 （大学毕业生应聘决策问题）甲乙两厂生产同一种产品，其质量相同，零售价也相同，现在两厂都在招聘大学毕业生推销员，但所付报酬方式不同。推销甲厂产品每公斤给与报酬 3.5 元；推销乙厂产品每公斤给与报酬 3.0 元但每天还发津贴 10 元。问该大学毕业生应该应聘哪一厂家会有较高的报酬？

解：大学生应聘者面临两种选择：当甲厂推销员（a_1）或当乙厂的推销员（a_2），其每天的收入函数为（单位：元）

$$G(\theta,a)=\begin{cases}3.5\theta, & a=a_1\\ 10+3\theta, & a=a_2\end{cases}$$

其中θ是每天的销售量。显然，这是一个二行动线性决策问题。

为了写出损失函数，先求出平衡值$\theta_0=20$，然后不难得到损失函数

$$L(\theta,a_1)=\begin{cases}10-0.5\theta, & \theta\le 20\\ 0, & \theta>20\end{cases}$$

$$L(\theta,a_2)=\begin{cases}0, & \theta\le 20\\ -10+0.5\theta, & \theta>20\end{cases}$$

最后，如果该同学假期有去实习销售一段时间，那我们就可以估计出销售量θ的概率分布，从而帮助该大学毕业生做出决策。

§ 5.3 贝叶斯决策

5.3.1 什么是贝叶斯决策

在第 5. 1 节中我们总结出一个决策问题的三要素：（1）状态集$\Theta=\{\theta\}$及其上的先验分布$\pi(\theta)$；（2）行动集$A=\{a\}$；（3）定义在$\Theta\times A$上的损失函数$L(\theta,a)$。在这里，状态变量的先验分布是利用先验信息得到的，没有进行试验或者抽样。然而，我们知道要想做出更好的决策，就要有更符合当前实际的信息，因此，在做决策之前，先进行试验或抽样应该是很有意义的。回忆一下在前面章节所阐述的贝叶斯统计中，我们首先通过总结先验信息得到总体分布密度$p(x|\theta)$的参数θ的先验分布，而为了更新先验分布，也是先进行试验或者抽样，所以，这种想法和做法在不同领域却是一致的。现在，我们根据问题的实际情形，确定一个可观察的随机变量 X 作为总体，它的概率分布恰好把状态变量θ当作未知参数，也就是说，X 的分布密度函数具有形式$p(x|\theta)$。这样，对$p(x|\theta)$进行随机抽样或对总体做试验，就可以得到样本$\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)$（抽样信息），从而利用贝叶斯公式可将先验分布更新为后验分布，进而利用后验分布进行决策。

作为小结，我们看到所谓一个贝叶斯决策问题给定了，就是已知：（1）一个可观察的总体 X，它的密度函数（或概率函数）为 $p(x|\theta)$，其中 θ 是未知（状态）参数且 $\theta \in \Theta$；（2）在（状态）参数空间 Θ 上有一个先验分布 $\pi(\theta)$；（3）行动集 $A=\{a\}$；（4）在空间 $\Theta \times A$ 上定义的损失函数 $L(\theta, a)$。

注：

1. 从决策论角度看，一个贝叶斯决策问题比一个一般决策问题多了总体分布及其样本 $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)$。从贝叶斯统计角度看，一个贝叶斯决策问题比一个贝叶斯推断问题多了一个损失函数。因此，我们说把损失函数引进贝叶斯统计就形成了贝叶斯（统计）决策问题。

2. 当把统计推断问题看成决策问题时，如对 θ 做点估计，一般取行动集等于参数空间 $A=\Theta$；如对 θ 做区间估计，一个行动 a 就是一个区间，Θ 上的一切可能的区间构成行动集 A；如对 θ 做假设检验，则 A 只含有接受 a_1 和拒绝 a_2 两个行动。

5.3.2 决策函数

在贝叶斯决策问题中，由于试验或抽样得到了样本（新信息），由贝叶斯公式就可以获得后验分布。事实上，如果样本 $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ 而样本的联合密度函数为 $p(\mathbf{x}|\theta)$，那么 θ 的后验密度函数

$$\pi(\theta|\mathbf{x})=\frac{p(\mathbf{x}|\theta)\,\pi(\theta)}{m(x)}=\frac{p(\mathbf{x}|\theta)\,\pi(\theta)}{\int_{\Theta}p(\mathbf{x}|\theta)\,\pi(\theta)d\theta}$$

它是根据新信息对先验分布 $\pi(\theta)$ 的更新。于是，我们可以将损失函数 $L(\theta,a)$ 对后验分布 $\pi(\theta|\mathbf{x})$ 求期望并记为 $R(a|\mathbf{x})$，即

$$R(a|\mathbf{x})=E^{\theta|\mathbf{x}}[L(\theta,a)]$$

显然，这个期望是用后验分布计算的一种平均损失。在样本 $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ 给定的条件下，不同的行动 a 有不同的平均损失；在行动 a 给定的情况下，样本的变化也会使平均损失跟随着变化。请看下面的例子。

例 5.9 某公司的产品每 100 件装成一箱运交客户。在向客户交货前，面临如下两个行动的选择

a_1：一箱中逐一检查产品，a_2：一箱中一件产品也不检查

如果公司选择行动 a_1，则可保证交货时每件产品都是合格品，但因每件产品的检查费为 0.8 元，为此公司要支付检查费 80 元/箱。如果公司选择行动 a_2，则无检查费要支付，但客户发现不合格品时，按合同不仅允许更换，而且每件要支付 12.5 元的赔偿费。设 θ 表示一箱中的产品不合格率，那么公司的支付函数

$$W(\theta,a)=\begin{cases} 80, & a=a_1 \\ 12.5\times 100\theta, & a=a_2 \end{cases}$$

这时相应的损失函数不难得到，它是

$$L(\theta,a_1)=\begin{cases} 80-1250\theta, & \theta\le\theta_0 \\ 0, & \theta>\theta_0 \end{cases},\quad L(\theta,a_2)=\begin{cases} 0, & \theta\le\theta_0 \\ -80+1250\theta, & \theta>\theta_0 \end{cases}$$

其中平衡值 $\theta_0=0.064$。

（1）如果公司从过去的记录发现产品的不合格品率θ从来没有超过 0.12，则可取均匀分布$U(0,0.12)$作为θ的先验分布，这是我们前面讨论过的情形。

（2）如果公司决定从仓库随机取出一箱并抽取两件产品进行检查，设 X 为不合格产品数，则 $X \sim Bin(2,\theta)$（二项分布）。这时公司的支付函数为

$$W(\theta,a)=\begin{cases} 80, & a=a_1 \\ 1.6+1250\theta, & a=a_2 \end{cases}$$

相应的损失函数为

$$L(\theta,a_1)=\begin{cases} 78.4-1250\theta, & \theta\le\theta_0 \\ 0, & \theta>\theta_0 \end{cases},\quad L(\theta,a_2)=\begin{cases} 0, & \theta\le\theta_0 \\ -78.4+1250\theta, & \theta>\theta_0 \end{cases}$$

其中平衡值$\theta_0=0.06272$。当仅利用 $X \sim Bin(2,\theta)$ 这个抽样信息进行决策时，整个问题就构成统计决策问题，将在第 7 章进行讨论。

（3）当同时使用θ的先验分布$U(0,0.12)$和抽样信息 $X \sim Bin(2,\theta)$ 进行决策，整个问题就构成了贝叶斯（统计）决策问题。

下面我们继续讨论情形（3）所形成的贝叶斯决策问题。这时，θ的先验分布为$U(0,0.12)$而样本的分布为$X \sim Bin(2,\theta)$。由此可得 X 与θ的联合分布

$$h(x,\theta)=c^{-1}\binom{2}{x}\theta^{x}(1-\theta)^{2-x}, x=0,1,2, 0<\theta<0.12$$

其中 c＝0.12。而 X 的边际分布为

$$m(x)=c^{-1}\binom{2}{x}\int_0^c \theta^x(1-\theta)^{2-x}d\theta$$

在 x＝0，1，2 的情况下，分别计算得

$$m(0)=c^{-1}\int_0^c (1-\theta)^2 d\theta = c^{-1}[c-c^2+c^3/3]=0.8848$$

$$m(1)=2c^{-1}\int_0^c \theta(1-\theta)d\theta = 2c^{-1}[c^2/2-c^3/3]=0.1104 \quad m(2)=c^{-1}\int_0^c \theta^2 d\theta = 0.00482$$

这样就得到 X 的边际分布如下

x	0	1	2
$m(x)$	0.8848	0.1104	0.0048

从而容易写出θ的后验分布密度函数

$$\pi(\theta|x=0)=c^{-1}(1-\theta)^2/0.8848=9.4183(1-\theta)^2$$

$$\pi(\theta|x=1)=2c^{-1}\theta(1-\theta)/0.1104=150.9662\theta(1-\theta)$$

$$\pi(\theta|x=2)=c^{-1}\theta^2/0.0048=1736.1111\theta^2$$

其中$0<\theta<0.12$。注意这里共有三个后验分布密度，一个样本值对应一个后验分布。之所以如此，是因为我们把所有可能的情形都写出来了。最后，利用损失函数计算后验平均损失$R(a|x)$。由于行动a有两种，而 x 可取三个不同的值，所以这里$R(a|x)$就有 6 个可能的值，例如我们有

$$R(a_1|x=0)=\int_0^{\theta_0}(78.4-1250\theta)\times 9.4183(1-\theta)^2\,d\theta=22.2030$$

$$R(a_2|x=2)=1736.1111\times\int_{\theta_0}^{0.12}(-78.4+1250\theta)\theta^2 d\theta=36.8924$$

其余的后验平均损失可类似算得，现在把六个后验平均损失列表如下

表 5.2　后验平均损失

	x		
a	0	1	2
a_1	22.2030	15.0483	2.7986
a_2	15.6159	55.9783	36.8924

按照一般的想法，我们应该挑选使得后验平均损失最小的行动为最优行动，可是从上表5.2看到，假如选 a_1，那么 x=0 时 a_1 的后验平均损失不是最小的；假如选 a_2，那么 x=1,2 时 a_2 的后验平均损失不是最小的。换句话说，最优行动还与样本观察值 x 有关！当样本观察值改变了，最优行动也可能跟随改变，也就是说，最优行动是样本 x 的函数。在本例中，最优行动

$$a^* = \begin{cases} a_2, & x = 0 \\ a_1 & x = 1, 2 \end{cases}$$

如果我们定义

$$\delta^*(x) = \begin{cases} a_2, & x = 0 \\ a_1 & x = 1, 2 \end{cases}$$

即一个样本到行动集的函数，那么 $a^* = \delta^*(x)$。为了一般性的解决这类跟抽样有关的决策问题，需要引入决策函数这一重要概念。

定义 5.4 在给定的（贝叶斯）统计决策问题中，从抽样空间$\{\mathbf{x};\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)\}$到行动集$A$上的函数$\delta(\mathbf{x})$称为决策函数（也称为决策法则），符合该决策问题要求的决策函数全体称为它的决策函数类，用$D=\{\delta(\mathbf{x})\}$表示。

注：

1. 由于作为值域的行动集A不见得一定为数集，所以这里的函数概念比一般函数概念的含义有所推广,即允许函数值为非数量（在数学上这种函数或更一般的情形称为映照或映射 mapping）。当行动集A是某个数集时，决策函数其实就是统计量。

2. 在许多外文著作中，决策函数(decision function)更多地被称为决策法则(decision rule），后者决策分析的意味更浓。

3. 在贝叶斯决策问题中，我们的目的是要在它的决策函数类 D 中寻找决策函数$\delta(\mathbf{x})$，其后验平均损失$R(\delta(\mathbf{x})|\mathbf{x})$最小。

例 5.9 续 在例 5.9 的产品销售决策问题中，涉及到的抽样空间和行动集分别是

$$\chi=\{0,1,2\} \text{ 和 } A=\{a_1,a_2\}$$

因此该问题的决策函数类就是从 χ 到 A 上的所有可能的决策函数。不难看出这样的决策函数共有 8 个，可以全部列举如下

$$\delta_1(x)=a_1, x=0,1,2\,,\quad \delta_2(x)=\begin{cases}a_1, & x=0,1\\ a_2 & x=2\end{cases},\quad \delta_3(x)=\begin{cases}a_1, & x=0,2\\ a_2 & x=1\end{cases}$$

$$\delta_4(x)=\begin{cases}a_1, & x=0\\ a_2 & x=1,2\end{cases},\quad \delta_5(x)=\begin{cases}a_2, & x=0\\ a_1 & x=1,2\end{cases},\quad \delta_6(x)=\begin{cases}a_2, & x=0,2\\ a_1 & x=1\end{cases}$$

$$\delta_7(x)=\begin{cases}a_2, & x=0,1\\ a_1 & x=2\end{cases},\quad \delta_8(x)=a_2, x=0,1,2\,,$$

决策函数 $\delta_8(x)=a_2, x=0,1,2$ 就表示无论样本 x 取到什么样本值，都选择行动 a_2，又如

$$\delta_7(x)=\begin{cases}a_2, & x=0,1\\ a_1 & x=2\end{cases}$$

就表示当 x 为 0 或 1 时，选择行动 a_2；当 x 为 2 时，采取行动 a_1。其余几个决策函数可以类似解释。至此，我们就得到了该问题的决策函数类 D。

接下来，我们从表 5.2 上可以算得每个决策函数的后验平均损失，例如，对于 $\delta_5(x)$ 和 $\delta_6(x)$ 的后验平均损失分别为

$$R(\delta_5 | x) = \begin{cases} 15.6159, & x = 0 \\ 15.0483, & x = 1 \\ 2.7986, & x = 2 \end{cases}，\quad R(\delta_6 | x) = \begin{cases} 15.6159, & x = 0 \\ 15.0483, & x = 1 \\ 36.8924, & x = 2 \end{cases}$$

比较这两个后验平均损失可以看出

$$R(\delta_5 | x) \le R(\delta_6 | x), x = 0,1,2$$

按照后验平均损失越小越好的思想，可见 $\delta_5(x)$ 要优于 $\delta_6(x)$。类似地可得出其它几个决策函数的后验平均损失，在进行全部比较后会发现无论样本 x 取什么值，$\delta_5(x)$ 的后验平均损失总是最小的，即它满足方程

$$R(\delta_5 | x) = \min_{\delta \in D} R(\delta | x)$$

因此这个 $\delta_5(x)$ 就是我们要找的决策函数，它是“后验平均损失最小”意义下的最优决策函数。相关的正式定义将在下一小节给出。

5.3.3 后验风险与后验风险准则

定义 5.5 设在给定的贝叶斯决策问题中 $D=\{\delta(\mathbf{x})\}$ 是其决策函数类，$\pi(\theta|\mathbf{x})$ 是 θ 的后验分布，则称

$$R(\delta|\mathbf{x})=E^{\theta|\mathbf{x}}[L(\theta,\delta(\mathbf{x}))].$$

为决策函数 $\delta=\delta(\mathbf{x})$ 的后验风险。如果在决策函数类 D 中存在这样的决策函数 $\delta^*=\delta^*(\mathbf{x})$，它满足方程

$$R(\delta^*|\mathbf{x})=\min_{\delta\in D}R(\delta|\mathbf{x})$$

则称 $\delta^*(\mathbf{x})$ 为**决策问题在后验风险准则下的最优决策函数**（**贝叶斯决策函数**或**贝叶斯解**）。当行动集 A 为某个实数集时，$\delta^*(\mathbf{x})$ 显然是个统计量，如果这个决策问题是 θ 的估计问题，$\delta^*(\mathbf{x})$ 又被称为 θ **的贝叶斯估计**，并常记为 $\hat{\theta}(\mathbf{x})$ 或 $\hat{\theta}_B(\mathbf{x})$。

例 5.7 续 在新止痛剂的市场占有率θ的估计问题中已给出损失函数

$$L(\theta,\delta)=\begin{cases}2(\delta-\theta), & 0<\theta<\delta\\ \theta-\delta, & \delta\le\theta\le 1\end{cases}$$

并且假设$\theta\sim U(0,1)$。现在经理为获得新的抽样信息特决定试制一批新止痛剂投放到一个地区。然后从特约经销店得知，在 n 个购买止痛剂的顾客中有 x 人买了新的止痛剂，即购买新止痛剂的人数$X\sim Bin(n,\theta)$。当我们把先验信息和抽样信息应用到问题中来，就构成了贝叶斯决策问题。

根据前面所学知识可得θ的后验分布

$$\pi(\theta|x)=Be(x+1,n-x+1)$$

为了在后验风险准则下对θ做出贝叶斯估计，先计算决策函数$\delta=\delta(x)$的后验风险

$$R(\delta|x)=\int_0^1 L(\theta,\delta)\pi(\theta|x)d\theta$$

$$=2\int_0^{\delta}(\delta-\theta)\pi(\theta|x)d\theta+\int_{\delta}^{1}(\theta-\delta)\pi(\theta|x)d\theta$$

$$=3\int_0^{\delta}(\delta-\theta)\pi(\theta|x)d\theta+E(\theta|x)-\delta$$

利用积分号下求微分法则，可得如下方程

$$\frac{dR(\delta|x)}{d\delta}=3\int_0^{\delta}\pi(\theta|x)d\theta-1=0\text{，}\quad \int_0^{\delta}\pi(\theta|x)d\theta=\frac{1}{3}$$

这表明所要求得 $\delta=\delta(x)$ 是后验分布 $\pi(\theta|x)$ 的 1/3 分位数。如果没有具体的数据，那么就只能讨论到此了。

现在我们设 n=10 而 x＝1，即在市场调查中 10 位购买止痛剂的顾客中只有 1 人买了新的止痛剂。这时 θ 的后验分布为

$$\pi(\theta|x)=110\theta(1-\theta)^9, 0<\theta<1$$

它的 1/3 分位数 δ 满足如下方程

$$\int_0^{\delta}\theta(1-\theta)^9 d\theta=1/330$$

作变换 $u=1-\theta$ 后，上述积分可得到简化 $\int_{1-\delta}^{1}(u^9-u^{10})du=1/330$

即 $30(1-\delta)^{11}-33(1-\delta)^{10}+2=0$

若令 $1-\delta=y$，则上述方程可改为 $30y^{11}-33y^{10}+2=0$

利用求多项式方程的 R 命令

```
polyroot(c(2,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-33,30))
```

容易求出方程在区间（0，1）内的唯一实根 $y\approx 0.8928$，从而 $\delta=0.1072$ 是后验分布的 1/3 分位数。这表明，该公司新止痛剂的市场占有率 θ 的贝叶斯估计为 0.1072。

例 5.10　设样本 x 只能来自密度函数 $p_0(x)$ 或 $p_1(x)$ 中的一个。为了研究该样本到底来自哪个分布，考虑如下的简单假设检验问题：

$$H_0 : x \sim p_0(x),\ H_1 : x \sim p_1(x)$$

此时参数空间可认为是 $\Theta=\{0,1\}$，其中“$\theta=0$”表示 x 来自 $p_0(x)$；“$\theta=1$”表示 x 来自 $p_1(x)$。在 Θ 上的先验分布可设为

$$p(\theta=0)=\pi_0, p(\theta=1)=\pi_1$$

它们满足 $\pi_0+\pi_1=1$。从而由贝叶斯公式可得 θ 的后验分布为

$$P(\theta=i|x)=\begin{cases}\dfrac{p_0(x)\pi_0}{p_0(x)\pi_0+p_1(x)\pi_1}, & i=0\\ \dfrac{p_1(x)\pi_1}{p_0(x)\pi_0+p_1(x)\pi_1}, & i=1\end{cases}$$

在这个假设检验问题中也只有接受（用 0 表示）和拒绝（用 1 表示）两个行动，

即行动集 $A=\{0,1\}$。

构造损失函数如下

$$L(i,a)=\begin{cases}1, i\neq a\\ 0, i=a\end{cases}$$

这个损失函数也可用损失矩阵表示

$$L=\begin{array}{c c} \begin{array}{cc} a=0 & a=1 \end{array} & \\ \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} & \begin{array}{l}\theta=0\\ \theta=1\end{array}\end{array}$$

即假如决策正确就无损失，决策错误的损失为 1。

在上述假设下，可算得各行动的后验风险

$$R(a=0|x)=P(\theta=1|x)\text{，}\quad R(a=1|x)=P(\theta=0|x)$$

根据后验风险准则，可找到如下贝叶斯决策函数

$$\delta^*(x)=\begin{cases}0, & P(\theta=1|x)<P(\theta=0|x)\\ 1, & P(\theta=1|x)\geq P(\theta=0|x)\end{cases}$$

或

$$\delta^*(x)=\begin{cases}0, & p_1(x)\pi_1<p_0(x)\pi_0\\ 1, & p_1(x)\pi_1\geq p_0(x)\pi_0\end{cases}$$

在 $p_0(x)\neq 0$ 时，还可改写为

$$\delta^*(x)=\begin{cases}0, & \dfrac{p_1(x)}{p_0(x)}<\dfrac{\pi_0}{\pi_1}\\ 1, & \dfrac{p_1(x)}{p_0(x)}\geq\dfrac{\pi_0}{\pi_1}\end{cases}$$

从而我们看到贝叶斯决策函数 $\delta^*(x)$ 所决定的拒绝域

$$W=\left\{x:\frac{p_1(x)}{p_0(x)}\geq\frac{\pi_0}{\pi_1}\right\}$$

在形式上与奈曼-皮尔逊（Neyman-Pearson）引理给出的拒绝域一样。这说明在简单假设对简单假设的检验问题中经典的最优势（MP）检验相当于取特定损失矩阵下的贝叶斯决策函数，其临界值是两个先验概率的比值。

5.3.4 常用损失函数下的贝叶斯估计

常用损失函数有平方损失、加权平方损失、绝对值损失和线性损失函数等等。对于常用损失函数，θ 的贝叶斯估计往往可用公式表示。

定理 5.3（1）在平方损失函数 $L(\theta,\delta)=(\delta-\theta)^2$ 下，θ 的贝叶斯估计为后验均值，即 $\delta_B(\mathbf{x})=\hat{\theta}(\mathbf{x})=E(\theta|\mathbf{x})$。

（2）在加权平方损失函数 $L(\theta,\delta)=\lambda(\theta)(\delta-\theta)^2$ 下，θ 的贝叶斯估计为

$$\delta_B(\mathbf{x})=\hat{\theta}(\mathbf{x})=\frac{E(\theta\lambda(\theta)|\mathbf{x})}{E(\lambda(\theta)|\mathbf{x})}$$

其中 $\lambda(\theta)$ 为参数空间 Θ 上的正值函数。

证明：（1）显然是（2）的特例（取 $\lambda(\theta)\equiv 1$），所以只要证明（2）就好了。在加权平方损失函数下，决策函数 $\delta=\delta(\mathbf{x})$ 的后验风险为

$$R(\delta\mid\mathbf{x})=E[\lambda(\theta)(\delta-\theta)^2\mid\mathbf{x}]$$
$$=\int_\Theta[\delta^2\lambda(\theta)-2\delta\theta\lambda(\theta)+\theta^2\lambda(\theta)]\pi(\theta|\mathbf{x})d\theta$$

对后验风险 $R(\delta|\mathbf{x})$ 关于 δ 求导并令导数为 0，可得

$$\frac{d}{d\delta}R(\delta\mid\mathbf{x})=2\delta\int_\Theta\lambda(\theta)\pi(\theta|\mathbf{x})d\theta-2\int_\Theta\theta\lambda(\theta)\pi(\theta|\mathbf{x})d\theta=0$$

解上方程，即得

$$\delta_B(\mathbf{x})=\hat{\theta}(\mathbf{x})=\frac{\int_\Theta\theta\lambda(\theta)\pi(\theta|\mathbf{x})d\theta}{\int_\Theta\lambda(\theta)\pi(\theta|\mathbf{x})d\theta}=\frac{E(\theta\lambda(\theta)|\mathbf{x})}{E(\lambda(\theta)|\mathbf{x})}$$

因为

$$\frac{d^2}{d\delta^2}R(\delta\mid\mathbf{x})=2\int_\Theta\lambda(\theta)\pi(\theta|\mathbf{x})d\theta>0$$

所以 $\delta_B(\mathbf{x})$ 确实使后验风险达到最小，从而是 θ 的贝叶斯估计。

例 5.11 设样本 $X \sim Bin(n,\theta)$，而参数 $\theta \sim Beta(\alpha,\beta)$。请在损失函数

$$L(\theta,a)=\frac{(\theta-a)^2}{\theta(1-\theta)}$$

下寻求 θ 的贝叶斯估计。

解: 贝塔分布是参数 θ 的共轭先验，所以不难求得 θ 的后验分布为 $Beta\left(\alpha+x,\beta+n-x\right)$。

又令

$$\lambda(\theta)=\frac{1}{\theta(1-\theta)}$$

那么

$$E\left[\lambda(\theta)\theta\middle|x\right]=\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n)}{\Gamma(\alpha+x)\Gamma(\beta+n-x)}\int_0^1\theta^{\alpha+x-1}(1-\theta)^{\beta+n-x-2}\,d\theta$$

$$E\left[\lambda(\theta)\middle|x\right]=\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n)}{\Gamma(\alpha+x)\Gamma(\beta+n-x)}\int_0^1\theta^{\alpha+x-2}(1-\theta)^{\beta+n-x-2}\,d\theta$$

由定理 5.3，当 $1\le x\le n-1$ 时，θ 的贝叶斯估计为

$$\theta_B(x)=\delta_B(x)=\frac{E\left[\lambda(\theta)\theta\middle|x\right]}{E\left[\lambda(\theta)\middle|x\right]}=\frac{\alpha+x-1}{\alpha+\beta+n-2}$$

当 $x=0$ 时，如 $\alpha>1$, $\delta_B(x)=\dfrac{\alpha-1}{\alpha+\beta+n-2}$ （仍由上式得到）。如 $0<\alpha\le 1$ （上式则不可用了，因为分子小于等于 0），令

$$C=\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+n)}$$

直接考虑后验风险

$$R(\delta|x=0)=\int_0^1\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+n)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta+n-1}\frac{(\theta-\delta)^2}{\theta(1-\theta)}d\theta$$

$$=C\left[\int_0^1\theta^{\alpha}(1-\theta)^{\beta+n-2}d\theta-2\delta\int_0^1\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta+n-2}d\theta+\delta^2\int_0^1\theta^{\alpha-2}(1-\theta)^{\beta+n-2}d\theta\right]$$

当 $0<\alpha\le 1$ 时，上式前两个定积分是常数，而第三个定积分趋于正无穷大，故为使它（后验风险）最小，必须有 $\delta_B(x)=0$。类似地，当 $x=n$ 时，如 $\beta>1$, $\delta_B(x)=\dfrac{\alpha+n-1}{\alpha+\beta+n-2}$。如 $0<\beta\le 1$， $\delta_B(x)=1$。

例 5.12 设 $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ 是来自泊松分布

$$P(X=x)=\frac{\theta^x}{x!}e^{-\theta}, x=0,1,\cdots$$

的样本，若 θ 的先验分布取其共轭先验 $Gamma(\alpha,\lambda)$，即

$$\pi(\theta)=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}e^{-\lambda\theta}, \theta>0$$

其中超参数 α 与 λ 已知。容易看出 θ 的后验分布满足

$$\pi(\theta|\mathbf{x})\propto\theta^{n\bar{x}+\alpha-1}e^{-(n+\lambda)\theta}, \theta>0$$

即 θ 的后验分布实际上为 $Gamma(n\bar{x}+\alpha, n+\lambda)$，其中 $\bar{x}$ 为样本均值。由定理 5.3，在平方损失函数下 θ 的贝叶斯估计是后验均值

$$\delta_B(\mathbf{x})=\frac{n\bar{x}+\alpha}{n+\lambda}$$

把它改写为加权平均形式则为

$$\delta_B(\mathbf{x})=\frac{n}{n+\lambda}\times\bar{x}+\frac{\lambda}{n+\lambda}\times\frac{\alpha}{\lambda}$$

其中 $\bar{x}$ 为样本均值，α/λ 是先验均值。从上式可见 θ 的贝叶斯估计是样本均值和先验均值的加权平均。特别是当 $n\gg\lambda$ 时，样本均值 $\bar{x}$ 在贝叶斯估计中起主导作用；当 $\lambda\gg n$ 时，则先验均值 α/λ 在贝叶斯估计中起主导作用。所以贝叶斯估计综合利用了先验信息和样本信息，较经典估计 $\bar{x}$ 更为合理。

定理 5.4 在参数向量 $\boldsymbol{\theta}'=(\theta_1,\cdots\theta_k)$ 的情形下，对多元二次损失函数 $L(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\delta})=(\boldsymbol{\delta}-\boldsymbol{\theta})'Q(\boldsymbol{\delta}-\boldsymbol{\theta})$，其中 Q 为正定矩阵，$\boldsymbol{\theta}$ 的贝叶斯估计为后验均值向量

$$\boldsymbol{\delta}_B(\mathbf{x})=E(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})=\begin{bmatrix}E(\theta_1|\mathbf{x})\\ \vdots \\ E(\theta_k|\mathbf{x})\end{bmatrix}$$

证明：在多元二次损失函数下，决策函数向量 $\boldsymbol{\delta}(\mathbf{x})=(\delta_1(\mathbf{x}),\cdots,\delta_k(\mathbf{x}))'$ 的后验风险为

$$E[(\boldsymbol{\delta}-\boldsymbol{\theta})'Q(\boldsymbol{\delta}-\boldsymbol{\theta})|\mathbf{x}]=E\{[(\boldsymbol{\delta}-\boldsymbol{\delta}_B)+(\boldsymbol{\delta}_B-\boldsymbol{\theta})]'Q[(\boldsymbol{\delta}-\boldsymbol{\delta}_B)+(\boldsymbol{\delta}_B-\boldsymbol{\theta})]|\mathbf{x}\}$$

$$=(\boldsymbol{\delta}-\boldsymbol{\delta}_B)'Q(\boldsymbol{\delta}-\boldsymbol{\delta}_B)+E[(\boldsymbol{\delta}_B-\boldsymbol{\theta})'Q(\boldsymbol{\delta}_B-\boldsymbol{\theta})|\mathbf{x}]$$

上式第二个等式成立是因为 $E(\boldsymbol{\delta}_B-\boldsymbol{\theta}|\mathbf{x})=0$。因为上式第二个等式中的第二项为常量，而由假设 Q 为正定阵知，第一项仅在 $\boldsymbol{\delta}=\boldsymbol{\delta}_B(\mathbf{x})$ 时为零，在其它任何情形下都为正，因此后验风险当 $\boldsymbol{\delta}=\boldsymbol{\delta}_B(\mathbf{x})$ 时达到最小，即 $\boldsymbol{\delta}=\boldsymbol{\delta}_B(\mathbf{x})$ 是 $\boldsymbol{\theta}$ 的贝叶斯估计。

例 5.13 设 $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_r)$ 是来自多项分布 $M(n;\theta_1,\cdots\theta_r)$ 的一个样本，多项分布的概率分布函数为

$$p(\mathbf{x}|\theta_1,\cdots\theta_r)=\frac{n!}{x_1!\cdots x_r!}\theta_1^{x_1}\cdots\theta_r^{x_r},x_i\geq 0,\sum_{i=1}^{r}x_i=n$$

其中参数向量 $(\theta_1,\cdots\theta_r)$ 可取狄里克雷（Dirichlet）分布 $D(\alpha_1,\cdots\alpha_r)$（推广的贝塔分布）作为它的共轭先验分布，其密度函数是

$$\pi(\theta_1,\cdots\theta_r)=\frac{\Gamma(\alpha_1+\cdots+\alpha_r)}{\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_r)}\theta_1^{\alpha_1-1}\cdots\theta_r^{\alpha_r-1},\theta_i\geq 0,\sum_{i=1}^{r}\theta_i=1$$

并且分量 θ_j 的期望为 $E(\theta_j)=\alpha_j\Big/\sum_{i=1}^{r}\alpha_i$。若超参数 $(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$ 给定，则不难得到 $(\theta_1,\cdots,\theta_r)$ 的后验分布为

$$\pi(\theta_1,\cdots\theta_r|\mathbf{x})\propto\prod_{i=1}^{r}\theta_i^{x_i+\alpha_i-1}$$

即后验分布是狄里克雷分布 $D(x_1+\alpha_1,\cdots,x_r+\alpha_r)$。由定理 5.4，在多元二次损失函数下，$\theta_j$ 的贝叶斯估计为

$$\hat{\theta}_{jB}=E(\theta_j\,|\,\mathbf{x})=\frac{x_j+\alpha_j}{\sum_{i=1}^{r}(x_i+\alpha_i)},\ j=1,\cdots,r$$

如果取 $\alpha_1=\cdots=\alpha_r=1$，则狄里克雷分布退化为单纯形

$$\Theta=\{(\theta_1,\cdots\theta_r);\textstyle\sum_{i=1}^{r}\theta_i=1,\theta_1,\cdots\theta_r\geq 0\}$$

上的均匀分布 $\pi(\theta_1,\cdots\theta_r)\propto 1$，这是一个无信息先验分布。这时 θ_j 的贝叶斯估计化为

$$\hat{\theta}_{jB}=(x_j+1)\Big/(\textstyle\sum_{i=1}^{r}x_i+r),\ j=1,\cdots,r$$

定理 5.5（1）在绝对值损失函数 $L(\theta,\delta)=|\delta-\theta|$ 下，参数 θ 的贝叶斯估计 $\delta_B(\mathbf{x})$ 为后验分布 $\pi(\theta|\mathbf{x})$ 的中位数。

（2）在线性损失函数

$$L(\theta,\delta)=\begin{cases}k_0(\theta-\delta), & \delta\le\theta\\ k_1(\delta-\theta), & \delta>\theta\end{cases}\qquad k_0>0, k_1>0$$

下，θ 的贝叶斯估计 $\delta_B(\mathbf{x})$ 为后验分布 $\pi(\theta|\mathbf{x})$ 的 $k_0/(k_0+k_1)$ 分位数。

证明：（1）显然是（2）的特例（取 $k_0=k_1=1$ 即可），所以只要证明（2）就好了。首先计算任意决策函数 $\delta=\delta(x)$ 的后验风险

$$\begin{aligned}R(\delta|\mathbf{x})&=\int_{-\infty}^{\infty}L(\theta,\delta)\pi(\theta|\mathbf{x})d\theta\\&=k_1\int_{-\infty}^{\delta}(\delta-\theta)\pi(\theta|\mathbf{x})d\theta+k_0\int_{\delta}^{\infty}(\theta-\delta)\pi(\theta|\mathbf{x})d\theta\\&=(k_1+k_0)\int_{-\infty}^{\delta}(\delta-\theta)\pi(\theta|\mathbf{x})d\theta+k_0[E(\theta|\mathbf{x})-\delta]\end{aligned}$$

利用微积分中求极小值点的方法，可得如下方程

$$\frac{dR(\delta|\mathbf{x})}{d\delta}=(k_1+k_0)\int_{-\infty}^{\delta}\pi(\theta|\mathbf{x})d\theta-k_0=0$$

解此方程即得

$$\int_{-\infty}^{\delta}\pi(\theta|\mathbf{x})d\theta=\frac{k_0}{k_0+k_1}$$

又由于

$$\frac{d^2R(\delta|\mathbf{x})}{d\delta^2}=(k_1+k_0)\pi(\delta|\mathbf{x})>0$$

综上表明 δ 是后验分布 $\pi(\theta|\mathbf{x})$ 的 $k_0/(k_0+k_1)$ 分位数且使得后验风险最小，所以，θ 的贝叶斯估计 $\delta_B(\mathbf{x})$ 为后验分布 $\pi(\theta|\mathbf{x})$ 的 $k_0/(k_0+k_1)$ 分位数。

例 5.14 智商测验是心理学中常见的一项研究活动。考虑对一个儿童做智商测验，设测验结果 $X \sim N(\theta,100)$，其中 θ 为这个儿童的智商。再设过去对这个儿童做过多次的智商测验，从结果可认为 θ 的先验为正态分布 N（100，225）。如果该儿童在本次智商测验中得 115 分，且采用如下线性损失函数

$$L(\theta,\delta)=\begin{cases}2(\theta-\delta), & \delta\le\theta\\ (\delta-\theta), & \delta>\theta\end{cases}$$

求该儿童的智商 θ 的贝叶斯估计。

解： 由本书前面所学易知在给定样本 x 下，θ 的后验分布是正态分布

$$N((400+9x)/13, 8.32^2)$$

将本次智商测验结果 115 分代入，则 θ 的后验分布为 $N(110.38, 8.32^2)$。按照定理 5.5 的结论，因为 $k_0=2$，$k_1=1$，$k_0/(k_0+k_1)=2/3$，那么用如下 R 命令就可求出这个儿童的智商 θ 的贝叶斯估计为 113.9637。

```
qnorm(2/3,mean=110.38,sd=8.32)
[1] 113.9637
```

例 5.15 设 $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ 是来自均匀分布 $U(0,\theta)$ 的一个样本，又设 θ 的先验分布为帕累托分布 $Pareto(\alpha,\theta_0)$，其分布函数与密度函数分别为

$$F(\theta)=1-(\theta_0/\theta)^{\alpha},\theta\ge\theta_0，\quad \pi(\theta)=\alpha\theta_0^{\alpha}/\theta^{\alpha+1},\theta\ge\theta_0$$

其中超参数 $\alpha>1$，$\theta_0>0$ 为已知，并且它的数学期望 $E(\theta)=\alpha\theta_0/(\alpha-1)$。求：（1）在绝对值损失函数下，$\theta$ 的贝叶斯估计；（2）在平方损失函数下，θ 的贝叶斯估计

解： 在已知条件下，样本 $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ 与 θ 的联合分布为

$$h(\mathbf{x},\theta)=\frac{\alpha\theta_0^{\alpha}}{\theta^{\alpha+n+1}},0<x_i<\theta,i=1,\cdots,n,0<\theta_0\le\theta$$

设 $\theta_1=\max(x_1,\cdots,x_n,\theta_0)$，则样本 $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ 的边际分布为

$$m(\mathbf{x})=\int_{\theta_1}^{\infty}\frac{\alpha\theta_0^{\alpha}}{\theta^{\alpha+n+1}}d\theta=\frac{\alpha\theta_0^{\alpha}}{(\alpha+n)\theta_1^{\alpha+n}},0<x_i<\theta_1,i=1,\cdots,n$$

由此得 θ 的后验密度函数

$$\pi(\theta|\mathbf{x})=\frac{h(\mathbf{x},\theta)}{m(\mathbf{x})}=\frac{(\alpha+n)\theta_1^{\alpha+n}}{\theta^{\alpha+n+1}},\theta>\theta_1$$

这是更新的帕累托分布 $Pareto(\alpha+n,\theta_1)$。

（1）根据定理 5.5，在绝对值损失函数下，θ的贝叶斯估计$\hat{\theta}_{B1}$是后验分布的中位数，即$\hat{\theta}_{B1}$是下列方程的解

$$1-\left(\frac{\theta_1}{\theta_B}\right)^{\alpha+n}=\frac{1}{2}$$

解之即得此时θ的贝叶斯估计

$$\hat{\theta}_{B1}=2^{1/(\alpha+n)}\theta_1=2^{1/(\alpha+n)}\max(x_1,\cdots,x_n,\theta_0)$$

（2）在平方损失函数下，θ的贝叶斯估计$\hat{\theta}_{B2}$是后验均值，即

$$\hat{\theta}_{B2}=\frac{\alpha+n}{\alpha+n-1}\theta_1=\frac{\alpha+n}{\alpha+n-1}\max(x_1,\cdots,x_n,\theta_0)$$

5.3.5 贝叶斯决策下的假设检验

在实际应用中，不少贝叶斯统计决策问题只在有限多个行动中进行选择，这类问题就是有限行动决策问题，其中最重要的有限行动决策问题是假设检验问题。

设样本$\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)$来自总体$X\sim p(x|\theta)$，$\theta\in\Theta$，参数$\theta$的先验分布与后验分布分别为$\pi(\theta)$和$\pi(\theta|\mathbf{x})$。再设有如下两个假设

$$H_0:\theta\in\Theta_0,\qquad H_1:\theta\in\Theta_1\qquad (\Theta_0\cup\Theta_1=\Theta)$$

和两个行动a_0和a_1，其中a_0表示接受原假设H_0（拒绝备择假设H_1），a_1表示接受备择假设H_1（拒绝原假设H_0）。

根据问题的性质，我们选用如下损失函数

$$L(\theta,a_0)=\begin{cases}0, & \theta\in\Theta_0\\ k_0, & \theta\in\Theta_1\end{cases},\quad L(\theta,a_1)=\begin{cases}k_1, & \theta\in\Theta_0\\ 0, & \theta\in\Theta_1\end{cases}$$

$$L(\theta,a_0)=\begin{cases}0, & \theta\in\Theta_0\\ k_0, & \theta\in\Theta_1\end{cases},\quad L(\theta,a_1)=\begin{cases}k_1, & \theta\in\Theta_0\\ 0, & \theta\in\Theta_1\end{cases}$$

于是，行动 a_0 的后验风险为

$$R(a_0|\mathbf{x})=E^{\theta|\mathbf{x}}[L(\theta,a_0)]=\int_{\Theta_1}k_0\pi(\theta|\mathbf{x})d\theta=k_0P(\theta\in\Theta_1|\mathbf{x})$$

类似地，行动 a_1 的后验风险为

$$R(a_1|\mathbf{x})=k_1P(\theta\in\Theta_0|\mathbf{x})$$

依据后验风险准则，若

$$R(a_0|\mathbf{x})>R(a_1|\mathbf{x})\text{ 即 }k_0P(\theta\in\Theta_1|\mathbf{x})>k_1P(\theta\in\Theta_0|\mathbf{x})$$

则选用行动 a_1，即拒绝原假设 H_0。由于 $\Theta_0\cup\Theta_1=\Theta$，故有

$$P(\theta\in\Theta_0|\mathbf{x})=1-P(\theta\in\Theta_1|\mathbf{x})$$

于是上面不等式等价于

$$P(\theta\in\Theta_1|\mathbf{x})>\frac{k_1}{k_0+k_1}$$

用经典统计的术语，贝叶斯检验的原假设拒绝域为

$$M=\{\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n);P(\theta\in\Theta_1|\mathbf{x})>\frac{k_1}{k_0+k_1}\}$$

这与经典假设检验（如似然比检验）的拒绝域有完全一样的形式，只不过在经典假设检验中拒绝域的临界值由显著性水平确定，而在贝叶斯假设检验中则由损失函数和先验分布决定。

例 5.16 设 $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ 是来自正态分布 $N(\theta,\sigma^2)$ 的一个样本，其中 σ^2 已知，θ 的先验分布为其共轭先验 $N(\mu,\tau^2)$。如果取损失函数

$$L(\theta,a_0)=\begin{cases}0, & \theta\in\Theta_0\\ k_0, & \theta\in\Theta_1\end{cases}，\quad L(\theta,a_1)=\begin{cases}k_1, & \theta\in\Theta_0\\ 0, & \theta\in\Theta_1\end{cases}$$

试检验如下一对假设

$$H_0:\theta\in[\theta_0,\infty)=\Theta_0，\quad H_1:\theta\in(-\infty,\theta_0)=\Theta_1$$

解： 由本书前面所学知这里后验分布为 $N(\mu_n(\mathbf{x}),\eta_n^2)$，其中

$$\mu_n(\mathbf{x})=\frac{\frac{\sigma^2}{n}}{\frac{\sigma^2}{n}+\tau^2}\mu+\frac{\tau^2}{\frac{\sigma^2}{n}+\tau^2}\bar{x}，\quad \eta_n^2=\frac{\sigma^2\tau^2}{\sigma^2+n\tau^2}$$

于是

$$P(\theta\in\Theta_1|\mathbf{x})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\eta_n}\int_{-\infty}^{\theta_0}\exp\left\{-\frac{[\theta-\mu_n(\mathbf{x})]^2}{2\eta_n^2}\right\}d\theta$$

做标准化变化，令 $\lambda=[\theta-\mu_n(\mathbf{x})]/\eta_n$ ，有 $d\theta=\eta_n d\lambda$，从而上式成为

$$P(\theta\in\Theta_1|\mathbf{x})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{[\theta_0-\mu_n(\mathbf{x})]/\eta_n}\exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2}\right\}d\lambda=\Phi\left[\frac{\theta_0-\mu_n(\mathbf{x})}{\eta_n}\right]$$

其中，$\Phi(\bullet)$ 是标准正态分布函数。因此原假设的拒绝域成为

$$M=\{\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n);\Phi\left[(\theta_0-\mu_n(\mathbf{x}))/\eta_n\right]>\frac{k_1}{k_0+k_1}\}$$

如果给定了具体的数据，就可以决定拒绝还是接受原假设了。例如，设 $\sigma^2=100$，$n=1$，$\bar{x}=115$，θ 的先验分布为其共轭先验 $N(100,15^2)$。取 $k_0=2$，$k_1=1$，$\theta_0=150$。那么容易算得 $\mu_n(\mathbf{x})=110.3846$，$\eta_n^2=69.2308$，以及 $(\theta_0-\mu_n(\mathbf{x}))/\eta_n=4.7612$。再用如下 R 命令算出标准正态分布函数 $\Phi(4.7612)=0.9999$。

```
pnorm(4.7612,mean=0,sd=1)
[1] 0.999999
```

由于 $\Phi(4.7612)=0.9999>2/3=k_1/(k_0+k_1)$，因此样本落入原假设的拒绝域 M 内，即原假设被拒绝了。

§5.4 抽样的价值

我们已经能够利用抽样信息进行贝叶斯决策分析了，并且看到经抽样或试验等手段获得最新信息后再作决策往往会改善决策结果。但是，因为抽样或试验要花费人力、物力、财力等等费用，从事实际管理工作的企业家或决策者不得不考虑对所做决策问题进行抽样或试验的经济价值问题。为了把取得抽样信息需要的费用与获得信息后带来的收益进行比较，必须先引入几个重要概念。

5.4.1　完全信息期望值

为了理解完全信息期望值这个概念，请先看如下例子。

例 5.17　某大学毕业生创办的公司准备生产一种新产品，产量可能采取的行动是小批、中批、大批，分别记为 a_1, a_2, a_3，而市场销量可分为畅销、一般、滞销三种状态，分别记为 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$，同时通过市场调查，也得到状态的先验分布以及收益矩阵如下（单位：万元）

$$G = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 10 & 50 & 100 \\ 9 & 40 & 30 \\ 6 & -20 & -60 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \theta_1, p_1 = 0.6 \\ \theta_2, p_2 = 0.3 \\ \theta_3, p_3 = 0.1 \end{array}$$

在本例中，市场销量的三种状态的先验分布已经知道，它们中的任何一种状态都不是必然发生的（发生概率小于 1）。虽然如此，我们还是先来看看每种状态下的最大收益。在畅销（θ_1）状态下。如果能采取行动 a_3，那肯定是最优行动，因为这时收益最大

$$G(\theta_1, a_3) = \max_{a \in A} G(\theta_1, a) = 100$$

其中 $A=\{a_1,a_2,a_3\}$，类似地，当未来市场是 θ_2 或 θ_3 状态时，决策者选择行动 a_2 或 a_1 是相应的最优行动，因为这时的行动也使收益最大

$$G(\theta_2,a_2)=\max_{a\in A}G(\theta_2,a)=40 \text{ 或 } G(\theta_3,a_1)=\max_{a\in A}G(\theta_3,a)=6$$

但是，除非你是无所不能的先知，对于未来市场，哪种状态会出现实际上不可能预先知道，我们只可能知道状态的先验概率分布，因此，我们只能按照先验分布求出最大收益的先验期望值（即最大收益平均值），具体到本例，那就是

$$\begin{aligned}E^{\theta}[\max_{a\in A}G(\theta,a)]&=p_1\max_{a\in A}G(\theta_1,a)+p_2\max_{a\in A}G(\theta_2,a)+p_3\max_{a\in A}G(\theta_3,a)\\&=0.6\times100+0.3\times40+0.1\times6=72.6\end{aligned}$$

然而，这个最大收益的先验期望值一般而言仍然仅是一种不可实现的美好愿望，因为这是用每个状态下的最大收益来求期望的。我们真正能期待的是先验期望收益的最大值（即用先验期望准则作决策），本例的先验期望收益的最大值是

$$\max_{a\in A} E^{\theta}[G(\theta,a)] = E^{\theta}[G(\theta,a_3)] = 63$$

这样，最大收益的先验期望值与先验期望收益的最大值之差为 72.6－63＝9.6（万元），这个就是完全信息给决策者带来的好处（虽然不可能实现），由于它是在平均意义下算出的，故称为完全信息期望值（Expected Value of Perfect Information），记为 EVPI。注意 EVPI 是指完全信息给决策者带来的额外好处，虽然这额外好处实际上无法达到，但可让决策者思考是否值得进一步努力，如果 EVPI 很大，决策者就应该进一步考虑是否要取得更多的信息，以期待改善所做的决策，所以 EVPI 还是一个非常有实用价值的量。下面我们给出 EVPI 的正式定义。

定义 5.6 设某个决策问题有状态集$\Theta=\{\theta\}$，其上有先验概率分布为$\pi(\theta)$，另外，行动集$A=\{a\}$，收益函数为$G(\theta,a)$。则此决策问题的完全信息期望值定义为

$$EVPI=E^{\theta}[\max_{a\in A}G(\theta,a)]-\max_{a\in A}\left\{E^{\theta}[G(\theta,a)]\right\}$$

显然，如a^*是先验期望准则下的最优行动，则

$$EVPI=E^{\theta}[\max_{a\in A}G(\theta,a)]-E^{\theta}[G(\theta,a^*)]$$

不仅如此，如果已知与收益函数为$G(\theta,a)$相应的损失函数$L(\theta,a)$，则还有如下定理。

定理 5.6 设在一个决策问题中$\pi(\theta)$是状态集$\Theta=\{\theta\}$上的先验分布，a^*是先验期望准则下的最优行动，则$EVPI=E^{\theta}[L(\theta,a^*)]$，其中$L(\theta,a)$是与收益函数为$G(\theta,a)$相应的损失函数。

证明：假设状态是连续情形，则

$$EVPI = E^{\theta}[\max_{a\in A} G(\theta,a)] - E^{\theta}[G(\theta,a^*)]$$
$$= E^{\theta}[\max_{a\in A} G(\theta,a) - G(\theta,a^*)] = E^{\theta}[L(\theta,a^*)]$$

如果状态是离散情形，结果类似可证。

注：由于定理 5.6 的简洁性，我们更常常把它作为完全信息期望值的定义来使用，即定义 $EVPI = E^{\theta}[L(\theta,a^*)]$。

在例 5.17 中，由收益矩阵可容易算得损失矩阵

$$L = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 90 & 50 & 0 \\ 31 & 0 & 10 \\ 0 & 26 & 66 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \theta_1, p_1 = 0.6 \\ \theta_2, p_2 = 0.3 \\ \theta_3, p_3 = 0.1 \end{array}$$

而 a_3 是这个决策问题在先验期望准则下的最优行动，所以

$$EVPI = E^{\theta}[L(\theta,a_3)] = 0\times 0.6 + 10\times 0.3 + 66\times 0.1 = 9.6 \text{（万元）}$$

这与前面算得的结果是一样的，而这里的计算更加简洁。

5.4.2 抽样信息期望值

完全信息期望值 EVPI 表示决策者若能掌握完全信息但却没有使用时的先验期望损失值。对后验分布显然也可以进行类似讨论。设 $\pi(\theta|\mathbf{x})$ 为样本 $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)$ 给定下 θ 的后验分布，$\delta^*(\mathbf{x})$ 为据此后验分布所确定的贝叶斯决策函数，再用此后验分布计算在 $\delta^*(\mathbf{x})$ 下损失函数 $L(\theta,\delta^*(\mathbf{x}))$ 的后验期望值 $E^{\theta|\mathbf{x}}L(\theta,\delta^*(\mathbf{x}))$ 并称之为完全信息后验期望值，记为

$$PEVPI = E^{\theta|\mathbf{x}}L(\theta,\delta^*(\mathbf{x}))$$

显然，PEVPI 只有在样本 $\mathbf{x}$ 给定时才能计算出来，但现在我们想进行抽样但还未执行，所以 PEVPI 仍是依赖于样本 $\mathbf{x}$ 的统计量，这样就无法事先评估抽样会给决策带来多少增益，为消除此种随机性影响，用样本 $\mathbf{x}$ 的边际分布 $m(\mathbf{x})$ 对 $E^{\theta|\mathbf{x}}L(\theta,\delta^*(\mathbf{x}))$ 再求一次期望，并称为 PEVPI 期望值，于是

$$\text{PEVPI 期望值} = E^{\mathbf{x}}E^{\theta|\mathbf{x}}L(\theta,\delta^*(\mathbf{x}))$$

一般而言，抽样信息的获得会增加决策者对状态的了解，从而期望损失会减少，这个减少的数量称为抽样信息期望值（Expected Value of Sampling Information）,记为 EVSI，它的定义如下。

定义 5.7 设在一个贝叶斯决策问题中，a^* 是先验期望准则下的最优行动，$\delta^*(\mathbf{x})$ 是后验风险准则下的最优决策函数。则 EVPI 与 PEVPI 期望值的差值称为抽样信息期望值，并记为

$$EVSI = E^{\theta}L(\theta, a^*) - E^{\mathbf{x}}E^{\theta|\mathbf{x}}L(\theta, \delta^*(\mathbf{x}))$$

从上述定义看出，EVSI 是由于抽样给决策者带来的增益。下面的例子可以帮助我们理解上述概念和计算。

例 5.18 某机器制造厂的某一零件由某街道厂生产，每批 1000 只，其次品率 θ 的概率分布如下：

θ	0.02	0.05	0.10
$\pi(\theta)$	0. 45	0. 39	0. 16

机器制造厂在整机装备时，如发现装上零件是次品，则必须更换，并且每换一只，由街道厂赔偿损失费 2. 20 元，但也可以在送装前采取全部检查的办法，使每批零件的次品率降为 1%，但街道厂必须支付检查费每只 0. 10 元。现在街道厂面临如下两个行动的选择问题：

a_1：一批中不检查任何一只零件；　a_2：一批中检查每一只零件。

若选择行动 a_1，每批零件街道厂需支付的检查费和赔偿费为

$$W(\theta,a_1)=1000\theta\times 2.20=2200\theta$$

若选择行动 a_2，每批零件街道厂需支付的检查费和赔偿费共为

$$W(\theta,a_2)=1000\times 0.10+1000\times 1\%\times 2.20=122$$

由此可写出支付矩阵与损失矩阵

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \end{array} \\ W= & \begin{pmatrix} 44 & 122 \\ 110 & 122 \\ 220 & 122 \end{pmatrix} \end{array} ,\qquad \begin{array}{ccc} & \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \end{array} & \\ L= & \begin{pmatrix} 0 & 78 \\ 0 & 12 \\ 98 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{array} \end{array}$$

并可算得 a_1 与 a_2 的先验期望损失：

$$E^{\theta}L(\theta,a_1)=15.68\text{ 元}，\quad E^{\theta}L(\theta,a_2)=39.78\text{。}$$

在先验期望准则下， a_1 是最优行动，从而 EVPI＝15.68（元）。

如今决策者想从每批中任取三只零件进行检查，根据不合格品的个数（用 x 表示）来决定是采取行动a_1还是行动a_2，并想知道如此抽样能否给决策者带来增益？增益是多少？为研究这个问题，我们首先要确定这个贝叶斯决策问题的最优决策函数是什么？由于试验结果 x 可能取 0，1，2，3 等 4 个值中任何一个，所以由{0，1，2，3}到{a_1，a_2}上的任一映射$\delta(x)$都是这个问题的决策函数。此种决策函数共有 16 个，为了寻找最优决策函数和抽样信息期望值，我们的分以下几步进行计算。

第 1 步，计算θ的后验分布。易知抽样结果 x 服从二项分布$Bin(3,\theta)$，即

$$P(x|\theta)=\binom{3}{x}\theta^x(1-\theta)^{3-x}, x=0,1,2,3$$

利用给定的先验分布 $\pi(\theta)$ 可以算出 x 的边缘分布

$$m(x)=\sum_{i=1}^{3}P(x|\theta_i)\pi(\theta_i)$$

如 x=0 时（x＝1，2，3 类似可算），

$$m(0)=(1-\theta_1)^3\pi(\theta_1)+(1-\theta_2)^3\pi(\theta_2)+(1-\theta_3)^3\pi(\theta_3)$$

$$=0.98^3\times0.45+0.95^3\times0.39+0.90^3\times0.16$$

＝0.8745

当然，我们应该充分利用 R 程序以减轻手工计算负担，R 命令如下：

```
library(BayesianStat)
Bindiscrete(x, n=3, pi=c(0.02,0.05,0.10), pi.prior=c(0.45,0.39,0.16), n.pi=3)
```

由 R 命令计算结果，可整理得表 5.3 和表 5.4

表 5.3　X 的边际分布列

X	0	1	2	3
$m(x)$	0.8745	0.1176	0.0076	0.0002

表 5.4　后验分布列 $\pi(\theta|x)$

x	0	1	2	3
θ_1=0.02	0.4843	0.2202	0.0694	0.0170
θ_2=0.05	0.3824	0.4490	0.3643	0.2296
θ_3=0.10	0.1333	0.3308	0.5663	0.7525

第 2 步，计算各行动的后验期望损失 $E^{\theta|x}L(\theta,a)$。如在 x＝0 时用后验分布 $\pi(\theta\big|x=0)$ 可算得行动 a_1 与 a_2 的后验期望损失

$$E^{\theta|x=0}L(\theta,a_1)=0\times0.4843+0\times0.3824+98\times0.1333=13.0634$$

$$E^{\theta|x=0}L(\theta,a_2)=78\times0.4843+12\times0.3824+0\times0.1333=42.3642$$

类似地可算得 x＝1，2，3 时的各行动的后验期望损失并整理如表 5.5

表 5.5　后验期望损失（后验风险）

x	0	1	2	3
$E^{\theta\|x}L(\theta,a_1)$	13.0634	32.4184	55.4484	95.8636
$E^{\theta\|x}L(\theta,a_2)$	42.3642	22.5636	9.5532	0.4464

第 3 步，确定最优决策函数。根据后验风险愈小愈好的准则，利用表 5.5 就得到最优决策函数

$$\delta^*(x)=\begin{cases} a_1, & x=0 \\ a_2, & x=1,2,3 \end{cases}$$

第 4 步，计算完全信息后验期望值 PEVPI。因为抽样结果有四个，故有四个 PEVPI，它们分别为第 2 步表 5.5 中每个 x 值下的最小后验期望损失，即

x	0	1	2	3
PEVPI	13.0634	22.5636	9.5532	0.4464

第 5 步，计算 PEVPI 期望值

$$
\begin{aligned}
&E^{x}E^{\theta|x}L(\theta,\delta^{*}(x))\\
&=13.0634\times0.8745+22.5636\times0.1176+9.5532\times0.0076+0.4494\times0.0002\\
&=14.1501
\end{aligned}
$$

第 6 步，计算抽样信息期望值

$$EVSI = EVPI - E^{x}E^{\theta|x}L(\theta,\delta^{*}(x)) = 15.68 - 14.15 = 1.53\text{（元）}$$

这表明在每批产品（1000 只）中随机抽 3 只进行检查，根据抽检结果 x 定出的最优决策函数 $\delta^{*}(x)$ 要比抽样前的最优行动可减少损失 1.53 元，或者说，在不考虑抽样费用的前提下抽样是值得去进行的。

5.4.3 最佳样本量的确定

在一个决策问题中，抽样往往可以给决策者增加有价值的信息，从而可能减少在决策中的失误，然而抽样需要大量的人力物力，作为一个经营管理决策者，在抽样前自然就得思考：“抽样是否值得进行？如果要抽样那么样本量多大为好？”这些问题上一小节并没有给出回答。在本小节，我们试图来回答这些问题，我们引进“抽样净益期望值”和“最佳样本量”概念并讨论其计算方法。

一般抽样费用或抽样成本由固定成本 C_f 与可变成本 $C_v \cdot n$（C_v 表示单位可变成本）两部分组成，抽样成本可用下式表示

$$C(n) = C_f + C_v \cdot n \ (n \geq 1)$$

显然，抽样成本是样本量 n 的函数。当 $n=0$ 时，$C(n)$ 规定为零，显然这是符合实际的。

另一方面，在上一小节我们讨论了在不考虑抽样成本的前提下抽样的价值即抽样信息期望值（EVSI），从而抽样信息期望值扣除抽样成本后，余下的就是由抽样所能获得的净增益，这个净增益称为**抽样净益期望值**（Expected Net Gain from Sampling）,记为ENGS，即

$$ENGS(n) = EVSI(n) - C(n)$$

由于抽样成本和抽样信息期望值都是样本量 n 的函数，一般而言，它们都随 n 的增大而增大，问题是增加速度可能不一样，以至于可能会使抽样净益出现负值。如果对任何自然数 n，都有 $ENGS(n) \le 0$，这表明：用抽样来获取信息就费用而言是不合算的，因而不宜进行抽样。如果能找到一个 n，使 $ENGS(n) > 0$，则可以考虑进行抽样。

我们如能找到满足 $ENGS(n)>0$ 的某个 n，这就说明该问题进行样本量为 n 的抽样是值得的。但假如满足 $ENGS(n)>0$ 的 n 不止一个，那应该用哪一个呢？一般说来，样本量越大，抽样费用也越大。若样本量大的抽样能给我们带来大的抽样净益期望值，那样本量大一些自然可取。从这个角度出发，称使得抽样净益期望值达到最大的样本量 n^* 为最佳样本量，即满足以下方程的 n^* 为最佳样本量

$$ENGS(n^*)=\max_{n\geq 1} ENGS(n)$$

如果最佳样本量不止一个（这种情况不常见），那就选其中最小的一个作为最佳样本量。

要使抽样可行，抽样成本$C(n)$显然不应超过抽样信息期望值$EVSI(n)$,而$EVSI(n)$也不会超过完全信息期望值$EPVI$。由此可知，最佳样本量n^*应满足如下不等式

$$C(n^*) \le EVSI(n^*) \le EVPI$$

显然上式第一个等号仅在$n^*=0$时成立。将$C(n)=C_f+C_v \cdot n$ 代入上式，可以得到最佳样本量n^*的一个上界

$$n^* \le \frac{EVPI - C_f}{C_v}$$

如果上式右端小于 1，则取$n^*=0$，即不宜进行抽样；如果上式右端大于 1 但非正整数，则取其整数部分为n^*的上界。

例 5.19　某商店考虑是否向一家公司订购电器。该公司生产的电器有一等品和二等品两个等级，一等品与二等品的数量之比在第一车间是 1:1 在第二车间是 2:1，第一车间和第二车间产量占比分别为 0.45 和 0.55，但买家每次随机抽到第一车间产品或第二车间产品。如果买到的是一等品，与一般市场价格相比较，每只可赚 10 元。如果买到二等品，每只则要亏 15 元。假如该公司允许在一批电器中抽取若干只进行检验，根据抽样结果决定是否订购该（900 只）电器。但抽样的费用为每只 20 元，总固定费用为零。请你帮助这个商店估算抽多少只做样本最合算。

解：记

a_1表示订购该公司生产的电器；　a_2表示不订购该公司生产的电器

θ_1表示在第一车间取得产品；　θ_2表示在第二车间取得产品

如果在第一车间抽得产品，则行动a_1的每只平均收益为

$$10\times\frac{1}{2}+(-15)\times\frac{1}{2}=-2.5$$

如果在第二车间抽得产品，则行动a_1的每只平均收益为

$$10\times\frac{2}{3}+(-15)\times\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$$

因为商店打算订购 900 只，于是可以算得收益矩阵和损失矩阵如下（单位：元）

$$G=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -2250 & 0 \\ 1500 & 0 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \theta_1, 0.45 \\ \theta_2, 0.55 \end{array}, \quad L=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2250 & 0 \\ 0 & 1500 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \theta_1, 0.45 \\ \theta_2, 0.55 \end{array}$$

从而行动a_1和a_2的先验期望损失

$$E^{\theta}[L(\theta,a_1)]=1012.5, \qquad E^{\theta}[L(\theta,a_2)]=825$$

由此易见a_2是最优行动，这时的

$$EVPI=E^{\theta}[L(\theta,a_2)]=825$$

再由最佳样本量n^*的上界公式得

$$n^* < \frac{825}{20} = 41.25$$

即$n^* \le 41$。这里 41 就是本例中最佳样本量的一个上界。

由于最佳样本量n^*有明确上界，用穷举法将所有$EVSI(n)$和抽样成本$C(n)$从而$ENGS(n)$算出，然后选出其中最大正值$ENGS(n)$所对应的n即为最佳样本量n^*。在本例，最佳样本量n^*的上界为 41，以下来计算各种$n(\le 41)$下的抽样净益期望值$ENGS(n)$，从而确定n^*，以$n=2$为例说明$ENGS(n)$的计算。

如果$n=2$即抽取两只电器，用x_2表示这两只中二等品的个数，可求得抽样净益如下：

第 1 步，计算θ的后验分布：

利用二项分布公式$P(x_2|\theta)=\begin{pmatrix} 2 \\ x_2 \end{pmatrix}\theta^{x_2}(1-\theta)^{2-x_2}$,先计算出$x_2$的具体分布如表 5.6，再计算边际分布$m(x_2)$和$\theta$的后验分布如表 5.7 所示。

表 5.6　二等品个数 x_2 的概率分布

θ	$\theta_1=0.5$	$\theta_2=0.3333$
$\pi(\theta_i)$	0.45	0.55
$P(X_2=0\mid\theta_i)$	0. 2500	0. 4444
$P(X_2=1\mid\theta_i)$	0. 5000	0. 4444
$P(X_2=2\mid\theta_i)$	0. 2500	0. 1111

表 5. 7　边际分布 $m(x_2)$ 和 θ 的后验分布

x_2	$m(x_2)$	$\pi(\theta_1\mid x_2)$	$\pi(\theta_2\mid x_2)$
0	0. 3569	0. 3152	0. 6848
1	0. 4695	0. 4793	0. 5207
2	0. 1736	0. 6480	0. 3520

表 5.8　后验期望损失（后验风险）

x_2	$E^{\theta\|x_2}[L(\theta,a_1)]$	$E^{\theta\|x_2}[L(\theta,a_2)]$
0	709	1027
1	1078	781
2	1458	528

注：轻松一点，表 5.6 和表 5.7 可用如下 R 命令算得

Bindiscrete(x, n=2, pi=c(0.5,1/3,0), pi.prior=c(0.45,0.55,0), n.pi=3)

#本来 n.pi=2 但此命令要求它大于 2，故人为增加了θ的一个取值 0，但其先验概率取 0，这#样 n.pi=3 能符合命令的要求，同时能正确算出边际分布和后验分布

第 2 步，计算后验完全信息期望值：

用后验分布对每一个行动 a 求得损失的后验期望值，如表 5.8，这时，按照后验风险准则，最优决策函数为

$$\delta^*(x_2)=\begin{cases} a_1, & x_2=0, \\ a_2, & x_2=1,2. \end{cases}$$

故 $PEVPI(2)$ 的期望值

$$E^{x_2}\{E^{\theta|x_2}[L(\theta,\delta^*(x_2))]\}=709\times0.3569+781\times0.4695+528\times0.1736=711$$

第 3 步，计算抽样信息期望值：

$$EVSI(2)=EVPI-PEVPI(2)\text{的期望值}=825-711=114$$

第 4 步，计算抽样净益期望值：

$$ENGS(2)=EVSI(2)-C(2)=114-40=74$$

以此类推，可以把各种样本量 n 的抽样净益期望值算出，这些利用计算机来进行都是小菜一碟的事。最后为了好观察和分析，把结果列于表 5.9 中。从表 5.9 中可以看出，抽样净益期望值最大为 101，相应的样本量为 $n^*=7$ 为最佳样本量，这时抽样信息期望值为 241。

Homework:

P111-113, 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 5.7, 5.8,

5.10, 5.11, 5.12, 5.13, 5.14