第五章　差分方程方法

谭　忠

厦门大学数学科学学院

目录

1 源头问题与当今应用

许多现象

在发展变化时,

其因素都是

以等时间间隔

为周期变化着的.

源头问题与当今应用

例如，

银行中的

定期存款、

外贸出口额

按月统计、

源头问题与当今应用

国民收入

按年或月统计、

产品的产量

按月统计、

股票按几秒

计数等等.

源头问题与当今应用

这类变量称为

离散型变量，

一般是通过

某种机理

源头问题与当今应用

或数据本身的规律

将后面的数据

与前面一个

或两个数据

源头问题与当今应用

之间建立定量关系

来预测未来的发展，

这种描述离散型

变量之间的

定量关系

就是差分方程，

源头问题与当今应用

一、源头问题：

差分方程是

含有取离散值变量的函数

及其差分的方程，

源头问题与当今应用

早期是作为

有限差分学的部分,

并同步发展起来.

源头问题与当今应用

十七世纪到十八世纪，

伯努利(Bernoulli)、

欧拉(Euler)、

牛顿(Newton)等

源头问题与当今应用

分别在研究

函数插补法

和组合计数问题的同时，

建立了差分方程理论.

源头问题与当今应用

此后，随着

数值分析、

离散数学

以及各种数学物理问题

的深入研究，

源头问题与当今应用

差分方程理论

得到了进一步的发展.

近年来,

由于计算机的迅速发展,

源头问题与当今应用

信息科学、

工程控制、

医学、生物数学、

现代物理、

源头问题与当今应用

社会经济

等自然科学

和边缘学科

所研究处理的

源头问题与当今应用

很多重要问题，

都是由差分方程

来描述的，

如在种群生态学中，

源头问题与当今应用

用差分方程

来描述种群数量的

变化规律：

在经济学中

源头问题与当今应用

用来描述

价格和需求，

成本与收益

等之间的关系等，

源头问题与当今应用

在控制论中，
被称为采样数据
控制系统的
数学模型
也是差分方程.

源头问题与当今应用

差分方程也出现
在微分方程的
离散化研究中.
但是它并不是
微分方程的特例,

源头问题与当今应用

它具有自身的

特殊性和理论体系.

人们甚至发现

在解的振动性

源头问题与当今应用

或渐近性等方面，

彼此有很多本质差别.

在研究上

差分方程更难.

二、当今应用：

1、一阶线性差分方程问题

例题5.1.1 人口问题：

源头问题与当今应用

令$\boldsymbol{P_n = P(n)}$表示

某人口群体

在时间段n

开始时的总数，

若按年计算，
设初始年为0，
试研究人口的
变化趋势.

例题5.1.2

借款问题：

设P(0)是借款，

b是利率(通常用百分数$i\%$表示)，

试研究账单上的

钱的总数的变化趋势.

源头问题与当今应用

2、二阶线性差分方程问题

有的实际问题

可以建立起

二阶差分方程，

比如1202年由
比萨的Leonardo
(列奥纳多又称斐波那契)
提出Fibonacci问题.

例题5.1.3

Fibonacci问题：

现有一对家兔，

设每对成兔

源头问题与当今应用

一个月后每月生

一对幼兔，

而每对幼兔

在一个月后变成成兔，

源头问题与当今应用

如果家兔不死，

问在n个月后

将有多少对家兔？

源头问题与当今应用

3、差分方程组的问题

有的实际问题

涉及多个变量的情形.

例题5.1.4

凯恩斯（Keynes.J.M）

乘数动力学：

源头问题与当今应用

设Y_t表示t期

国民收入，

C_t为t期消费，

I_t为t期投资，

源头问题与当今应用

I_0为自发

（固定）投资，

ΔI 为

周期固定投资增量.

源头问题与当今应用

如何确定这些
变量之间的
量化关系？
下面我们将
介绍建模方法。

谢　谢!

2 差分思想与建模方法

一、基本概念与基本理论:

1、函数的差分

设自变量t

取离散的等间隔整数值:

$$t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

y_t是t的函数，

记作$y_t = f(t)$.

显然，y_t的

取值是一个序列.

当自变量由t

改变到$t+1$时，

相应的函数值之差

称为函数$y_t = f(t)$

在t的**一阶差分**，

记作$\triangle y_t$，即

$$\triangle y_t = y_{t+1} - y_t$$

$$= f(t+1) - f(t)$$

由于函数$y_t = f(t)$的
函数值是一个序列,
按一阶差分的定义,
差分就是序列的
相邻值之差.

其它定义:

序列$A = a_0, a_1, a_2, a_3, \cdots$的一阶差分是

$$\triangle a_0 = a_1 - a_0$$

$$\triangle a_1 = a_2 - a_1$$

$$\triangle a_2 = a_3 - a_2$$

$$\triangle a_3 = a_4 - a_3$$

对每个正整数n,
第n个一阶差分是

$$\triangle a_n = a_{n+1} - a_n$$

按一阶差分的定义,
可以定义高阶差分:

函数$y_t = f(t)$

在t的一阶差分的差分

为函数在t的二阶差分,

记作$\triangle^2 y_t$,

即$\triangle^2 y_t = \triangle(\triangle y_t)$

$= \triangle y_{t+1} - \triangle y_t$

$= (y_{t+2} - y_{t+1}) - (y_{t+1} - y_t)$

$= y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t$

同理$y_t = f(t)$在t的三阶差分为

$$\triangle^3 y_t = \triangle(\triangle^2 y_t)$$

$$= \triangle^2 y_{t+1} - \triangle^2 y_t$$

$$= \triangle y_{t+2} - 2 \triangle y_{t+1} + \triangle y_t$$

$$= y_{t+3} - 3y_{t+2} + 3y_{t+1} - y_t$$

一般地，函数$y_t = f(t)$

在t的n阶差分定义为

$$\triangle^n y_t = \triangle(\triangle^{n-1} y_t)$$

$$= \triangle^{n-1} y_{t+1} - \triangle^{n-1} y_t$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} y_{t+n-k}$$

上式表明,

函数$y_t = f(t)$

在t的n阶差分是

该函数的$n+1$个

函数值y_{t+n}，y_{t+n-1}，$\cdots$，y_t的

线性组合.

例题5.2.1设$y_t = t^2 + 2t - 3$，

求$\triangle y_t$，$\triangle^2 y_t$.

解$\triangle y_t = y_{t+1} - y_t$

$= (t+1)^2 + 2(t+1) - 3 - (t^2 + 2t - 3)$

$= 2t + 3$

$$\triangle^2 y_t = y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t$$

$$= (t+2)^2 + 2(t+2) - 3$$

$$-2[(t+1)^2 + 2(t+1) - 3]$$

$$-(t^2 + 2t - 3)$$

$$= 2$$

2、差分方程的基本概念

差分方程的定义：

含有自变量，

未知函数以及

未知函数差分的

函数方程，

由于差分方程中
必须含有
未知函数的差分，
而自变量与

未知函数可以不显含.

因此，差分方程也可

称为含有未知函数

差分的函数方程.

例如

$$\triangle^2 y_t - 3 \triangle y_t - 3y_t - t = 0$$

就是一个差分方程，

按函数差分定义，

上述方程又可表示为

$$y_{t+2} - 5y_{t+1} + y_t - t = 0$$

因此，差分方程
又可定义为：
含有未知函数
在多个点的值
的函数方程

差分方程中
所含差分的
最高阶数，
称为差分方程
的**阶数**.

例如差分方程

$$\triangle^2 y_t - 3 \triangle y_t - 3y_t - t = 0$$

的最高阶差分是

$$\triangle^2 y_t$$

因此是二阶差分方程

或者说，

差分方程中

未知函数下标

的最大差数.

例如差分方程

$$y_{t+2} - 5y_{t+1} + y_t - t = 0$$

未知函数下标的

最大数为$t+2$，最小数t

因此，最大差数为2，

从而是二阶差分方程

二阶线性差分方程

的一般形式是

$$y_{t+2} + a y_{t+1} + b y_t = f(t)$$

其中a，b为给定常数，

$f(t)$是定义

在非负整数集上的

已知函数，

若序列$f = \{f(t)\} \equiv \{0\}$，

则称方程为

二阶齐次线性差分方程,

若 $f(t) \neq 0$,

则上式称为

二阶非齐次线性差分方程.

n阶差分方程的

一般形式可表示为

$$F(t, y_t, \triangle y_t, \triangle^2 y_t, \cdots, \triangle^n y_t) = 0$$

或$F(t, y_t, y_{t+1}, \cdots, y_{t+n}) = 0$

谢　谢!

二、应用差分方程思想建模

1、一阶差分方程模型的建立

例5.1.1人口问题的解答：

令$P_n = P(n)$表示

某人口群体

在时间段n

开始时的总数，

若按年计算，

设初始年为0，

令增量

$$\Delta P(n) = P(n+1) - P(n)$$

或者$\Delta P_n = P_{n+1} - P_n$

Malthus提出：

增量是出生人口数

减去死亡人口数，

因此设b表示

出生率与死亡率之差，

得到$\Delta P(n) = bP(n)$

即$P(n+1) = P(n) + \Delta P(n)$

$$= P(n) + bP(n) = kP(n), \tag{2.1}$$

其中$k = 1 + b$.

这就是Malthus人口模型.

用迭代法求解

该差分方程，

得$P(n+1)=kP(n)$

$$=k(kP(n-1))=k^2P(n-1)$$

$$=\cdots\cdots=k^{n+1}P(0)$$

本题建模关键是：

找到增量的规律，即

增量是出生人口数

减去死亡人口数。

差分思想与建模方法

这需要大量的

数据支撑，

是否可以提出

另外的想法或规律呢？

当然可以!

只要你发现的

定量关系

比他的精确!

1840年，比利时

人口统计学家

Verhulst提出

$$\boldsymbol{\Delta P(n) = bP(n) - c(P(n))^2}$$

为什么呢？

因为他认为：

个体的存活机会

依赖自身应付

同其他竞争

冲突的能力.

什么情况下有竞争?

两个成员相遇

就可能有竞争。

因此用单位时间内
两个成员相遇次数
的统计平均值
来表示冲突是合适的

如何表示这个

统计平均值？

研究表明

它与P^2成正比，

从而得到

$$P(n+1)=kP(n)-c(P(n))^2,$$

其中c为竞争冲突常数.

这似乎比Malthus模型

更精确地反应现实情况

例5.1.2借款问题的解答：

设$p(0)$是借款，

在每个固定的时间段

（如每年或每月）

的末尾得偿还的

固定金额为R

（如把房子作为抵押），

那么$P(n+1)$

就是第$n+1$时间段

开始时钱款的总数，

它等于$P(n)$加上

利息$bP(n)$减去偿还，即

$$P(n+1)=(1+b)P(n)-R$$

$$=kP(n)-R$$

该式当$R=0$时就是(2.1)，

令$b=k-1$，其增量表达式为

$\Delta P(n)=bP(n)-R,$

可见，当$P(n)>\frac{R}{b}$时

钱款增长，

$P(n) < \frac{R}{b}$时

钱款减少，

若对某m，

有$P(m) = \frac{R}{b}$，

则$P(n) \equiv \frac{R}{b}$.

2、二阶线性差分方程模型的建立

二阶线性差分方程的

一般形式是

$$y_{t+2} + ay_{t+1} + by_t = f(t), \qquad (2.2)$$

其中a，b为给定常数，

$f(t)$是定义在

非负整数集上的已知函数，

所谓解（2.2），

就是对一切$t = 0, 1, 2, \cdots,$

求序列$y = \{y_t\}$.

例5.1.3Fibonacci问题的解答：

设$P(n)$是第n个月

家兔的对数，

$a(n)$为其中

成兔对数，

$b(n)$为幼兔对数，则

$$P(n) = a(n) + b(n)$$

到下个月，

原先的幼兔变成成兔，

因而成兔数量变为

$$a(n+1) = a(n) + b(n),$$

$a(n)$对成兔

又生$a(n)$对幼兔，因此

$$b(n+1) = a(n).$$

于是

$$P(n+2) = a(n+2) + b(n+2)$$

$$= a(n+1) + b(n+1) + a(n+1)$$

$$= (a(n+1) + b(n+1))$$

$$+(a(n) + b(n))$$

$$= P(n+1) + P(n)$$

称方程

$$\boldsymbol{P(n+2)=P(n+1)+P(n)} \tag{2.10}$$

为Fibonacci方程,

这是一个二阶

线性差分方程.

已知$P(0)=1=P(1)$.

由（2.10）得

$$P(2)=2, P(3)=3, P(4)=5, P(5)=8, \ldots$$

为有名的Fibonacci数列.

谢　谢!

3、差分方程组模型的建立

例5.2.2考察两支部队

交战的简单模型.

设在n个时间单位后

两支部队的人数

是$x(n)$和$y(n)$.

每个$x(n)$士兵

在每个时间间隔打死

打伤y军a个士兵

类似地，设y军

的每个士兵

在单位时间间隔

打死打伤x军b人.

于是y 军在单位时间间隔的改变量

$$\Delta y(n) = y(n+1) - y(n)$$

$$= -ax(n),$$

x军在单位时间间隔的改变量

$$\Delta x(n) = -by(n).$$

整理得在单位

时间间隔的

差分方程组

$$x(n+1) = x(n) - by(n),$$

$$y(n+1) = y(n) - ax(n).$$

例5.2.3

椰风寨游乐中心

在环岛路的椰风寨

和珍珠湾（厦门大学海韵园边）都有

自行车租车点，


厦门园林植物园-太平岩寺
西姑岭
文曾路
稻草人农庄
无垠酒店
帝元维多利亚大酒店
黄厝隧道
新村
X417
蝴蝶谷
南山后
茂后
椰风寨游乐中心
厦门园林植物园
山顶人家
厦门曾厝垵慢旅行客栈
厦门国家会计学院
云顶球场
厦门后花园海景客栈
X401
X410
虎山
乌龟山
龙虎山路
史迪宠物公园
海和风休闲娱乐
东宅
上李
海悦山庄会所
西宅水库
曾厝垵上里
海悦山庄酒店
砚海·君帝湾酒店
田螺山
厦门国家海洋公园
曾山隧道
环岛南路
创新大厦
华讯楼
胡里山炮台
天朗壹水湾度假酒店
冰雕展
港仔埔
白菜洋

因此，游客可以
在一个租车点租车
而在另一个租车点还车，
游客可能在两个租车点
都有游玩计划.

该中心想确定
这种方便的
借还车方式的
收费标准为多少.

解： 因为自行车可以
在两个点归还，
每个点就要
有足够的车辆

以满足用车需要.

如果置放的

车辆不够了,

那么要从珍珠湾

差分思想与建模方法

运送多少自行车

到椰风寨或者

要从椰风寨运送

多少自行车到

珍珠湾

对这些问题的
回答将有助于
该公司计算出
它的期望成本.

在分析了历史
记录数据后，
确定约有55%
在珍珠湾出租的
自行车还到了珍珠湾，

另外45%的车辆
还到了椰风寨.
在椰风寨出租
的自行车中,

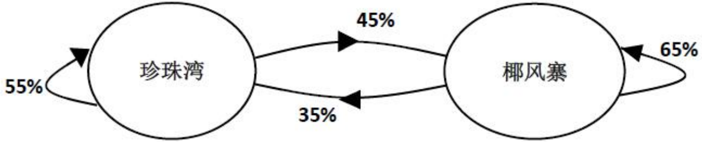
有65%的仍旧

还到了椰风寨，

另外35%的自行车

还到了珍珠湾，

见图5.2.



【模型构建】

设n表示营业天数.

定义O_n=第n天

营业结束时

在珍珠湾的车辆数

差分思想与建模方法

T_n =第n天

营业结束时

在椰风寨的车辆数

因此，第$n+1$天应该是

$$O_{n+1} = 0.55O_n + 0.35T_n$$

$$T_{n+1} = 0.45O_n + 0.65T_n$$

例题5.2.4

在1805年的

特拉法尔加

(Trafalgar)战斗中,

由拿破仑

指挥的法国、
西班牙海军联军
和由海军上将
纳尔逊指挥的
英国海军作战.

一开始，法西联军

有33艘战舰，

而英军有27艘战舰.

在一次遭遇战中

每方的战舰损失

都是对方

战舰的10%.

分数值是有意义的,

表示有一艘

或多艘战舰

不能全力以赴地

参加战斗.

【模型构建】

将战斗过程分成阶段，

令n表示战斗

过程中遭遇战的

第n阶段，

设B_n为
第n阶段
英军的战舰数，
F_n为第n阶段
法西联军的战舰数.

于是在第n阶段

的遭遇战后，

各方剩余的战舰数为

$$B_{n+1} = B_n - 0.1F_n$$

$$F_{n+1} = F_n - 0.1B_n$$

例题5.2.5

斑点猫头鹰和隼

的竞争模型：

一种斑点猫头鹰

在其栖息地

为生存而斗争.

该栖息地也

支持集的生存

还假定在没有

其他种群存在的情形下,

每个单独的种群

都可以无限地增长，

即在一个时间区间里

(例如，一天)

其种群量的变化

与该时间区间

开始时的

种群量成正比，

如果O_n表示

斑点猫头鹰

在第n天

结束时的种群量,

而$\boldsymbol{H_n}$表示与之

竞争的隼的种群量，那么

$$\boldsymbol{\Delta O_n = k_1 O_n}$$

和

$$\boldsymbol{\Delta H_n = k_2 H_n}$$

这里k_1和

k_2是增长率，

都是正常数.

第二个种群的存在

势必降低另一个
种群的增长率，
反之亦然.

假设这种增长率的
减少大约和两个种群
之间的可能的
相互作用的
次数成比例.

所以，一个子模型
就是假设这种增长率的
减少与O_n 和H_n的
乘积成比例.

这样模型为如下方程组

$$\Delta O_n = k_1 O_n - k_3 O_n H_n$$

$$\Delta H_n = k_2 H_n - k_4 O_n H_n$$

整理得

$$O_{n+1} = (1+k_1)O_n - k_3 O_n H_n$$

$$H_{n+1} = (1+k_2)H_n - k_4 O_n H_n$$

其中k_1 k_4都是正常数.

例题5.2.6

对政党的投票趋势

考虑由共和党、

民主党和独立派

组成的一个

三政党系统.

假设在下一次选举中，

曾经投票给

共和党的选民中

的75%仍将

投票给共和党，

他们中的5%将
投票给民主党,
而20%将投票给独立派.
曾经投票给

民主党的选民中的

20%将投票给共和党，

60% 的将再次

投票给民主党，

而20%的将

投票给独立派.

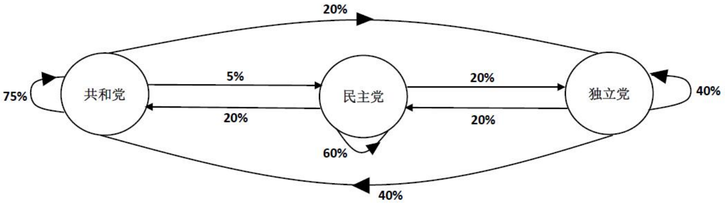
曾经投票给

独立派的选民中的

40%将投票给共和党,
20%将投票给民主党,
而40%将再次
投票给独立派.

假设从一次选举
到下一次选举都
保持这种趋势，
还假设没有额外的
选民进人或
离开该系统，

如图5.3所示.



现在设n表示

第n次选举，

用R_n表第n次

选举投共和党票的人数，

D_n表第n次

选举投民主党票的人数,

I_n表第n次

选举投独立派票的人数.

那么，可得如下模型

$$R_{n+1} = 0.75R_n + 0.20D_n + 0.40I_n$$

$$D_{n+1} = 0.05R_n + 0.60D_n + 0.20I_n$$

$$I_{n+1} = 0.20R_n + 0.20D_n + 0.40I_n.$$

谢　谢!

3 案例分析

案例一、猪肉价格的预测–蛛网模型

问题背景:

案例分析

讨论单一的

商品市场.

设$P(t)$表示

t时刻的价格,

案例分析

$D(t)$是t

时刻的需求量，

$S(t)$是t

时刻的供给量，则

$$D(t)=D(P(t)),$$

$$S(t)=S(P(t)),$$

案例分析

其中$D(P)$是价格的

单调减函数，

$S(P)$是价格的

单调增函数.

试分析均衡价格.

案例分析

【问题分析】

$D(P)$与$S(P)$的

交点为$P=\overline{P}$

称为均衡价格，

即：$\overline{P}$是

$S(P) = D(P)$时的价格.

但是，供给在时间上

往往滞后，

例如

$$D(t) = D(P(t)),$$

$$S(t) = S(P(t-1)).$$

因此，t时期的

价格$P(t)$不仅

案例分析

影响本期的

需求量$D(t)$,

而且影响生产者

在下一期愿意

提供给市场的

产量$S(t+1)$,

而下一期的

市场提供量$S(t+1)$

案例分析

又影响下一期

的价格$P(t+1)$,

下一期的价格$P(t+1)$

再影响下一期的

需求量$D(t+1)$，$\cdots$，

市场总是这样

在不断地自我调节，

直至市场的

供求趋于均衡，

即$\boldsymbol{P}(0) \to \boldsymbol{S}(1)$

$\to \boldsymbol{D}(1) \to \boldsymbol{P}(1)$

$\to \boldsymbol{S}(2) \to \cdots$

$\to \overline{\boldsymbol{P}}.$

在坐标系中

画出这个过程,

其形状犹如蛛网(如图5.4),

因而叫蛛网模型.

图中$S(P)$

为供给曲线,

$D(P)$为需求曲线,

两曲线的交点

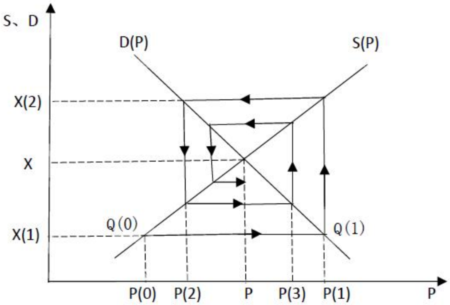
$\boldsymbol{E}$即为供求平衡点，

此点处的价格$\overline{\boldsymbol{P}}$

即是均衡价格，

在图5.4中，

案例分析



案例分析

用横轴表示$P(t)$,

用纵轴表示$D(P)$与$S(P)$,

起始价格为$P(0)$,

这时的$Q(0)$为

案例分析

与$P(0)$对应的供给量，

等于$t = 1$时的$X(1)$，

此供给量以

$P(1)$的价格售完，

这里体现出

由于供给少

而提价的现象.

$P(1)$决定了

下期的供给为$X(2)$,

案例分析

由$X(2)$这一需求量

确定了$t=2$时

的售价$P(2)$,

从图中看到

案例分析

$$P(2) < P(1),$$

价格降落；

如此循环不已，

$P(n)$在交替涨落中

案例分析

趋于$\overline{P}$,

供需在交替增减中

趋于$\overline{X}$,

在动态中趋于平衡,

案例分析

这是一种

渐近稳定的系统

称为封闭型

蛛网模型.

案例分析

但也可能有

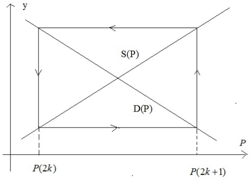
价格波动越来越大

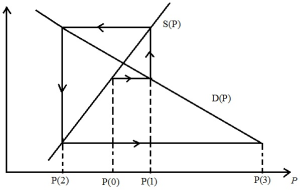
而不稳定的现象发生，

或周期性变化的现象，

案例分析

见图5.5与图5.6





案例分析

从图5.4中还可看出，

当$D(P)$曲线

比$S(P)$曲线陡

即$D(P)$曲线斜率

案例分析

的绝对值比$S(P)$

曲线斜率绝对值大时,

才是封闭型的蛛网模型,

才能达到供求平衡.

案例分析

从图5.6中则看出，

当$S(P)$曲线

比$D(P)$曲线陡，

价格波动越来越大

则不稳定的现象发生.

【模型构建】

一般地，设

$$D(t) = \alpha + aP(t), a < 0;$$

$$S(t) = \beta + bP(t-1), b > 0.$$

案例分析

于是均衡价格

与均衡值分别

为$\overline{P}$与$\overline{X}$满足

$$\overline{X} = \alpha + a\overline{P}$$

$$= \beta + b\overline{P} (3.1)$$

解得

$$\overline{\boldsymbol{P}} = \frac{\boldsymbol{\alpha - \beta}}{\boldsymbol{b - a}}$$

$$\overline{\boldsymbol{X}} = \frac{\boldsymbol{b\alpha - a\beta}}{\boldsymbol{b - a}},$$

$$\boldsymbol{X(t) = \alpha + aP(t)}$$

$$\boldsymbol{= \beta + bP(t-1)(3.2)}$$

案例分析

(3.2)式减去(3.1)式，且令

$$p(t) = P(t) - \overline{P}$$

$$x(t) = X(t) - \overline{X}$$

则$x(t) = ap(t) = bp(t-1)$,

$$p(t) = \frac{b}{a}p(t-1),$$

案例分析

记

$$p_0 = p(0),$$

$$c = \frac{b}{a} < 0,$$

迭代得

$$p(t) = p_0 c^t$$

案例分析

即

$$p(t) = \overline{p} + (p_0 - \overline{p})c^t$$

令$r = |c|$,

于是$P(t)$在$\overline{P}$的

上下振动，$t = 0, 1, 2, \cdots,$

案例分析

有三种情形：

(1)$\boldsymbol{b > -a}$，这时$\boldsymbol{r > 1}$，

$|\boldsymbol{P(t)}|$无限增大.

$(2) \boldsymbol{b = -a,\ \ r = 1,}$

$\boldsymbol{P(t) = \overline{P} \pm (P_0 - \overline{P}),}$

t是偶数时取正号,

奇数时取负号.

$(3)\boldsymbol{b < -a}$，这时$\boldsymbol{r < 1}$，

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{P(t) = \overline{P}}.$$

(1)(2)(3)有明显的市场意义：

案例分析

(1)$\boldsymbol{b > -a}$,

如图5.6所示,

供给量随

价格的变化率

比需求量随

价格的变化率大,

案例分析

即供给对价格变化的

敏感程度更大，

而顾客对价格波动

已有足够的承受力.

案例分析

这时，由于生产者

对利润太敏感，

生产量的增减速度

随价格的

波动过快，

案例分析

所以引起市场
价格的畸形波动
而大起大落.

案例分析

这也暗示，

欲稳定市场价格，

应首先稳定

商品供应量.

(2)是一种临界状态，

实为巧合，

不易发生，见图5.5.

(3)是(1)的相反情形,
需求对价格
敏感性较大,
形成买方市场,
这时会出现市场
稳定的形势.

谢　谢!

案例分析

案例二：有存货的情形

问题背景：

前面曾经讨论过

一段时间内供货

案例分析

恰售完的情形，

或虽有存货，

但存货量维持

在同一水准上，

现推广此模型.

【问题分析】

设$Q(t)$是t

时刻的存货量，

注意供给没有停止、

存货更加积压，

则存货的改变量为

$$\triangle Q(t) = Q(t) - Q(t-1)$$

$$= (S(t) + Q(t-1) - D(t)) - Q(t-1)$$

$$= S(t) - D(t).$$

下面分情形讨论

(1)若前期的

存货减少,

则把价格调高,

价格的增加与

存货的减少量成正比,

如何用数学式子描述它?

价格的增加量为

$$P(t) - P(t-1)$$

案例分析

存货的减少量为哪个？

思考题：

是$\triangle Q(t)$？

还是$\triangle Q(t-1)$？

价格的增加
与前期存货的
减少量成正比，即

$$P(t)-P(t-1)=-\boldsymbol{\lambda}\bigtriangleup Q(t-1),(3.3)$$

$\boldsymbol{\lambda}$是正常数.

案例分析

【模型构建】

考虑供需最简模型

$$D(t) = \alpha + aP(t)$$

$$S(t) = \beta + bP(t)$$

案例分析

思考题：如果考虑

其他模型，比如

$$S(t) = \beta + bP(t-1),$$

结果如何？

案例分析

且

$$\triangle Q(t-1) = Q(t-1) - Q(t-2)$$

$$= S(t-1) - D(t-1)$$

$$= \beta - \alpha + (b-a)P(t-1)$$

案例分析

所以(3.3)式可以化简为

$$\boldsymbol{P(t) = P(t-1)}$$

$$\boldsymbol{+\lambda(\alpha-\beta)}$$

$$\boldsymbol{-\lambda(b-a)P(t-1)}$$

案例分析

合并同类项得

$$P(t) = \lambda(\alpha - \beta)$$

$$+[1 - \lambda(b - a)]P(t - 1)(3.4)$$

案例分析

考虑均衡价格

$P(t) = \overline{P}$，则

$\overline{P} = \lambda(\alpha - \beta) - \lambda(b - a)\overline{P}, (3.5)$

解得

$\overline{P} = \frac{\alpha-\beta}{b-a}$

$\overline{\boldsymbol{P}}$为均衡价格.

从(3.4)式减去(3.5)式,

且令

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{t}) - \overline{\boldsymbol{P}},$$

$$\boldsymbol{c} = \mathbf{1} - \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})$$

则得

$$p(t) = cp(t-1)$$

解得

$$p(t) = p_0 c^t$$

$$P(t) = \overline{P} + (P_0 - \overline{P})c^t.$$

案例分析

在通常情况下,

$\boldsymbol{a} < 0,$

$\boldsymbol{b} > 0,$

$\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} > 0,$

分三种情形讨论

案例分析

(i)$\boldsymbol{\lambda} < \frac{1}{b-a}$,

由$c = 1 - \lambda(b-a)$

得$0 < c < 1$。观察

$$P(t) = \overline{P} + (P_0 - \overline{P})c^t$$

我们有$\lim_{t\to\infty} P(t) = \overline{P}$.

(ii) $\frac{1}{b-a} < \lambda < \frac{2}{b-a}$,

由 $c = 1 - \lambda(b-a)$

得 $-1 < c < 0$。观察

$P(t) = \overline{P} + (P_0 - \overline{P})c^t$

知 $P(t)$ 上下振动渐近于 $\overline{P}$.

案例分析

(iii)$\boldsymbol{\lambda > \frac{2}{b-a}}$,

由$\boldsymbol{c = 1 - \lambda(b - a)}$

得$\boldsymbol{c < -1}$，观察

$$\boldsymbol{P(t) = \overline{P} + (P_0 - \overline{P})c^t}$$

得$P(t)$上下振动，

其绝对值趋于$+\infty$.

我们看到

商人对其存货的

案例分析

变动反应强烈时,

即λ大时,

价格即出现

大起大落不稳定现象.

谢　谢!

(2)若前期存货

减少至某一水准

$\overline{Q}$,

案例分析

则提价，提价幅度与

存货低于$\overline{Q}$的

数量成正比，

如何用数学式子

描述它？

提价幅度

$$P(t) - P(t-1)$$

存货低于$\overline{Q}$的数量：

$$\overline{Q} - Q(t-1)$$

案例分析

那么提价幅度

与存货低于$\overline{Q}$

的数量成正比，

即存在正数$\lambda > 0$使得

$$P(t) - P(t-1) = -\lambda(Q(t-1) - \overline{Q}), \quad (3.6)$$

案例分析

考虑供需函数的

最简单模型

$$D(t) = \alpha + aP(t)$$

$$S(t) = \beta + bP(t)$$

这里$a < 0$,$b > 0$.

案例分析

现在考察(3.6)式

中的$\overline{Q}$,

它其实不是个

确定的量,

必须消去它?

案例分析

观察(3.6)式，

它是差分方程，

可以迭代．即

$$P(t) = P(t-1) - \lambda(Q(t-1) - \overline{Q})$$

$$P(t-1) = P(t-2) - \lambda(Q(t-2) - \overline{Q})$$

两式相减便

消掉了$\overline{Q}$

$$P(t)-P(t-1)$$

$$=P(t-1)-P(t-2)$$

$$-\lambda[Q(t-1)-Q(t-2)]$$

案例分析

合并整理得

$$P(t) = 2P(t-1) - P(t-2)$$

$$-\lambda[S(t-1) - D(t-1)]$$

案例分析

代入供需函数

的表达式得

$$P(t) = 2P(t-1) - P(t-2)$$

$$-\lambda[(\beta-\alpha)-(b-a)P(t-1)]$$

案例分析

进一步整理得到

$$P(t) = \lambda(\alpha - \beta)$$

$$-[2 - \lambda(b - a)]P(t-1)$$

$$-P(t-2), (3.7)$$

(3.7)式是二阶

线性差分方程,

是非齐次的。

考虑均衡价格$P(t)=\overline{P}$，则

$$\overline{P}=\lambda(\alpha-\beta)-[2-\lambda(b-a)]\overline{P}-\overline{P},(3.8)$$

令$\boldsymbol{p(t) = P(t) - \overline{P}}$,

(3.7)减去(3.8)得

$$\boldsymbol{p(t) = [2 - \lambda(b-a)]p(t-1) - p(t-2). (3.9)}$$

(3.9)是齐次二阶线性差分方程,

案例分析

改写成

$$p(t)-[2-\lambda(b-a)]p(t-1)+p(t-2)=0$$

回顾如何解它?

特征方程法:

案例分析

它的特征方程为

$$\mu^2 - [2 - \lambda(b-a)]\mu + 1 = 0$$

特征根为

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2}(2 - \lambda(b-a) \pm \sqrt{[2 - \lambda(b-a)]^2 - 4})$$

有两个互异的实根.

那么(3.8)的通解为

$$\boldsymbol{p(t) = c_1\mu_1^t + c_2\mu_2^t, t = 0, 1, 2, \cdots}$$

其中$\boldsymbol{c_1}$，$\boldsymbol{c_2}$，

是任意常数，

可由$\boldsymbol{p(0)}$，$\boldsymbol{p(1)}$定出.

案例分析

令

$$c = \frac{1}{2}[2 - \lambda(b - a)]$$

则

$$\mu_{1,2} = c \pm \sqrt{c^2 - 1}.$$

案例分析

分情况讨论之

(i)$\boldsymbol{\lambda} > \frac{4}{b-a}$时,

$c < -1$,两特征根皆负:

$$\mu_1 = c - \sqrt{c^2 - 1}$$

$$\mu_2 = c + \sqrt{c^2 - 1}$$

设$c_1 \neq 0$,

将通解化为

$$p(t) = c_1\mu_1^t[1 + \frac{c_2}{c_1}(\frac{\mu_2}{\mu_1})^t]$$

继续简化上面的式子,

能得到什么?

$$\lim_{t\to\infty} |p(t)| = +\infty,$$

且$r \geq 1$时,

$P(t)$的正负

交替出现.

这些数学事实

对应的价格波动现象

是$P(t)$在$\overline{P}$

上下振荡着

无限增减,

案例分析

即因为商店

对存货减少的

反应强烈,

引起了价格的大波动.

案例分析

(ii) $\frac{2}{b-a} < \lambda < \frac{4}{b-a}$时，

得$-1 < c < 0$，这时

$$\mu_1 = c + i\sqrt{1-c^2}$$

$$\mu_2 = c - i\sqrt{1-c^2}$$

案例分析

$$\gamma = |\mu_{1,2}| = 1$$

$$\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta}$$

$$tg\theta = \pm\sqrt{\frac{1}{c^2} - 1}$$

案例分析

由初始条件得

$$p(t) = A cos(\theta t - \varepsilon),$$

其中A与ε

由初始条件确定.

案例分析

(iii)$0 < \lambda < \frac{2}{b-a}$,

这时$0 < c < 1$，也有

$p(t) = A\cos(\theta t - \varepsilon)$,

(ii)(iii)都是

非衰减周期运动，

周期为$\frac{2\pi}{\theta}$。

案例分析

当$\boldsymbol{\lambda} < \frac{2}{b-a}$时，

$tg\theta$为正，

$\theta \in (0, \pi)$；

案例分析

当$\frac{2}{b-a} < \lambda < \frac{4}{b-a}$时，

$tg\theta$为负，

$\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

案例分析

$\boldsymbol{\lambda}$由0增至$\frac{2}{b-a}$

再增至$\frac{4}{b-a}$,

则θ由0

增至$\frac{\pi}{2}$

再增至π,

案例分析

相应地，周期为$+\infty$

缩短至4再缩短至2，

当$\boldsymbol{\lambda}$增加

而趋于临界值

案例分析

$\frac{4}{b-a}$ 时,

周期趋于2,

价格上下交替地

周期变化.

谢　谢!

案例三：凯恩斯（Keynes.J.M）乘数动力学模型

问题背景

设Y_t表示

t期国民收入，

案例分析

C_t为t期消费，

I_t为t期投资，

I_0为自发

（固定）投资，

案例分析

ΔI为周期

固定投资增量。

如何建立这些

变量间的定量关系？

案例分析

【问题分析】

首先，国民收入

等于同期消费

与同期投资之和，

称为均衡条件，即：

案例分析

$$Y_t = C_t + I_t, (3.10)$$

现期消费水平

依赖于前期

国民收入

消费滞后于

收入一个周期,

$a(\geq 0)$为

基本消费水平,

b为边际消费倾向

$(0 < b < 1)$,

案例分析

称为消费函数，即：

$$C_t = a + bY_{t-1}, (3.11)$$

这里，如果我们

仅考虑为固定投资，

称为投资函数，即：

$$I_t = I_0 + \Delta I. (3.12)$$

案例分析

【模型构建】

凯恩斯国民经济

收支动态均衡模型为：

$$\boldsymbol{Y_t = C_t + I_t,}$$

$$\boldsymbol{C_t = a + bY_{t-1},}$$

$$\boldsymbol{I_t = I_0 + \Delta I.}$$

【模型求解】

在(3.10)(3.11)(3.12)式

中消去$\boldsymbol{C}_t$和$\boldsymbol{I}_t$，

得到一阶常系数

案例分析

非齐次线性差分方程：

$$\boldsymbol{Y_t - bY_{t-1} = a + I_0 + \Delta I}$$

方程的一个特解

$$\boldsymbol{\bar{Y}_t = \frac{a+I_0+\Delta I}{1-b}}$$

方程的通解为

$$Y_t = A \cdot b_t + \frac{a+I_0+\Delta I}{1-b}$$

其中A为任意常数,

称系数$\frac{1}{1-b}$为

凯恩斯乘数.

谢　谢!

4 补充：差分方程模型的求解方法

1、线性差分方程的基本定理

若把一个函数$y_t = f(t)$

代入差分方程中，

使其成为恒等式，

则称$y_t = f(t)$为

差分方程的解.

补充：差分方程模型的求解方法

含有任意常数的个数与

差分方程的阶数一致的解，

称为**差分方程的通解**；

给任意常数

以确定值的解，

称为**差分方程的特解**.

补充：差分方程模型的求解方法

用以确定通解中

任意常数的条件

称为**初始条件**：

一阶差分方程的

初始条件为一个，

一般是$y_0 = a_0$(常数)；

补充：差分方程模型的求解方法

二阶差分方程的

初始条件为两个，

一般是$y_0 = a_0$，

$y_1 = a_1$

$(a_0$，a_1是常数$)$；

依此类推.

补充：差分方程模型的求解方法

现在来讨论

线性差分方程

解的基本定理,

将以二阶线性差分方程为例,

任意阶线性差分方程

都有类似结论.

补充：差分方程模型的求解方法

二阶线性差分方程的

一般形式

$$y_{t+2}+a(t)y_{t+1}+b(t)y_t=f(t)$$

其中$a(t)$，$b(t)$，$f(t)$

均为t的已知函数，

且$b(t)\neq 0$.

补充：差分方程模型的求解方法

定理1　若函数$y_1(t)$，$y_2(t)$

是二阶齐次线性差分方程的解，则

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$$

也是该二阶齐次

线性差分方程的解，

其中C_1、C_2是任意常数.

补充：差分方程模型的求解方法

定理2(二阶齐次线性

差分方程解的结构定理)

若函数$y_1(t)$，$y_2(t)$是

二阶齐次线性差分方程的

线性无关特解，则

$$y_C(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$$

是该方程的通解，

其中C_1、C_2是任意常数.

定理3(非齐次线性
差分方程解的结构定理)

若$y^*(t)$是二阶非齐次线性
差分方程的一个特解，

补充：差分方程模型的求解方法

$y_C(t)$是齐次线性

差分方程的通解，

则非齐次线性差分方程的通解为

$$y(t) = y_C(t) + y^*(t).$$

补充：差分方程模型的求解方法

定理4(解的叠加原理)

若函数$y_1^*(t)$，$y_2^*(t)$

分别是二阶非齐次线性差分方程的特解：

$$y_{t+2}+a(t)y_{t+1}+b(t)y_t=f_1(t)$$

和$y_{t+2}+a(t)y_{t+1}+b(t)y_t=f_2(t)$

补充：差分方程模型的求解方法

则$y_1^*(t)+y_2^*(t)$

是差分方程

$$y_{t+2}+a(t)y_{t+1}+b(t)y_t=f_1(t)+f_2(t)$$

的特解.

2、一阶线性差分方程的解法

(1)求一阶齐次线性差分方程的通解

一阶非齐次线性差分方程的一般形式

$$y_{t+1} + ay_t = f(t),$$

对应的齐次线性差分方程

$$y_{t+1} + ay_t = 0,$$

补充：差分方程模型的求解方法

为了求出一阶齐次
差分方程的通解，
只要求出其一
非零的特解即可。

注意到一阶齐次

差分方程的特点，

y_{t+1}是y_t的常数倍，而函数

$$\boldsymbol{\lambda}^{t+1}=\boldsymbol{\lambda}\cdot\boldsymbol{\lambda}^{t}$$

恰满足这个特点.

不妨设方程有形如下式的特解

$$y_t = \lambda^t$$

其中λ是非零待定常数．将其代入一阶齐次差分方程中，有

$$\lambda^{t+1} + a\lambda^t = 0,$$

即

$$\lambda^t(\lambda + a) = 0$$

由于$\lambda^t \neq 0$. 因此

$$y_t = \lambda^t$$

是一阶齐次差分方程的解的充要条件是

$$\lambda + a = 0.$$

补充：差分方程模型的求解方法

所以$\lambda = -a$时，一阶齐次差分方程的非零特解为

$$y_t = (-a)^t$$

从而一阶齐次差分方程通解为

$$y_C = C(-a)^t$$

C为任意常数.

补充：差分方程模型的求解方法

称一次代数方程

$$\lambda + a = 0$$

为差分方程的特征方程；特征方程的根为特征根或特征值.

补充：差分方程模型的求解方法

由上述分析，求出一阶齐次差分方程的通解的步骤：

第一步：先写出其特征方程

第二步：求出特征根

第三步：求出其特解

第四步：求出其通解

(2)求一阶非齐次线性差分方程的特解和通解

下面仅就函数$f(t)$为几种常见形式用待定系数法求非齐次线性差分方程的特解. 根据$f(t)$的形式，确定特解的形式，比较方程两端的系数，可得到特解$y^*(t)$.

情形一：非齐次项$f(t)$形如

$$f(t)=\rho^t P_m(t)(\rho>0)$$

这里$P_m(t)$是形如

$$A_m t^m + A_{m-1} t^{m-1} + \cdots + A_1 t + A_0$$

的m次多项式，A_m，A_{m-1}，$\cdots$，A_0是已知常数.

补充：差分方程模型的求解方法

(i)如果ρ不是特征根，那么待定特解的形式为

$$y^*(t) = \rho^t Q_m(t)$$

这里$Q_m(t)$是形如

$$B_m t^m + B_{m-1} t^{m-1} + \cdots + B_1 t + B_0$$

的待定的m次多项式，B_m，B_{m-1}，$\cdots$，B_0是待定系数.

例题5.4.1 求差分方程$y_{t+1}+y_t=2^t$的通解.

解： 特征方程为$\lambda+1=0$，特征根$\lambda=-1$．齐次差分方程的通解为

$$y_C=C(-1)^t$$

补充：差分方程模型的求解方法

由于$f(t)=2^t=\rho^t P_0(t)$，$\rho=2$不是特征根。因此设非齐次差分方程特解形式为

$$y^*(t)=B2^t$$

将其代入已知方程，有

$$B2^{t+1}+B2^t=2^t.$$

解得$B=\frac{1}{3}$，所以$y^*(t)=\frac{1}{3}2^t$．于是，所求通解为

$$y_t=y_C+y^*(t)=C(-1)^t+\frac{1}{3}2^t$$

C为任意常数.

(ii)如果ρ是特征根，那么待定特解的形式为

$$\rho^t t Q_m(t)$$

这里$Q_m(t)$是形如

$$B_m t^m + B_{m-1} t^{m-1} + \cdots + B_1 t + B_0$$

的待定的m次多项式，B_m，B_{m-1}，$\cdots$，B_0是待定系数.

例题5.4.2 求差分方程$y_{t+1} - y_t = 3 + 2t$的通解.

解： 特征方程为$\lambda - 1 = 0$，特征根$\lambda = 1$．齐次差分方程的通解为

$$y_C = C$$

补充：差分方程模型的求解方法

由于$f(t)=3+2t=\rho^t P_1(t)$，$\rho=1$是特征根．因此非齐次差分方程的特解为

$$y^*(t)=t(B_0+B_1 t)$$

将其代入已知差分方程得

$$B_0+B_1+2B_1 t=3+2t$$

补充：差分方程模型的求解方法

比较该方程的两端关于t的同次幂的系数，可解得$B_0 = 2$，$B_1 = 1$. 故$y^*(t) = 2t + t^2$. 于是，所求通解为

$$y_t = y_C + y^* = C + 2t + t^2$$

C为任意常数.

例题5.4.3 求差分方程$3y_t - 3y_{t-1} = t3^t + 1$的通解.

解：已知方程改写为$3y_{t+1} - 3y_t = (t+1)3^{t+1} + 1$，即$y_{t+1} - y_t = (t+1)3^t + \frac{1}{3}$. 求解如下两个方程

$$y_{t+1} - y_t = (t+1)3^t$$

$$y_{t+1} - y_t = \frac{1}{3}$$

补充：差分方程模型的求解方法

对第一个方程:特征根$\lambda = 1$，$f(t) = (t+1)3^t = \rho^t P_1(t)$，$\rho = 3$不是特征根，设特解为$y_1^*(t) = 3^t(B_0 + B_1 t)$，将其代入第一个方程有

$$3^{t+1}[B_0 + B_1(t+1)] - 3^t(B_0 + B_1 t) = 3^t(t+1)$$

可以解得$B_0 = \frac{1}{4}$，$B_1 = \frac{1}{2}$. 故$y_1^*(t) = 3^t(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}t)$.

补充：差分方程模型的求解方法

对第二个方程：特征根$\lambda = 1$，$f(t) = \frac{1}{3} = \rho^t P_0(t)$，$\rho = 1$是特征根，设特解为$y_2^*(t) = Bt$. 将其代入第二个方程解得$B = \frac{1}{3}$. 于是，$y_2^*(t) = \frac{1}{3}t$.

补充：差分方程模型的求解方法

因此，齐次差分方程的通解为$y_C(t) = C$．所求通解为

$$y_t = y_c + y_1^* + y_2^* = C + 3^t(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}) + \frac{1}{3}t$$

C为任意常数.

情形二： 非齐次项$f(t)$形如

$$f(t)=\rho^t(acos\theta t+bsin\theta t)(\theta>0)$$

令

$$\delta=\rho(cos\theta+isin\theta)$$

(i)如果δ不是特征根，那么待定特解的形式为

$$\rho^t(Acos\theta t + Bsin\theta t)$$

A，B是待定系数．将待定特解的形式代入差分方程，求出待定系数即可．

(ii)如果δ是特征根，那么待定特解的形式为

$$\rho^t t(A cos\theta t + B sin\theta t)$$

A，B是待定系数．将待定特解的形式代入差分方程，求出待定系数即可．

例题5.4.4 求差分方程$y_{t+1}-3y_t=sin\frac{\pi}{2}t$的通解.

解： 因特征根$\lambda=3$，齐次差分方程的通解$y_C=C3^t$.

$$f(t)=sin\frac{\pi}{2}t=\rho^t(acos\theta t+bsin\theta t)$$

$a=0$，$b=1$，$\rho=1$，$\theta=\frac{\pi}{2}$.

补充：差分方程模型的求解方法

令

$$\delta = \rho(cos\theta + isin\theta) = i$$

因为$\delta = i$不是特征根，设特解

$$y*(t) = Acos\frac{\pi}{2}t + Bsin\frac{\pi}{2}t$$

补充：差分方程模型的求解方法

将其代入原方程有

$$A\cos\frac{\pi}{2}(t+1)+B\sin\frac{\pi}{2}(t+1)-3(A\cos\frac{\pi}{2}t+B\sin\frac{\pi}{2}t)$$

$$=\sin\frac{\pi}{2}t$$

因为$\cos\frac{\pi}{2}(t+1)=-\sin\frac{\pi}{2}t$，$\sin\frac{\pi}{2}(t+1)=\cos\frac{\pi}{2}t$，

将其代入上式，并整理得

$$(B-3A)cos\frac{\pi}{2}t-(A+3B)sin\frac{\pi}{2}t)=sin\frac{\pi}{2}t$$

比较上式两端的系数，解得$A=-\frac{1}{10}$，$B=-\frac{3}{10}$.

补充：差分方程模型的求解方法

故非齐次差分方程的特解

$$y*(t) = -\frac{1}{10}cos\frac{\pi}{2}t - \frac{3}{10}sin\frac{\pi}{2}t$$

于是，所求通解为

$$y_t = y_C + y* = C3^t - \frac{1}{10}cos\frac{\pi}{2}t - \frac{3}{10}sin\frac{\pi}{2}t$$

C为任意常数.

2、二阶常系数线性差分方程的解法

二阶常系数线性差分方程的一般形式为

$$y_{t+2}+ay_{t+1}+by_t=f(t)$$

其中a，b为已知常数，且$b\neq 0$，$f(t)$为已知函数.

与上述方程相对应的二阶齐次线性差分方程为

$$y_{t+2}+ay_{t+1}+by_t=0.$$

(1)求二阶齐次线性差分方程的通解

为了求出二阶齐次差分方程的通解，首先要求出两个线性无关的特解．与一阶齐次差分方程同样分析，设二阶齐次差分方程有特解

$$y_t = \lambda^t$$

其中λ是非零待定常数．

补充：差分方程模型的求解方法

将其代入二阶齐次差分方程式有

$$\boldsymbol{\lambda}^t(\boldsymbol{\lambda}^2 + a\boldsymbol{\lambda} + b) = 0$$

因为$\boldsymbol{\lambda}^t \neq 0$，所以$y_t = \boldsymbol{\lambda}^t$是二阶齐次差分方程的解的充要条件是

$$\boldsymbol{\lambda}^2 + a\boldsymbol{\lambda} + b = 0$$

补充：差分方程模型的求解方法

称上述二次代数方程为差分方程(齐次)或(非齐次)的特征方程，对应的根称为特征根.

补充：差分方程模型的求解方法

(i) 特征方程有相异实根$\boldsymbol{\lambda}_1$与$\boldsymbol{\lambda}_2$

此时，齐次差分方程有两个特解$y_1(t) = \boldsymbol{\lambda}_1^t$和$y_2(t) = \boldsymbol{\lambda}_2^t$，且它们线性无关．于是，其通解为

$$Y_C(t) = C_1\boldsymbol{\lambda}_1^t + C_2\boldsymbol{\lambda}_2^t$$

C_1，C_2为任意常数．

补充：差分方程模型的求解方法

(ii)特征方程有同根$\boldsymbol{\lambda}_1^t = \boldsymbol{\lambda}_2^t$

这时，$\boldsymbol{\lambda}_1^t = \boldsymbol{\lambda}_2^t = -\frac{1}{2}a$，齐次差分方程有一个特解

$y_1(t) = (-\frac{1}{2}a)^t$.

直接验证可知

$y_1(t) = t(-\frac{1}{2}a)^t$

也是齐次差分方程的特解。

显然，$y_1(t)$与$y_2(t)$线性无关．于是，齐次差分方程的通解为

$$y_C(t) = (C_1 + C_2 t)(-\frac{1}{2}a)^t$$

C_1，C_2为任意常数．

补充：差分方程模型的求解方法

(iii)特征方程有共轭复根$\alpha \pm i\beta$

此时，直接验证可知，齐次差分方程有两个线性无关的特解

$$y_1(t) = r^t cos\omega t$$

$$y_2(t) = r^t sin\omega t$$

补充：差分方程模型的求解方法

其中

$$\alpha = -\frac{a}{2}, \quad \beta = \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$$

$$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{b}$$

ω由

$$tan\omega = \frac{\beta}{\alpha} = -\frac{1}{a}\sqrt{4b - a^2}$$

确定，$\omega \in (0, \pi)$.

补充：差分方程模型的求解方法

于是，齐次差分方程的通解为

$$y_C(t) = r^t(C_1 cos\omega t + C_2 sin\omega t)$$

C_1，C_2为任意常数.

例5.3Fibonacci问题的解答续：求解Fibonacci方程（2.10）.

解： 特征方程

$$u^2 - u - 1 = 0$$

有根

$$s_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, s_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

它们的近似值是

$$s_1 \cong 1.61803399, s_2 \cong -0.61833989$$

(一般地，称数s_1为黄金分割)．于是，所求通解为

$$y_C(t) = C_1 s_1^t + C_2 s_2^t$$

C_1，C_2为任意常数.

例题5.4.5 求差分方程$y_{t+2}-6y_{t+1}+9y_t=0$的通解.

解： 特征方程是

$\lambda^2-6\lambda+9=0$

特征根为二重根

$\lambda_1=\lambda_2=3$

于是，所求通解为

$$y_C(t) = (C_1 + C_2 t)3^t$$

C_1，C_2为任意常数.

例题5.4.6 求差分方程$y_{t+2}-4y_{t+1}+16y_t=0$满足初值条件$y_0=1$，$y_1=2+2\sqrt{3}$的特解.

解： 特征方程是

$\lambda^2-4\lambda+16=0$

它有一对共轭复根

$\lambda_{1,2}=2\pm 2\sqrt{3}i$

补充：差分方程模型的求解方法

计算

$$r = \sqrt{16} = 4$$

由

$$tan\omega = \frac{\beta}{\alpha} = -\frac{1}{a}\sqrt{4b - a^2}$$

得

$$\omega = \frac{\pi}{3}$$

于是原方程的通解为

$$y_C(t) = 4^r(C_1 cos\frac{\pi}{3}t + C_2 sin\frac{\pi}{3}t)$$

将初值条件$y_0 = 1$，$y_1 = 2 + 2\sqrt{3}$代入上式解得$C_1 = 1$，$C_2 = 1$.

补充：差分方程模型的求解方法

于是所求特解为

$$y(t) = 4^{r}(cos\frac{\pi}{3}t + sin\frac{\pi}{3}t).$$

(2)求非齐次线性差分方程的特解和通解

利用待定系数法可求出$f(r)$的几种常见形式的非齐次差分方程的特解.

情形一：非齐次项$f(t)$形如

$$f(t)=\rho^t P_m(t)(\rho>0)$$

这里$P_m(t)$是形如

$$A_m t^m + A_{m-1} t^{m-1} + \cdots + A_1 t + A_0$$

的m次多项式，A_m，A_{m-1}，$\cdots$，A_0是已知常数.

(i)如果ρ不是特征根，那么待定特解的形式为

$$y^*(t)=\rho^t Q_m(t)$$

这里$Q_m(t)$是形如

$$B_m t^m + B_{m-1} t^{m-1} + \cdots + B_1 t + B_0$$

的待定的m次多项式，B_m，B_{m-1}，$\cdots$，B_0是待定系数.

(ii)如果ρ是单特征根，那么待定特解的形式为

$$\rho^t t Q_m(t)$$

这里$Q_m(t)$是形如

$$B_m t^m + B_{m-1} t^{m-1} + \cdots + B_1 t + B_0$$

的待定的m次多项式，B_m，B_{m-1}，$\cdots$，B_0是待定系数.

(iii)如果ρ是2重特征根，那么待定特解的形式为

$$\rho^t t^2 Q_m(t)$$

这里$Q_m(t)$是形如

$$B_m t^m + B_{m-1} t^{m-1} + \cdots + B_1 t + B_0$$

的待定的m次多项式，B_m，B_{m-1}，$\cdots$，B_0是待定系数.

例题5.4.7 求差分方程$y_{t+2}-y_{t+1}-6y_t=3^t(2t+1)$的通解.

解： 特征根为$\lambda_1=-2$，$\lambda_2=3$.

$$f(t)=3^t(2t+1)=\rho^t P_1(t)$$

其中$m=1$，$\rho=3$.

因$\rho = 3$是单根，故设特解为

$$y^*(t) = 3^t t(B_0 + B_1 t)$$

将其代入差分方程解得$B_0 = -\frac{2}{25}$，$B_1 = \frac{1}{15}$，因此特解为$y^*(t) = 3^t t(\frac{1}{15}t - \frac{2}{25})$.

所求通解为

$$y_t = y_C + y^*$$

$$C_1(-2)^t + C_2 3^t + 3^t t(\frac{1}{15}t - \frac{2}{25})$$

C_1，C_2为任意常数.

补充：差分方程模型的求解方法

例题5.4.8 求差分方程$y_{t+2}-6y_{t+1}+9y_t=3^t$的通解.

解： 特征根为$\lambda_1=\lambda_2=3$.

$$f(t)=3^t=\rho^t P_0(t)$$

其中$m=0$，$\rho=3$.

因$\rho = 3$为二重根，应设特解为

$$y^*(t) = Bt^2 3^t.$$

将其代入差分方程得$B = \frac{1}{18}$，特解为

$$y^*(t) = \frac{1}{18} t^2 3^t$$

补充：差分方程模型的求解方法

通解为

$$
\begin{aligned}
y_t &= y_C + y^* \\
&= (C_1 + C_2 t)3^t + \frac{1}{18} t^2 3^t
\end{aligned}
$$

C_1，C_2为任意常数.

例题5.4.9 求差分方程$y_{t+2}-3y_{t+1}+3y_t=5$满足初值条件$y_0=5$，$y_1=8$的特解.

解： 特征根为$\lambda_{1,2}=\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

因为$r=\sqrt{3}$，由$tan\omega=\frac{\sqrt{3}}{3}$，得$\omega=\frac{\pi}{3}$.

所以齐次差分方程的通解为

$$y_C(t) = (\sqrt{3})^t (C_1 cos\frac{\pi}{6}t + C_2 sin\frac{\pi}{6}t)$$

$f(t) = 5 = \rho^t P_0(t)$，其中$m = 0$，$\rho = 1$．因$\rho = 1$不是特征根，故设特解$y^*(t) = B$.

将其代入差分方程得$B-3B+3B=5$，从而$B=5$．于是所求特解$y^*(t)=5$．因此原方程通解为

$$y(t)=(\sqrt{3})^t(C_1cos\frac{\pi}{6}t+C_2sin\frac{\pi}{6}t)+5.$$

将$y_0 = 5$，$y_1 = 8$分别代入上式，解得$C_1 = 0$，$C_2 = 2\sqrt{3}$. 故所求特解为

$$y^*(t) = 2(\sqrt{3})^{t+1} sin\frac{\pi}{6}t + 5.$$

补充：差分方程模型的求解方法

情形二：非齐次项$f(t)$形如

$$f(t) = \rho^t(a\cos\theta t + b\sin\theta t)(\theta > 0)$$

令

$$\delta = \rho(\cos\theta + i\sin\theta).$$

补充：差分方程模型的求解方法

(i)如果δ不是特征根，那么待定特解的形式为

$$\rho^t(Acos\theta t + Bsin\theta t)$$

A，B是待定系数．将待定特解的形式代入差分方程，求出待定系数即可。

(ii)如果δ是单特征根，那么待定特解的形式为

$$\rho^t t(A cos\theta t + B sin\theta t)$$

A，B是待定系数. 将待定特解的形式代入差分方程，求出待定系数即可.

补充：差分方程模型的求解方法

(iii)如果δ是2重特征根，那么待定特解的形式为

$$\rho^t t^2(Acos\theta t + Bsin\theta t)$$

A，B是待定系数．将待定特解的形式代入差分方程，求出待定系数即可．

3、差分方程组的解法

从Fibonacci问题的矩阵形式开始

令列向量$\mathrm{C}(n) = \begin{pmatrix} a(n) \\ b(n) \end{pmatrix}$，则Fibonacci方程（2.13）

可写为矩阵形式

$$C(n+1) = F\mathrm{C}(n)$$

其中$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$如同Malthus方程（1.1），该矩阵方程能用迭代法求解，解是

$$\mathrm{C}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{n}}\mathrm{C}(\mathbf{0})$$

它在形式上是简单的，但需要计算F的幂$\boldsymbol{F}^{n}$.

谢　谢!