第四章　初等代数与几何方法

4.1初等代数方法

谭　忠

厦门大学数学科学学院

目录

1 源头问题与当今问题
2 线性代数方法
3 建模方法
4 案例分析

1 源头问题与当今问题

有时候现象或事件中

变量之间呈现代数方程

或代数方程组的形式

比如高等代数中学习的代数方程组

源头问题与当今问题

空间解析几何中学习的

空间中的曲线、曲面方程

往往呈现成非线性代数方程或方程组

数学分析中的向量值函数等,

这些不过是最简定量关系函数的

不同表现形式而已,

源头问题与当今问题

空间解析几何中

熟知的映射

$$f : [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \mapsto \mathbf{R}^3,$$

$$(r, \theta) \mapsto (x, y, z)$$

的具体分量形式是

$$
\begin{cases}
x = x(r,\theta) = r\cos\theta, \\
y = y(r,\theta) = r\sin\theta, \\
z = z(r,\theta) = r,
\end{cases}
$$

$$(r \in [0,+\infty), \theta \in [0,2\pi])$$

源头问题与当今问题

这是二元三维向量值函数，

它是三维空间的一张半圆锥面，

从数学的角度看

这是一元函数的另一种推广：

源头问题与当今问题

多个因变量$(x$和$y)$

按某种规律,

随自变量t 或(r, θ)

的变化而相应变化.

源头问题与当今问题

一般地，设D是R^n上的点集，D到R^m的映射

$$f : D \to \mathrm{R}^m,\ \ \mathrm{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$\mathrm{z} = (z_1, z_2, \cdots, z_m)$$

称为n元m维向量值函数(或多元函数组)，

源头问题与当今问题

记为$\mathrm{z} = \mathrm{f}(\mathrm{x})$.

D称为f(x)的定义域,

$$\mathfrak{R} = \{\mathrm{z} \in \mathrm{R}^m | \mathrm{z} = \mathrm{f}(\mathrm{x}), \mathrm{x} \in D\}$$

称为f的**值域**.

多元函数是$m = 1$的特殊情形.

源头问题与当今问题

显然，每个$z_i(i=1,2,\cdots,m)$

都是x的函数

$$z_i = f_i(\mathrm{x}),$$

它称为(f)的

第i个坐标(或分量)函数.

源头问题与当今问题

于是，(f)可以表达为分量形式

$$\begin{cases} z_1 = f_1(\mathrm{x}), \\ z_2 = f_2(\mathrm{x}), \\ \cdots\cdots \\ z_m = f_m(\mathrm{x}), \end{cases} \quad \mathrm{x} \in D$$

因此f又可表示为

$$\mathbf{f} = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_m).$$

2 线性代数方法

源头问题：

线性代数中

有几个最基本的概念：

线性方程组、

行列式、矩阵、

二次型.

大量的科学技术问题,

最终往往归结为

解线性方程组.

大约4000年前，

巴比伦人能求解

两个未知数的

线性方程组.

公元前200年，

中国出版的“九章算术”

表明已经能求解

3×3 的方程组了.

简单方程$\boldsymbol{Ax+B=0}$

是一个古老的问题，

莱布尼兹、拉格朗日、

凯利(Cayley)和欧拉都有贡献.

十九世纪，高斯提出了消去法，

1848，J.J. Sylvester

提出的“矩阵”概念，

1855年亚瑟凯莱

引进了矩阵乘法和矩阵代数.

线性代数方法

但在很长一段时间里，

研究线性代数的兴趣放缓，

直到第二次

世界大战结束

线性代数方法

计算机的发展,

才使得线性代数

向前更迅速

更有效的发展.

最著名的例子是

哈佛大学的

列昂惕夫教授.

1949年，他用计算机算出了

由美国统计局的25万条

经济数据所组成的

42个未知数的

42个方程组，

这些模型是用
线性方程组来描述的，
被称为列昂惕夫
“投入-产出”模型.
列昂惕夫因此获得了
1973 年的诺贝尔经济学奖.

例题1：

某地区有三个重要产业，

一个煤矿、一个发电厂

和一条地方铁路.

开采一元钱的煤，

煤矿要支付0.25元的电费

及0.25元的运输费；

生产一元钱的电力，

发电厂要支付0.65元的煤费，

0.05元的电费

及0.05元的运输费；

创收一元钱的运输费,

铁路要支付0.55元的煤费

及0.10元的电费.

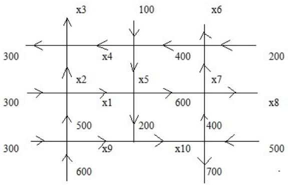
在某一周内，
煤矿接到外地金额
为50000元的定货，
发电厂接到外地金额
为25000元的定货，

外界对地方铁路没有需求.
问三个企业在这一周内
总产值多少才能满足
自身及外界的需求?

线性代数方法

例题2：

交通流量问题



图中给出了某城市

部分单行街道的

交通流量(每小时过车数)

假设：

(1)全部流入网络的流量

等于全部流出网络的流量；

(2)全部流入一个节点的流量等于全部流出此节点的流量。试建立数学模型确定该交通网络未知部分的具体流量。

3 建模方法

现象或事件中变量之间

呈现n元线性方程组的关系

$$\boldsymbol{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1}$$

$$\boldsymbol{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2}$$

$$\boldsymbol{\ldots}$$

$$\boldsymbol{a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m}$$

建模方法

在数学建模中,

矩阵的使用相当广泛,

如数学规划、

投入产出、

马氏链模型等

建模方法

主要运用矩阵分析
来解决问题。
自然科学和工程实践中
很多问题的解决
都归纳为线性方程组
求解和矩阵运算。

4 案例分析

案例一、Hill密码

问题背景:

Hill密码是运用

矩阵论原理的替换密码,

由Hill在1929年发明的,

每个字母当作26进制数字：

A=0,B=1,C=2...

一串字母当成n唯向量，

跟一个$n \times n$

的矩阵相乘，

得到的结果就是

加密后的密文。

案例分析

Hill密码是基于

矩阵的运算和可逆矩阵。

明文被分成大小

相同的几个分组。

案例分析

密钥是一个可逆的方阵。

如果把密钥矩阵成为K,

$$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{k}_{11} & \boldsymbol{k}_{12} & \cdots & \boldsymbol{k}_{1m} \\ \boldsymbol{k}_{21} & \boldsymbol{k}_{22} & \cdots & \boldsymbol{k}_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{k}_{m1} & \boldsymbol{k}_{m2} & \cdots & \boldsymbol{k}_{mm} \end{pmatrix}$$

案例分析

把明文中第i个分组中的

m个字符

记为$p_{i1}\cdots p_{im}$，

案例分析

相应的密文字符为

$$c_{i1} \cdots c_{im},$$

加密算法为

$$c_{il} = p_{i1}k_{1l} + \cdots + p_{im}k_{ml}$$

这实际上就是矩阵相乘的结果

若已知密钥矩阵为

$$\boldsymbol{K} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

案例分析

要对明文

battle on Tuesday

加密．那么密文为多少？

案例分析

【问题分析】

首先，要对明文设置对应关系。

例如可以在26个

英文字母与数字间

建立一一对应关系：

案例分析

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F & G & H & I \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} J & K & L & M & N & O & P & Q & R \\ 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} S & T & U & V & W & X & Y & Z \\ 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{pmatrix}$$

案例分析

【模型构建】

由于明文共15个字符，

可以分为5个分组，

每个分组有三个字符。

即记成这样的形式：

$$M = \begin{pmatrix} b & a & t \\ t & l & e \\ o & n & T \\ u & e & s \\ d & a & y \end{pmatrix}$$

根据对应关系，

明文矩阵为

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 19 \\ 19 & 11 & 4 \\ 14 & 13 & 19 \\ 20 & 4 & 18 \\ 3 & 0 & 24 \end{pmatrix}$$

案例分析

【模型求解】

所以加密后矩阵为N，

$$N = MK = \begin{pmatrix} \mathbf{18} & \mathbf{19} & \mathbf{20} \\ \mathbf{11} & \mathbf{15} & \mathbf{8} \\ \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{20} \\ \mathbf{24} & \mathbf{22} & \mathbf{16} \\ \mathbf{21} & \mathbf{24} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

密文为stulpifguywavyb。

案例二、交通模型

问题背景：

设某航空公司

在四个城市之间

有航行情况：

案例分析

从城市1到城市2、城市3有航线；

城市2到城市1、城市3有航线；

城市3到城市1、城市4有航线；

城市4到城市2、城市3有航线。

试考虑城市间航线到达情况。

案例分析

首先考虑如何来表示

城市之间航线的情形。

在这里用邻接矩阵来表示。

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij}),$$

案例分析

若城市i到城市j有航线，

则$\boldsymbol{a_{ij}=1}$,

否则$\boldsymbol{a_{ij}=0}$

$\boldsymbol{(i,j=1,2,3,4)}$,

由此可得

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

案例分析

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

表示可以乘坐2次航班到达的城市。为什么？

案例分析

所以$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2$

$$=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

表明在2次航线内城市之间可以相互到达。

案例三、动物数量按年龄段预测问题

问题背景：

某农场饲养的某种动物

所能达到的最大年龄为15岁，

案例分析

将其分成三个年龄组：

第一组，0-5岁；

第二组，6-10岁；

第三组，11-15岁。

案例分析

动物从第二年龄组起

开始繁殖后代，

经过长期统计，

第二组和第三组的

繁殖率分别为4和3。

案例分析

第一年龄和第二

年龄组的动物

能顺利进入

下一个年龄组的存活率

分别为0.5和0.25,

案例分析

假设农场现有三个
年龄段的动物各1000头，
问15年后农场三个
年龄段的动物
各有多少头？

案例分析

【问题分析】

因年龄分组为5岁一段，

故将时间周期也取为5年。

15年后就经过了

3个时间周期。

案例分析

设x_i^k表示

第k个时间周期的

第i组年龄阶段动物的数量

(k=1,2,3;i=1,2,3).

案例分析

因为某一时间周期

第二年龄组和第三年龄组

动物数量是由

上一时间周期

上一年龄组

存活下来的动物数量，

所以对时间周期

$\boldsymbol{k=1,2,3}$有

$$\boldsymbol{x_2^k = \tfrac{1}{2}x_1^{k-1}}$$

$$\boldsymbol{x_3^k = \tfrac{1}{4}x_2^{k-1}}$$

案例分析

又因为某一时间周期，
第一年龄组动物的数量
是由上一时间周期
各年龄组出生的
动物的数量，

所以对时间周期

$\boldsymbol{k = 1, 2, 3}$有

$$\boldsymbol{x_1^k = 4x_2^{k-1} + 3x_3^{k-1}}$$

【模型构建】

于是我们得到递推关系式：

$$\begin{cases} x_1^k = 4x_2^{k-1} + 3x_3^{k-1} \\ x_2^k = \frac{1}{2}x_1^{k-1} \\ x_3^k = \frac{1}{4}x_2^{k-1} \end{cases}$$

用矩阵表示

$$\begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ x_3^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{k-1} \\ x_2^{k-1} \\ x_3^{k-1} \end{pmatrix}$$

则$x^k = Lx^{k-1}$

其中

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix},$$

$$x^0 = \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

则有

案例分析

$$x^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}^1 = \boldsymbol{L}\boldsymbol{x}^0$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{7000} \\ \mathbf{500} \\ \mathbf{250} \end{pmatrix}$$

$$x^2 = Lx^1$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7000 \\ 500 \\ 250 \end{pmatrix}$$

案例分析

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{2750} \\ \mathbf{3500} \\ \mathbf{125} \end{pmatrix}$$

案例分析

$$
\begin{aligned}
x^3 &= Lx^2 \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2750 \\ 3500 \\ 125 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

案例分析

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{14375} \\ \mathbf{1375} \\ \mathbf{875} \end{pmatrix}$$

案例分析

结果分析

15年后，农场饲养的动物

总数将达到16625头，

案例分析

其中

0-5岁的有14375头，占86.47%,

6-10岁的有1375头，占8.27%,

11-15岁的有875头，占5.226%。

案例分析

15年间，动物总增长

16625-3000=13625 头，

总增长率为

13625/3000=454.16%.

案例四、配方问题

问题背景

一种佐料由四种原料

A、B、C、D混合而成。

案例分析

这种佐料

现有两种规格,

这两种规格的佐料中,

四种原料的比例分别为

2:3:1:1和1:2:1:2.

案例分析

现在需要四种

原料比例为

4:7:3:5的

第三种规格的佐料。

案例分析

问：第三种规格的佐料能否由前两种规格的佐料按一定比例配制而成？

【问题分析】

(1)假设四种原料混合在一起时不发生化学变化。

案例分析

(2)假设四种原料的

比例是按重量计算的。

(3)假设前两种规格的

佐料分装成袋，

案例分析

比如说第一种规格的

佐料每袋净重7克

其中A、B、C、D四种原料

分别为2克，3克，1克，1克，

第二种规格的佐料

每袋净重6 克

其中A、B、C、D四种原料

分别为1克，2克，1克，2克。

案例分析

【模型构建】:

根据已知数据

和上述假设,

可以进一步假设

案例分析

将x袋第一种规格的佐料
与y袋第二种规格的佐料
混合在一起，

案例分析

得到的混合物中

A、B、C、D四种原料

分别4克，7克，3克，5 克，

则有以下线性方程组

案例分析

$$
\begin{cases}
2x + y = 4 \\
3x + 2y = 7 \\
x + y = 3 \\
x + 2y = 5
\end{cases}
$$

案例分析

【模型求解】:

上述线性方程组的增广矩阵

$$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{7} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

案例分析

可见$x=1,y=2$是解，

又因为第一种规格佐料

每袋净重7克，

第二种规格佐料

每袋净重6克，

案例分析

所以第三种规格的佐料
能由前两种规格的佐料
按7：12的比例配制而成。

【模型应用】

(1)若令

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = (2,3,1,1)^T,$$

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = (1,2,1,2)^T,$$

$$\boldsymbol{\beta} = (4,7,5,3)^T,$$

案例分析

则原问题等价于

线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$

是否有解，也等价于

$\boldsymbol{\beta}$能否由$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$线性表示。

案例分析

(2)若四种原料的比例
是按体积计算的，
则最好先将体积比
转换为重量比，
然后按上述方法处理。

案例分析

(3)上面的模型假设中的
第三个假设
只起到简化运算的作用。

案例分析

如果直接设x克

第一种规格的佐料

与y克第二种规格

的佐料混合得

第三种规格的佐料，

案例分析

则有下表

种类	A	B	C	D
第一种	$\frac{2}{7}x$	$\frac{3}{7}x$	$\frac{1}{7}x$	$\frac{1}{7}x$
第二种	$\frac{1}{6}y$	$\frac{2}{6}y$	$\frac{1}{6}y$	$\frac{2}{6}y$
第三种	$\frac{4}{19}(x+y)$	$\frac{7}{19}(x+y)$	$\frac{3}{19}(x+y)$	$\frac{5}{19}(x+y$

案例分析

因而有如下线性方程组

$$\begin{cases} \frac{2}{7}x + \frac{1}{6}y = \frac{4}{19}(x+y) \\ \frac{3}{7}x + \frac{2}{6}y = \frac{7}{19}(x+y) \\ \frac{1}{7}x + \frac{1}{6}y = \frac{3}{19}(x+y) \\ \frac{2}{7}x + \frac{2}{6}y = \frac{5}{19}(x+y) \end{cases}$$

【模型检验】

求解上述方程组，

得到$x=7,y=12$，

可见模型假设中

第三个假设

不影响解的正确性。

谢　谢!