习题5

1.依照下列利率：1%, 2%, 5%, 7%, 9%, 13% 按年结算利息，使一笔存款达到本金的两倍，分别计算所用时间（取三位小数）.

2.分别以 r 和 $2r$ 计息，钱数在 n 年、m 年翻一番，$\frac{2}{m}$ 是多少？是小于 2 还是大于 2?（剑桥大学 $B.A$ 1807.）

3.证明 Malthus 模型中,$P(0)$ 翻一番所花的时间 τ 是 $\frac{ln2}{lnk}$.在 1990 年，世界人口至少是 50 亿，用 Malthus 模型，假设 k 取 1.05,1.03,和 1.01，试估计 2050 年的人口总数。

4.如果平均寿命是 d 岁，在总数为 P 的人口群体中假定每年的死亡率约为 $\frac{P}{d}$,在中国，P 和 d 分别约为 10 亿和 65 岁，而每天约有 4 万个婴儿出生，试估计相应的 k.（1992 年经世界卫生组织计算，全世界每天约有 91 万胎儿降生.）

5.解方程 $x(n+1) = kx(n) + n$.

6.如果在“抵押”方程中，每次还款数是常数，求以价值 c 元的房子为抵押还清一笔货款所用年限的公式，设利率为常数 r. 如果 r 变为 $r + \delta r$,公式如何变化？

7.若某人的月薪是 s,那么按年增长 r% 好呢？还是按月增长 $\frac{r}{12}$% 好？如果货币按 c% 贬值，那么这些增长的价值是什么？

8.设 T 是还清一笔初始货款为 P 的抵押货款所用的时间利率为 b，固定的正常还款数为 R，用计算机研究

（a）对固定的 P 和 b,T 如何随 R 变化；

（b）对固定的 P 和 T,R 如何随 b 变化,以及其它类似的关系.

9.一笔金额的 L 的货款，每年按金额为 R 分期付款，如果年利率是 r%,证明在 n 年后所欠的总数为 $L(n)$,其中 $L(n+1) = L(n)(1 + \frac{r}{100}) - R$;并证明，假设 $L < 100\frac{R}{r}$,则每次还款都会使 $L(n)$ 减少；证明差分方程

$$\lambda(n+1) = k\lambda(n) - c$$

的解是

$$\lambda(n) = k^n(\lambda(0) + \frac{c}{1-k}) - \frac{c}{1-k}$$

并用该公式计算还清一笔今晚为 L 的货款所用的年限，如果 r, L 和 n 固定，求 R.

10. 目前在很多国家，超过半数的人口在 14 岁以下，如果平均寿命是 40 岁，使用 Verhulst 模型，你能推出出生数超过死亡数吗？

11. 一种植物的每粒种籽，当它一岁时产 21 倍，而当它两岁或更大时产 44 倍，种下一粒种籽立即就产生一粒新种籽，再把它种上考察第 n 年末所产生的种籽数 u(n), 证明

$$u(n+1) = 21u(n) + 44(1 + u(1) + u(2) + ... + u(n-1))$$

从而证明

$$u(n+2) - 22u(n+1) - 23u(n) = 0$$

并求 $u(n)$.

12. 一矩形长为 l 宽为 b,这些尺寸称为“神授的比例”或“黄金分割”，如果，如图 5.7 所示，当从它上面去掉一个正方形时，剩下的矩形（画阴影）扔保持长与宽的比例，上述切割过程依次得到长与宽分别为 l(n),b(n)的矩形序列，求关于 b(n)的二阶差分方程，并由此求黄金分割的值.

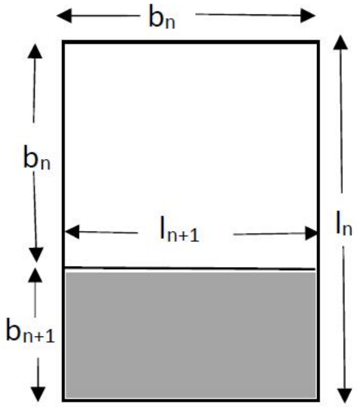

图 5.7

13. 某电脑公司销售某品牌的电脑，一周内需求量 s(单位:台)和上周末的进货量 y(单位：台)均在 [50,80」内变化．每售出一台电脑，可获利 200 元，若供不应求，可向其他公司调货，每台仍可获利 50 元，若供过于求，通过降价仍可全部售出，但每台要亏损 100 元．试将该公司一周内销售该品牌电脑获取的利润 z 表示成需求量 s 和进货量 y 的函数.

14. 假设消费者不仅关心价格，还关心价格的增幅，供给依赖上期价格，那么供需函数如何描述，并解它.

15. 设 $Q(t)$ 是 t 时刻的存货量，如果此时我们考虑供给函数依赖上期价格，那么，如何解决这个问题?

16. 一个半雪球雪堆．其体积融化的速率与半球面面积 S 成正比，比例系数 $k > 0$。设融化中雪堆始终保持半球状，初始半径为 R 且 3 小时中融化了总体积的 $\frac{7}{8}$．问雪堆全部融化还需要多长时间?

17. 早期肿瘤的体积增长满足 Malthus 模型 ($\frac{dV}{dt} = \lambda V$，其中 λ 为常数)，（1）求肿瘤的增倍时间 t_0。根据统计数据，一般有 $t_0 \in (7, 465)$(单位为天)，发展太快与太慢一般都不是恶性肿瘤，因此 t_0 是确定肿瘤性质的重要参数之一．（2）为方便起见，一声通常用肿瘤直径来表示肿瘤的大小，试推出一声用来预测病人肿瘤直径增大速度的公式.

18. 在法国著名的 Lascaux 洞穴中保留着古代人类遗留下来的壁画．从洞穴中取出木炭在 1950 年做过检测，测得碳 14 的衰减系数为每克每分钟 0.97 个，已知碳 14 的半衰期为 5568 年，试求这些壁画的年龄（精确到百年）.

19. 牛顿发现在温差不太大的情况下，物体冷却的速度与温差成正比．现设正常体温为 36.5°C，法医在测量某受害者尸体时测得体温为 32°C，一小时后再次测量，测得的体温约为 30.5°C。试推测该受害者的受害时间.

20.（存款模型）某家庭从现在着手从每月工资中拿出一部分资金存入银行，用于投资子女的教育．并计划 20 年后开始从投资帐户中每月支取 1000 元，直到 10 年后子女大学毕业用完全部资金．要实现这个投资目标，20 年内共要筹措多少资金?每月要向银行存入多少钱?假设投资的月利率为 0.5%.

21. 据统计，某城市 2001 年的猪肉产量为 30 万吨，价格为 6.00 元/公斤．2002 年生产猪肉 25 万吨，价格为 8.00 元/公斤．已知 2003 年的猪肉产量为 28 万吨，若维持目前的消费水平与生产方式，并假定猪肉产量与价格之间是线性关系．问若干年以后的产量与价格是否会趋于稳定?若稳定请求出稳定的产量和价格.

22. 在 1805 年的特拉法尔加 (Traflagar)战斗中，我们看到如果两军简单地正面交锋的话，英军在战斗中大约要损失 24 艘战舰，而法西联军约损失 15 艘战舰. 我们还看到纳尔逊爵士利用分割并各个击败的战略战胜了敌人的优势兵力. 弱势兵力战胜优势兵力的另一种策略就是增强它所使用的技术装备．假定英军战舰装备了优良的武器，又假定法西联军遭受的损失为英军战舰数的 15%，而英军遭受的损失为法西联军战舰数的 500.

(a)应用差分方程组对双方的战舰数进行建模. 假设法西联军一开始的战舰数为 33 艘，而英军一开始的战舰数为 27 艘.

(b)建立数值解以确定在新的假设条件下正面交战的话，哪一方会赢.

(c)利用纳尔逊爵士的分割并各个击败的战略结合英军战舰装备了优良武器的条件建立三次

战斗的数值解.

23. 假定斑点猫头鹰的主要食物来源是单一的食饵：老鼠，生态学家希辑预测在一个野生鸟兽保护区里斑点猫头鹰和老鼠的种群量水平令 M_n 表示 n 年后老鼠的种群量，而 O 表示 n 年后斑点猫头鹰的种群量，生态学家提出了下列模型

$$M_{n+1} = 1.2M_n - 0.001O_nM_n$$

$$O_{n+1} = 0.7O_n - 0.002O_nH_n$$

生态学家想知道在栖息地两个种群能否共存以及结果是否对起始种群量敏感.

(a)比较上面模型中系数的正负号和例 3 中猫头鹰 –隼模型中系数的正负号．依次解释正在建模的捕食者 –食饵关系中四个系数 1. 2、-0. 001、0.7 和 -0. 002 的正负号的意义.

(b)对下表中的初始种群量进行检验并预测其长期行为：

	猫头鹰	老鼠
情形 A	150	200
情形 B	150	300
情形 C	100	200
情形 D	10	20

(c)现在利用给定的起始值对不同的系数的值做实验.然后再试不同的起始值．长期行为是怎样的?你的实验结果是否表明模型对系数是敏感的?是否对起始值敏感?

24. 经济学家要研究单个产品的价格变化．据观察，市场上产品的高价格会吸引更多的供应商．但是，增加所供应的产品数量会导致价格的下跌，随时间的变化，存在着价格和供应之间的相互作用．经济学家提出了下面的模型，其中 P_n 表示第 n 年的产品价格，而 Q_n 表示第 n 年产品的数量：

$$P_{n+1} = P_n - 0.1(Q_n - 500)$$

$$Q_{n+1} = Q_n - 0.2(P_n - 100)$$

(a)该模型直观.上有意义吗?常数 100 和 500 的意义是什么?解释常数 -0.1 和 -0.2 的正负号的意义.

(b)对下表中的初始条件进行检验并预测其长期行为：

	价格	数量
情形 A	100	500
情形 B	200	500
情形 C	100	600
情形 D	100	400

25. 在例 4 的投票趋势中，对原点附近的起始值做实验. 原点是稳定平衡点吗?试加以说明. 利用给定的起始值对不同的系数值做实验，然后试试不同的起始值，长期行为是怎样的?你的实验结果是否表明模型对系数是敏感的?是否对起始值敏感?

现在假设每个党都在补充新党员.当每个党都补充了未登记的公民作为新党员时，一开始就要假设选民总数要增加.对新党员人数不同的值做实验.长期行为是怎样的?它对补充的速率是敏感的吗?你怎样调整模型以反映选区的公民总数是不变的?怎样调整模型以反映你所在的选区正在发生的情况. 从长远的观点来看，在你的选区里将会发生什么情况?

26. 1868 年，偶然从澳大利亚引入美国的吹绵蚧 (Icerya Purchasi)威胁到甚至会毁灭美国的柑橘业. 为对抗这种形势，引进了一种天然的澳大利亚捕食者瓢虫 (Novius cardinalis)，瓢虫使得吹棉蚁的数量降到一个相对低的水平. 当发明了能杀死吹绵蚧的杀虫剂 DDT 后，农民就用 DDT 希望能进一步降低吹绵蚧的数量. 但是，事实证明 DDT 对瓢虫也是致命的，而且利用了这种杀虫剂后的总效果是增加了吹绵蚧的数量. 令 C_n 和 B_n 分别表示 n 天后吹绵蚧和瓢虫的种群量水平. 推广习题 4 中的模型，有

$$C_{n+1} = C_n + k_1 C_n - k_2 B_n C_n$$

$$B_{n+1} = B_n - k_3 B_n + k_4 B_n C_n$$

其中 k_i 都是正常数.

(a)讨论该模型中每个 k_i 的意义.

(b)在一个种群不存在时，关于另一个种群的增长的隐含的假设是什么?

(c)对系数取值并再试试几个起始值，你的模型预测的长期行为是什么?改变系数. 你的实验是否表明模型对系数是敏感的?对起始值是否是敏感的?

(d)修改该捕食者一食饵模型使之能反映农民 (在常规的基础上)使用杀虫剂以与瓢虫和吹绵蚧当前的数量成比例的杀死率杀死它们的情形.