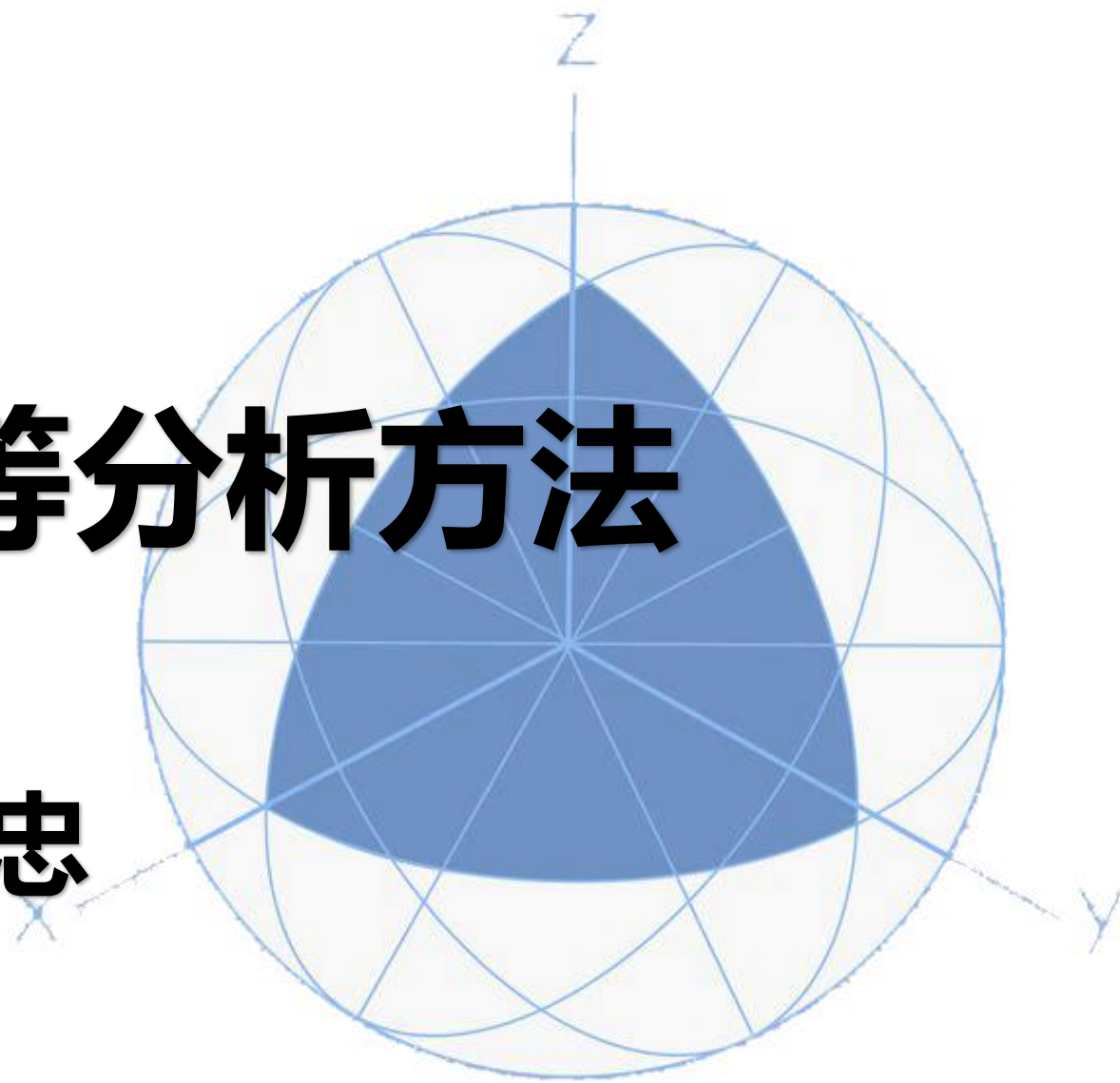




廈門大學
XIAMEN UNIVERSITY

第三章 初等分析方法

譚 忠





廈門大學
XIAMEN UNIVERSITY

目录
CONTENTS

3.2应用导数思想建模



3.3初等连续优化方法



3.1应用积分思想建模



廈門大學
XIAMEN UNIVERSITY

Part 1

应用积分思想建模



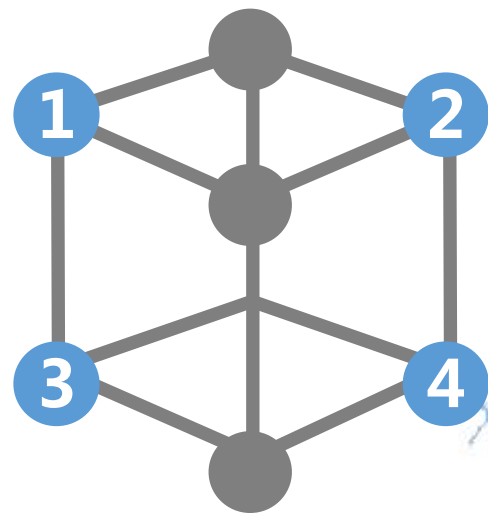


3.1.1 催生积分思想产生的源头问题

十七世纪，四类问题催生了微积分的诞生：

1、求瞬时速度的问题

3、求函数的最大值和最小值问题



2、求曲线的切线问题

4、求曲线长、曲线围成的面积、曲面围成的体积、物体的重心、一个体积相当大的物体作用于另一物体上的引力

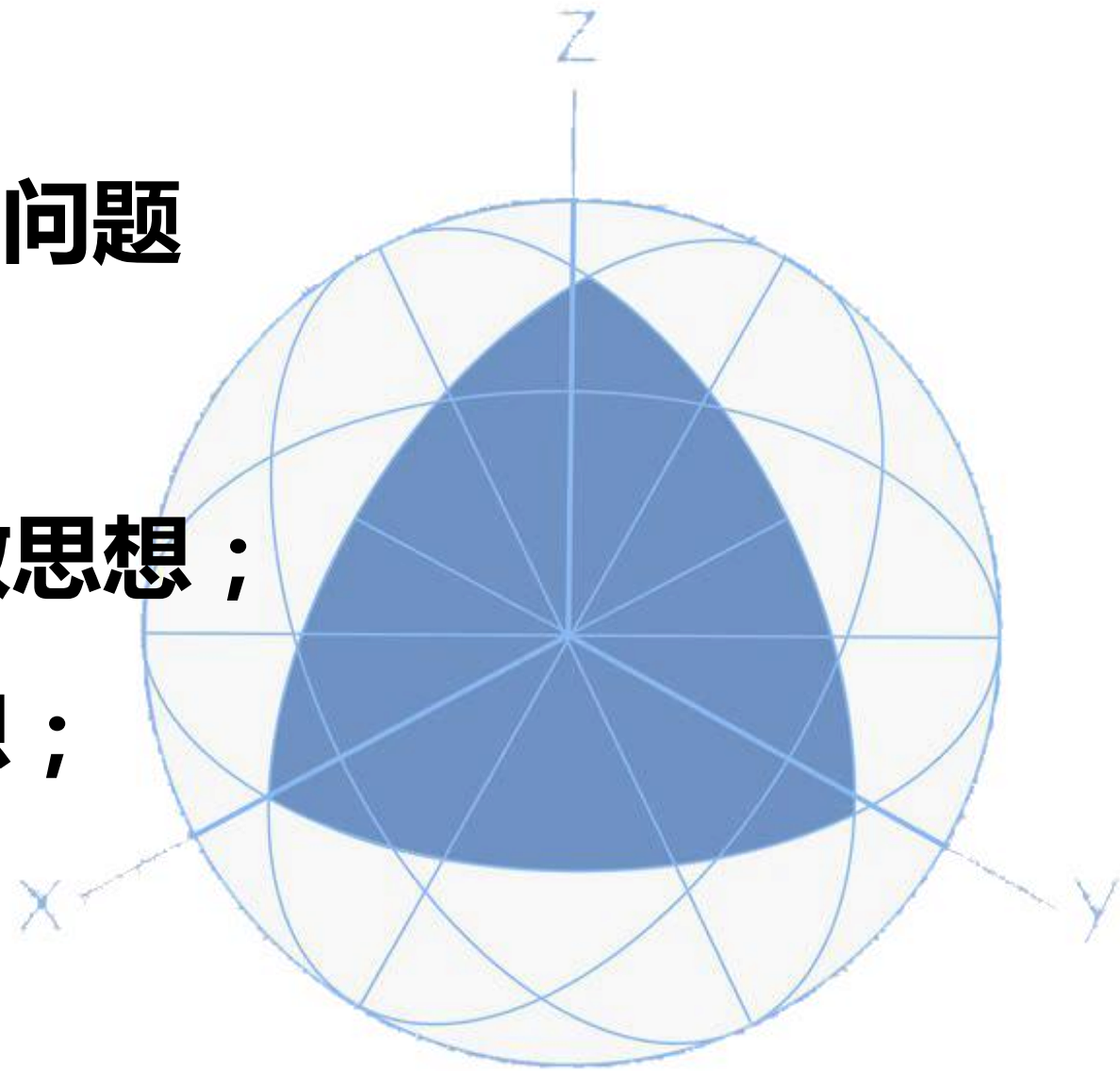
3.1.1 催生积分思想产生的源头问题

显然:

第一类和第二类问题产生了导数思想 ;

第三类问题产生了初等优化思想 ;

第四类问题产生了积分思想.



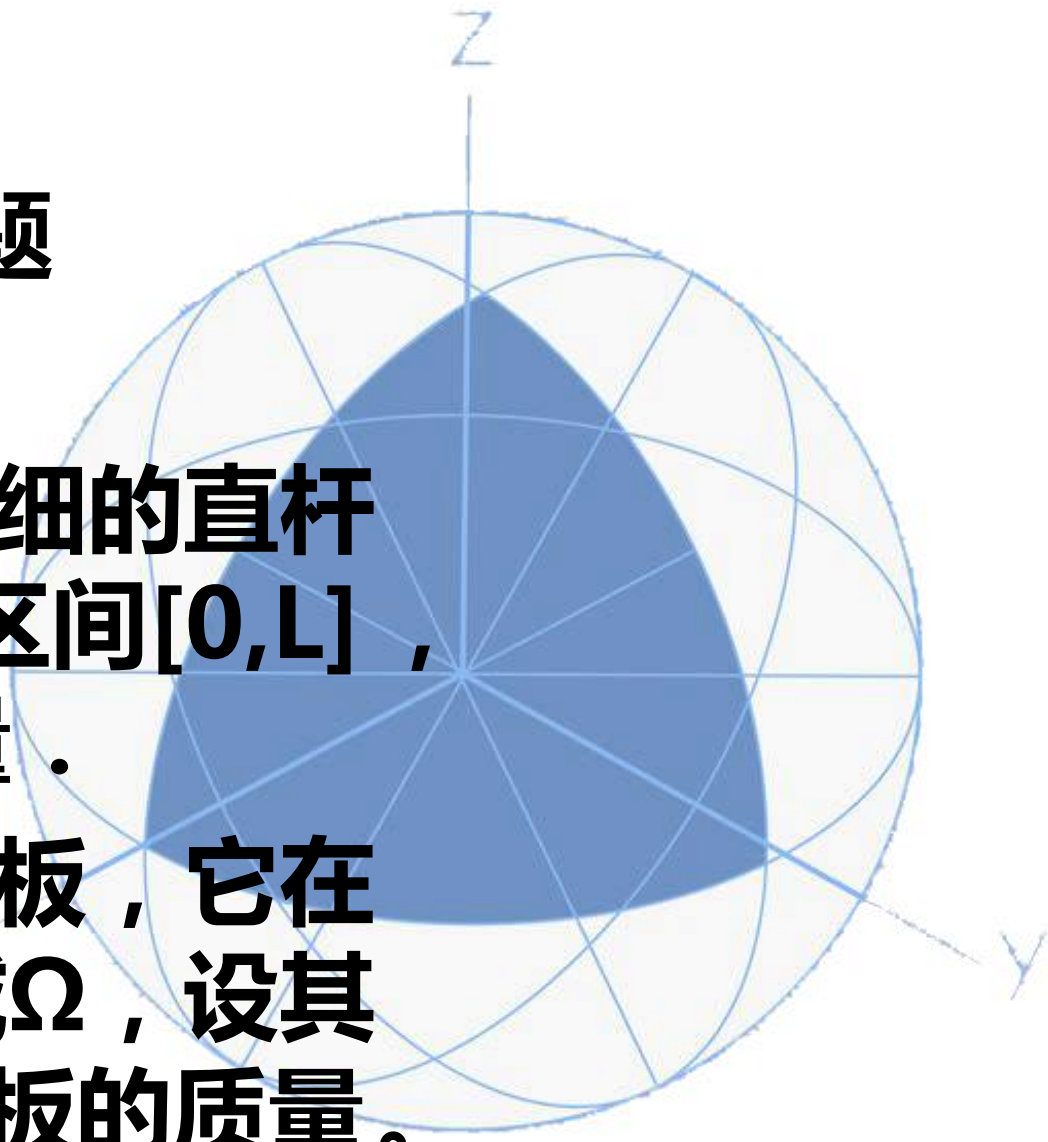


3.1.1 催生积分思想产生的源头问题

第四类问题的现代提法可以写为：

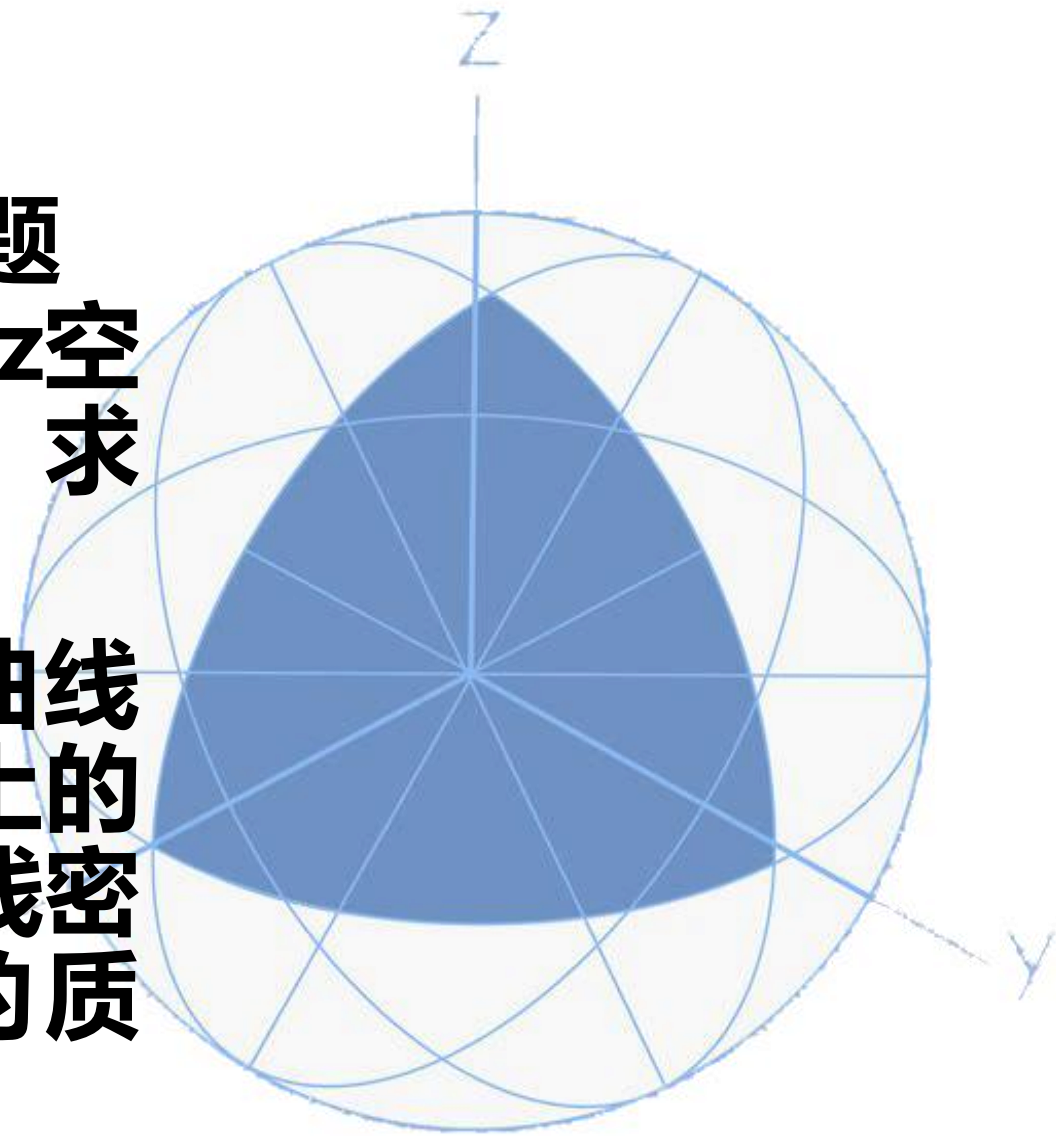
问题 1:一维情形 一根长度为 L 的细的直杆，它在取定的坐标轴 x 上占据闭区间 $[0,L]$ ，设其密度为 $\rho=\rho(x)$ ，求此杆的质量。

问题 2:二维情形 物体是一薄的平板，它在取定的坐标系 xy 平面上占据区域 Ω ，设其密度 $\rho=\rho(x,y)$ 不等于常数。求此板的质量。



3.1.1 催生积分思想产生的源头问题
问题 3: 三维情形 如果物体占据xyz空间区域G, 其密度为 $\rho = \rho(x, y, z)$, 求其质量.

问题4: 一维不规则情形-第一型曲线积分 设曲线型细长铁丝形成空间上的一根曲线I, 其上任一点 (x, y, z) 的线密度为 $\rho = \rho(x, y, z)$, 试求此铁丝的质量.

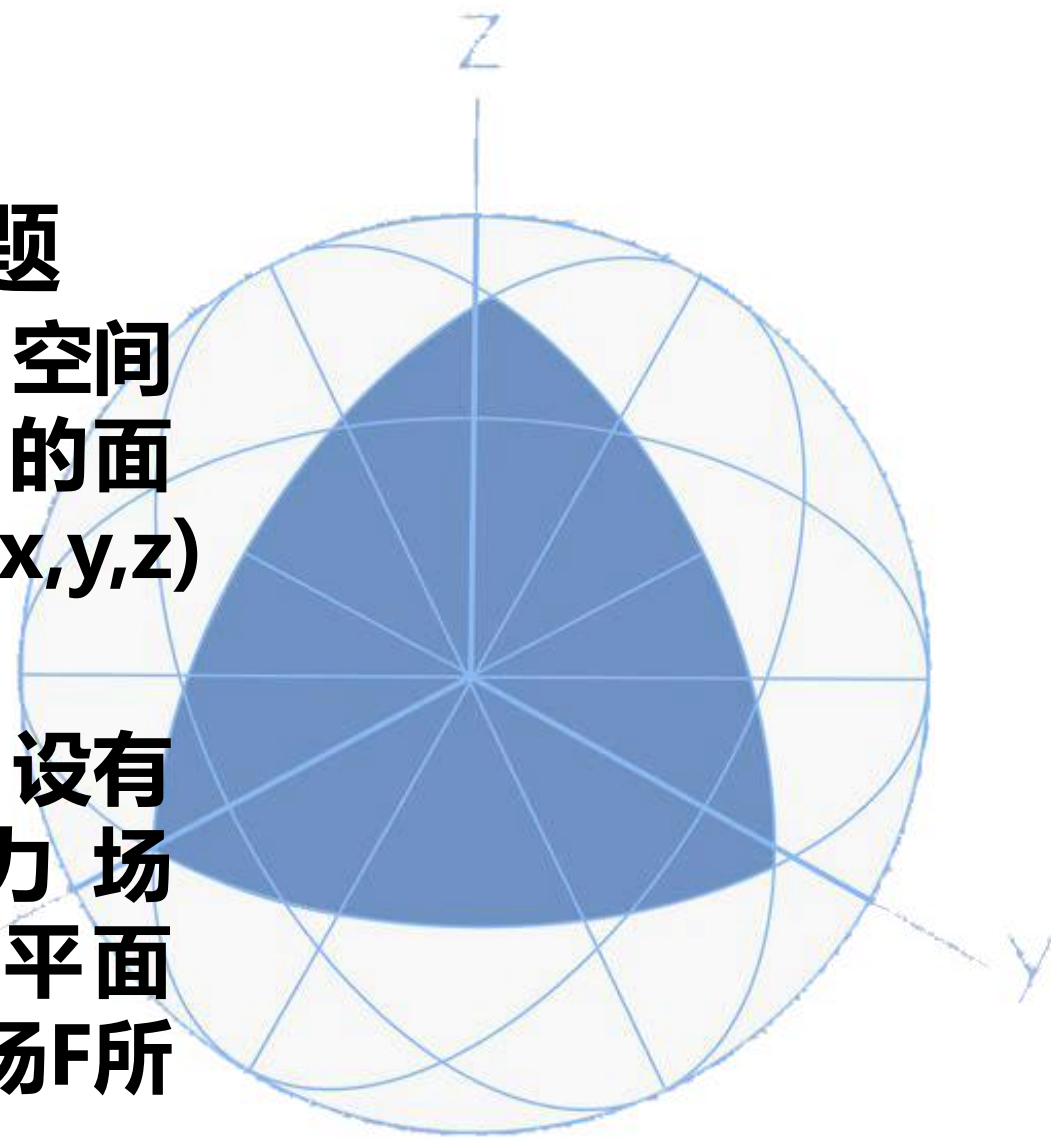




3.1.1 催生积分思想产生的源头问题

问题5：二维不规则情形-第一型曲面积分 空间中一薄板呈现曲面 Σ 形式，任一点 (x,y,z) 的面密度(单位面积上的质量)有分布函数 $\rho=\rho(x,y,z)$ 确定，问如何求此板 Σ 的总质量。

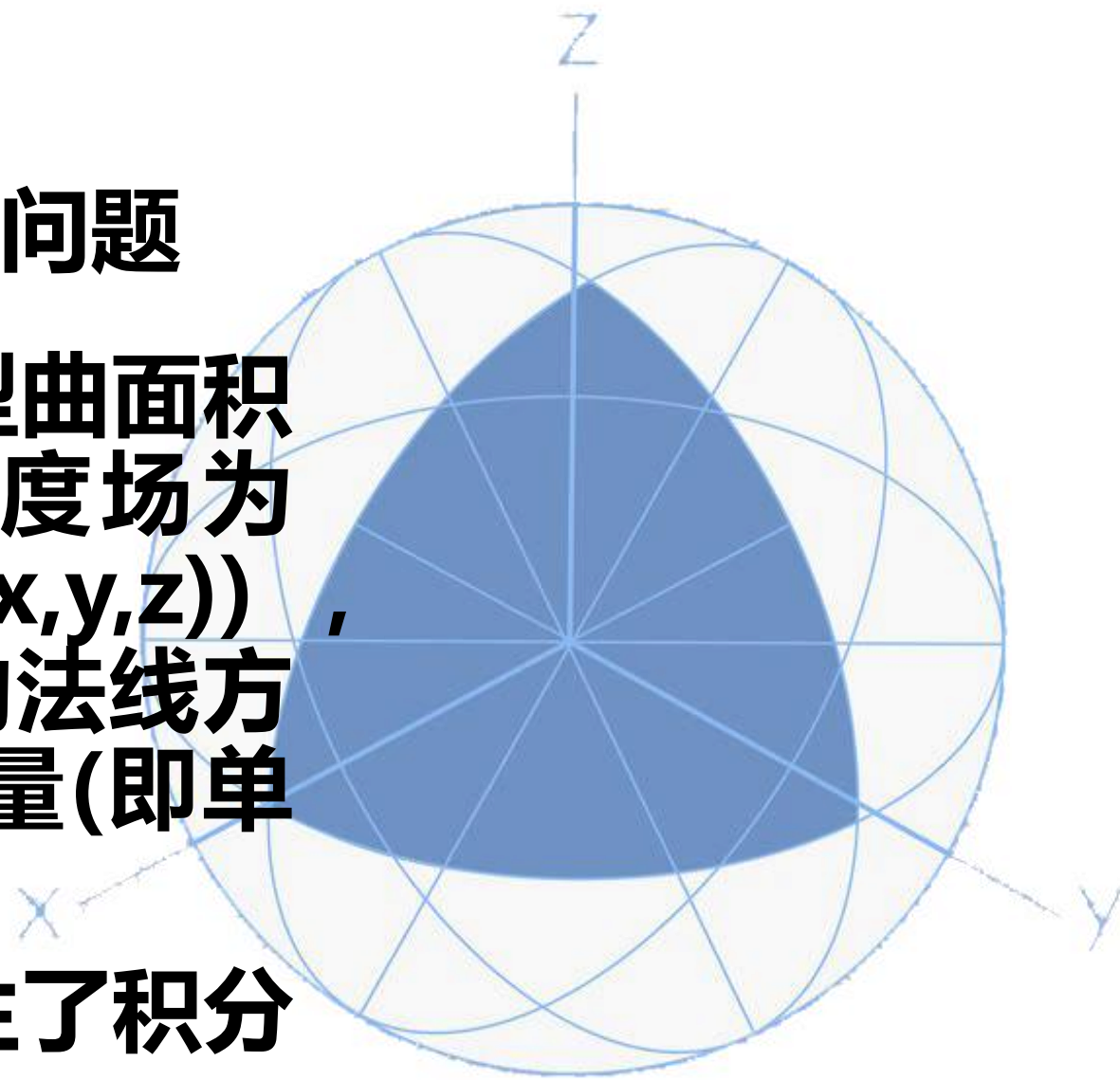
问题6：一维不规则情形-第二型曲线积分 设有一个质点，在平面（或空间）力场 $F(x,y)$ ($F(x,y,z)$)的作用下，从一光滑的平面(空间)曲线 C 之一端 A 至另一端 B 。试求力场 F 所做的功。



3.1.1 催生积分思想产生的源头问题

问题7：二维不规则情形-第二型曲面积分 考虑空间定常流，设其速度场为 $v(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$ ， $(x,y,z)\in\Omega$ 试计算流体沿指定的法线方向 v 通过 Ω 内某光滑曲面 Σ 的流量(即单位时间内通过 Σ 的流体体积)。

在解决这些问题的过程中就产生了积分思想，形成了积分建模的方法。





3.1.2 积分思想与建模方法

通过回答上述三个问题介绍积分思想 .

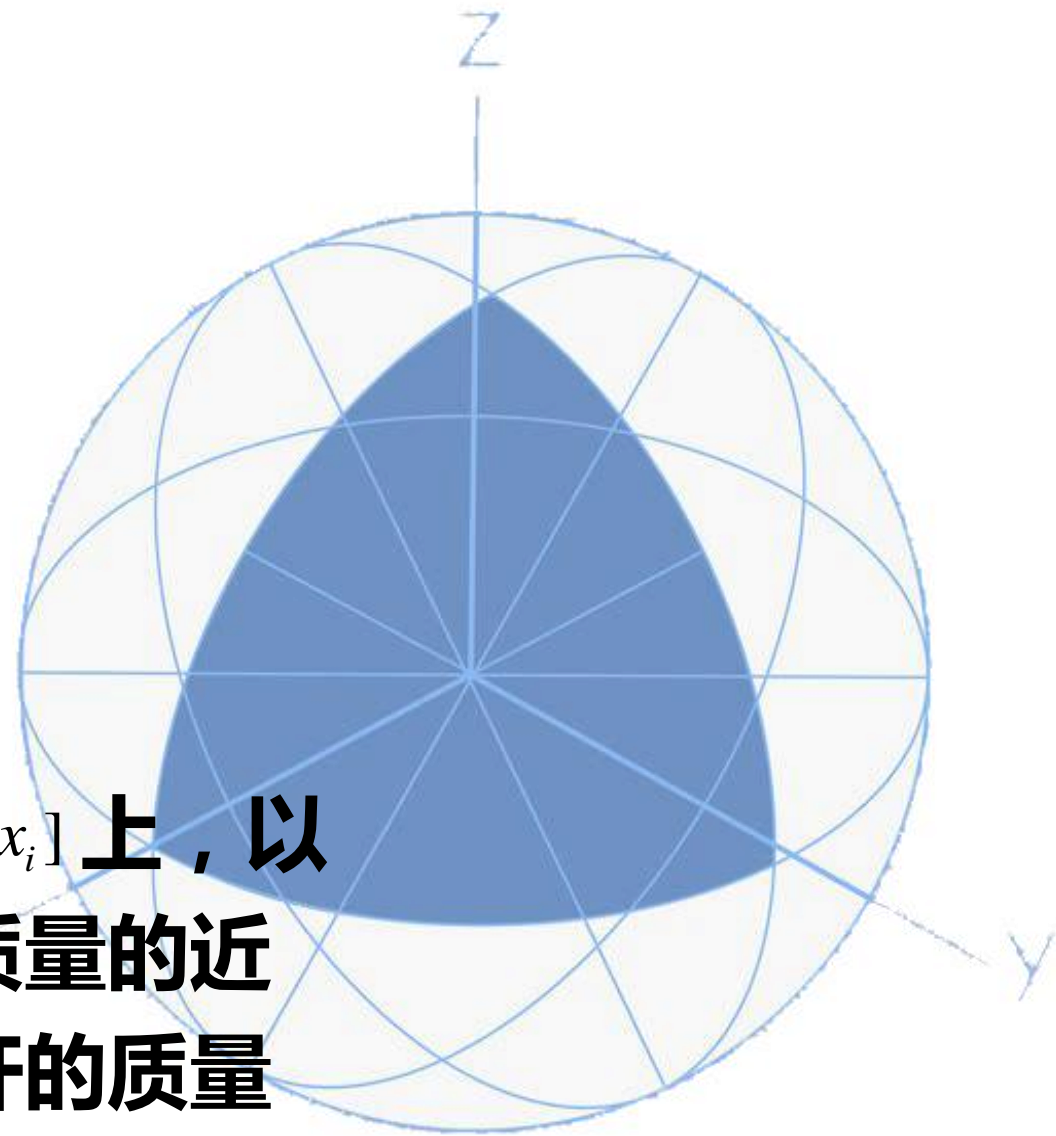
问题 1 的解答 : 对区间作任意分割 :

$$\Delta : 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_K = l$$

并任意取介点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, 在每个区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上, 以

“常 (密度) 代变 (密度)” , 计算出质量的近似值 , 然后通过一个极限过程 , 使得此杆的质量

:

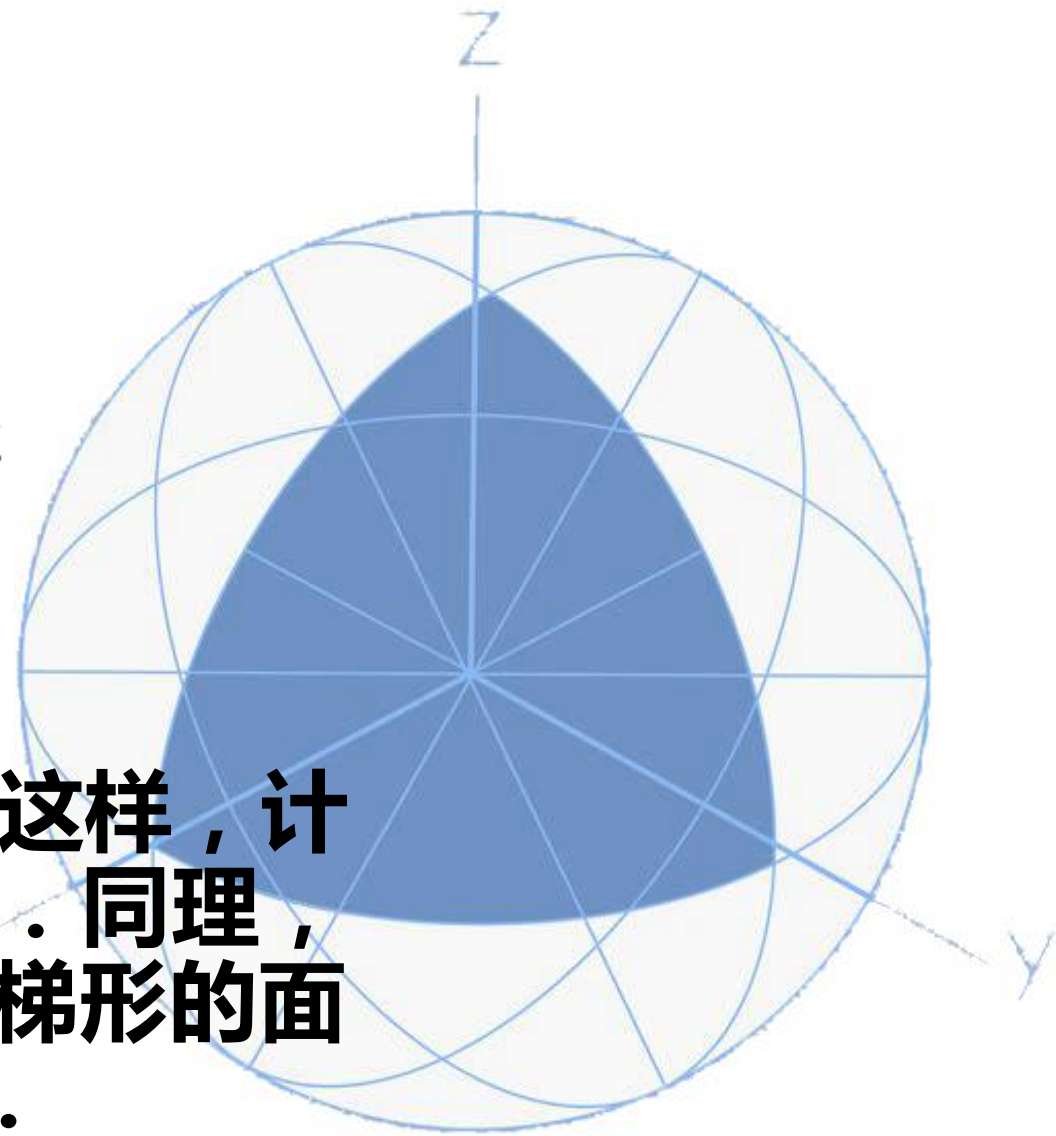




3.1.2 积分思想与建模方法

$$\begin{aligned} m &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^K \rho(\xi_i) \Delta x_i \\ &= \int_0^l \rho(x) dx \end{aligned}$$

其中 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\|\Delta\| = \max_{1 \leq i \leq K} \Delta x_i$. 这样, 计算直杆的质量引出一元函数的定积分. 同理, 计算直线上变速运动的路程以及曲边梯形的面积都可以引出一元函数的定积分概念.

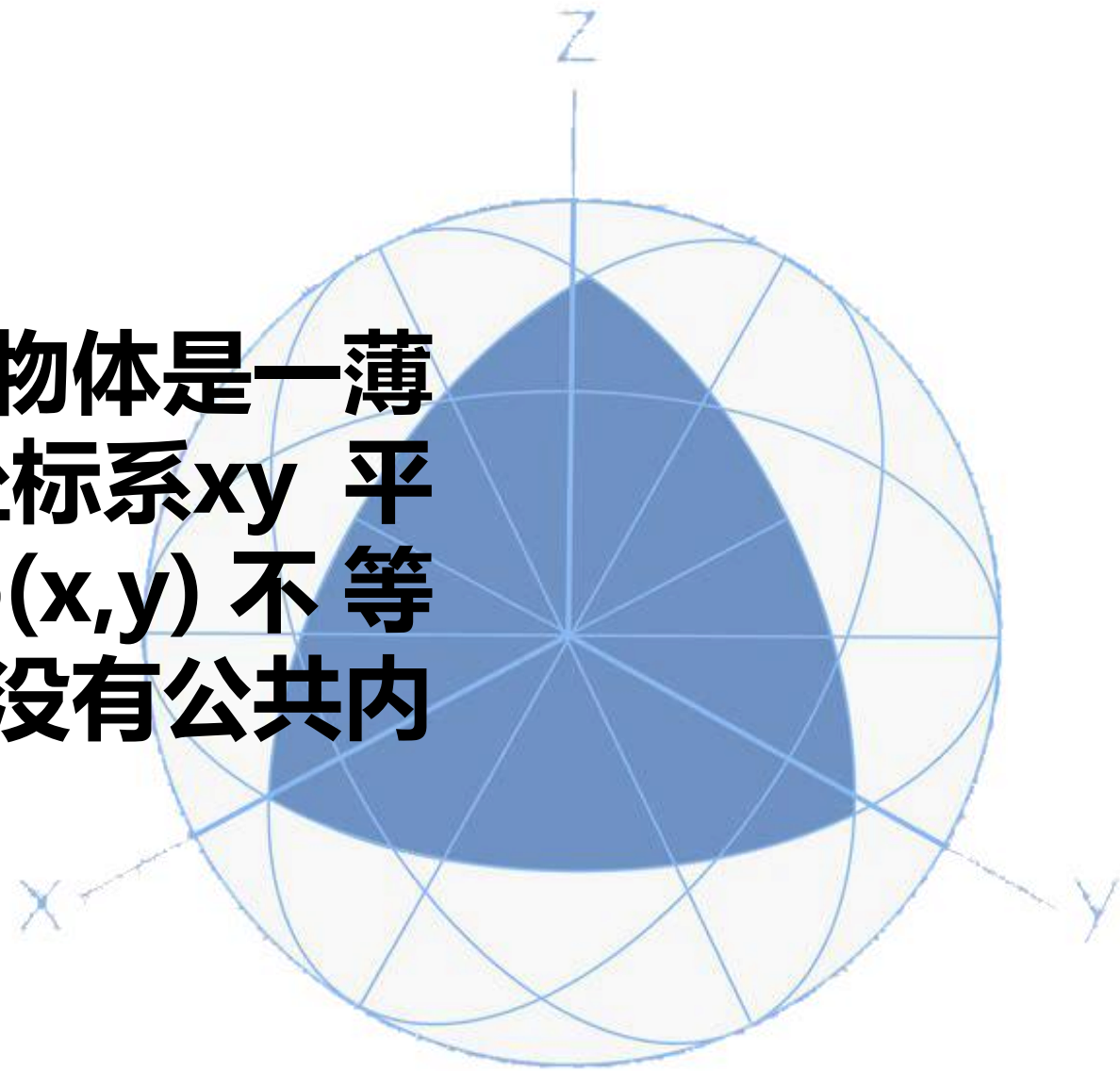




3.1.2 积分思想与建模方法

问题 2 的解答：现设所考虑的物体是一薄的平板，不妨认为它在取定的坐标系 xy 平面上占据区域 Ω ，设其密度 $\rho = \rho(x, y)$ 不等于常数. 将 Ω 分割为 K 个彼此没有公共内点的闭子域：

$$\Omega_1, \cdots, \Omega_K$$



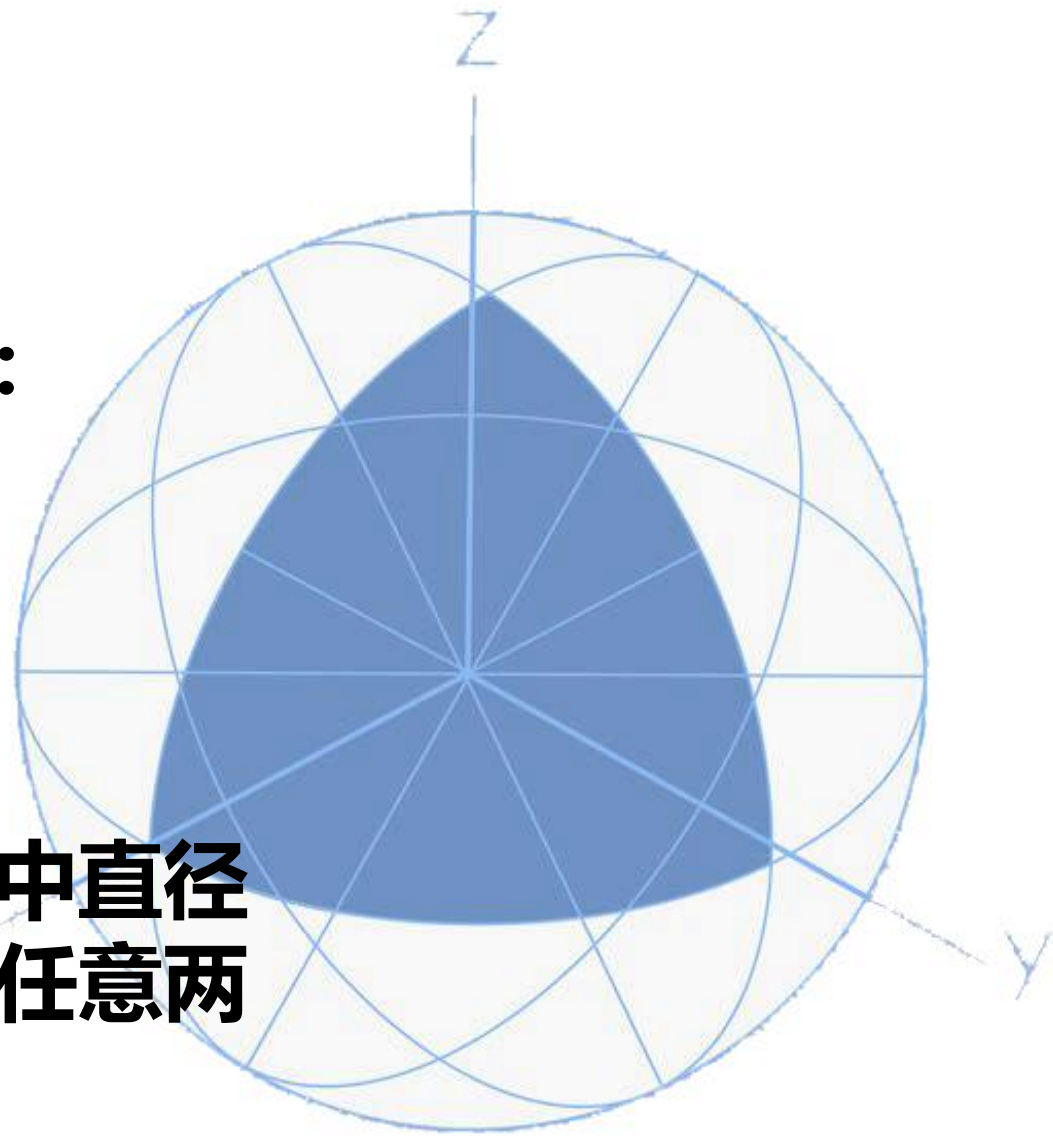


3.1.2 积分思想与建模方法

并任取点 $(x_i, y_i) \in \Omega_i$, 求得此板的质量 :

$$\begin{aligned} m &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^K \rho(x_i, y_i) \Delta A_i \\ &= \iint_{(x,y) \in \Omega} \rho(x, y) dx dy \end{aligned}$$

其中 ΔA_i 表示 Ω_i 的面积, 而 $\|\Delta\|$ 表示 Ω_i 中直径最大者. 所谓点集 E 的直径, 是指 E 中任意两点的距离所构成的数集的上确界.

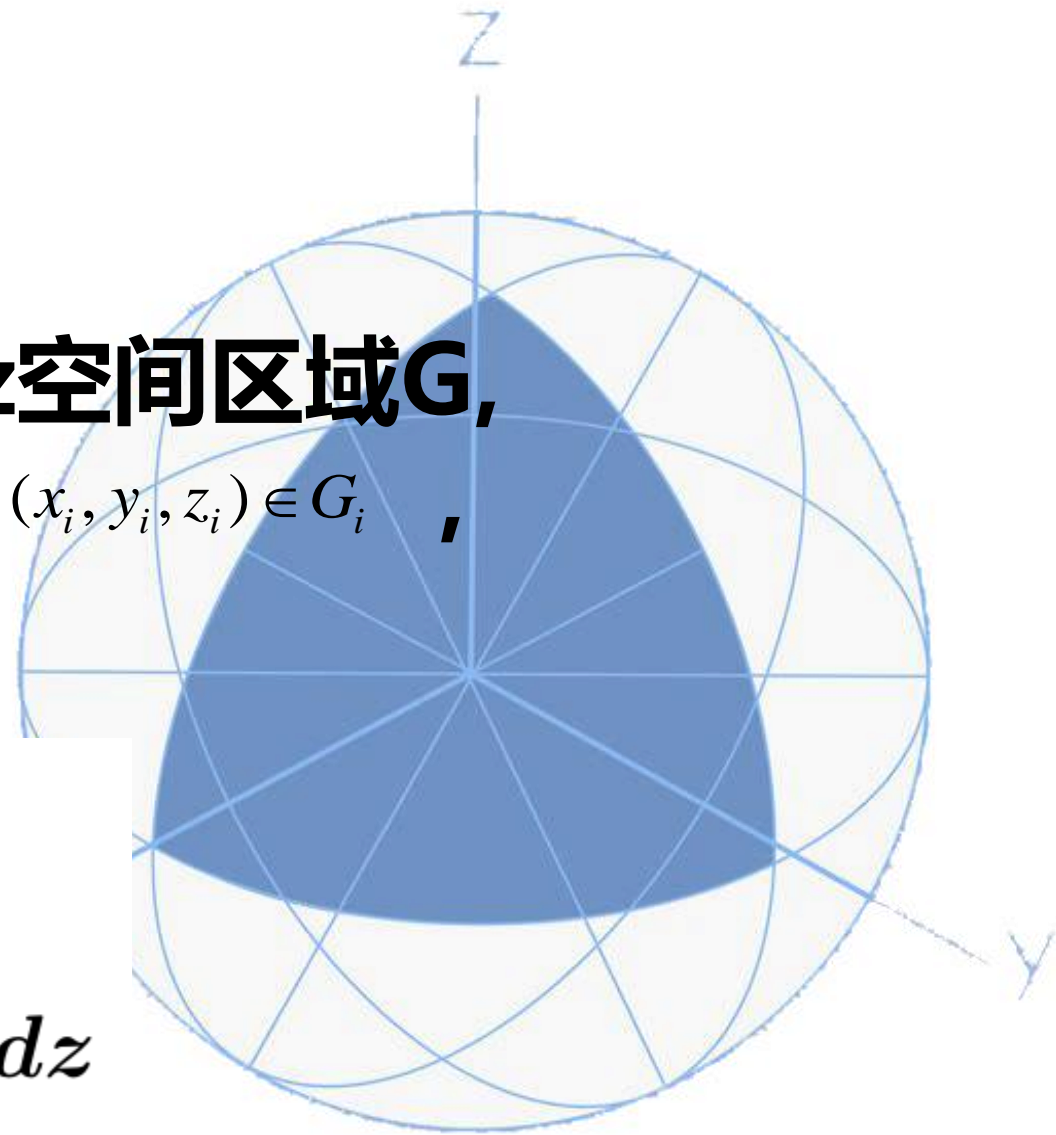




3.1.2 积分思想与建模方法

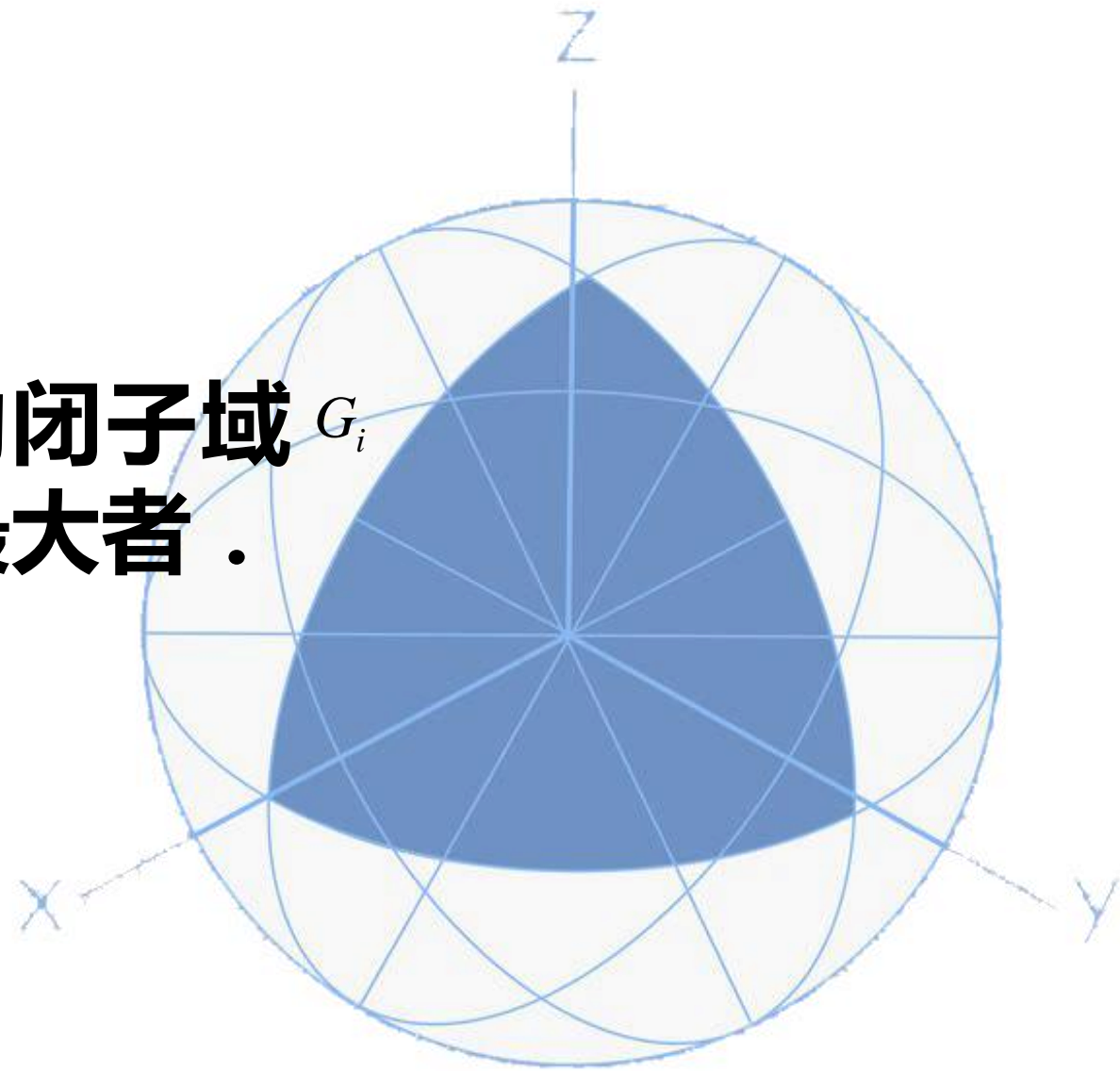
问题 3 的解答：如果物体占据xyz空间区域G，其密度为 $\rho=\rho(x,y,z)$ ，并取任意点 $(x_i, y_i, z_i) \in G_i$ ，其质量就是：

$$\begin{aligned} m &= \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^K \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i \\ &= \iiint_{(x,y,z) \in G} \rho(x, y, z) dx dy dz \end{aligned}$$



3.1.2 积分思想与建模方法

其中 ΔV_i 表示分割区域G所得的闭子域 G_i 的体积，而 $\|\Delta\|$ 表示 G_i 中直径最大者。

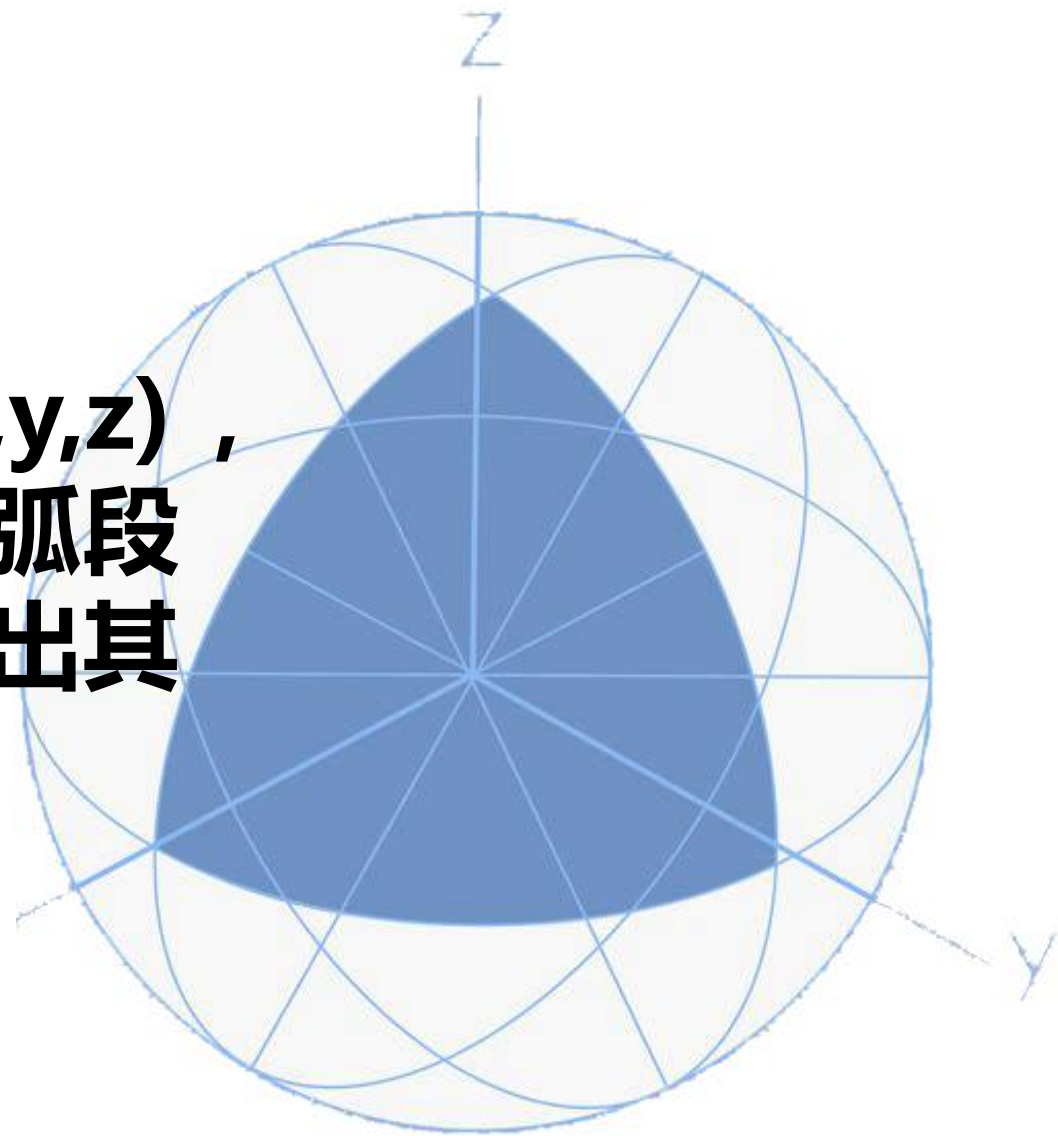




3.1.2 积分思想与建模方法

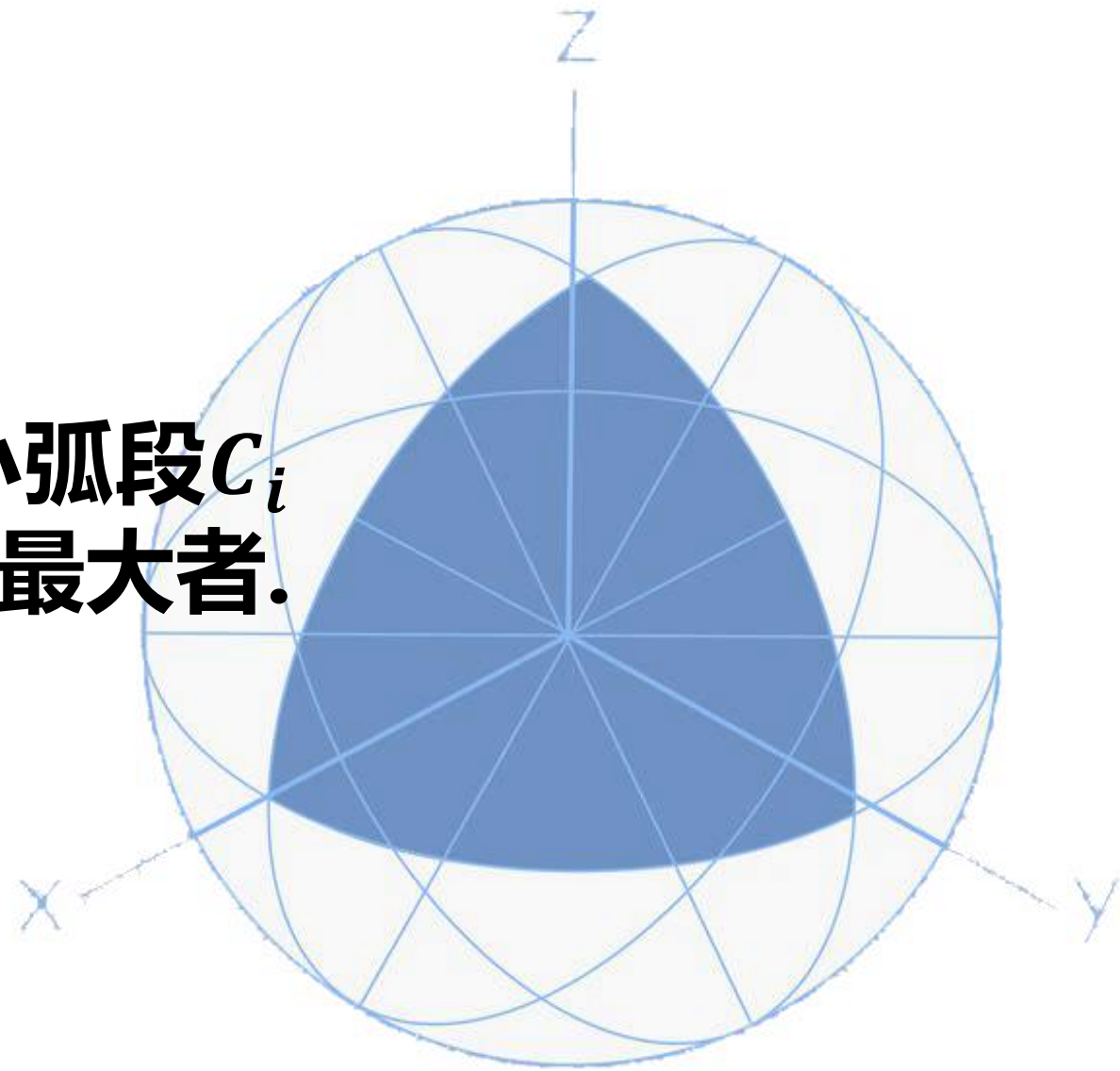
问题4的解答：如果密度为 $\rho = \rho(x, y, z)$ ，则对此曲线作任意分割所得之微小弧段 C_i ，并任取介点 (x_i, y_i, z_i) ，便可求出其质量是：

$$m = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i = \int_C \rho(x, y, z) ds$$



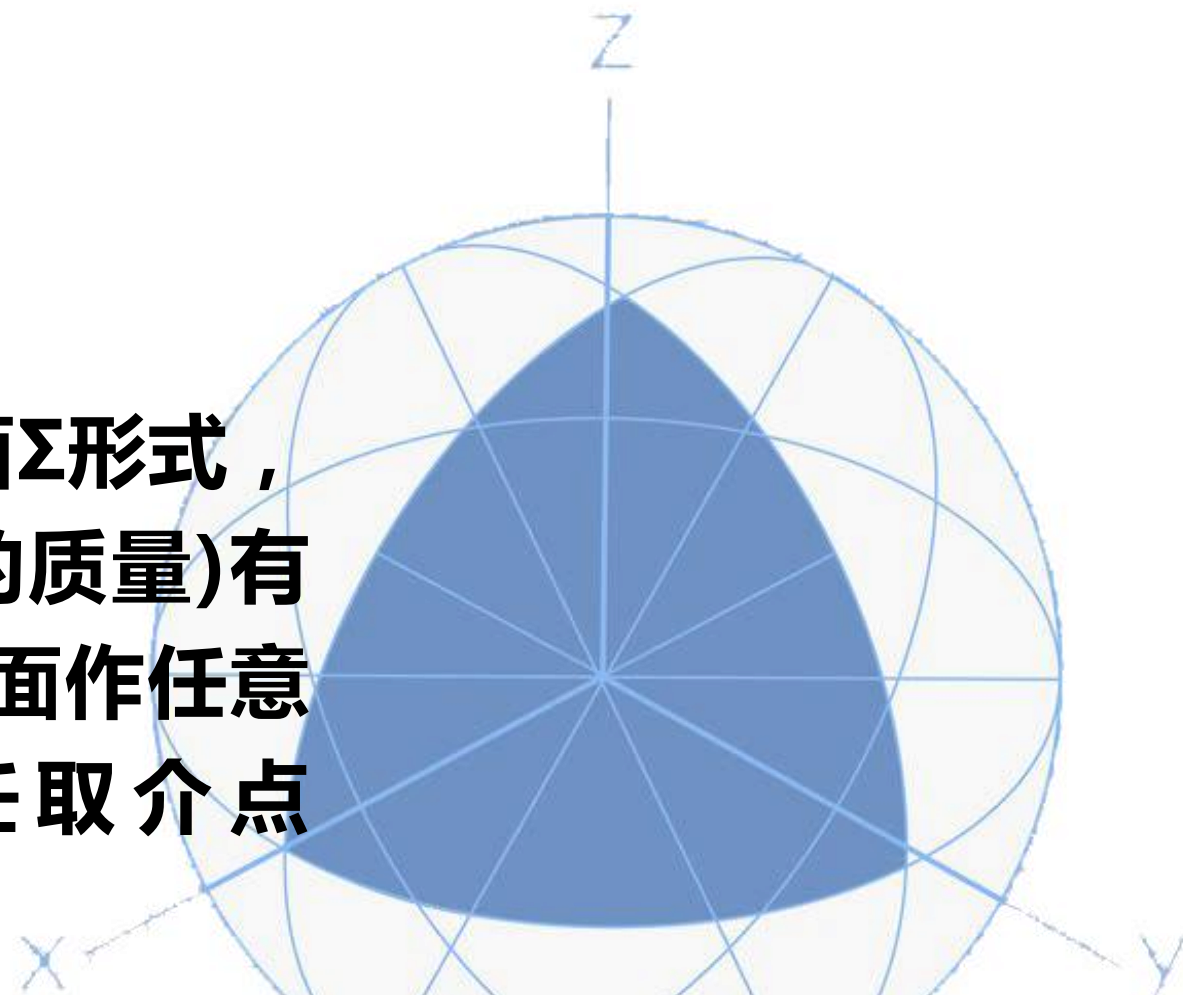
3.1.2 积分思想与建模方法

其中 Δs_i 表示分割曲线所得之微小弧段 C_i 的弧长, $\|\Delta\|$ 表示诸 C_i 的直径中之最大者. 这是第一型曲线积分.



3.1.2 积分思想与建模方法

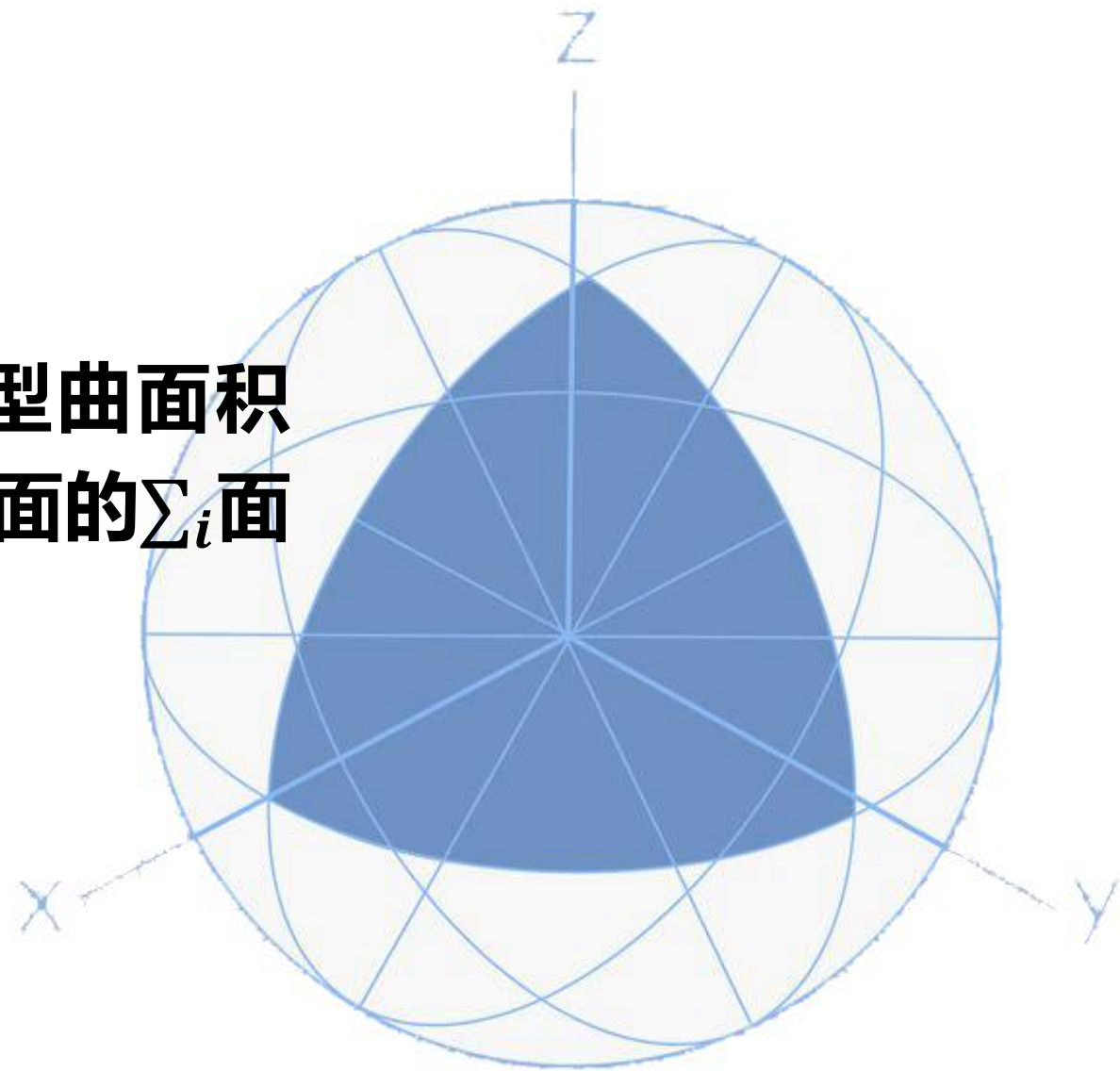
问题5的解答：空间中一薄板呈现曲面 Σ 形式，任一点 (x,y,z) 的面密度(单位面积上的质量)有分布函数 $\rho=\rho(x,y,z)$ 确定，则对此曲面作任意分割所得之小块曲面的 Σ_i ，并任取介点 $(x_i,y_i,z_i)\in\Sigma_i$ ，便可求出其质量是：



$$m = \lim_{\|\Delta\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i = \iint_{\Sigma} \rho(x, y, z) dS$$

3.1.2 积分思想与建模方法

称为函数 $\rho(x,y,z)$ 在曲面 Σ_i 上的第一型曲面积分. 其中 ΔS_i 表示分割曲面所得之小块曲面的 Σ_i 面积, $\|\Delta\|$ 表示诸 Σ_i 的直径中之最大者.



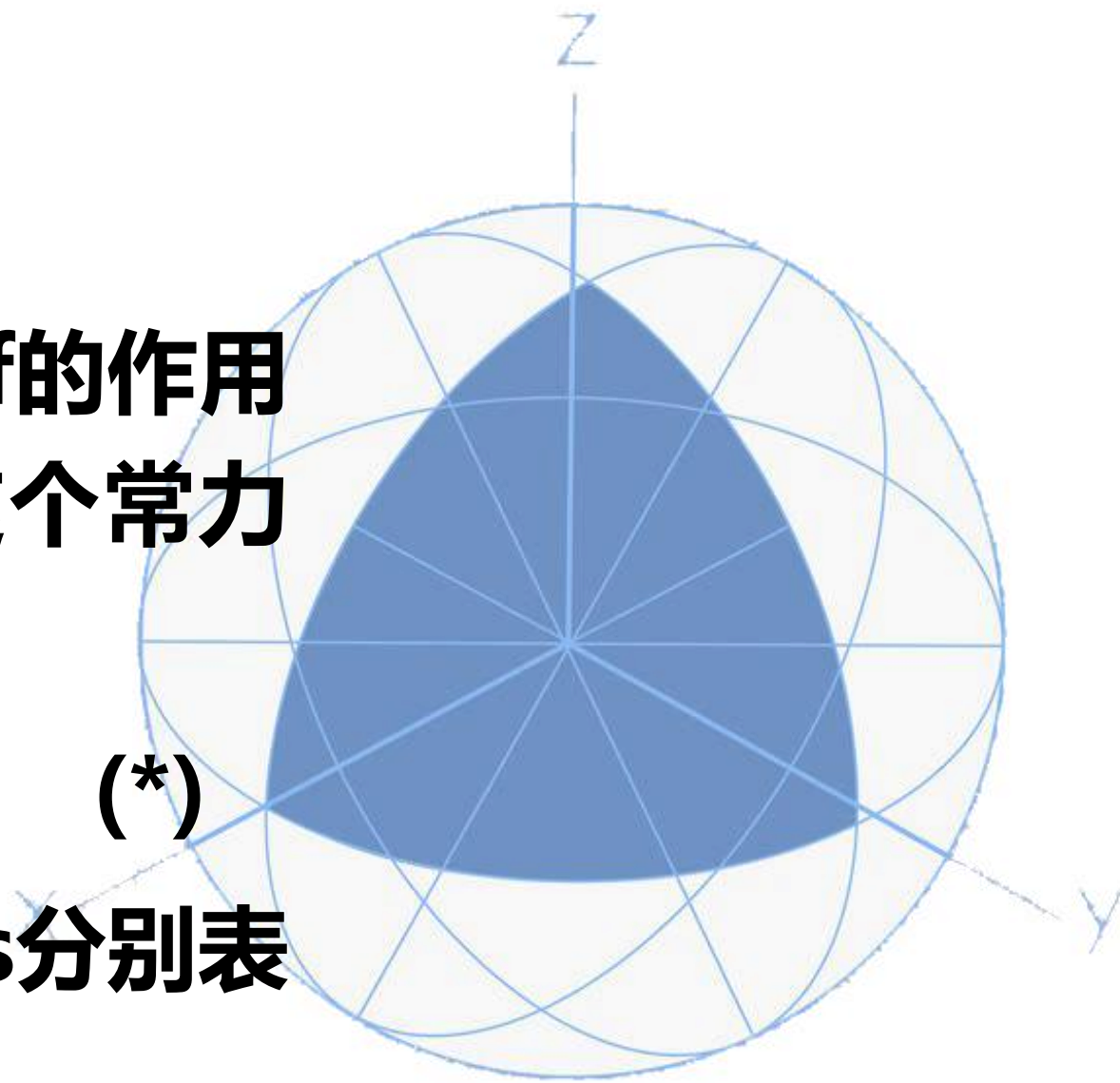


3.1.2积分思想与建模方法

问题6的解答：如果质点受常力 f 的作用沿直线运动，位移为 s ，那么这个常力所作的功就是

$$W = \|f\| \|s\| \cos(f, s) = f \cdot s, \quad (*)$$

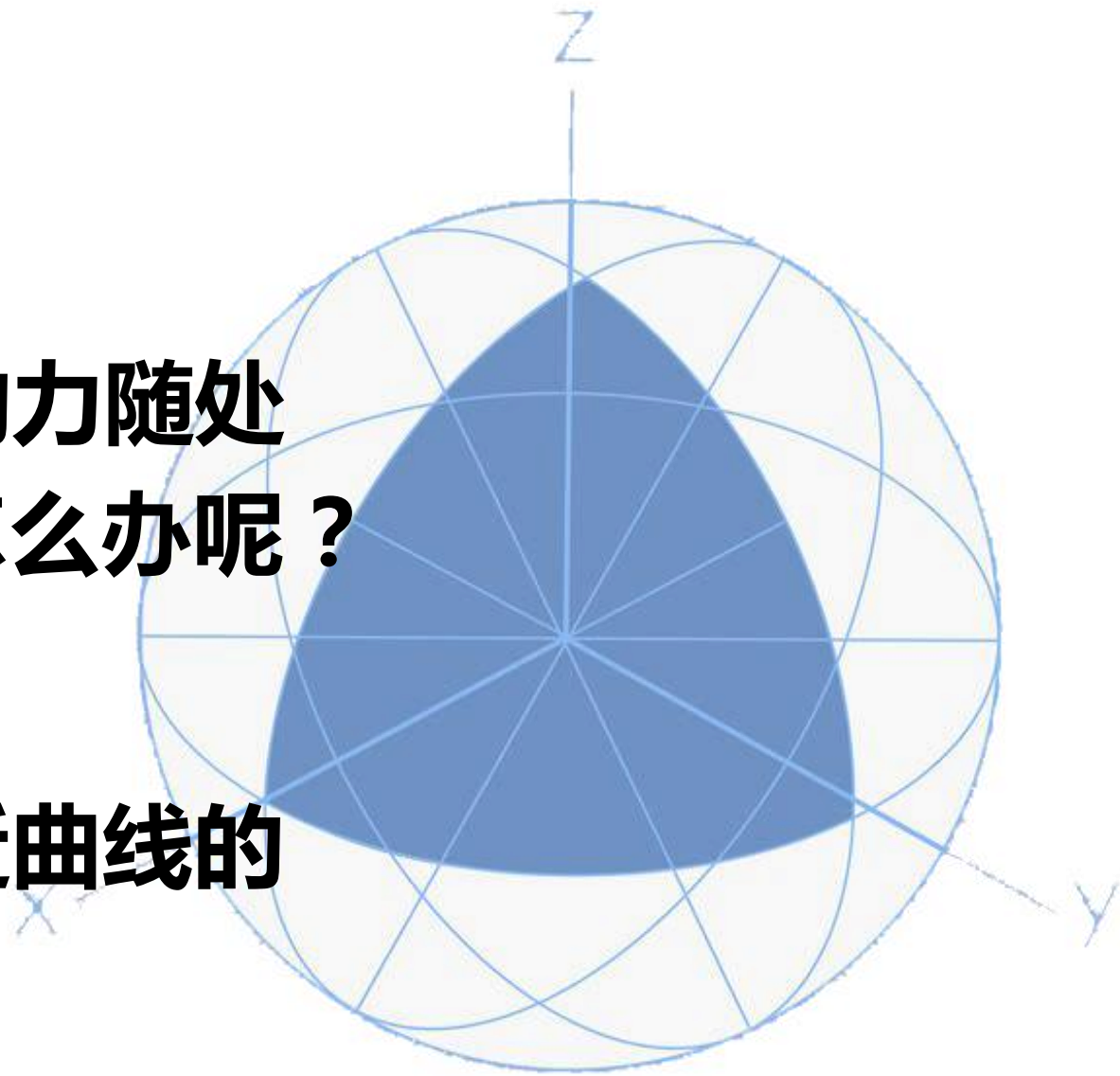
这里 $\|\cdot\|$ 表示向量的模， (f, s) 和 $f \cdot s$ 分别表示两个向量的夹角和内积。



3.1.2 积分思想与建模方法

现在问题的难点是，质点所受的力随处改变，所走的路线弯弯曲曲。怎么办呢？

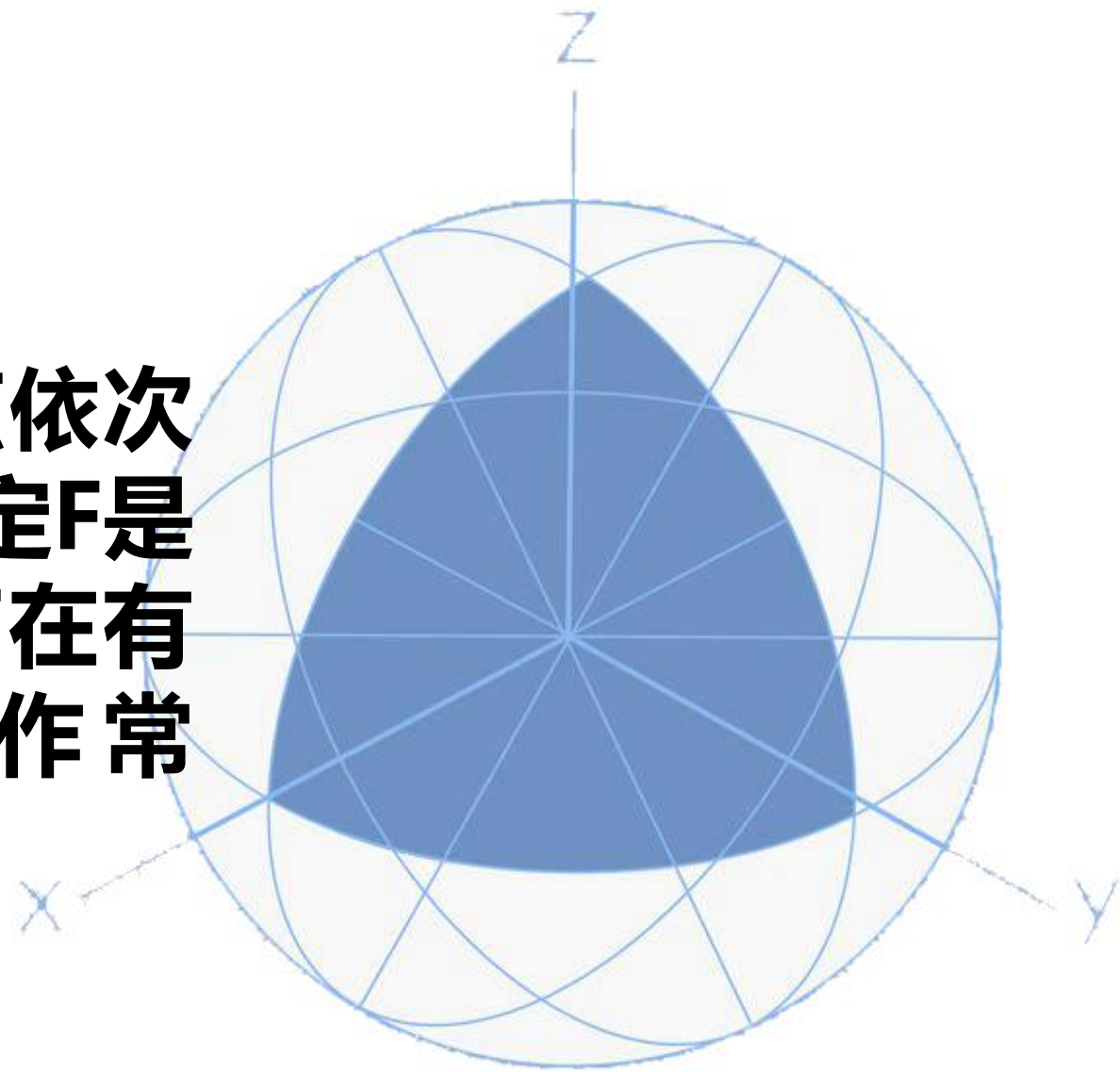
还是用局部以常代变和折线逼近曲线的方法来解决这个问题。





3.1.2 积分思想与建模方法

任意对曲线C进行分割. 设分点依次为 $A=A_0, A_1, \dots, A_{k-1}, A_k=B$ 假定F是连续的. 在分割相当细密时, F在有向弧段 $\widehat{A_{k-1}A_k}$ 上便可以看作常力 $F_k = F(A_k)$,



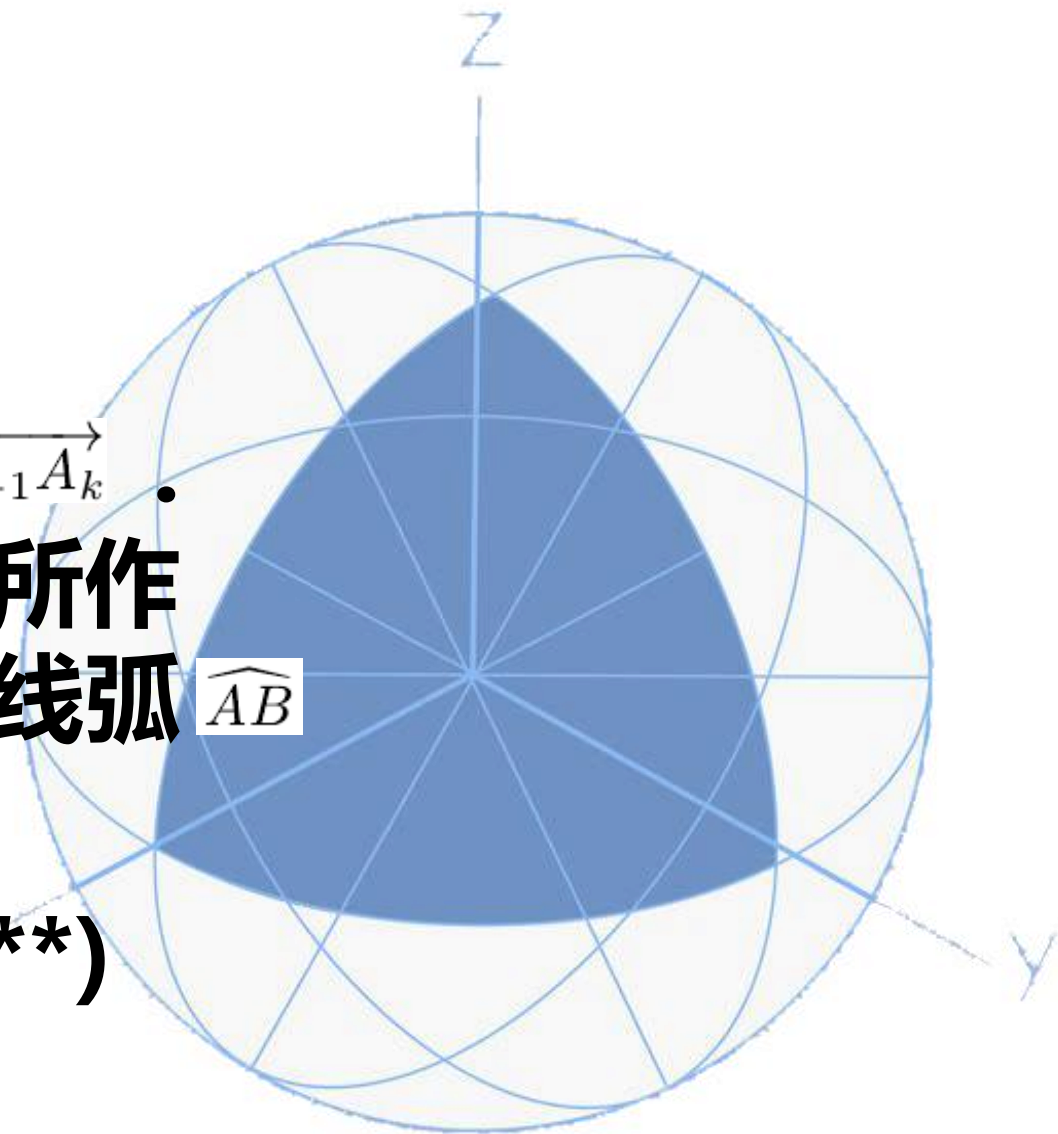


3.1.2 积分思想与建模方法

而弧段 $\widehat{A_{k-1}A_k}$ 便近似于有向线段 $\overrightarrow{A_{k-1}A_k}$.
按照(*), 常力 F 沿有向线段 $\overrightarrow{A_{k-1}A_k}$ 所作的功为 $F_k \cdot \overrightarrow{A_{k-1}A_k}$. 因此, 力场 F 沿曲线弧 \widehat{AB} 所作之功

$$W \approx \sum_{k=1}^N F_k \cdot \overrightarrow{A_{k-1}A_k}.$$

✕ (**)

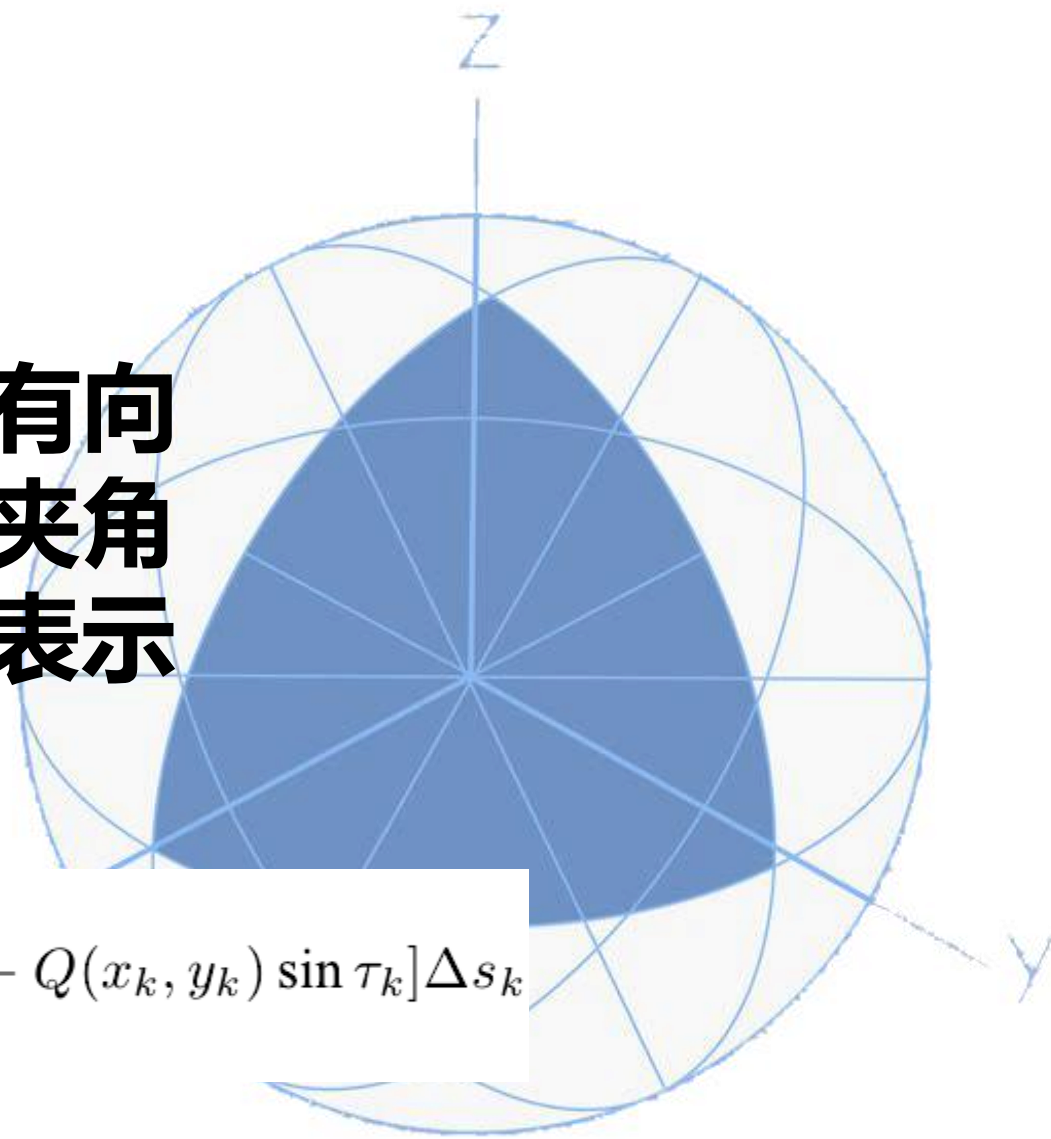




3.1.2 积分思想与建模方法

设 $A_k = (x_k, y_k)$, $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$, 有向
线段 $\overrightarrow{A_{k-1}A_k}$ 的长度为 Δs_k , 它与x轴的夹角
为 τ_k . 于是, (**)式右端的和可以表示
为

$$\sum_{k=1}^K [P(x_k, y_k) \Delta x_k + Q(x_k, y_k) \Delta y_k] = \sum_{k=1}^K [P(x_k, y_k) \cos \tau_k + Q(x_k, y_k) \sin \tau_k] \Delta s_k$$





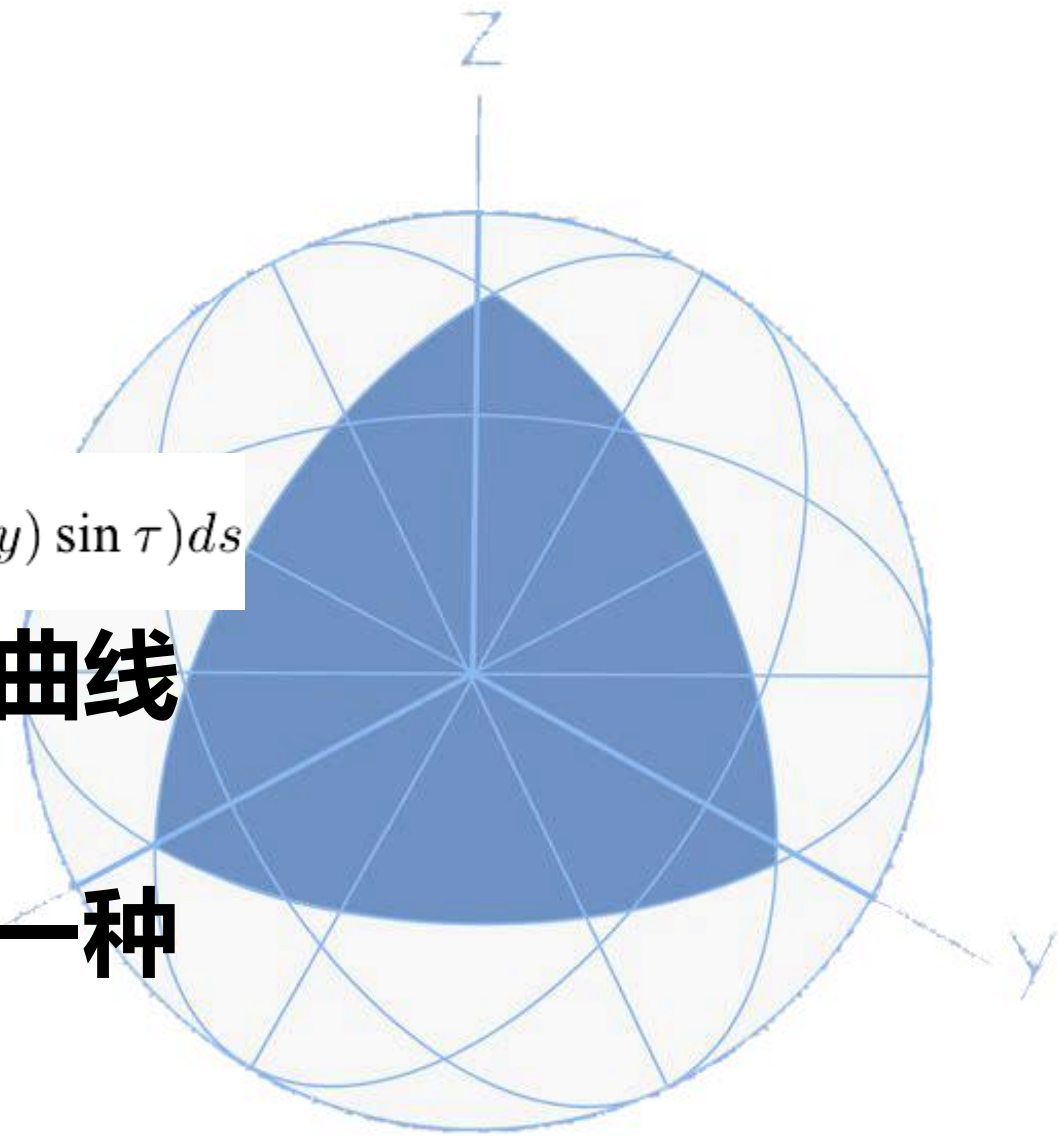
3.1.2 积分思想与建模方法

由此可见

$$W = \int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_C (P(x, y) \cos \tau + Q(x, y) \sin \tau) ds$$

其中 $\tau = \tau(x, y)$ 是曲线C在点(x,y)处与曲线方向一致的切向量同x轴的夹角.

此外, (**)式左端还向人们提示了一种新的积分和.



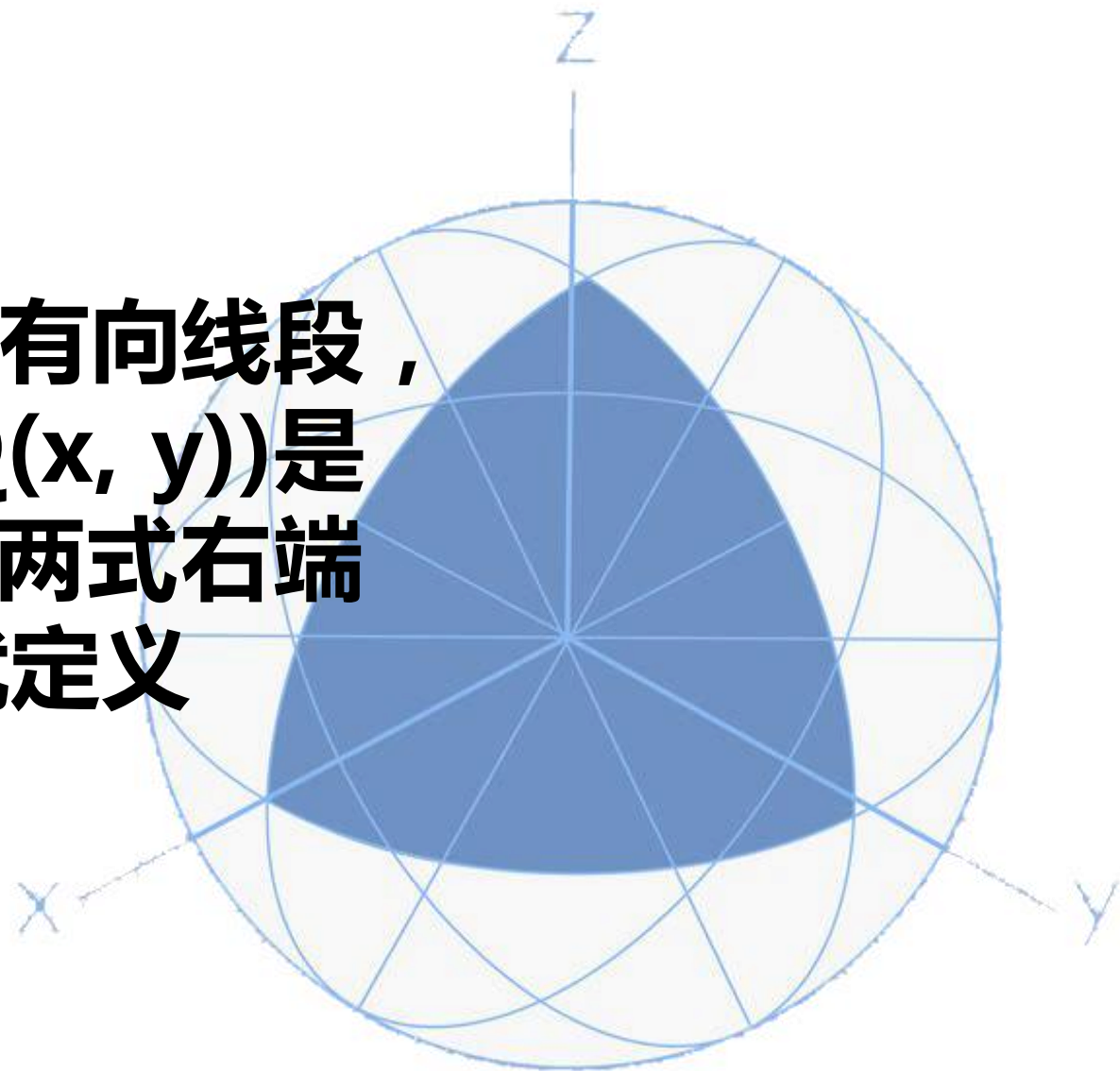


3.1.2 积分思想与建模方法

设 C 是 xy 平面上一条分段光滑的有向线段，
如上所述， $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ 是
定义在 C 上的向量场。如果下列两式右端
的第一型曲线积分存在，我们就定义

$$\int_C P(x, y) dx = \int_C P(x, y) \cos \tau ds,$$

$$\int_C Q(x, y) dy = \int_C Q(x, y) \sin \tau ds,$$



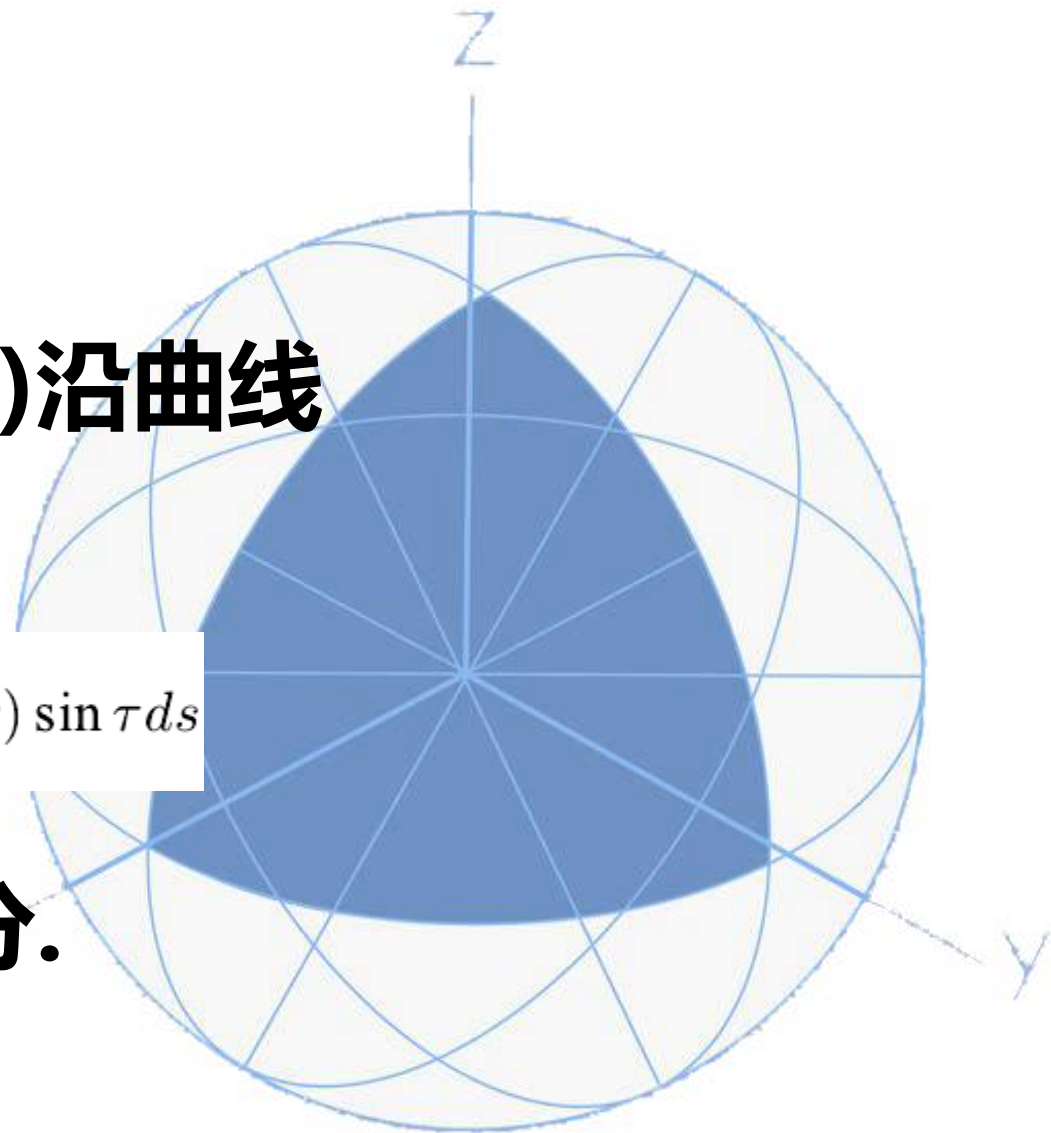


3.1.2 积分思想与建模方法

并分别称之为函数 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 沿曲线 C 的第二型曲线积分，而称

$$\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_C P(x, y) \cos \tau ds + \int_C Q(x, y) \sin \tau ds$$

为向量场沿曲线 C 的第二型曲线积分.

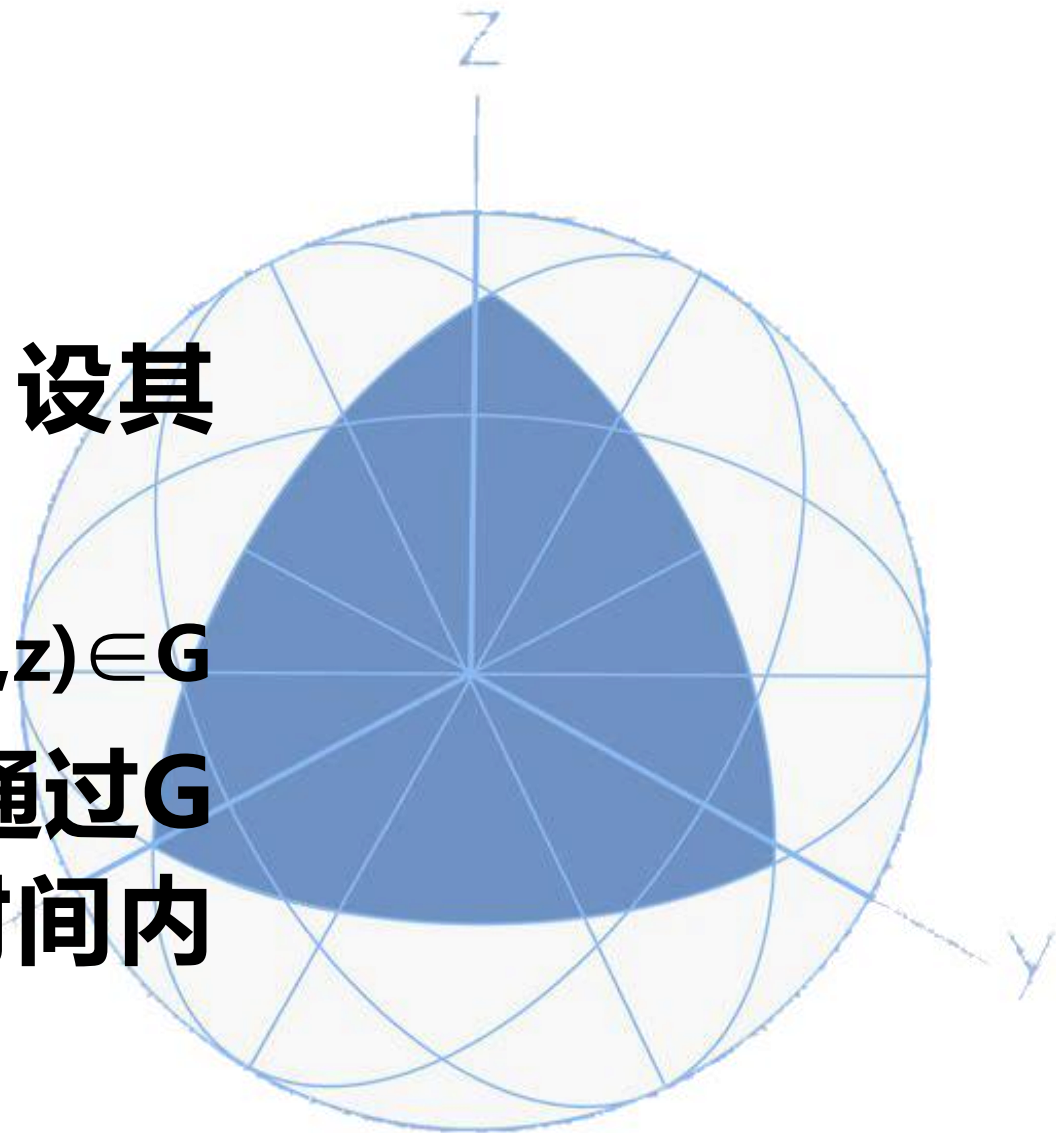


3.1.2 积分思想与建模方法

问题7的解答：考虑空间定常流，设其速度场为

$$\mathbf{v}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)), \quad (x,y,z) \in G$$

而要计算流体沿指定的法向方向 \mathbf{v} 通过 G 内某光滑曲面 Σ 的流量，即单位时间内通过 Σ 的体积.

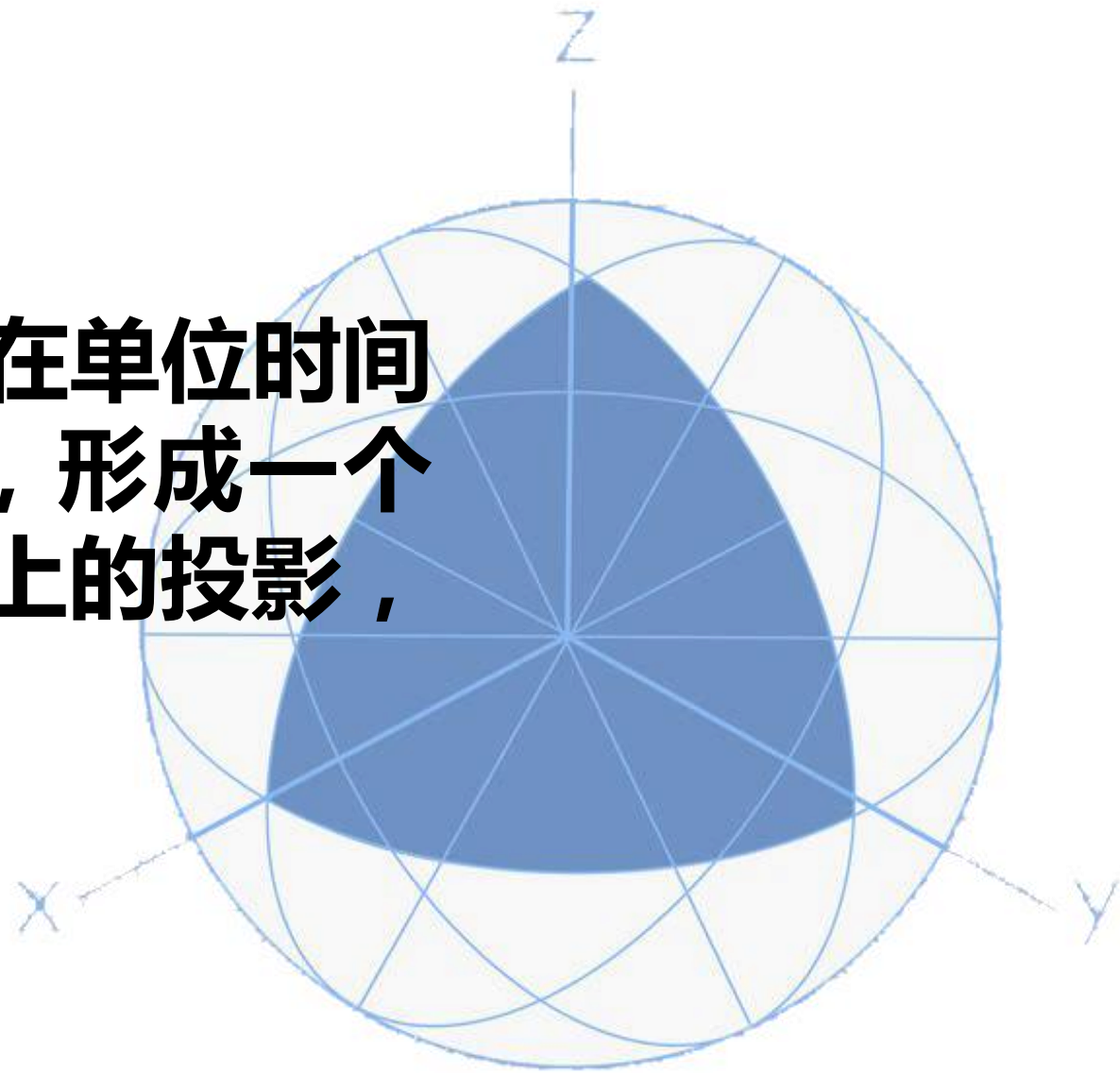




3.1.2 积分思想与建模方法

在 Σ 上任取一曲面微元 dS . 显然在单位时间内沿法线方向 ν 通过 dS 的流体, 形成一个微柱体, 其底为 dS , 高为 V 在 ν 上的投影, 因此体积为

$$\|V\| \cos(V, \nu) dS = V \cdot \nu dS$$



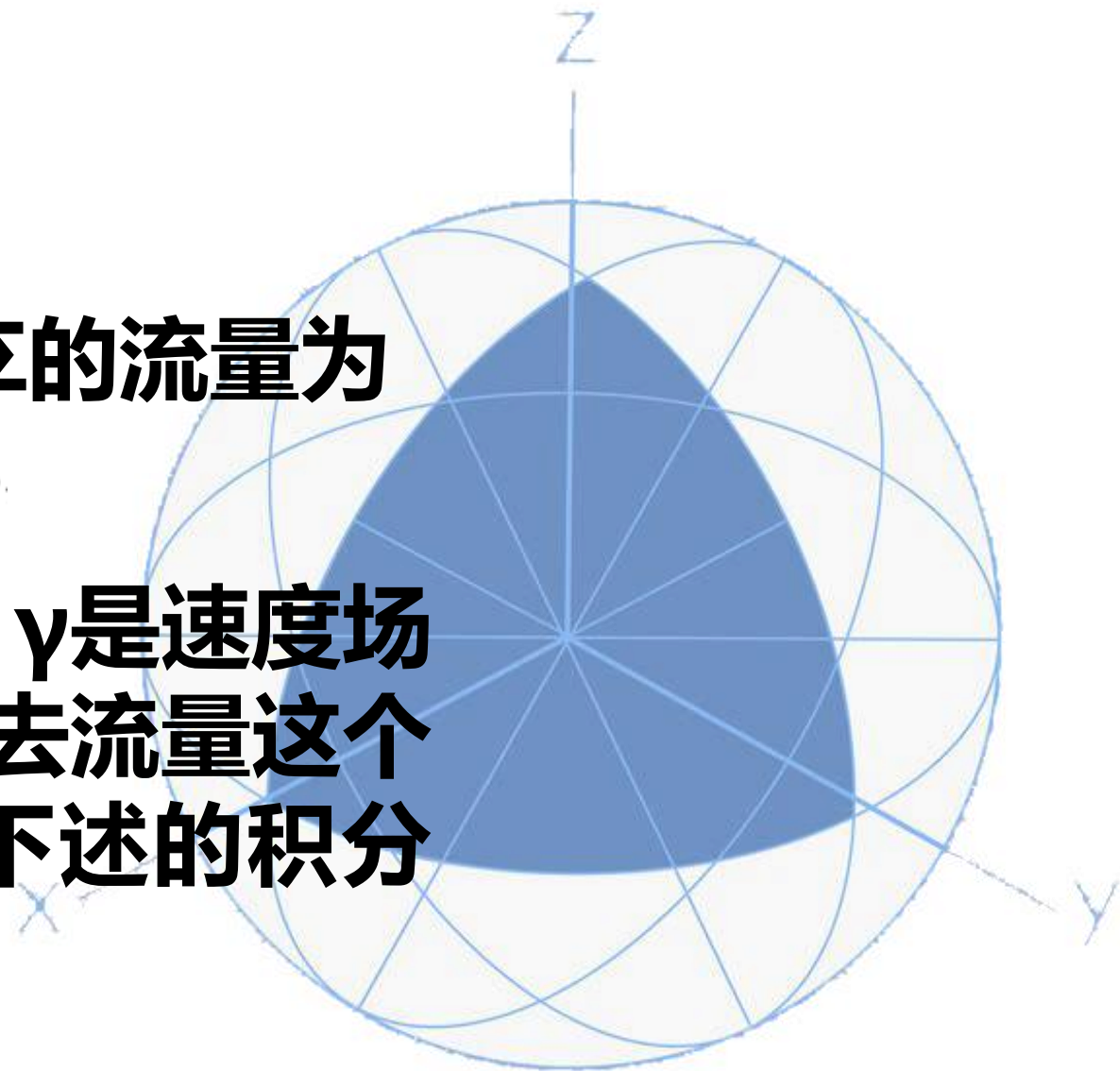


3.1.2 积分思想与建模方法

于是单位时间内沿法方向 ν 通过 Σ 的流量为

$$m = \iint_{\Sigma} \mathbf{V} \cdot \nu dS = \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS.$$

此处设 $\nu = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, α, β, γ 是速度场
分别与三个坐标方向的夹角. 舍去流量这个
具体的力学内容, 我们抽象出下述的积分
概念.





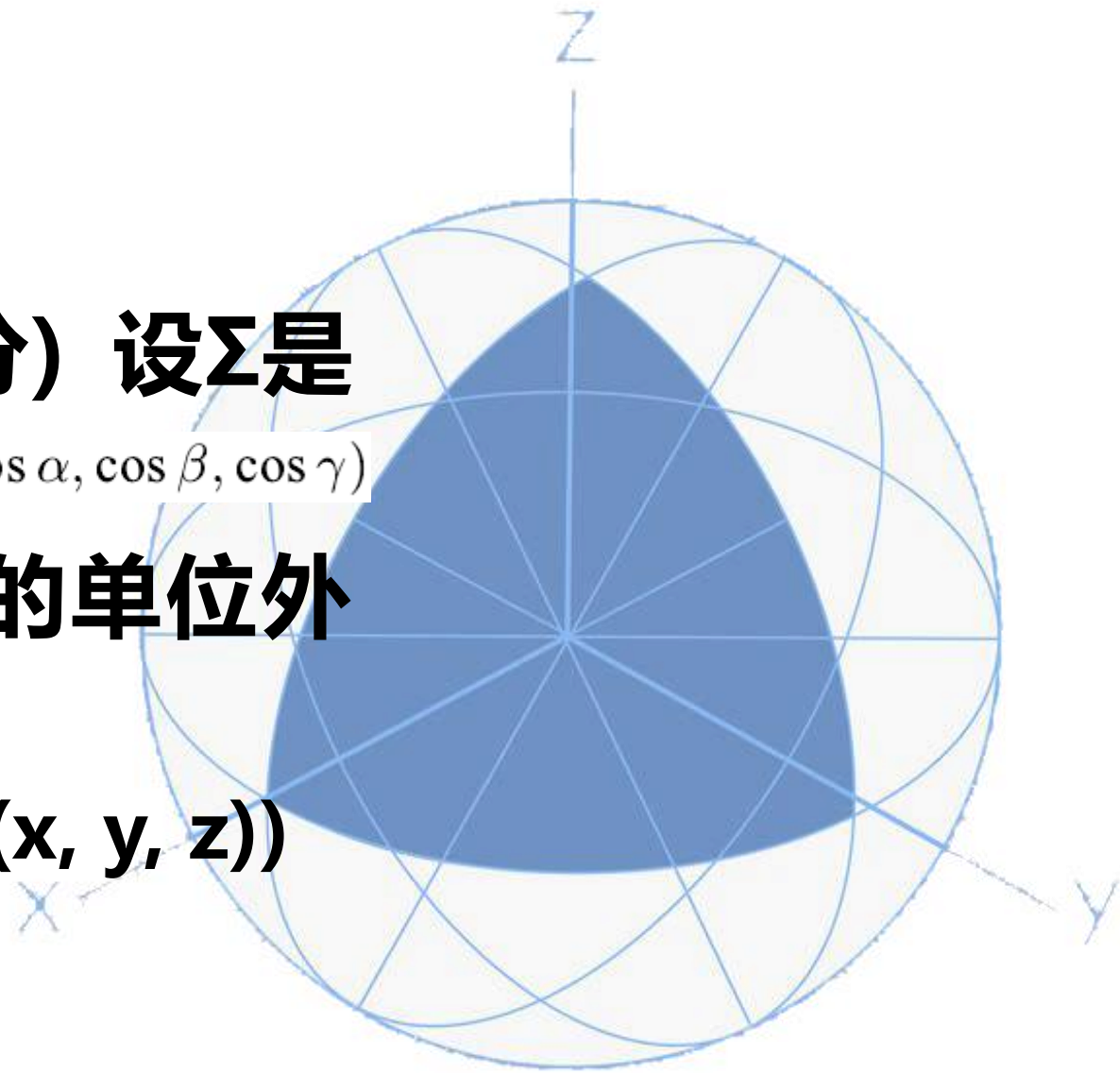
3.1.2 积分思想与建模方法

定义(沿曲面 Σ 的第二型曲面积分) 设 Σ 是一个分块光滑的有界曲面， $\nu = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$

是随曲面上的点分块连续变动的单位外法向量，

$V(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$

是定义在 Σ 上的向量场.





3.1.2 积分思想与建模方法

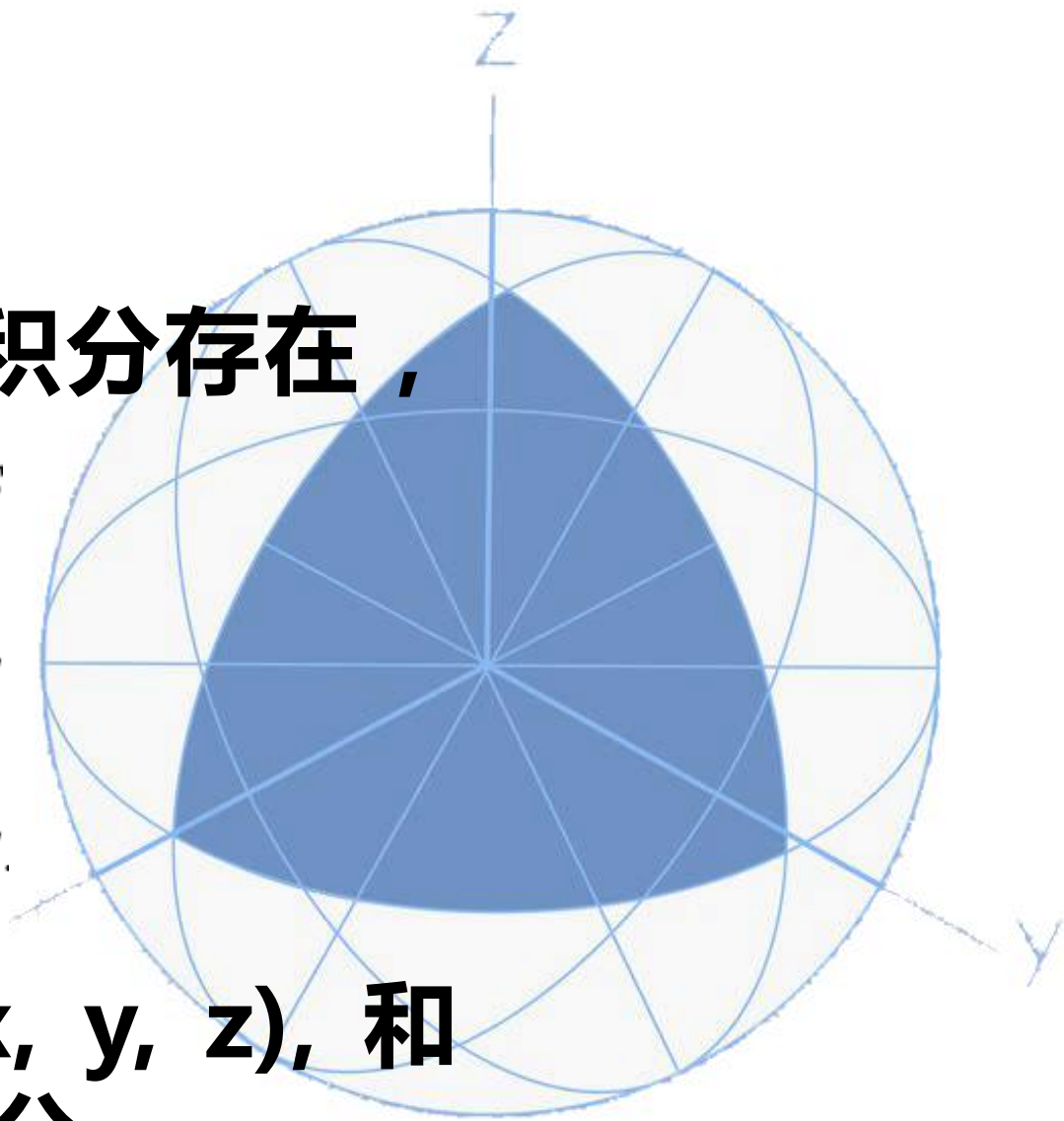
如果下列各式右端的第一型曲面积分存在，
定义：

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz = \iint_{\Sigma} P(x, y, z) \cos \alpha dS$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dzdx = \iint_{\Sigma} Q(x, y, z) \cos \beta dS$$

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dxdy = \iint_{\Sigma} R(x, y, z) \cos \gamma dS.$$

并分别称之为函数 $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, 和 $R(x, y, z)$ 沿曲面 Σ 的第二型曲面积分

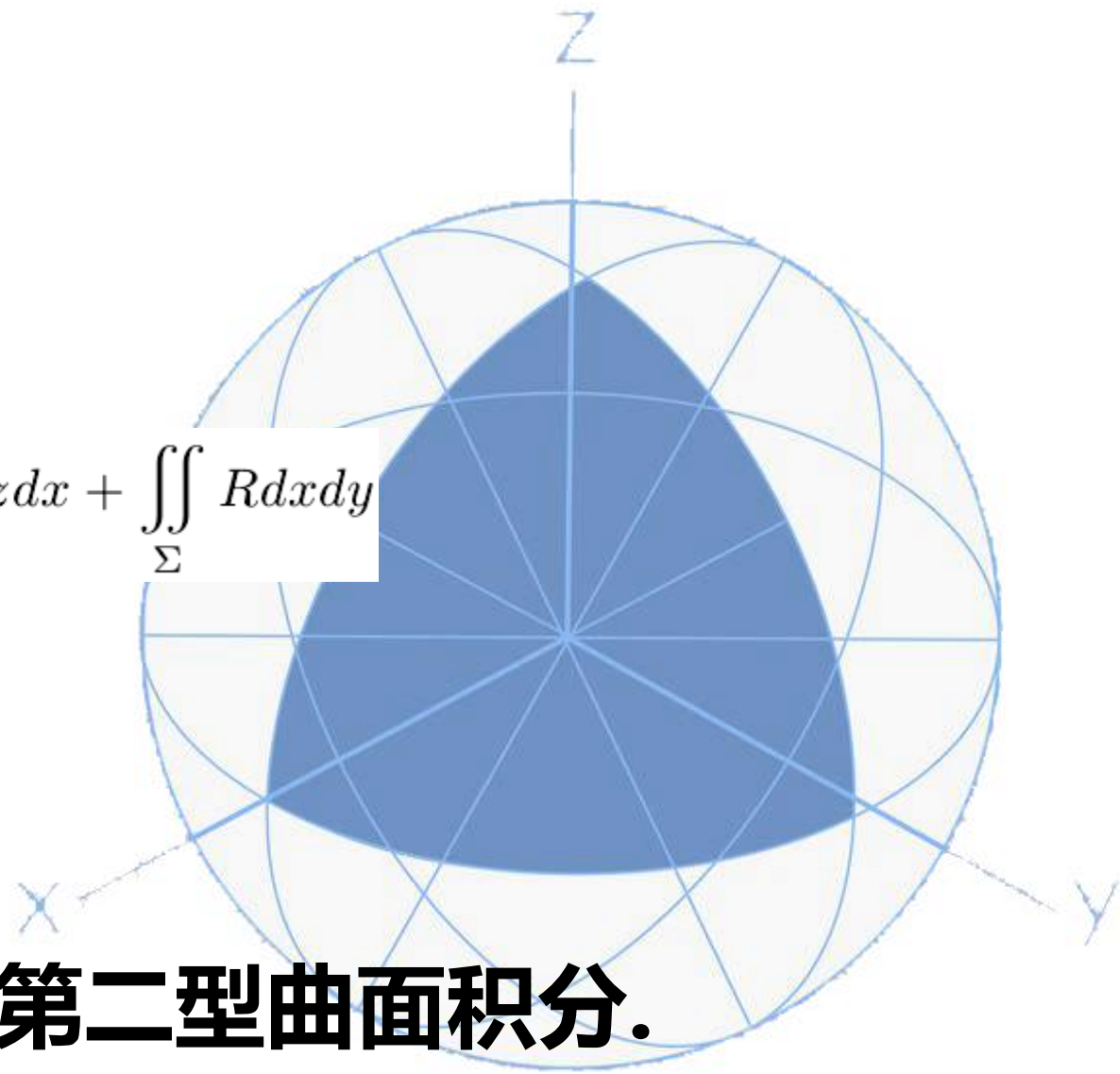




3.1.2 积分思想与建模方法 而称：

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dxdy &= \iint_{\Sigma} P dydz + \iint_{\Sigma} Q dzdx + \iint_{\Sigma} R dxdy \\ &= \iint_{\Sigma} P \cos \alpha dS + \iint_{\Sigma} Q \cos \beta dS + \iint_{\Sigma} R \cos \gamma dS \\ &= \iint_{\Sigma} F \cdot \nu dS\end{aligned}$$

为向量场 $F=(P, Q, R)$ 沿曲面 Σ 的第二型曲面积分.





3.1.2 积分思想与建模方法

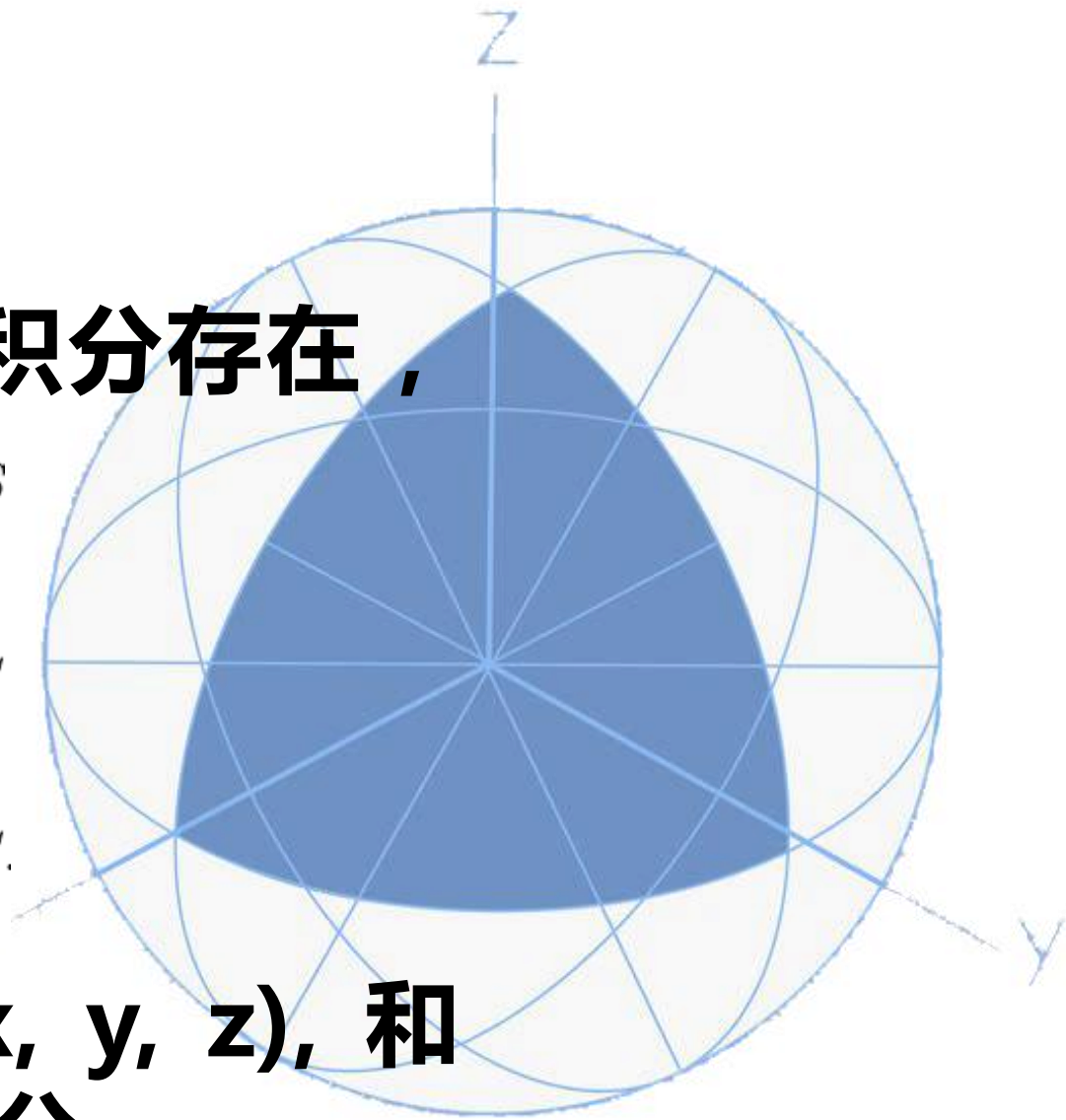
如果下列各式右端的第一型曲面积分存在，
定义：

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dydz = \iint_{\Sigma} P(x, y, z) \cos \alpha dS$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dzdx = \iint_{\Sigma} Q(x, y, z) \cos \beta dS$$

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dxdy = \iint_{\Sigma} R(x, y, z) \cos \gamma dS.$$

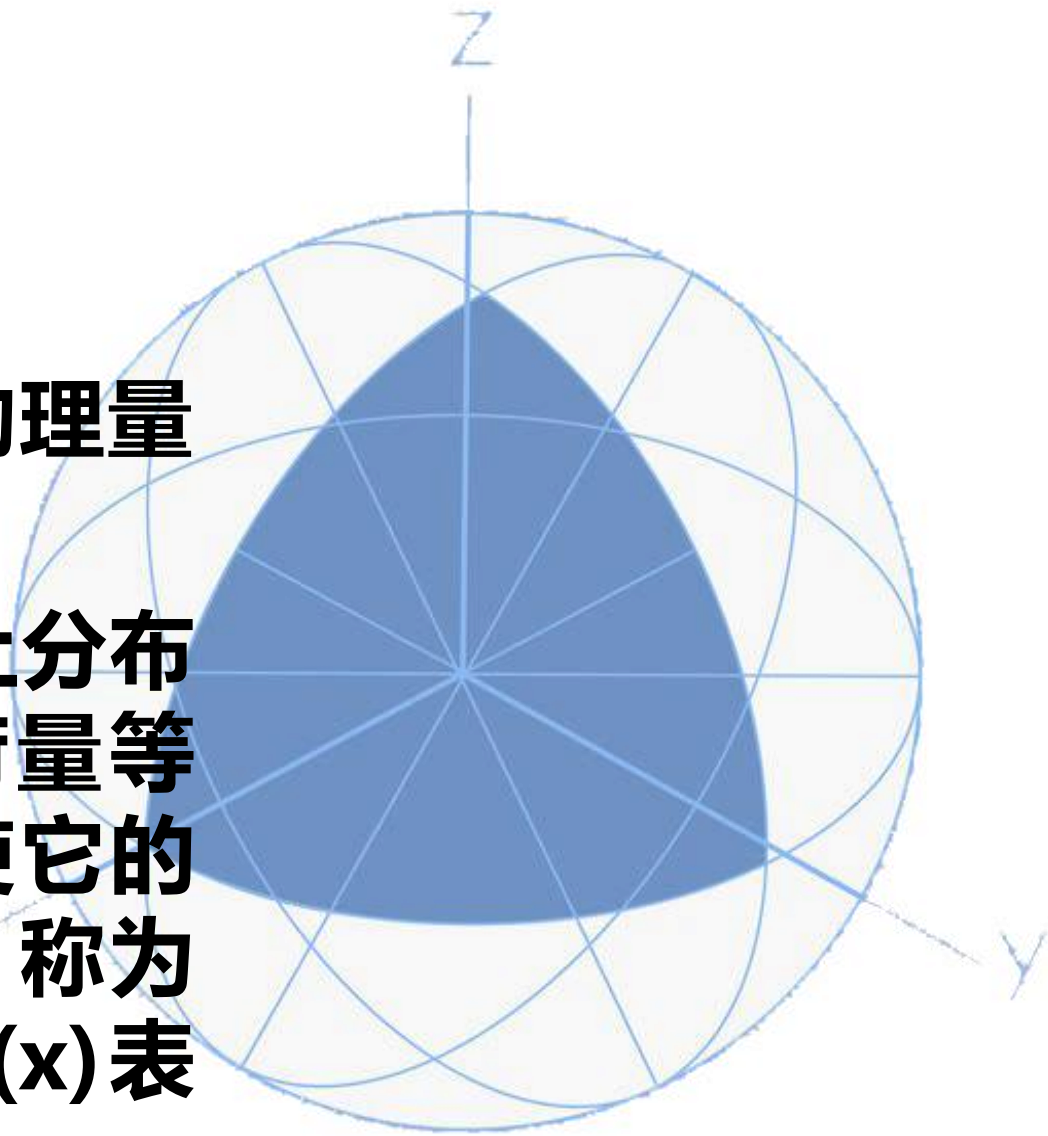
并分别称之为函数 $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, 和 $R(x, y, z)$ 沿曲面 Σ 的第二型曲面积分



3.1.3 案例分析

案例一：已知某种物理量的分布求该物理量的总量

问题背景：设一根长度为 l 的直线段上分布着某种物理量（如质量、热量、电荷量等等），将其平放在 x 轴的正半轴上，使它的一头与原点重合，若它在 x 处的密度（称为线密度）可由某个连续的分布函数 $\rho(x)$ 表示．试由分布函数求该物理量的总量 Q ．





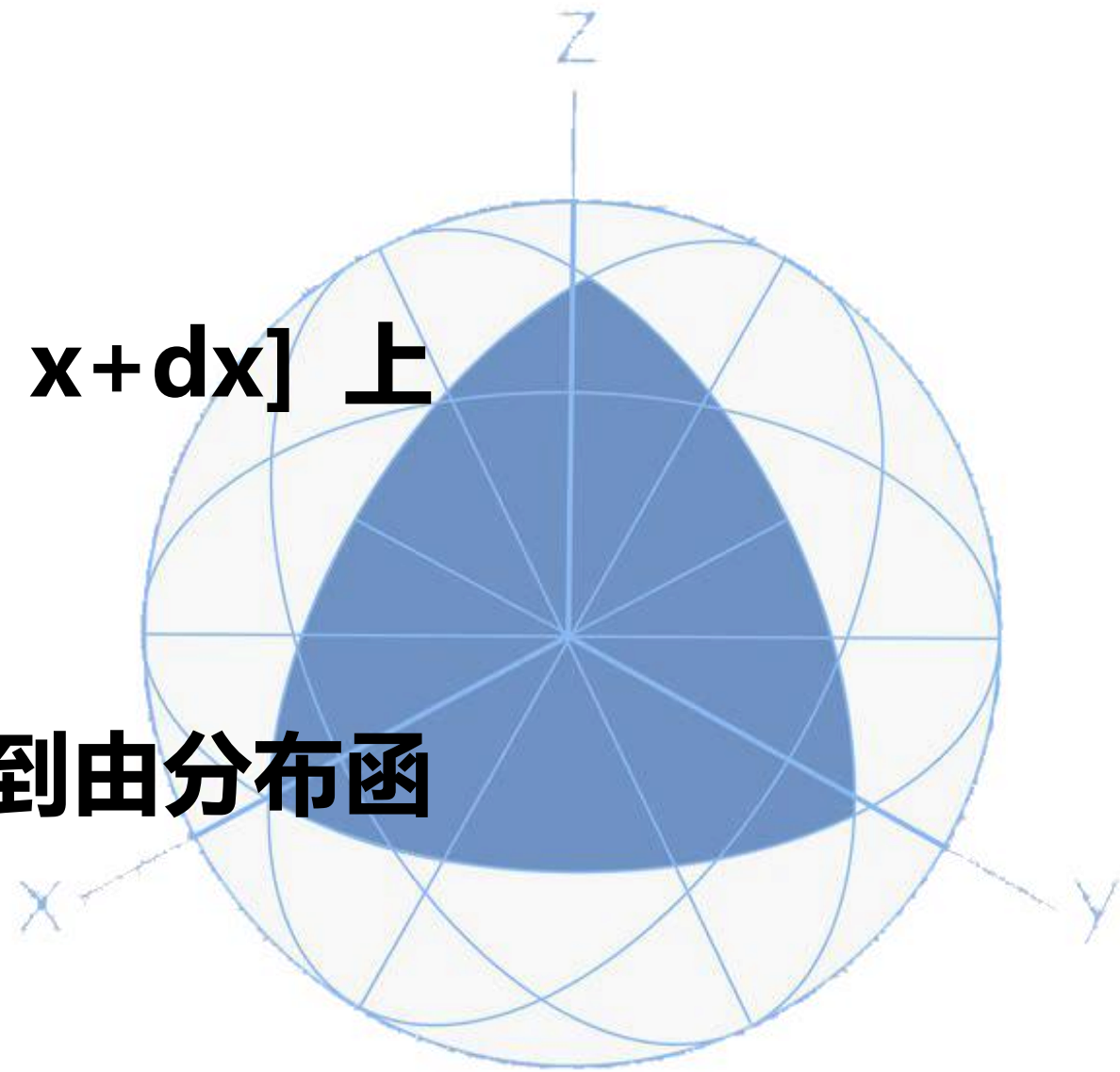
3.1.3 案例分析

解 由微元法，该物理量在 $[x, x+dx]$ 上具有 dQ 为

$$dQ = \rho(x)dx$$

对等式两边在 $[0, l]$ 上积分，就得到由分布函数求总量的公式

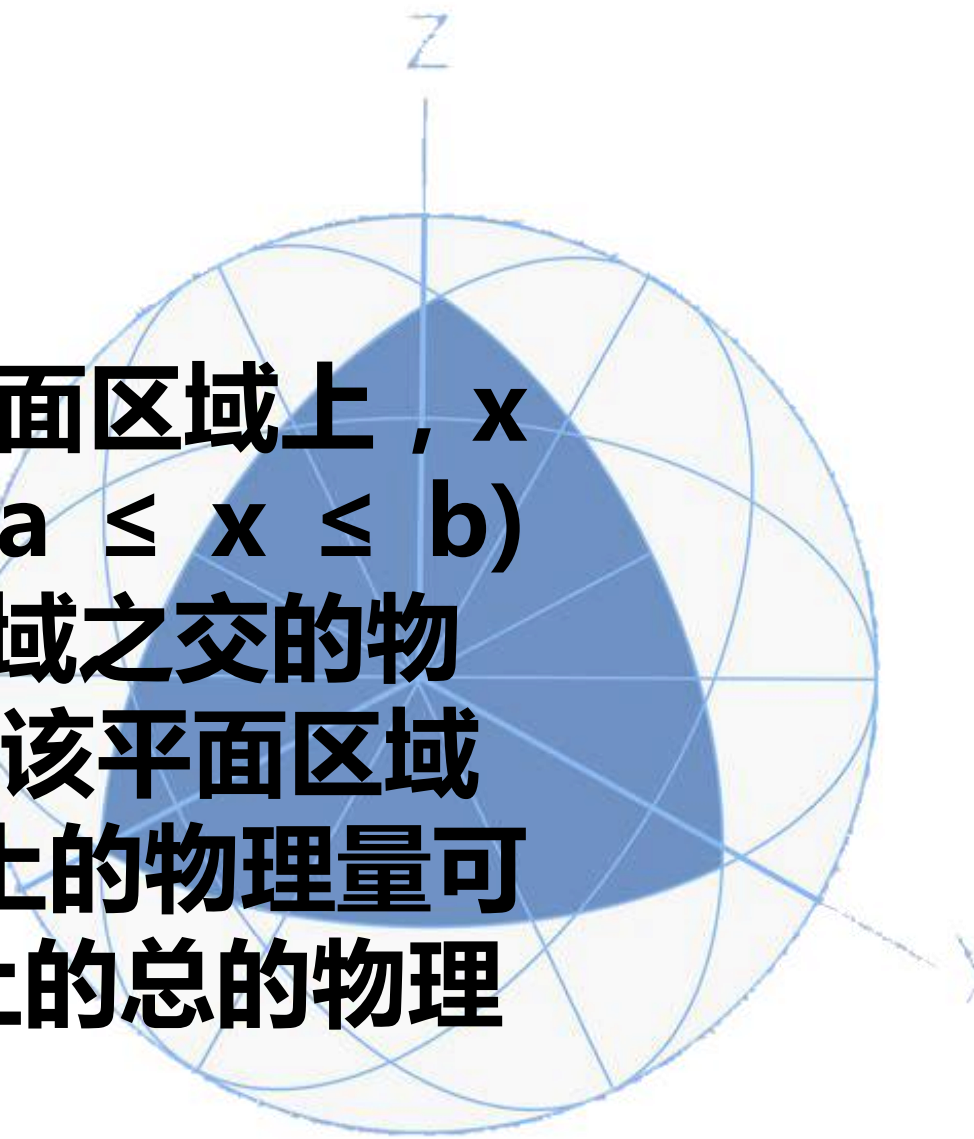
$$Q = \int_0^l \rho(x)dx.$$





3.1.3 案例分析

推广 1、假定物理量分布在一个平面区域上， x 的变化范围为区间 $[a, b]$. 如果过 $x(a \leq x \leq b)$ 点并且垂直于 x 轴的直线与该平面区域之交的物理量的密度可以用 $f(x)$ 表示，或者说该平面区域在横坐标位于 $[x, x+dx]$ 中的部分上的物理量可以表示为 $f(x)dx$. 那么，这个区域上的总的物理量是多少？

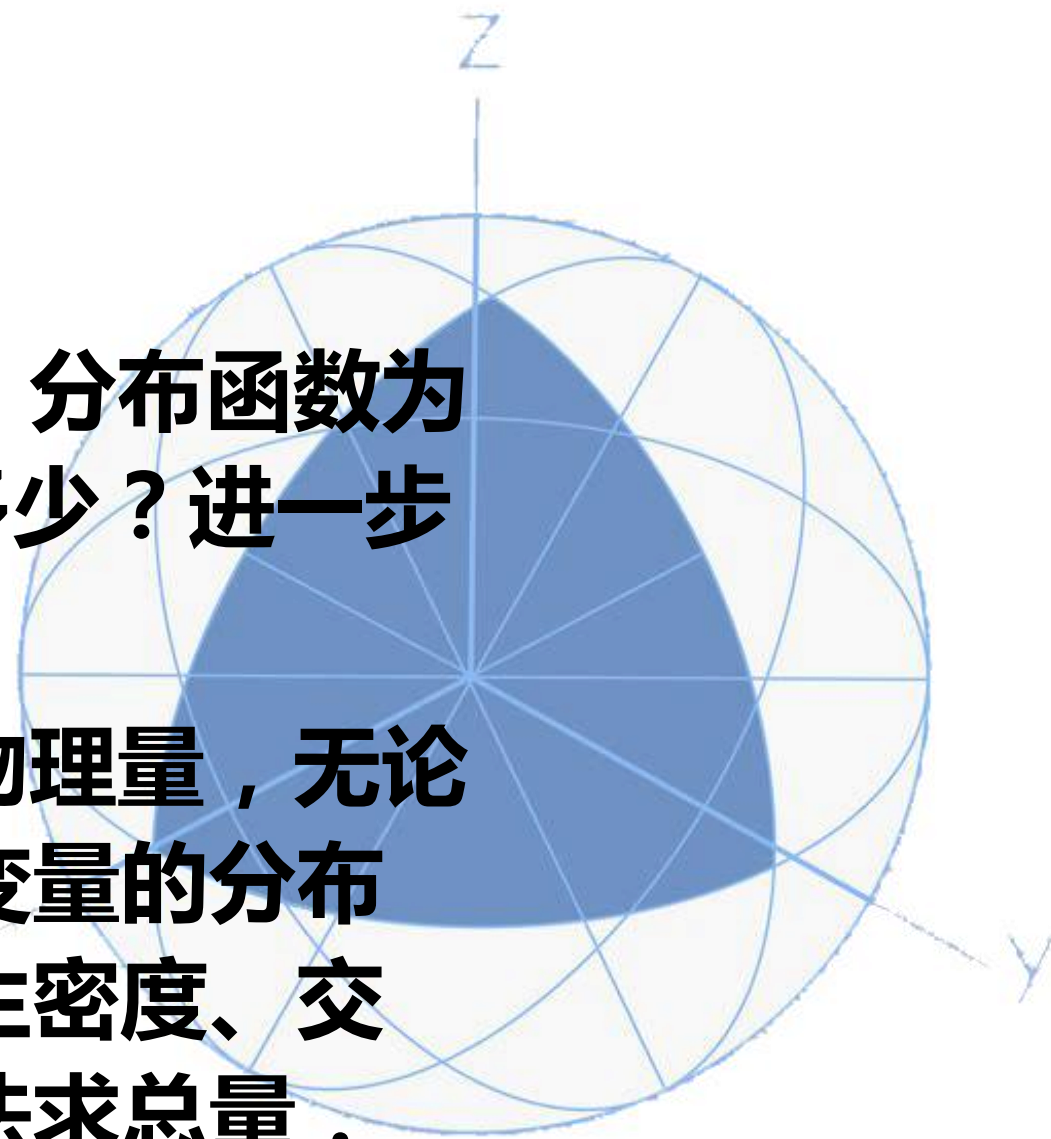




3.1.3 案例分析

推广 2、 给定平面曲线的参数方程，分布函数为 $f(x)$. 则这段曲线上的总的物理量是多少？进一步推广到空间中的曲线上 .

推广 3、 这种类型的问题不只局限于物理量，无论自然科学还是社会科学，只要给出某变量的分布“密度”，比如人口问题中的人口出生密度、交通问题中的车流密度，都能用上述方法求总量 .

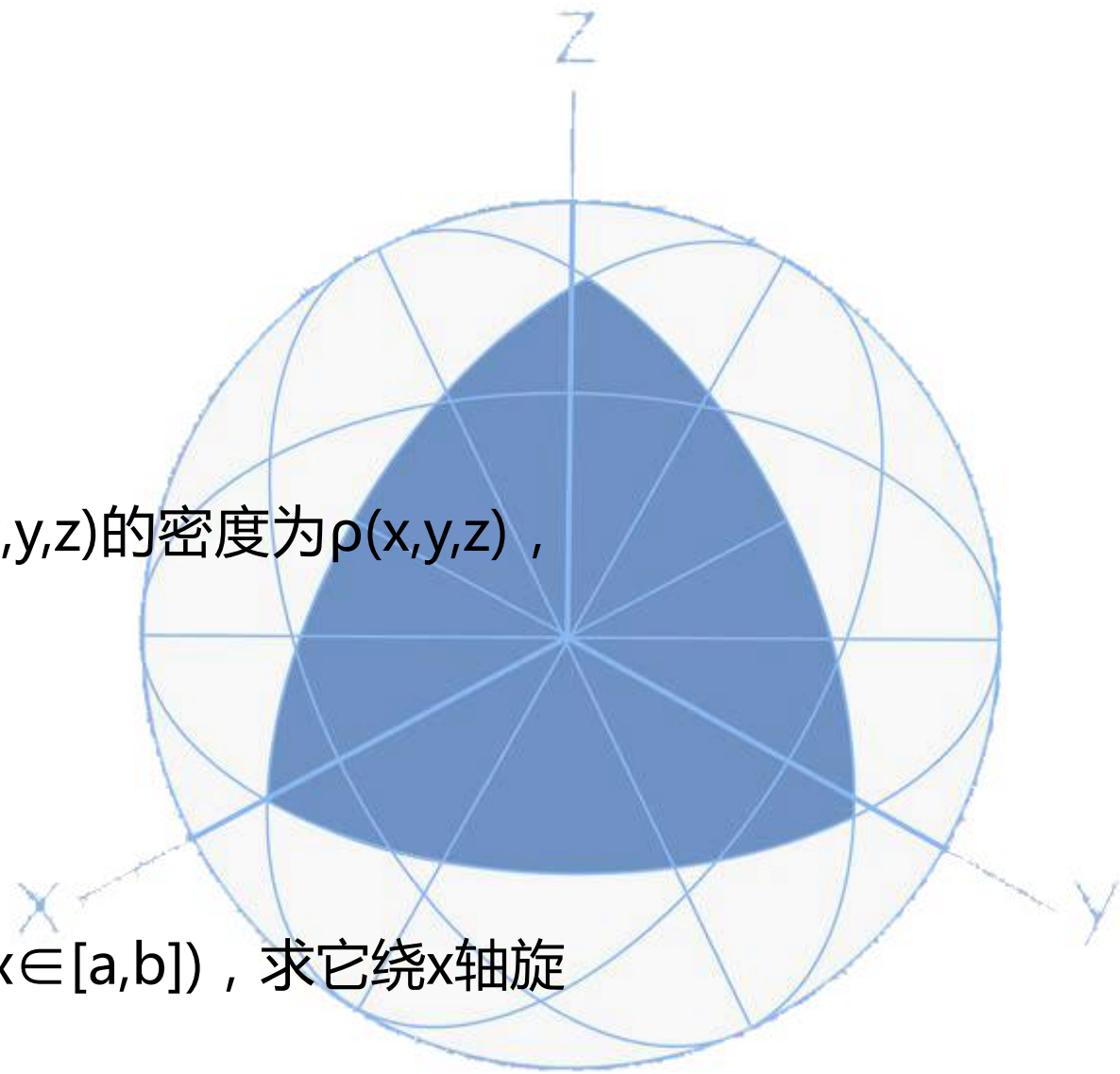


3.1.3 案例分析

思考题：

(一)自然科学：

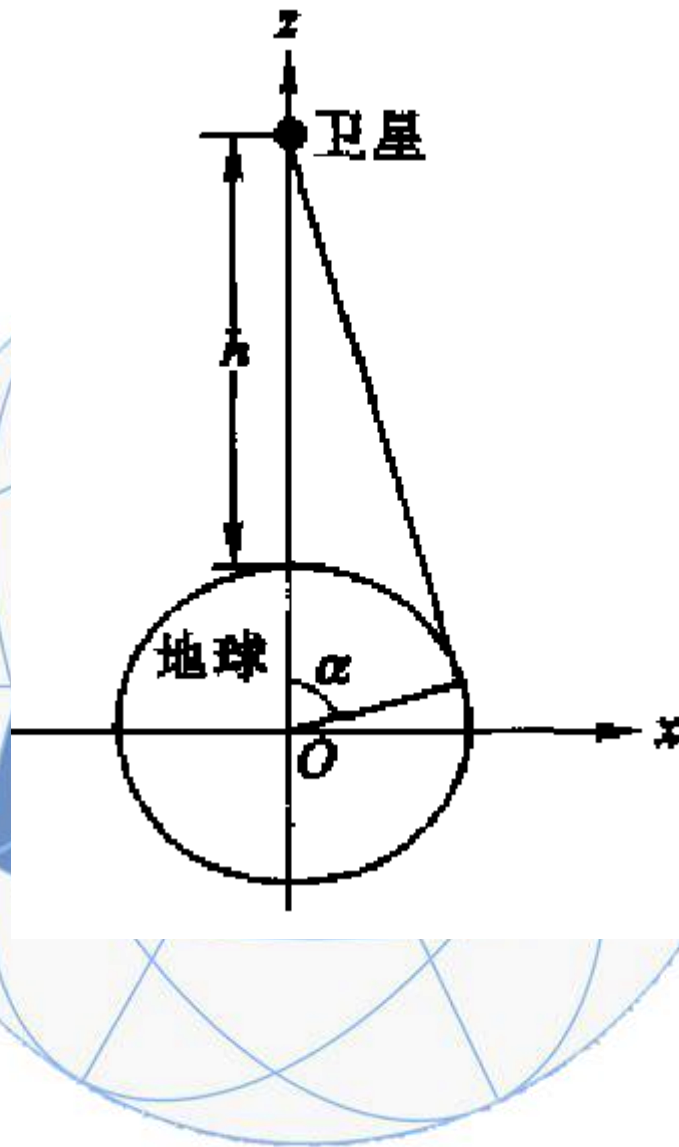
1. 设有一质量连续分布的物体 G ，它在任意一点 (x,y,z) 的密度为 $\rho(x,y,z)$ ，求此物体的重心。
2. 求转动惯量。
3. 求物体对它外部质点的引力。
4. 二体引力问题与引力场的位势。
5. 求旋转曲面的面积-设平面上的光滑曲线 $y(x) \geq 0 (x \in [a,b])$ ，求它绕 x 轴旋转一周所得到的旋转曲面的面积。



3.1.3 案例分析

案例二：通讯卫星的电波覆盖的地球面积

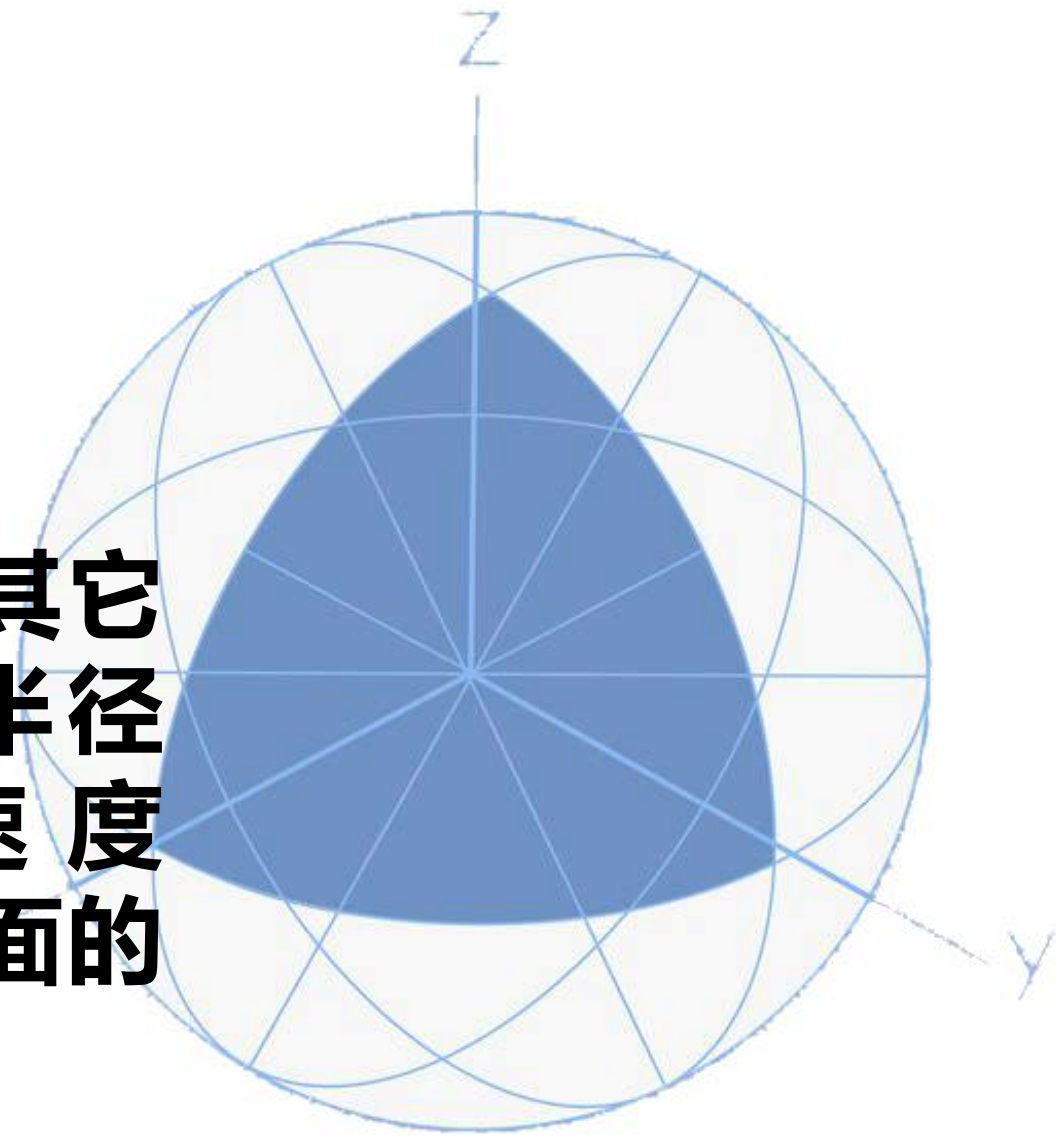
问题背景：将通讯卫星发射到赤道的上空，使它位于赤道所在的平面内。如果卫星自西向东地绕地球飞行一周的时间正好等于地球自转一周的时间，那么它始终在地球的某一个位置的上空，即相对静止.这样的卫星称为地球同步卫星。试计算该卫星的电波所能覆盖的地球的表面积。



3.1.3 案例分析

解：1、问题的假设：

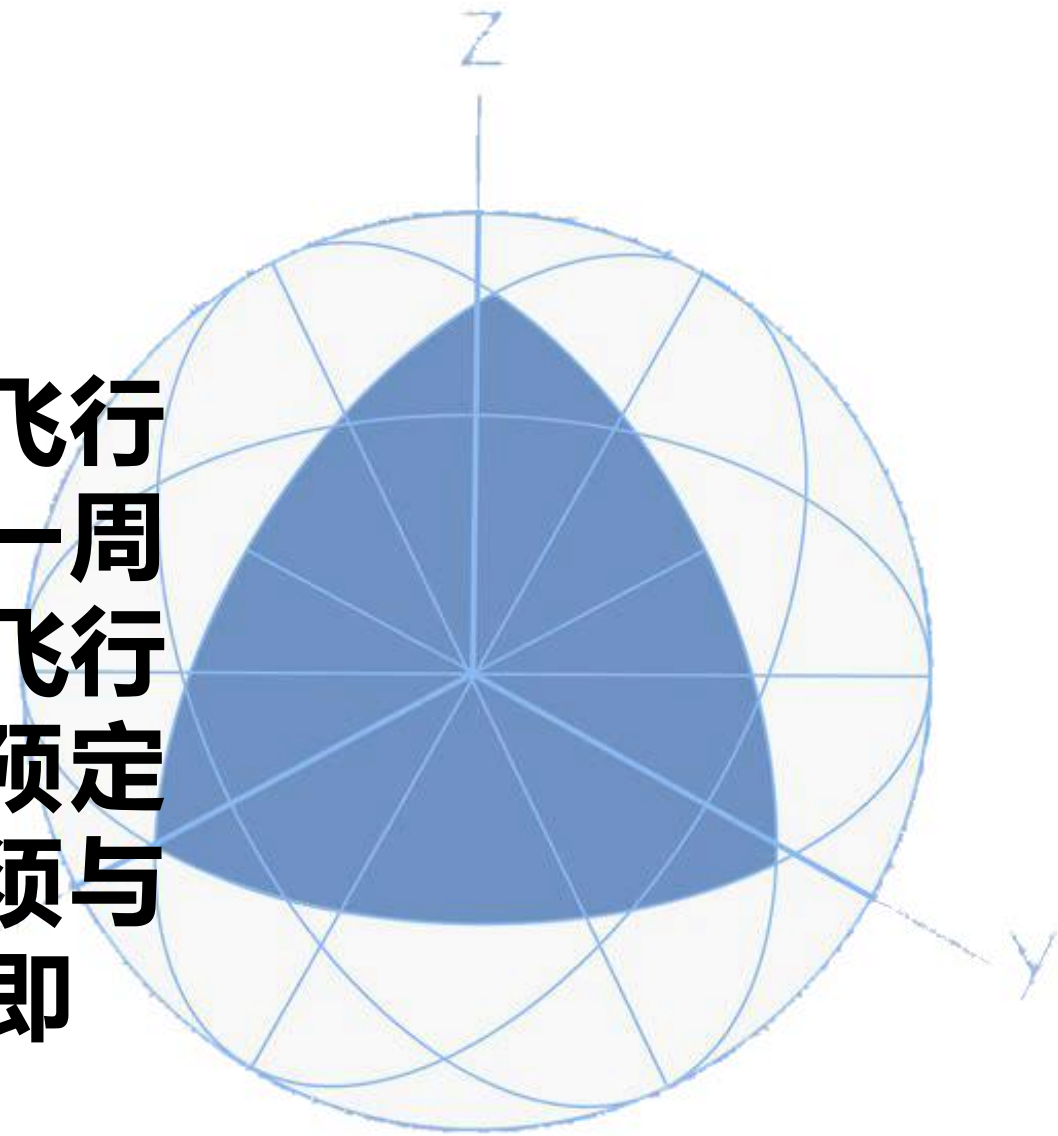
把地球看成一个球体，且不考虑其它天体对卫星的影响。设地球的半径 $R=6371\text{km}$ ，地球自转的角速度 $\omega=2\pi/(24\times 3600)$ ，设卫星离地面的高度 h 。



3.1.3 案例分析

2、问题的分析：由于卫星绕地球飞行一周的时间，正好等于地球自转一周的时间，因此 ω 也就是卫星绕地球飞行的角速度。要使卫星不会脱离其预定轨道，卫星所受的地球的引力必须与它绕地球飞行所受的离心力相等，即

$$\frac{gMm}{(R+h)^2} = m\omega^2(R+h)$$





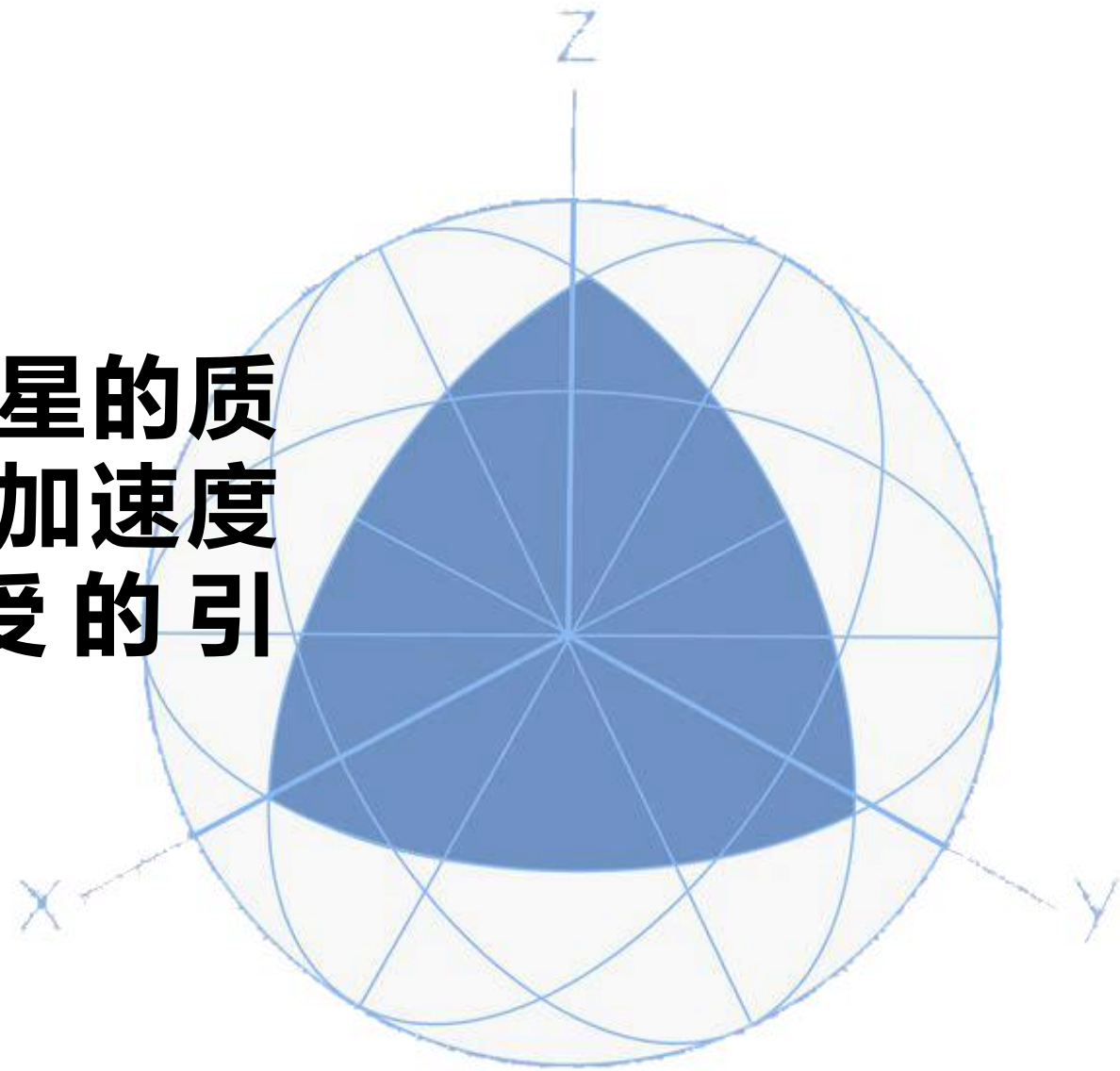
3.1.3 案例分析

其中 M 为地球的质量， m 为卫星的质量， G 是引力常数。由于重力加速度（即在地面的单位质量所受的引力）， $g = \frac{GM}{R^2}$ 。那么从上式得

$$(R + h)^3 = \frac{GM}{\omega^2} \frac{GM}{R^2} \frac{R^2}{\omega^2} = g \frac{R^2}{\omega^2}$$

于是

$$h = \sqrt[3]{g \frac{R^2}{\omega^2}} - R$$

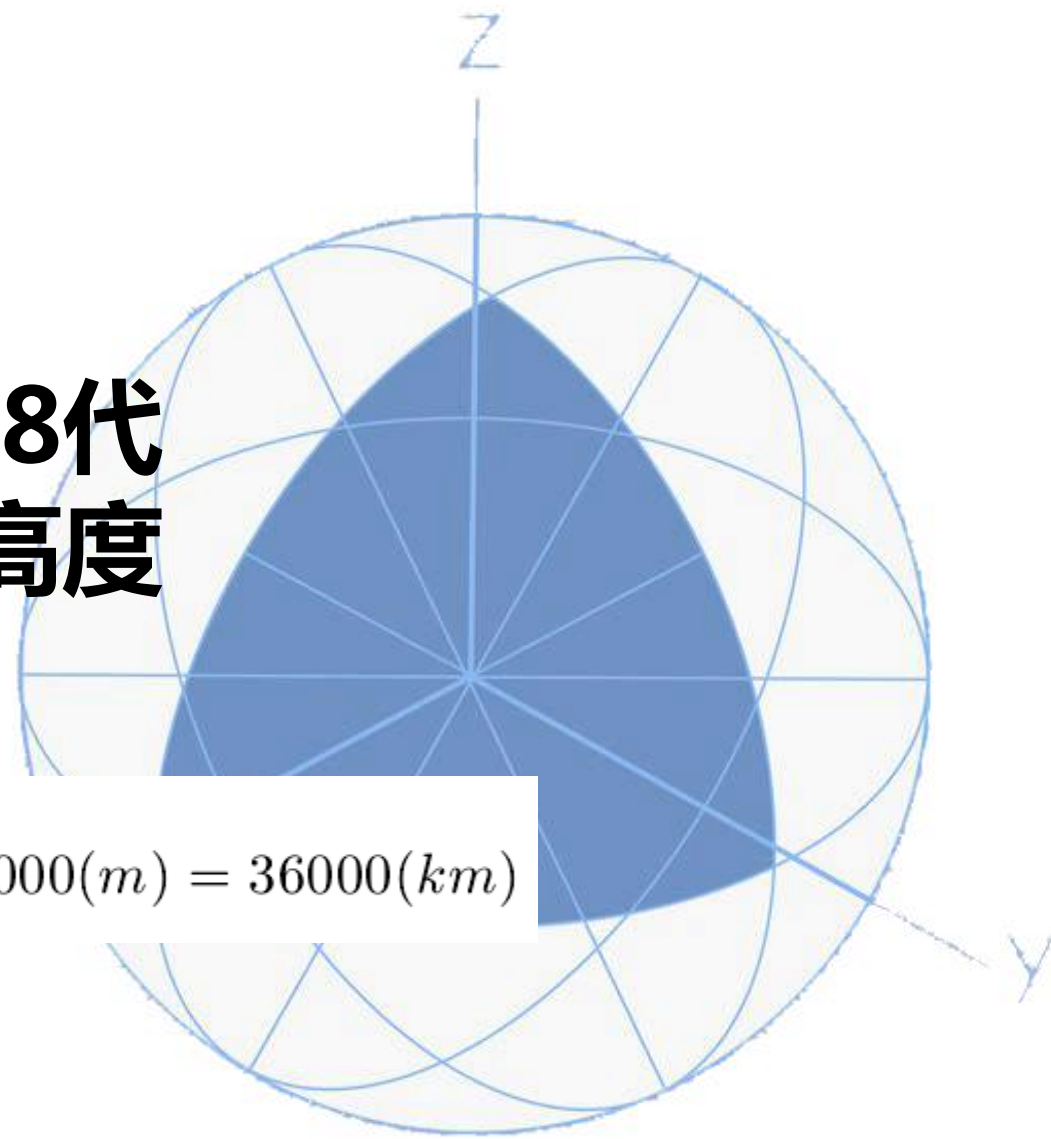




3.1.3 案例分析

将 $R=6371000$ ， $\omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600}$ ， $g=9.8$ 代入上式，就得到卫星的离地面的高度为

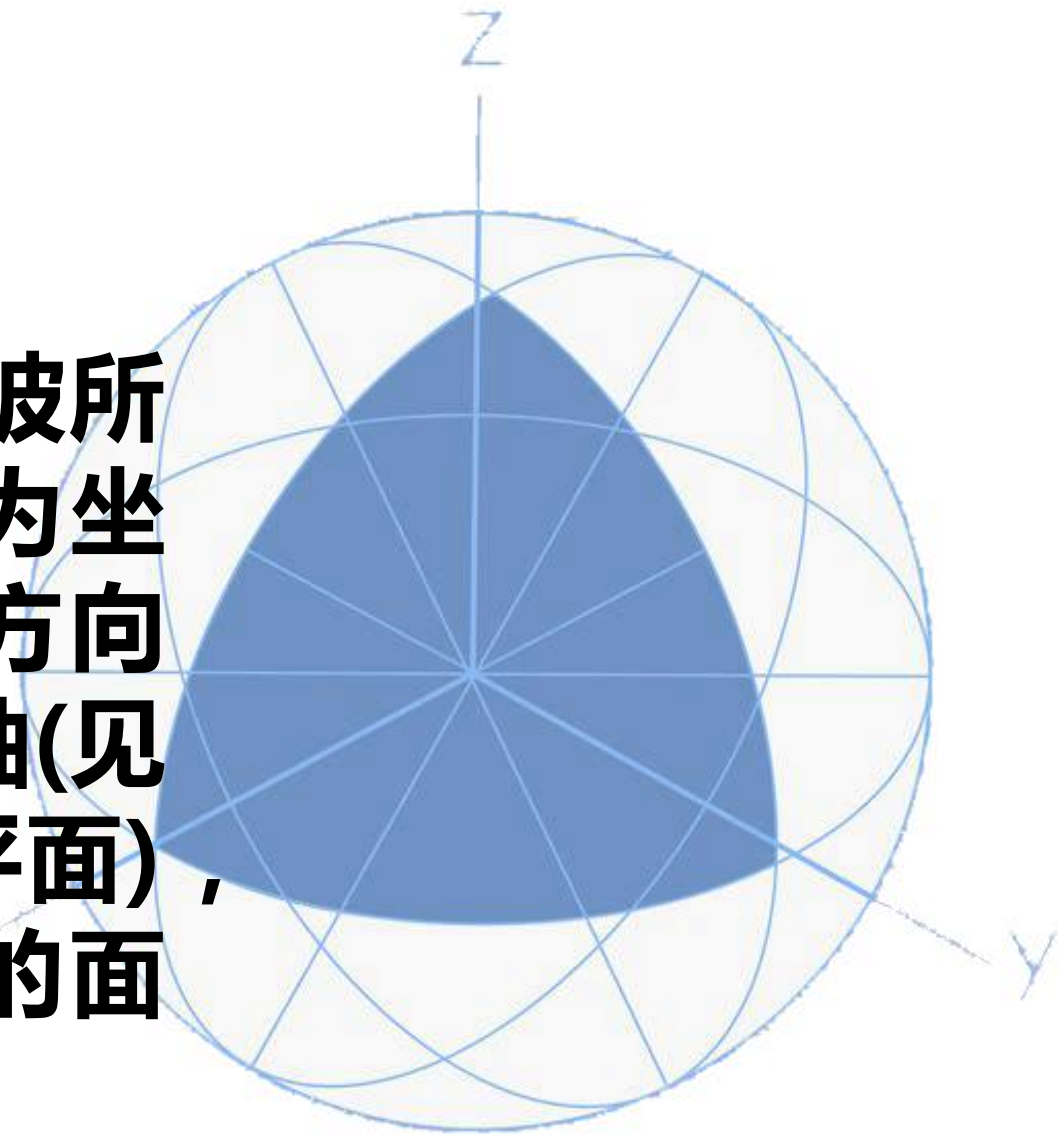
$$h = \sqrt[3]{9.8 \times \frac{6371000^2 \times 24^2 \times 3600^2}{4\pi^2}} - 6371000 = 36000000(m) = 36000(km)$$



3.1.3 案例分析

3、模型的构建：为计算卫星的电波所覆盖的地球表面的面积，取地心为坐标原点。取过地心与卫星中心、方向从地心到卫星中心的有向直线为z轴(见图)，为简明起见，只画出了xz平面)，则卫星的电波所覆盖的地球表面的面积为

$$S = \int_{\Sigma} dS$$



3.1.3 案例分析

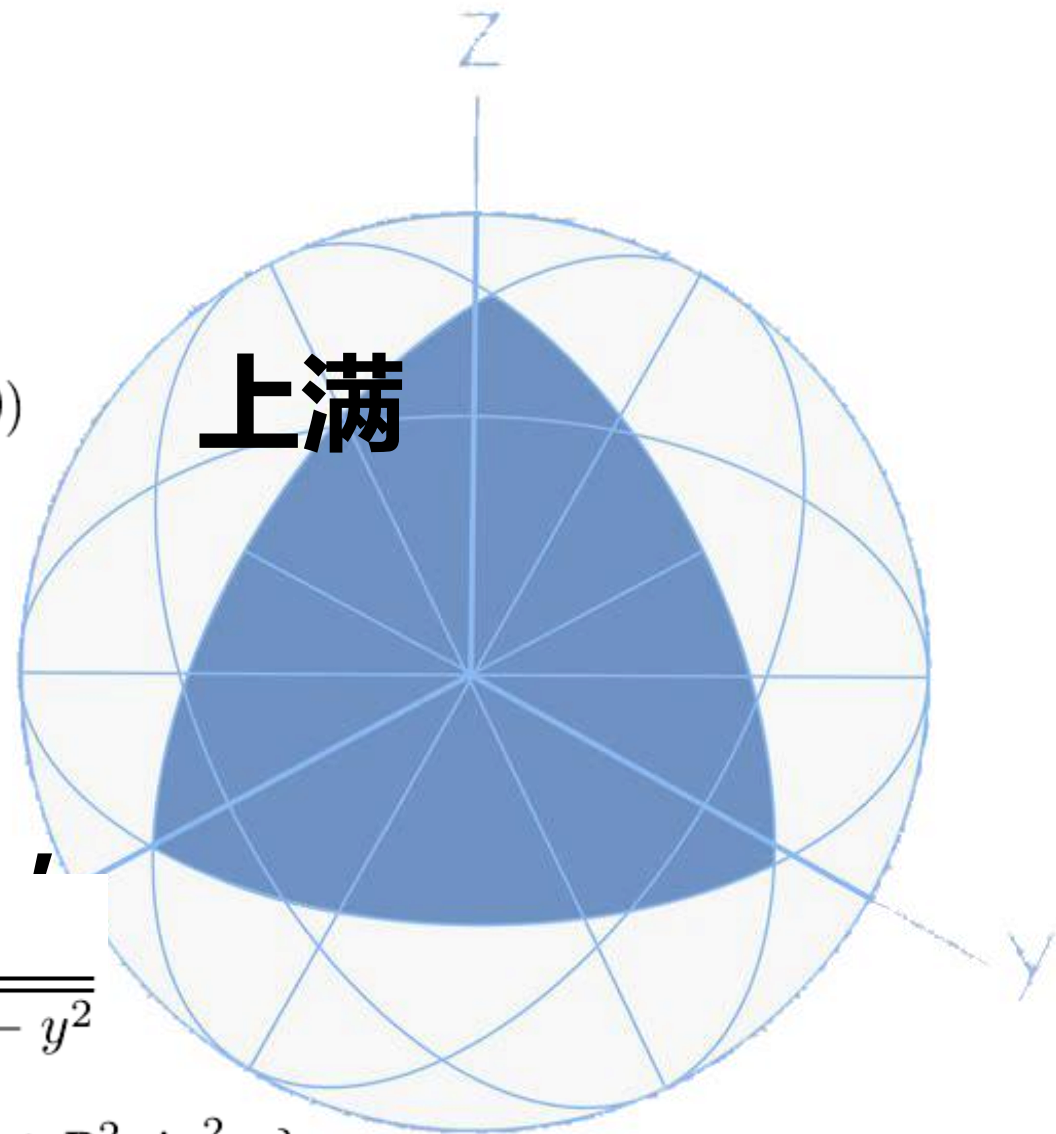
其中 Σ 是上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (z \geq 0)$
 足 $z \geq R \cos \alpha$ 的部分，即

$$\Sigma : z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq R^2 \sin^2 \alpha$$

利用第一类曲面积分的计算公式，

$$S = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

这里 D 为 xy 平面上区域 $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2 \sin^2 \alpha\}$





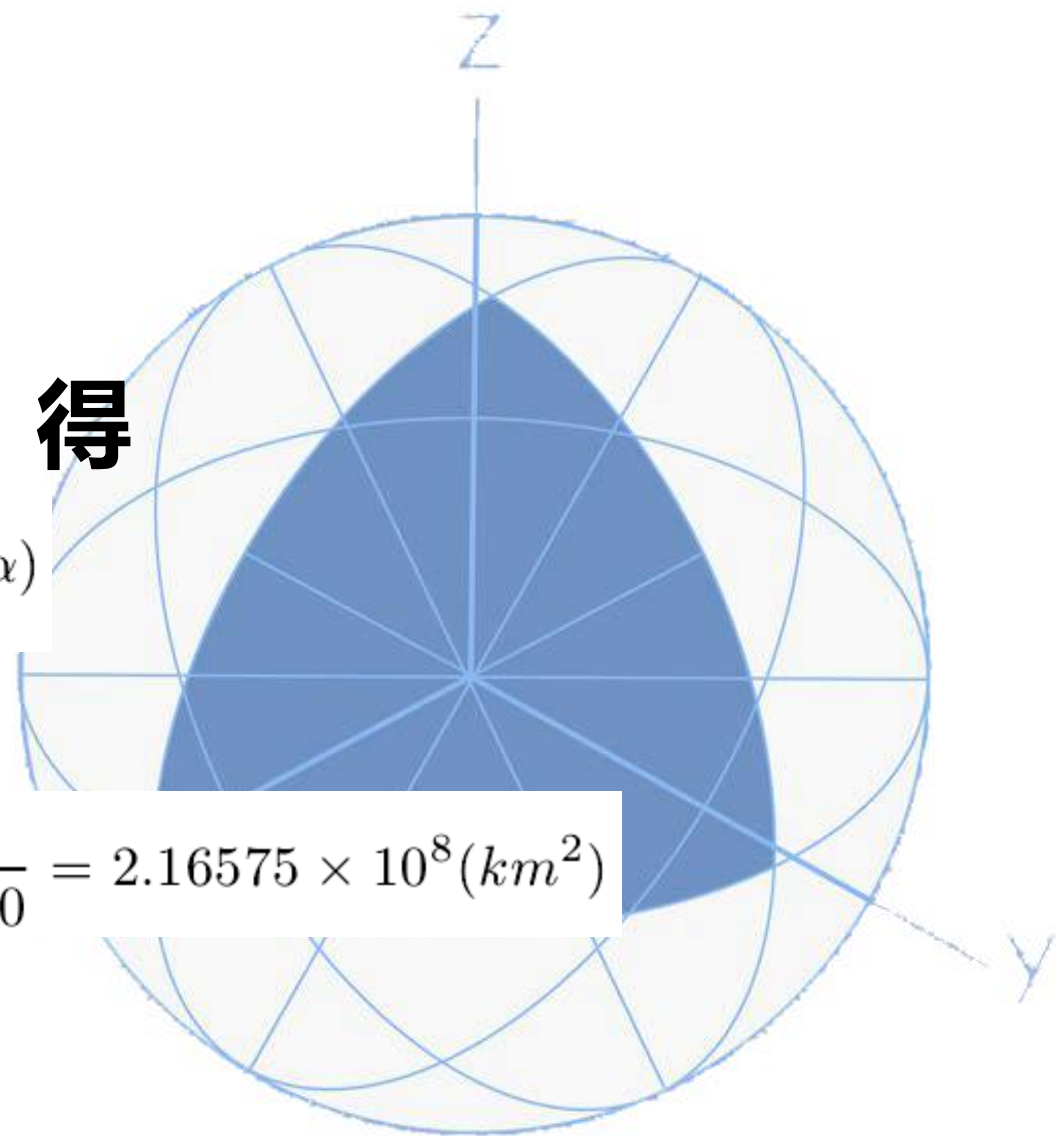
3.1.3 案例分析

4、模型的求解：利用极坐标变换，得

$$S = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R \sin \alpha} \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} r dr = 2\pi R^2 (1 - \cos \alpha)$$

因为 $\cos \alpha = \frac{R}{R+h}$ ，所以

$$S = 2\pi R^2 \frac{h}{R+h} = 2\pi \times 6371000^2 \times \frac{36000000}{6371000 + 36000000} = 2.16575 \times 10^8 (km^2)$$



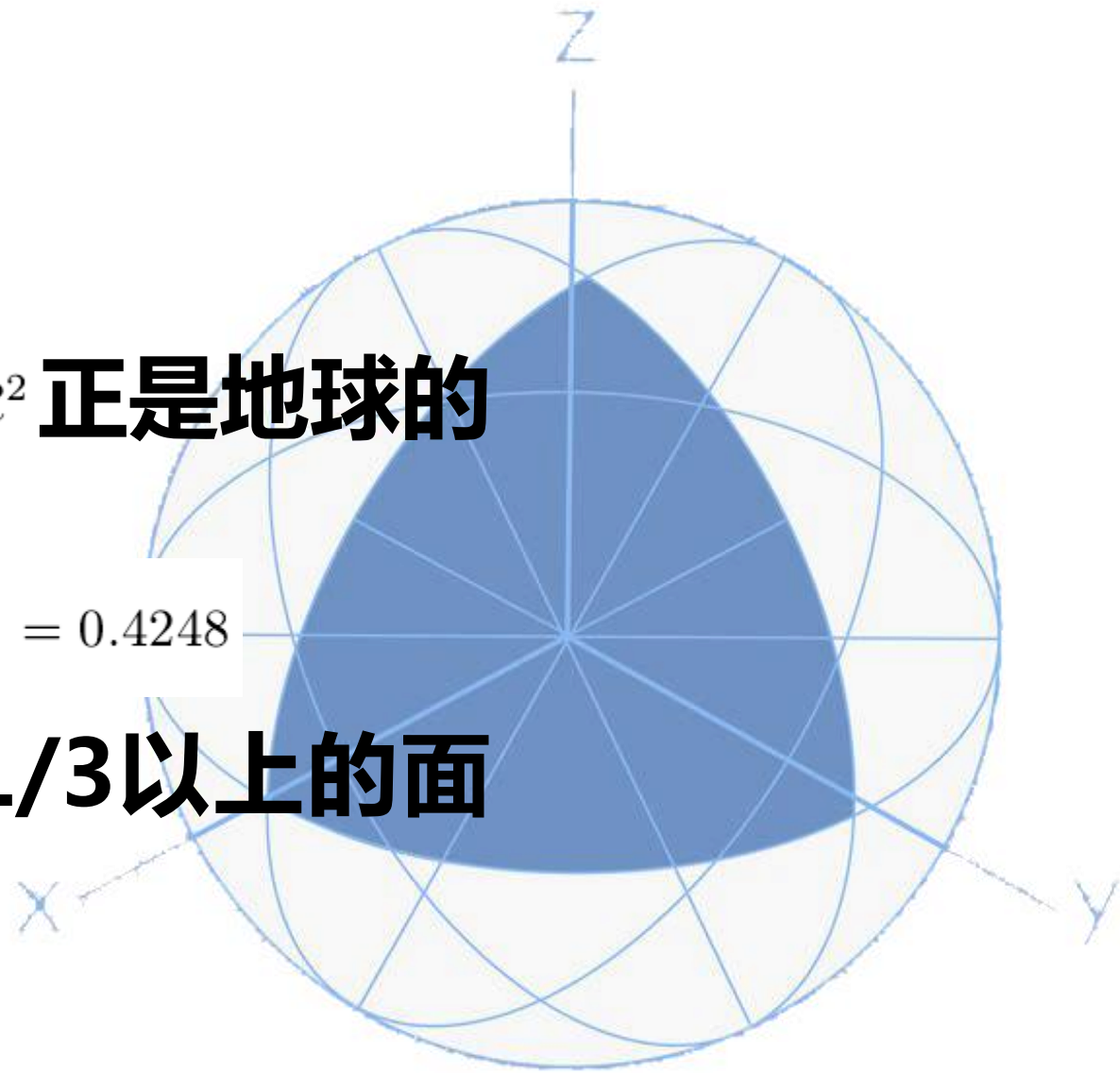


3.1.3 案例分析

由于 $S = 2\pi R^2 \frac{h}{R+h} = 4\pi R^2 \frac{h}{2(R+h)}$ 且 $4\pi R^2$ 正是地球的表面积，而

$$\frac{h}{2(R+h)} = \frac{36000000}{2(6371000 + 36000000)} = 0.4248$$

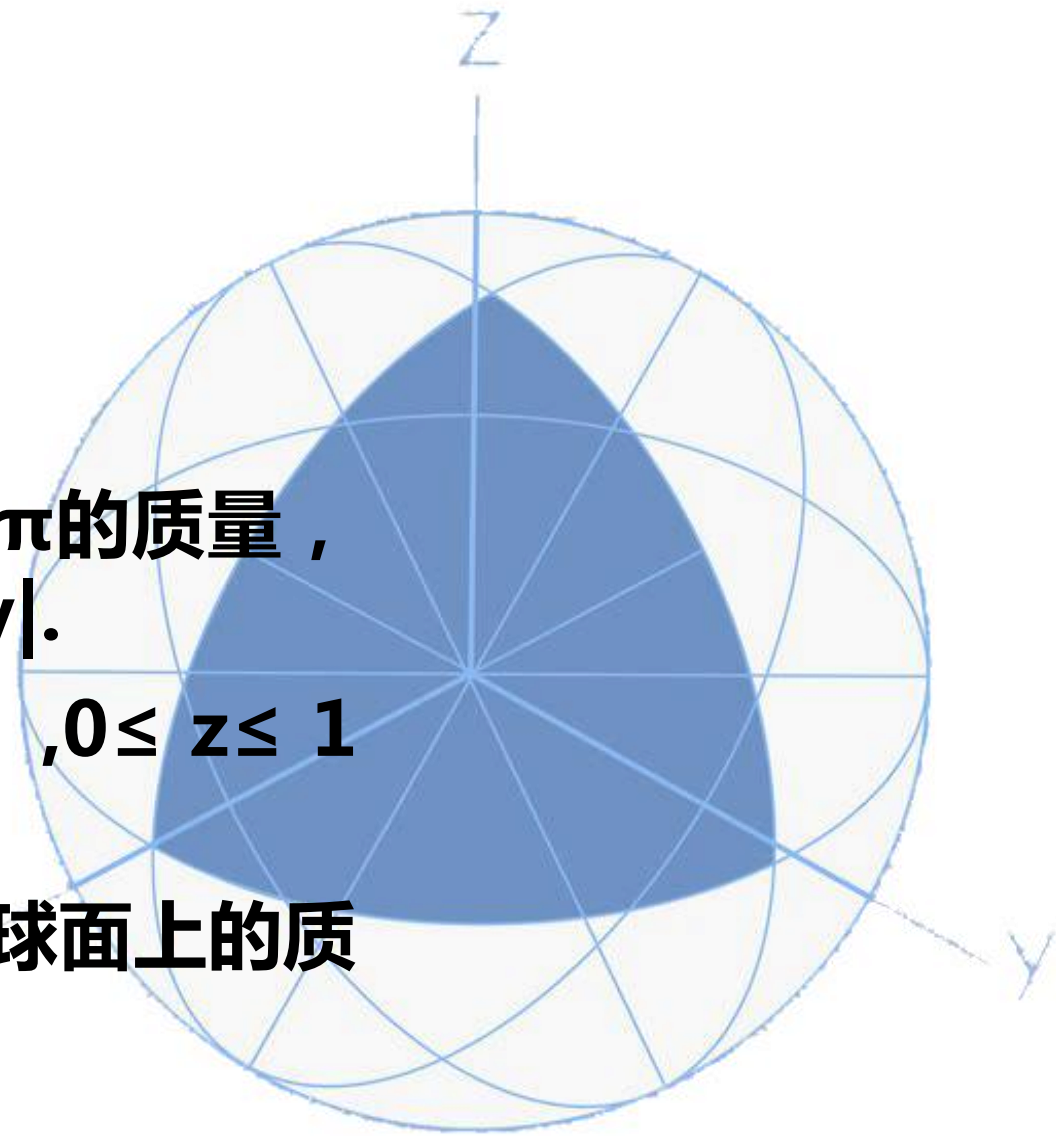
即卫星的电波搜盖了地球表面1/3以上的面积。



3.1.3 案例分析

思考题：

1. 求椭圆周 $x=acost$, $y=bsint$, $0 \leq t \leq 2\pi$ 的质量 , 已知曲线在点 $M(x,y)$ 处的线密度是 $\rho(x,y)=|y|$.
2. 求密度为 $\rho(x,y)=z$ 的抛物面壳 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, $0 \leq z \leq 1$ 质量与重心.
3. 求均匀球面(半径是 a , 密度是1)对不在该球面上的质点(质量为1)的引力.



3.1.3 案例分析

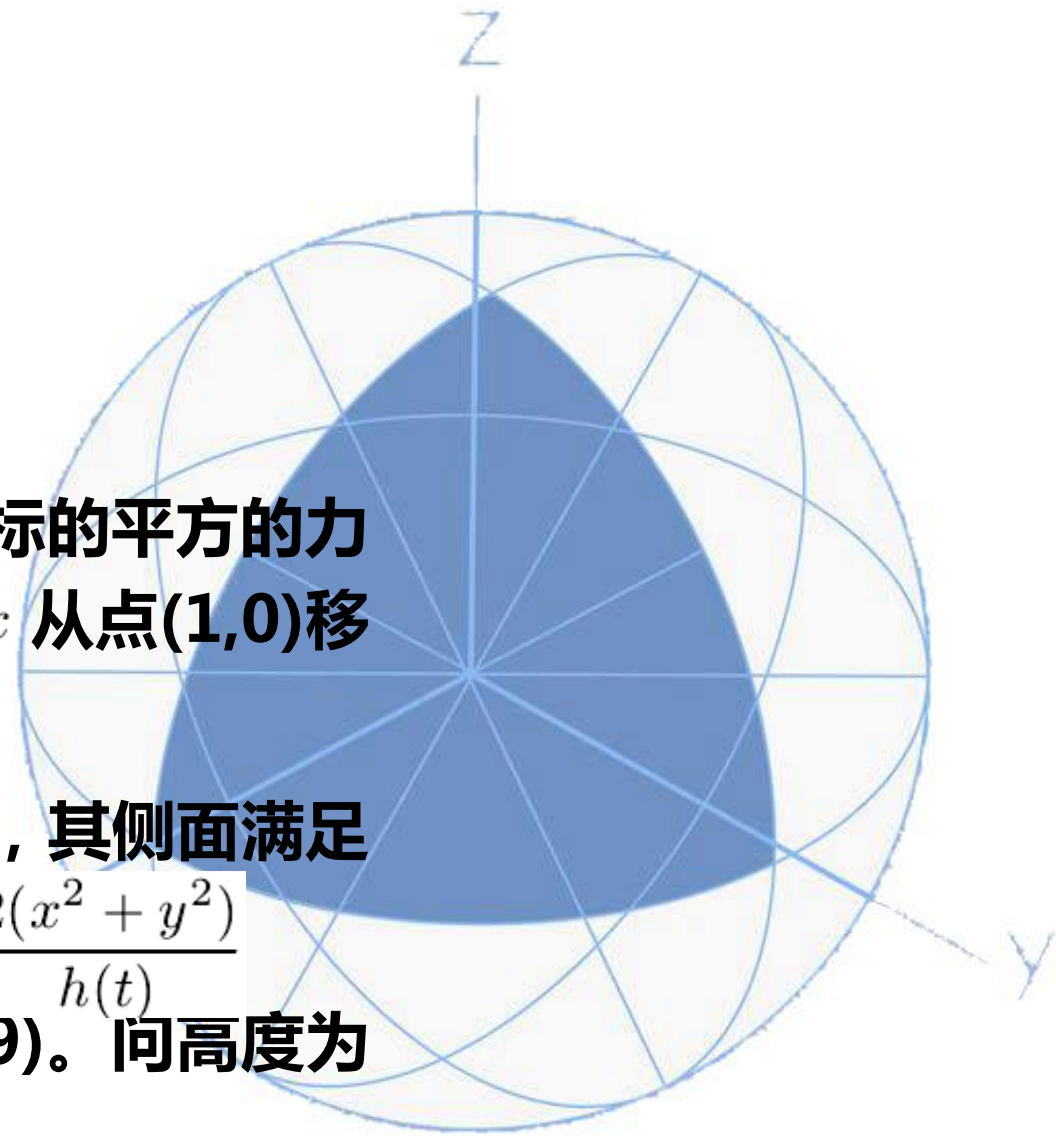
思考题：

4. 方向依纵轴的负方向，且大小等于作用点的横坐标的平方的力构成一个力场. 求质量为 m 的质点沿抛物线 $y^2 = 1 - x$ 从点 $(1,0)$ 移到 $(0,1)$ 时，场力所作的功.

5. 设有一高度为 $h(t)$ (t 为时间)的雪堆在融化过程中，其侧面满足方程(设长度单位为cm，时间单位为h)

$$z = h(t) - \frac{2(x^2 + y^2)}{h(t)}$$

已知体积减少的速率与侧面积成正比(比例系数为0.9)。问高度为130cm的雪堆全部融化需多少时间？

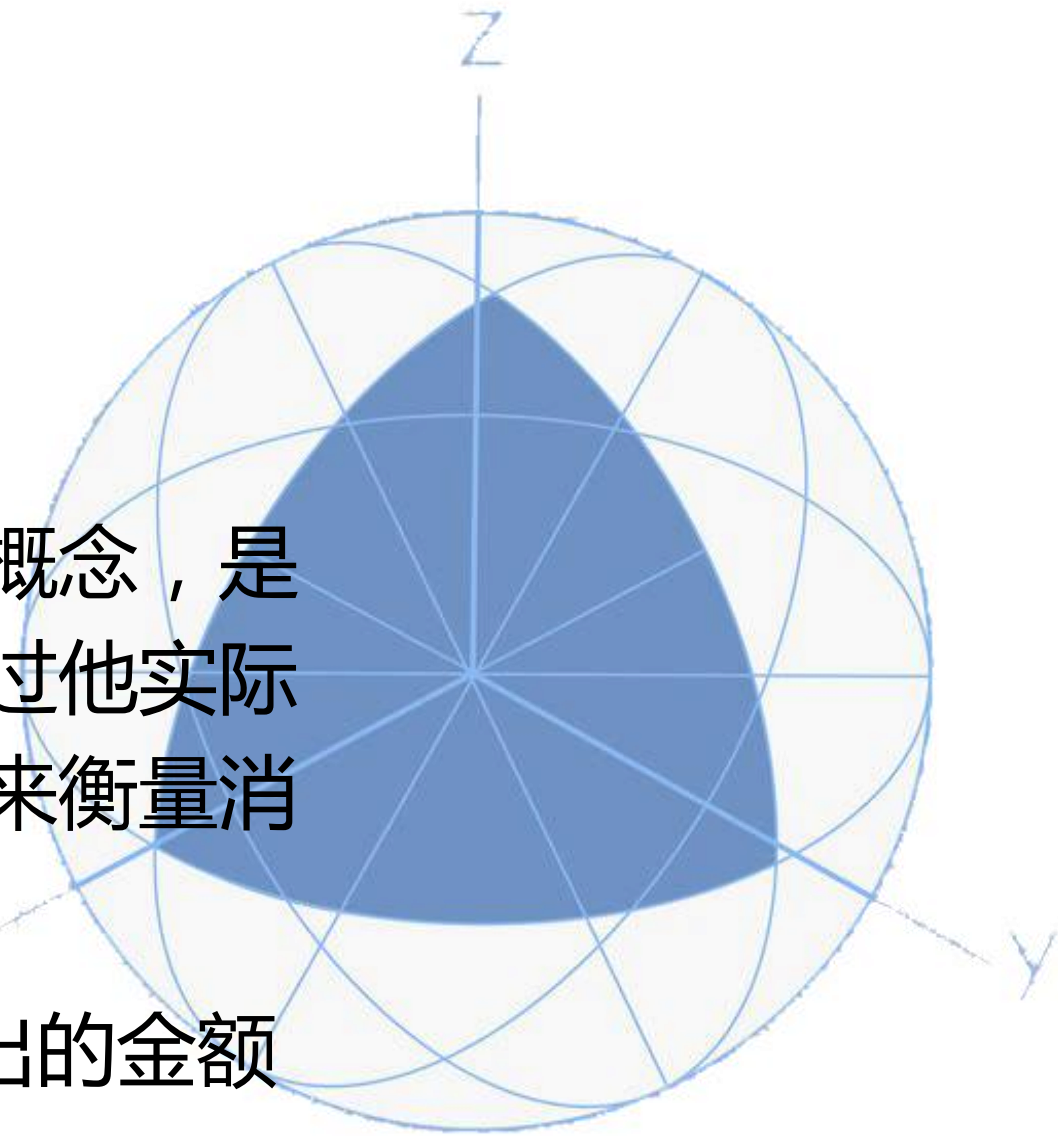


3.1.3 案例分析

案例三：消费者剩余与生产者剩余

问题背景：消费者剩余是经济学中的重要概念，是指消费者对某种商品所愿意付出的代价超过他实际付出的代价的金额，即：消费者剩余可用来衡量消费者所得到的额外满足。用公式表示为：

$$\text{消费者剩余} = \text{愿意付出的金额} - \text{实际付出的金额}$$

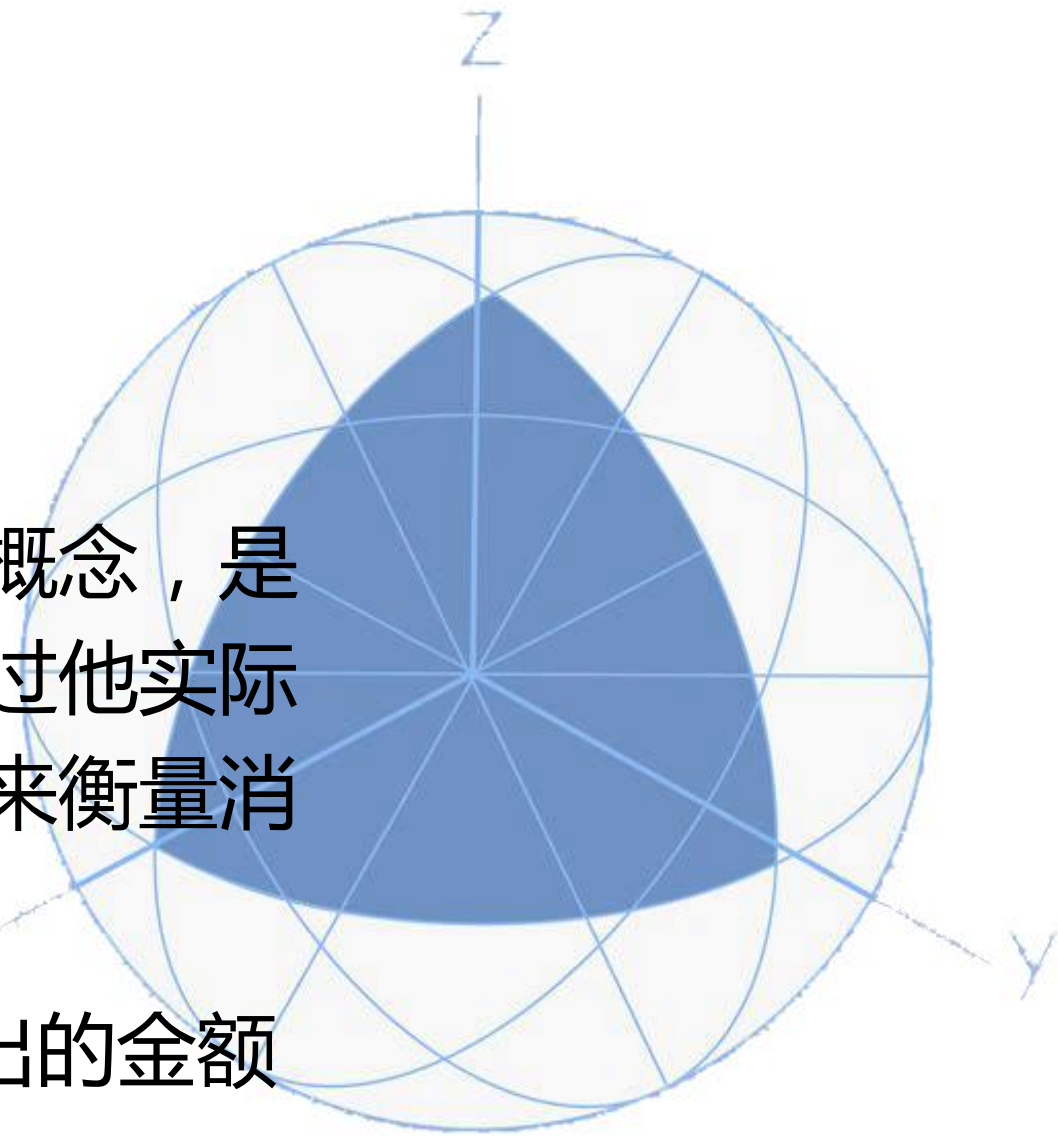


3.1.3 案例分析

案例三：消费者剩余与生产者剩余

问题背景：消费者剩余是经济学中的重要概念，是指消费者对某种商品所愿意付出的代价超过他实际付出的代价的金额，即：消费者剩余可用来衡量消费者所得到的额外满足。用公式表示为：

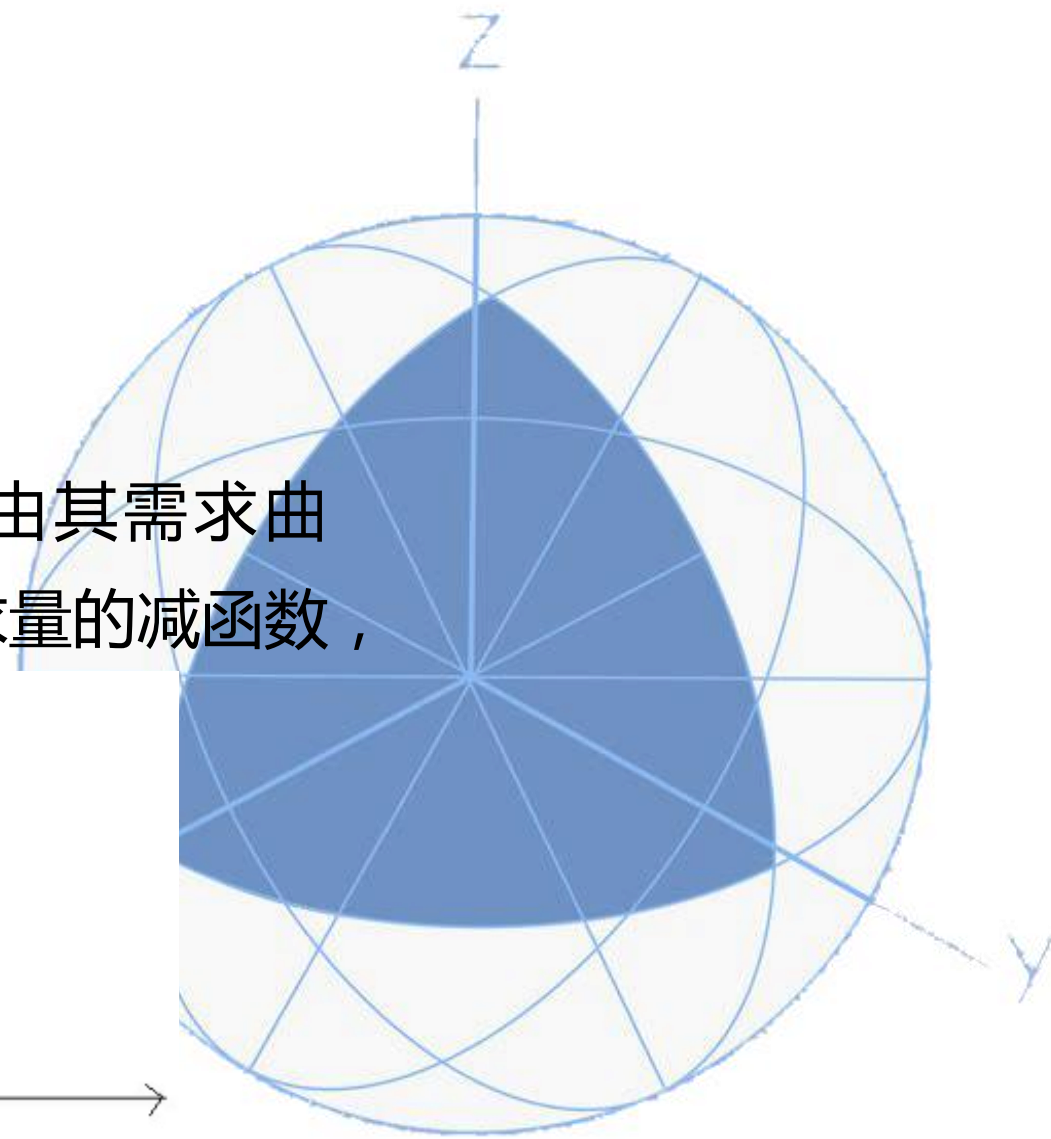
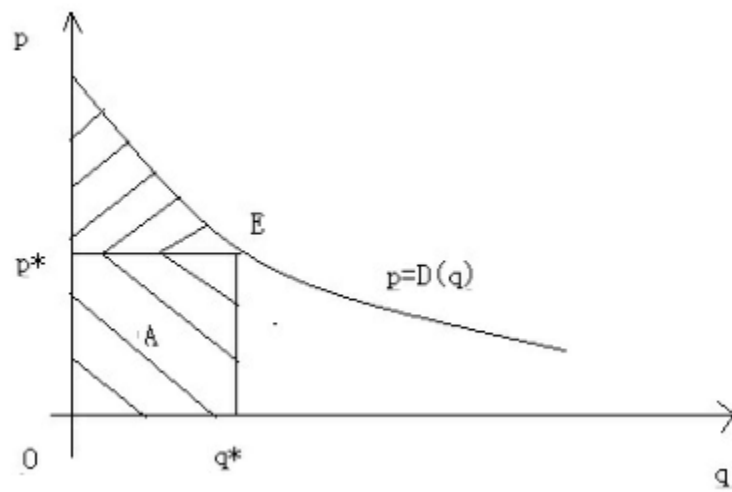
$$\text{消费者剩余} = \text{愿意付出的金额} - \text{实际付出的金额}$$



3.1.3 案例分析

【模型构建】

假定消费者愿意为某种商品所付出的价格 p 是由其需求曲线 $p = D(q)$. (其中 q 为需求量)决定的, 它是需求量的减函数, 如下图所示:



3.1.3 案例分析

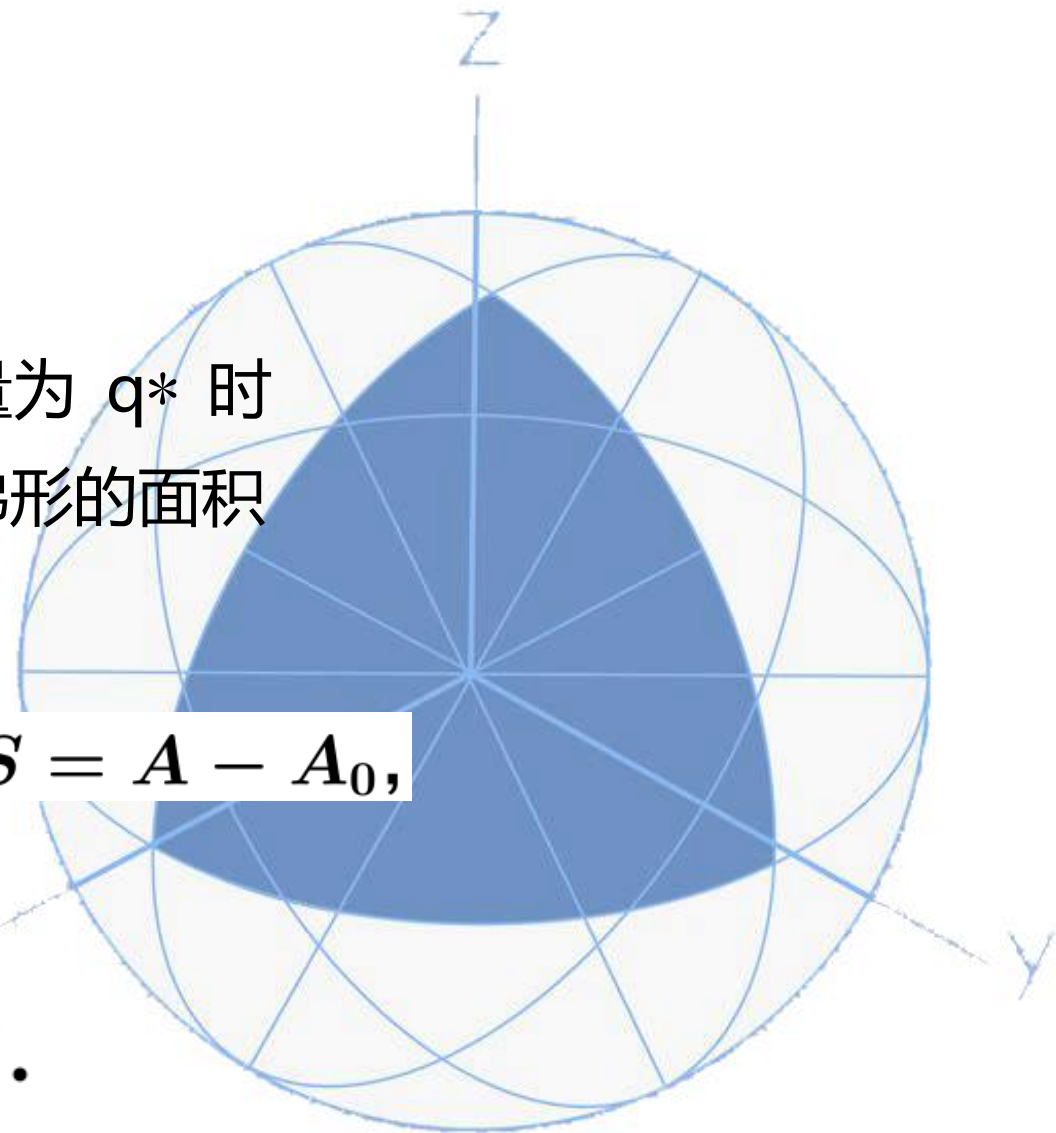
这表明，某消费者对价格 p^* 的某商品的购买量为 q^* 时
由于价格不断变化，所愿意付出的金额为曲边梯形的面积

$$A = \int_0^{q^*} D(q) dq$$

而实际付出金额为矩形面积 A_0 则消费者剩余 $CS = A - A_0$,

所以当价格为 p^* 时，消费者剩余的计算公式为

$$CS = \int_0^{q^*} D(q) dq - p^* q^*.$$





廈門大學
XIAMEN UNIVERSITY

Part 2

应用导数思想建模





3.2.1 催生导数思想产生的源头问题和当今应用

十七世纪，四类问题催生了微积分的诞生。其中

- 1、求瞬时速度的问题；**
 - 2、求曲线的切线的问题；**
- 催生了导数的产生**





3.2.1 催生导数思想产生的源头问题和当今应用

1、第一类问题的现代提法可以写为：

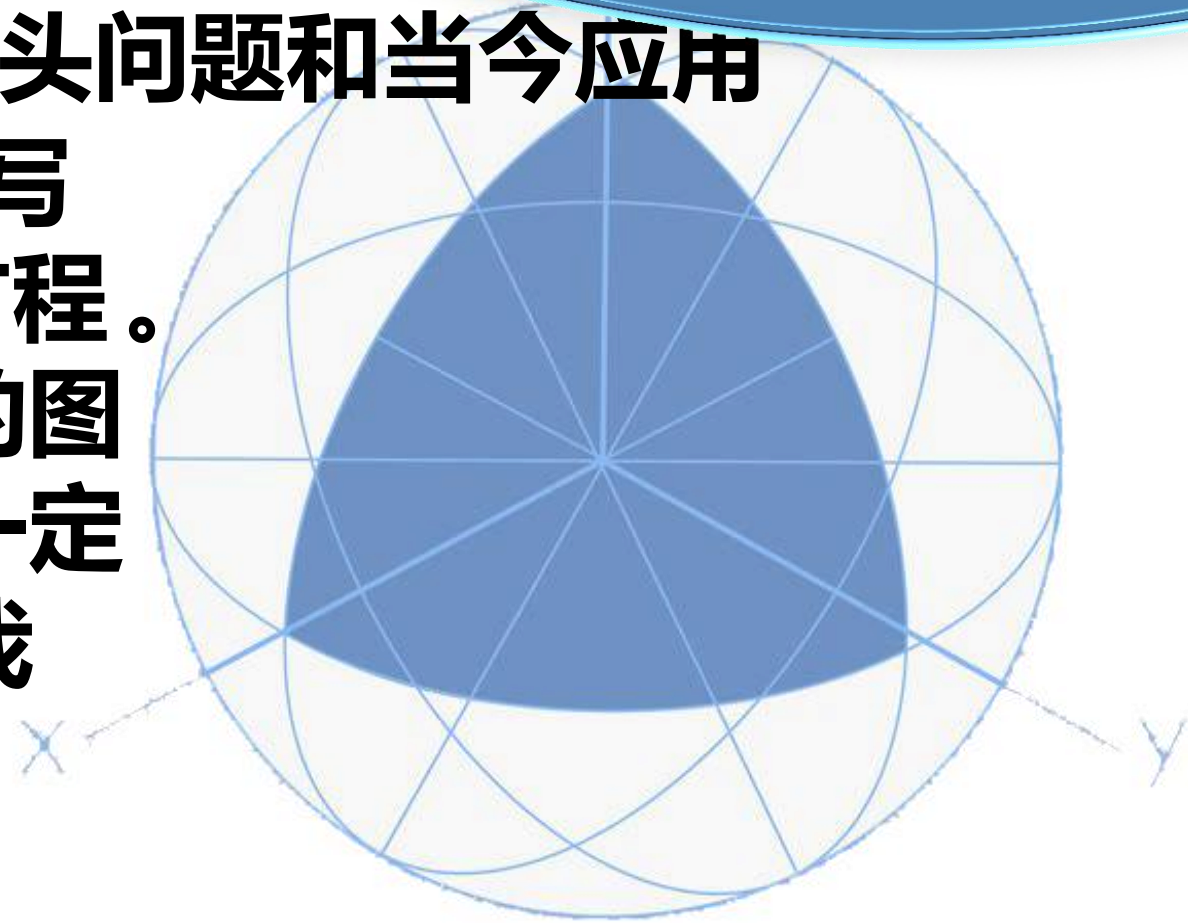
变速直线运动物体的瞬时速度：设想有一个在运动着的物体，用 t 表示从某一起始时刻算起所经过的时间，用 S 表示经过时间 t 以后物体所走过的路程，那么 S 应该是 t 的函数 $S = S(t)$.

现在随便指定一个时刻 t_0 ，问应怎样描述在时刻 t_0 物体运动的快慢？即问应该怎样理解物体在时刻 t_0 的运动速度？



3.2.1 催生导数思想产生的源头问题和当今应用

2、第二类问题的现代提法可以写为：曲线在其上一点处的切线方程。设曲线C 是函数 $y = f(x) (a < x < b)$ 的图象， $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ 是曲线C上的一点，L是C在这一点处的切线。我们怎样来确定L的方程式呢？





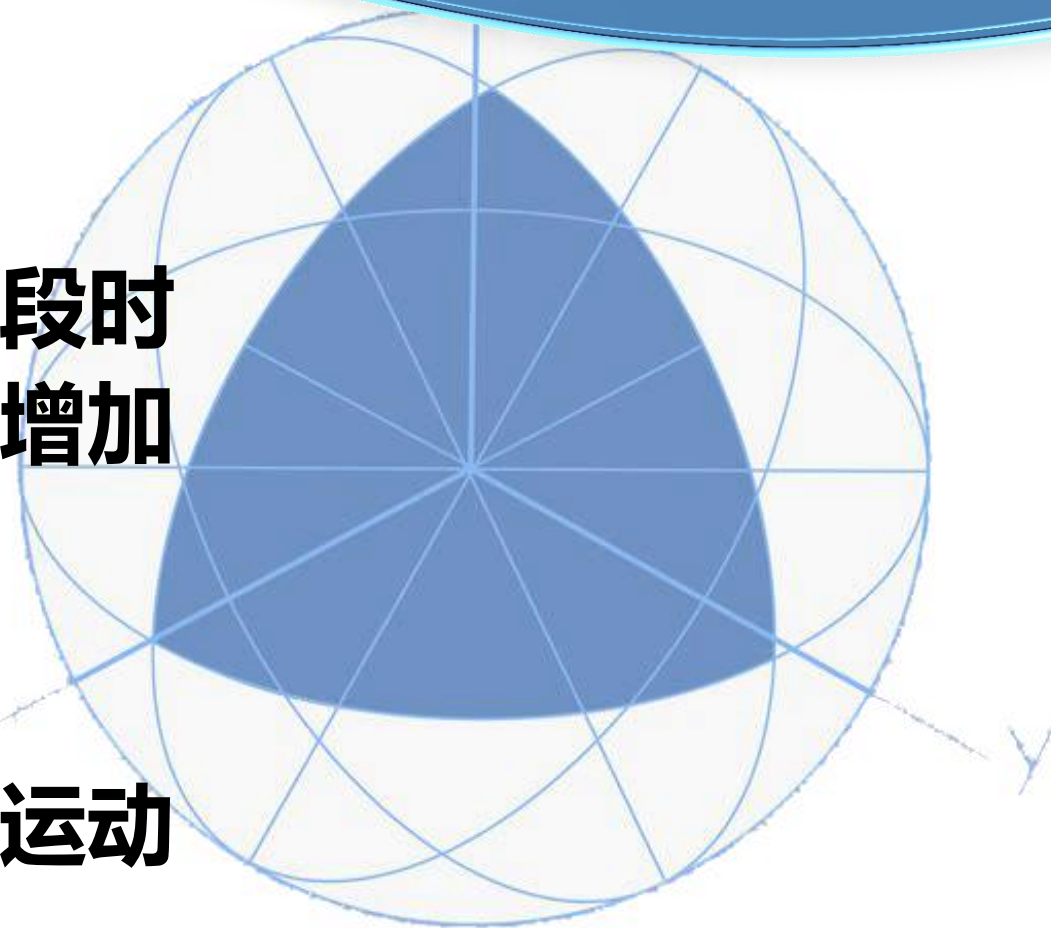
3.2.2 导数思想与建模方法

问题 1 的解答：

设想物体从时刻 t_0 继续运动了一 (小)段时间 Δt ，这时物体所走过的路程也相应增加了一段 ΔS

$$\Delta S = S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)$$

于是在从 t_0 到 $t_0 + \Delta t$ 段时间内，物体运动的平均速度应为 $\frac{\Delta S}{\Delta t}$

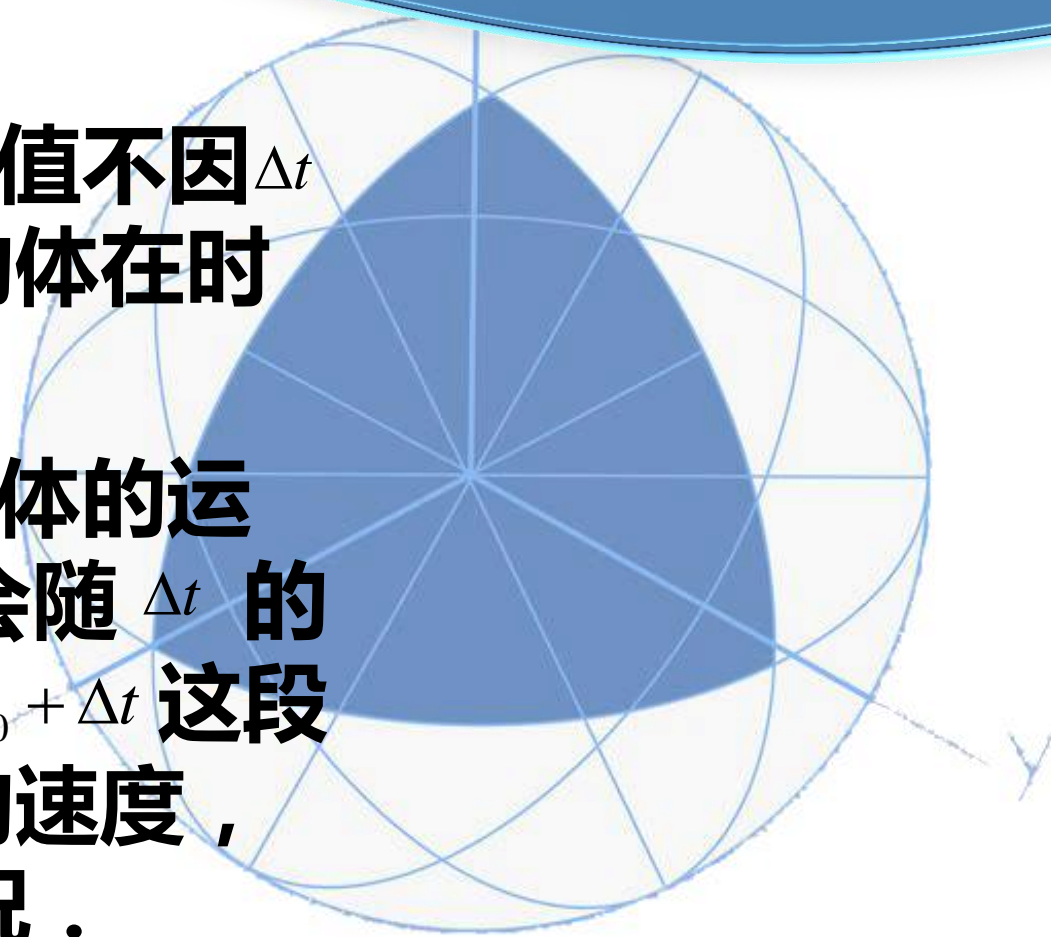




3.2.2 导数思想与建模方法

如果物体是作匀速运动的，这个比值不因 Δt 的变化而改变，这个不变的比值就是物体在时刻 t_0 的运动速度。

但如果物体的运动是变速的，即物体的运动是时快时慢的，则这个比值 $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ 就会随 Δt 的变化而变化，它反映的只是在从 t_0 到 $t_0 + \Delta t$ 这段时间中，物体运动的平均快慢，即平均速度，它并不能代表在 t_0 时刻物体运动的情况。



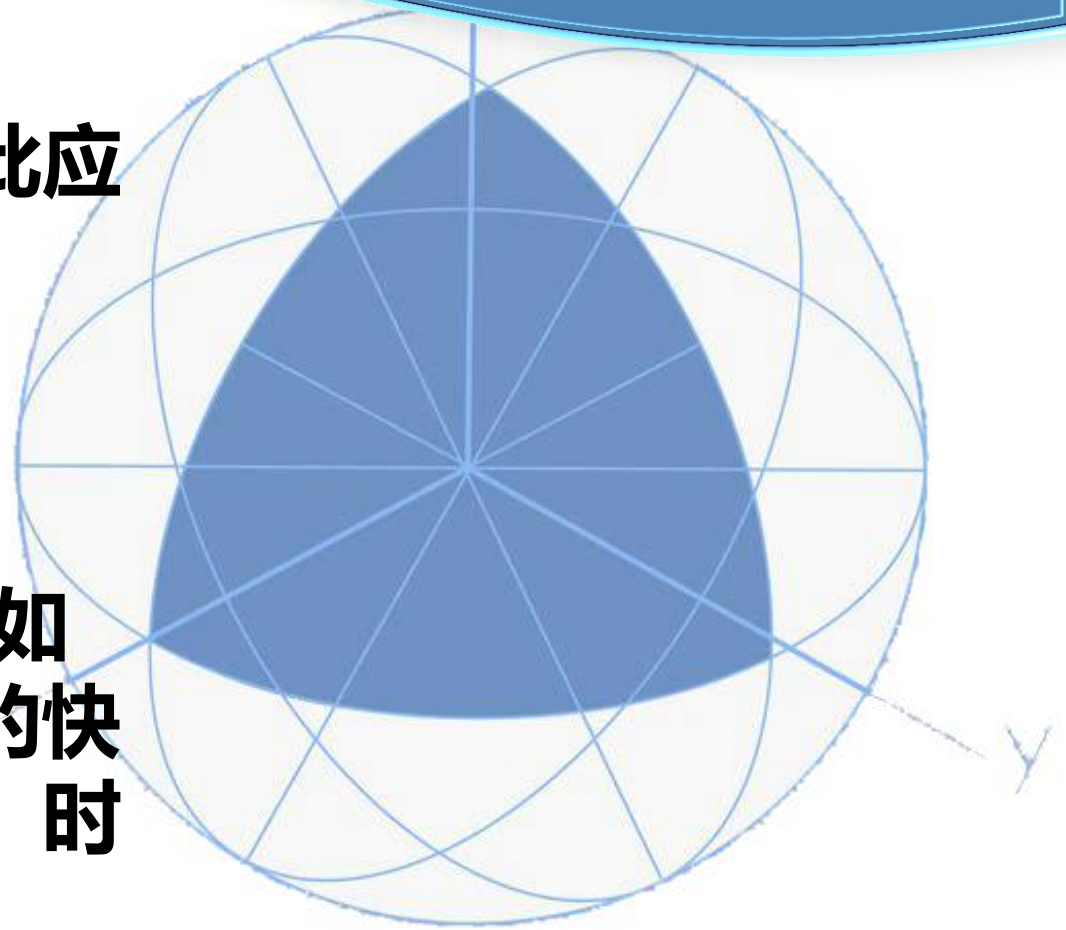


3.2.2 导数思想与建模方法

这个平均速度 $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ 就会随 Δt 而变的，因此应看作 Δt 的一个函数：

$$f(\Delta t) = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t}$$

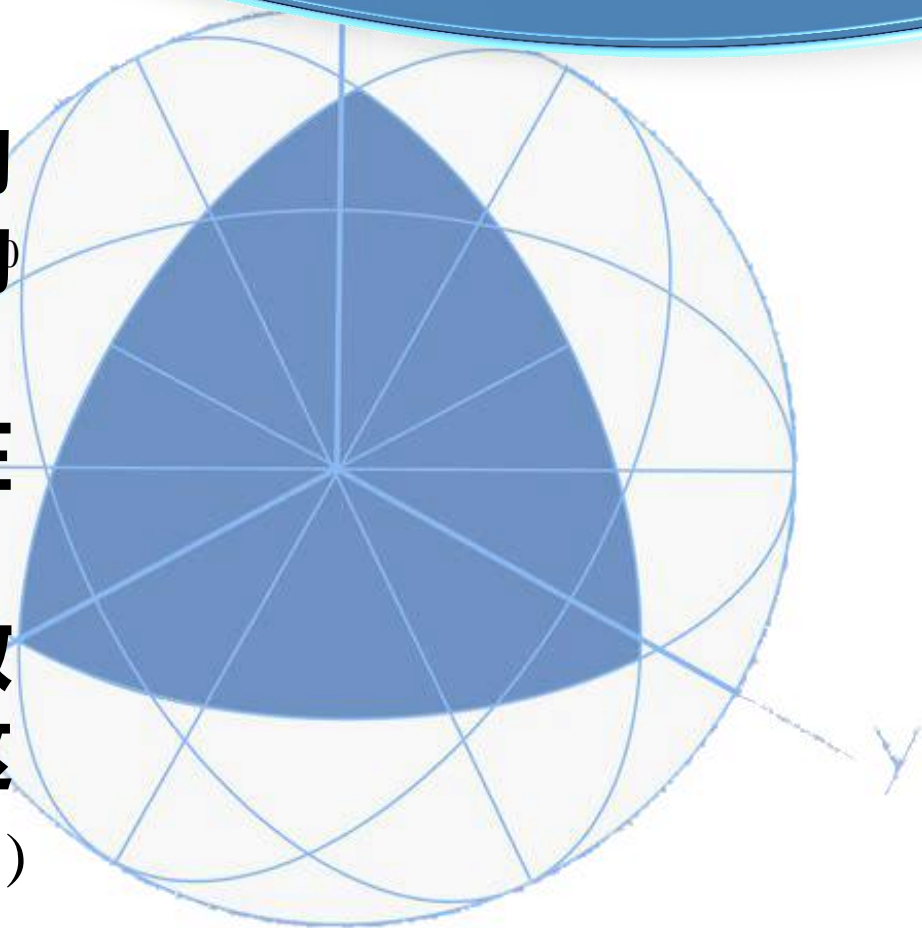
这个函数我们不妨称之为平均速度函数．如果 $|\Delta t|$ 比较大，在这段时间中，物体运动的快慢已有很大的变化，它当然不能说明在 t_0 时刻物体的运动情况．





3.2.2 导数思想与建模方法

但是如果 $|\Delta t|$ 很小，在这段时间中物体运动的快慢变化不大，那么 $f(\Delta t)$ 的大小在相当大的程度上反映了在 t_0 时刻物体的运动情况的。一般说来， $|\Delta t|$ 愈小， $f(\Delta t)$ 也就愈能反映在 t_0 时刻物体的运动情况。这说明如果要用一个数量来描述物体在 t_0 时刻的运动状况，这个数量应该是 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} f(\Delta t)$ ，它通常称为在 t_0 时刻这个运动的物体的瞬时速度，我们将它记为 $v(t_0)$ 。





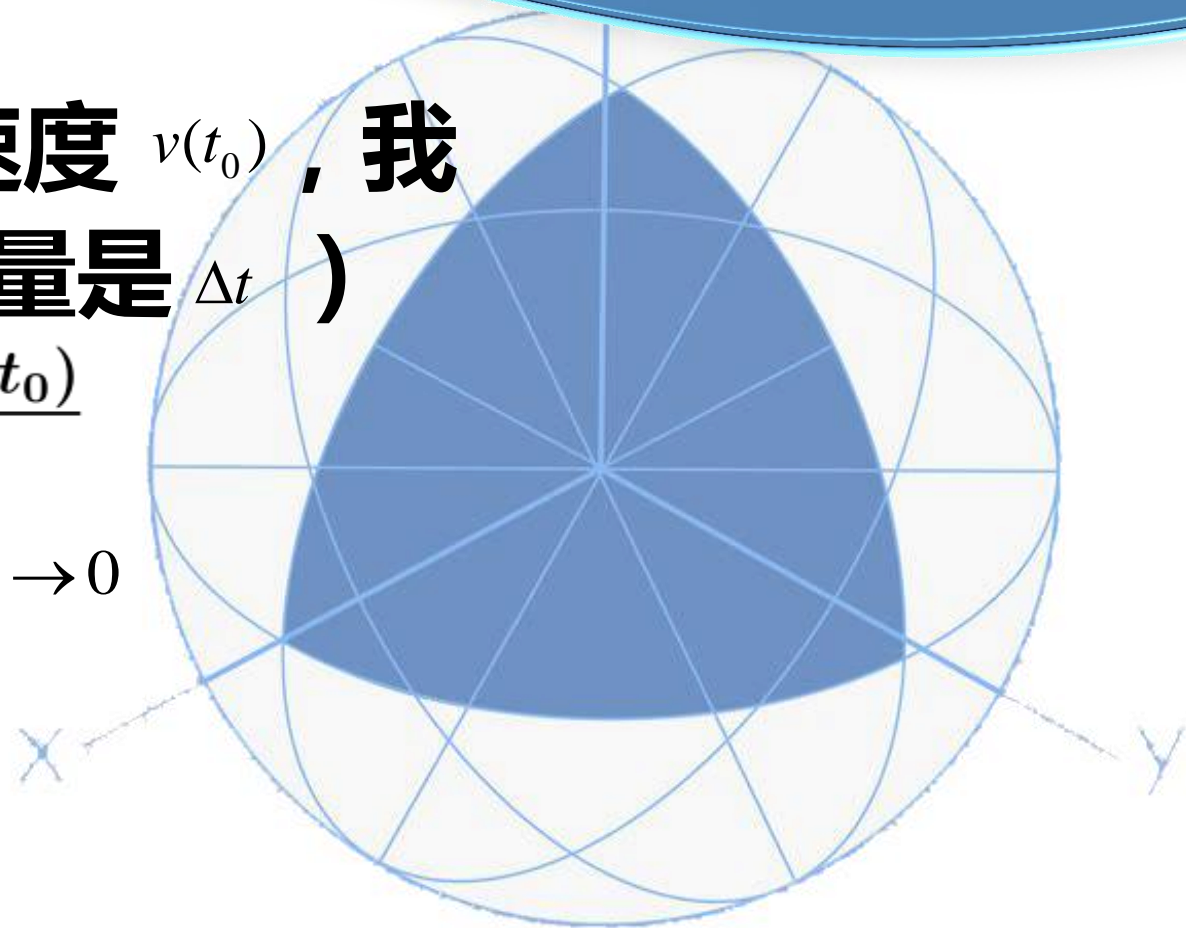
3.2.2 导数思想与建模方法

即有了函数 $S = S(t)$ ，为了求瞬时速度 $v(t_0)$ ，我们要先作出一个新的函数（自变量是 Δt ）

$$f(\Delta t) = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t}$$

然后再去考虑这个新的函数在 $\Delta t \rightarrow 0$

时的极限，即 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t}$





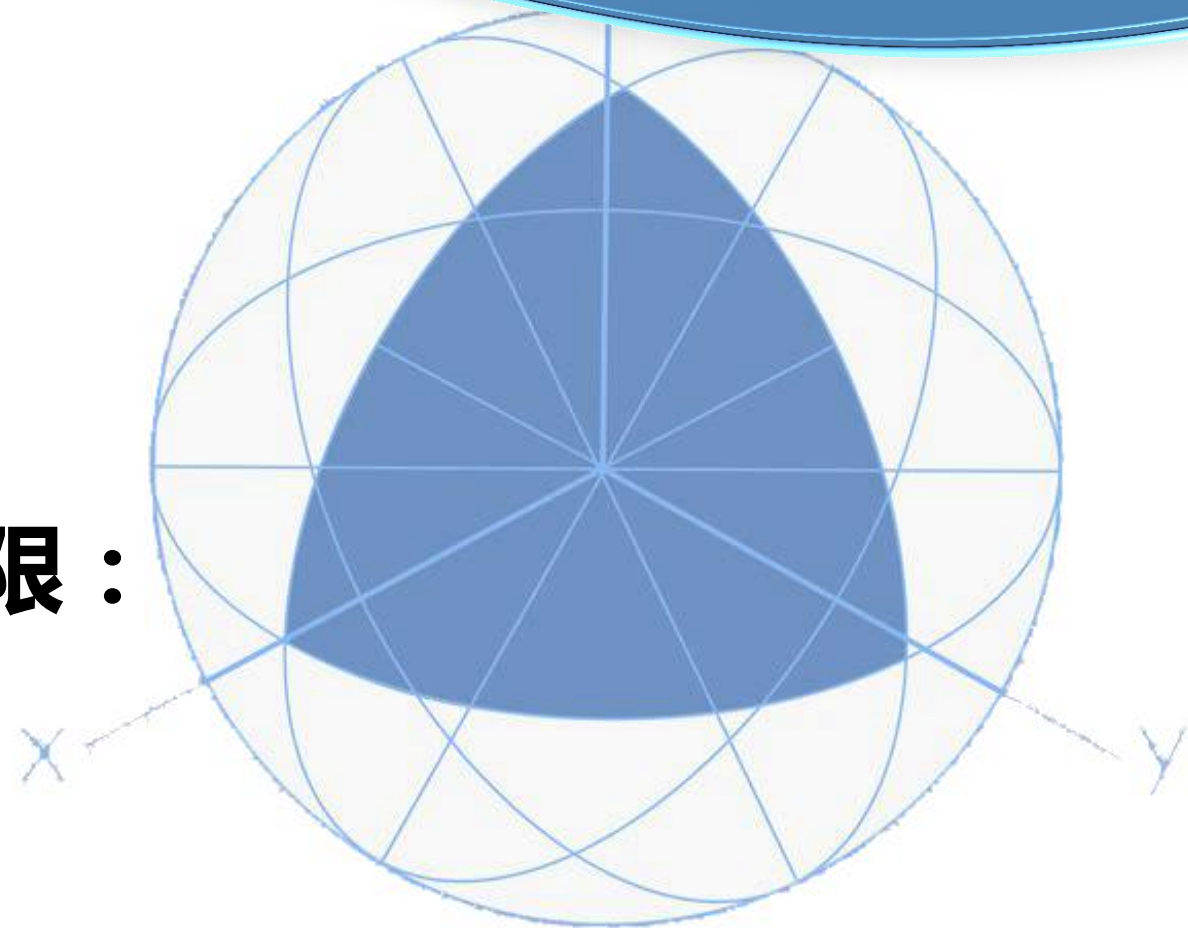
3.2.2 导数思想与建模方法

也可以 t 为自变量的新函数：

$$g(t) = \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}$$

然后再考虑当 $t \rightarrow t_0$ 时 $g(t)$ 的极限：

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0}$$





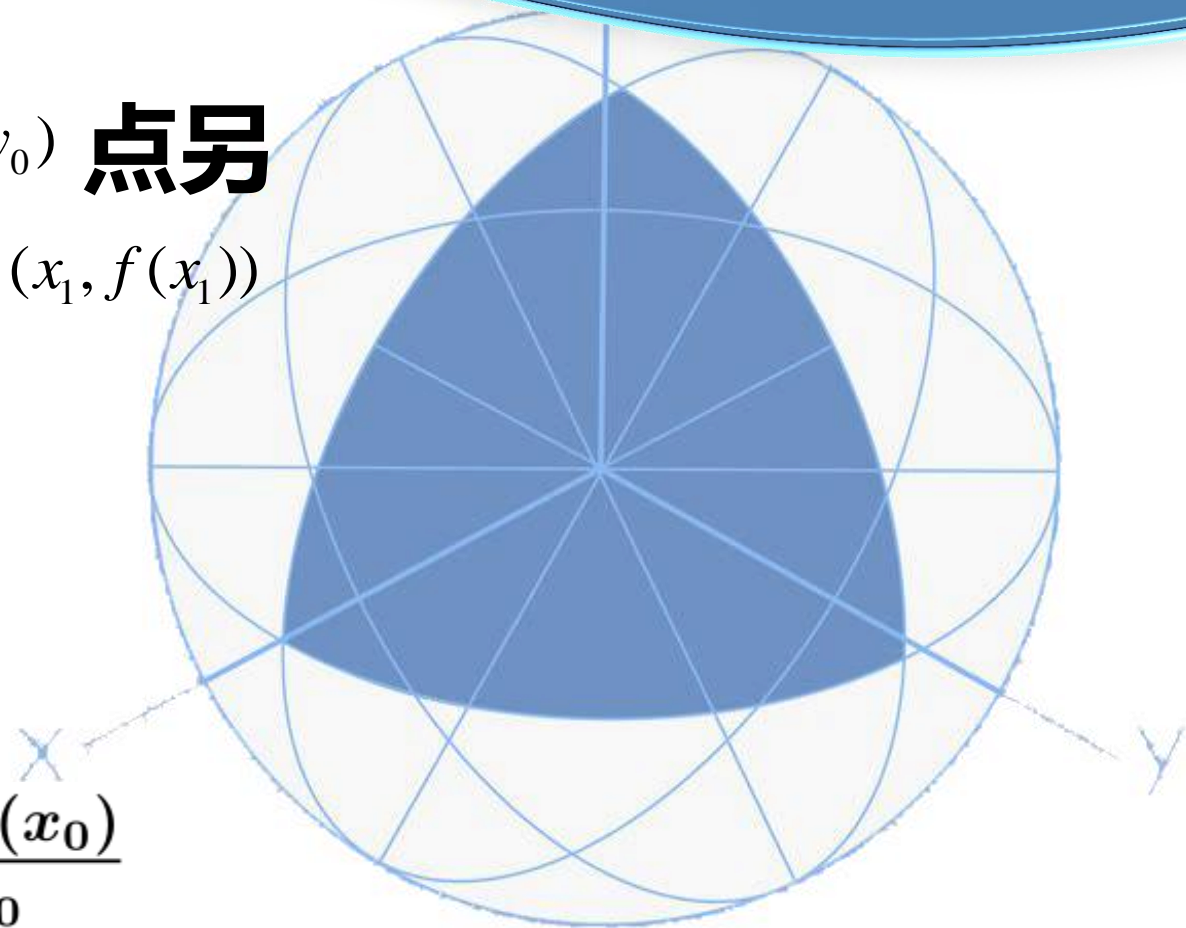
3.2.2 导数思想与建模方法

问题 2 的解答：在C上邻近 (x_0, y_0) 点另取一点 $(x_1, y_1) = (x_1, f(x_1))$ ，过 (x_0, y_0) 和 $(x_1, f(x_1))$ 作一割线 L' ，其方程式是：

$$\frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

其斜率是：

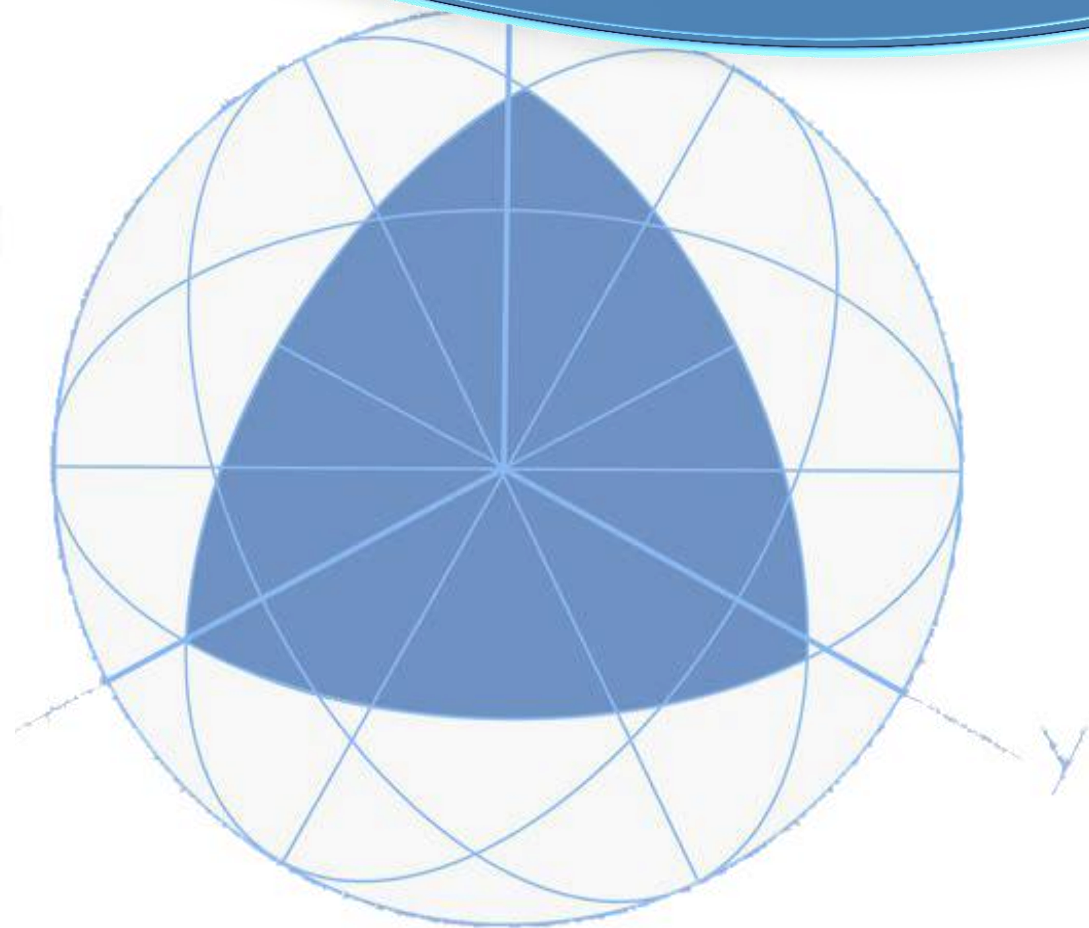
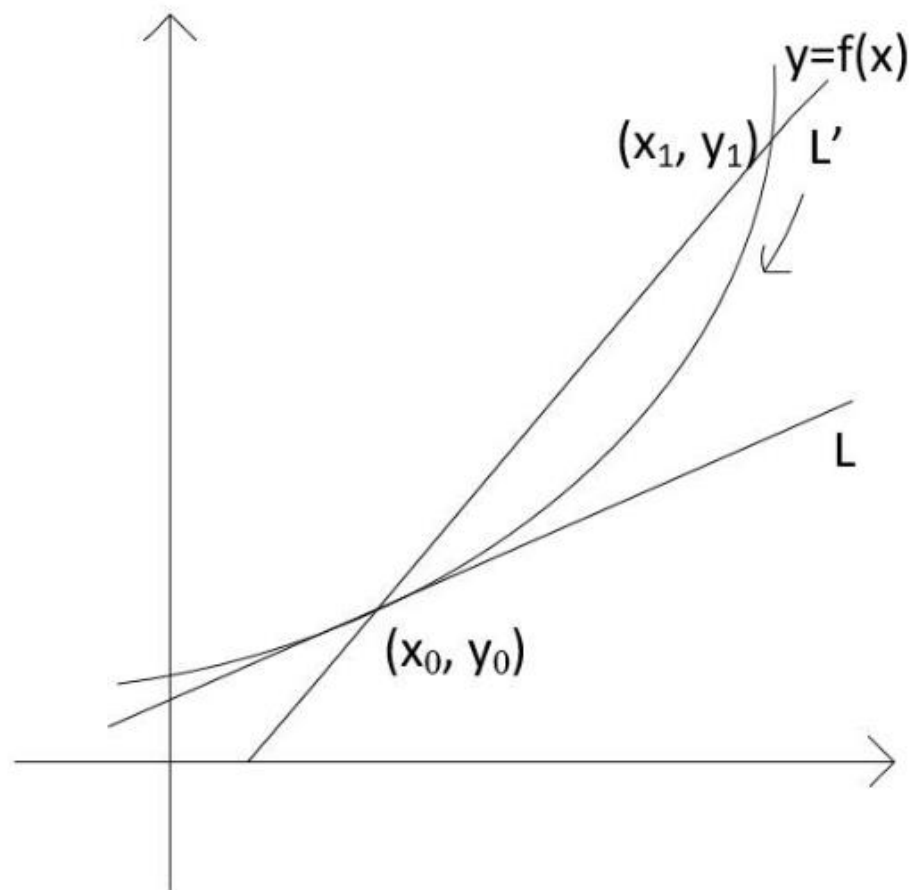
$$m = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$





3.2.2 导数思想与建模方法

图形如下：



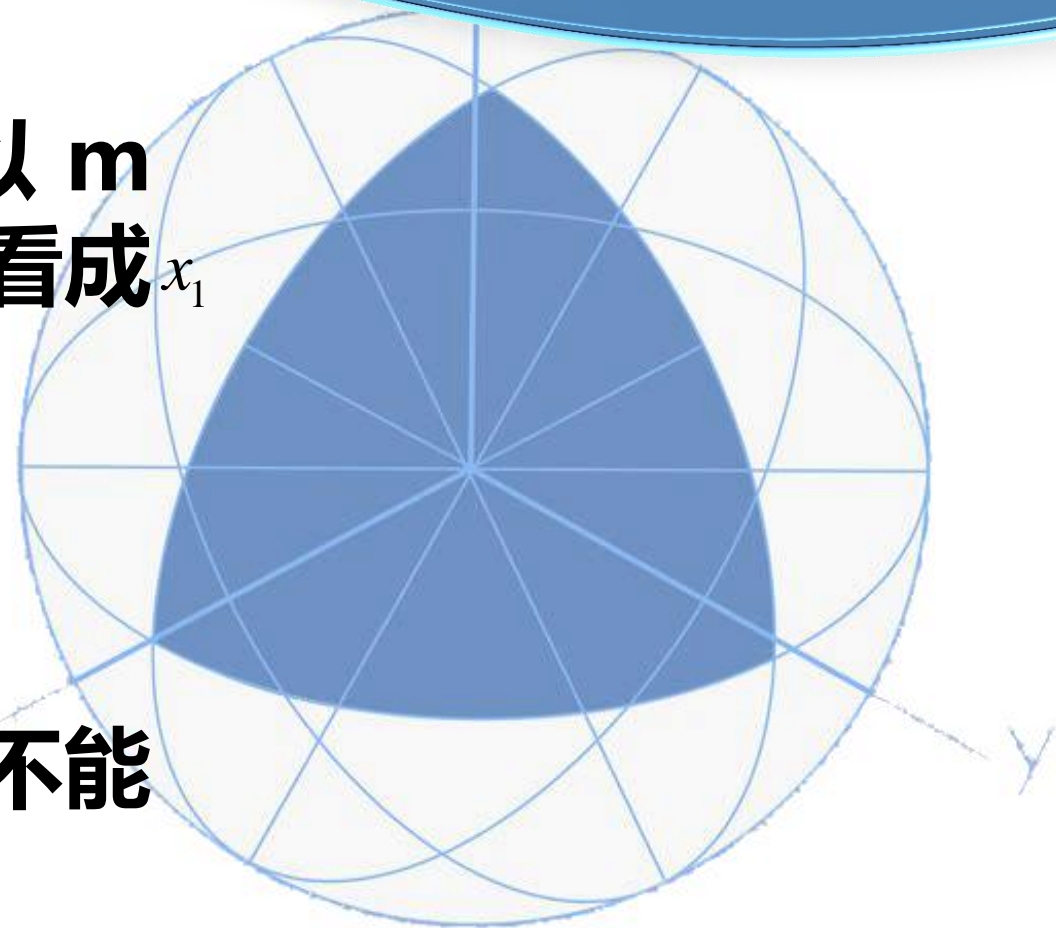


3.2.2 导数思想与建模方法

由于 L' 随 (x_1, y_1) 点的变动而变动，所以 m 也随 (x_1, y_1) 的变动而变动，即 m 应看成 x_1 的函数

$$m = m(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

这个函数在 x_0 点附近有定义，但 x_1 不能等于 x_0 。

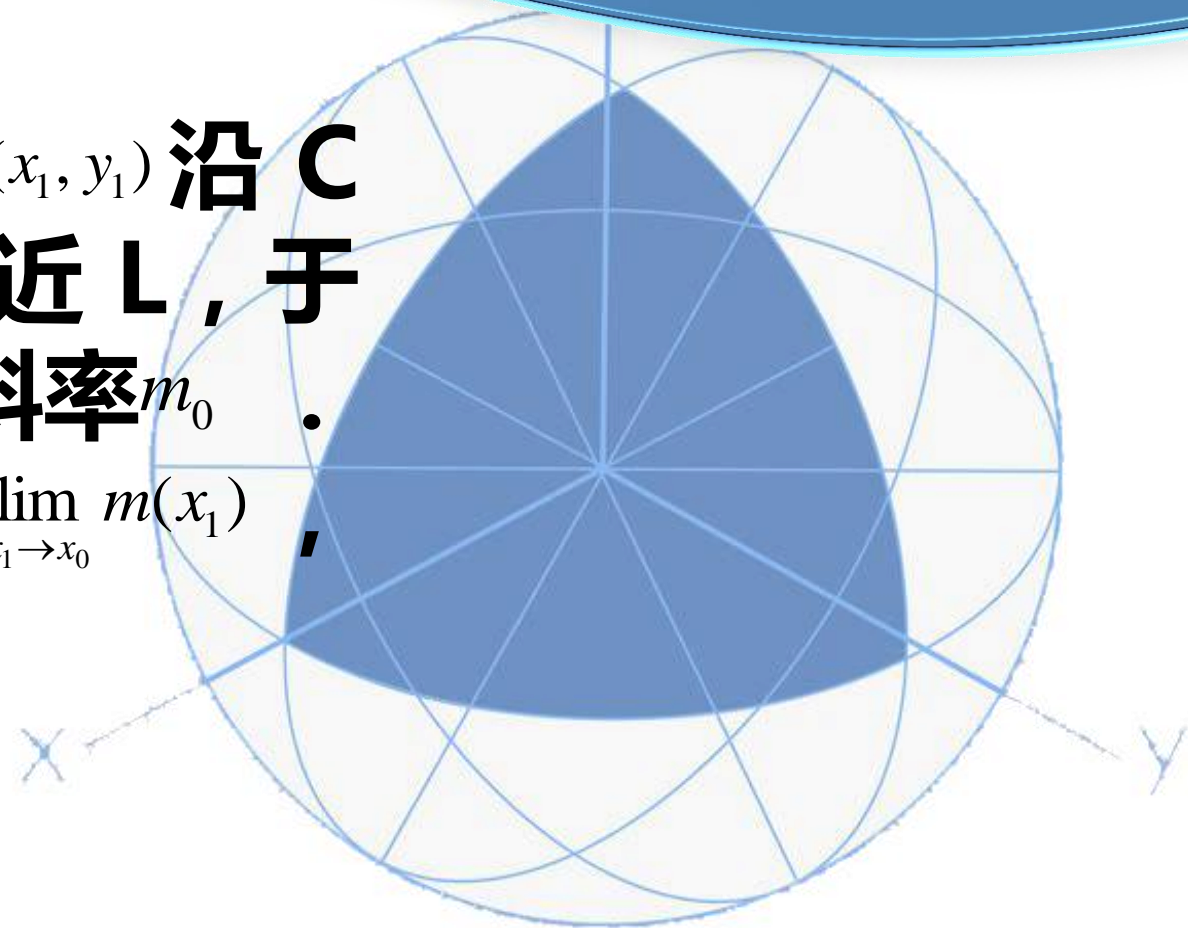




3.2.2 导数思想与建模方法

注意当 x_1 逐渐接近 x_0 , 从而使 (x_1, y_1) 沿 C 逐渐接近 (x_0, y_0) 时, L' 便逐渐接近 L , 于是 L' 的斜率 $m(x_1)$ 也就接近 L 的斜率 m_0 . 所以为了求得 m_0 , 应考虑极限 $\lim_{x_1 \rightarrow x_0} m(x_1)$, 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

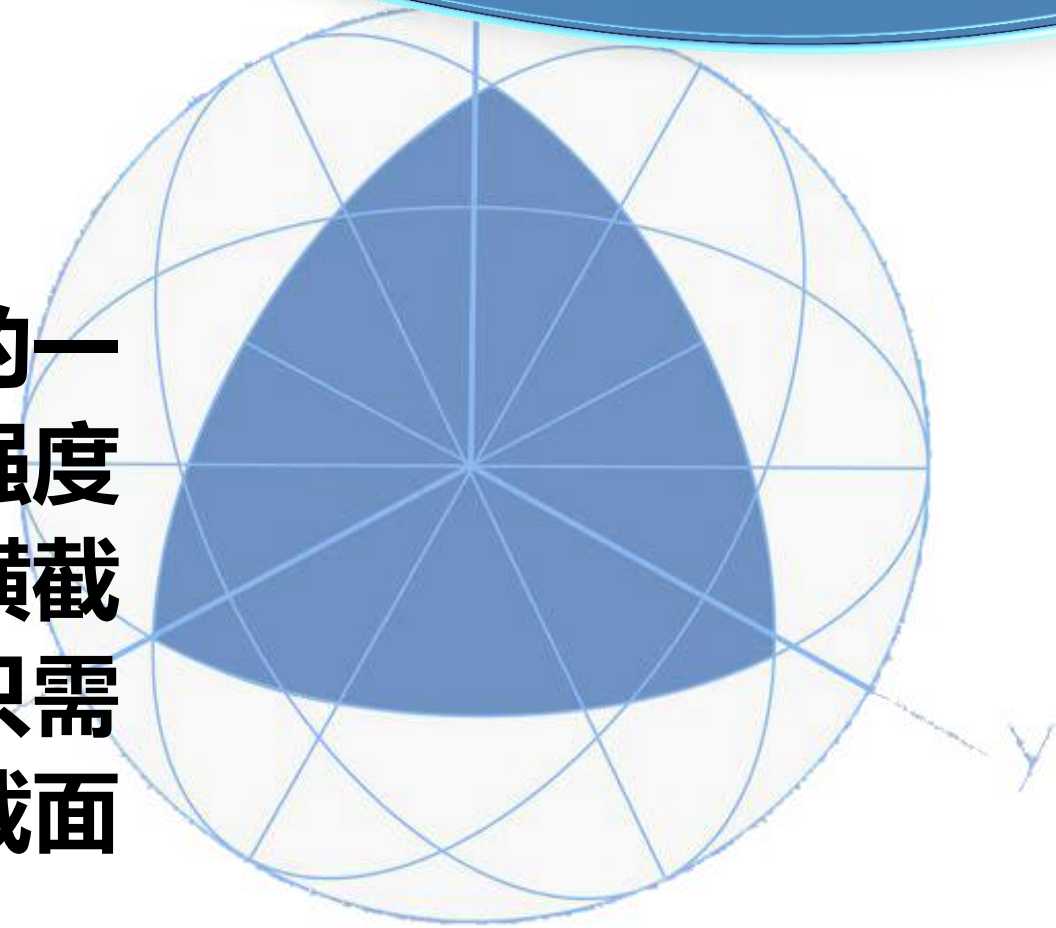




3.2.3 案例分析

案例一：非恒稳电流的电流强度

问题背景：电流强度是表示电流强弱的一个物理量。对于恒稳电流来说，电流强度就是单位时间内通过导体的某一固定横截面的电量。因而求电流强度很简单，只需计算任意一段时间内通过导体这一横截面的电量与这段时间长度的比值。



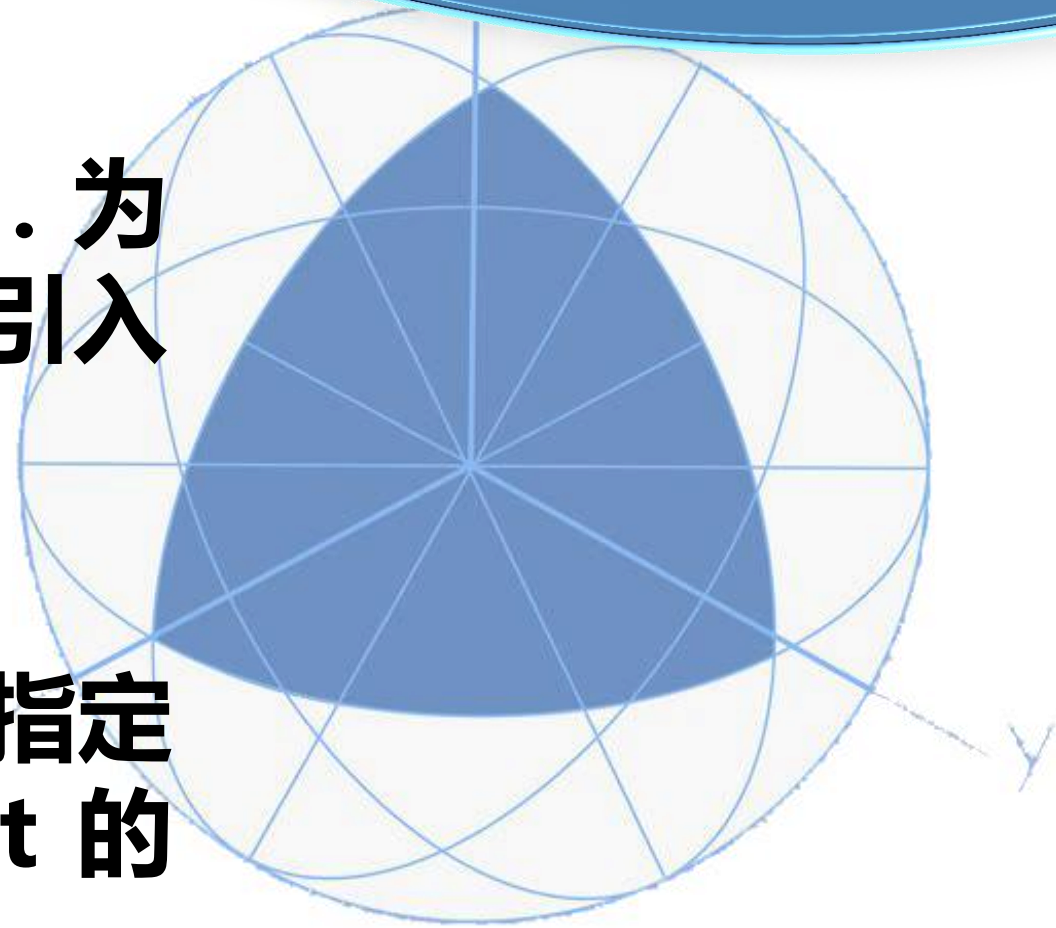


3.2.3 案例分析

但对于非恒稳电流，情况就不同了。为了刻画各个时刻电流的强弱，需要引入瞬时电流强度的概念。

【问题分析】

假设到某一时刻 t 为止，从导体的指定横截面流过的电量为 Q ，则 Q 是 t 的函数，可记为

$$Q = Q(t).$$




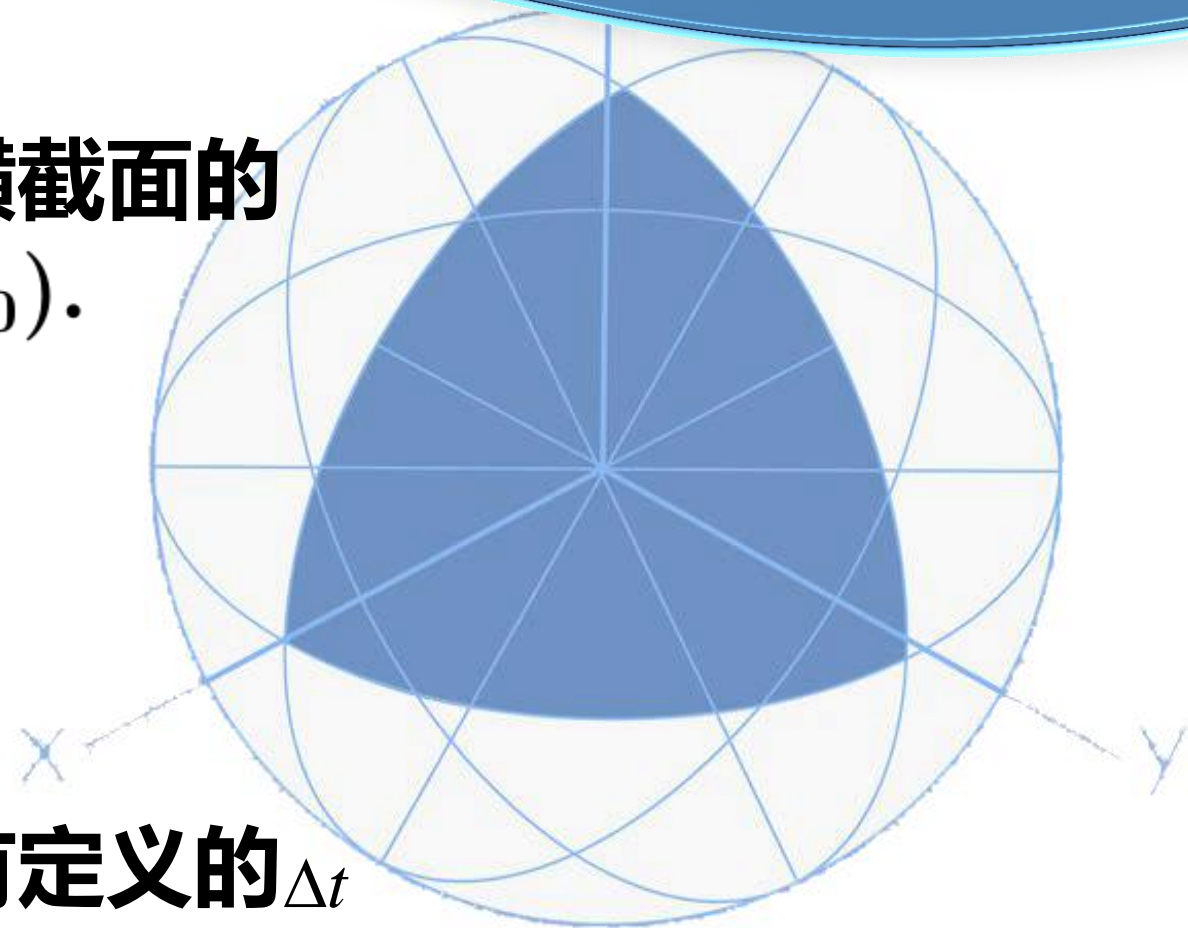
3.2.3 案例分析

于是从时刻 t_0 到 $t_0 + \Delta t$ 通过导体该横截面的电量是 $\Delta Q = Q(t_0 + \Delta t) - Q(t_0)$.

而这段时间内的平均电流强度为

$$\begin{aligned} f(\Delta t) &= \frac{\Delta Q}{\Delta t} \\ &= \frac{Q(t_0 + \Delta t) - Q(t_0)}{\Delta t} \end{aligned}$$

这是一个在 t_0 附近 (不含 t_0 点)有定义的 Δt 的函数.



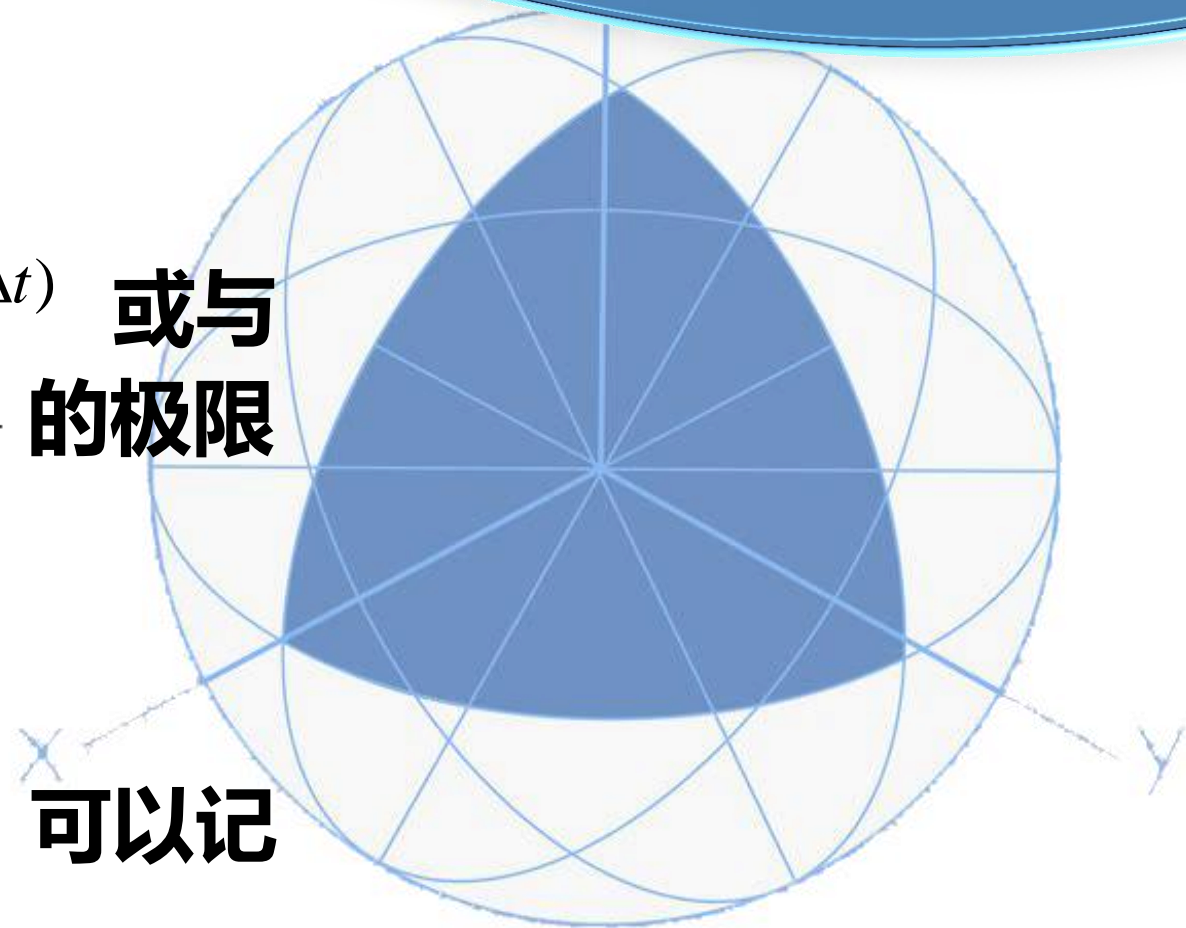


3.2.3 案例分析 【模型构建】

令 $\Delta t \rightarrow 0$, 考虑 $f(\Delta t)$ 的极限 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} f(\Delta t)$ 或与
之等效地考虑的函数 $g(t) = \frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0}$ 的极限

$$\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{Q(t) - Q(t_0)}{t - t_0}$$

便得到所谓 t_0 时刻的瞬时电流强度 , 可以记
之为 $I(t_0)$.





3.2.3 案例分析

案例二：人口学中的人口增长速率

问题背景：设函数 $p = p(t)$ 表示某个地区在 t 时刻的人口数目，那么在 $t + \Delta t$ 时刻的人口数目就是 $p(t + \Delta t)$ 了。求人口的增长速率，即：单位时间内的人口增长数。



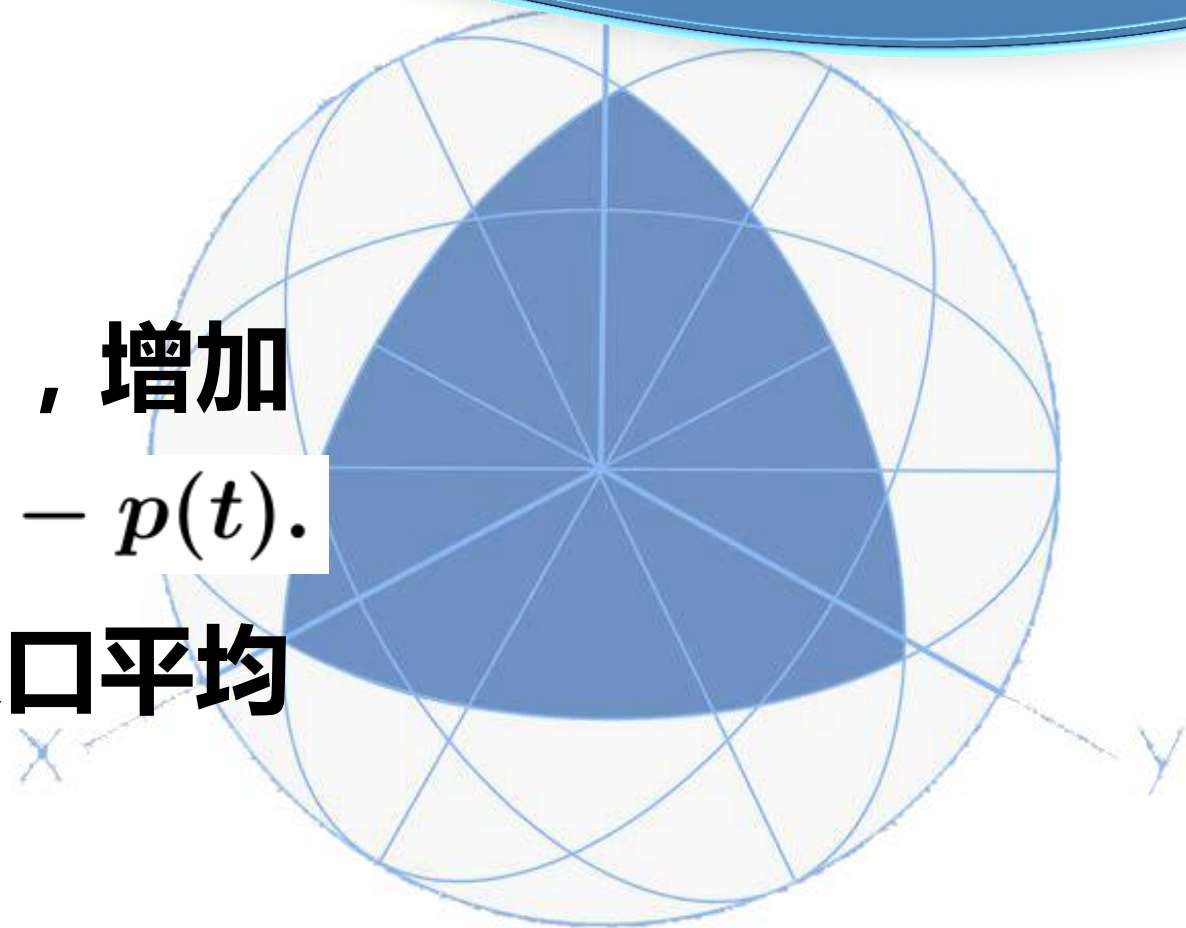
3.2.3 案例分析

【问题分析】

这个地区在从 t 到 $t + \Delta t$ 的时段中，增加的人口数应为 $\Delta p = p(t + \Delta t) - p(t)$.

于是在 $[t, t + \Delta t]$ 时段中该地区的人口平均增长速率为

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p(t + \Delta t) - p(t)}{\Delta t}.$$





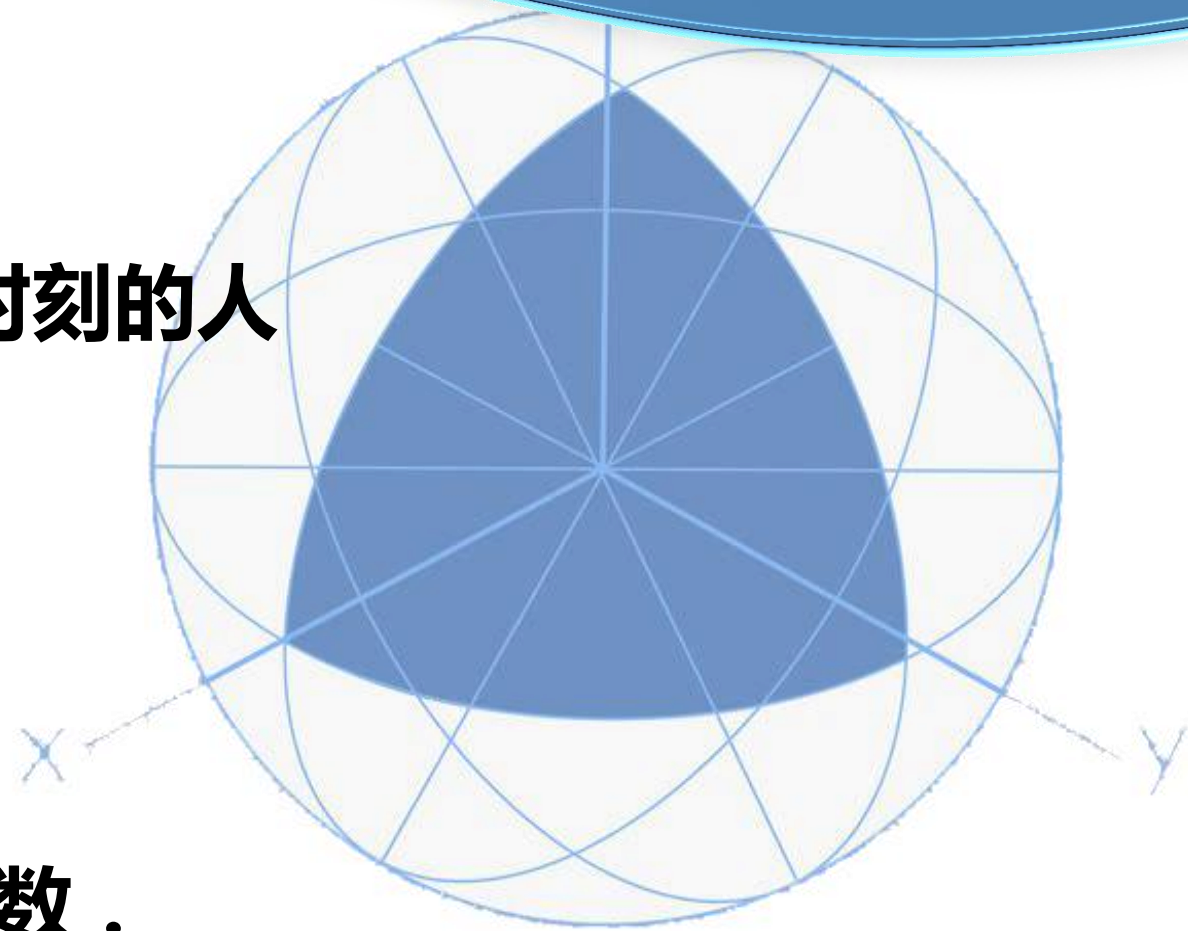
3.2.3 案例分析

【模型构建】

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时，便求得了该地区在 t 时刻的人口增长速率为

$$\begin{aligned} p'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p(t+\Delta t) - p(t)}{\Delta t} \end{aligned}$$

即人口增长速率是人口数量函数的导数。

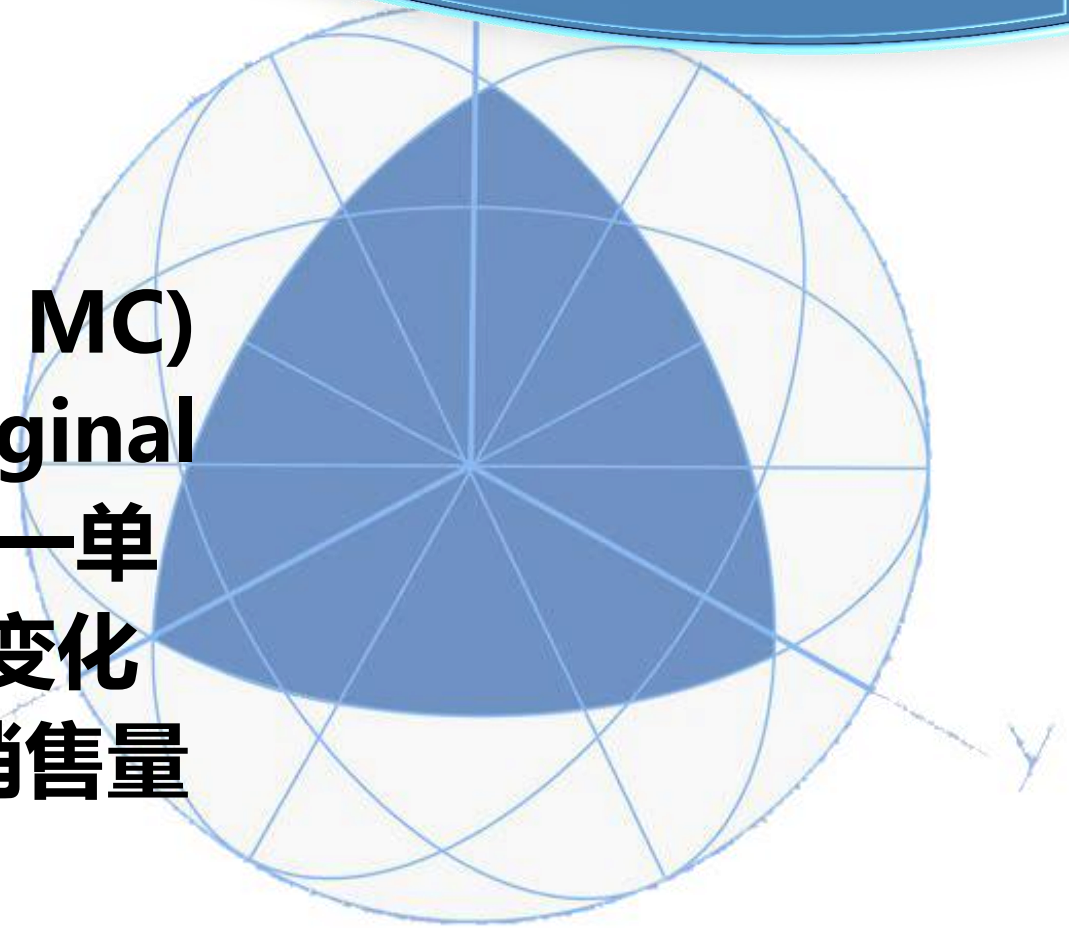




3.2.3 案例分析

案例三、边际分析

问题背景：边际成本 (Marginal cost , MC) 和边际收益 (Marginal Contribution(Revenue) , MR) . 增加一单位的产量(Output)随即而产生的总成本变化量即称为边际成本 . 增加一单位的额外销售量所引起的总收益的改变量称为边际收益 .



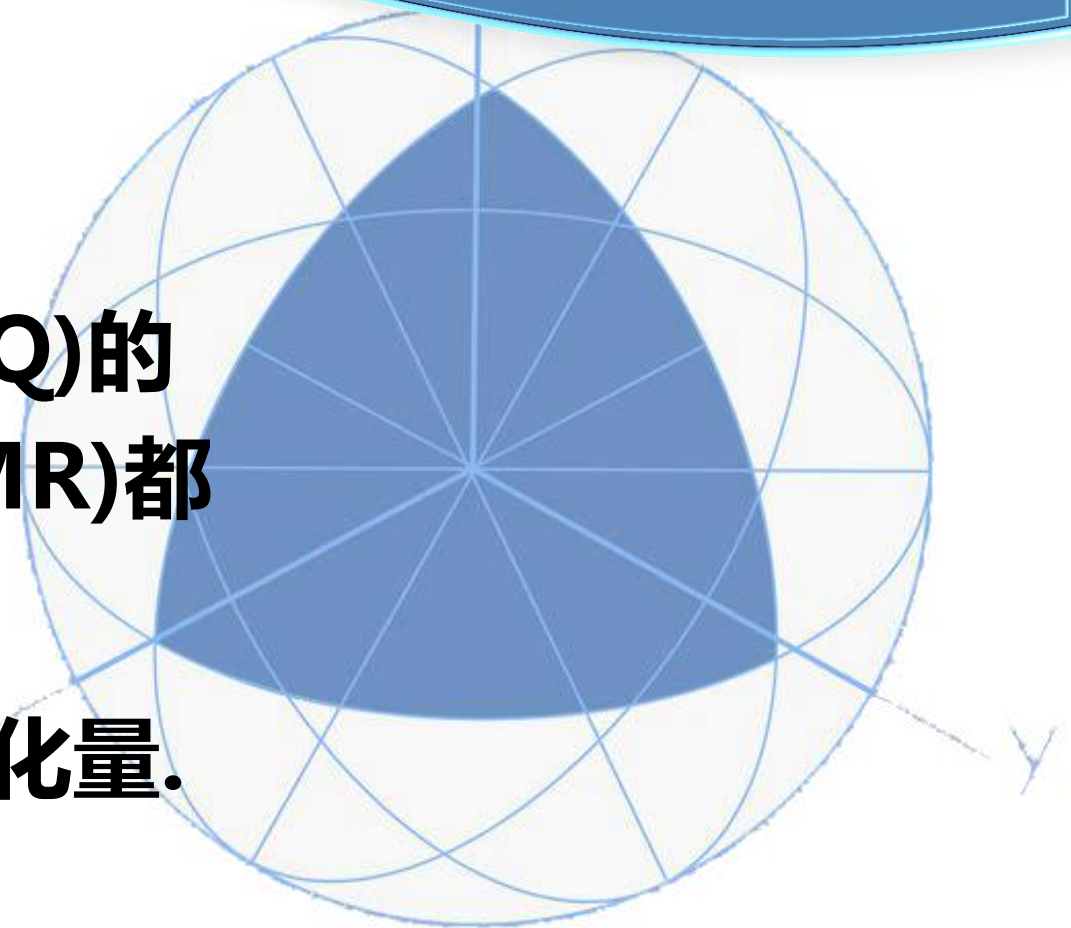


3.2.3 案例分析

【问题分析】

由定义得知总成本和总收益都是产量(Q)的函数，边际成本(MC)和边际收益 (MR)都可用数学描述：

边际成本 = 总成本的变化量 / 产量变化量.



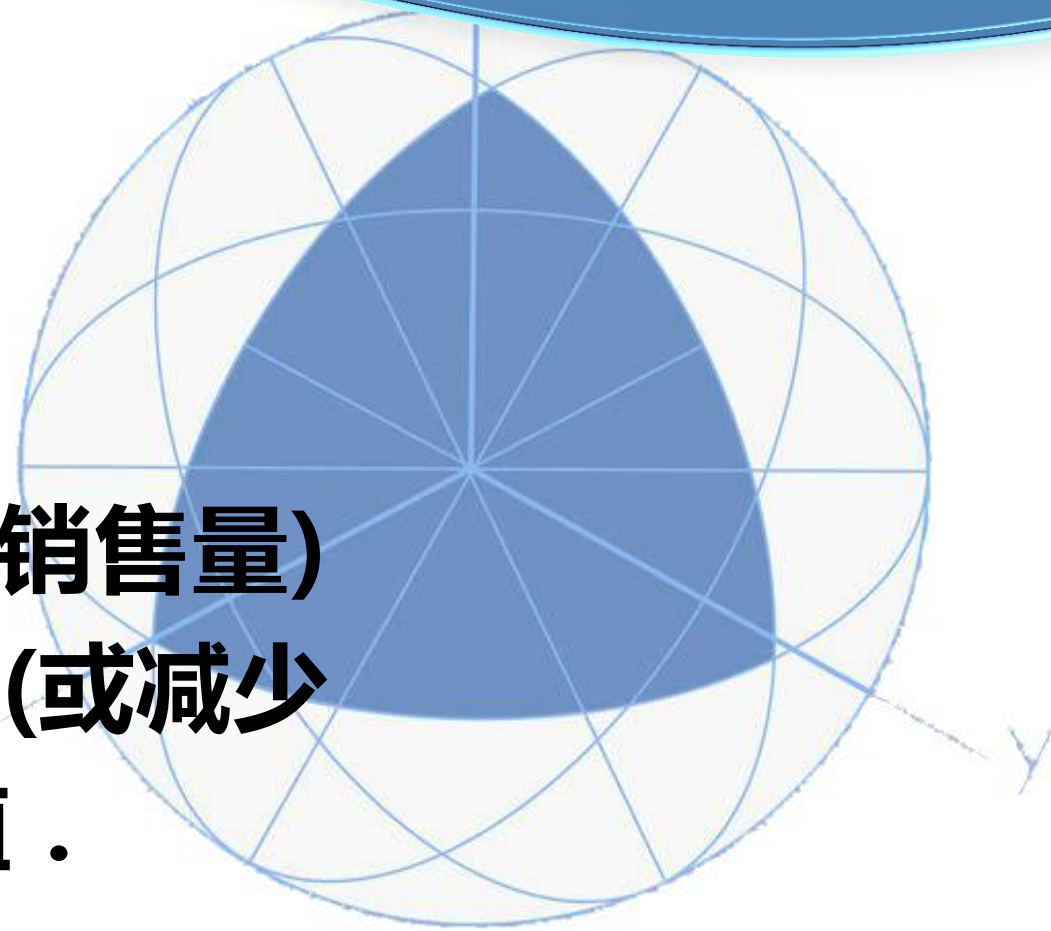


3.2.3 案例分析

【模型构建】

$$MC(Q) = \Delta TC(Q) / \Delta Q$$

经济学上，边际利润就是产量（或销售量）增加 1 单位时利润的相应增加量（或减少量）即 $\Delta x = 1$ ，亦即当 $\frac{\Delta L}{\Delta x}$ 时 ΔL 的值。



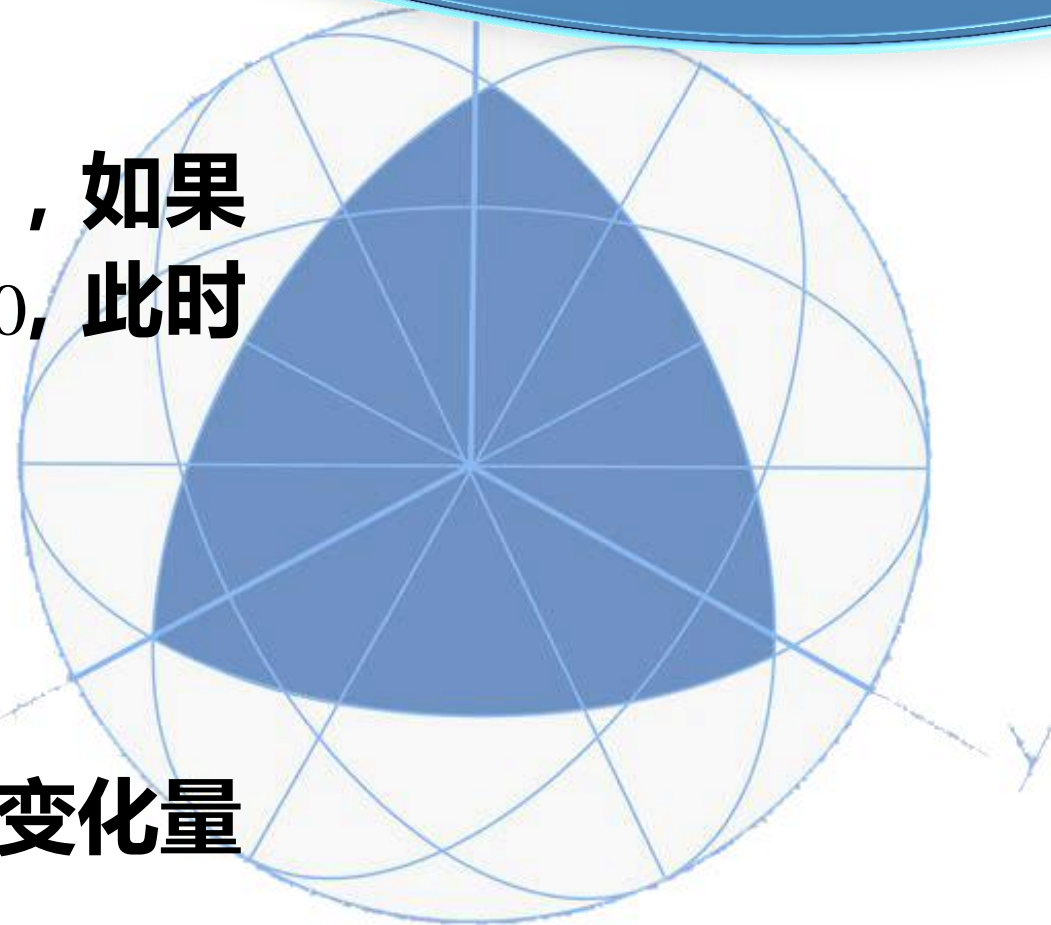


3.2.3 案例分析

在经济问题上, $\Delta x = 1$ 已是非常小的变化, 如果撇开实际问题, Δx 可以无穷小, 即 $\Delta x \rightarrow 0$, 此时, 由导数的定义有

$$MC(Q) = \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \frac{TC(Q)}{\Delta Q} = \frac{dTC}{dQ}$$

边际收益 (MR) = 总收益的变化量 / 产量变化量





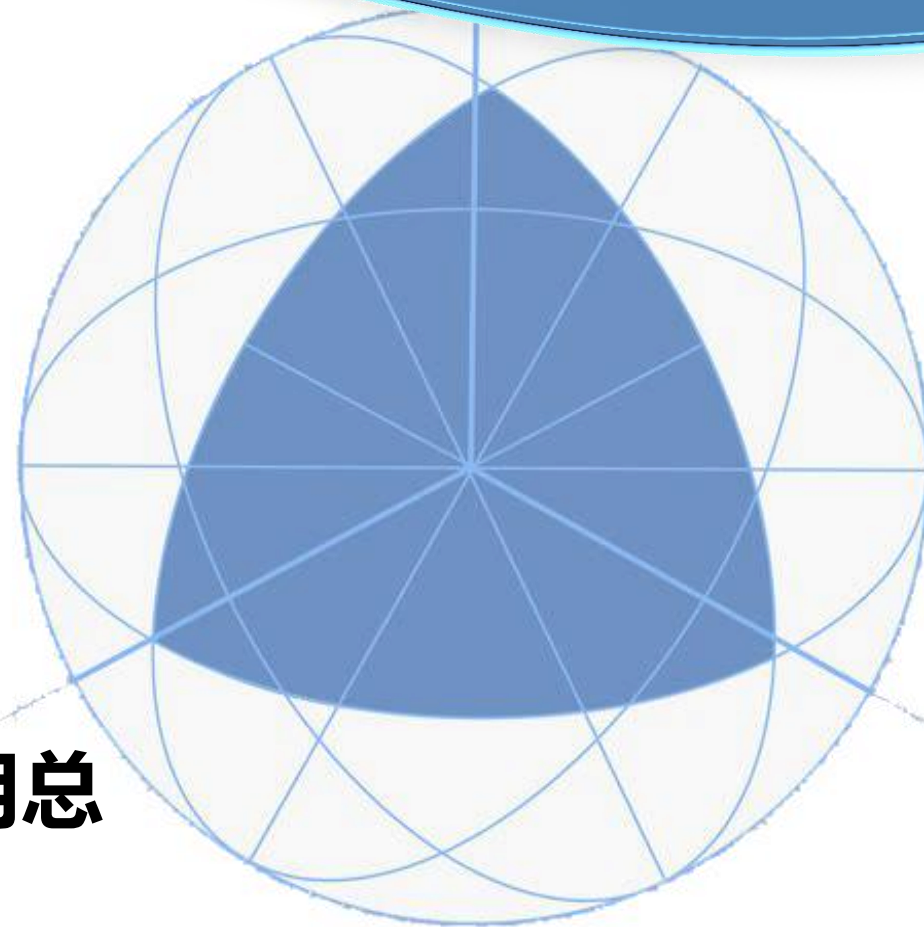
3.2.3 案例分析 用数学模型表示

$$MR(Q) = \Delta TR(Q) / \Delta Q$$

或

$$MR(Q) = \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \frac{TR(Q)}{\Delta Q} = \frac{dTR}{dQ}$$

总之，任何经济函数的边际概念都可以用总函数的导数来表示。





廈門大學
XIAMEN UNIVERSITY

Part 3

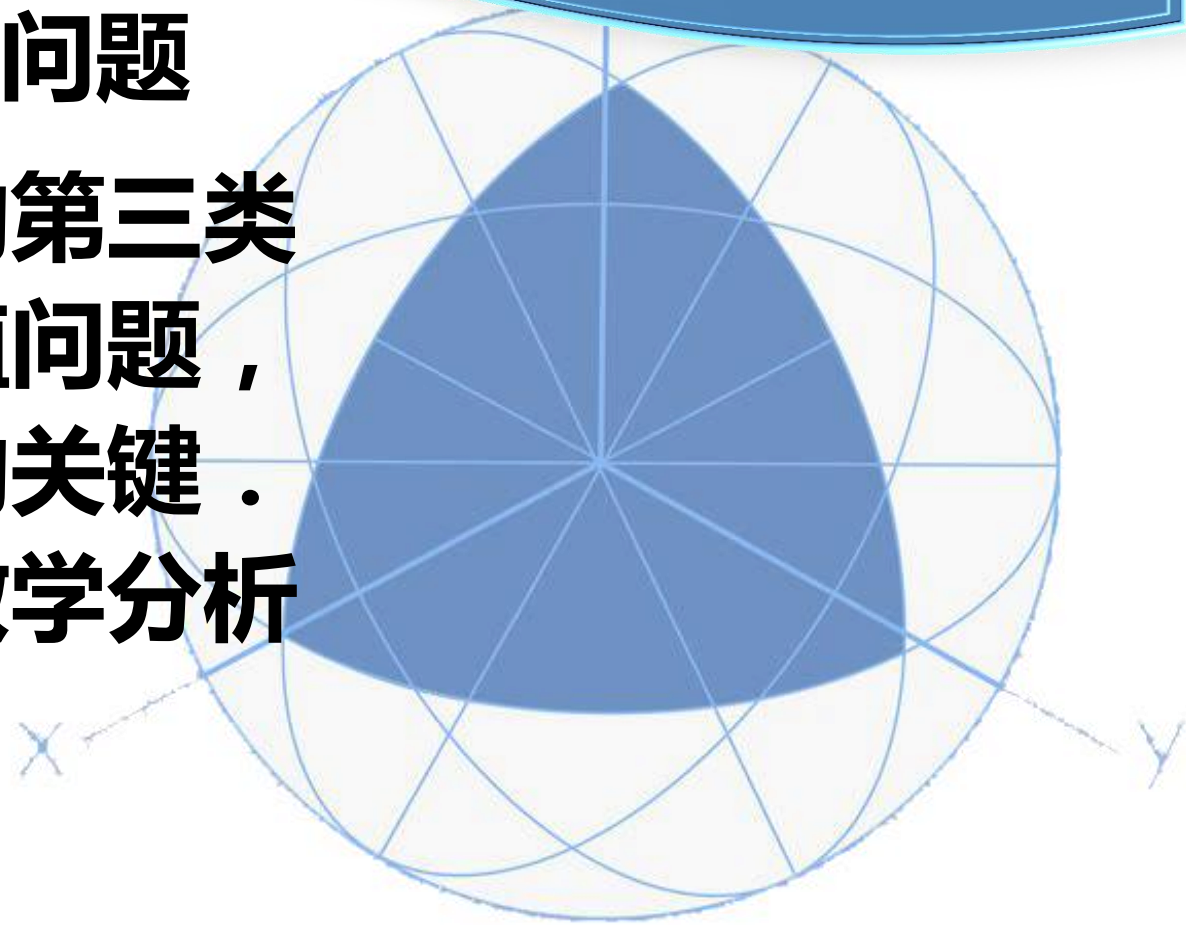
初等连续优化方法





3.3.1 催生优化思想产生的源头问题

催生微积分产生的四类问题中的第三类问题是求函数的最大值和最小值问题，这正是产生初等连续优化问题的关键。实际上这是我们在高等数学或数学分析中学过的求函数的极值问题。

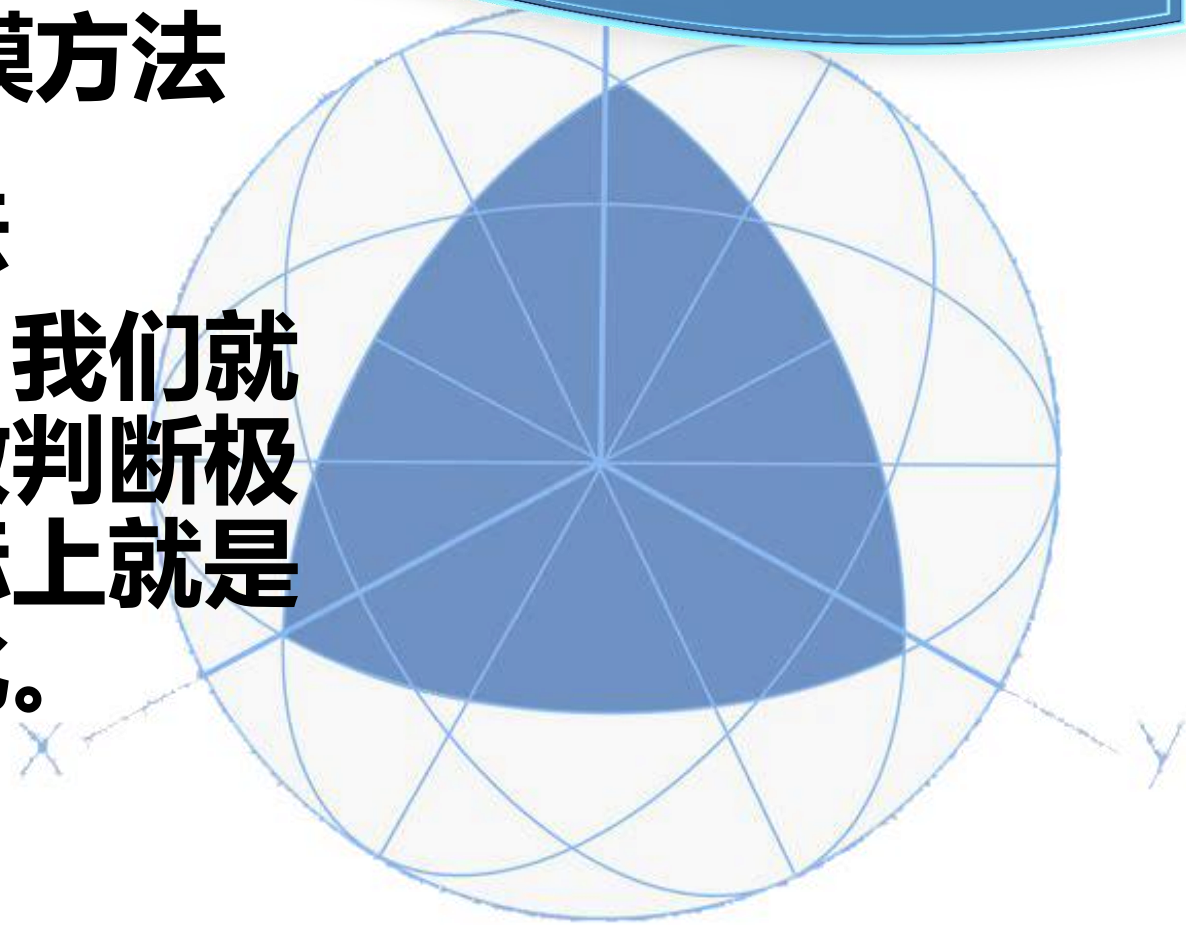




3.3.2初等连续优化思想与建模方法

一、无约束优化思想与建模方法

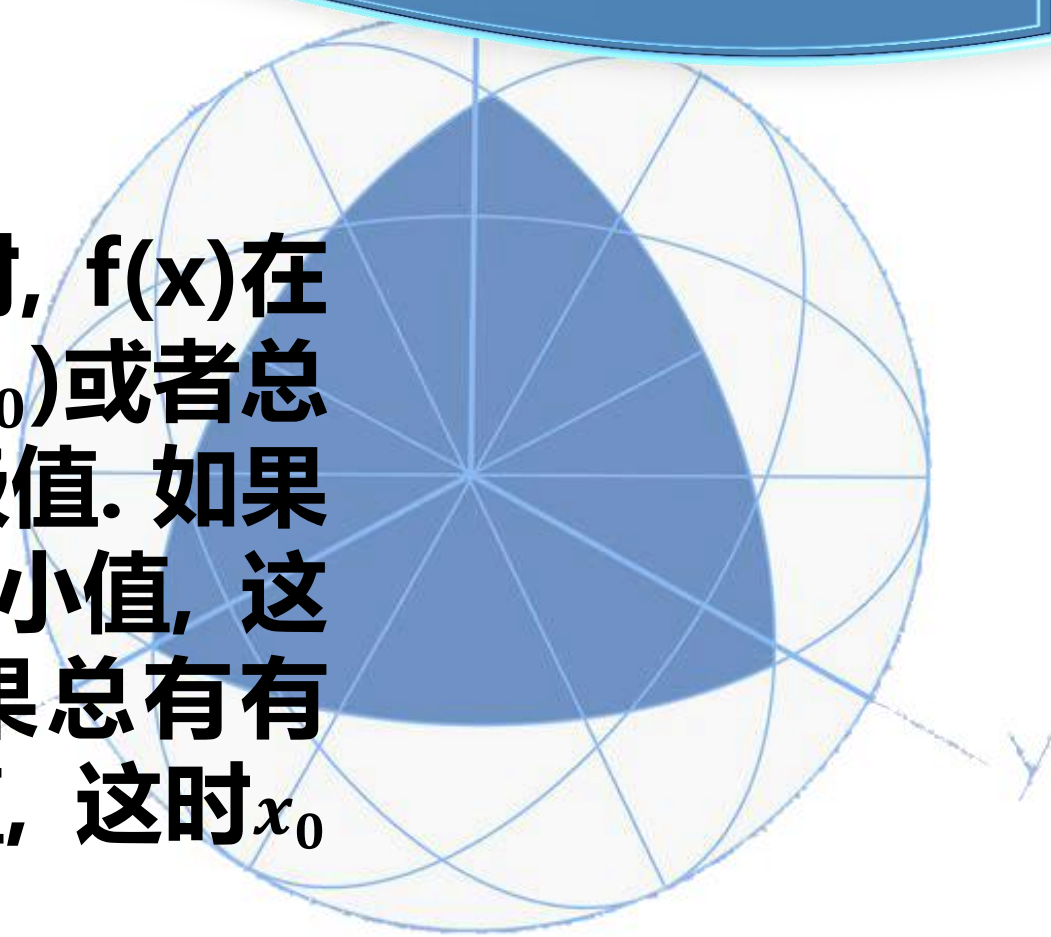
一般来说，一旦函数建立起来，我们就可以应用高等数学中学过的导数判断极值的方法。因此建模的思想实际上就是对实际问题找准对那个变量优化。





1、一元函数极值问题

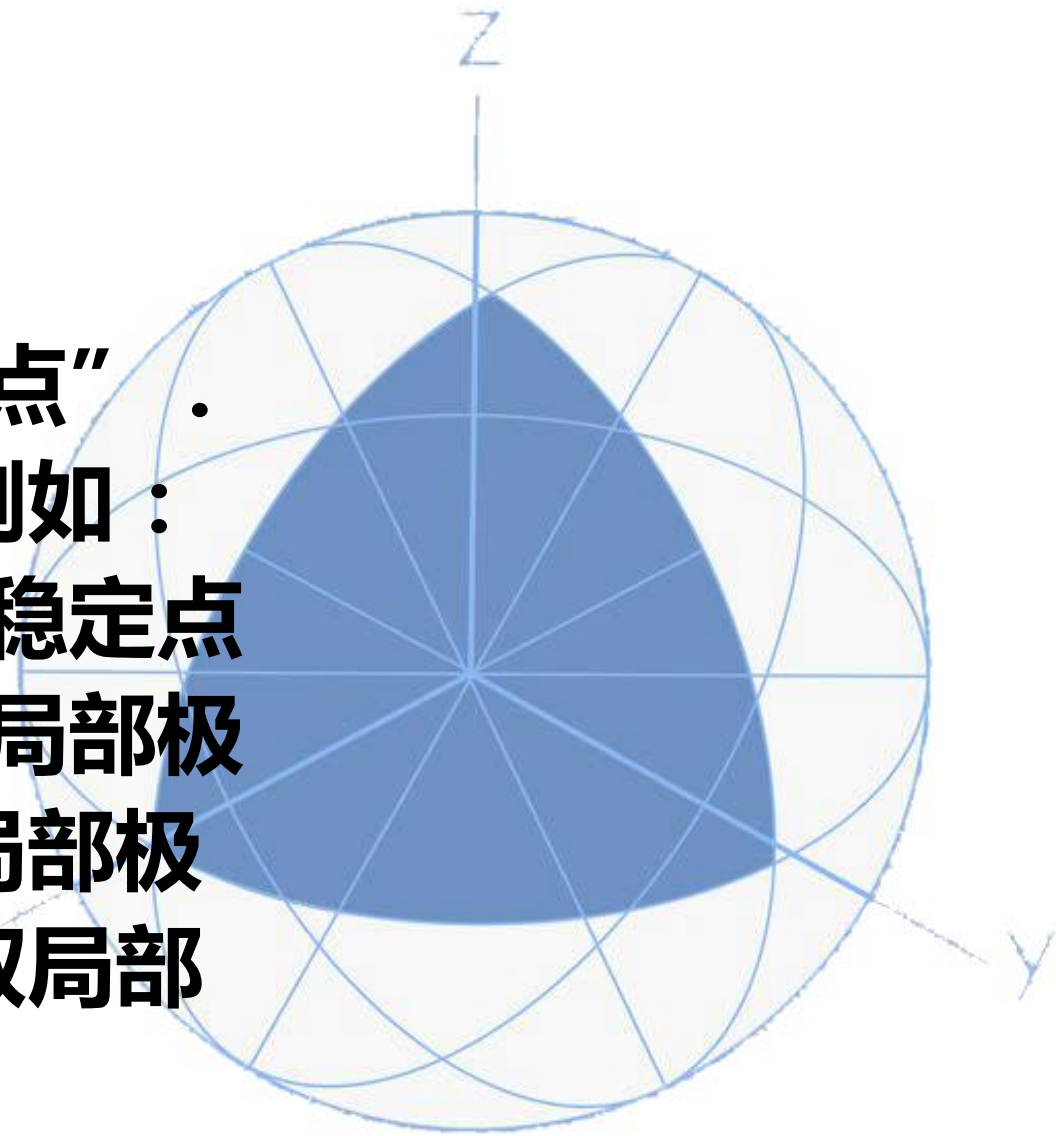
定义 如果存在 $\delta > 0$, 使当 $|x - x_0| < \delta$ 时, $f(x)$ 在点 x 都有定义, 并且或者总有 $f(x) \geq f(x_0)$ 或者总有 $f(x) \leq f(x_0)$, 称函数 $f(x)$ 在点 x_0 取极值. 如果总有 $f(x) \geq f(x_0)$, 则说 $f(x)$ 在 x_0 点取极小值, 这时 x_0 就称为 $f(x)$ 的极小值点. 如果总有 $f(x) \leq f(x_0)$, 则说 $f(x)$ 在 x_0 点取极大值, 这时 x_0 就称为 $f(x)$ 的极大值点.





$$f'(x) = 0$$

称 $f'(x) = 0$ 的点为 “驻点” 或 “稳定点” .
函数在稳定点上不一定取局部极值, 例如:
函数 $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, 显然只有一个稳定点
0, 但是函数 $f(x) = x^3$ 在点 0 处并不取局部极
值。那么函数在什么样的稳定点上取局部极
值呢? 如果取局部极值的话, 究竟是取局部
极大值还是局部极小值呢?

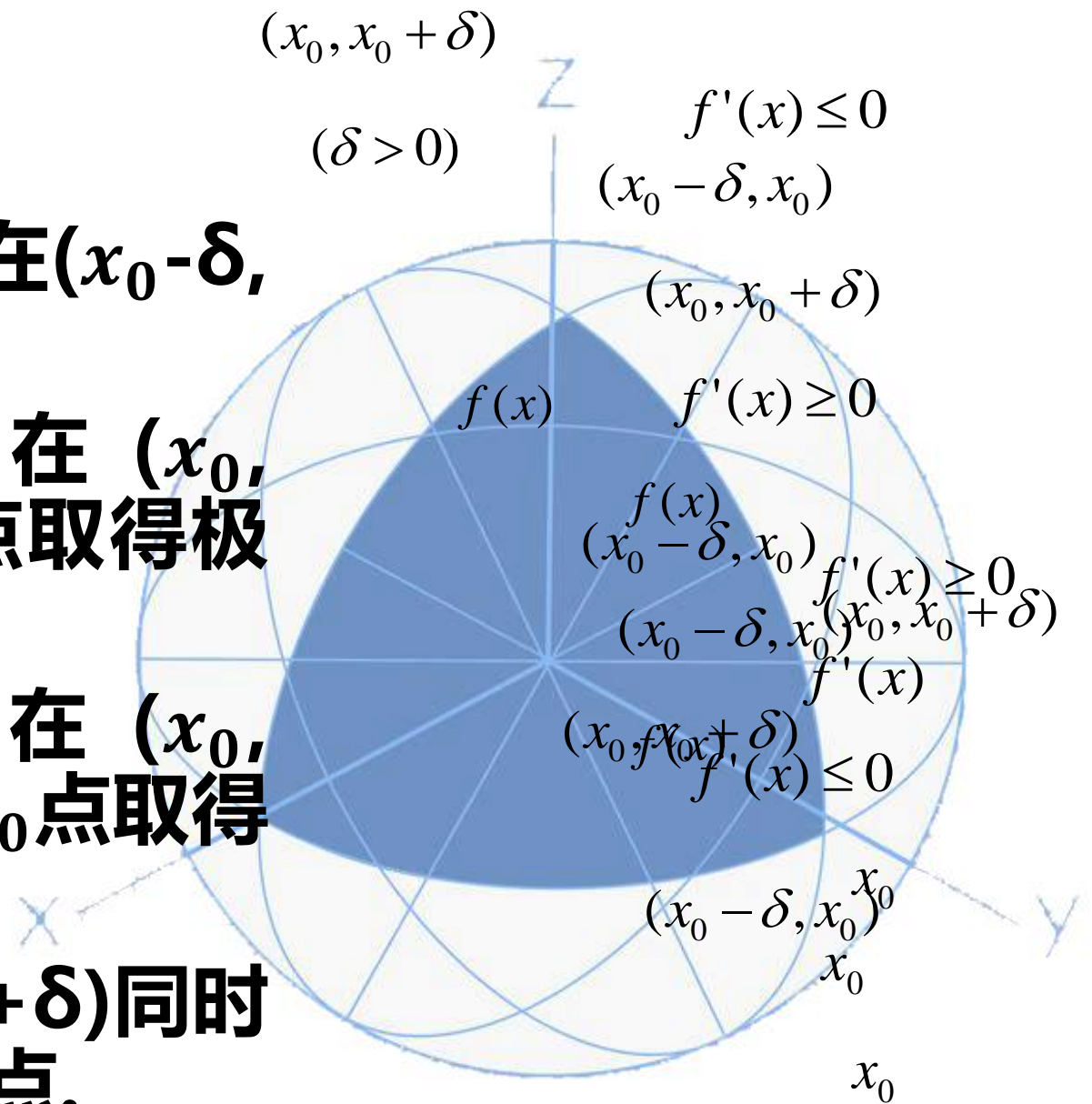


第一判别法 设 $f(x)$ 在 x_0 点连续, 在 $(x_0-\delta, x_0)$ 和 $(x_0, x_0+\delta)$ 可导($\delta>0$), 则

(1)若在 $(x_0-\delta, x_0)$ 内 $f'(x) \leq 0$, 在 $(x_0, x_0+\delta)$ 内 $f'(x) \geq 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 点取得极小值;

(2)若在 $(x_0-\delta, x_0)$ 内 $f'(x) \geq 0$, 在 $(x_0, x_0+\delta)$ 内 $f'(x) \leq 0$, 则 $f(x)$ 在 x_0 点取得极大值;

(3)若 $f'(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0)$ 和 $(x_0, x_0+\delta)$ 同时为正或同时为负, 则 x_0 点不是极值点.

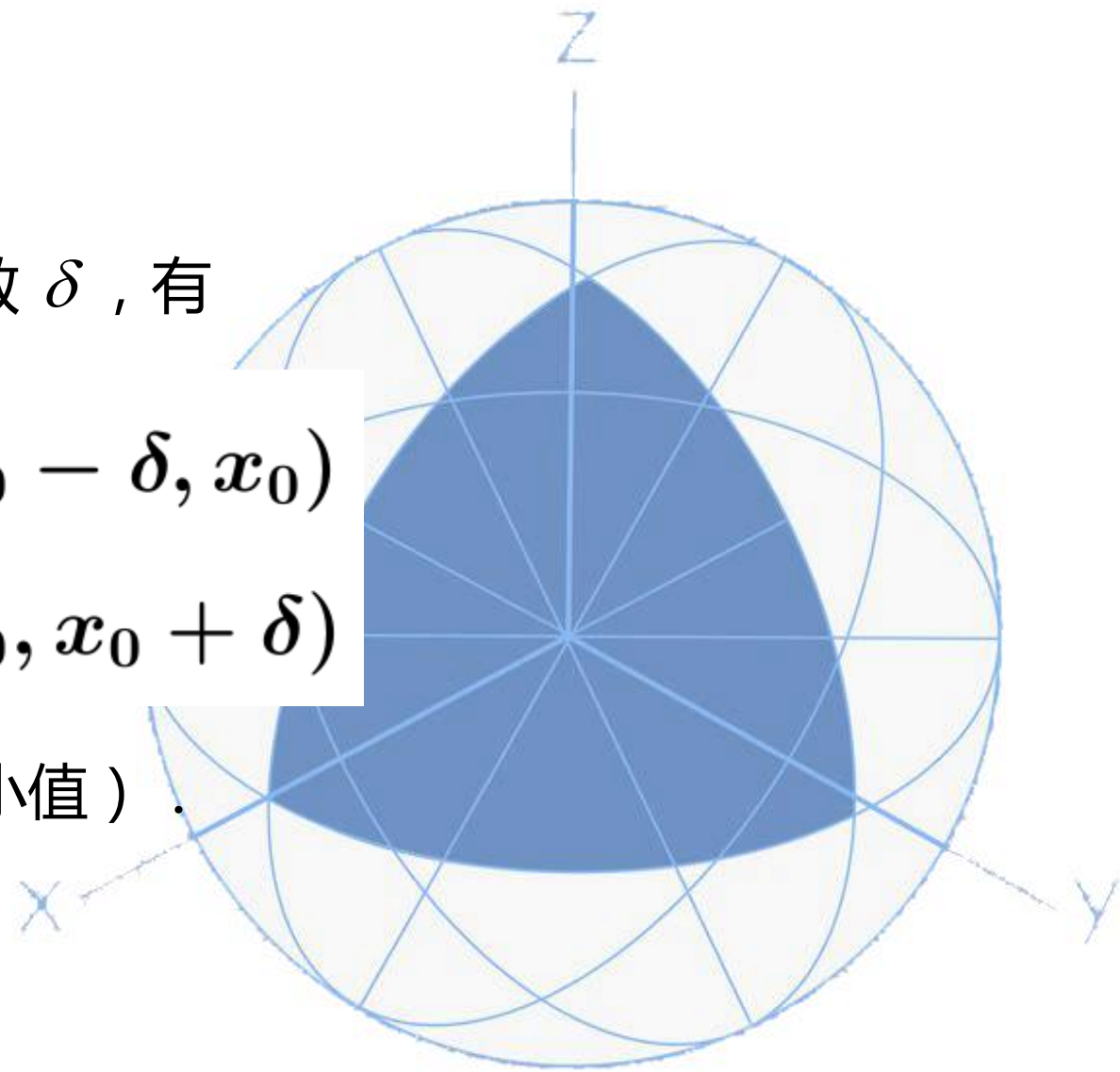




若函数 $f(x)$ 可导, 且 $f'(x_0) = 0$, 存在一个正数 δ , 有

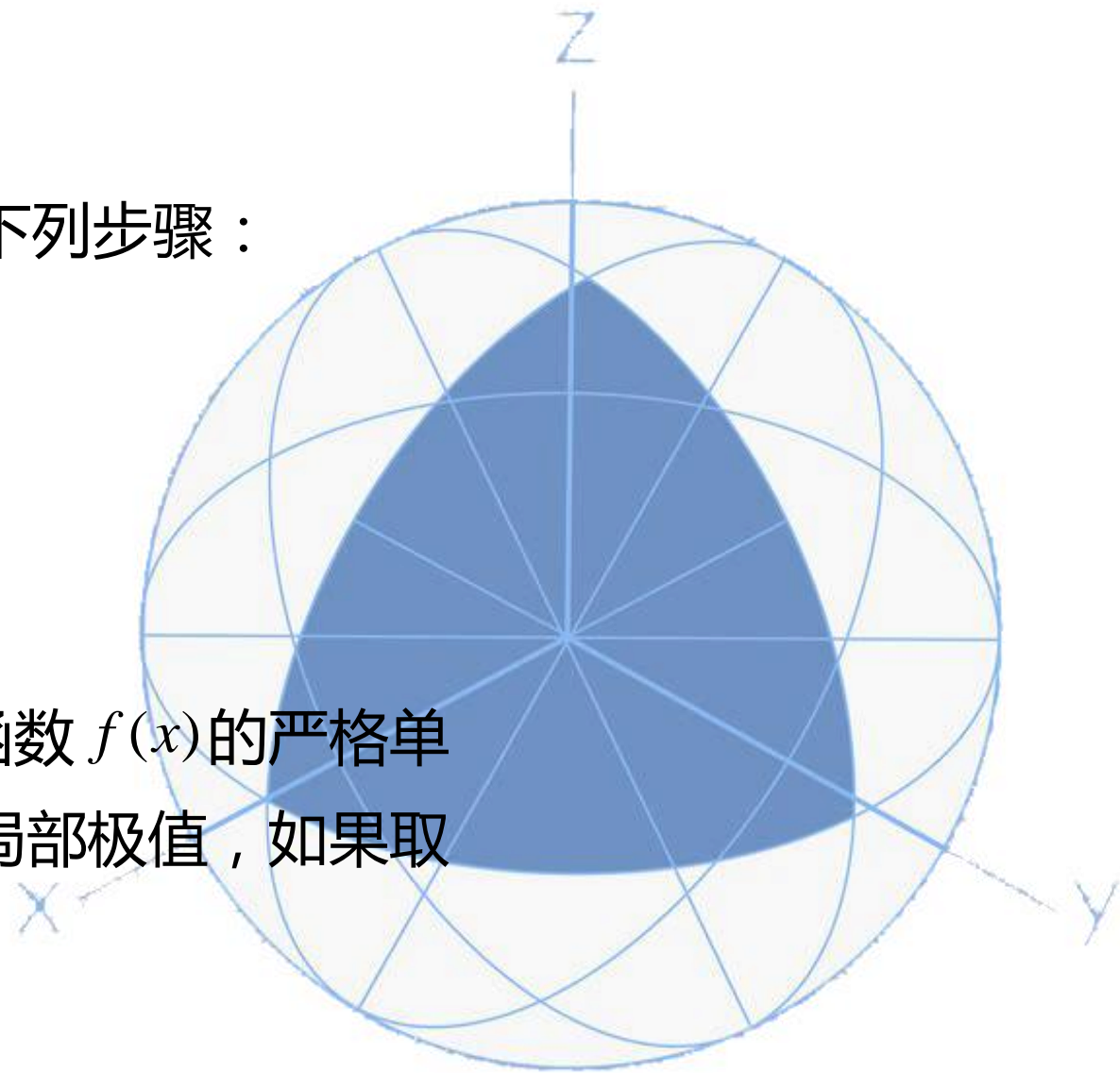
$$f'(x) \begin{cases} > 0 (\text{或} < 0), & \text{当 } x \in (x_0 - \delta, x_0) \\ < 0 (\text{或} > 0), & \text{当 } x \in (x_0, x_0 + \delta) \end{cases}$$

则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取局部极大值 (或局部极小值) .



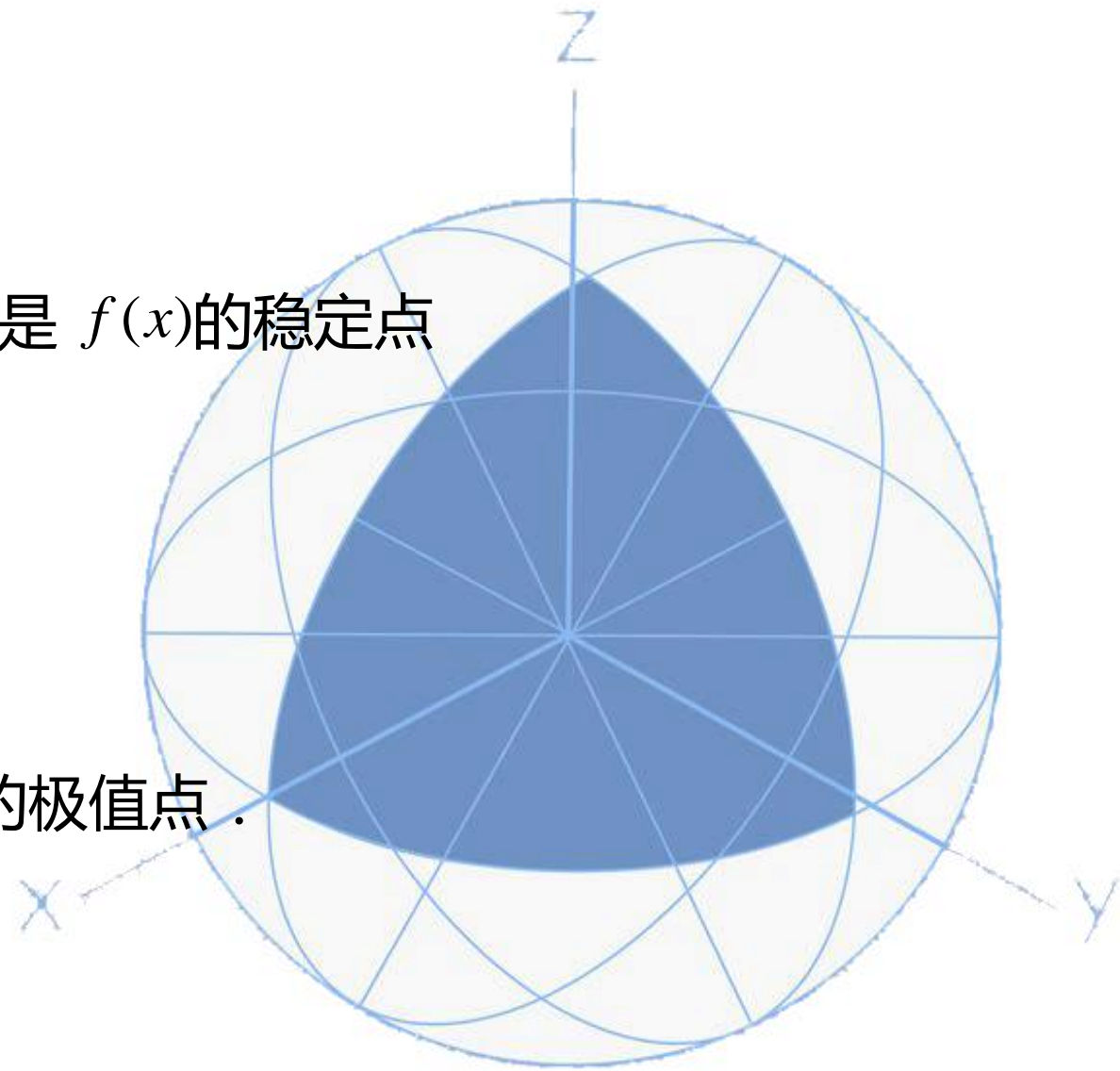
综上所述，求可导函数 $f(x)$ 的局部极值，应按下列步骤：

- (1) 确定函数 $f(x)$ 的定义域；
- (2) 求 $f'(x) = 0$ 的解，即稳定点；
- (3) 用稳定点将定义域分成若干个开区间；
- (4) 根据 $f'(x)$ 在每个开区间上的符号，可确定函数 $f(x)$ 的严格单调性，并可判别函数 $f(x)$ 在稳定点 x_0 是否取局部极值，如果取局部极值，是取极大值还是极小值。



第二判别法 若 $f(x)$ 在 x_0 点有二阶导数，且 x_0 是 $f(x)$ 的稳定点，则

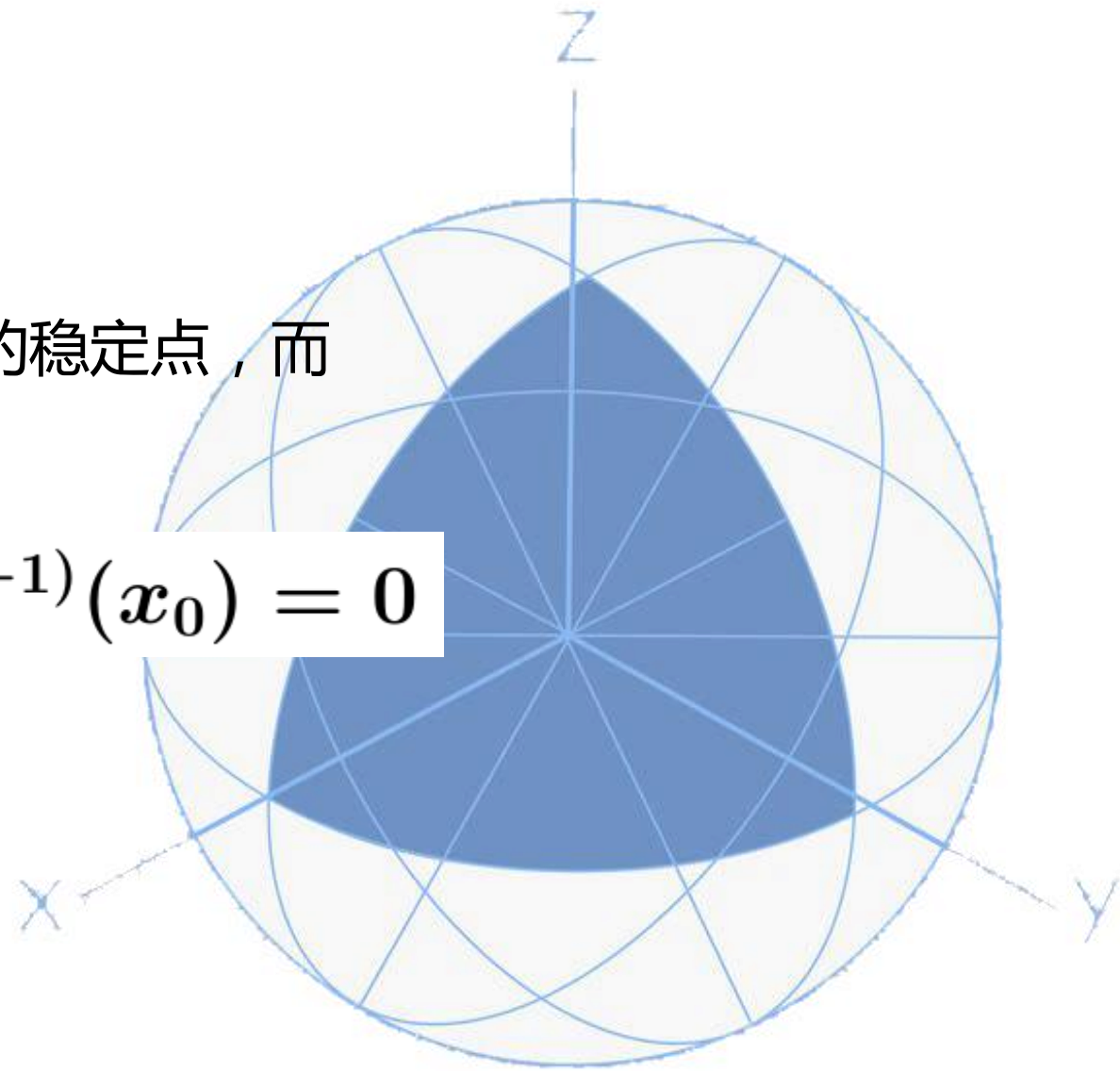
- (1) 若 $f''(x_0) < 0$ ，则 x_0 是 $f(x)$ 的极大值点；
- (2) 若 $f''(x_0) > 0$ ，则 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点；
- (3) 若 $f''(x_0) = 0$ ，则 x_0 可能是也可能不是 $f(x)$ 的极值点。



若函数 $f(x)$ 在 x_0 存在 n 阶的导数， x_0 是 $f(x)$ 的稳定点，而
 $f'(x_0)=0$ 且

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

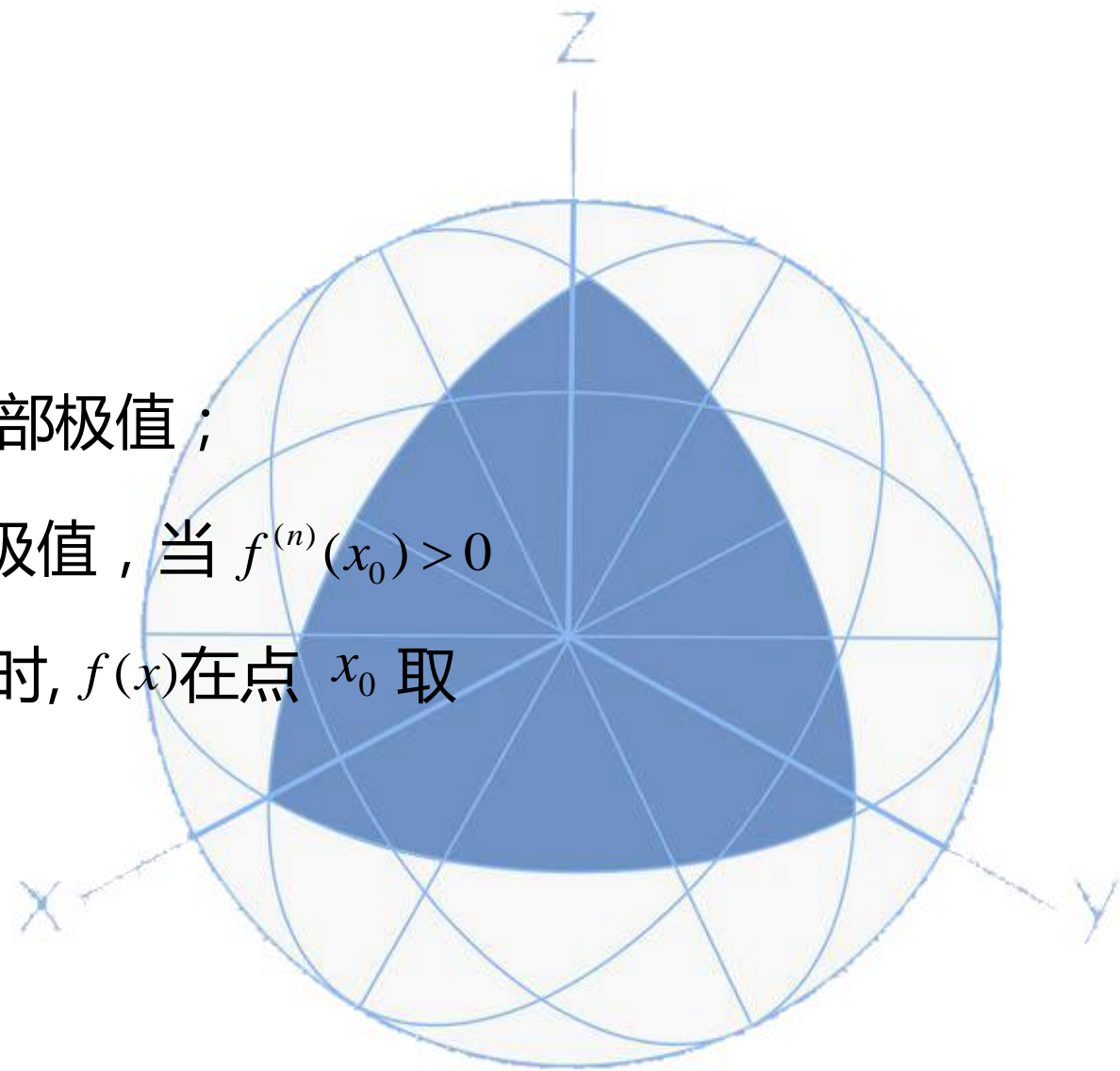
而 $f^{(n)}(x_0) \neq 0$.



则

(1) 当 n 是奇数时, 则函数 $f(x_0)$ 在点 x_0 不取局部极值;

(2) 当 n 是偶数时, 则函数 $f(x_0)$ 在点 x_0 取局部极值, 当 $f^{(n)}(x_0) > 0$ 时, $f(x)$ 在点 x_0 取局部极小值; 当 $f^{(n)}(x_0) < 0$ 时, $f(x)$ 在点 x_0 取局部极大值.

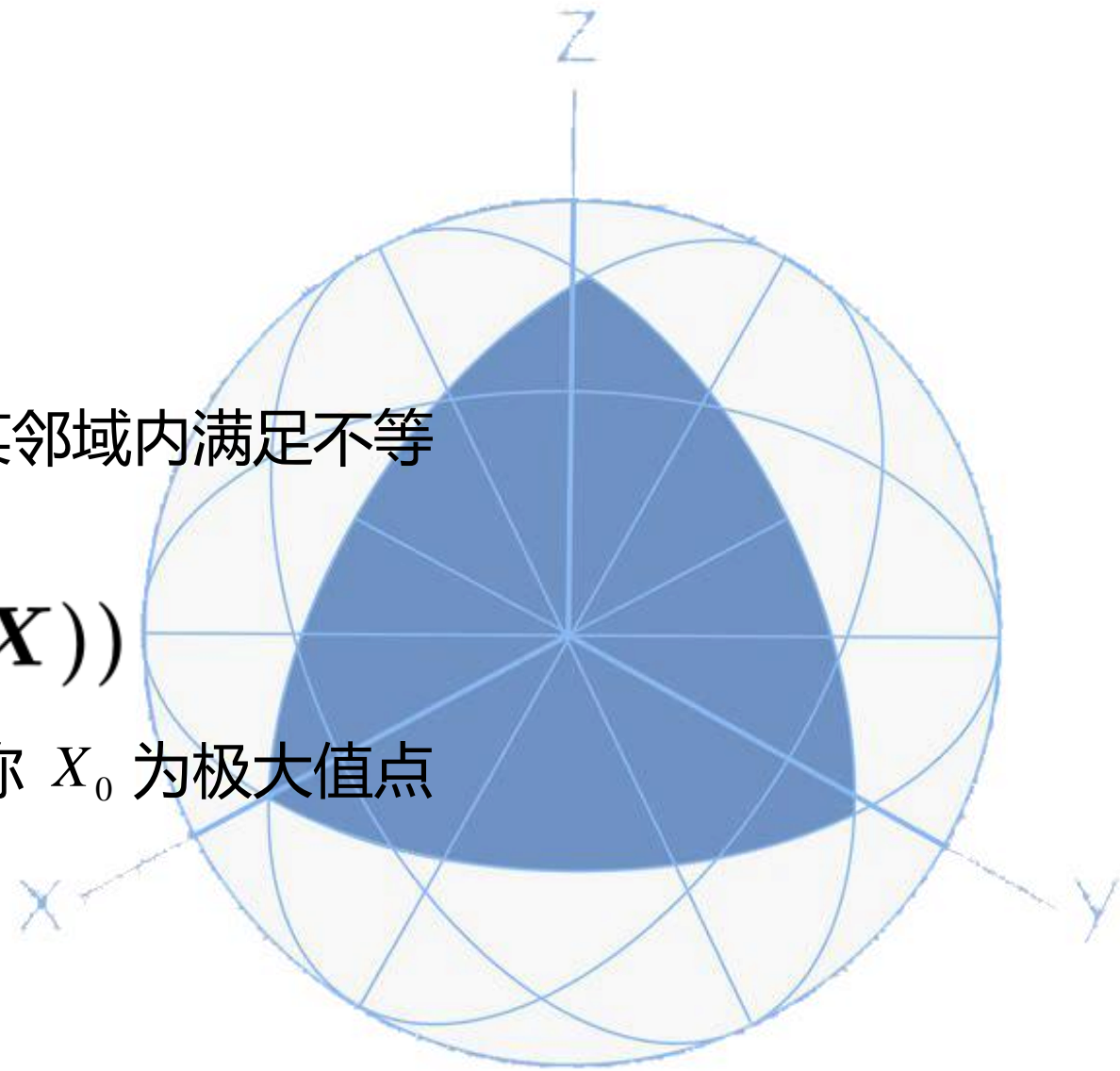


2、多元函数极值问题

定义 设 $X_0 \in R^N$, 如果函数 $u = f(X)$ 在 X_0 的某邻域内满足不等式

$$f(X_0) \geq f(X) \text{ (或 } f(X_0) \leq f(X) \text{)}$$

就说 $u = f(X)$ 在点 X_0 处有极大值 (极小值), 称 X_0 为极大值点 (极小值点) .





f f

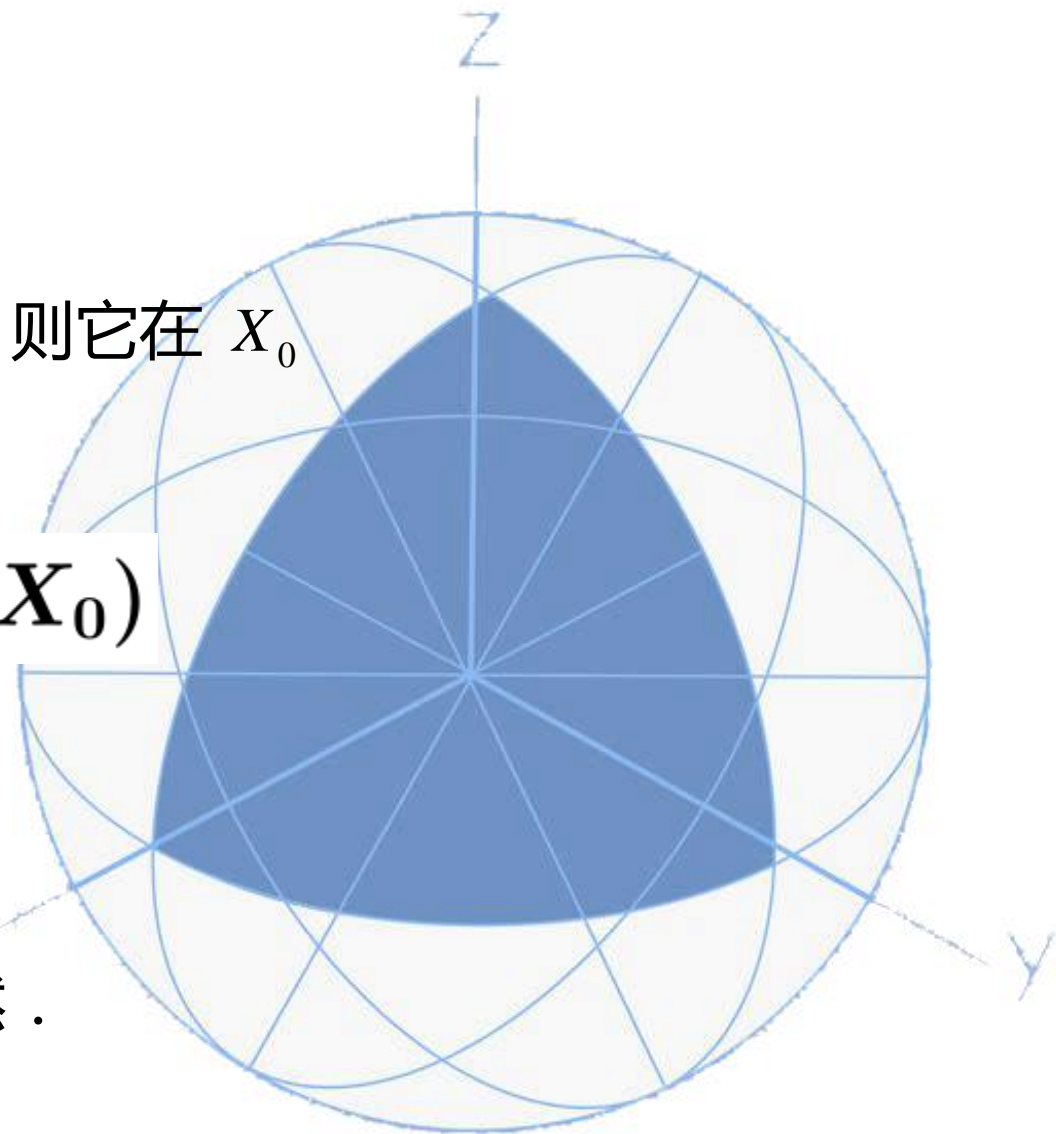
(必要条件)若 X_0 为 f 的极值点, 且 f 在 X_0 点可偏导, 则它在 X_0 处的各个一阶偏导数都为零, 即

$$f_{X_1}(X_0) = f_{X_2}(X_0) = \cdots = f_{X_N}(X_0)$$

或

$$\nabla f(X_0) = 0$$

该定理是说凡极值点必为驻点 (稳定点), 但反之不然.





定理 设 (x_0, y_0) 为 f 的驻点, f 在 (x_0, y_0) 附近具有二阶连续偏导数、记

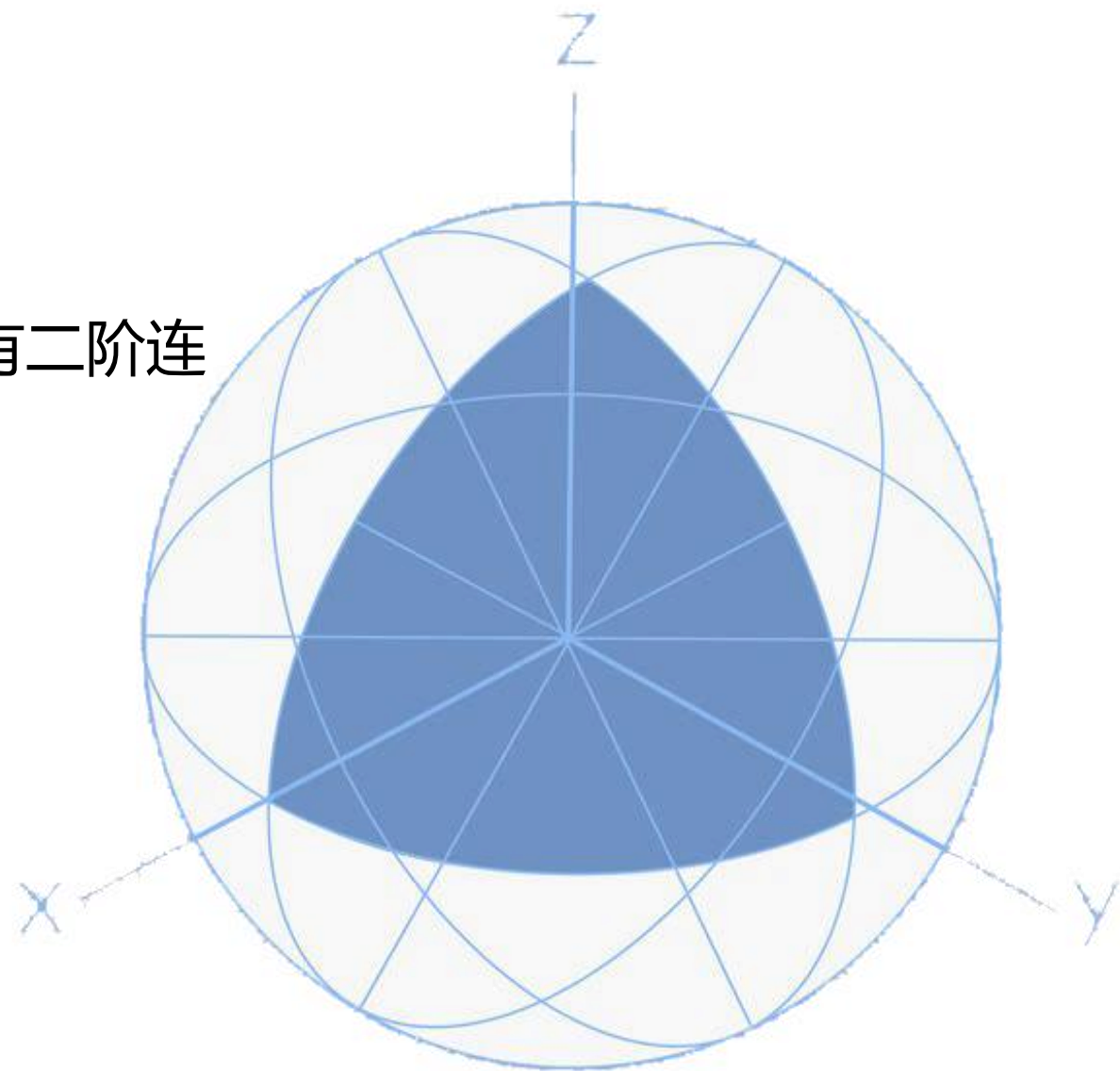
$$A = f_{xx}(x_0, y_0)$$

$$B = f_{xy}(x_0, y_0)$$

$$C = f_{yy}(x_0, y_0)$$

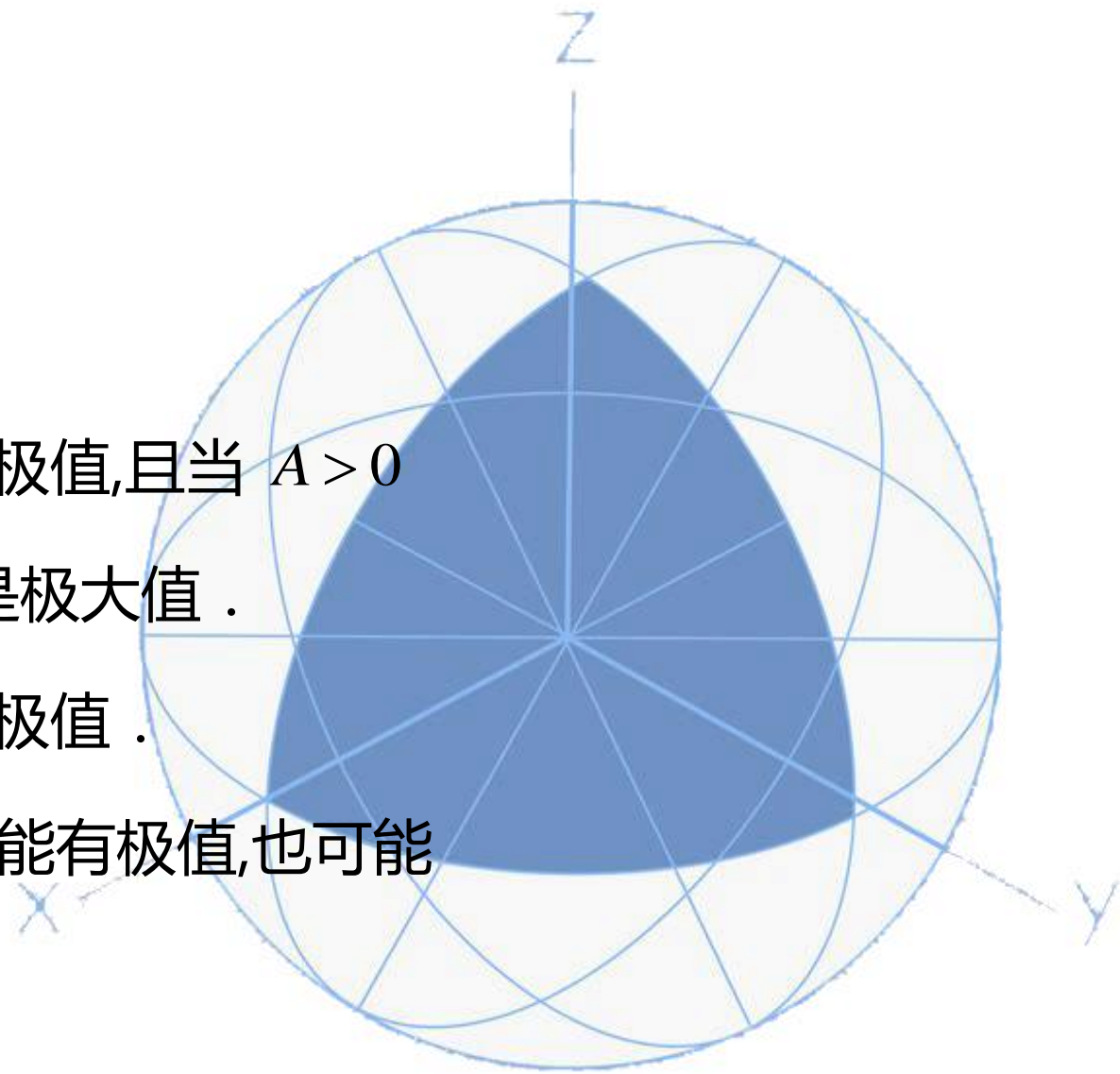
并记

$$\Delta = B^2 - AC$$



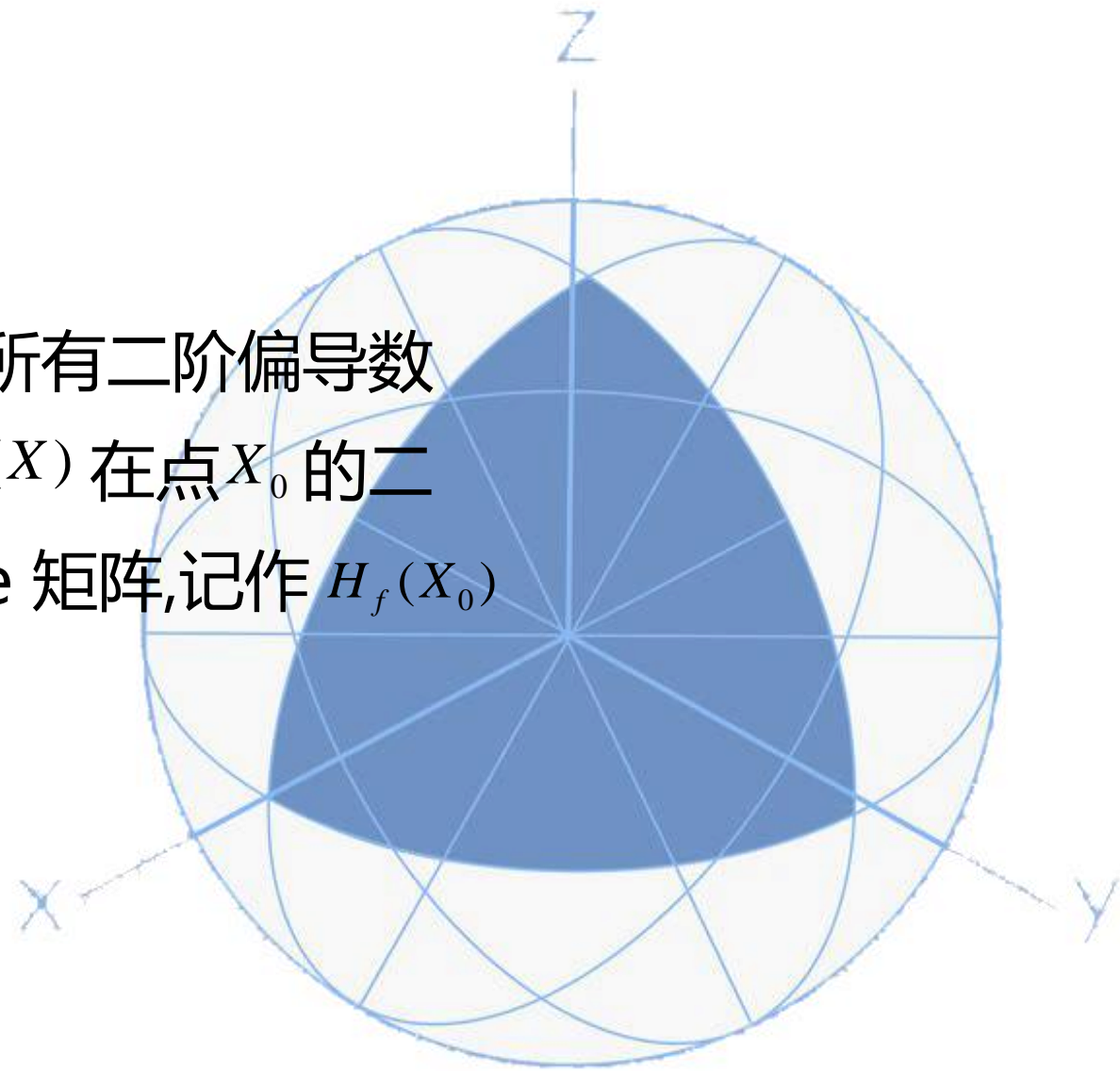
那么

- (1) $\Delta < 0$ 时, 函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处有极值, 且当 $A > 0$ 时, $f(x_0, y_0)$ 是极小值; 且当 $A < 0$ 时, $f(x_0, y_0)$ 是极大值.
- (2) $\Delta > 0$ 时, 函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处无极值.
- (3) $\Delta = 0$ 时, 函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处可能有极值, 也可能无极值.



(极值的充分条件) 设 $u = f(X)$, $X_0 \in R^N$ 的所有二阶偏导数都在 X_0 附近连续, X_0 是 $f(X)$ 的稳定点, 由 $f(X)$ 在点 X_0 的二阶偏导数组成的方阵称为 $f(X)$ 在 X_0 的 Hesse 矩阵, 记作 $H_f(X_0)$

即 :





z
|

即 $H_f(\mathbf{X}_0)$

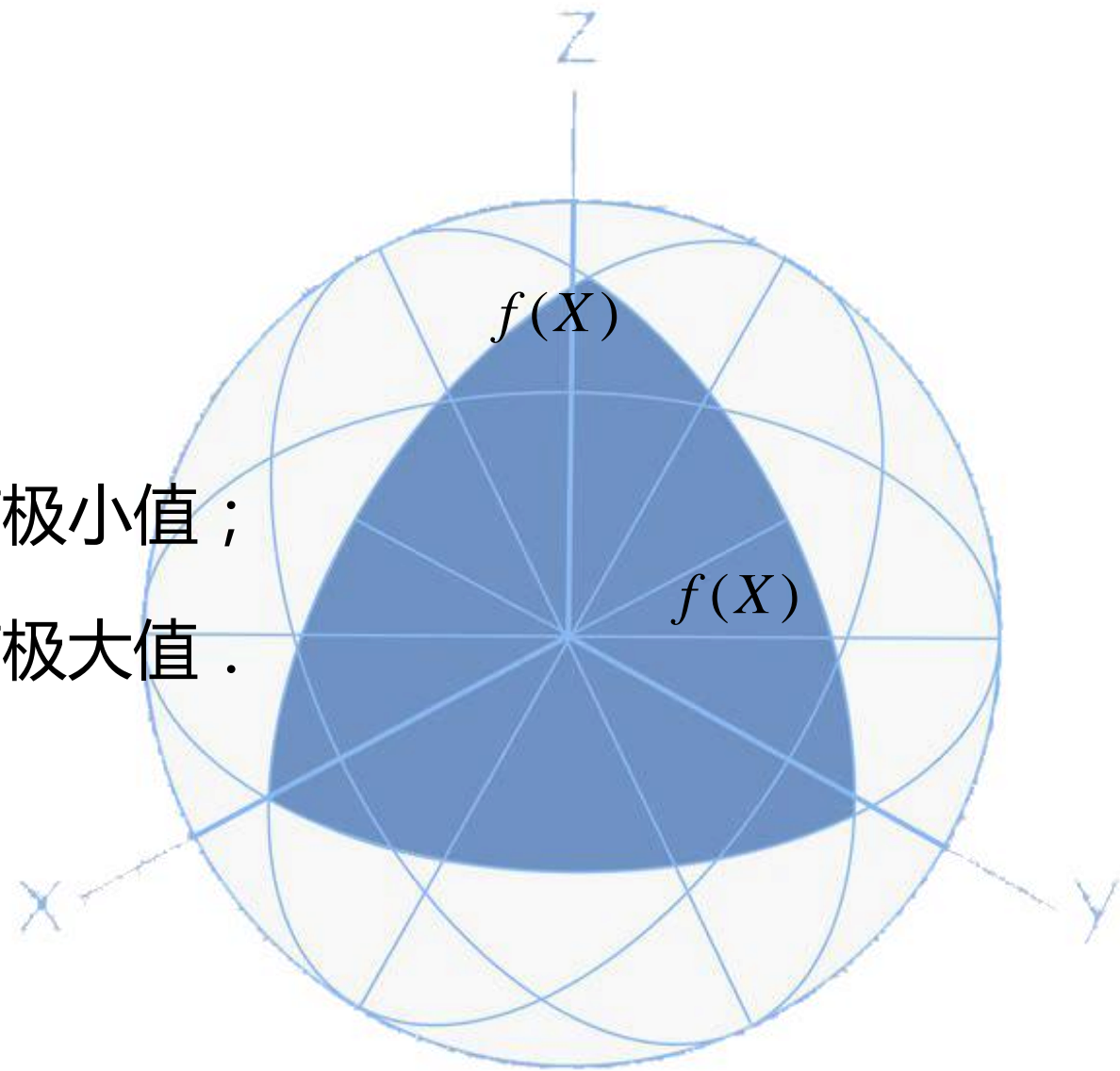
$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j}(\mathbf{X}_0) \right)_{N \times N}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial X_1^2}(\mathbf{X}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_2}(\mathbf{X}_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_N}(\mathbf{X}_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial X_2 \partial X_1}(\mathbf{X}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial X_2^2}(\mathbf{X}_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial X_2 \partial X_N}(\mathbf{X}_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial X_N \partial X_1}(\mathbf{X}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial X_N \partial X_2}(\mathbf{X}_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial X_N^2}(\mathbf{X}_0) \end{bmatrix}$$

那么

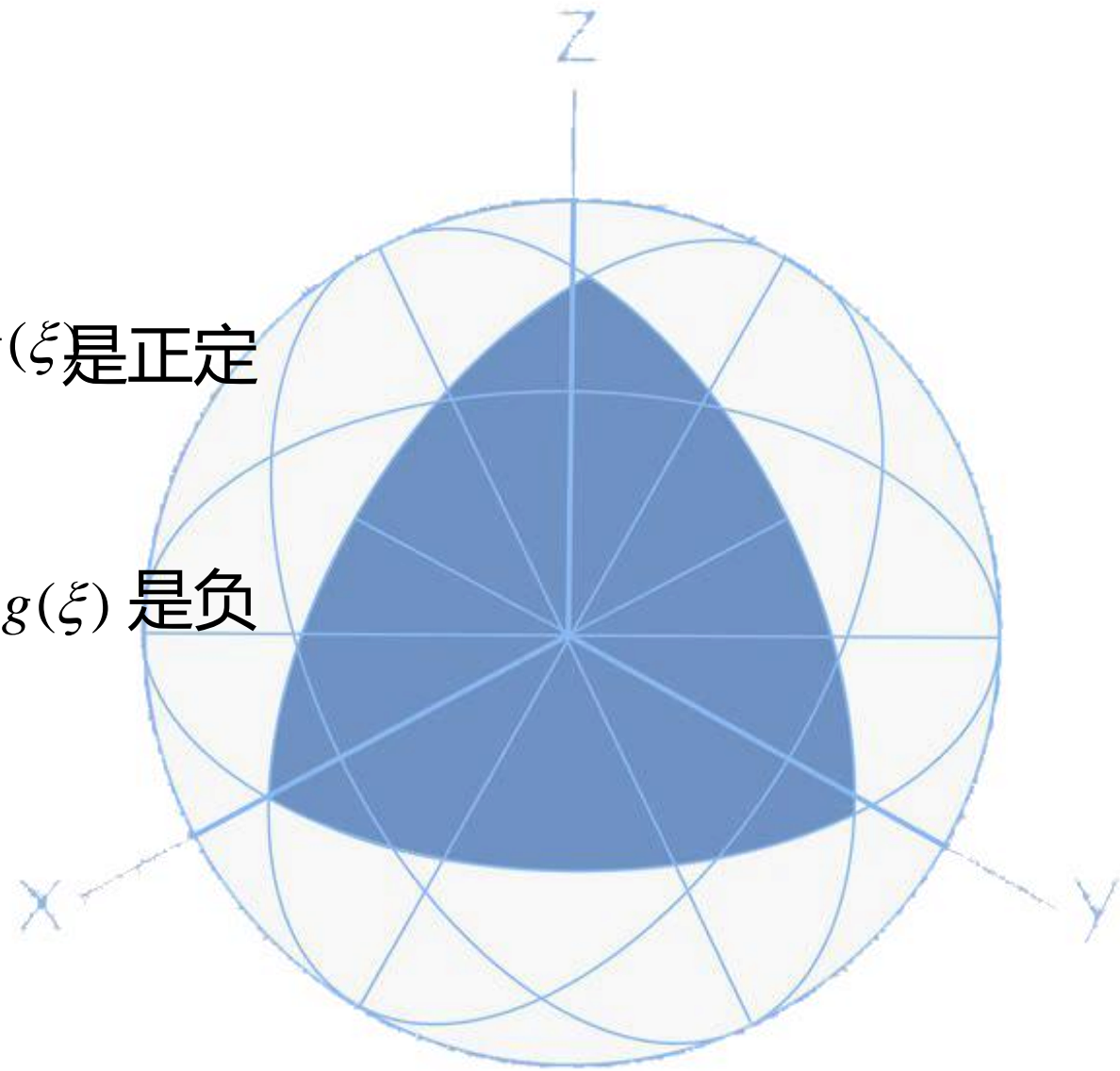
(1)如果 $H_f(X_0)$ 是正定矩阵，则 $f(x)$ 在 X_0 处有极小值；

(2)如果 $H_f(X_0)$ 是负定矩阵，则 $f(x)$ 在 X_0 处有极大值。



推论 若 $\det A_k > 0, k = 1, 2, \dots, n$, 则二次型 $g(\xi)$ 是正定的, 此时 $f(x_0)$ 为极小值;

若 $(-1)^k \det A_k > 0, k = 1, 2, \dots, n$, 则二次型 $g(\xi)$ 是负定的, 此时 $f(x_0)$ 为极大值.

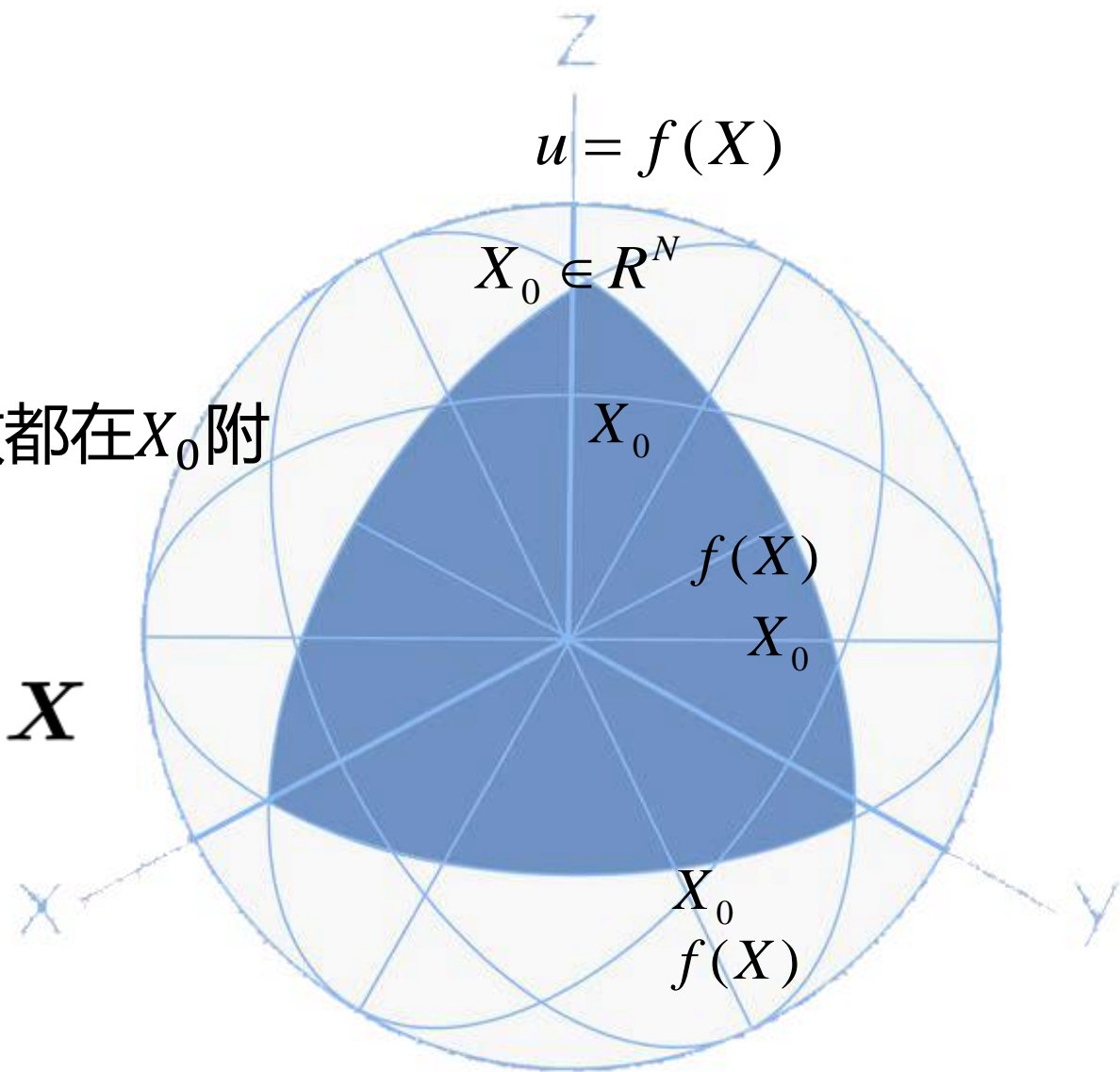




定理 设 $X_0 \in R^n$, $u=f(x)$ 的所有二阶偏导数都在 X_0 附近连续 , X_0 是 $f(x)$ 的稳定点。如果二次型

$$\varphi(\Delta X) = \Delta X^T H_f(X_0) \Delta X$$

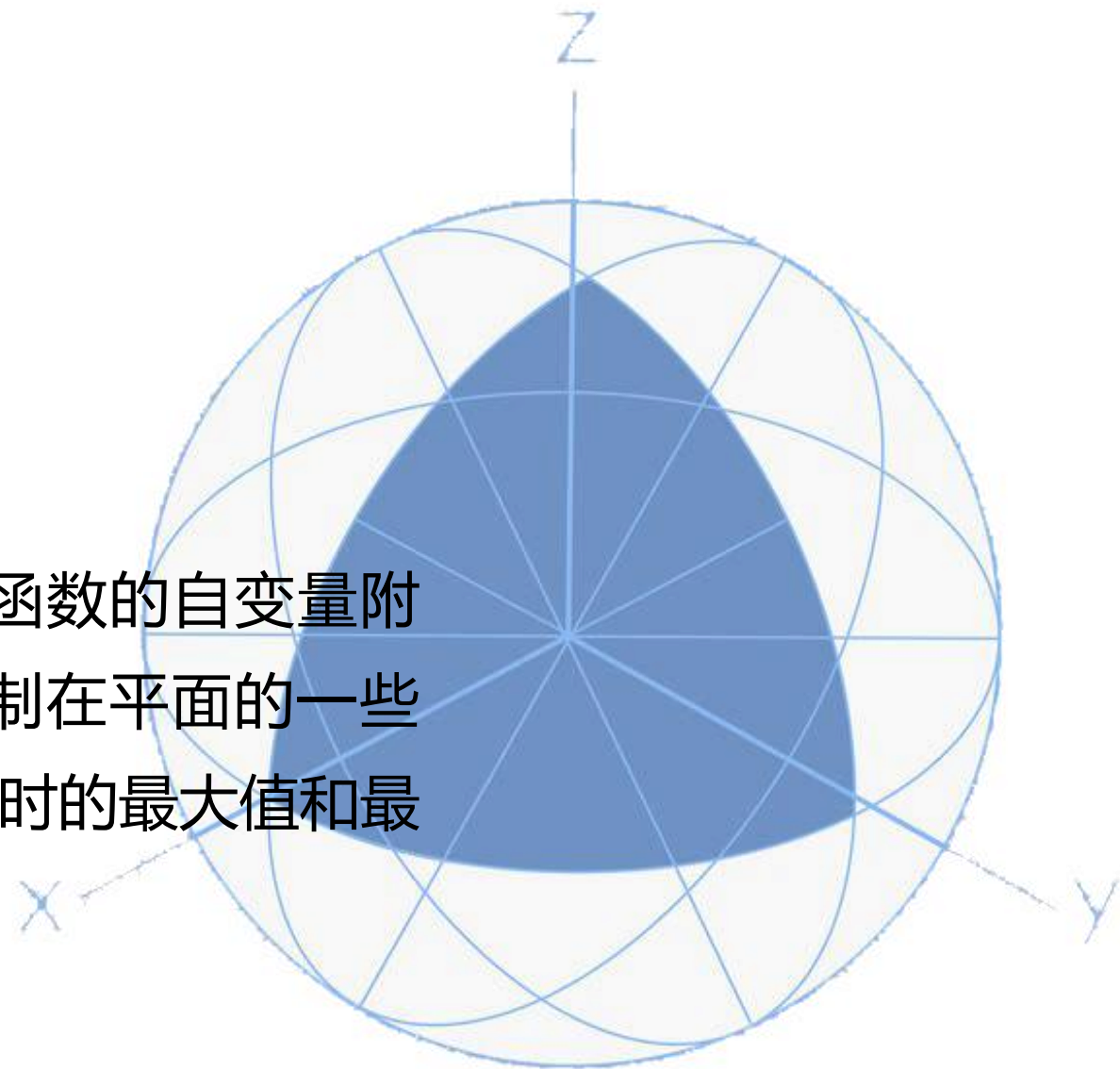
是变号的 , 那么 $f(x)$ 在 X_0 处无极值 .



3.3.2 约束优化方法

一、约束优化思想与建模方法

在考虑函数的极值或最值问题时，经常需要对函数的自变量附加一定的条件，比如有时需要考虑自变量被限制在平面的一些特定子集 (如圆盘、直线、封闭的三角形区域) 内的最大值和最小值。





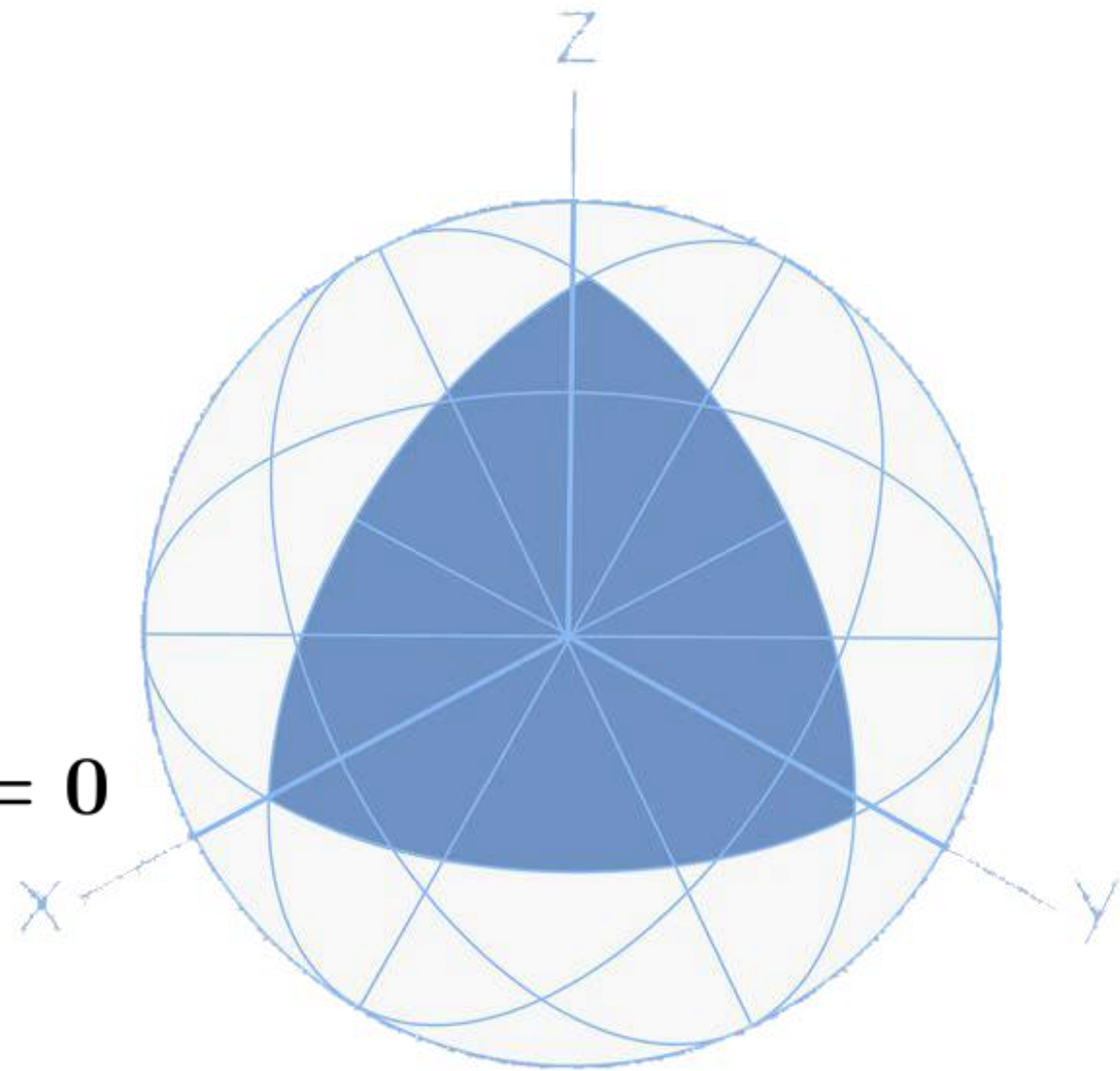
条件极值问题的提法是：求目标函数

$$f(x, y, z)$$

在约束条件

$$G(x, y, z) = 0, \quad H(x, y, z) = 0$$

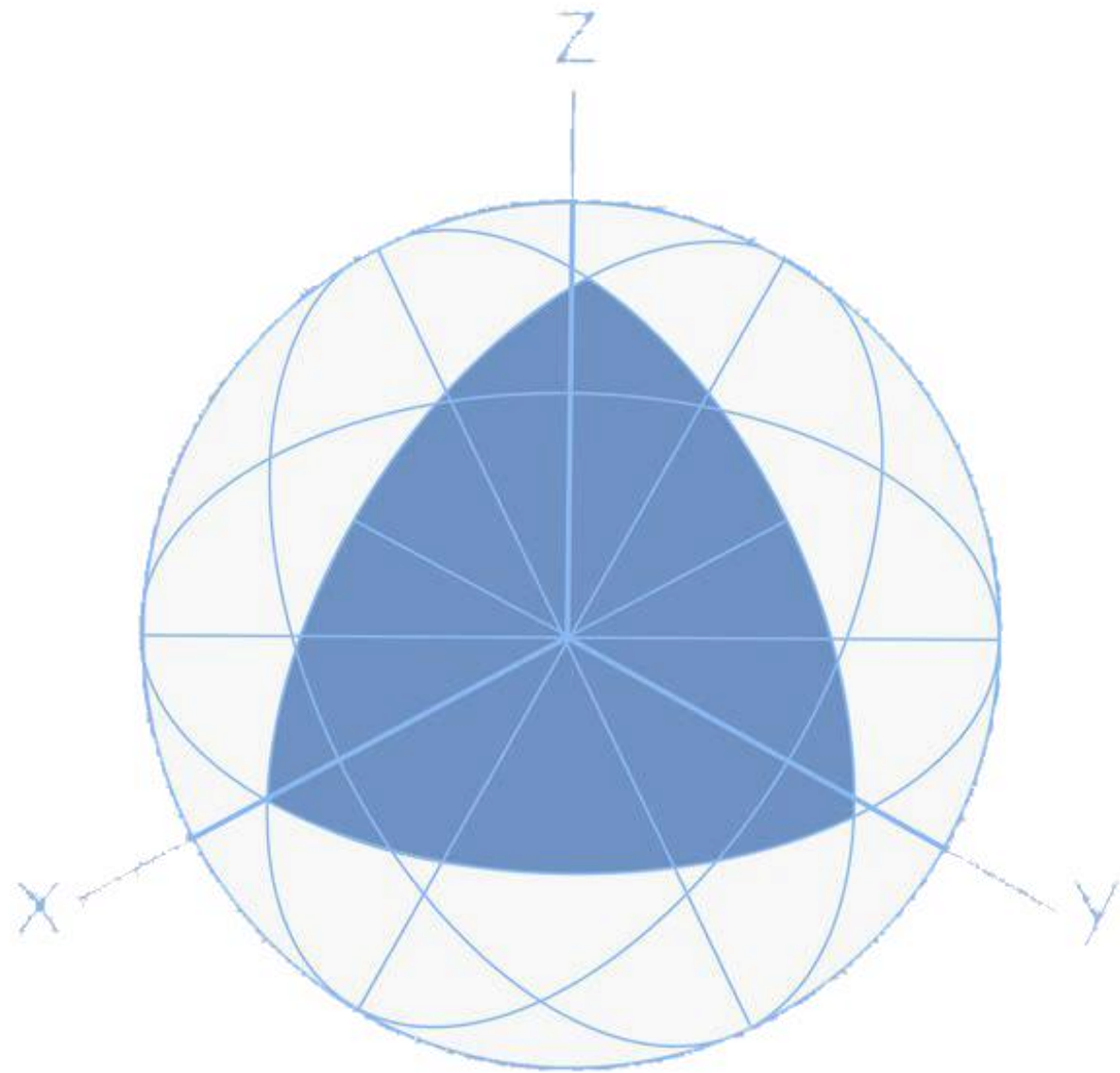
下的极值.



在本节中假定 Jacobi 矩阵

$$J = \begin{vmatrix} G_x & G_y & G_z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}$$

是满秩的,即 $\text{rank } J=2$.

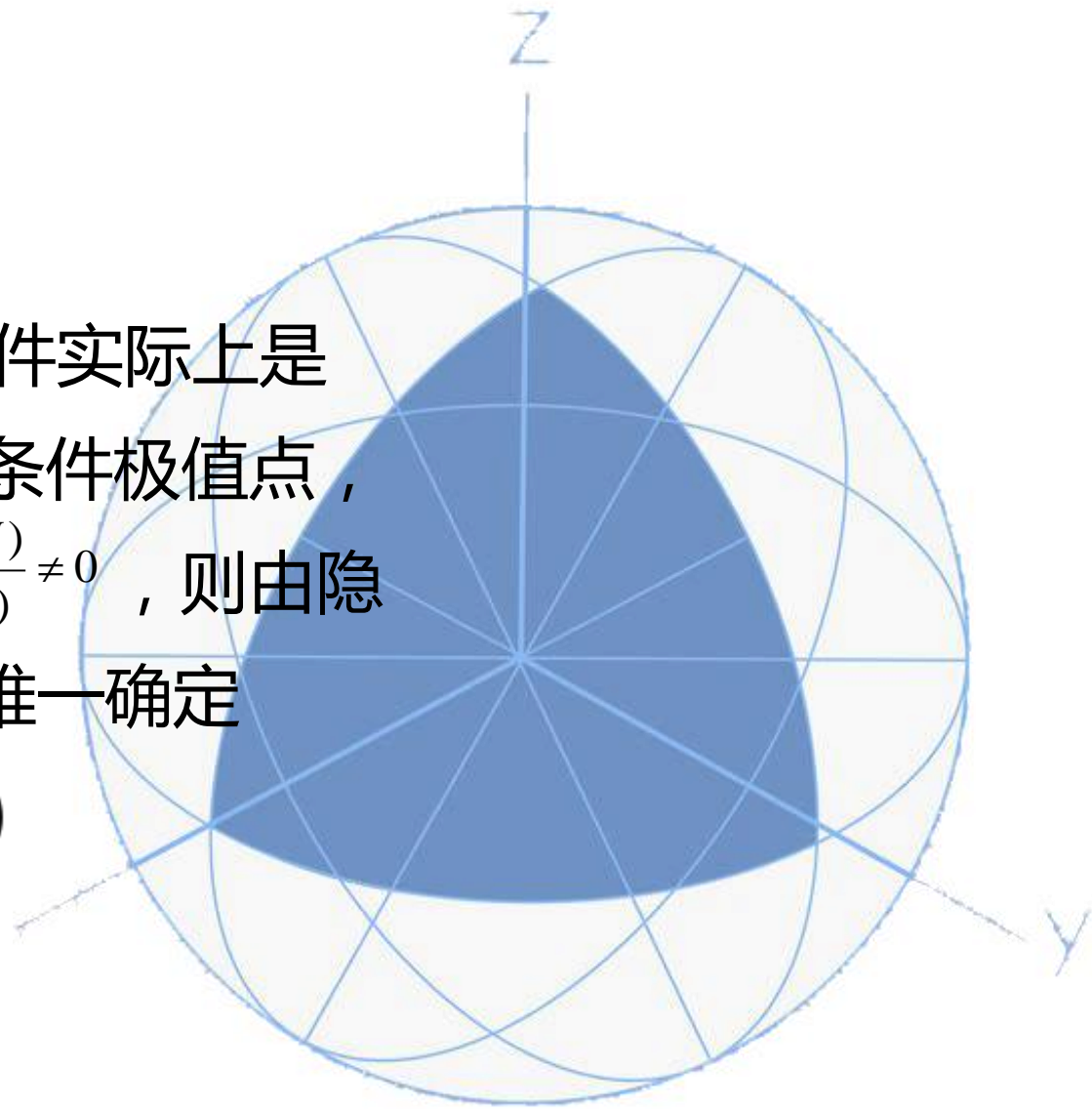




先考虑取到条件极值的必要条件. 上述约束条件实际上是空间曲线的方程, 设曲线上一点 (x_0, y_0, z_0) 为条件极值点, 由于 $\text{rank } J=2$, 不妨假设在 (x_0, y_0, z_0) 点 $\frac{\partial(G, H)}{\partial(y, z)} \neq 0$, 则由隐函数存在定理, 在 (x_0, y_0, z_0) 附近由该方程可以唯一确定

$$y = y(x), z = z(x), x \in O(x_0, \rho) \\ (y_0 = y(x_0), z_0 = z(x_0)).$$

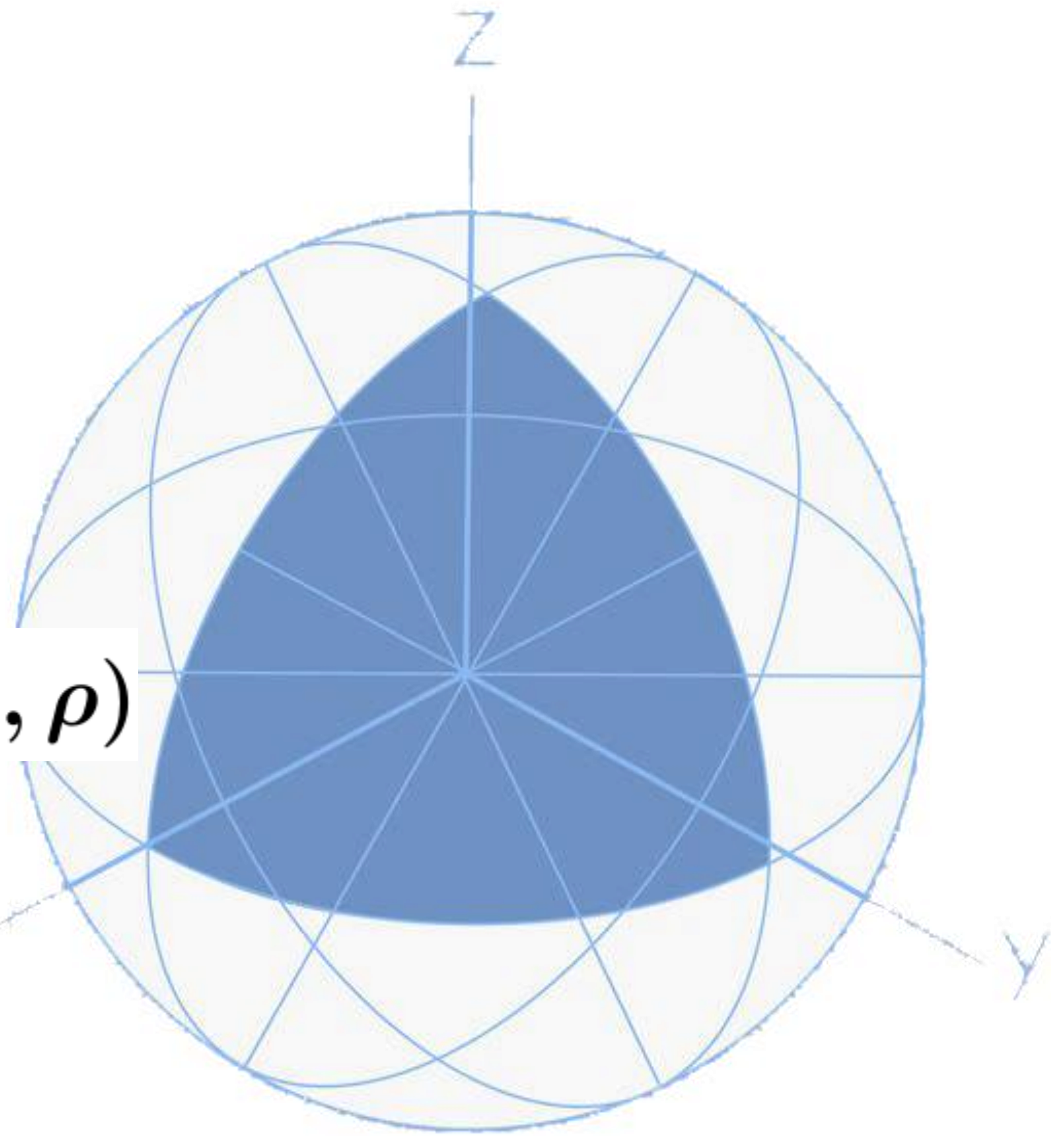
它是这个曲线方程的参数形式.



将它们代入目标函数,原问题就转化为函数

$$\Phi(x) = f(x, y(x), z(x)), x \in O(x_0, \rho)$$

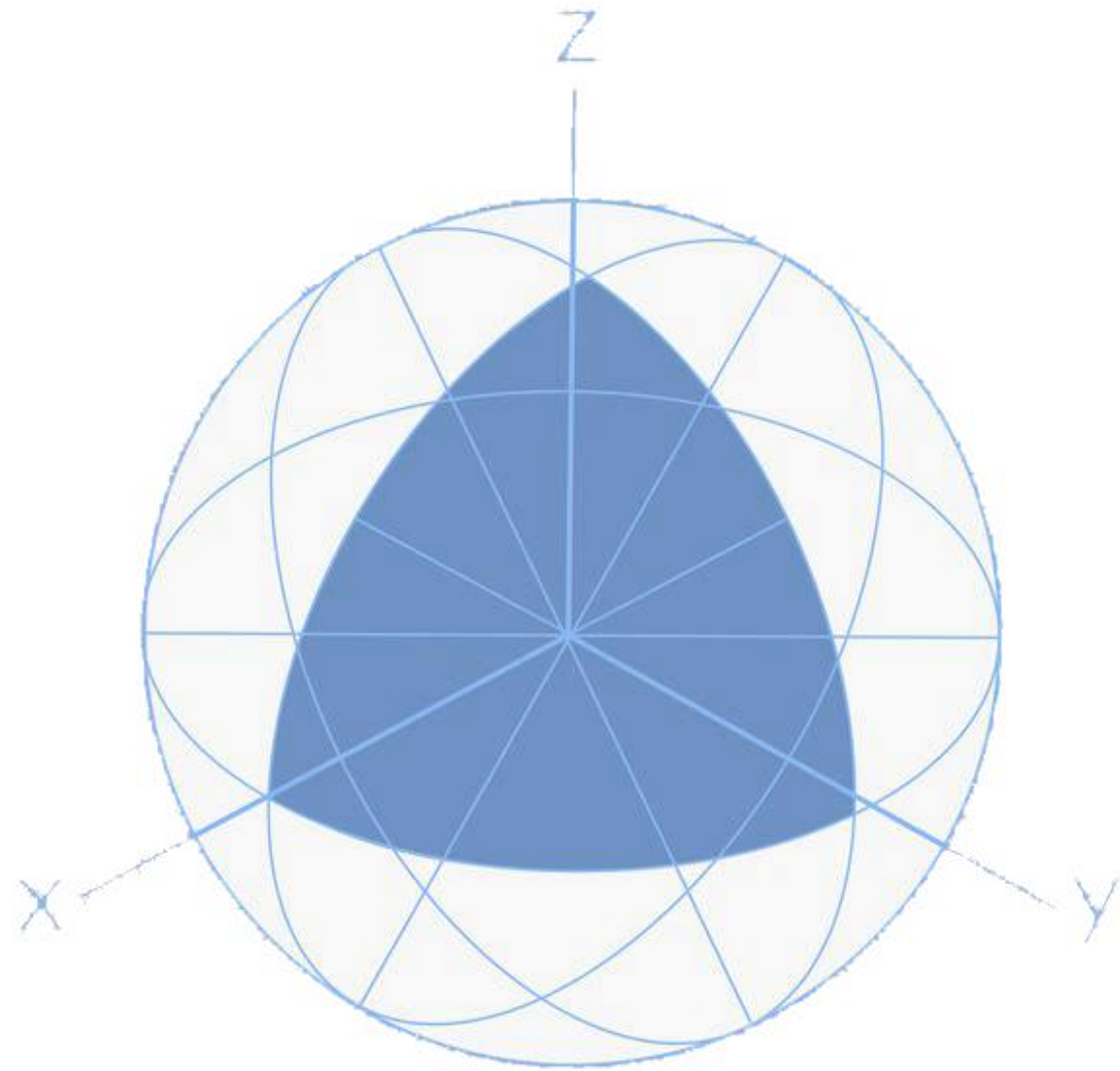
的无条件极值问题, x_0 是函数 $\Phi(x)$ 的极值点.





因此 $\Phi'(x_0) = 0$,即

$$\begin{aligned} & f_x(x_0, y_0, z_0) \\ & + f_y(x_0, y_0, z_0) \frac{dy}{dx} \\ & + f_z(x_0, y_0, z_0) \frac{dz}{dx} = 0. \end{aligned}$$





这说明向量

$$\text{grad } f(x_0, y_0, z_0) =$$

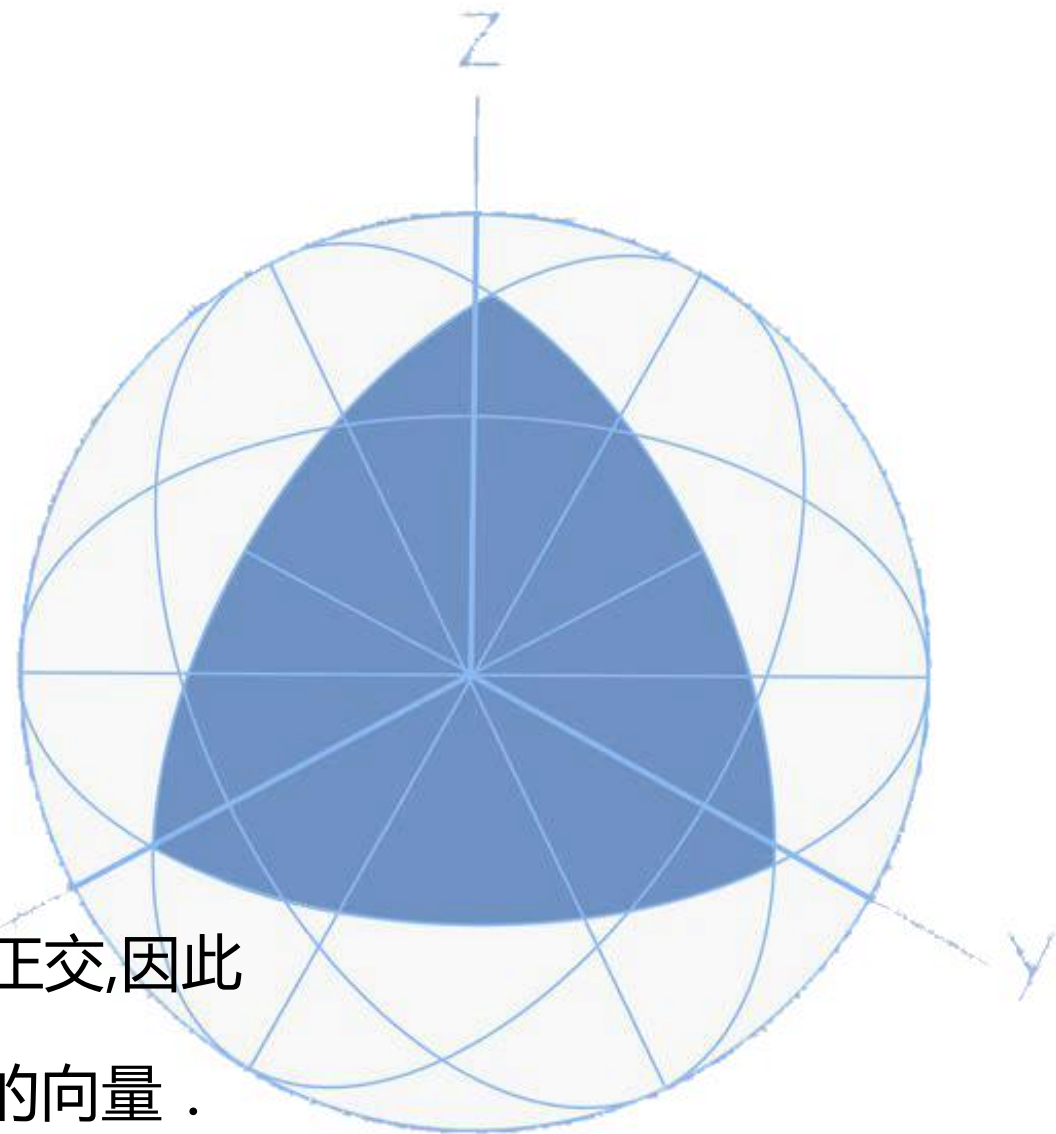
$$f_x(x_0, y_0, z_0)\mathbf{i}$$

$$+ f_y(x_0, y_0, z_0)\mathbf{j}$$

$$+ f_z(x_0, y_0, z_0)\mathbf{k}$$

与向量 $\tau = (1, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx})$,即曲线在 (x_0, y_0, z_0) 点的切向量正交,因此

$\text{grad } f(x_0, y_0, z_0)$ 是曲线在 (x_0, y_0, z_0) 点处的法平面上的向量 .

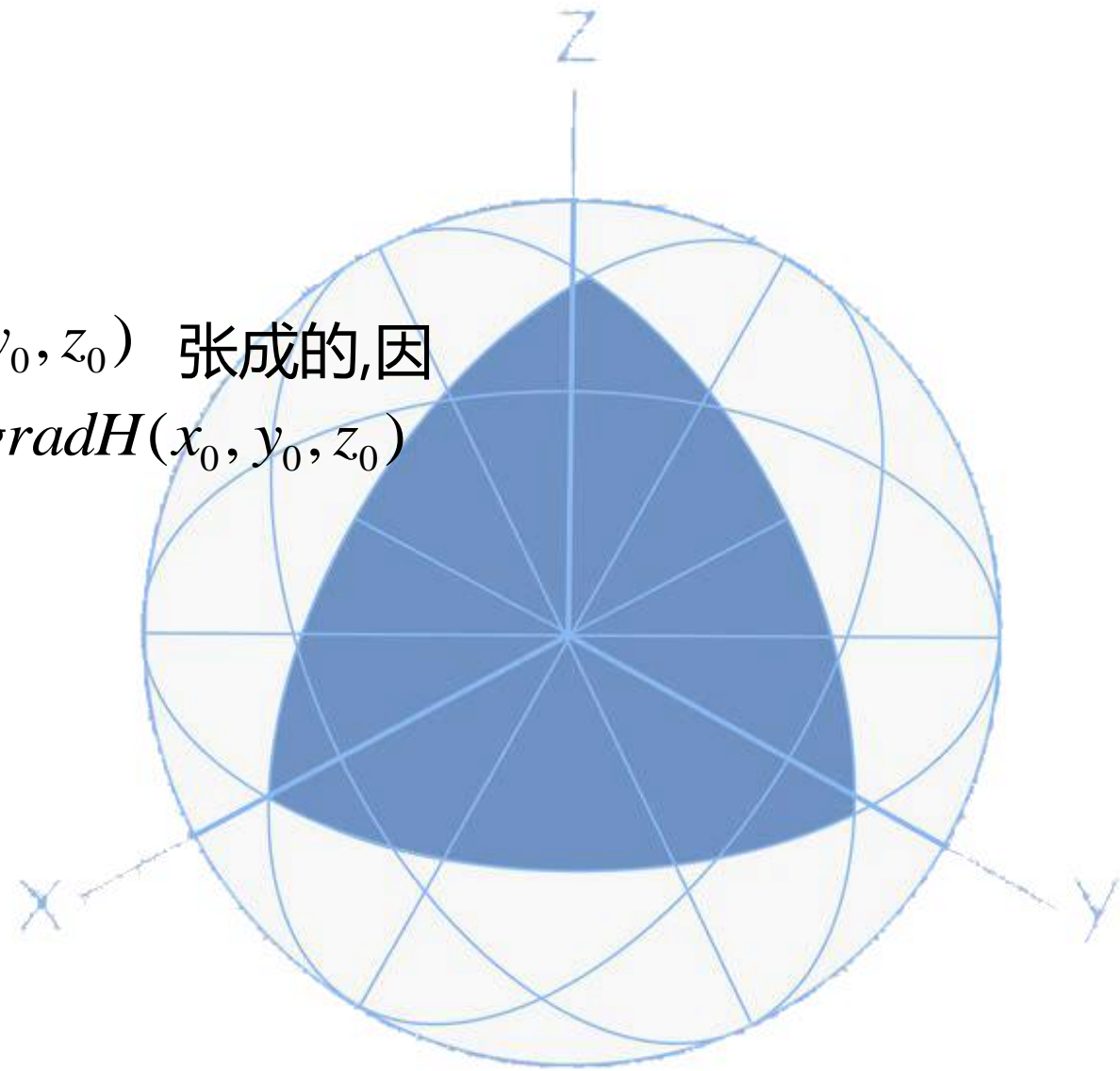


这个法平面是由 $\text{grad}G(x_0, y_0, z_0)$ 与 $\text{grad}H(x_0, y_0, z_0)$ 张成的, 因此 $\text{grad}f(x_0, y_0, z_0)$ 可以由 $\text{grad}G(x_0, y_0, z_0)$ 和 $\text{grad}H(x_0, y_0, z_0)$

线性表示, 或者说, 存在常数 λ_0, μ_0 使得

$$\begin{aligned} & \text{grad}f(x_0, y_0, z_0) \\ &= \lambda_0 \text{grad}G(x_0, y_0, z_0) \\ &+ \mu_0 \text{grad}H(x_0, y_0, z_0), \end{aligned}$$

这就是点 (x_0, y_0, z_0) 为条件极值点的必要条件.



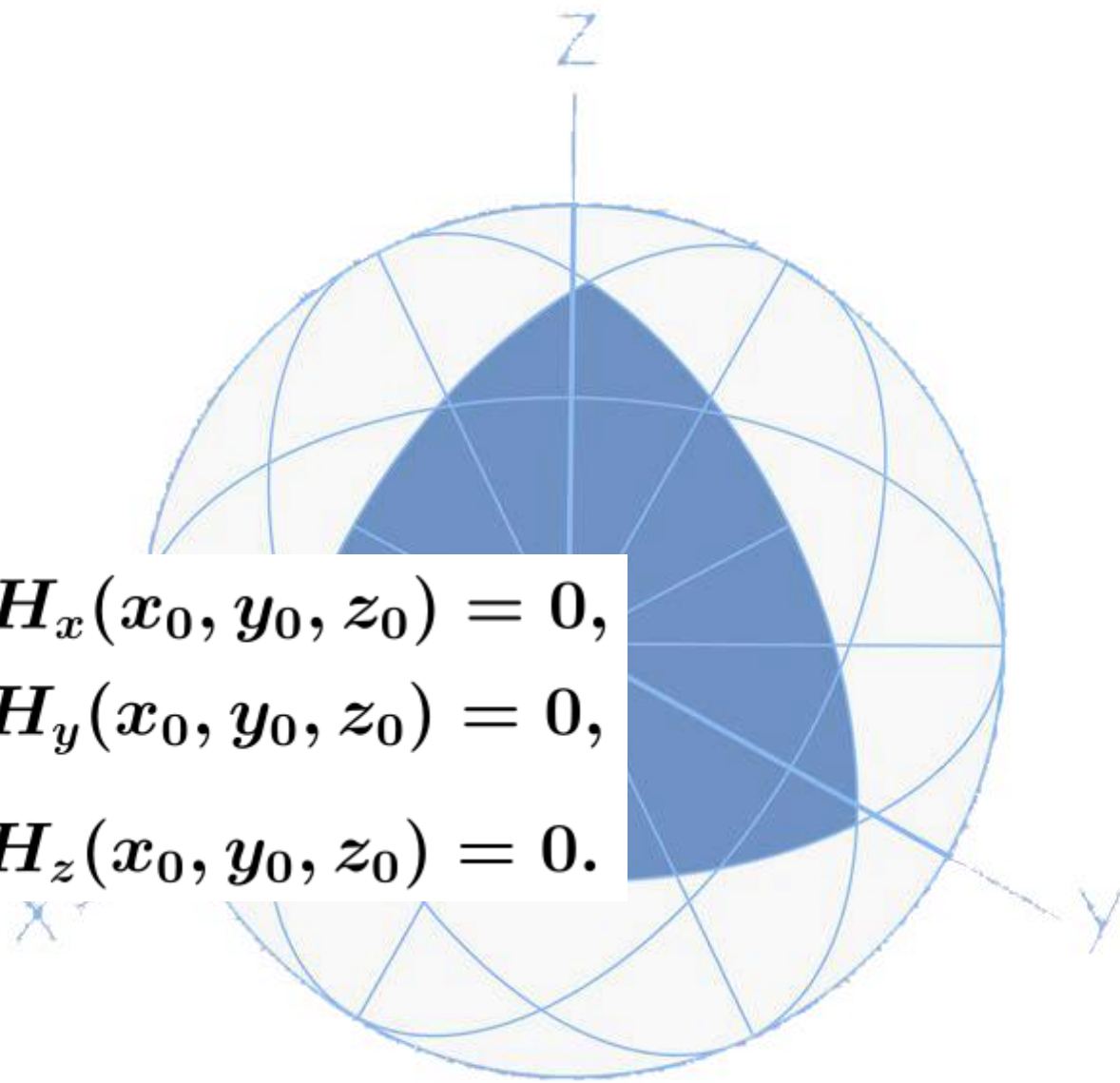


将这个方程按分量写开就是:

$$f_x(x_0, y_0, z_0) - \lambda_0 G_x(x_0, y_0, z_0) - \mu_0 H_x(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

$$f_y(x_0, y_0, z_0) - \lambda_0 G_y(x_0, y_0, z_0) - \mu_0 H_y(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

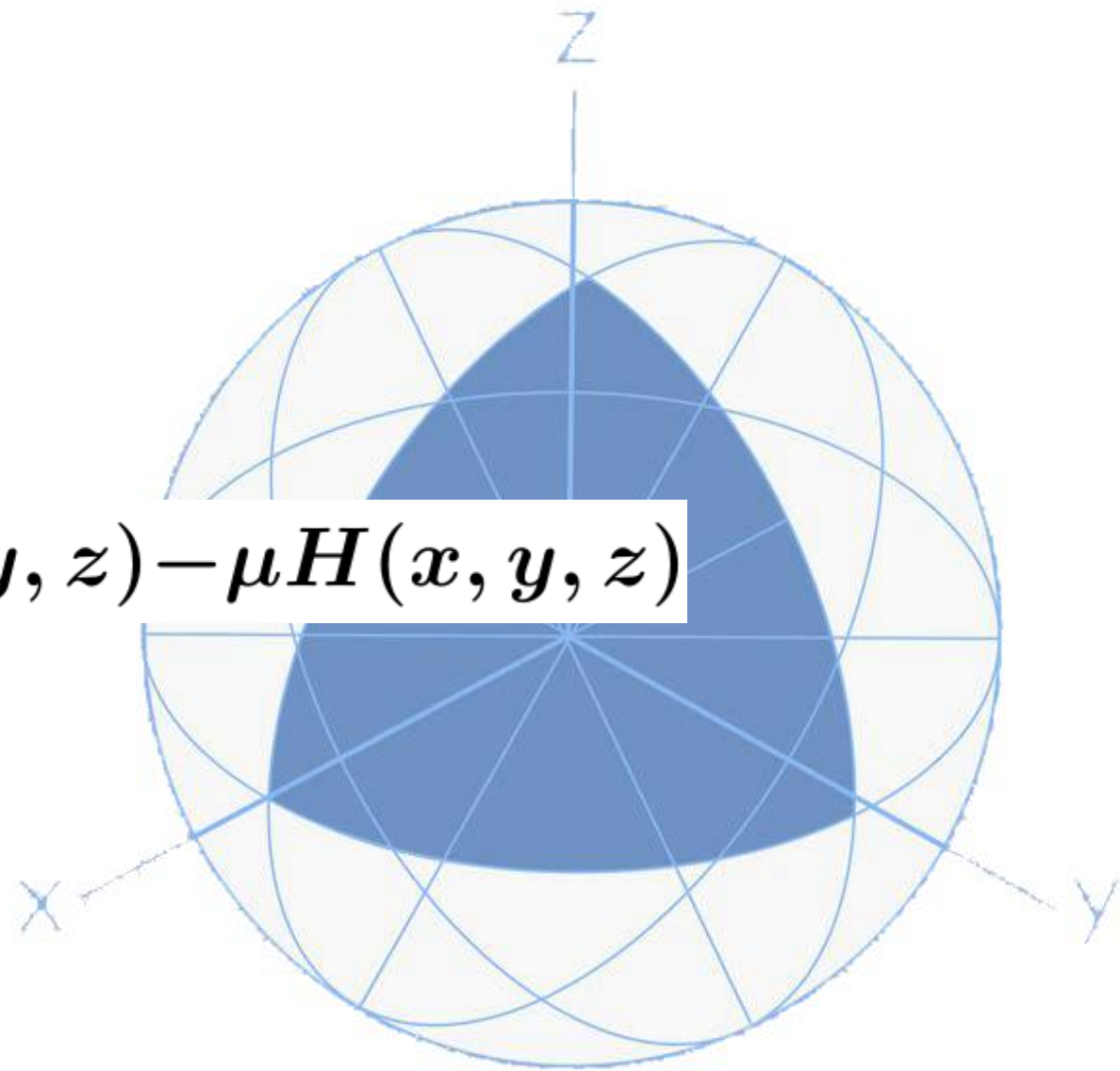
$$f_z(x_0, y_0, z_0) - \lambda_0 G_z(x_0, y_0, z_0) - \mu_0 H_z(x_0, y_0, z_0) = 0.$$



那么,如果我们构造 **Lagrange 函数**

$$L(x, y, z) = f(x, y, z) - \lambda G(x, y, z) - \mu H(x, y, z)$$

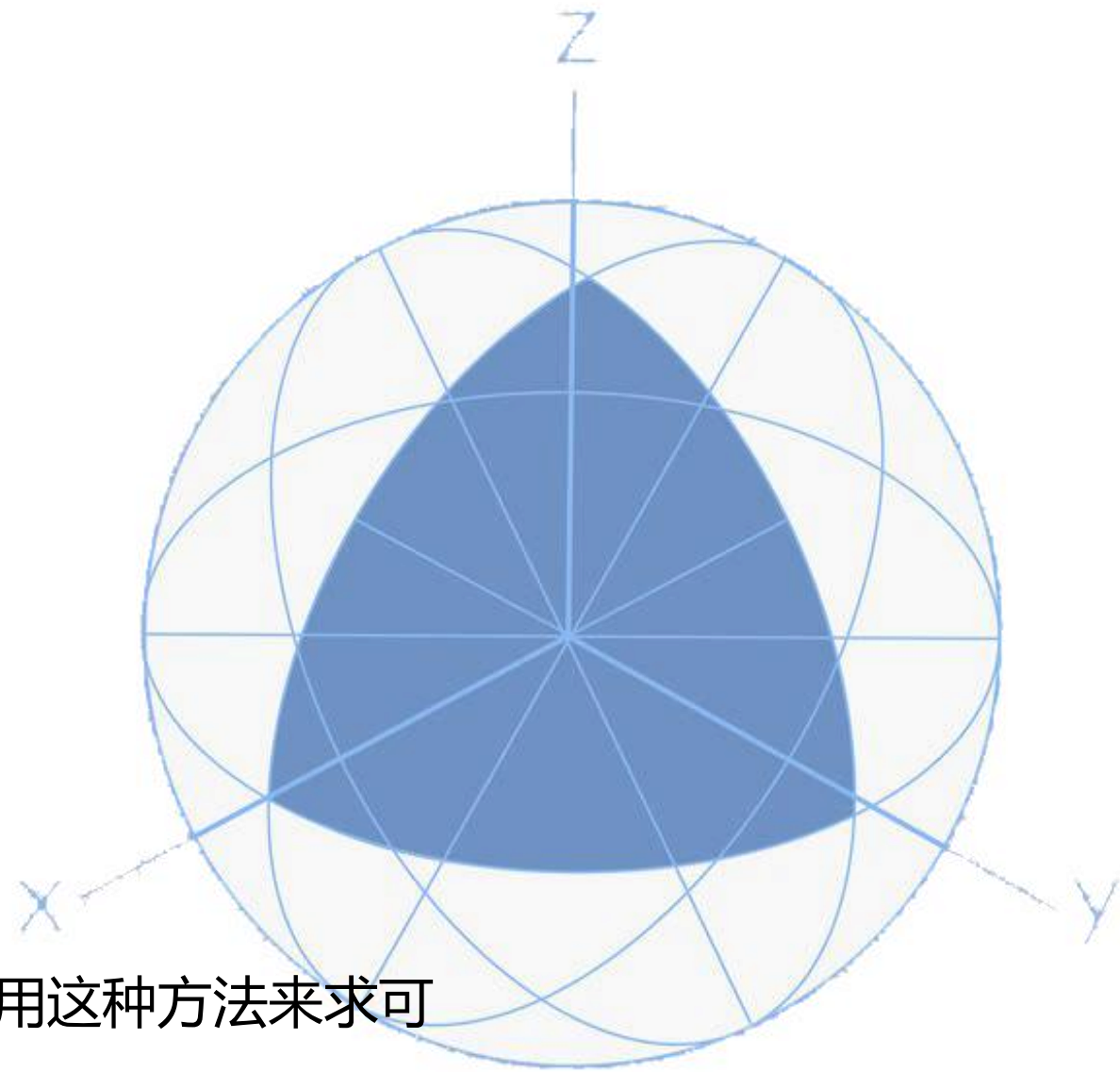
(λ, μ 称为**Lagrange 乘数**) .



则条件极值点就在方程组

$$\begin{cases} L_x = f_x - \lambda G_x - \mu H_x = 0 \\ L_y = f_y - \lambda G_y - \mu H_y = 0, \\ L_z = f_z - \lambda G_z - \mu H_z = 0, \\ G = 0, \\ H = 0 \end{cases}$$

的所有解 $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0, \mu_0)$ 所对应的 (x_0, y_0, z_0) 中，用这种方法来求可能的条件极值点的方法，称为 **Lagrange 乘数法**。

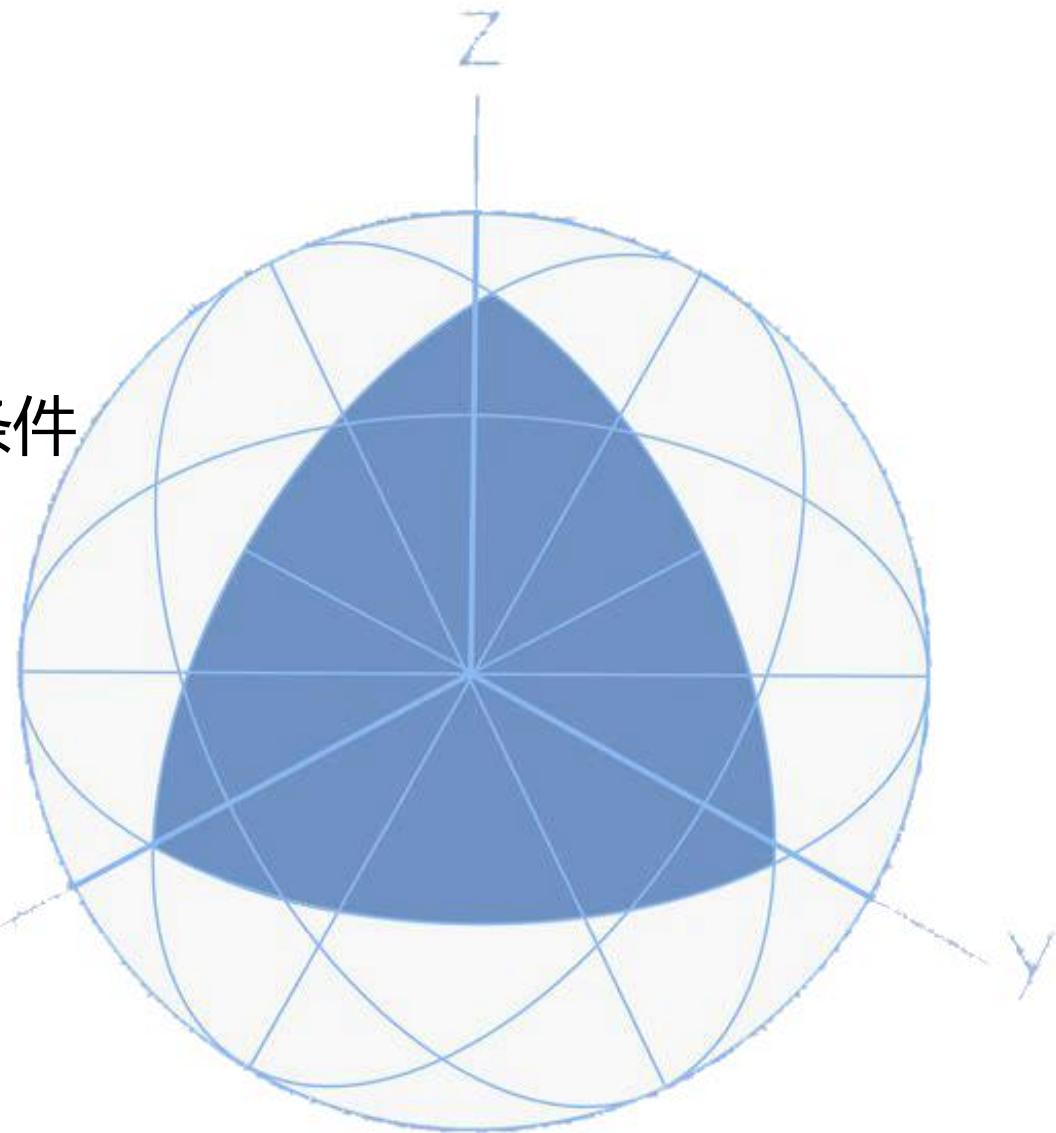




一般地，考虑目标函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 在 m 个约束条件

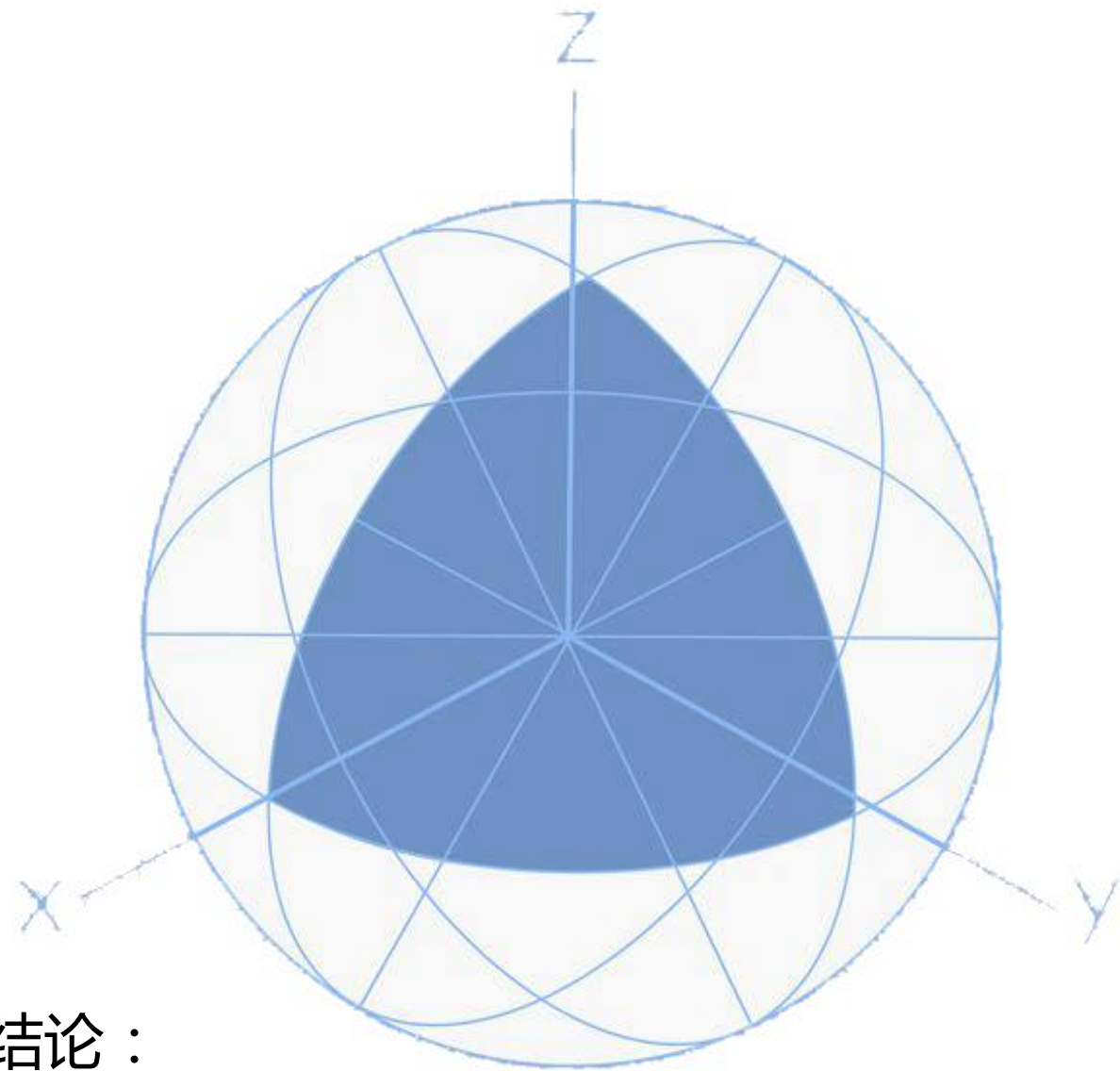
$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0, \\ i = 1, 2, \dots, m; m < N$$

下的极值，这里 $f, g_i, i = 1, 2, \dots, m$ 具有连续偏导数



且 Jacobi 矩阵

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_N} \end{vmatrix}$$

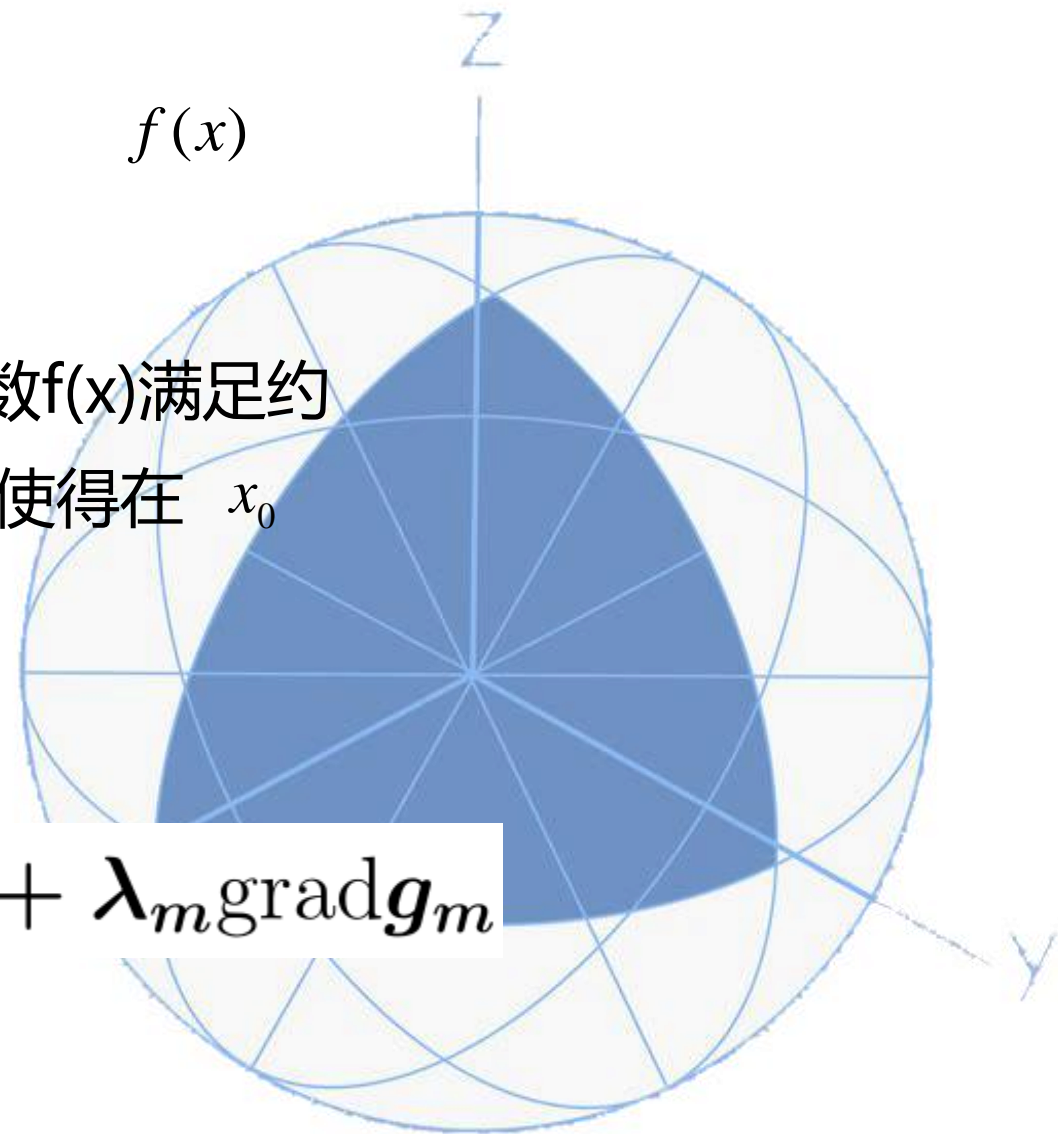


为满秩的,即 $\text{rank} J = m$,那么我们有类似的下述结论 :



(条件极值的必要条件) 若点 $x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_N^0)$ 为函数 $f(x)$ 满足约束条件的极值点, 则必存在 m 个常数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, 使得在 x_0 点成立

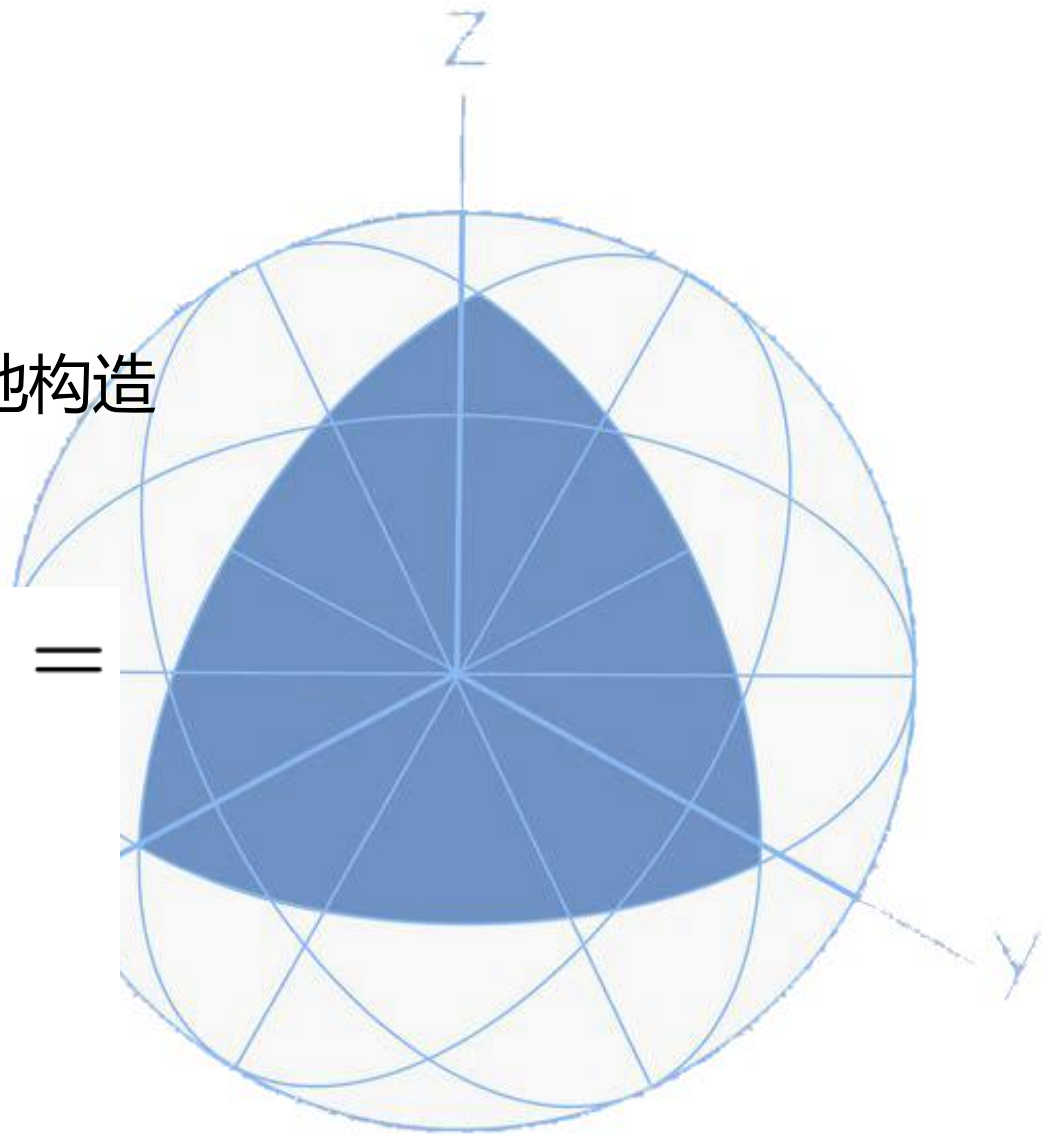
$$\text{grad} f = \lambda_1 \text{grad} g_1 + \lambda_2 \text{grad} g_2 + \cdots + \lambda_m \text{grad} g_m$$





于是可以将 Lagrange 乘数法推广过去. 同样地构造
Lagrange 函数

$$L(x_1, x_2, \dots, x_N, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_N) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x_1, x_2, \dots, x_N).$$

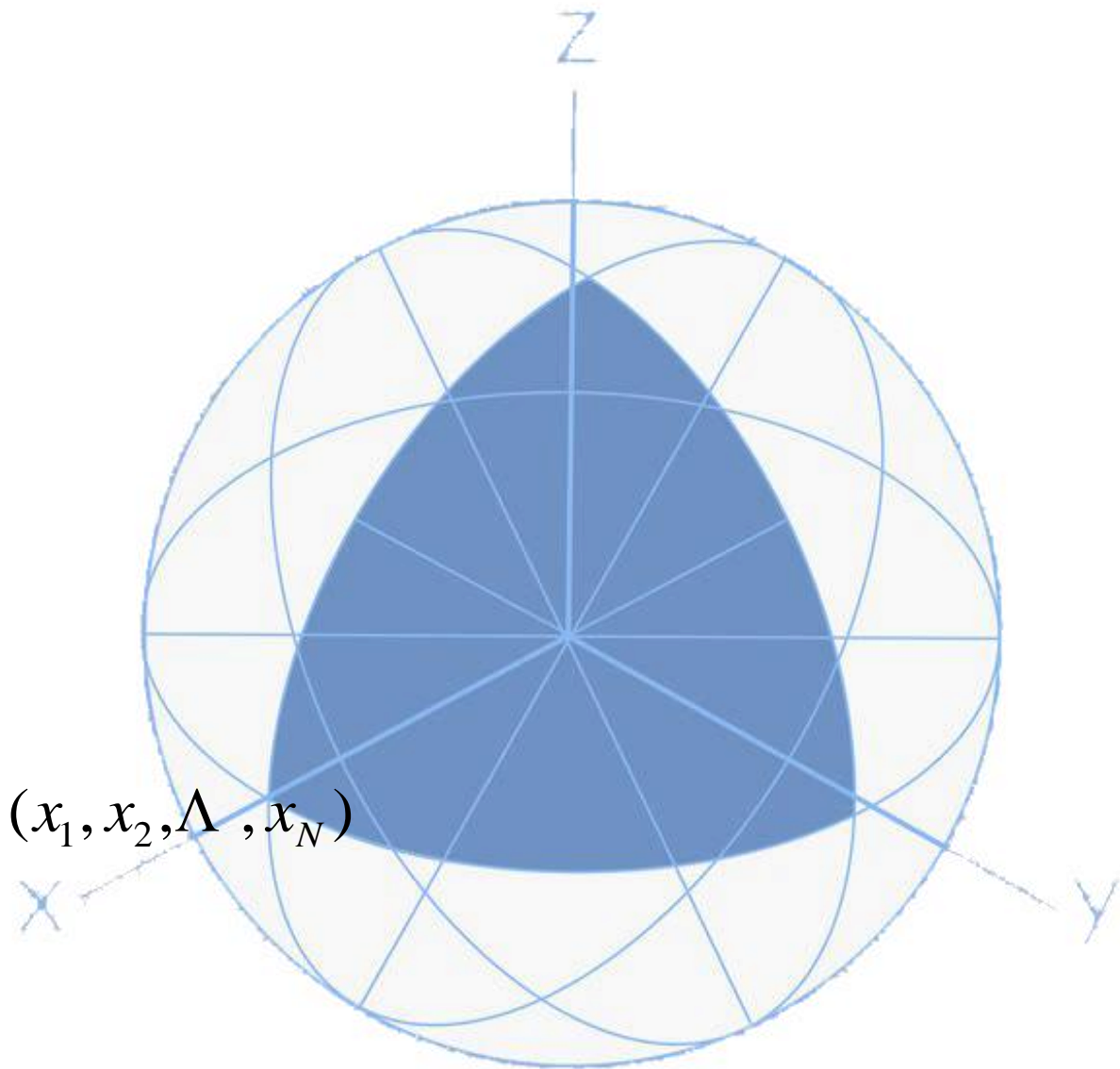




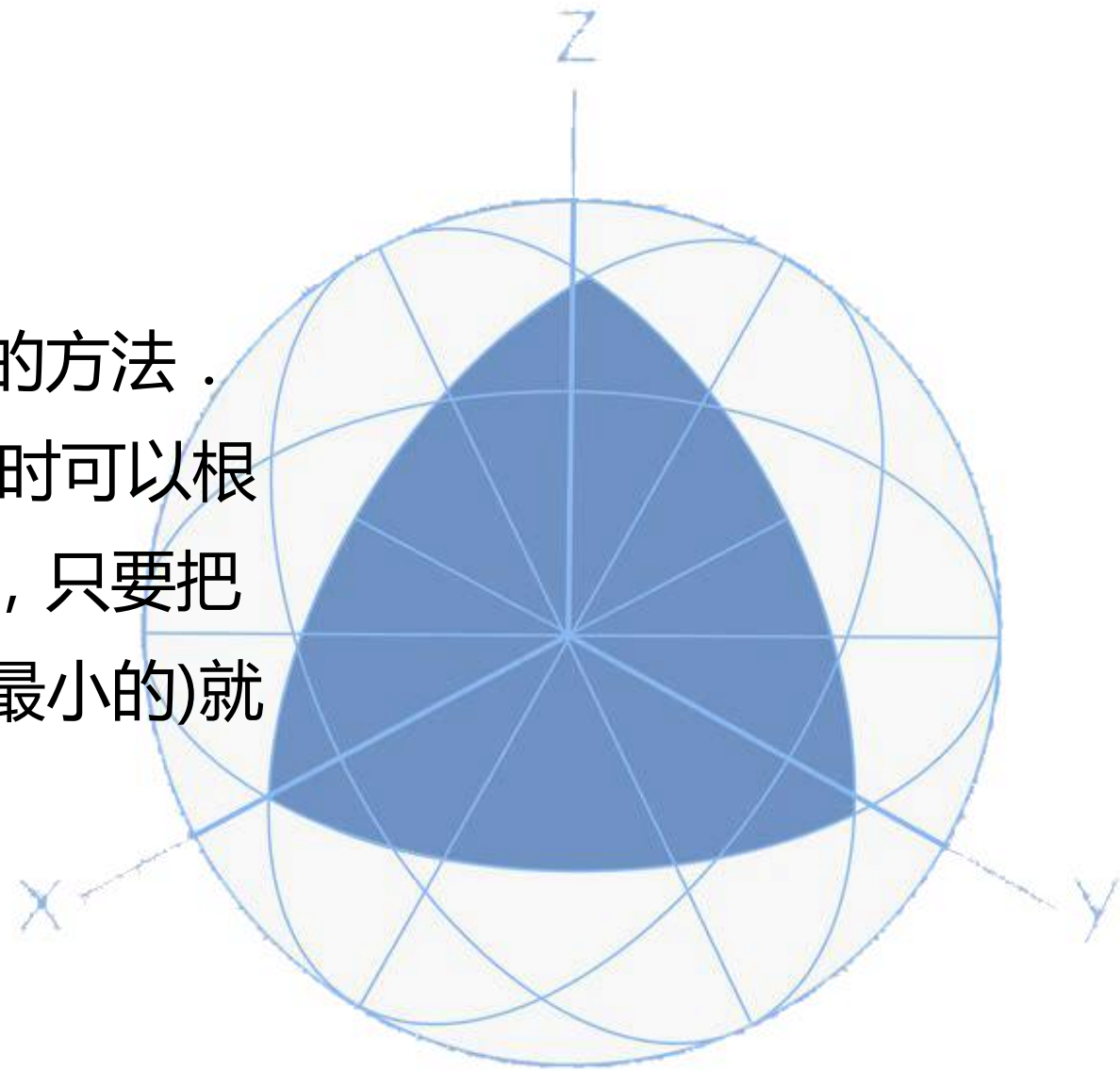
那么条件极值点就在方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_k} = 0, \\ g_i = 0, \\ k = 1, 2, \dots, N; l = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

的所有解 $(x_1, x_2, \Lambda, x_N, \lambda_1, \lambda_2, \Lambda, \lambda_m)$ 所对应的点 (x_1, x_2, Λ, x_N) 中。



判断如上所得的点是否极值点需要一些特殊的方法 .
但在实际问题中往往遇到的是求最值问题,这时可以根据问题本身的性质判定最值的存在性,这样,只要把如上所得的点的函数值加以比较,最大的 (最小的)就是所考虑问题的最大值(最小值) .





3.3.3 案例分析

一、无约束优化案例分析

案例一：不允许缺货贮存模型—如何订货费用最省

问题背景： 商店或工厂需储存一定的原料，如果储存量太少，会影响销售或生产;储存量太大，要为仓库的占用和进行必要的保管而付出过多的费用。因此，确定一个最优的储存策略是必要的。

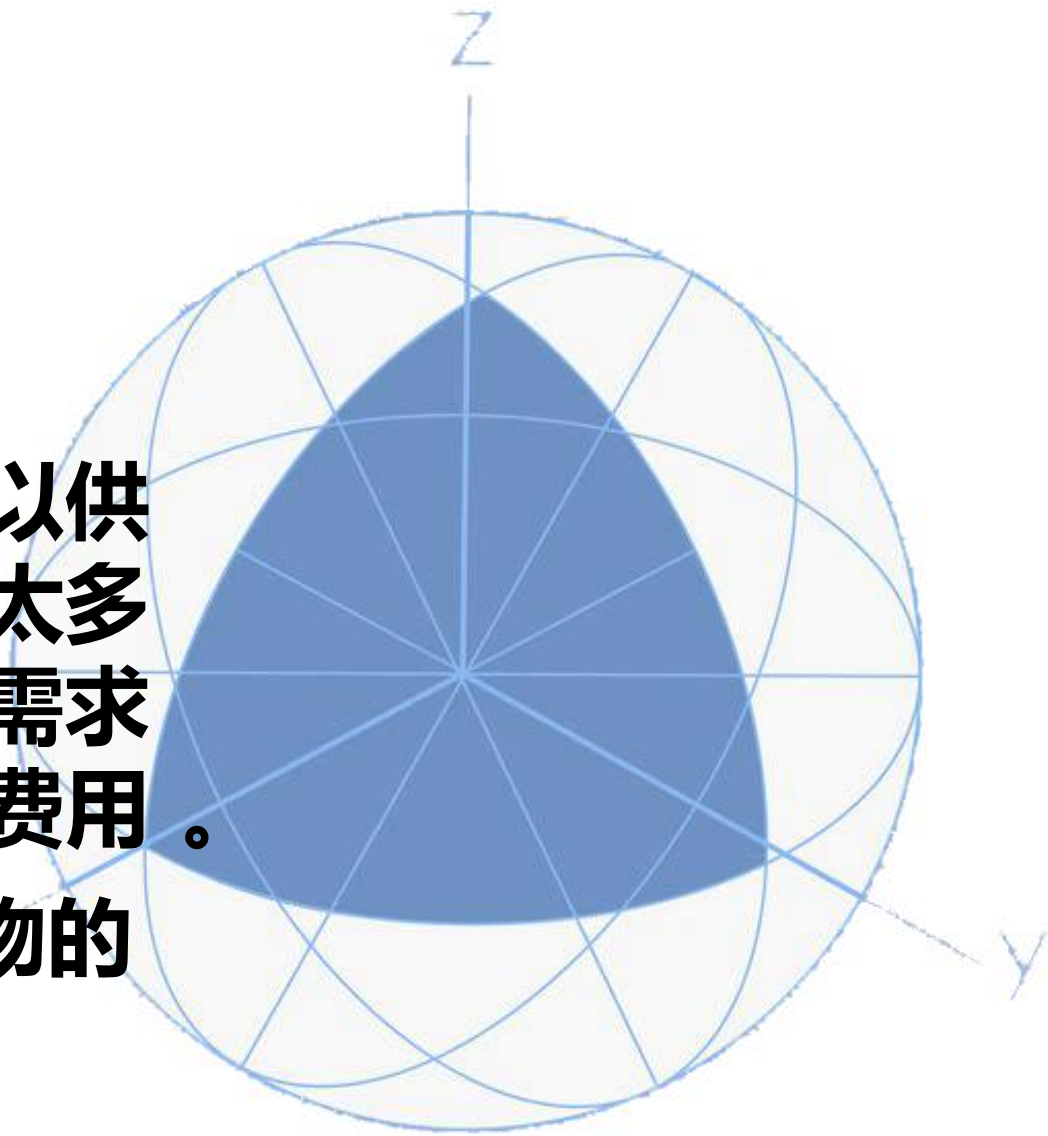


3.3.3 案例分析

【问题分析】

工厂要定期订购各种原料，存在仓库里以供生产之用，有个贮存多少的问题。存得太多，贮存费用高；存得太少，则无法满足需求。在不允许缺货的情形下，只考虑两种费用。

(1) 订货时需付的一次性订货费；(2) 货物的贮存费。



3.3.3 案例分析

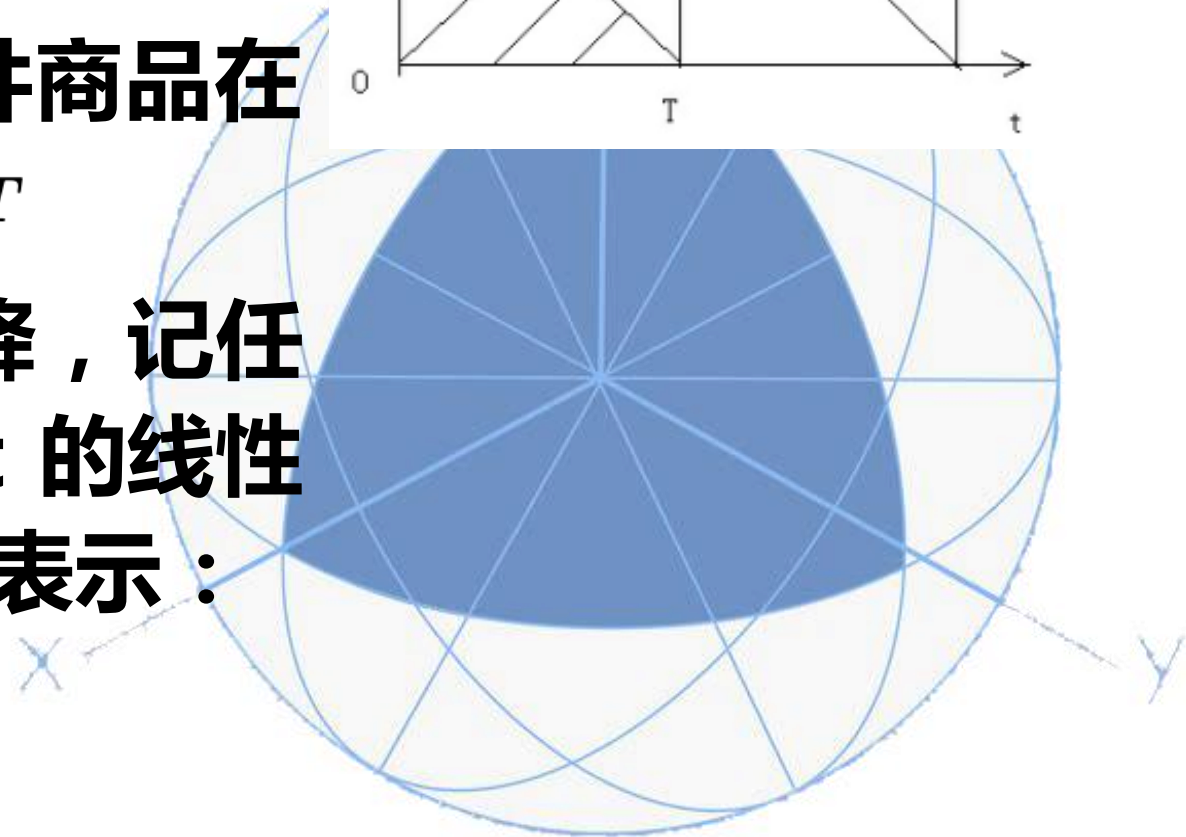
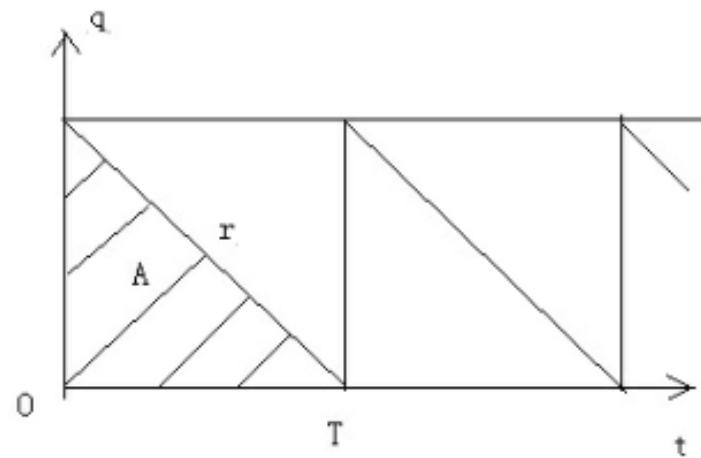
设每次订 货 费 为 $c_1 = 4000$, 每天每顿货物贮存费
为 $c_2 = 200$, 每天货物需求量为 $r = 10$ 吨 , 每 T 天
订 货 量 为 Q 吨 , 并假设当贮存量为 0 时 , 订 货 立
即到达 . 现在要以费用 C 为目标函数确定订 货 周 期
 T 与订 货 量 Q 的最优值 .

一个订 货 周期的总费用 $C =$ 订 货 费 $+$ 总贮存费

3.3.3 案例分析

注意到每天销售 r 件商品和进货 Q 件商品在 T 天内售完的事实，显然有： $Q = rT$

订货后贮存量随 t 增加而均匀下降，记任意时刻的贮存量为 q ，则 $q(t)$ 是 t 的线性递减函数，其变化规律可以用下图表示：





3.3.3 案例分析

【模型构建】现在考察一个订货周期的总费用

$C(T)$ = 订货费 c_1 + 总贮存费

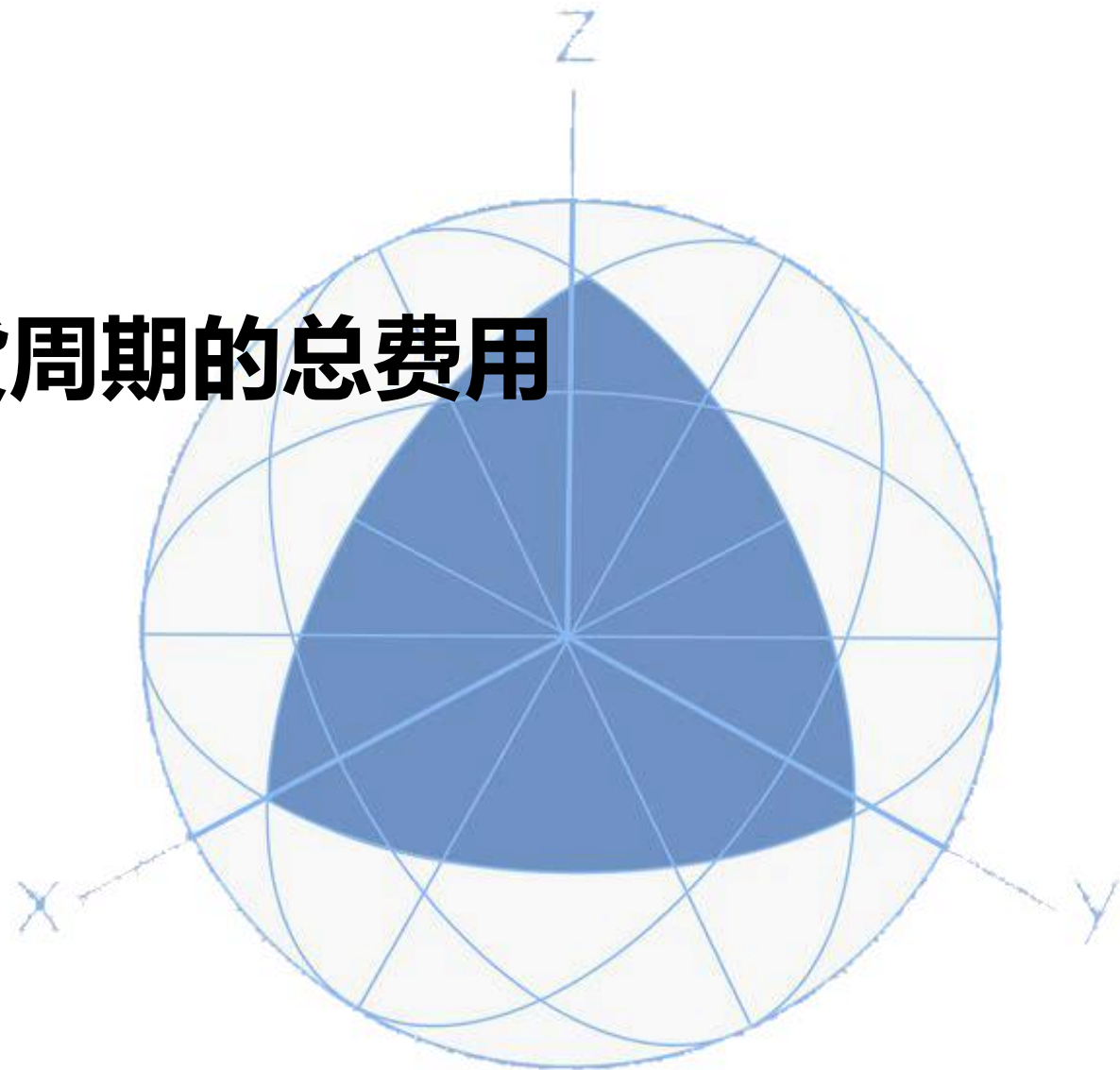
$$\text{总贮存费} = \sum_{t=0}^T c_2 \times q(t)$$

= 每天每顿货物的贮存费 c_2 \times

平均每天的贮存吨数 \times 天数

$$= c_2 \times \frac{Q+0}{2} \times T$$

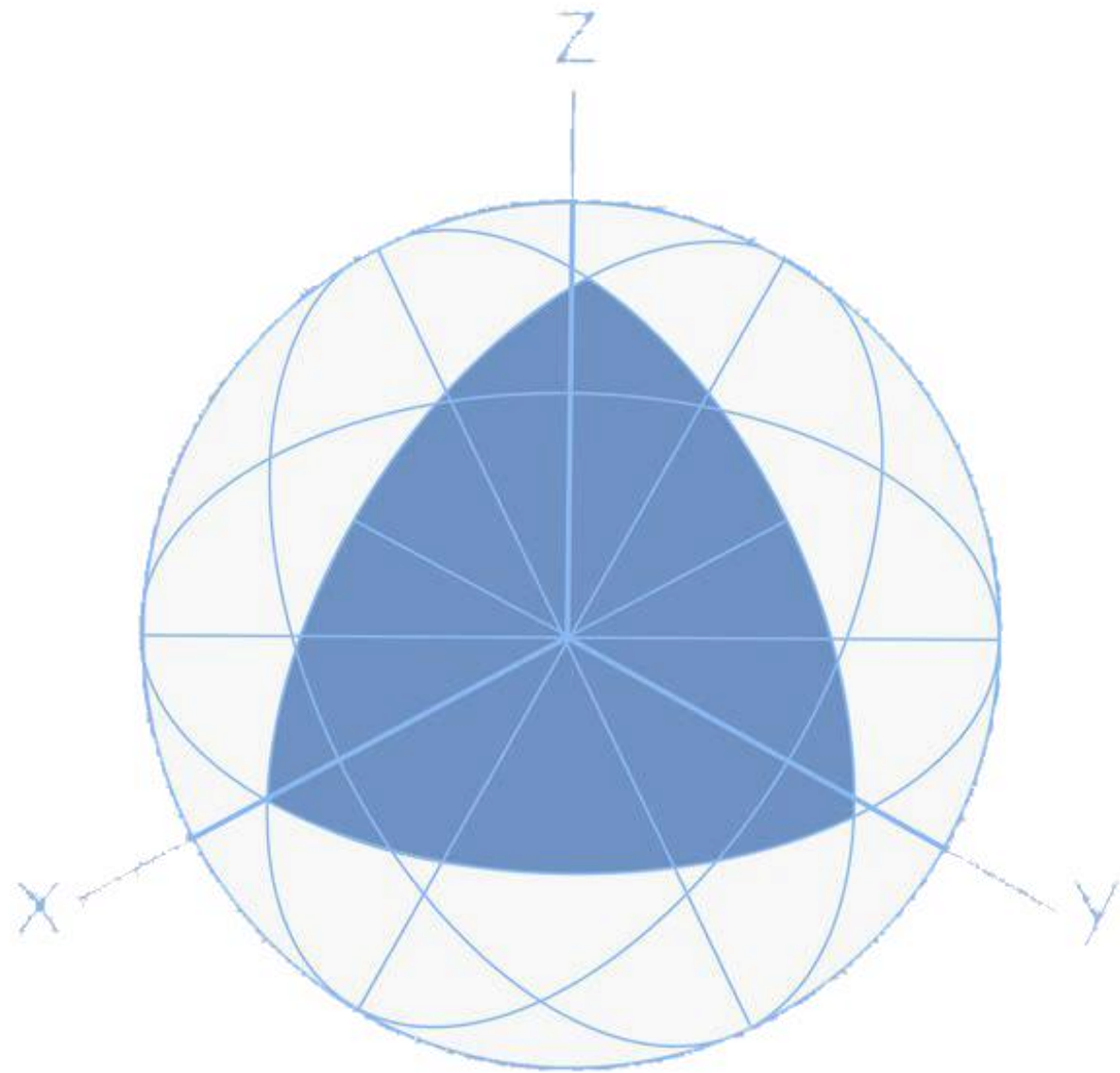
$$= \frac{1}{2} c_2 Q T$$



3.3.3 案例分析

所以平均每天费用为：

$$\begin{aligned}\bar{C}(T) &= \frac{C(T)}{T} \\ &= \frac{c_1}{T} + \frac{1}{2}c_2rT.\end{aligned}$$



3.3.3 案例分析

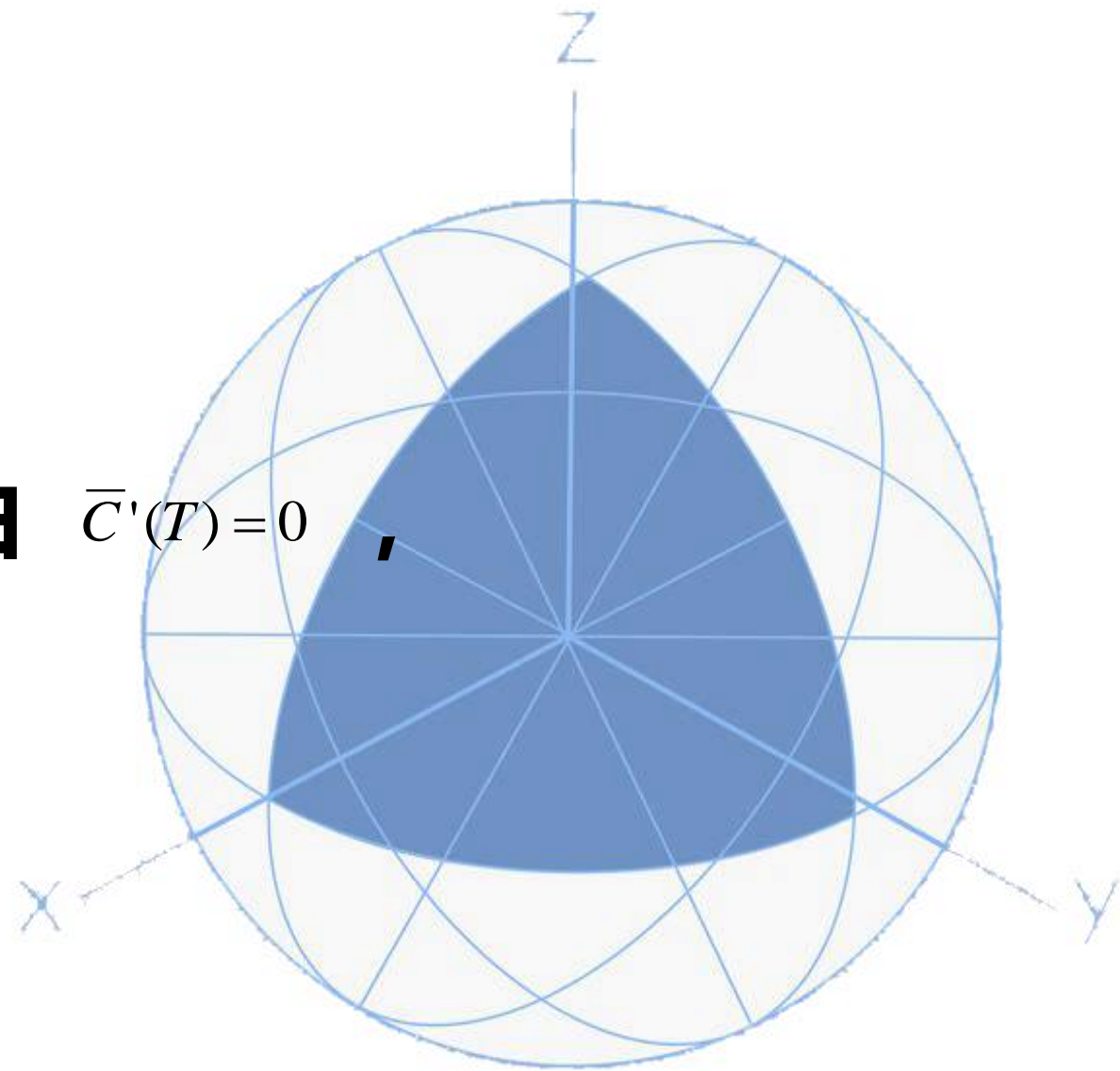
【模型求解】

现在要求 T 使 $\bar{C}(T)$ 的值最小,由 $\bar{C}'(T)=0$,
得最佳进货周期 :

$$T = \sqrt{\frac{2c_1}{rc_2}}$$

或

$$T = \frac{Q}{r}$$

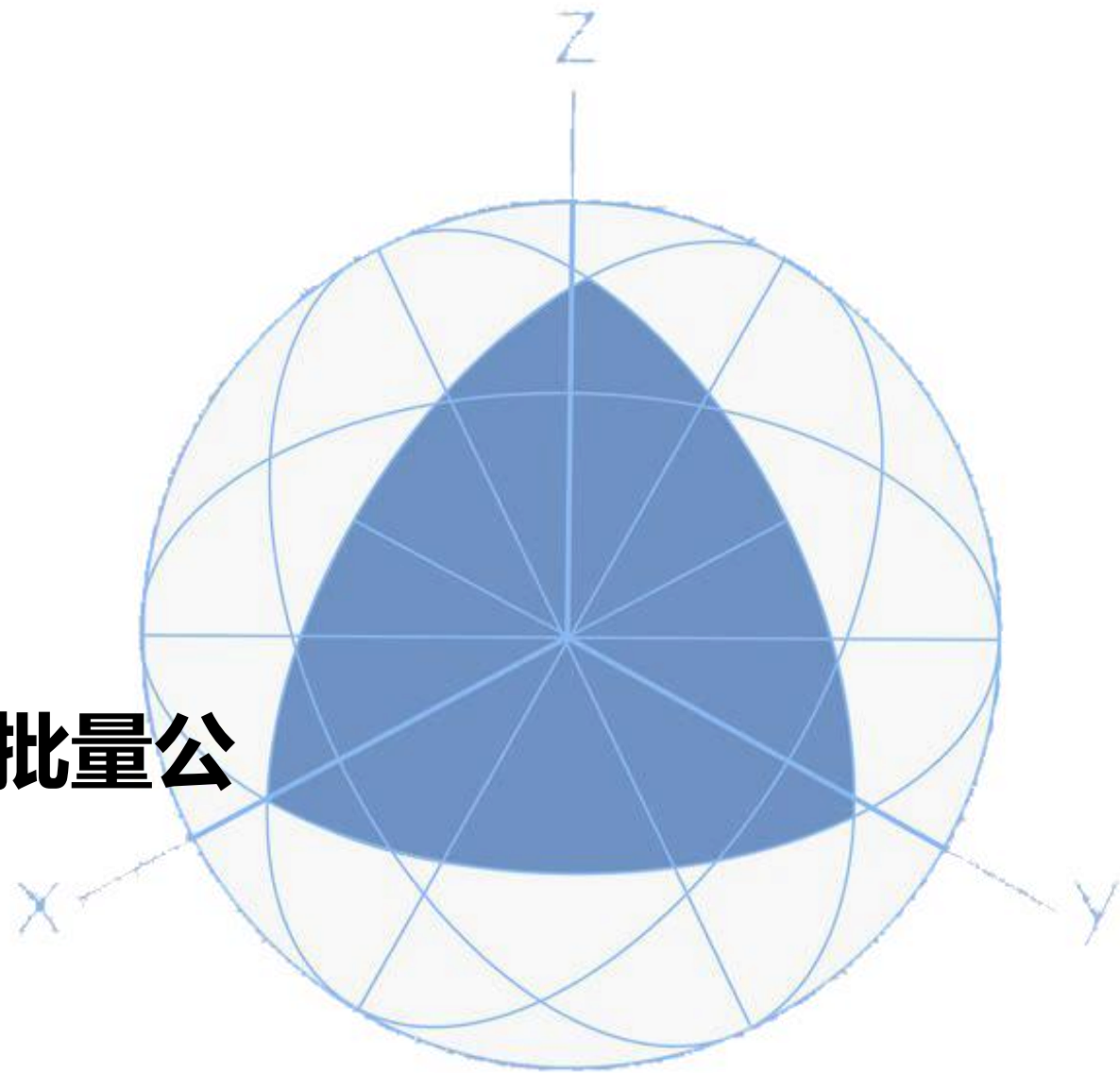


3.3.3 案例分析

此时最佳进货量：

$$Q = \sqrt{\frac{2c_1r}{c_2}}$$

这就是经济理论中著名的经济订货批量公式.

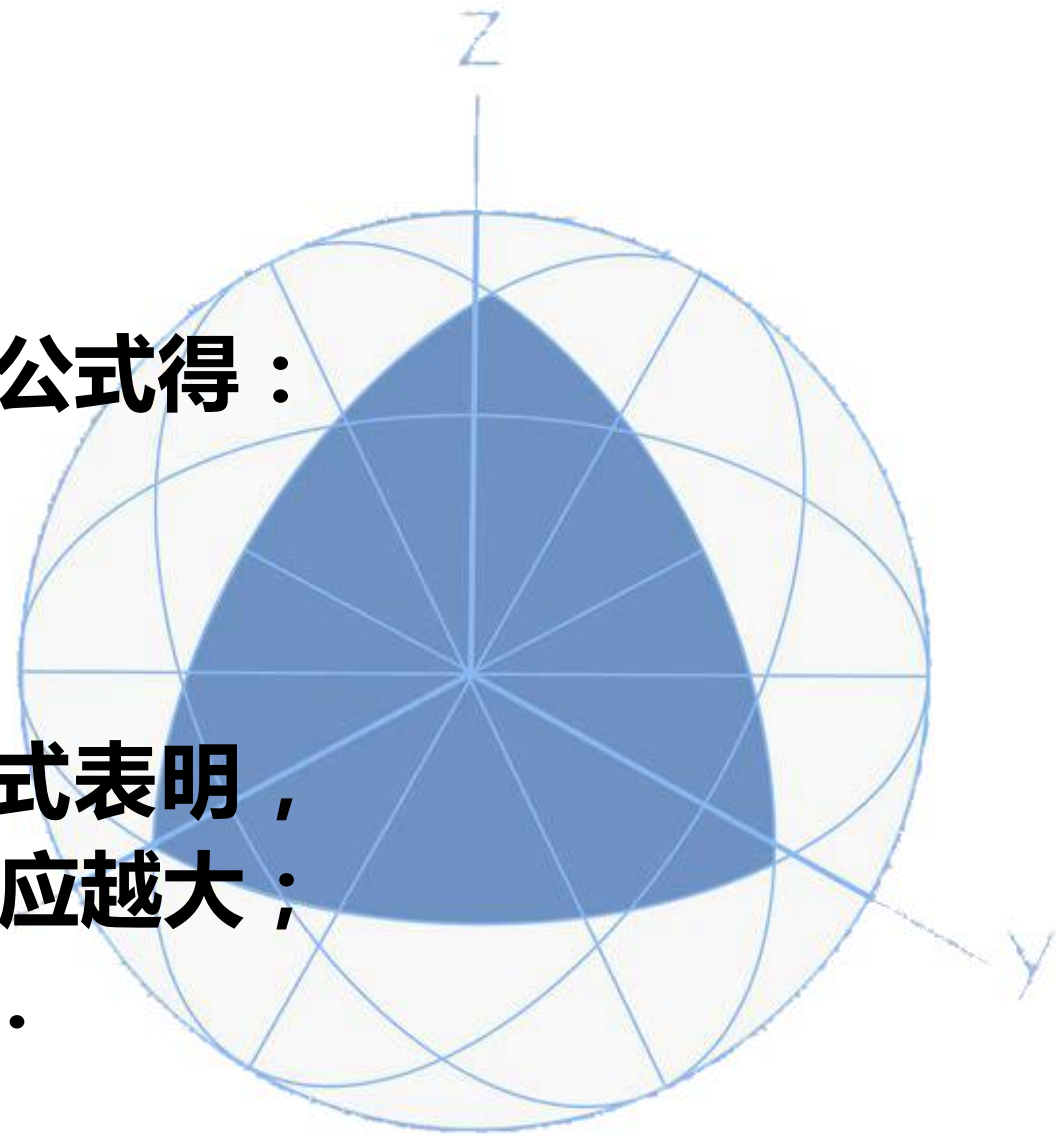


3.3.3 案例分析

把 $c_1 = 4000$, $c_2 = 200$, $r = 10$ 代入上面的公式得：

$$Q = \sqrt{\frac{2c_1 r}{c_2}} = \sqrt{\frac{2 \times 4000 \times 10}{200}} = 20 \text{ 吨}.$$

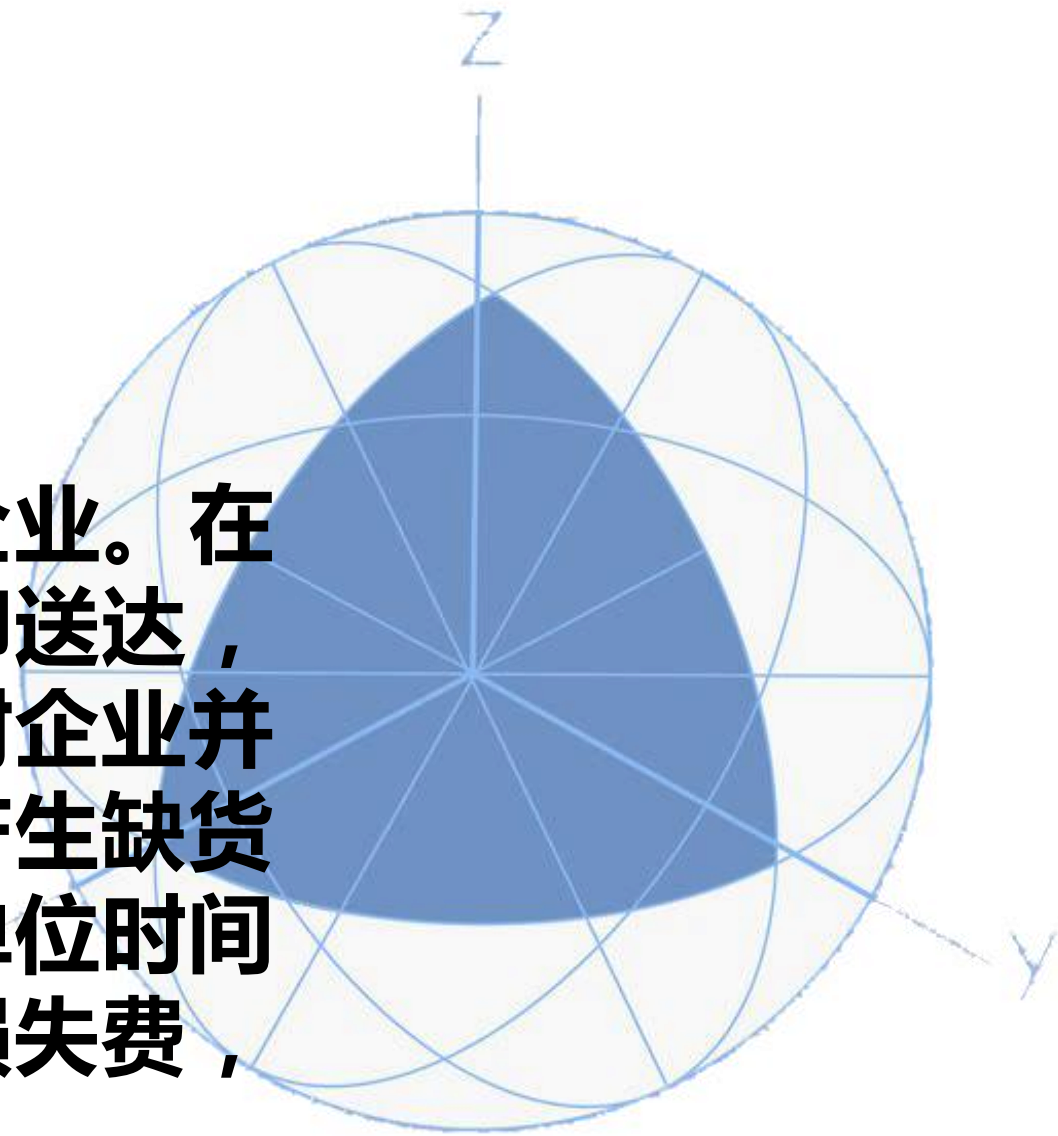
注意：上面的最佳进货周期和进货量公式表明，
订货越高，需求量越大，则订货批量 Q 应越大；
单位贮存费越高，则订货批量 Q 应越小。



3.3.3 案例分析

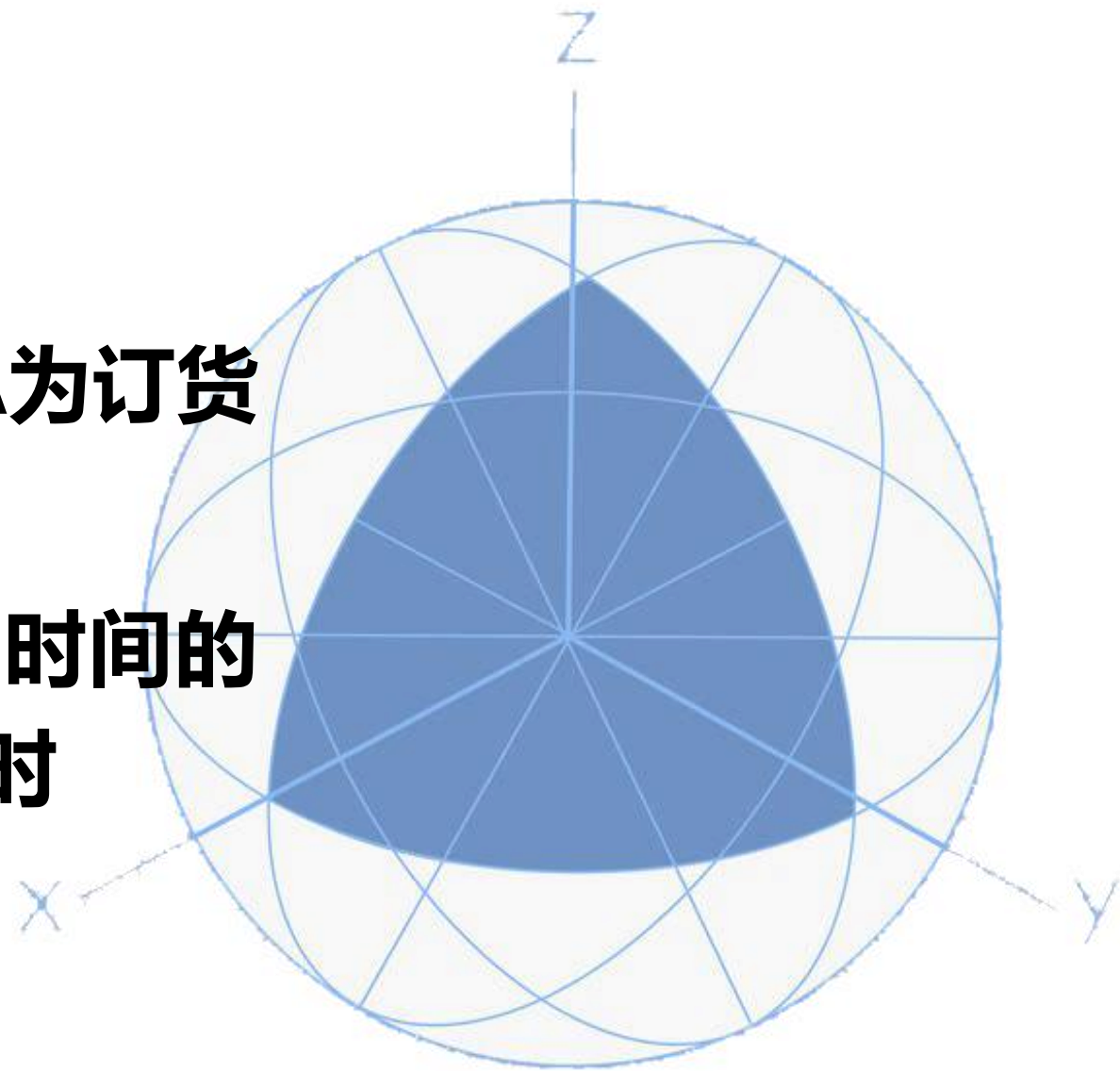
案例二：允许缺货的存储模型

考察一个存储和销售行为是周期性的企业。在每个周期之初一次性进货，且货源立即送达，企业按一定的速度销售。当销售完毕时企业并非马上进货而是允许缺货，但缺货会产生缺货损失费。已知进货手续费，单位产品单位时间的存储费和单位商品单位时间的缺货损失费，如何确定最佳的进货周期？



3.3.3 案例分析

设 T 为进货周期， R 为销售速度， A 为订货费用， B 为每件商品存储单位时间的费用， C 为一件商品缺货单位时间的损失费用， H 为一个周期中的缺货时



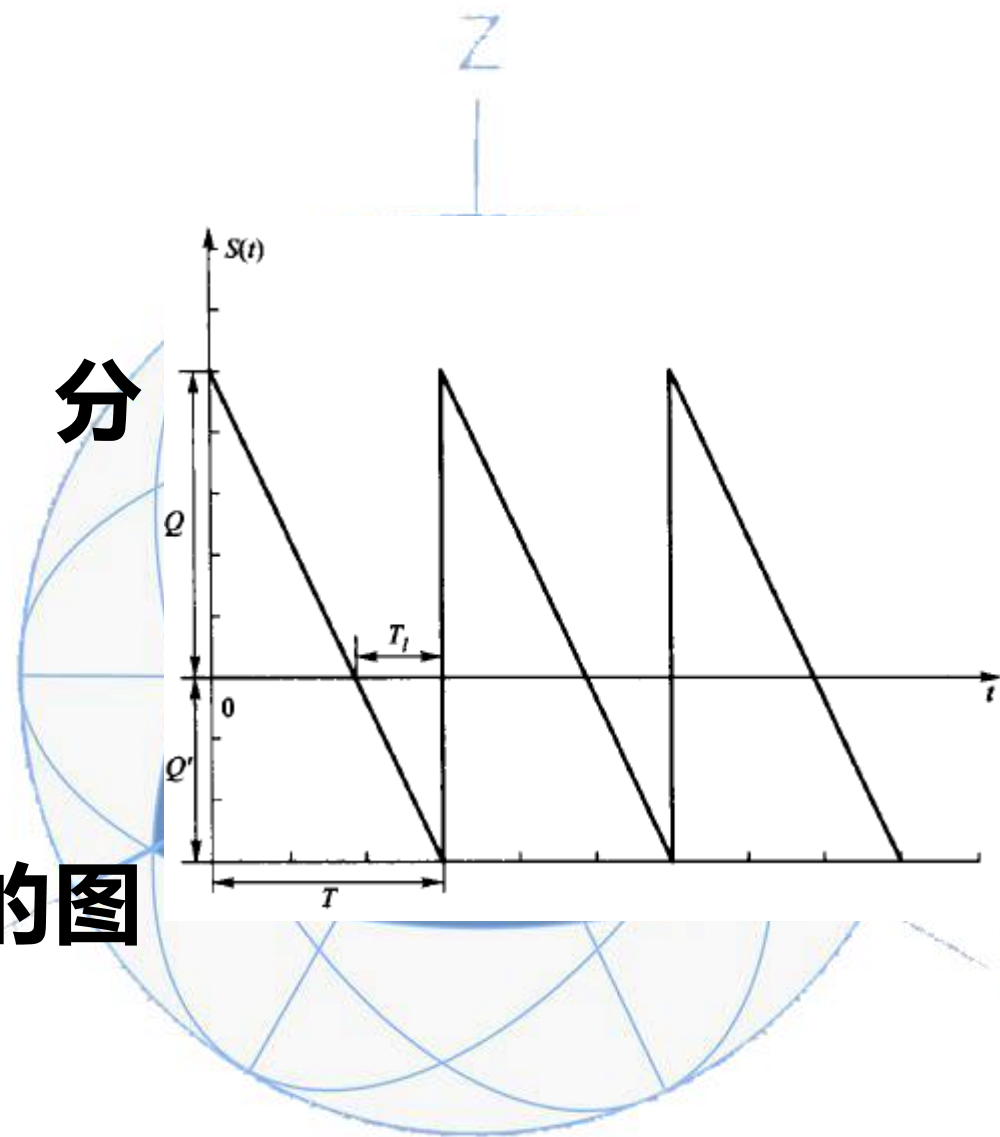
3.3.3 案例分析

间.易知最大储存量 Q 和最大缺货量 Q' 分别满足

$$Q = (T - H)R$$

$$Q' = HR$$

令 $S(t)$ 表示 t 时刻的存储量，则 $S(t)$ 的图形如图4 - 27所示.



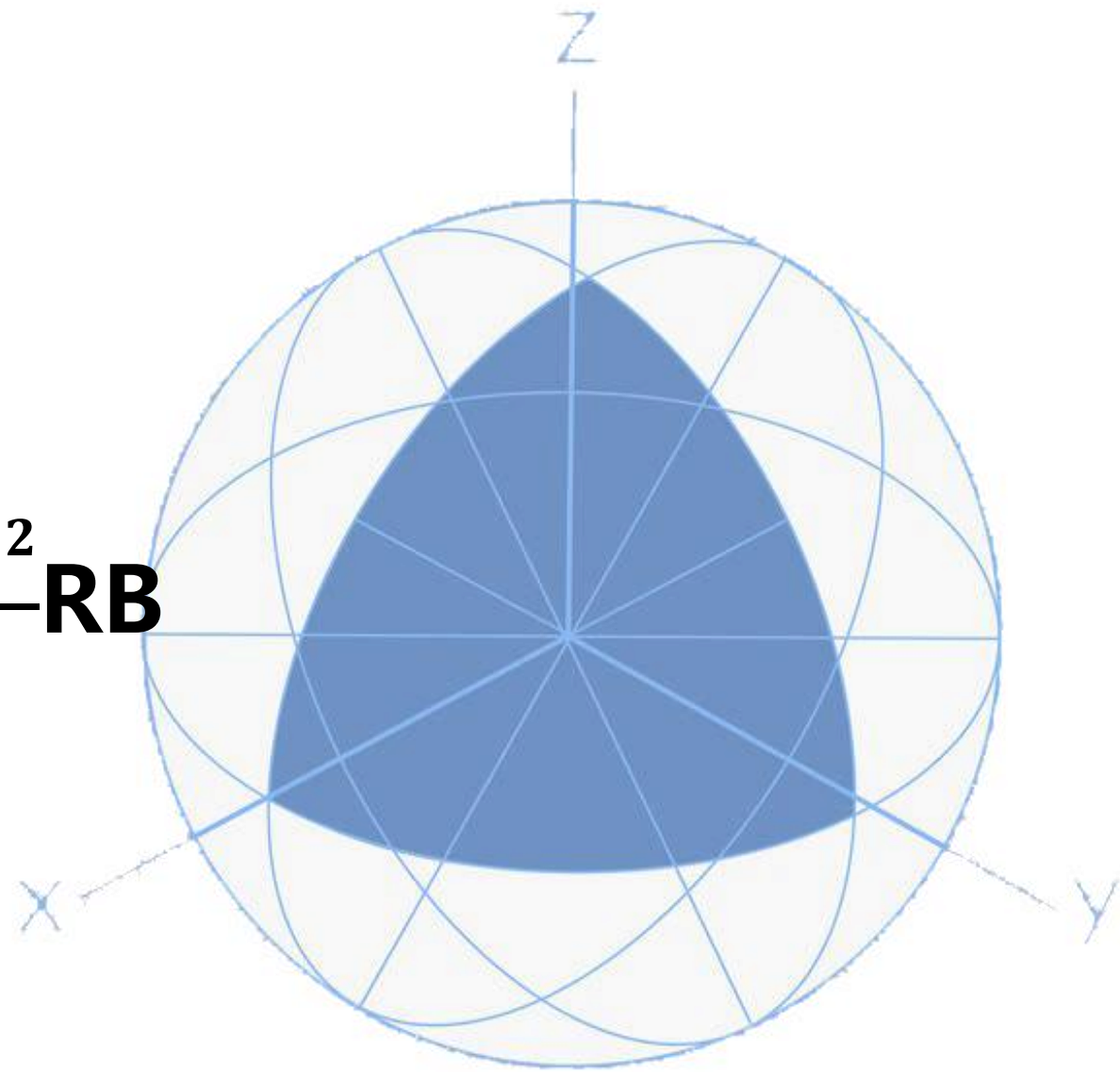
3.3.3 案例分析

一个周期内的总储存费用为

$$\int_0^{T-H} S(t) B dt = \frac{Q}{2}(T-H)B = \frac{(T-H)^2}{2}RB$$

一个周期内缺货损失的费用为

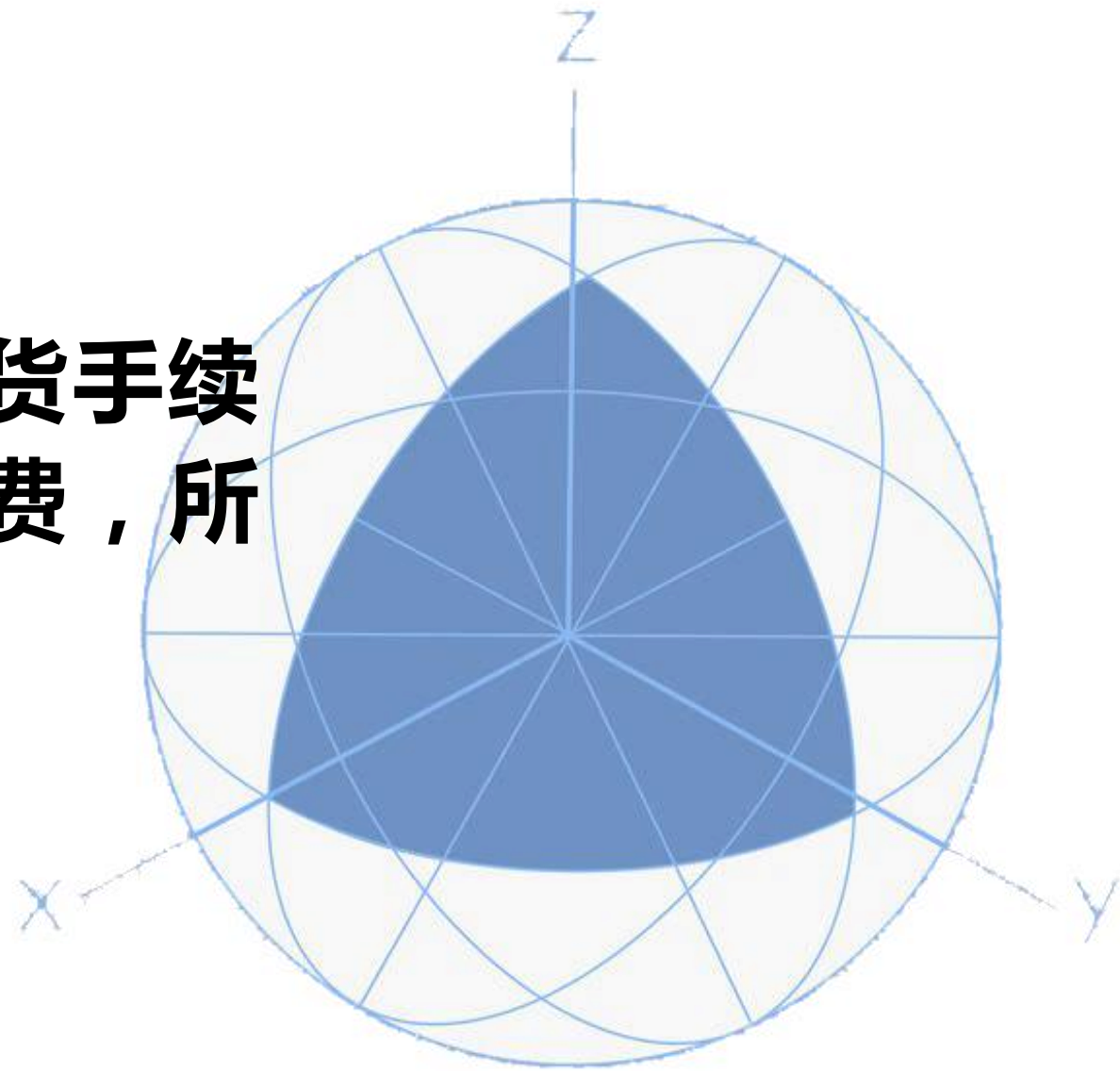
$$\int_{T-H}^T S(t) B dt = \frac{Q'}{2}HB = \frac{H^2}{2}RB$$



3.3.3 案例分析

因此，一周期内的总费用为订货手续费加上总的存储费和缺货损失费，所以单位时间的费用为

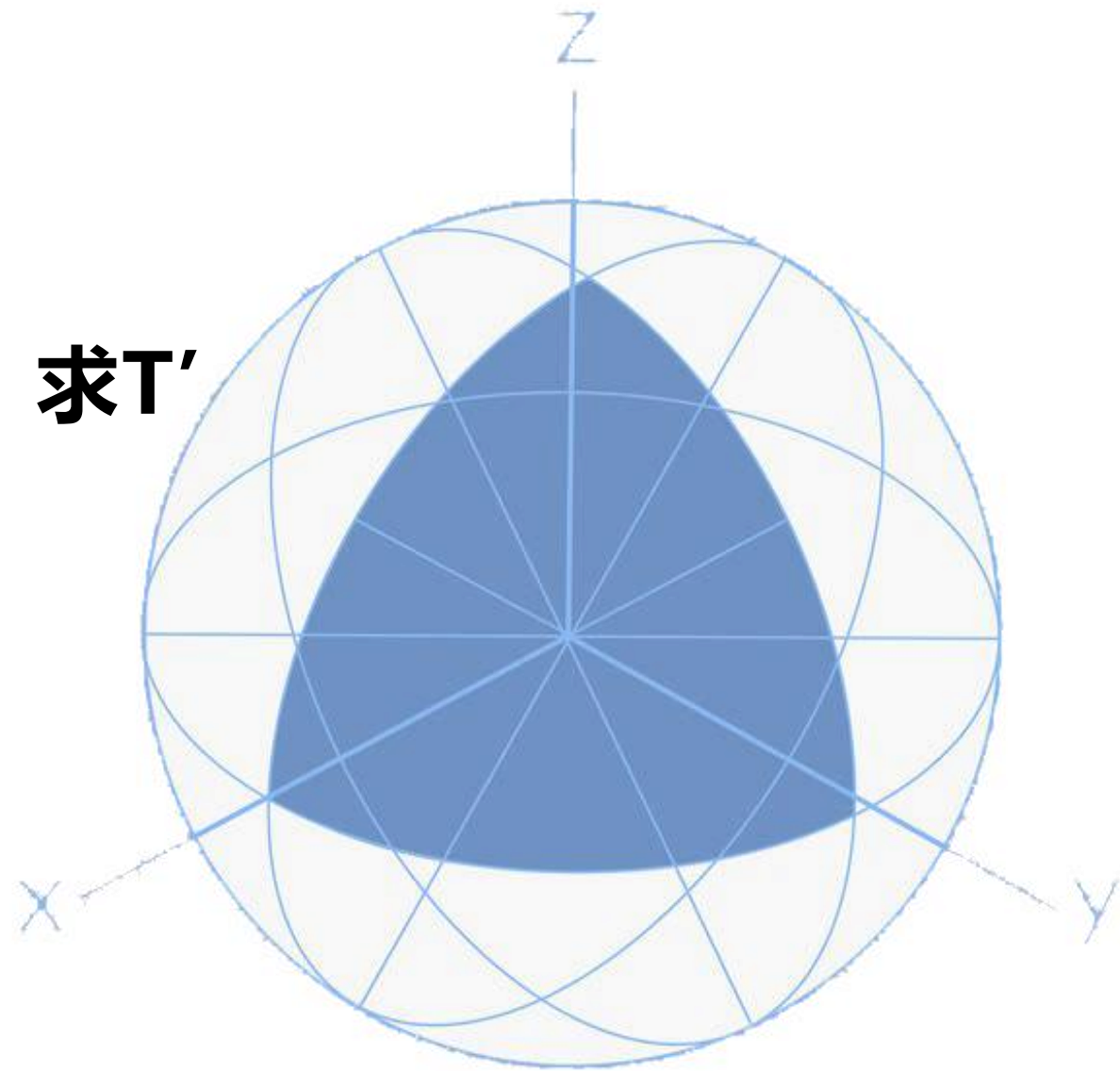
$$C(T, H) = \frac{A}{T} + \frac{(T-H)^2}{2T} RB + \frac{H^2}{2T} RC$$



3.3.3 案例分析

单位时间费用最省的数学模型为，求 T'
和 H' 使 $C(T,H)$ 取到的最小值，或

$$C(T,H) = \min_{T,H} C(T,H)$$



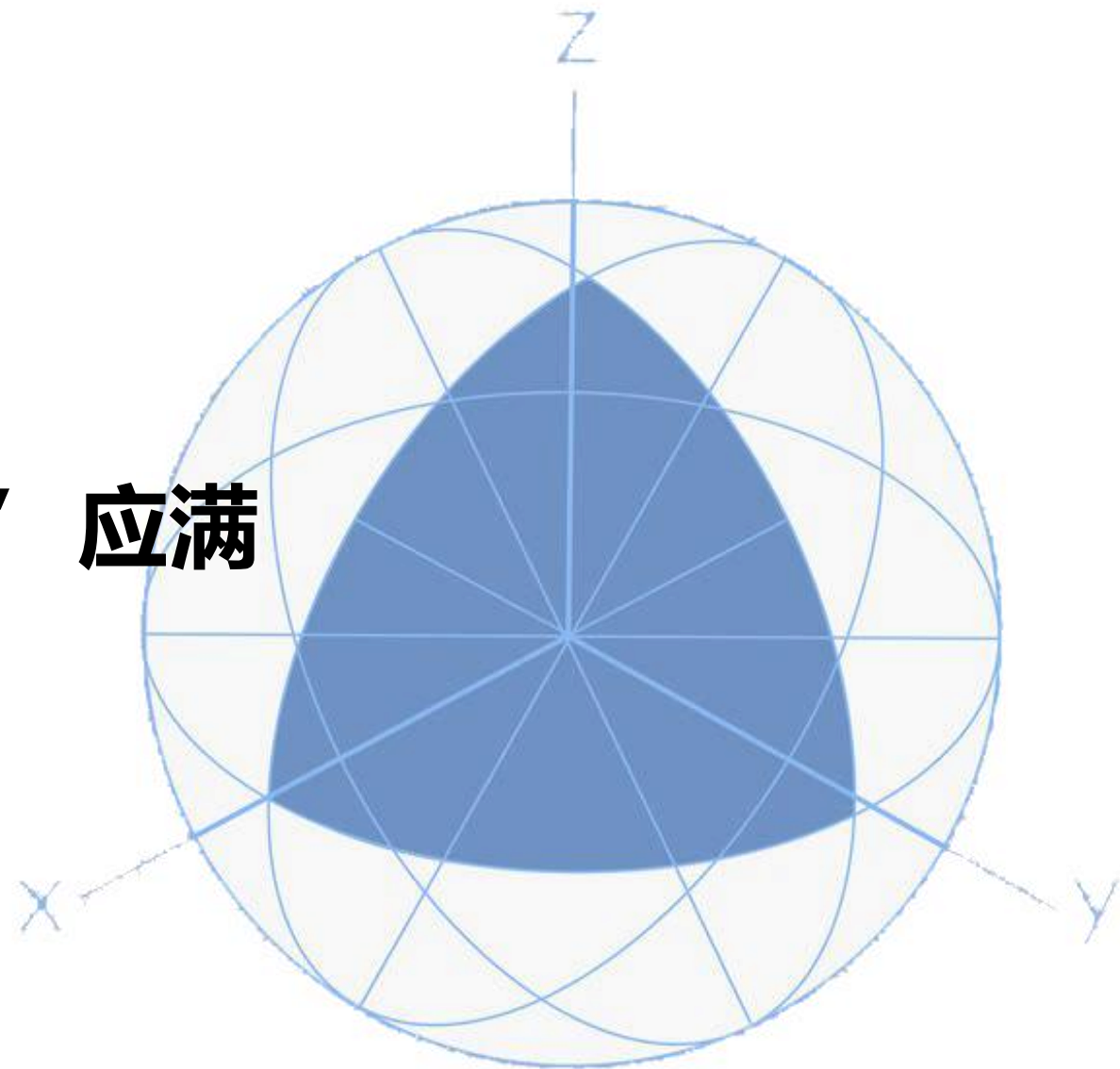
3.3.3 案例分析

3.模型的求解与应用

根据极值必要条件， T' 和 H' 应满足

$$\frac{\partial C(T,H)}{\partial T} = -\frac{A}{T^2} + \frac{RB}{2} - \frac{H^2}{2T^2} R(B+C) = 0$$

$$\frac{\partial C(T,H)}{\partial H} = -RB + R(B+C)\frac{H}{T} = 0$$



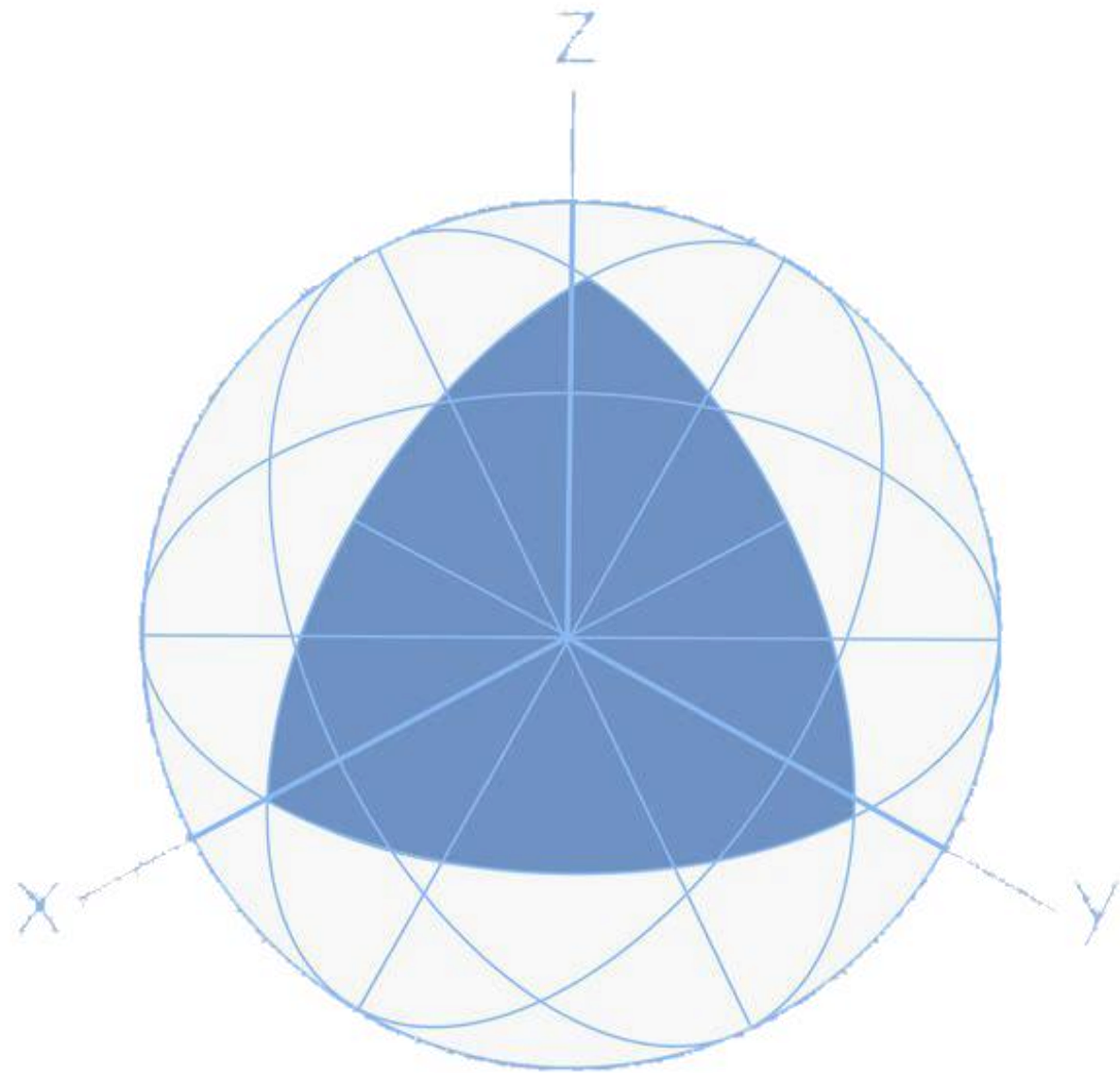
3.3.3 案例分析

解此二式，得

$$T' = \sqrt{\frac{2A(B+C)}{RBC}}, \quad H' = \sqrt{\frac{2AB}{RC(B+C)}}$$

进一步可得最优进货量

$$Q' = \sqrt{\frac{2RAC}{B(B+C)}}$$

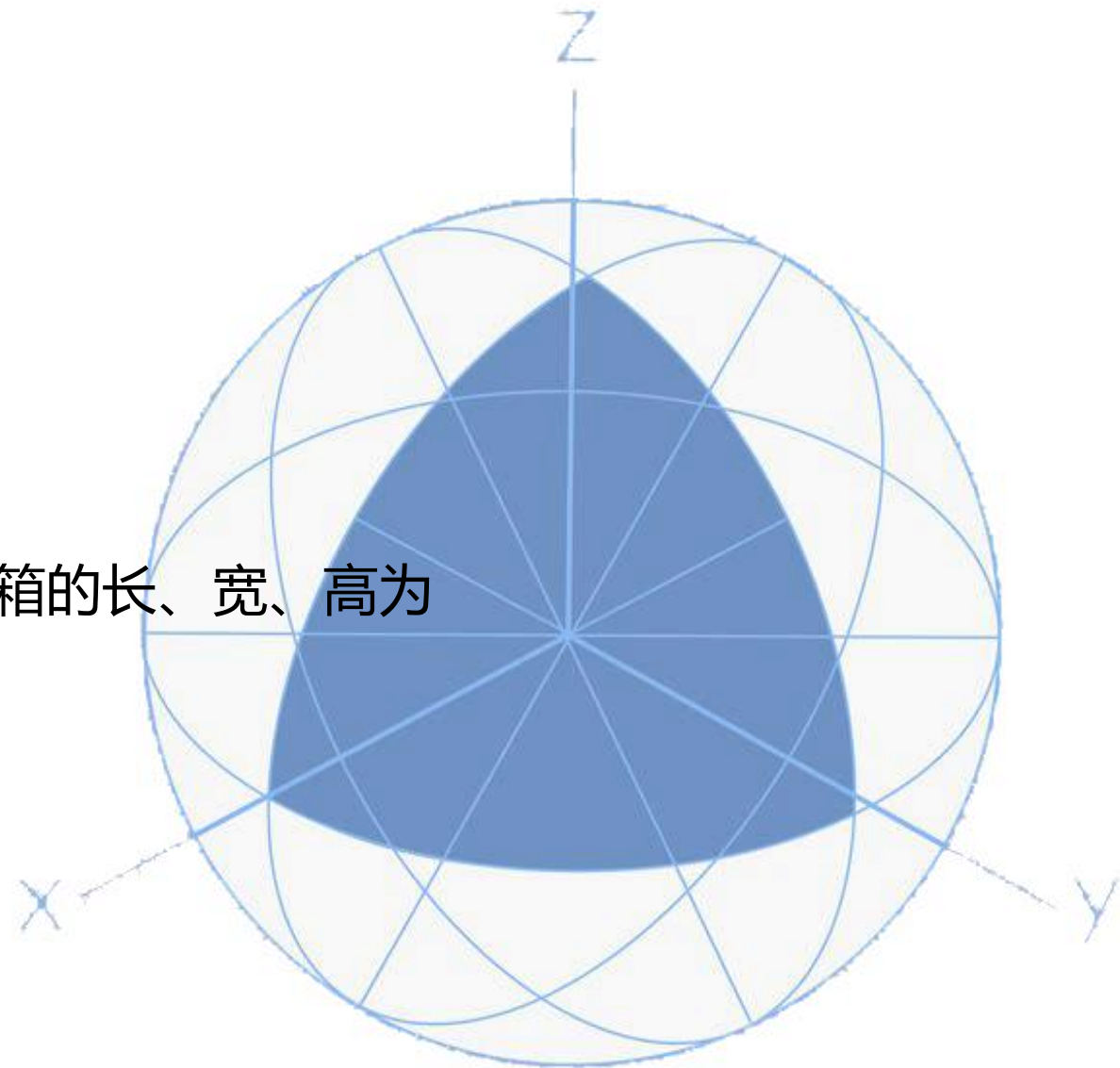


3.3.3 案例分析

二、约束优化案例分析

案例一：无盖长方形水箱用料问题

要制造一个容积为 αm^3 的无盖长方形水箱,问这个水箱的长、宽、高为多少米时,用料最省?



3.3.3 案例分析

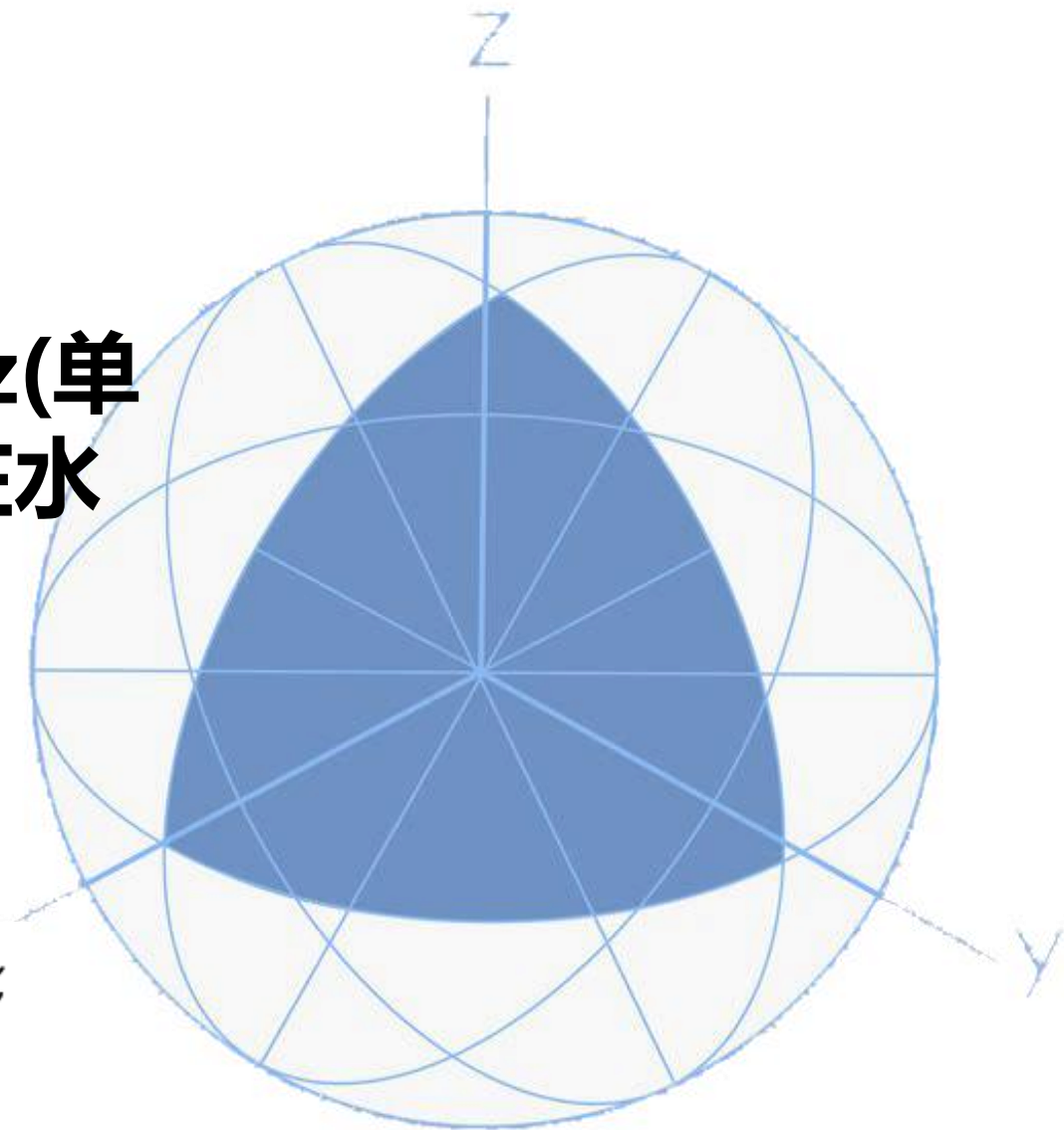
解 设水箱的长为 x 、宽为 y 、高为 z (单位:m), 那么问题实际上要求的是, 在水箱容积

$$xyz = \alpha$$

的约束条件下, 求水箱表面积

$$S(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$$

的最小值 .



3.3.3 案例分析

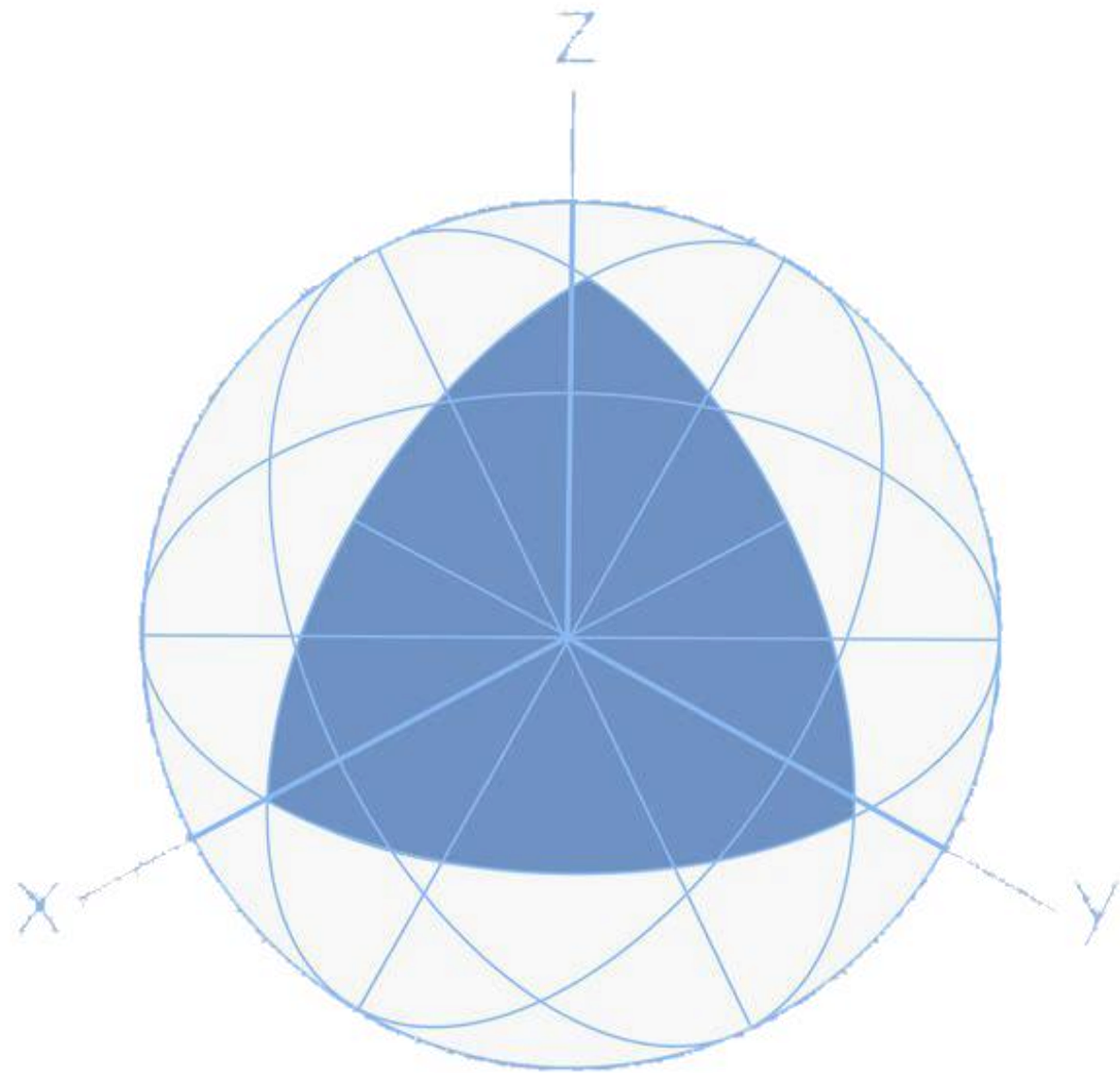
作 Lagrange 函数

$$L(x,y,z,\lambda)=xy+2xz+2yz-\lambda(xyz-\alpha)$$

从方程组

$$\frac{\partial L}{\partial x}=y+2z-\lambda yz=0, \quad \frac{\partial L}{\partial y}=x+2z-\lambda xz=0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial z}=2x+2y-\lambda xy=0, \quad xyz-\alpha=0,$$



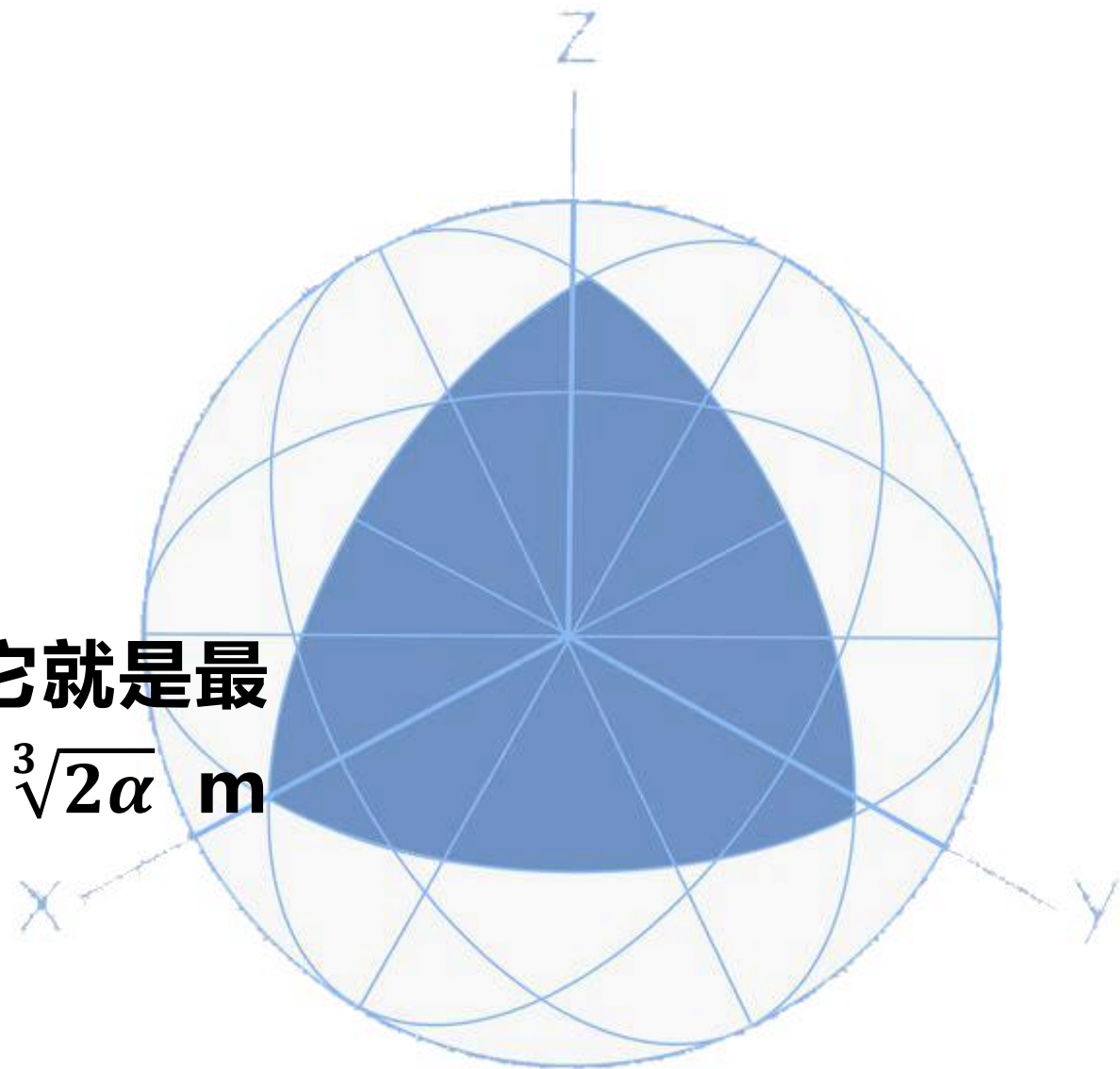
3.3.3 案例分析

得到唯一解 .

$$x = \sqrt[3]{2\alpha}, \quad y = \sqrt[3]{2\alpha}, \quad z = \frac{\sqrt[3]{2\alpha}}{2}$$

由于问题的最小值必定存在 . 因此 , 它就是最小值点,也就是说 , 水箱的底为边长为 $\sqrt[3]{2\alpha}$ m

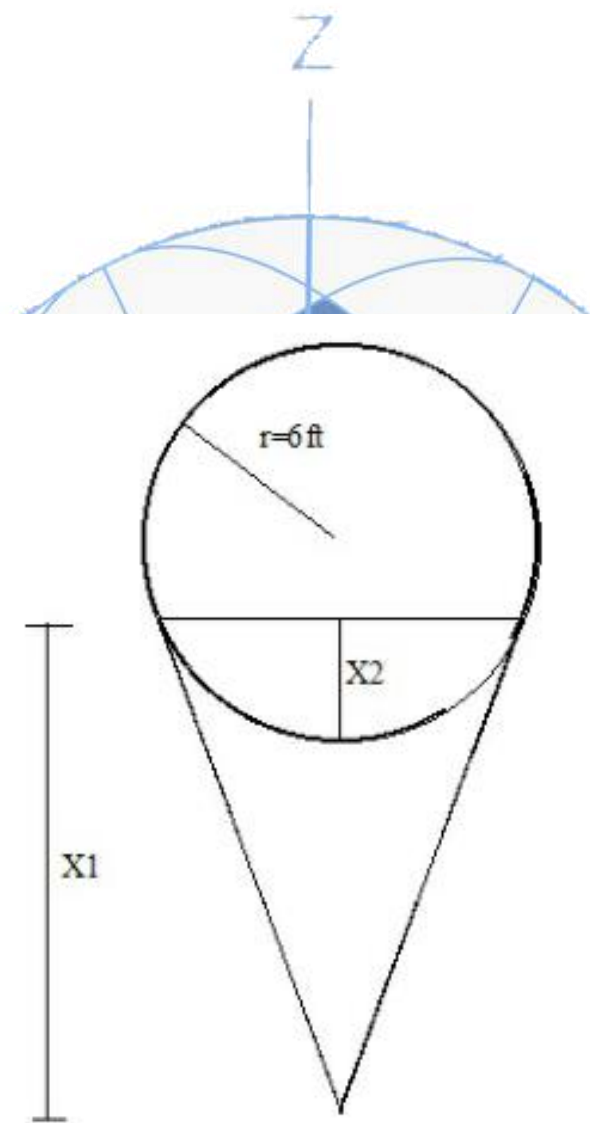
的正方形 , 高为 $\frac{\sqrt[3]{2\alpha}}{2}$ 时 , 用料最省 .



3.3.3 案例分析

案例三：航天飞机的水箱

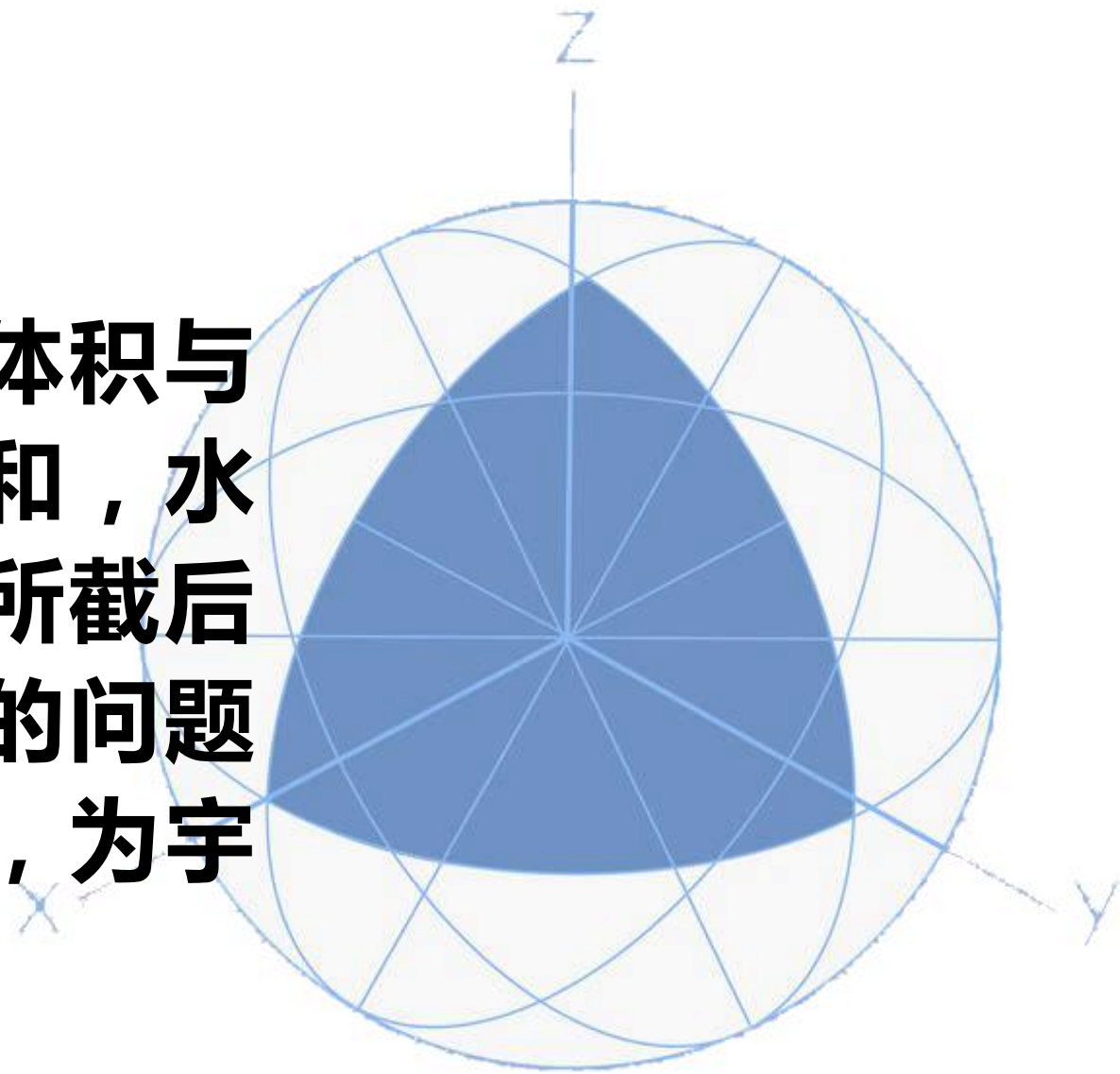
问题背景：考虑航天飞机上固定在飞机墙上供宇航员使用的水箱．水箱的形状为在直圆锥顶上装一个球体（像冰激凌的形状，下图）．如果球体的半径限定为正好 6 英尺，设计的水箱表面积为 450 平方英尺， x_1 为直圆锥的高， x_2 为球冠的高，请确定 x_1 ， x_2 的尺寸，使水箱容积最大．



表面积=450ft²

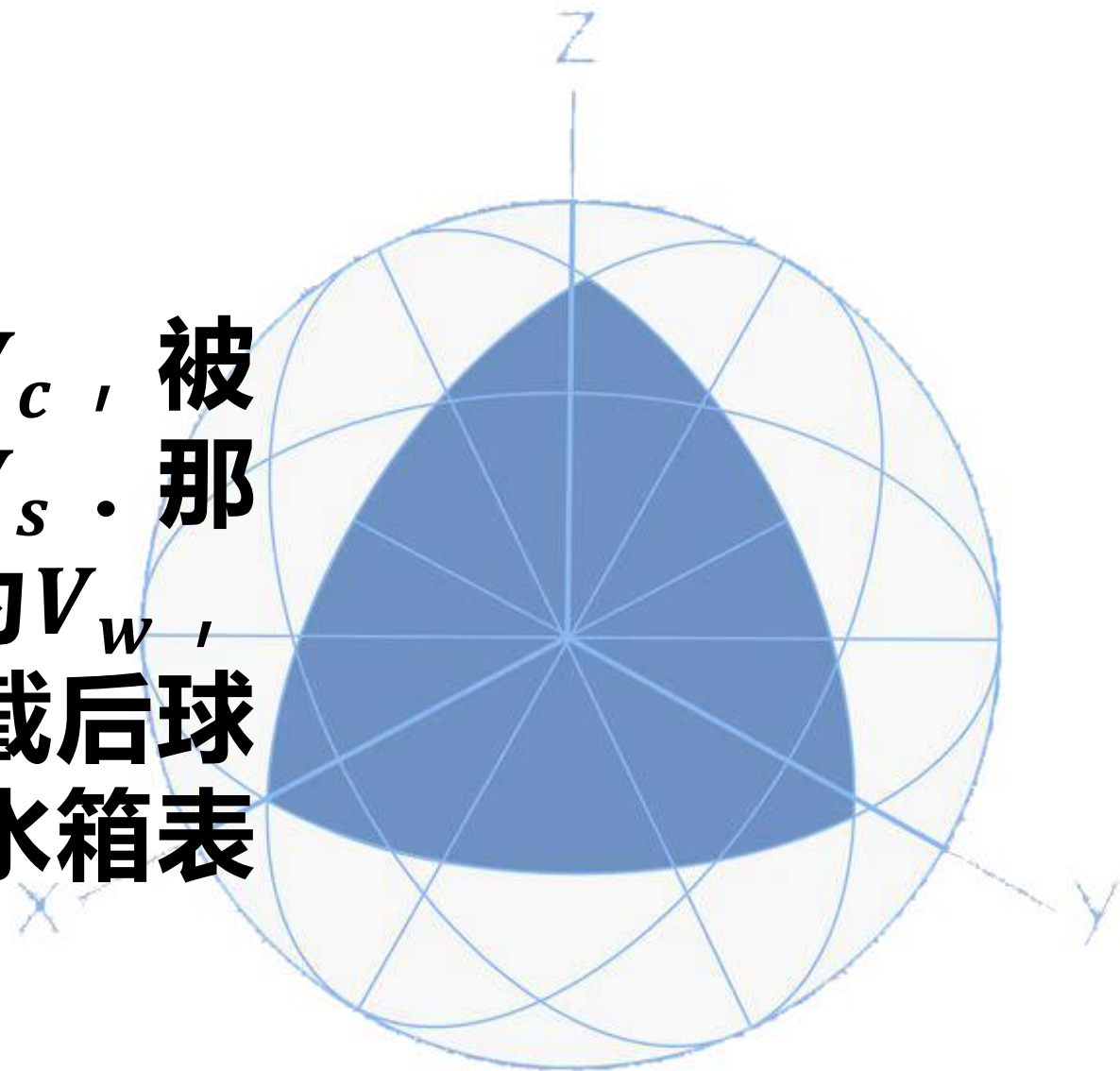
3.3.3 案例分析

【问题分析】水箱容积是锥体体积与被锥所截后球体部分的体积之和，水箱表面积为锥的表面积与被锥所截后球体部分的表面积之和，我们的问题是在水箱表面积一定的前提下，为宇航员最大化水箱容积。



3.3.3 案例分析

【符号假设】 记锥顶体积为 V_c , 被锥所截后球体部分的体积为 V_s . 那么水箱容积为 $V_c + V_s$, 记为 V_w , 记锥的表面积为 S_c , 被锥所截后球体部分的表面积为 S_s , 那么水箱表面积为 S_T .

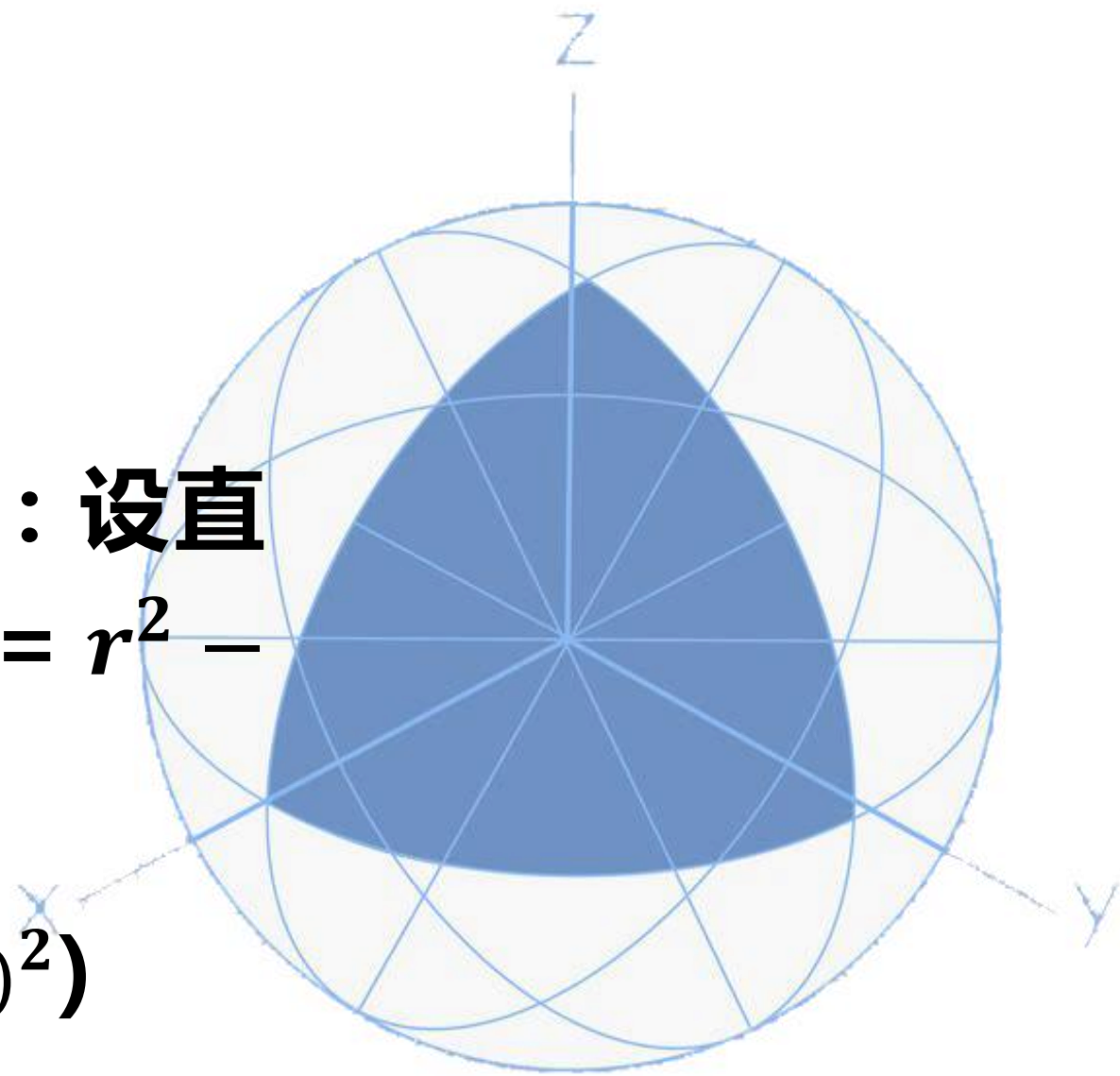


3.3.3 案例分析

【模型构建】

先求出锥顶的体积 V_c 的表达式：设直圆锥底园半径为 R 。则 $R^2 = r^2 - (r - x_2)^2$ 。从而锥顶的体积为

$$V_c = \frac{1}{3} x_1 \pi R^2 = \frac{\pi}{3} (2rx_1x_2 - x_1(x_2)^2)$$



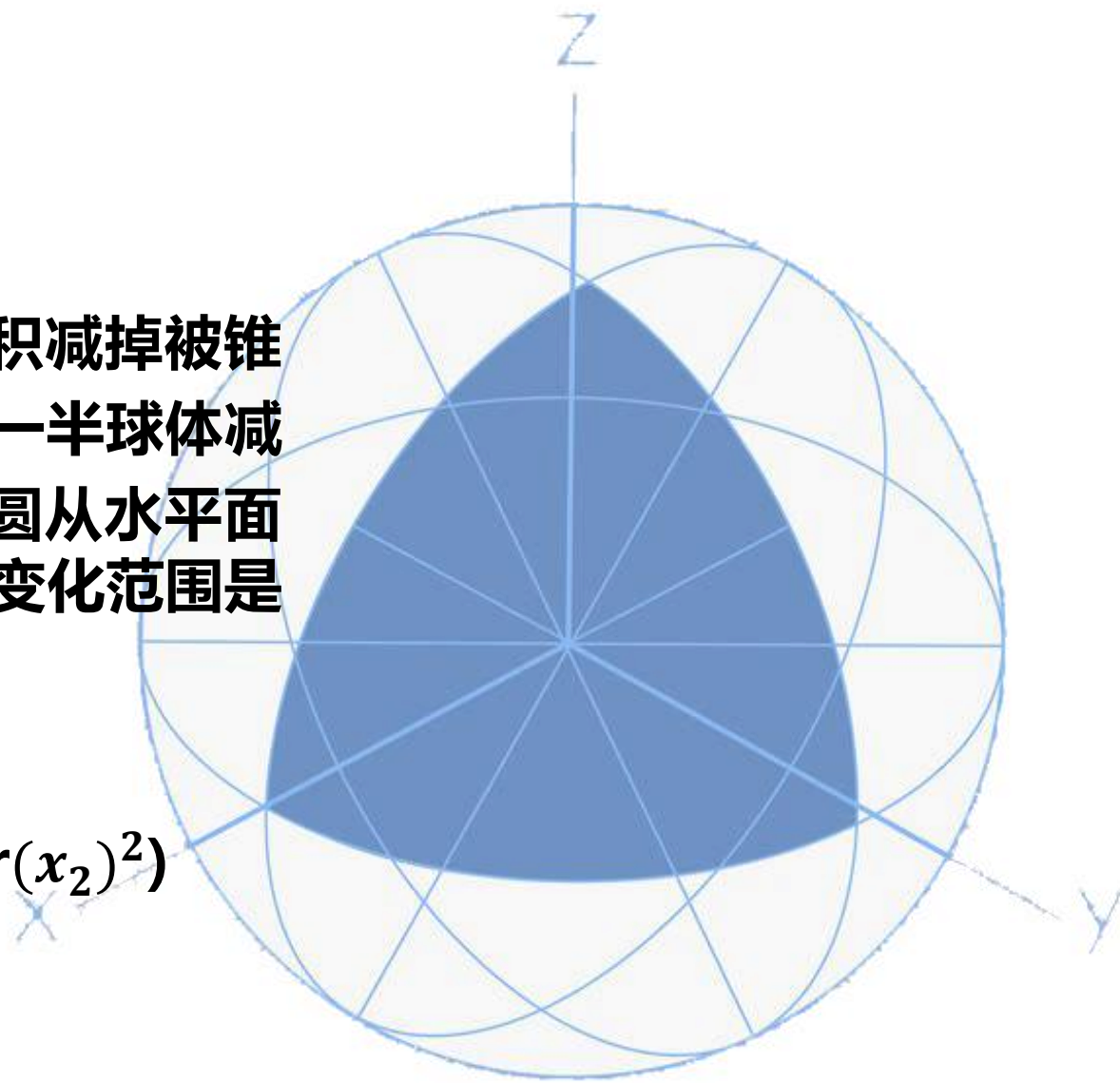


3.3.3 案例分析

被锥所截后球体部分的体积 V_s 就是整个球体的体积减掉被锥截掉的那部分，或者半个球的体积 $\frac{2}{3}\pi r^3$ 加上另外一半球体减掉被锥截掉的那部分，这部分始终是半径变化的圆从水平面变化到 $z=r-x_2$ ，这个圆的面积为 $\pi(r^2 - z^2)$ ， z 的变化范围是 $(0, r-x_2)$ 。

因此，被锥所截后球体部分的体积

$$V_s = \frac{2}{3}\pi r^3 + \int_0^{r-x_2} \pi(r^2 - z^2) dz = \frac{\pi}{3}(4r^3 + (x_2)^3 - 3r(x_2)^2)$$





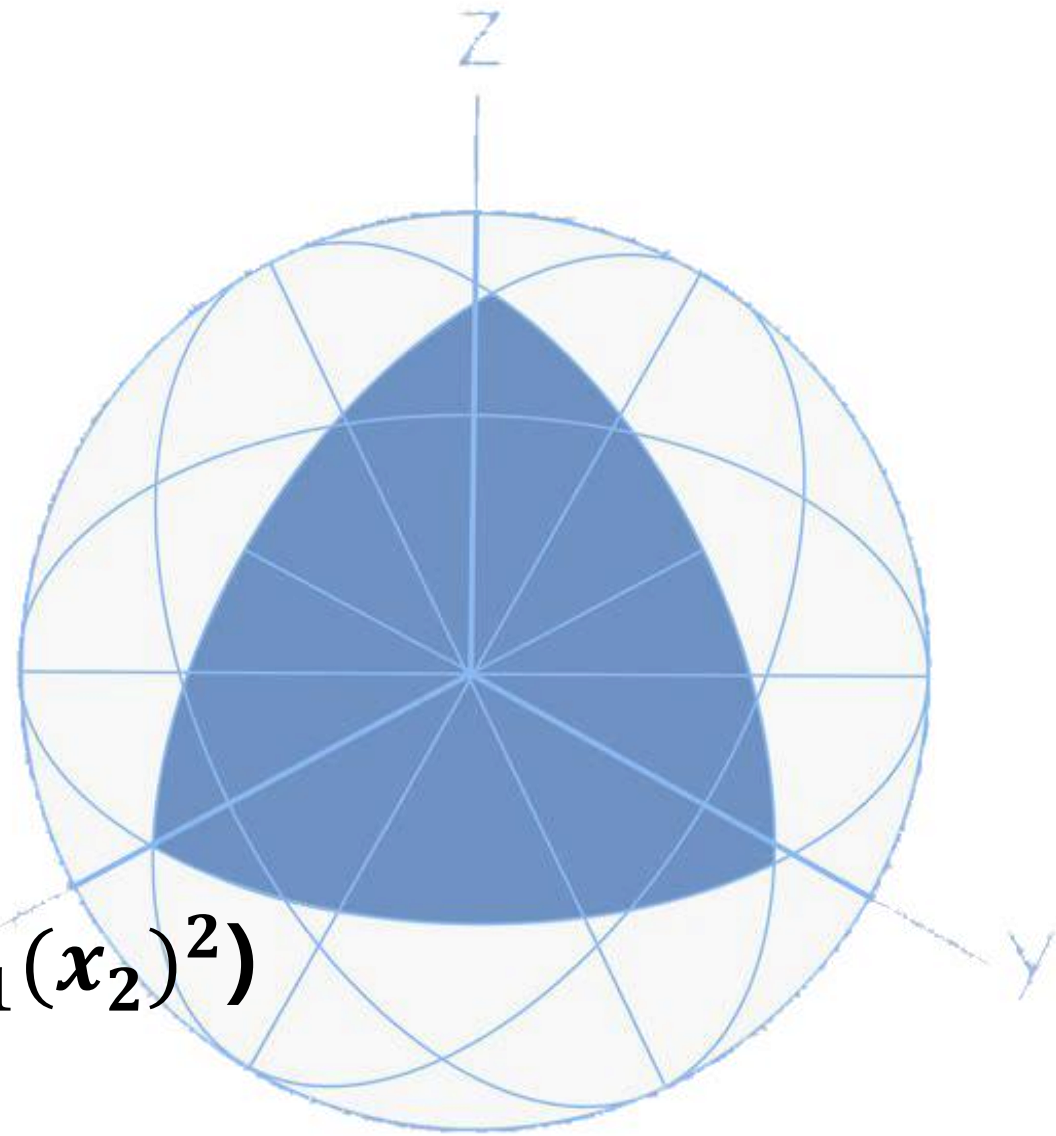
3.3.3 案例分析

那么水箱的体积

$$V_w = V_c + V_s = \frac{\pi}{3}(2rx_1x_2 - x_1(x_2)^2)$$

$$+ \frac{\pi}{3}(4r^3 + (x_2)^3 - 3r(x_2)^2)$$

$$= \frac{\pi}{3}(4r^3 + (x_2)^3 - 3r(x_2)^2 + 2rx_1x_2 - x_1(x_2)^2)$$

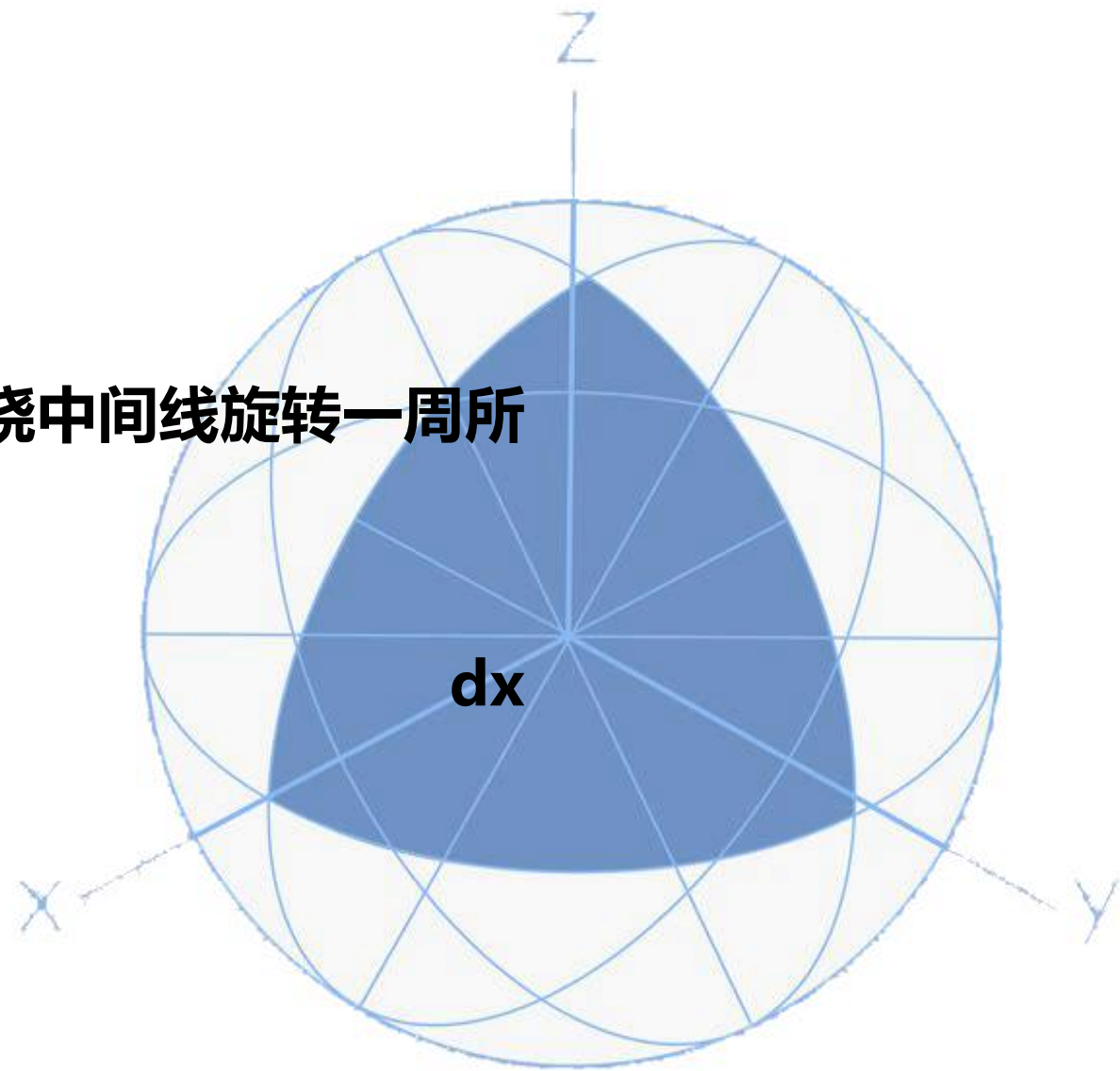




3.3.3 案例分析

锥的表面积 S_c 可看成锥面直线 $y = \frac{\sqrt{r^2 - (r - x_2)^2}}{x_1} x$ 绕中间线旋转一周所得，因此

$$\begin{aligned} S_c &= \int_0^{x_1} 2\pi \frac{\sqrt{r^2 - (r - x_2)^2}}{x_1} x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\ &= \int_0^{x_1} 2\pi \frac{\sqrt{r^2 - (r - x_2)^2}}{x_1} x \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{r^2 - (r - x_2)^2}}{x_1}\right)^2} dx \\ &= \pi \sqrt{(2rx_2 - (x_2)^2 + (x_1)^2)(2rx_2 - (x_2)^2)} \end{aligned}$$



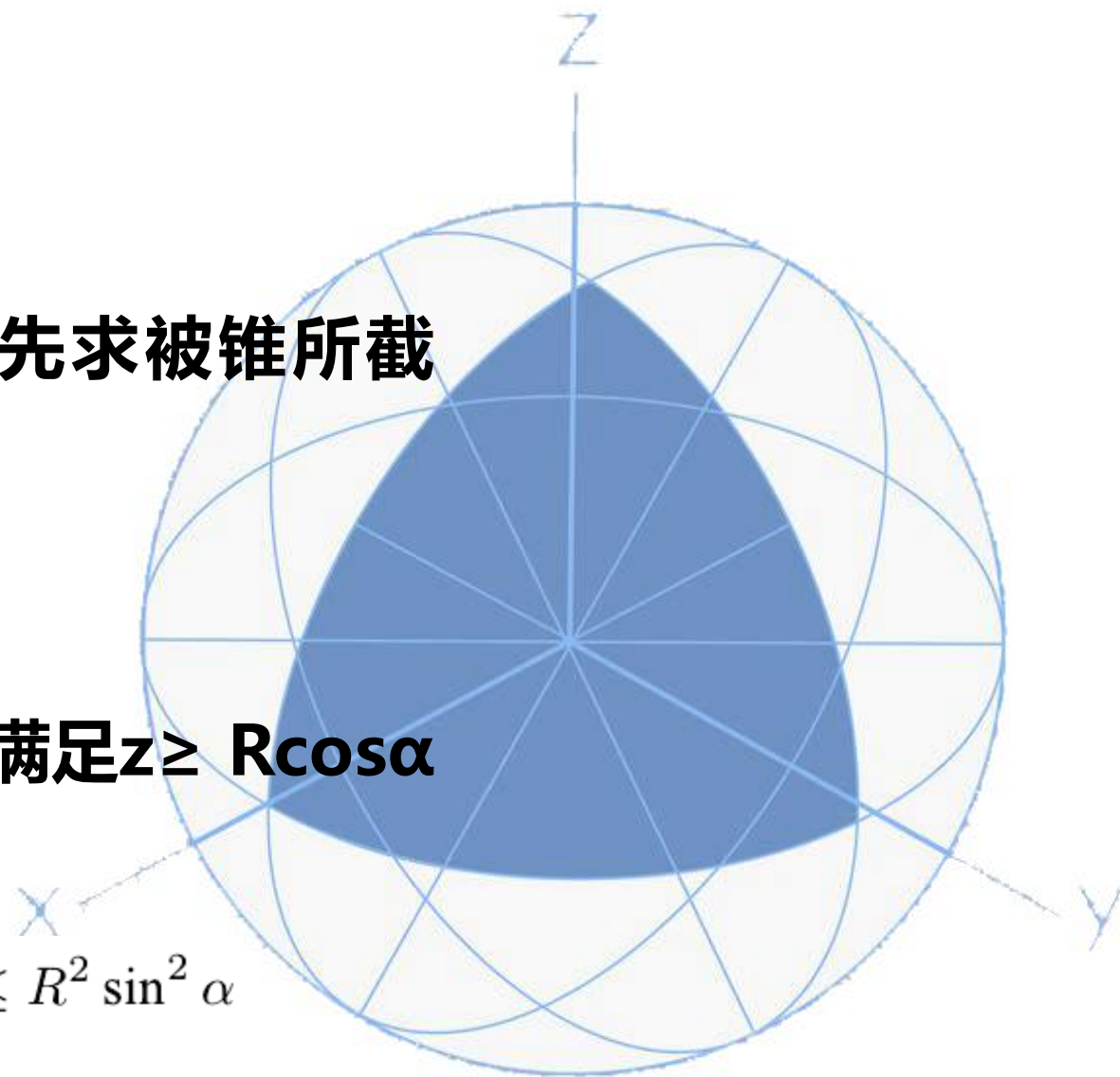
3.3.3 案例分析

为求被锥所截后球体部分的表面积，我们先求被锥所截的球体部分的表面积：

$$S = \int \int_{\Sigma} dS$$

其中 Σ 是上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (z \geq 0)$ 上满足 $z \geq R \cos \alpha$ 的部分，即

$$\Sigma : z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq R^2 \sin^2 \alpha$$





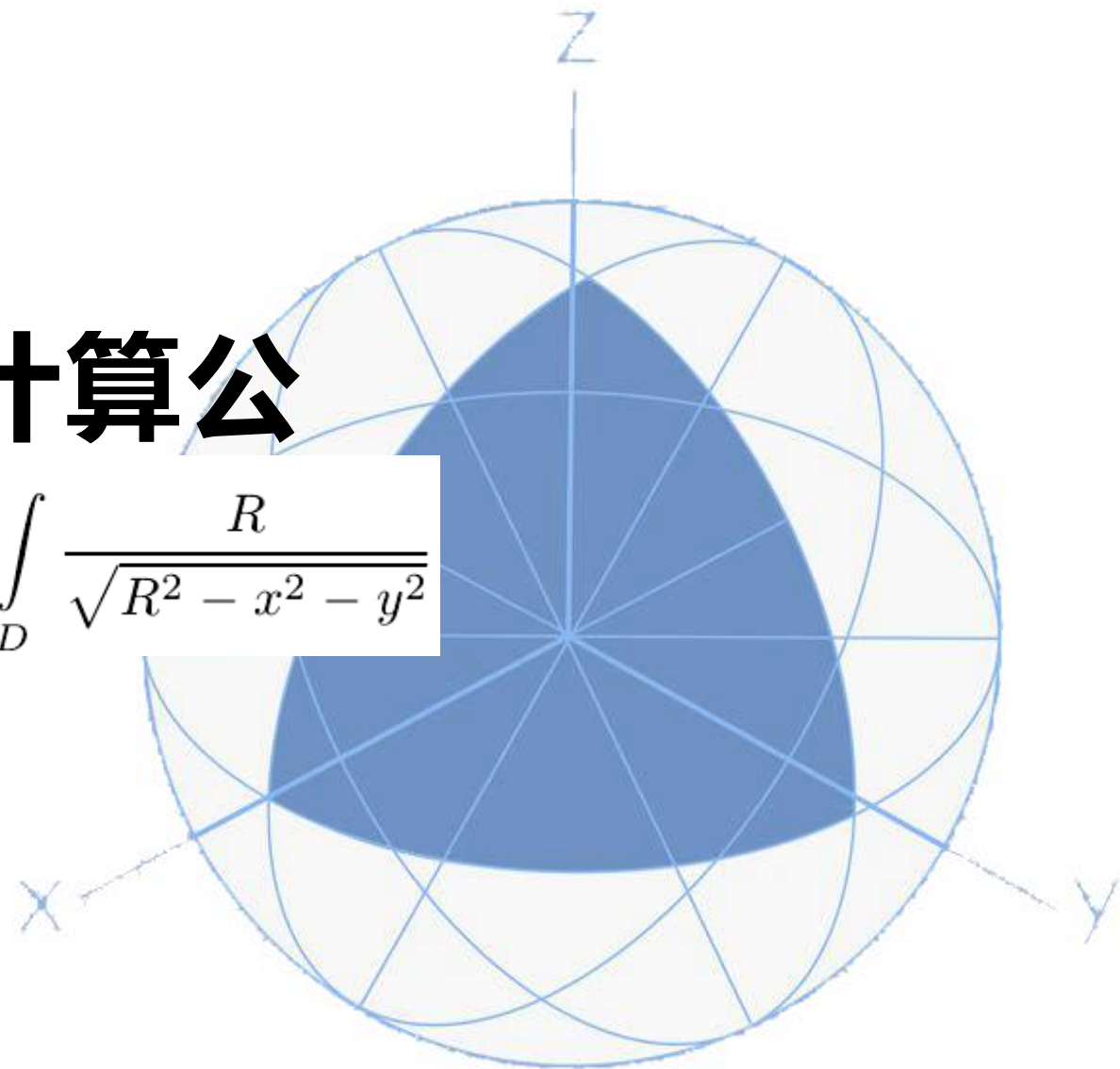
3.3.3 案例分析

利用第一类曲面积分的计算公

式，
$$S = \int \int_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = \int \int_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

这里D为xy平面上区域

$$\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2 \sin^2 \alpha\}$$





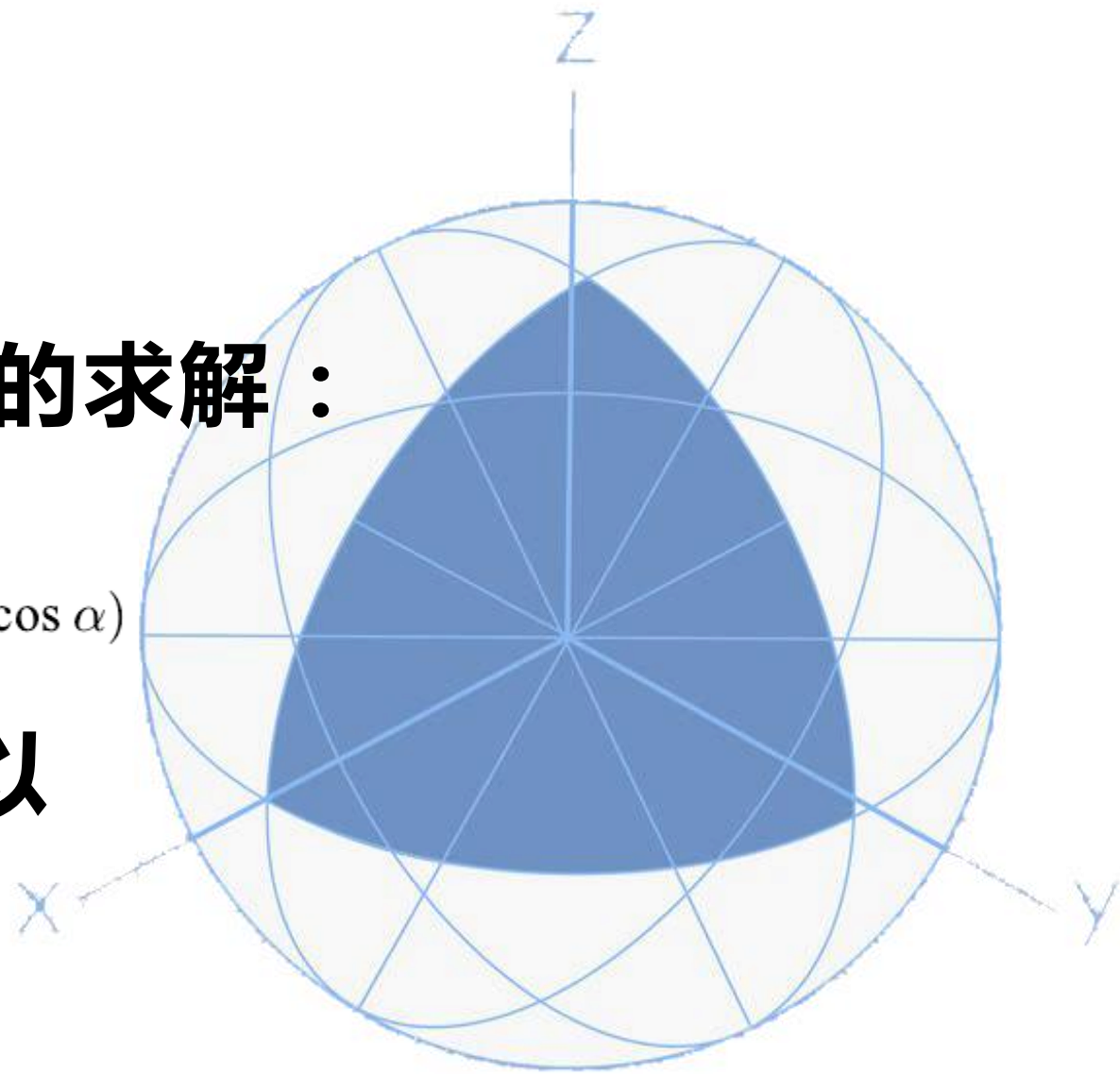
3.3.3 案例分析

被锥所截的球体部分的表面积的求解：
利用极坐标变换，得

$$S = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{R \sin \alpha} \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} r dr = 2\pi R^2 (1 - \cos \alpha)$$

因为 $1 - \cos \alpha = 1 - \frac{r - x_2}{r} = \frac{x_2}{r}$ ，所以

$$S = 2\pi r^2 \frac{x_2}{r} = 2\pi r x_2$$





3.3.3 案例分析

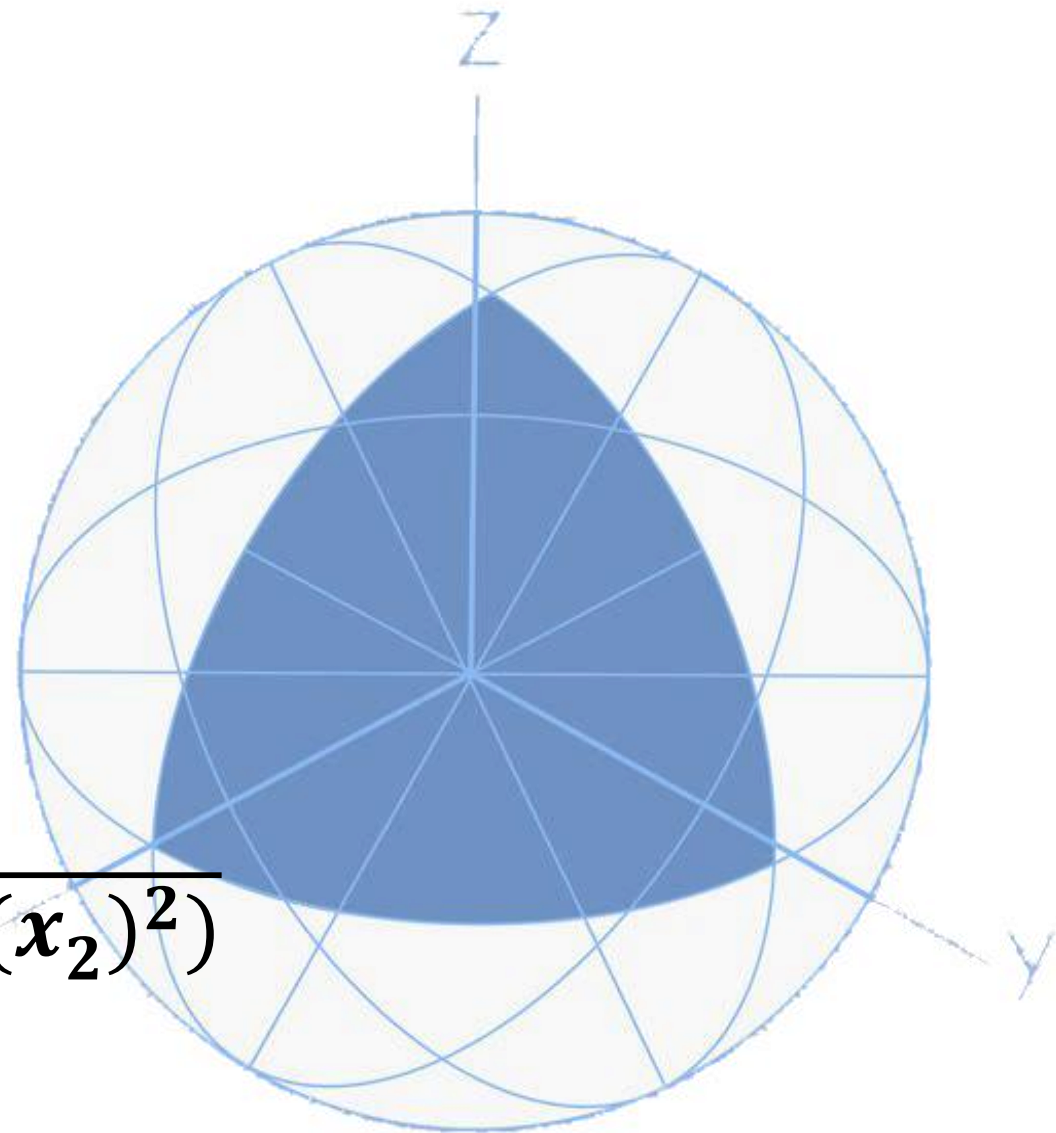
被锥所截后球体部分的表面积为

$$S_s = 4\pi r^2 - 2\pi r x_2$$

那么水箱表面积为

$$S_T = S_s + S_c = 4\pi r^2 - 2\pi r x_2$$

$$+ \pi \sqrt{(2rx_2 - (x_2)^2 + (x_1)^2)(2rx_2 - (x_2)^2)}$$





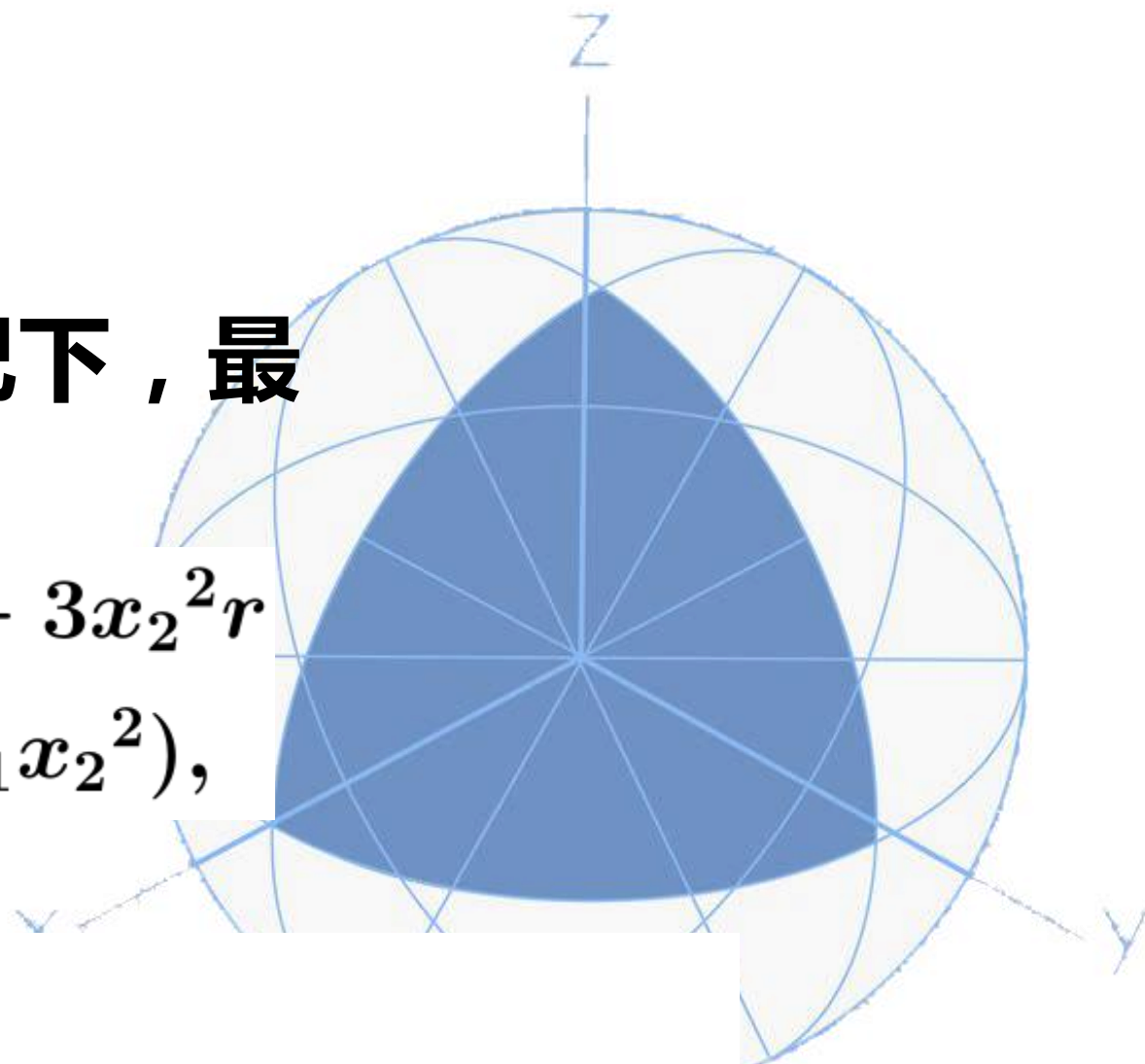
3.3.3 案例分析

我们希望总的表面积一定的情况下，最大化水箱的体积，所以问题是

$$\begin{aligned} \text{Max } f(x_1, x_2) = & \frac{\pi}{3}(4r^3 + x_2^3 - 3x_2^2r \\ & + 2rx_1x_2 - x_1x_2^2), \end{aligned}$$

使得：

$$\begin{aligned} & 4\pi r^2 - 2\pi r x_2 \\ & + \pi \sqrt{(2rx_2 - x_2^2 + x_1^2)(2rx_2 - x_2^2)} = 450. \end{aligned}$$

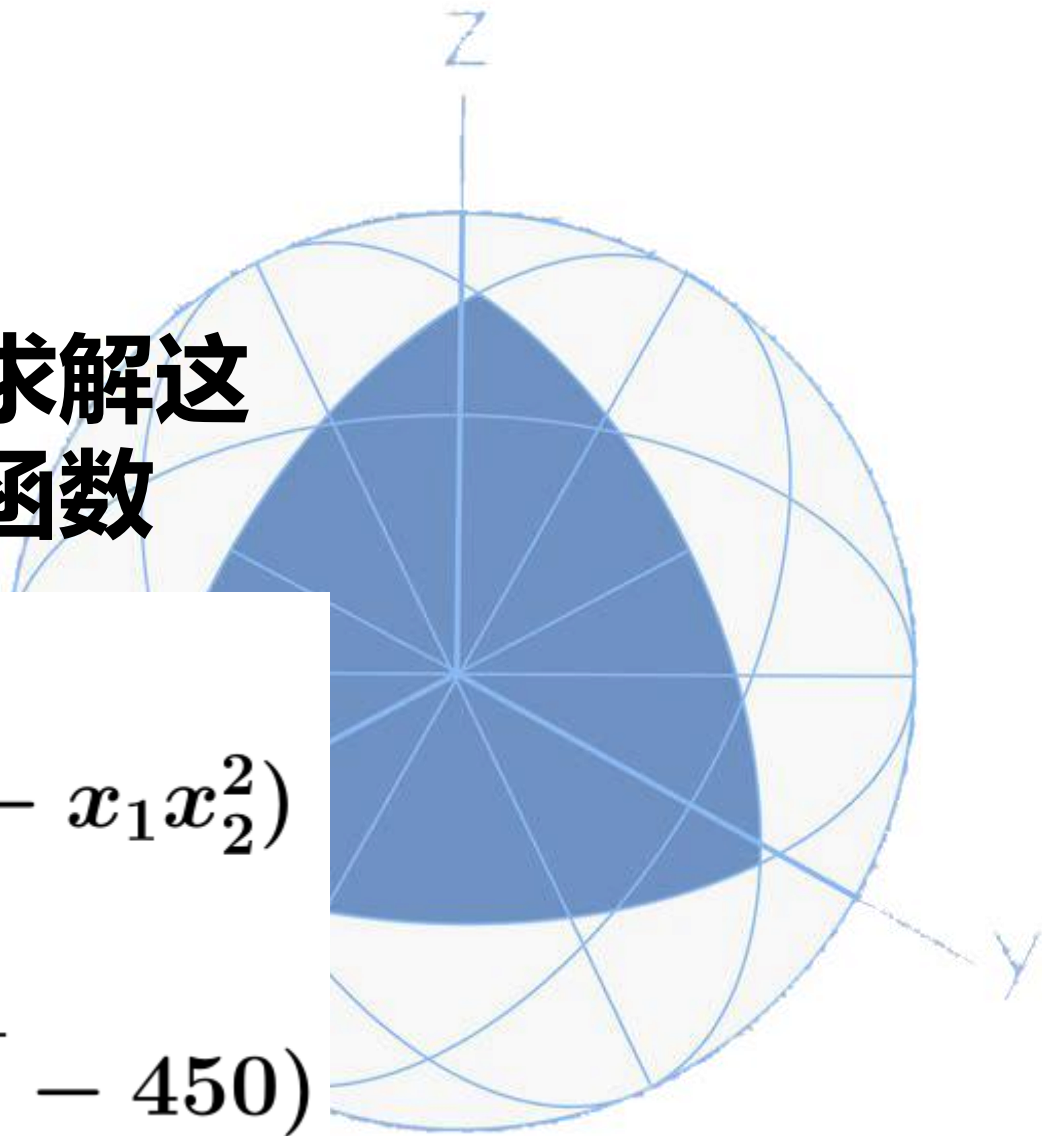




3.3.3 案例分析

【模型求解】 用拉格朗日乘子法来求解这个具有等式约束的优化问题．定义函数

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \lambda) &= \frac{\pi}{3}(4r^3 + x_2^3 - 3x_2^2r + 2rx_1x_2 - x_1x_2^2) \\ &\quad - \lambda(4\pi r^2 - 2\pi rx_2 \\ &\quad + \pi\sqrt{(2rx_2 - x_2^2 + x_1^2)(2rx_2 - x_2^2)} - 450) \end{aligned}$$

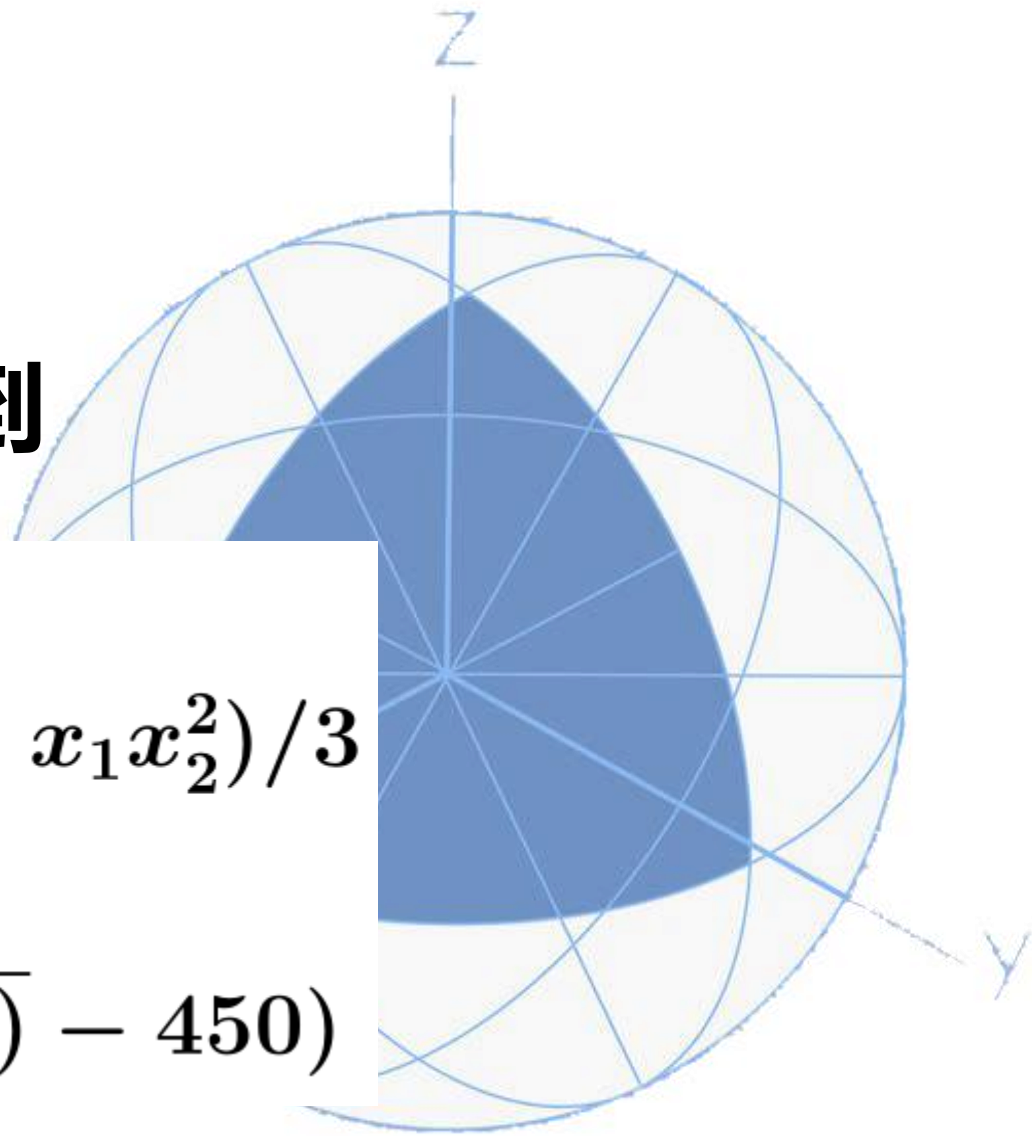




3.3.3 案例分析

将 $r = 6$ 代入上式，化简表达式得到

$$\begin{aligned} & L(x_1, x_2, \lambda) \\ &= \pi(864 - 18x_2^2 + x_2^3 + 12x_1x_2 - x_1x_2^2)/3 \\ & - \lambda(144\pi - 12\pi x_2 \\ & + \pi\sqrt{(12x_2 - x_2^2 + x_1^2)(12x_2 - x_2^2)} - 450) \end{aligned}$$

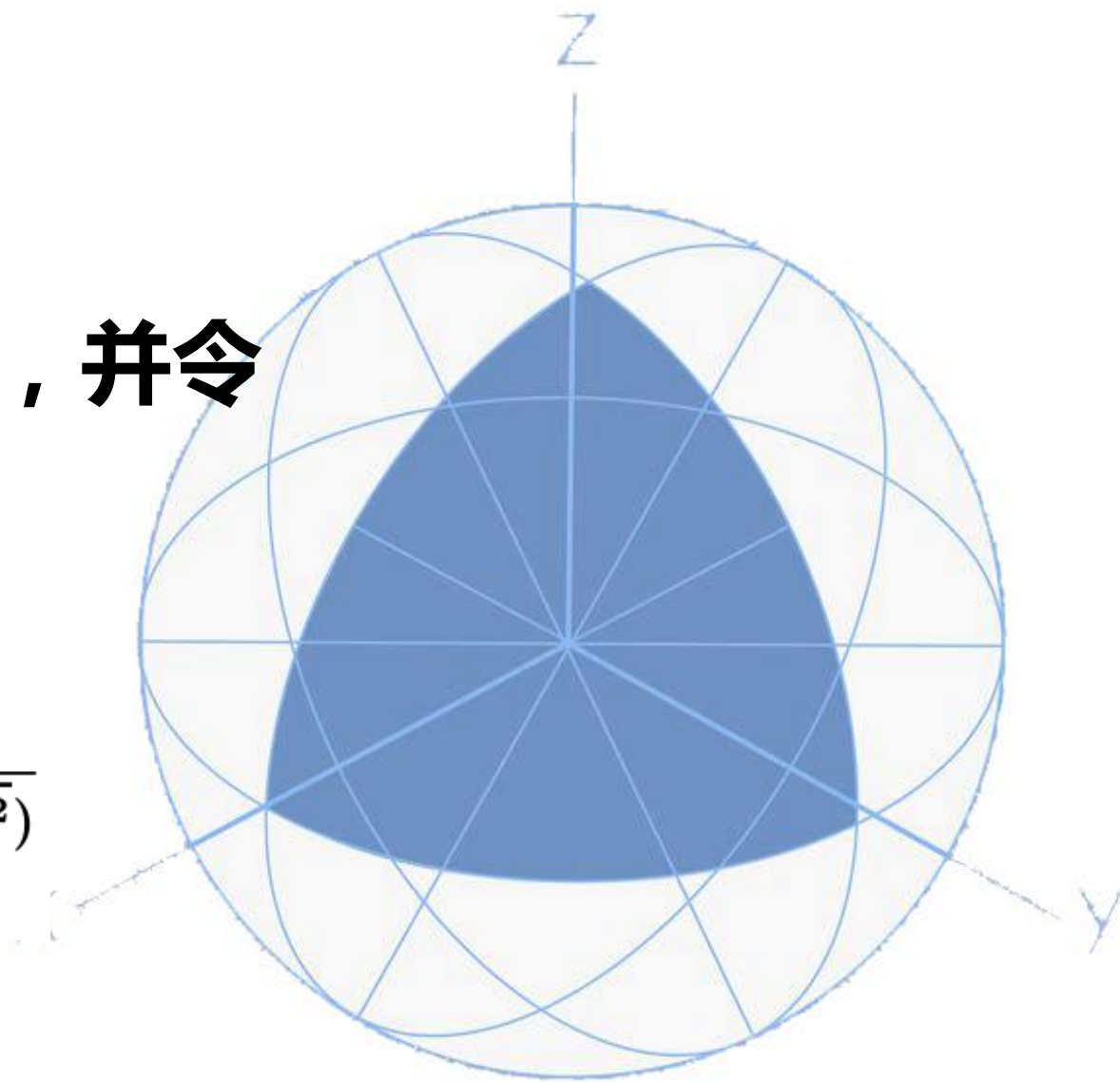




3.3.3 案例分析

将L对变量 x_1, x_2, λ 分别求偏导数，并令它们为 0，即

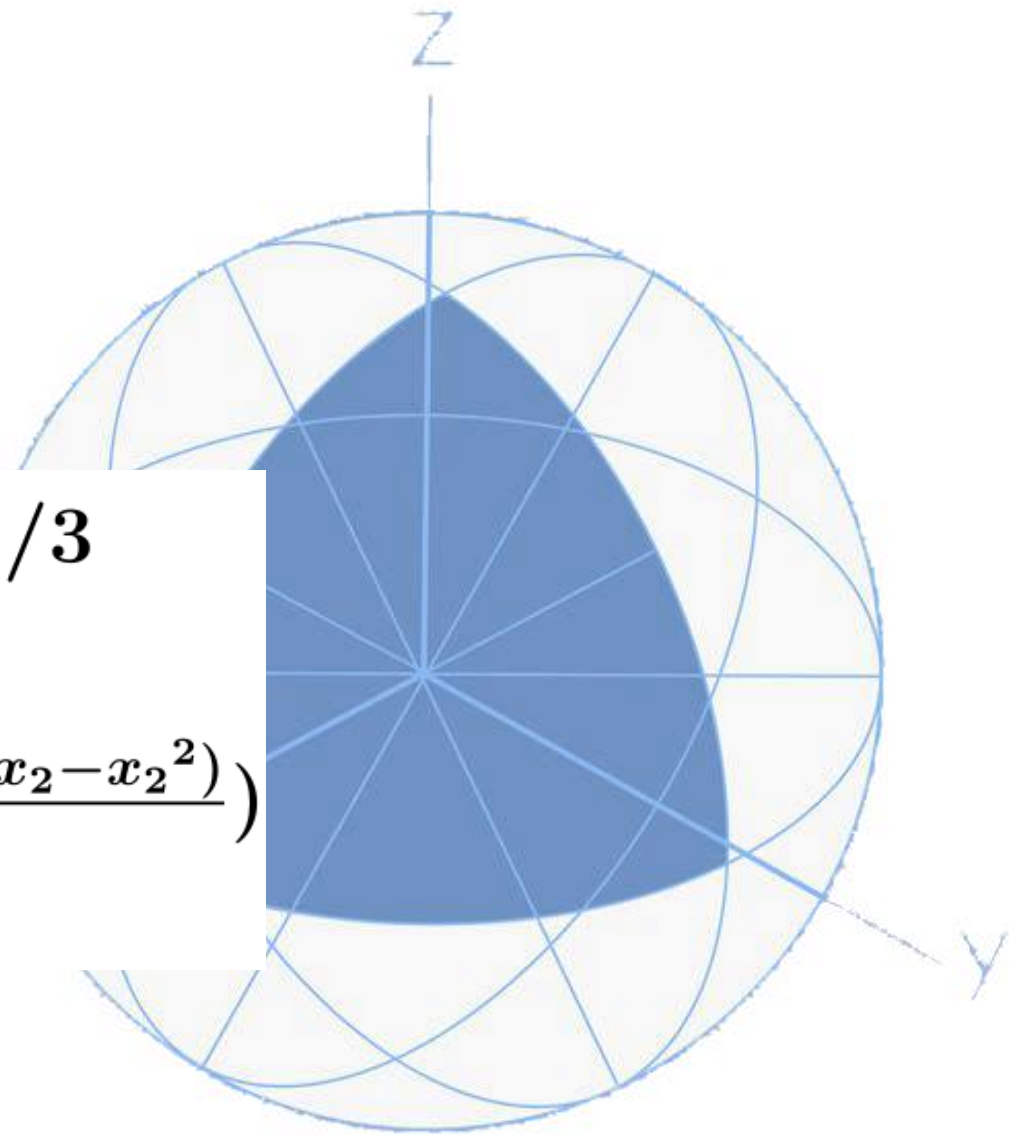
$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x_1} &= \pi(12x_2 - x_2^2)/3 \\ &\quad - \frac{\lambda\pi x_1(12x_2 - x_2^2)}{\sqrt{(12x_2 - x_2^2)(x_1^2 + 12x_2 - x_2^2)}} \\ &= 0\end{aligned}$$





3.3.3 案例分析

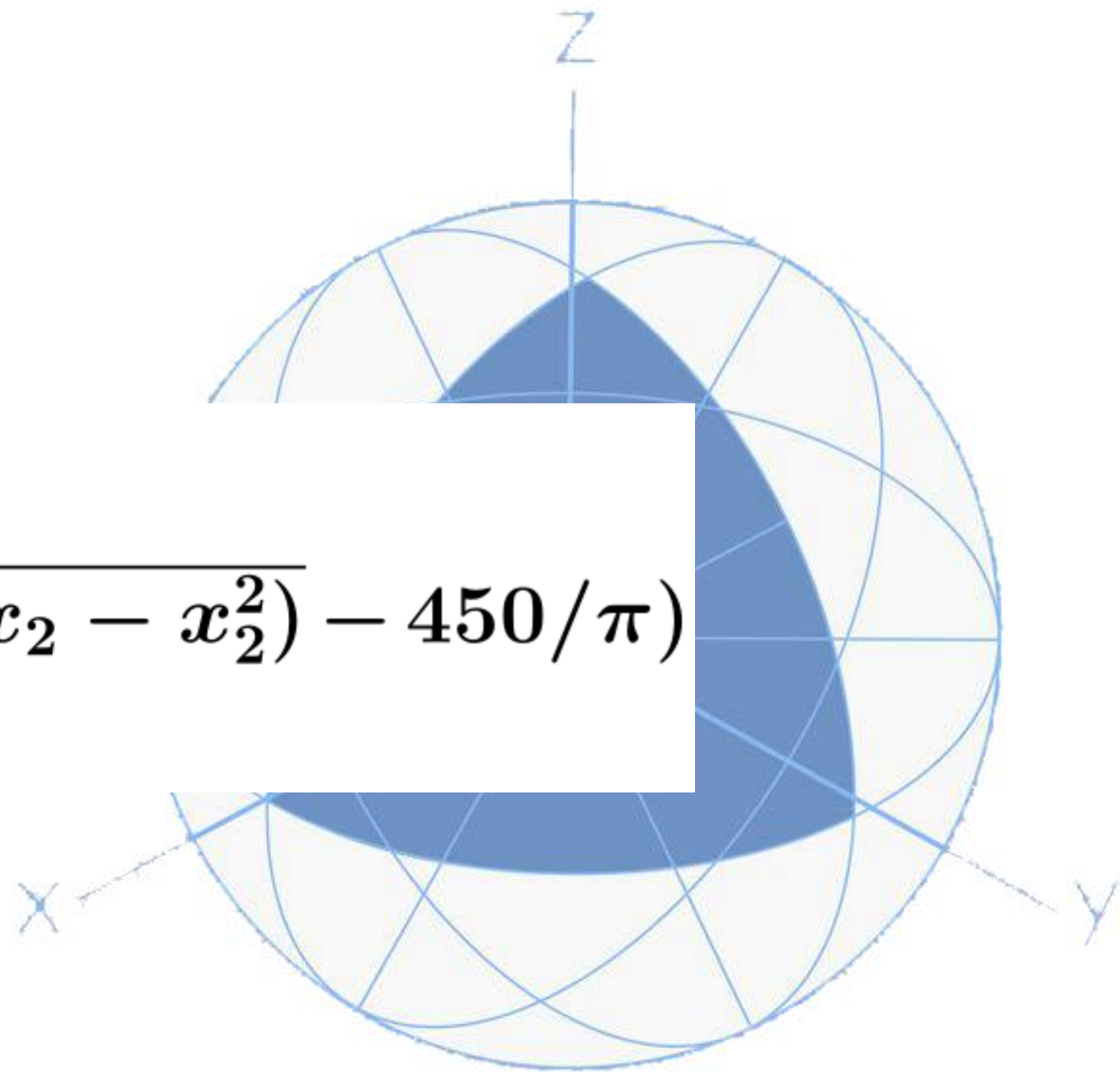
$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x_2} &= \pi(12x_1 - 36x_2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2)/3 \\ &\quad - \lambda\pi(-12 \\ &\quad + \frac{(12-2x_2)(12x_2-x_2^2)+(12-2x_2)(x_1^2+12x_2-x_2^2)}{2\sqrt{(12x_2-x_2^2)(x_1^2+12x_2-x_2^2)}}) \\ &= 0\end{aligned}$$





3.3.3 案例分析

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \lambda} &= \pi(144 - 12x_2 \\ &\quad + \sqrt{(12x_2 - x_2^2 + x_1^2)(12x_2 - x_2^2)} - 450/\pi) \\ &= 0\end{aligned}$$





3.3.3 案例分析

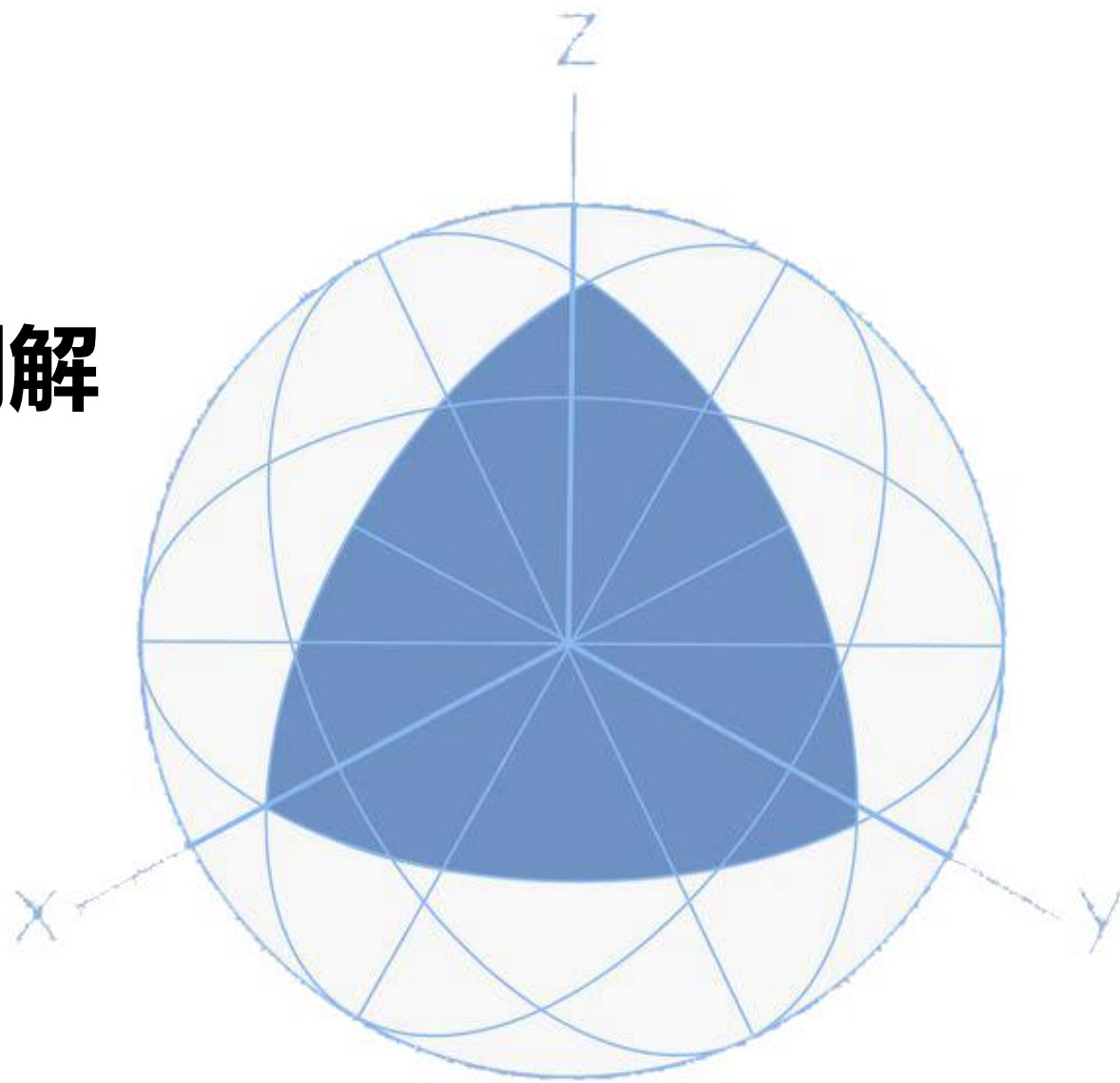
使用计算机代数系统，我们找到解

$$x_1 \approx 1.18585(\text{英尺})$$

$$x_2 \approx 1.20233(\text{英尺})$$

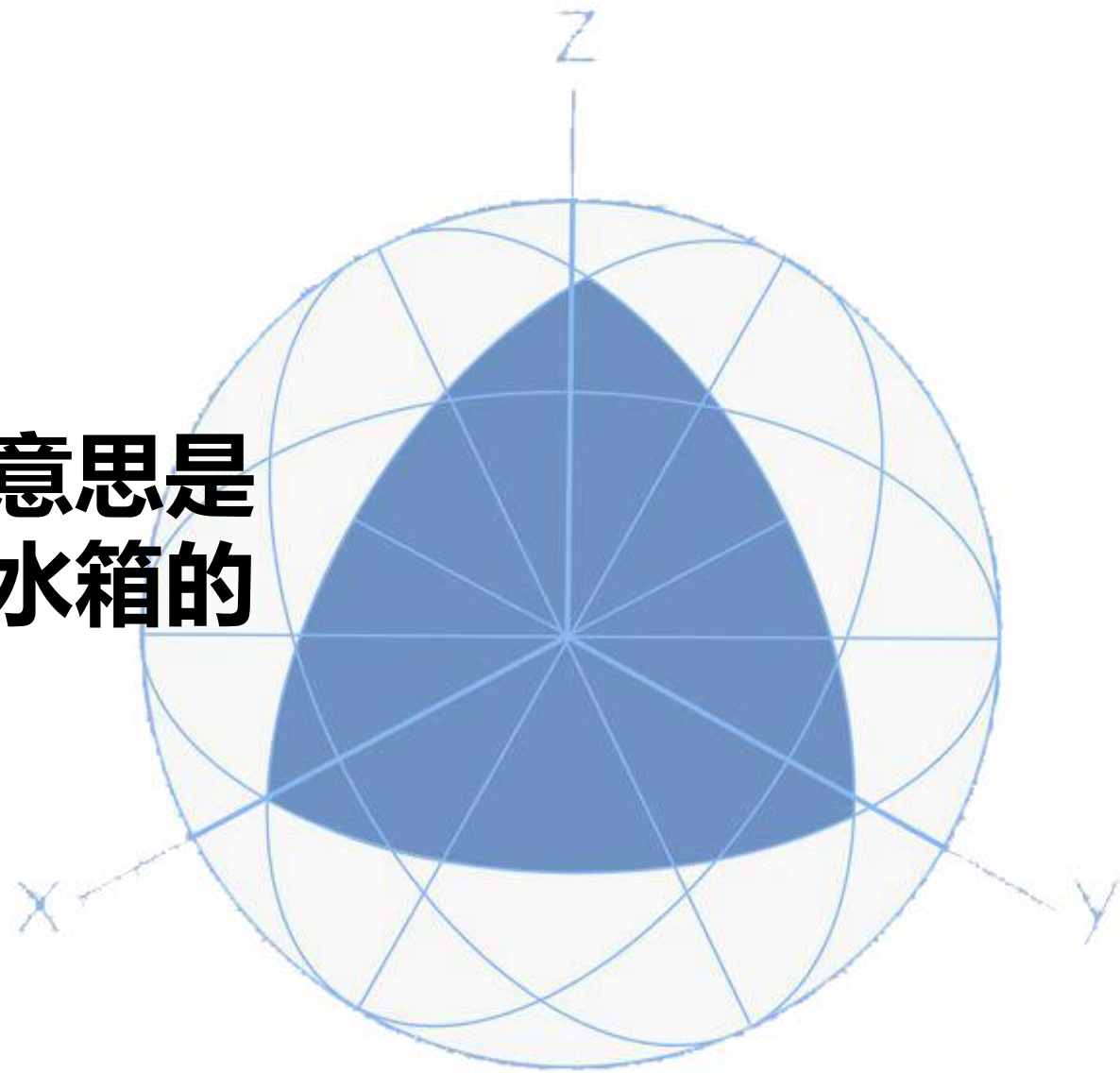
$$\lambda \approx 3.84181$$

$$f(x_1, x_2) \approx 895.472(\text{立方英尺}).$$



3.3.3 案例分析 【敏感性分析】

拉格朗日乘子的值 $\lambda = 3.84$, 意思是
如果表面积增加 1 平方英尺 , 水箱的
体积大约增加 3.84 (立方英尺) .





廈門大學
XIAMEN UNIVERSITY

THANK YOU

