



第七章 偏微分方程方法II

谭 忠

厦门大学数学科学学院



目录

- 1 偏微分方程的基本概念
- 2 由偏微分方程形成的数学问题
- 3 偏微分方程的适定性(well-posedness)
- 4 案例分析



1 偏微分方程的基本概念

1、前面通过实例

建立了偏微分方程模型,

下面我们来抽象出

一般的数学概念.



偏微分方程的基本概念



首先引进向量

$$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_N),$$

其分量 α_k 是非负整数,

称该向量为**多重指标**.

所有多重指标的集合是 Z_+^N ,



偏微分方程的基本概念



对 $\alpha \in \mathbf{Z}_+^N$ 和 $x \in \mathbf{R}^N$. 定义

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N,$$

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_N^2},$$

$$\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_N!,$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_N^{\alpha_N}.$$



偏微分方程的基本概念



约定 $0^0 = 1$.

定义 Z_+^N 中的 $\alpha \geq \beta$ 偏序:

对 $k = 1, \dots, N$,

$$\alpha_k \geq \beta_k.$$



定义7.1

作用在一个函数上

产生另外一个函数的

数学运算规律称为算子.



偏微分方程的基本概念



如引进微分记号 $D_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$,

它作用在可微函数 u 上

得到 u 关于 x_k 的偏导函数.

所以 $D_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$ 是算子,

称为偏微分算子.



偏微分方程的基本概念



我们已经学过
许多偏微分算子,
例如函数的梯度为

$$D = \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_N} \right)$$

称为梯度算子.



偏微分方程的基本概念



向量函数（场）

$$\vec{F} = (f_1, f_2, \cdots, f_N),$$

引入运算

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{F} &= \operatorname{div} \{f_1, f_2, \cdots, f_N\} \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial f_N}{\partial x_N}\end{aligned}$$



偏微分方程的基本概念



称为散度算子.

散度算子可以看成

梯度算子对向量场作内积,

即 $\nabla \cdot \vec{F}$.

称 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_N^2}$

为拉普拉斯(Laplace)算子.



向量函数（场）

$$\vec{F} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)),$$

称向量场

$$\text{rot} \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

为 \vec{F} 的旋度（也记为 $\text{curl} \vec{F}$ ）.



偏微分方程的基本概念



旋度算子可以
看成梯度算子
对向量场作叉乘积,
即 $\nabla \times \vec{F}$.



偏微分方程的基本概念



设 α 为多重指标,
记 $m = |\alpha|$,引进 m 阶的
偏微分算子 D^α

$$\begin{aligned} D^\alpha &= D_1^{\alpha_1} \cdots D_N^{\alpha_N} \\ &= \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}. \end{aligned}$$



偏微分方程的基本概念



例如下面的算子：

$$L[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$$

也是偏微分算子.



线性偏微分算子

如果一个偏微分算子 L

满足下面的:

(1) 常数 c 可以

提到算子的外面:

$$L[cu] = cL[u].(1.1)$$



(2) 偏微分算子作用
在两个函数的和上等于
分别作用在函数上之和:

$$\begin{aligned} &L[u_1 + u_2] \\ &= L[u_1] + L[u_2].(1.2) \end{aligned}$$



偏微分方程的基本概念



结合(1.1) 和(1.2) 得

$$\begin{aligned} & L[c_1 u_1 + c_2 u_2] \\ &= c_1 L[u_1] + c_2 L[u_2], \quad (1.3) \end{aligned}$$

这里 c_1 和 c_2 是任意常数.

则称这个偏微分算子为
线性偏微分算子.



偏微分方程的基本概念



由线性偏微分算子
作用在未知函数上
形成的方程称为
线性偏微分方程,
即具有如下形式:



偏微分方程的基本概念



$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha}(x) D^{\alpha} u = f(x)$$

也就是方程
关于未知函数
和各阶偏导数
都是线性的。



偏微分方程的基本概念



这里 $a_\alpha(x) (|\alpha| \leq m)$
和 f 是不依赖未知函数 u
及其导数的给定函数,
 $f(x)$ 称为非齐次项
或自由项.



偏微分方程的基本概念



如果非齐次项 $f \equiv 0$,

则称它为

齐次线性偏微分方程.

否则称为

非齐次线性偏微分方程.



偏微分方程的基本概念



现在给出

偏微分方程的一般概念：

对整数 $N \geq 1$,

Ω 是 R^N 中的开子集.



偏微分方程(组)的阶数：

一个偏微分方程(组)中

最高阶偏导数的阶数

称为这个

偏微分方程(组)的阶数，



偏微分方程的基本概念



即形如

$$F\left(\frac{\partial^m u}{\partial x_1^m}, \cdots, \frac{\partial^m u}{\partial x_N^m}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_N}, u, x_1, \cdots, x_N\right) = 0, \quad (1.7)$$

称为 m 阶偏微分方程.

这里 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_N) \in \Omega$

且 $N \geq 1$.



偏微分方程的基本概念



如果对所有 $x \in \Omega$,
函数 u 和它的偏导数
满足等式(1.7),
称这个函数 $u = u(x)$
是(1.7) 在 Ω 上的
偏微分方程的解.



半线性、拟线性 和非线性偏微分方程

(1) 如果一个偏微分方程的
最高阶偏导数项是线性的,
而未知函数和
它的低阶偏导数项是非线性的,



偏微分方程的基本概念



即具有如下形式

$$\sum_{|\alpha|=m} a_{\alpha}(x) D^{\alpha} u + a_0(D^{m-1}u, \dots, Du, u, x) = 0$$

则称它为半线性偏微分方程.

这里 $a_0(D^{m-1}u, \dots, Du, u, x)$ 是
自变量以及未知函数的
低阶导数项的函数.



偏微分方程的基本概念



(2) 如果一个偏微分方程
关于未知函数的
最高阶偏导数是线性的,
并且系数依赖于
自变量 $x = (x_1, \dots, x_N)$ 、
未知函数和它的低阶偏导数项,



偏微分方程的基本概念



即具有如下形式

$$\sum_{|\alpha|=m} a_{\alpha}(D^{m-1}u, \dots, Du, u, x) D^{\alpha}u$$

$$+ a_0(D^{m-1}u, \dots, Du, u, x) = 0$$

则称它为

拟线性偏微分方程.



偏微分方程的基本概念



(3)如果一个偏微分方程
关于它的最高阶导数
是非线性的,
则称它为
完全非线性偏微分方程.



偏微分方程的基本概念



有时我们也会遇到
方程组的情形.

形如

$$F(D^m u(x), D^{m-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0,$$

$$x \in \Omega$$

称为 m 阶偏微分方程组,



偏微分方程的基本概念



这里

$$F : R^{KN^m} \times R^{KN^{m-1}} \times \cdots \times R^{KN} \times R^K \times \Omega \rightarrow R^K$$

是给定的, 且

$$u : \Omega \rightarrow R^K,$$

$u = (u^1, \cdots, u^K)$ 是未知的.



例1.2 线性偏微分方程的例子

(1) 波动方程

$$u_{tt} - \Delta u = 0.$$

(2) 一般波动方程

$$u_{tt} - \sum_{i,j}^N a^{ij} u_{x_i x_j} + \sum_i^N b^i u_{x_i} = 0.$$



(3) 热传导方程(扩散方程)

$$u_t - \Delta u = 0.$$

(4) 位势方程

$$\Delta u = \sum_{i=1}^N u_{x_i x_i} = 0.$$



例1.3 半线性偏微分方程的例子,
其中 $f(u) \neq 0$.

(1) 半线性Poisson方程

$$-\Delta u = f(u).$$



偏微分方程的基本概念



(2) 半线性反应扩散方程

$$u_t - \Delta u = f(u).$$

(3) 半线性波动方程

$$u_{tt} - \Delta u = f(u).$$



例1.4 拟线性偏微分方程的例子：

P-Laplacian方程

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0,$$

$$\operatorname{div}\left(\frac{Du}{(1+|Du|^2)^{1/2}}\right) = 0.$$



例1.5 完全非线性方程的例子

$$\det(D^2u) = f.$$



例1.6 非线性方程组的例子

(1) 不可压粘性流Navier-Stokes方程

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p = f, \\ \operatorname{div} u = 0. \end{cases}$$

$$(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, T),$$



偏微分方程的基本概念



这里

$$u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$$

$$u \cdot \nabla u = (u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial}{\partial x_3})$$

$$\Delta u = (\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2})u$$



偏微分方程的基本概念



T 是一个正的有限数,
 f 充分光滑
且在 R^3 具有紧支集.



偏微分方程的基本概念



$u(x, t)$ 和 $p = p(x, t)$

表示不可压流

在 (x, t) 处的

未知速度和压强场.



偏微分方程的基本概念



(2) 可压粘性流Navier-Stokes方程

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) = 0$$

$$\frac{\partial \varrho \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p(\varrho)$$

$$= \mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) + \varrho \mathbf{f}.$$

这里 $p(\rho) = a\rho^\gamma$, a 为常数.



谢 谢!



2 由偏微分方程形成的数学问题

一、偏微分方程的定解问题

本节我们考虑它们
形成的数学问题，
即定解问题



由偏微分方程形成的数学问题



一般来说, 初始条件和边界条件
统称为**定解条件**.

一个偏微分方程
连同与它相应的定解条件
组成一个**定解问题**.



由偏微分方程形成的数学问题



一般有几类：

(1) Cauchy问题

或初值问题

在区域 Ω 中

给定偏微分方程,



由偏微分方程形成的数学问题



在 Ω 的某个子集上
给定未知函数或
它的导数的
某个适当的初值.



由偏微分方程形成的数学问题



(2) 边值问题

在区域 Ω 中

给定偏微分方程,



由偏微分方程形成的数学问题



在边界 $\partial\Omega$ 上
给定未知函数
或它的导数的
某个适当的边界条件.



(3)混合问题

(初边值问题)

在区域 Ω 上

给定偏微分方程,



由偏微分方程形成的数学问题



并给定未知函数或
它的导数的
某个适当的初值
和边界条件.



1、波动方程的定解问题

弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0. \quad (2.9)$$

现在看他们的定解问题.



由偏微分方程形成的数学问题



一根弦线的振动状况
还依赖于初始时刻
弦线的状态
和通过弦线两端
所受到的外界的影响.



由偏微分方程形成的数学问题



因此, 为了确定
一个具体的弦振动,
除了列出它满足的方程以外
还必须写出它适合的
初始条件和边界条件.



初始条件

即必须给出弦上各点

在初始时刻 $t = 0$ 的位移和速度.

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x) \quad (0 \leq x \leq l), \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq l). \end{cases} \quad (2.10)$$

这里 $\varphi(x)$, $\psi(x)$ 为已知函数.



边界条件

一般说来有三种.

(i) 已知端点位移随时间的变化, 即

$$u(0, t) = g_1(t), u(l, t) = g_2(t) \quad (t \geq 0) \quad (2.11)$$



由偏微分方程形成的数学问题



特别当 $g_1(t) = g_2(t) = 0$ 时,
称为弦线具有固定端.



由偏微分方程形成的数学问题



(ii) 已知在端点所受的
垂直于弦线的外力作用.

由假设垂直于弦线的外力为

$$T_0 \sin \alpha = T_0 \operatorname{tg} \alpha = T_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=a},$$

$$T_0 \sin \beta = T_0 \operatorname{tg} \beta = T_0 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=b}.$$



注意左右两边的力：

$$-T_0 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = g_1(t),$$

$$T_0 \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = g_2(t) \quad (2.12).$$



由偏微分方程形成的数学问题



特别当 $g_1(t) = g_2(t) = 0$ 时,
称弦线具有自由端.
这种情形端点处的
切线总是水平的。



由偏微分方程形成的数学问题



(iii) 已知端点的位移

与所受外力作用的一个线性组合

$$\begin{cases} -T \frac{\partial u}{\partial x} \big|_{x=0} + \alpha_1 u(0, t) = g_1(t), \\ T \frac{\partial u}{\partial x} \big|_{x=l} + \alpha_2 u(l, t) = g_2(t), \end{cases} \quad (2.13)$$

$$t \geq 0, \alpha_i > 0, i = 1, 2.$$



由偏微分方程形成的数学问题



特别当 $g_1(t) = g_2(t) = 0$ 时,
表示弦的两端
固定在弹性支承上,
 α_i ($i = 1, 2$)分别表示
支承的弹性系数.



由偏微分方程形成的数学问题



在区域

$(0 \leq x \leq l, t \geq 0)$ 上

由方程(2.9),

初始条件(2.10)

以及边界条件(2.11)-(2.13)



由偏微分方程形成的数学问题



中间的任意一个
组成的定解问题
称为弦振动方程的
混合问题.



由偏微分方程形成的数学问题



在区域

$(-\infty < x < \infty, t \geq 0)$ 上,

用方程和初始条件

组成的定解问题

称为弦振动方程的.

初值问题(或Cauchy问题).



谢 谢!



2、热传导（扩散）方程的定解问题

前面，我们推导了

热传导方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f,$$

$$\text{其中 } a^2 = \frac{\kappa}{\rho c}, \quad f = \frac{f_0}{c},$$



由偏微分方程形成的数学问题



Δ 是三维Laplace算子,

当 $f \geq 0$ 时表示热源;

当 $f \leq 0$ 时表示热汇.

为了具体确定

物体内部的温度分布,



由偏微分方程形成的数学问题



我们还需要知道
物体内部的
初始温度分布
以及通过物体的边界



由偏微分方程形成的数学问题



受到的周围
介质的影响.

初始条件

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \bar{\Omega},$$



边界条件有三类：

(i) 已知边界 $\partial\Omega$ 上的
温度分布

$$u|_{\Sigma} = g(x, y, z, t),$$



由偏微分方程形成的数学问题



这里 $\Sigma = \partial\Omega \times [0, \infty)$.

特别当 $g \equiv \text{常数}$ 时,

称物体的边界

保持恒温.



由偏微分方程形成的数学问题



(ii) 已知通过边界

$\partial\Omega$ 的热量

$$\kappa \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Sigma} = g(x, y, z, t)$$

(ν 为 Ω 的单位外法向),



由偏微分方程形成的数学问题



$g \geq 0$ 表示流入,

$g \leq 0$ 表示流出.

特别当 $g \equiv 0$ 时,

表示物体绝热.



由偏微分方程形成的数学问题



(iii) 已知通过边界 $\partial\Omega$
与周围介质有热交换

$$\kappa \frac{\partial u}{\partial \nu} \big|_{\Sigma} = \alpha_0 (g_0 - u) \big|_{\Sigma}$$

或

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u \right) \big|_{\Sigma} = g(x, y, z, t),$$



由偏微分方程形成的数学问题



这里 g_0 表示
周围介质温度,
 α_0 表示热交换系数,
 $\alpha = \frac{\alpha_0}{\kappa} > 0$.



谢 谢!



3、Laplace方程的定解问题

前面, 我们已经研究了
初值问题和初边值问题,
这些问题既依赖空间变量
又依赖于时间变量,



由偏微分方程形成的数学问题



它们与抛物型和
双曲型偏微分方程有关.
现在我们关注
边界值问题.



由偏微分方程形成的数学问题



在数学领域,
一个边界值问题
就是寻找一个函数,
使得它满足一个
给定的偏微分方程
和特定的边界条件.



由偏微分方程形成的数学问题



在物理领域,
这个问题与时间相独立,
只涉及到空间坐标,
与椭圆型偏微分方程有关.



由偏微分方程形成的数学问题



可以将调和方程
看成波动方程
和热方程
在平衡状态时
的特殊情形：



由偏微分方程形成的数学问题



$$-a^2 \Delta u = f(x_1, x_2, \dots, x_N).$$

称为Poisson方程.

$f = 0$ 时称为Laplace方程.



由偏微分方程形成的数学问题



Laplace方程的
定解问题中,
边界条件可分四类:
第一、第二、第三和
第四边值条件.



由偏微分方程形成的数学问题



(i) 第一类边值问题

(狄利克雷(Dirichlet)问题)

寻找一个函数 $u(x)$,

$x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$,

使其在区域

$\Omega \subset R^N$ 上是调和的,



由偏微分方程形成的数学问题



并且在边界 $\partial\Omega$ 上满足

$$u = \varphi(x),$$

其中, $\varphi(x)$ 是定义在
区域 Ω 的边界 $\partial\Omega$ 上的
一个给定的连续函数.



由偏微分方程形成的数学问题



Ω 是一个简单的

封闭分片(段)光滑的曲面(曲线)

$\partial\Omega$ 的内部区域, 即

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), & x \in \Omega \\ u(x) = \varphi(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$



(ii) 第二类边值问题

(诺伊曼(Nuamann)问题)

寻找一个函数 $u(x)$,

$x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$,

使其在区域

$\Omega \subset R^N$ 上是调和的,



在边界上满足Nuamann条件

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi(x),$$

即定解问题为

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} = \varphi(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$



由偏微分方程形成的数学问题



这里 ν 是边界 $\partial\Omega$ 的
单位外法向.

同时满足相容性条件:

$$\int_{\partial\Omega} \varphi(s) dS + \int_{\Omega} f(x) dx = 0.$$

思考题: 为什么?



(iii) 第三类边值问题

(鲁宾(Rubin)边值问题)

寻找一个函数 $u(x)$,

$x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$,

使其在区域

$\Omega \subset R^N$ 上是调和的,



由偏微分方程形成的数学问题



在边界 $\partial\Omega$ 上满足

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + h(x)u = \varphi(x),$$

其中 $h(x)$ 和 $\varphi(x)$

是给定的连续函数,



由偏微分方程形成的数学问题



即定解问题为

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), & x \in \Omega, \\ \alpha \frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u = \varphi(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$



(iv) 第四类边值问题

寻找一个函数 $u(x)$,

$x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$,

使其在区域

$\Omega \subset R^N$ 上是调和的,



由偏微分方程形成的数学问题



在边界 $\partial\Omega$ 的不同部分

满足不同类型的边界条件.

一个满足这类边界条件的例子是

$$u = \varphi_1(x), x \in \partial\Omega_1$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi_2(x), x \in \partial\Omega_2,$$



由偏微分方程形成的数学问题



其中 $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$.

问题(i)到(iv)被统称为

内区域边值问题.

这些问题与

外区域边值问题



由偏微分方程形成的数学问题



在两个方面有所不同：

一是对于后者的各种问题，
边界外的一部分是无穷大的；
二是外区域边界值问题的解
必须满足额外的要求。



由偏微分方程形成的数学问题



谢 谢!



3 偏微分方程的适定性(well-posedness)

一、偏微分方程的适定性

一个偏微分方程问题

在函数类 C 中

称为适定的(well-posed),



偏微分方程的适定性(well-posedness)



如果下面三个条件都满足：

- (1) 在 C 中存在一个解；
- (2) 解是唯一的；
- (3) 解对给定数据
(初值、边值和系数)
的连续依赖.



例3.1 验证

$$u(x, y) = y^2 + x$$

是 R^2 上的Cauchy问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 1, \\ u(0, y) = y^2, (y \in R) \end{cases}$$

的解.



偏微分方程的适定性(well-posedness)



解： 因为

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1,$$

$$\begin{aligned} u(0, y) &= (y^2 + x)(0, y) \\ &= y^2. \end{aligned}$$



例3.2 验证

$$u(x, y) = x^2 - y^2,$$

$$u(x, y) = e^x \sin y$$

都满足方程

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$



偏微分方程的适定性(well-posedness)



解：因为

$$u_x = 2x, \quad u_{xx} = 2,$$

$$u_y = -2y, \quad u_{yy} = -2.$$

所以 $\Delta u = 0$.

从而 $u = x^2 - y^2$

满足 $\Delta u = 0$.



偏微分方程的适定性(well-posedness)



因为 $u_x = e^x \sin y$,

$$u_{xx} = e^x \sin y$$

$$u_y = e^x \cos y,$$

$$u_{yy} = -e^x \sin y,$$

从而 $u = e^x \sin y$

满足 $\Delta u = 0$.



例3.3 验证

$$u(x, y) = \cos \sqrt{x^2 + y^2}$$

是Cauchy问题

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 1 - u^2$$

和 $u(0, y) = \cos y$ 的解.



偏微分方程的适定性(well-posedness)



解： 因为

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= -\sin \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin \sqrt{x^2 + y^2},\end{aligned}$$



偏微分方程的适定性(well-posedness)



$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} &= -\sin \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin \sqrt{x^2 + y^2},\end{aligned}$$



偏微分方程的适定性(well-posedness)



$$u(0, y) = \cos y,$$

所以

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \sin^2 \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= 1 - \cos^2 \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= 1 - u^2$$

从而得证.



例3.4 证明函数

$$\begin{aligned} u &= u(x, y) \\ &= \frac{e^{ny} - e^{-ny}}{2n^2} \sin nx \end{aligned}$$

(n 是自然数)

是Cauchy问题



偏微分方程的适定性(well-posedness)



$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & (x, y) \in D, \\ u(x, 0) = 0, & (x, y) \in D, \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = \frac{\sin nx}{n}, & (x, y) \in D, \end{cases}$$

的解.

这里 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$,

并证明该问题是不适定的.



偏微分方程的适定性(well-posedness)



证明：容易验证

对任意固定的 $n \in N$,

$$u_n(x, y) = \frac{e^{ny} - e^{-ny}}{2n^2} \sin nx$$

是给定Cauchy问题的解.



偏微分方程的适定性(well-posedness)



设 $n \rightarrow \infty$

得到对 $x, y \in D$,

$x \neq 0, y \neq 0$,

$|u_n(x, y)| \rightarrow \infty$.



偏微分方程的适定性(well-posedness)



另一方面,
对给定的Cauchy问题,
当 $n \rightarrow \infty$ 时,
变为如下问题



偏微分方程的适定性(well-posedness)



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

$$u(x, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = 0.$$

该问题只有

平凡解 $u \equiv 0$,



偏微分方程的适定性(well-posedness)



所以所考虑的
Cauchy问题
不连续依赖于
初始条件.
从而是不适定的.



二、偏微分方程 定解问题的经典解法

(1)波动方程

Cauchy问题的

D'Alembert公式,

行波法;



偏微分方程的适定性(well-posedness)



(2)用分离变量法求解
定义在有界区域上的
波动方程、
热传导方程的
初边值问题，
调和方程的边值问题；



偏微分方程的适定性(well-posedness)



(3)用Fourier变换法
求解波动方程、
热传导方程的
初始问题；



偏微分方程的适定性(well-posedness)



- (4)用Green函数法
求解调和方程的
边界值问题；
- (5)级数法；
- (6)偏微分方程近似求解.



偏微分方程的适定性(well-posedness)



谢 谢!



4 案例分析

烟雾弹的爆炸问题-烟雾的扩散与消失

问题背景：当森林有虫灾时，一种简便的办法是，将农药粉末装在“炸弹”中，“炸弹”在空中爆炸就有良好的施药效果，试研究施药的浓度分布及扩散范围。



问题的演变：当一颗炮弹在天空中爆炸时，我们看到放出的烟雾以爆炸点为中心向四周迅速扩散，形成一个近于球形的不透光区域.



起初这个区域逐渐增大，
后来它的边界
变得明亮起来，
不透光区域渐渐变小，
最后烟雾完全消失。



案例分析



现要建立一个模型
描述观察到的烟雾
扩散和消失过程，
分析消失的时间
与哪些因素有关，
以及怎样预报消失的时刻。



【问题分析】

炮弹爆炸引起的烟雾传播
可以看作在无限空间
由瞬时点源导致的扩散过程，



案例分析



能够由二阶抛物型
偏微分方程描述
烟雾浓度的变化规律.



我们用仪器或肉眼
观察到的烟雾扩散
和消失过程
既与烟雾浓度的
变化规律有关，



又与烟雾对光线的
吸收过程有关，
还涉及到仪器或肉眼
对亮暗的灵敏程度。



比如用肉眼观察
认为烟雾已经消失
（由暗变亮），
而用灵敏度高的仪器
则仍能观测到烟雾。



整个建模过程应当包含：
烟雾浓度的变化规律；
穿过烟雾的
光的强度的变化规律；



仪器辨别亮暗的
灵敏度的描述；
不透光区域
边界的变化过程等.



【问题假设】

(1) 炮弹的爆炸
看作在空中某一点
向四周等强度地
瞬时释放烟雾，



案例分析



烟雾在无限空间扩散，
不计风力
和大地障碍物的影响。



(2) 烟雾的传播

服从扩散定律,

即单位时间通过

单位法向面积的流量

与它的浓度的梯度

成正比.



(3)光线穿过烟雾时
其强度由于
烟雾的吸收而减少,
单位距离上
光强的相对减少量



案例分析



与烟雾浓度成正比；
没有烟雾的大气
对光线的吸收作用
忽略不计。



(4)在烟雾扩散过程中,
不穿过烟雾
直接进入观测仪器的
标准光强 I_0 保持不变;



案例分析



对于穿过烟雾
进入仪器的光强 I ,
观测结果只有亮暗之分,
仅当 $\frac{I}{I_0} > 1 - \mu$ 时
观测结果为亮.



案例分析



μ 称为仪器的灵敏度,

μ 越小仪器越灵敏.

通常 $\mu \ll 1$.



【模型构建】

(1) 烟雾浓度的变化规律

在这种假设下，可取爆炸时刻为 $t = 0$ ，爆炸点为三维坐标原点，记含有爆炸点的任意封闭曲面为 S ，其法向量为 n ，闭曲面 S 所围体积为 V ，还记 t 时刻位于 $P(x, y, z)$ 处的烟雾浓度为 $C(x, y, z, t)$ 。



于是，根据扩散规律，在单位时间内通过单位法向面积的扩散流量为

$$\vec{q} = -k \cdot \text{grad}C$$

k 是扩散系数， grad 表示梯度，负号表示由浓度高向浓度低的地方扩散.



案例分析



考察空间区域 Ω ,
在物体 Ω 内
任意截取一块 D ,
并在时段 $[t, t + \Delta t]$ 上
对 D 使用质量守恒定律.



D的边界曲面为 S ,
 S 的外法线向量为 \vec{n} ,
则在 $[t, t + \Delta t]$ 内
从D内通过 S
流出的流量为



案例分析



$$Q_1 = \int_t^{t+\Delta t} \iint_S \vec{q} \cdot \vec{n} d\sigma dt$$

而D内烟雾的减少量为

$$Q_2 = \iiint_D [C(x, y, z, t) - C(x, y, z, t + \Delta t)] dx dy dz,$$



由质量守恒定律流出去的等于减少量

$$Q_1 = Q_2,$$

回顾

$$\vec{q} = -k \cdot \text{grad}C$$



以及Guass公式，得到

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{q} \cdot \vec{n} d\sigma &= \iiint_D \operatorname{div} \vec{q} dx dy dz, \\ &= -k \iiint_D \operatorname{div} \operatorname{grad} C dx dy dz, \\ &= -k \iiint_D \Delta C dx dy dz\end{aligned}$$



由前几式

$$\int_t^{t+\Delta t} \iint_S \vec{q} \cdot \vec{n} d\sigma dt$$

$$= \iiint_D [C(x, y, z, t) - C(x, y, z, t + \Delta t)] dx dy dz,$$



推出

$$k \int_t^{t+\Delta t} \iiint_D \Delta C dx dy dz dt = \int_t^{t+\Delta t} \iiint_D \frac{\partial C}{\partial t} dx dy dz dt$$

由于被积函数在 $\Omega \times (0, \infty)$ 内连续,

以及 $[t, t + \Delta t]$ 和 D 的任意性



又由于物体均匀，
各向同性， k 是常数得

$$\frac{\partial C}{\partial t} = k \operatorname{div}(\operatorname{grad} C) = k \Delta C. \quad (3.1)$$

这是抛物型偏微分方程.



补充： δ 函数

1、 δ 函数的提出

在物理学中，为了突出重要因素，常常运用质点、点电荷、瞬时力等抽象模型。

质点体积为零，所以它的密度（质量/体积）为无限大，但密度的体积积分（即总质量）为有限的。



点电荷的体积为零，所以它的电荷密度（电量/体积）为无限大，但电荷的体积积分（即总电量）却又是有限的。

瞬时力的延续时间为零，而力的大小为无限大，但力的时间积分（即冲量）是有限的。



如何来描述这些抽象模型中的物理量（密度、瞬时力）的分布呢？这在物理上有着重要的意义。由此引进的 δ 函数将能对这些问题做出圆满的回答。



2、 δ 函数的定义

为了研究上述这样一类包含有某种无限大量的问题，狄拉克引入一个量 $\delta(x)$ ，称为狄拉克函数，简称 δ 函数，它的定义如下：

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & (x - x_0 \neq 0), \\ \infty & (x - x_0 = 0). \end{cases}$$



$$\int_a^b \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} 0 & (a, b \text{ 都小于 } x_0 \text{ 或都大于 } x_0), \\ 1 & (a < x_0 < b). \end{cases}$$

δ 函数曲线的“峰”无限高，但是无限窄，曲线下的面积是有限值1。



这样，位于 x_0 而质量为 m 的质点的密度可记作

$$m\delta(x - x_0);$$

位于 x_0 而电量为 q 的点电荷的电荷密度可记作

$$q\delta(x - x_0),$$



总电量

$$\begin{aligned} q &= \int_{-\infty}^{+\infty} q \delta(x - x_0) dx \\ &= q \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) dx = q; \end{aligned}$$

作用于瞬时 t_0 而冲量为 k 的瞬时力可记作 $k\delta(t - t_0)$ 。



数学性质上 δ 函数是很奇异的。严格说来，它不是传统数学中的函数，它只是一种分布(distribution)或者叫广义函数。



回到案例：根据假设1，初始条件为作用在坐标原点的点源函数，当 $t = 0$ 时刻，在原点瞬时集中投入质量为 Q 的扩散质，可记作

$$C(x, y, z, 0) = Q \delta(x, y, z) \quad (3.2)$$

Q 表示炮弹爆炸施放的烟雾总量，



方程(3.1)满足条件(3.2) 的解为

$$C(x, y, z, t) = \frac{Q}{(4\pi kt)^{3/2}} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4kt}} \quad (3.3)$$

这个结果表明，对于任意时刻 t 烟雾浓度 C 的等值面是球面

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$



案例分析



并且随着球面
半径 R 的增加
 C 的值是连续减少的,
仅当 $t \rightarrow \infty$ 时
 $C(x, y, z, t)$ 才趋于零.



(2) 穿过烟雾的光强的变化规律.

考察沿一定方向

穿过烟雾的光线,

此方向的长度坐标标记为 l ,

烟雾浓度为 $C(l)$, 光强为 $I(l)$.



按照假设3 应有

$$\frac{dI}{dl} = -\alpha C(l)I(l), \quad (3.4)$$

α 是烟雾对光线的吸收系数，负号表示光强变化率的增长方向



I_0 表示无烟雾遮挡时的光强，即光线未进入烟雾时($l = l_0$)的强度记作 I_0 ，即

$$I(l_0) = I_0 \quad (3.5)$$

方程(3.4)在条件(3.5)下的解为

$$I(l) = I_0 e^{-\alpha \int_{l_0}^l C(s) ds}. \quad (3.6)$$



测量烟雾对光线的遮挡程度，可用能见度 $\frac{I}{I_0}$ 来表现，
测量仪可采用简单原理来设计，即

$$\begin{cases} \frac{I}{I_0} > 1 - \mu, \text{ 明亮显示} \\ \frac{I}{I_0} \leq 1 - \mu, \text{ 黑暗显示} \end{cases} \quad (3.7)$$

其中 μ 是可调整参数， μ 值不同，能见度也不同。



(3) 关于爆炸烟雾不透光边界的变化规律

为了测量爆炸烟雾的不透光边界，假设测量仪器中设置小的参数 $\mu \ll 1$ ；还假设大气对光线没有吸收，在穿过爆炸中心的直线上考虑光强变化率，即考虑烟雾对光线遮挡最严重的情形。



为方便起见取沿着 z 轴的光线，不妨设仪器在 $z = \infty$ 处而光源在 $z = -\infty$ 处，由(3.6)式条件(3.7)可以写作

$$e^{-\alpha \int_{-\infty}^{\infty} C(x,y,z,t)dx} > 1 - \mu. \quad (3.8)$$

因为 $C(x, y, z, t)$ 的等值面是球面，



所以仪器观察到的投影在 xy 平面上的不透光区域的边界是圆周，记作

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

半径 $r(t)$ 随时间的变化规律应由条件(3.8)决定.



现在研究不透光区域边界的变化规律.

利用近似关系

$$\ln(1+x) \doteq x (x \ll 1)$$

(3.8)式可化为

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(x, y, z, t) dz < \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{1-\mu} \doteq \frac{\mu}{\alpha}.$$



于是不透光区域的边界由

$$\int_{-\infty}^{\infty} C(x, y, z, t) dz = \frac{\mu}{\alpha} \quad (3.9)$$

确定。将(3.3)式

$$C(x, y, z, t) = \frac{Q}{(4\pi kt)^{3/2}} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4kt}}$$

代入(3.9)进行积分,



并利用公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/\alpha} dx = \sqrt{\pi\alpha}$$

可得

$$\frac{Q}{4\pi kt} e^{-\frac{x^2+y^2}{4kt}} = \frac{\mu}{\alpha}. \quad (3.10)$$



将 $x^2 + y^2 = r^2$.

代入(3.10)式即可得到
不透光区域的半径为

$$r(t) = \sqrt{4k t \ln \frac{\alpha Q}{4\pi k \mu t}}. \quad (3.11)$$



【结果分析】

当

$$t = t_1 = \frac{\alpha Q}{4\pi k \mu e} \quad (3.12)$$

时，不透光区域的半径 r
达到最大值 r_m ，



当

$$t = t_2 = \frac{\alpha Q}{4\pi k\mu} \quad (3.13)$$

时, $r = 0$, 即 t_2 是观察到
烟雾完全消失的时刻.



(3.12)、(3.13)式表明, t_1 、 t_2 与烟雾施放量 Q 和烟雾对光线的吸收系数 α 成正比; 与扩散系数 k 和仪器灵敏度 μ 成反比. 所以当观察到烟雾扩散区域达到最大的时刻 t_1 以后, 就可以预报烟雾完全消失的时刻 t_2 .



4、其他应用

利用上述烟雾扩散试验，可测出 t_1 和 t_2 ，于是可利用式(3.12)和式(3.13)具体计算出烟雾在无风大气中的扩散系数 k 。另外，模型(3.7)也可用于测量城市空气(机场)的能见度，人们可将能见度分为 n 个等级，相应设置不同的 μ 值，这样就可实际测量空气的能见度了。



谢 谢!