

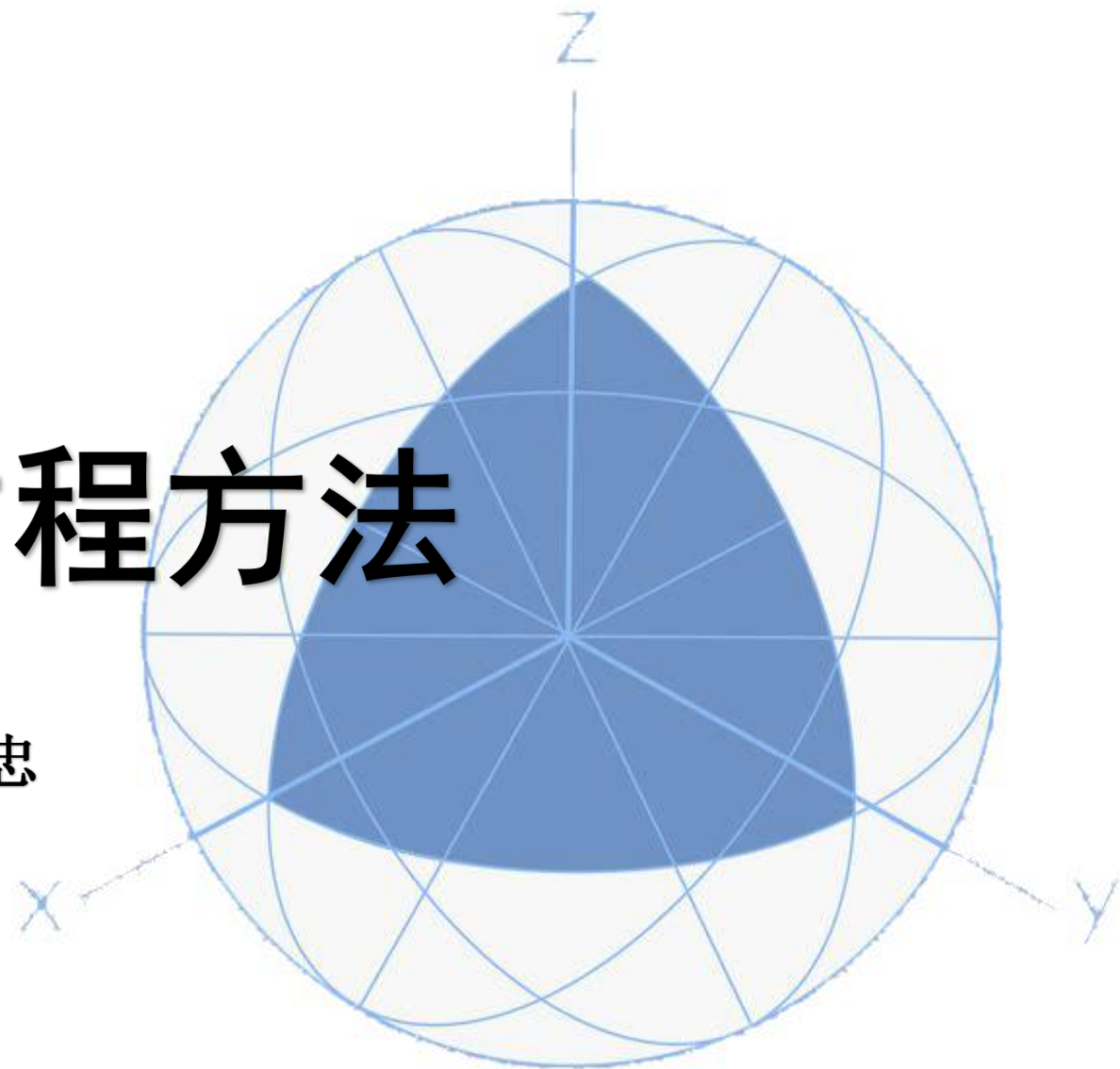


廈門大學

XIAMEN UNIVERSITY

常微分方程方法

譚 忠





廈門大學
XIAMEN UNIVERSITY





廈門大學
XIAMEN UNIVERSITY

Part 1

源头问题与当今应用





6.1 源头问题与当今应用

有些事件或现象在发展变化过程中，会涉及某些因素对时间或其它变量的变化率，即导数，这些导数与其他变量满足某种等式关系，形成了微分方程。

含有未知函数的导数（或偏导数）的式子称为**微分方程**（**偏微分方程**）。

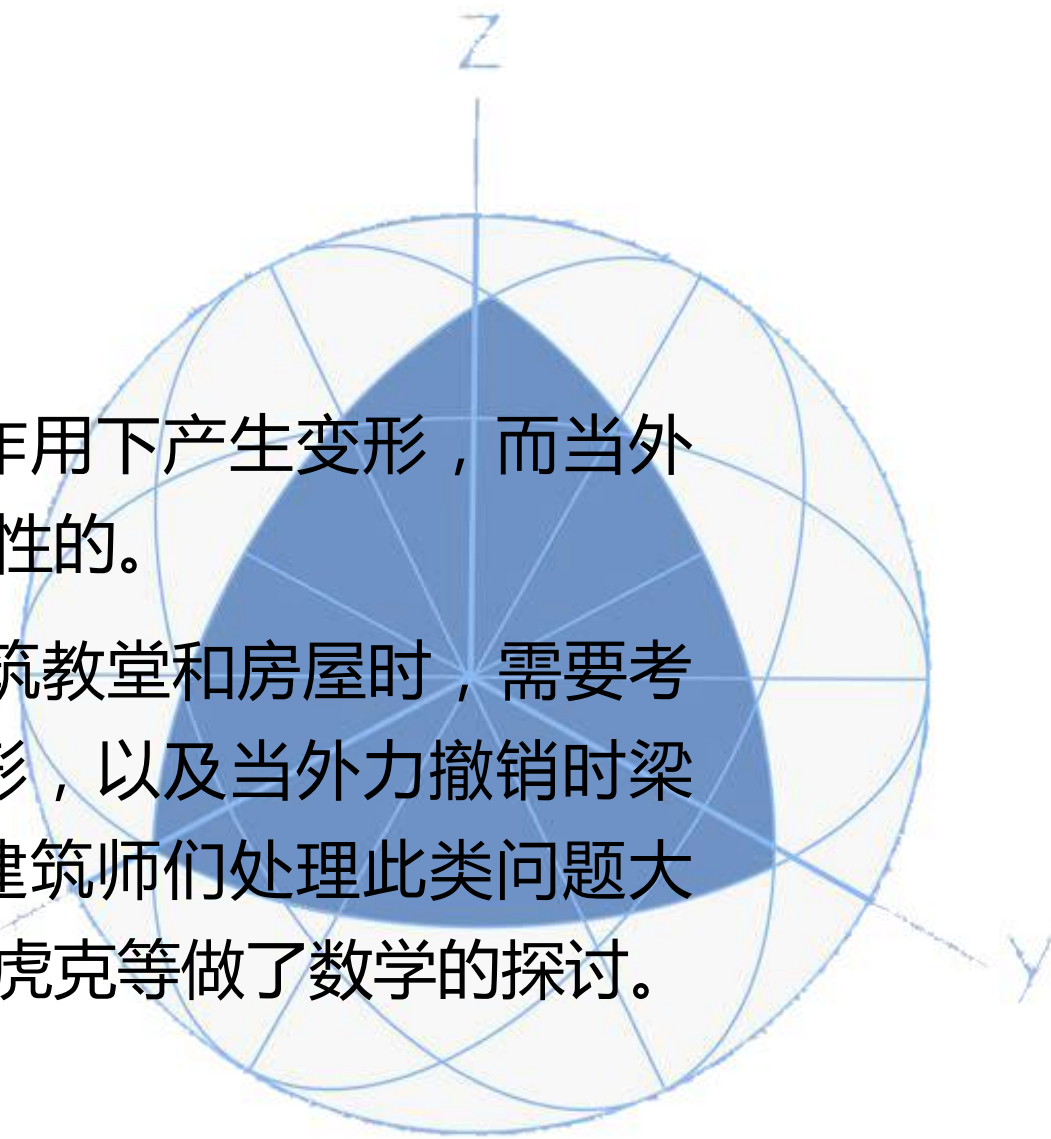




6.1.1 催生常微分方程产生的源头问题

例（弹性理论） 一个物体如果在外力作用下产生变形，而当外力移去时就恢复原状，我们就说它是弹性的。

17 世纪欧洲宏伟教堂的建筑师们在建筑教堂和房屋时，需要考虑垂直梁和水平梁在外力作用下的变形，以及当外力撤销时梁的恢复程度，这就是梁的弹性问题，建筑师们处理此类问题大多依赖于经验。到十七世纪由伽利略、虎克等做了数学的探讨。

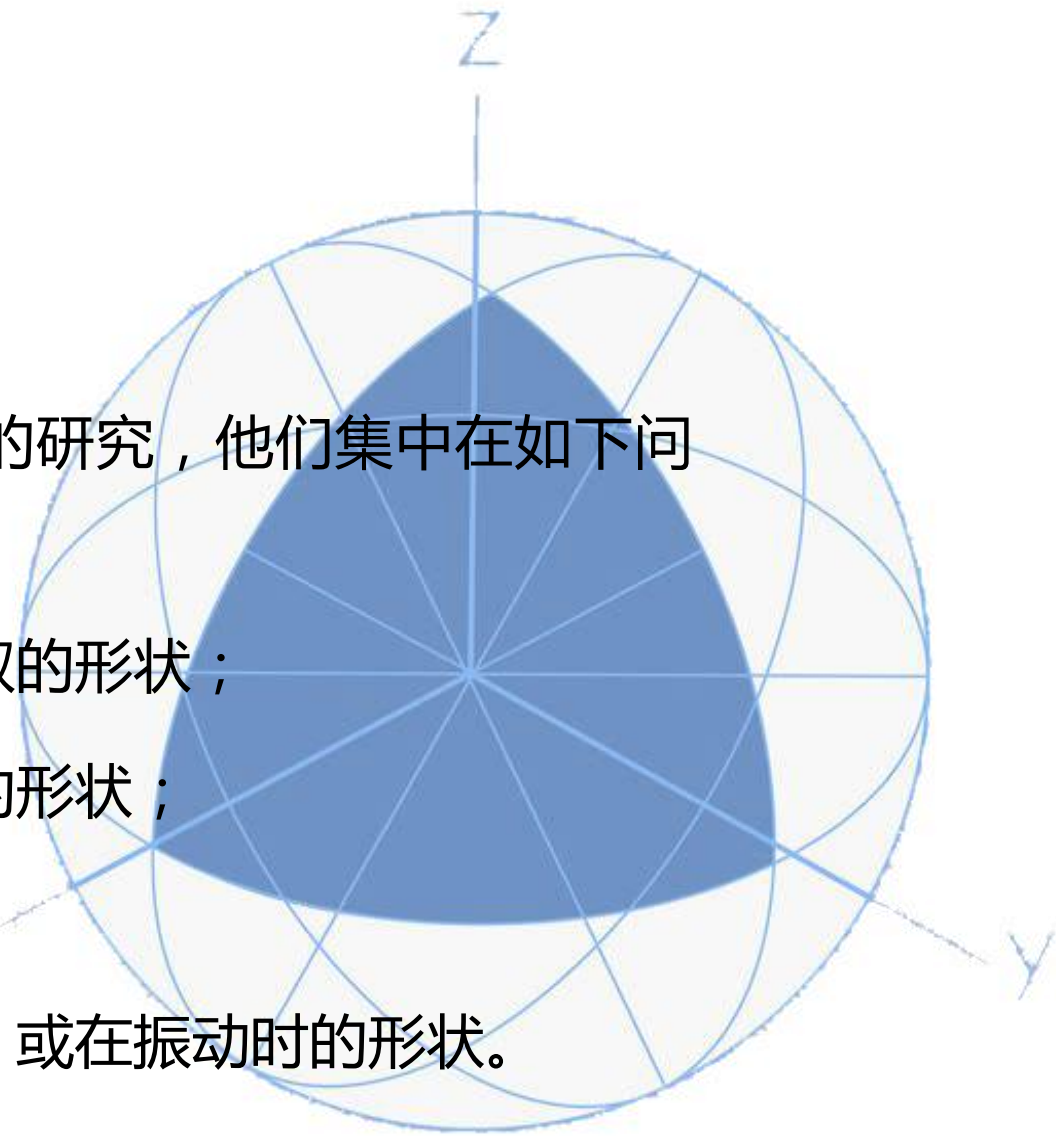




6.1.1 催生常微分方程产生的源头问题

十八世纪的人们用更多的数学展开对弹性的研究，他们集中在如下问题：

- 一根悬挂在两固定点的非弹性柔软细绳所取的形状；
- 一根悬挂在一固定点并使之振动的弦或链的形状；
- 一根固定在两端的弹性振动弦所取的形状；
- 一根两端固定的杆子在外加载荷下的形状，或在振动时的形状。





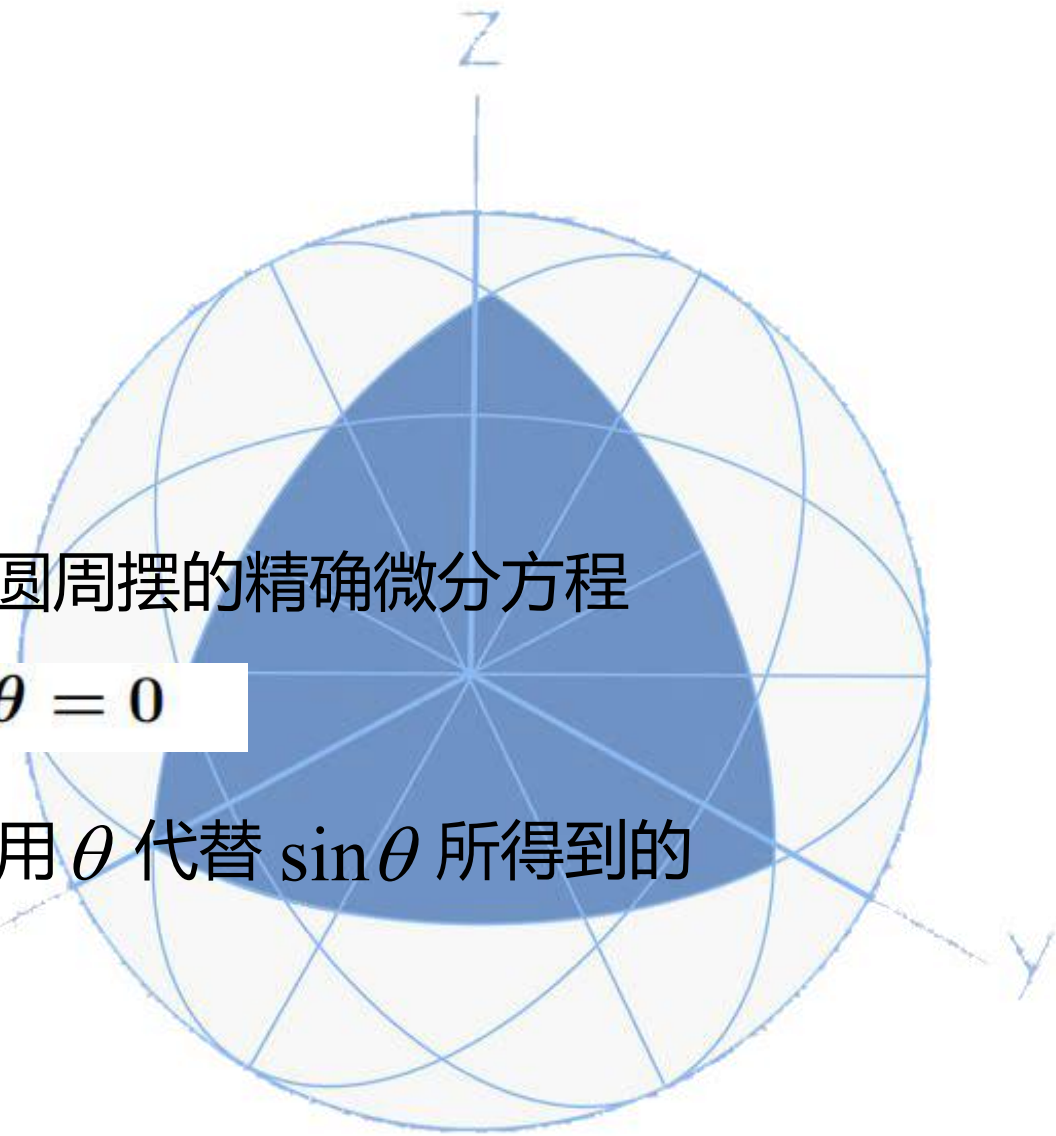
6.1.1 催生常微分方程产生的源头问题

例（单摆运动）

单摆的问题不断激发着数学家的兴趣，圆周摆的精确微分方程

$$d^2\theta/dt^2 + (g/l)\sin\theta = 0$$

的可解性问题向数学家们挑战了，甚至用 θ 代替 $\sin\theta$ 所得到的近似方程在分析上也未曾研究过的。

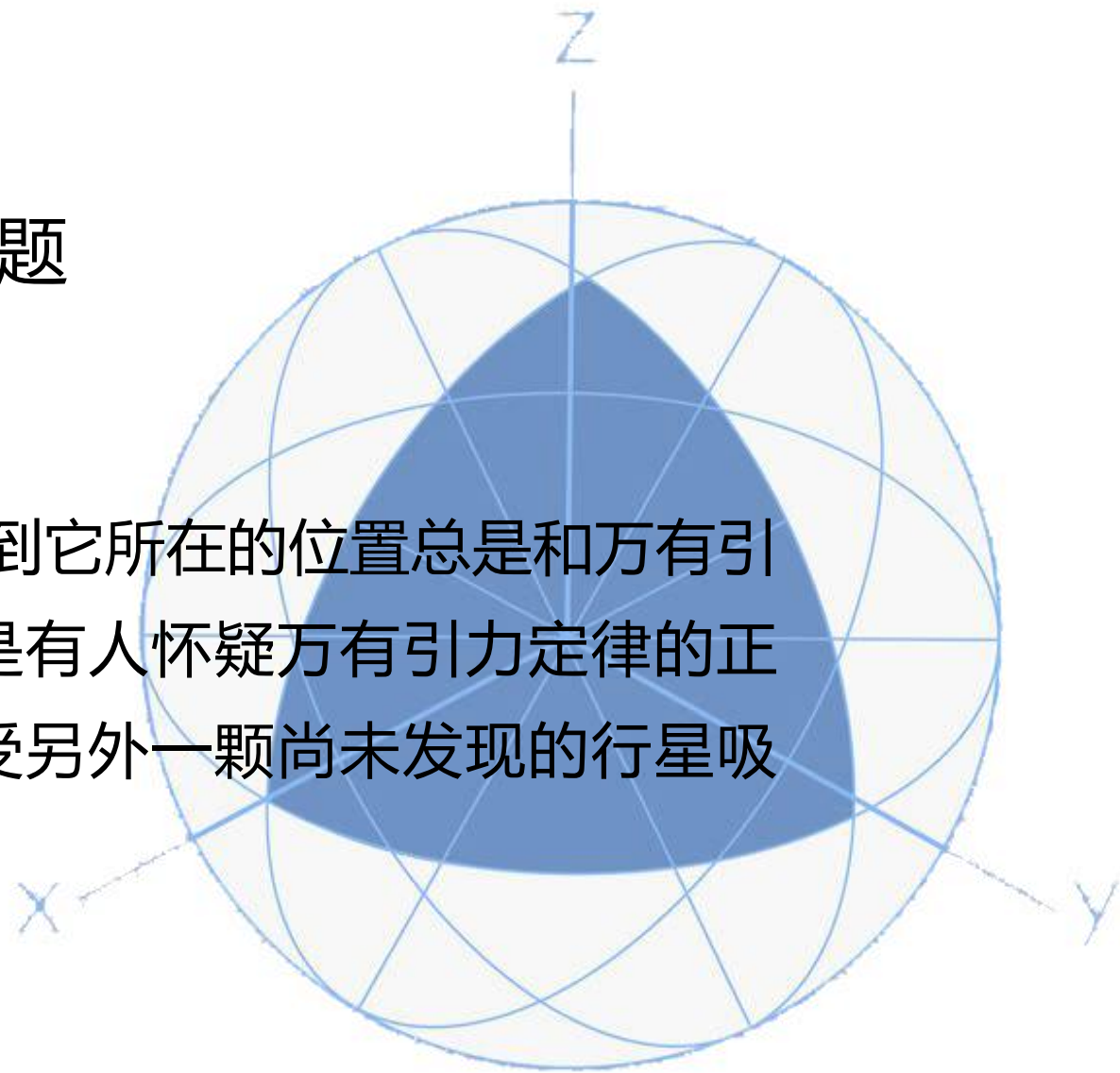




6.1.1 催生常微分方程产生的源头问题

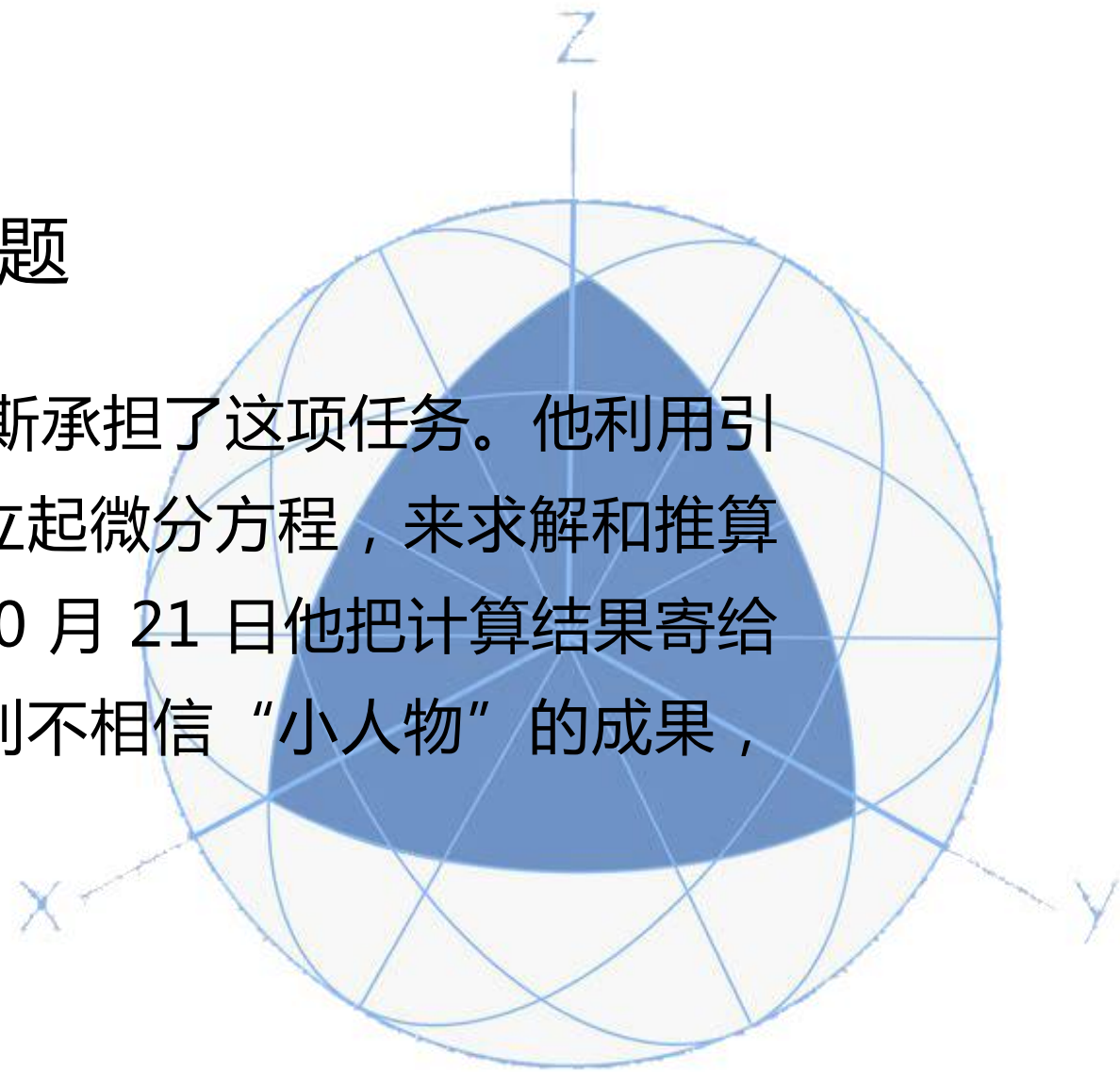
例（海王星的发现）

1781 年发现天王星后，人们注意到它所在的位置总是和万有引力定律计算出来的结果不符。于是有人怀疑万有引力定律的正确性；但也有人认为，这可能是受另外一颗尚未发现的行星吸引所致。



6.1.1 催生常微分方程产生的源头问题

23 岁的英国剑桥大学的学生亚当斯承担了这项任务。他利用引力定律和对天王星的观测资料建立起微分方程，来求解和推算这颗未知行星的轨道，1843 年 10 月 21 日他把计算结果寄给格林威治天文台台长艾利，但艾利不相信“小人物”的成果，置之不理。





6.1.1 催生常微分方程产生的源头问题

两年后，法国青年勒威耶也开始从事这项研究。1846年9月18日，他把计算结果告诉了柏林天文台助理员卡勒，23日晚，卡勒果然在勒威耶预言的位置上发现了海王星。

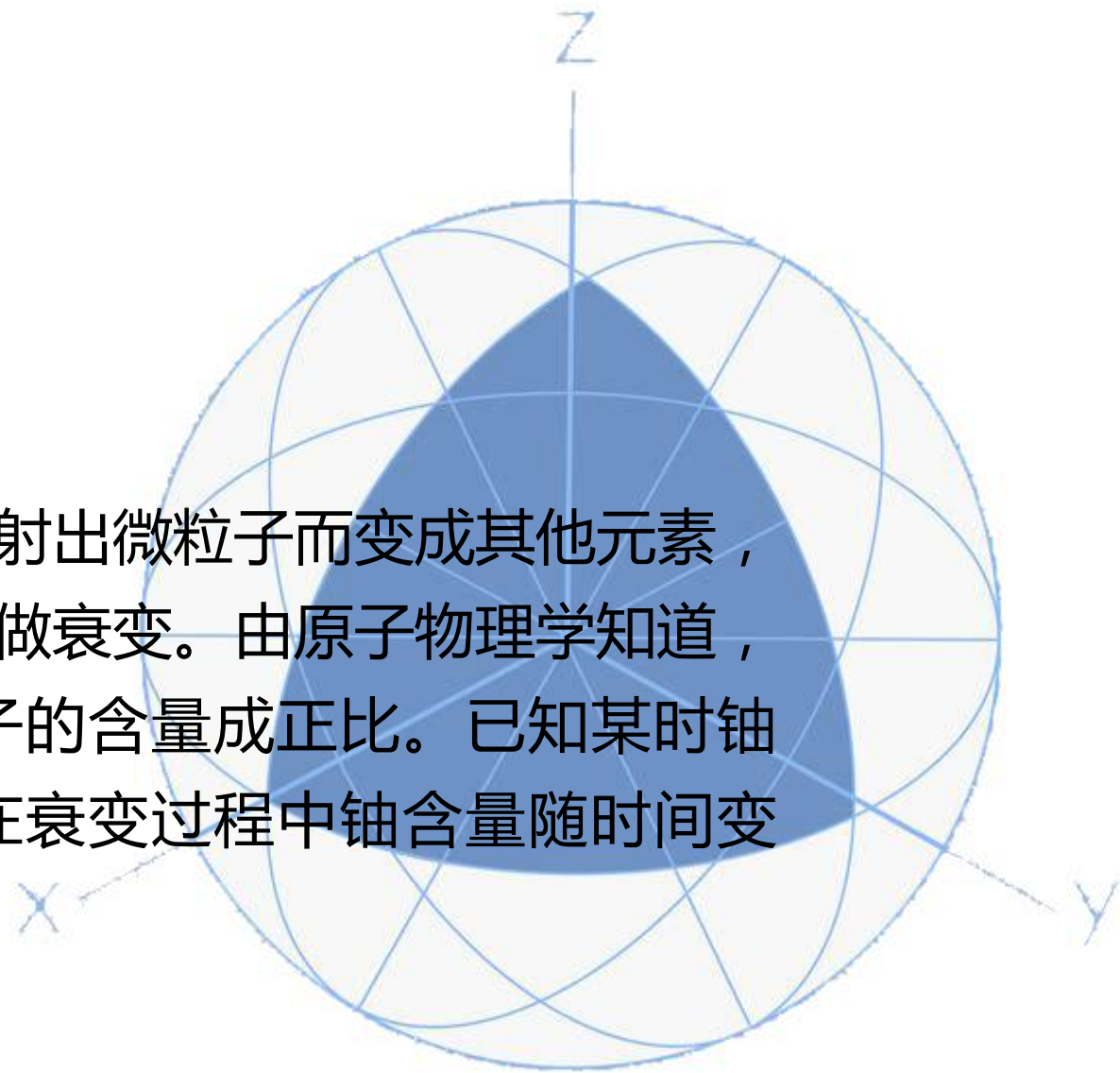




6.1.2 当今应用

例（放射性元素的衰变）

放射性元素铀由于不断的有原子放射出微粒子而变成其他元素，铀的含量就不断减少，这种现象叫做衰变。由原子物理学知道，铀的衰变速度与当时未衰变的原子的含量成正比。已知某时铀的含量，则可利用常微分方程求在衰变过程中铀含量随时间变化的规律。



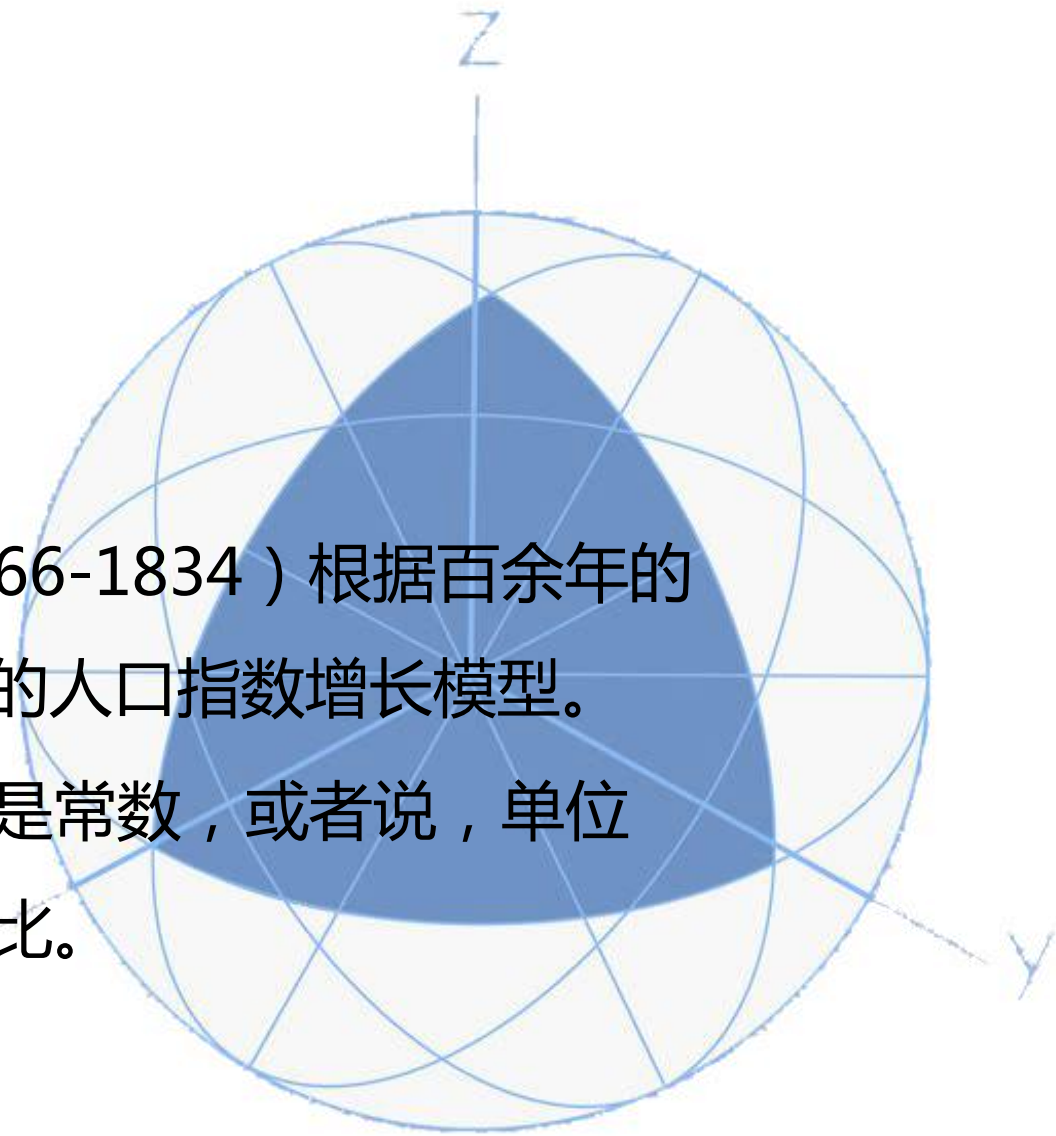


6.1.2 当今应用

例 指数增长模型（马尔萨斯人口模型）

英国人口学家马尔萨斯（Malthus, 1766-1834）根据百余年的人口统计资料，于 1798 年提出了著名的人口指数增长模型。

这个模型的基本假设是：人口的增长率是常数，或者说，单位时间内人口的增长量与当时的人口成正比。

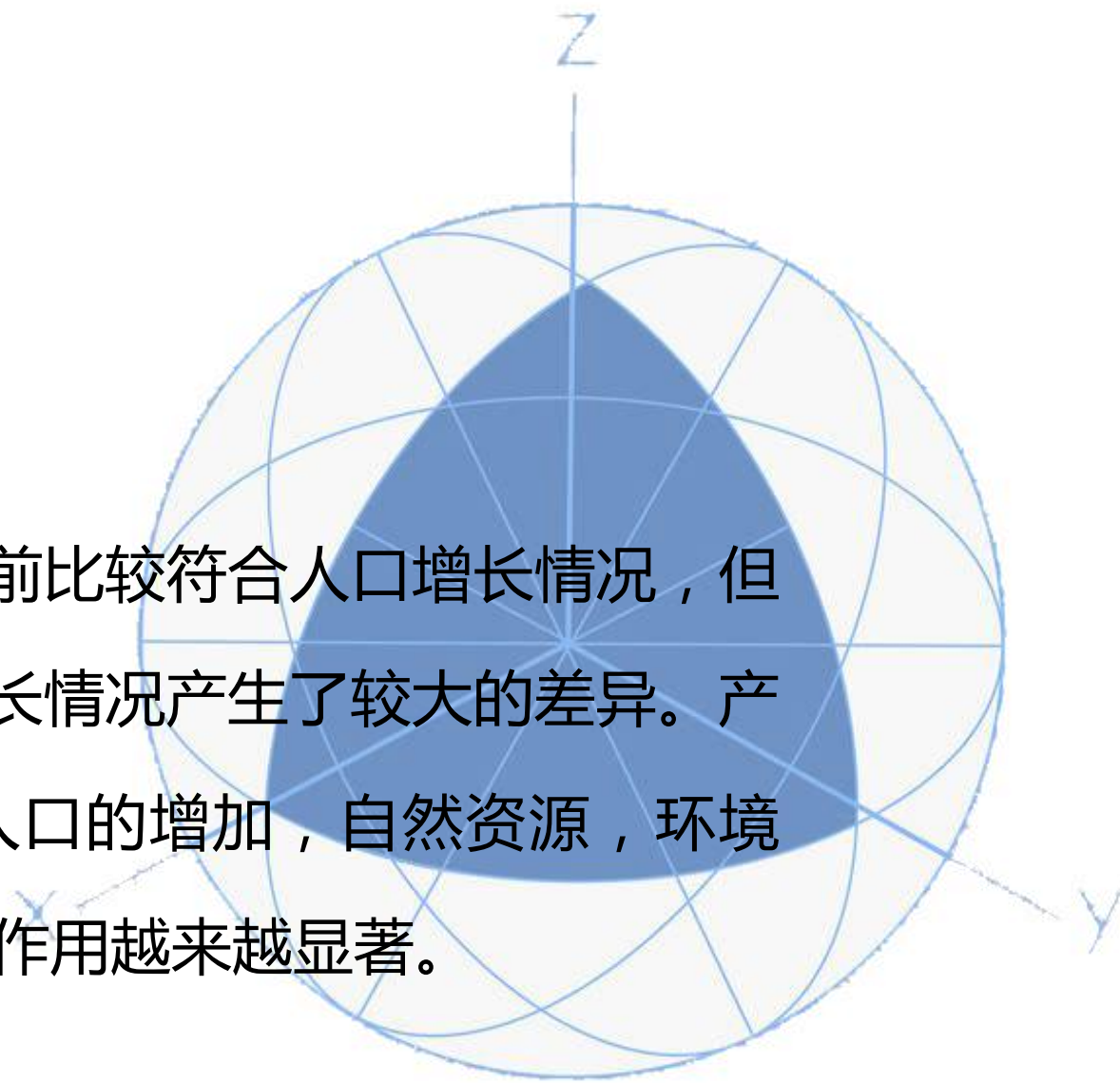




6.1.2 当今应用

例 阻滞增长模型 (Logistic 模型)

上例中的指数增长模型在 19 世纪前比较符合人口增长情况，但从 19 世纪以后，就与人口真实增长情况产生了较大的差异。产生上述现象的主要原因是，随着人口的增加，自然资源，环境条件等因素对人口继续增长的阻滞作用越来越显著。

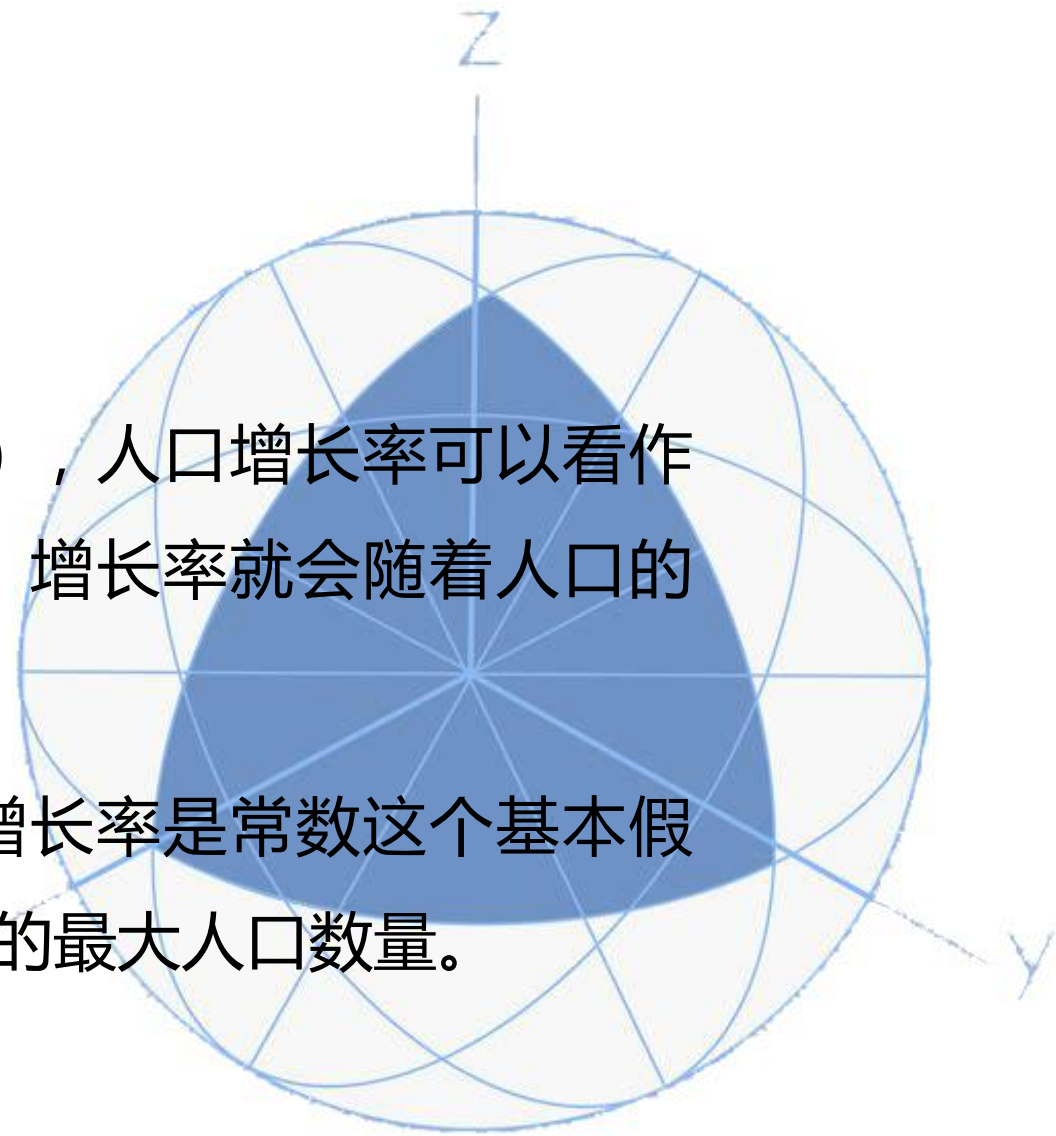




6.1.2 当今应用

如果当人口较少时（相对于资源而言），人口增长率可以看作常数，那么当人口增加到一定数量后，增长率就会随着人口的继续增加而逐渐减少。

为此必须修改指数增长模型关于人口增长率是常数这个基本假设，引入自然资源和环境条件所能容纳的最大人口数量。



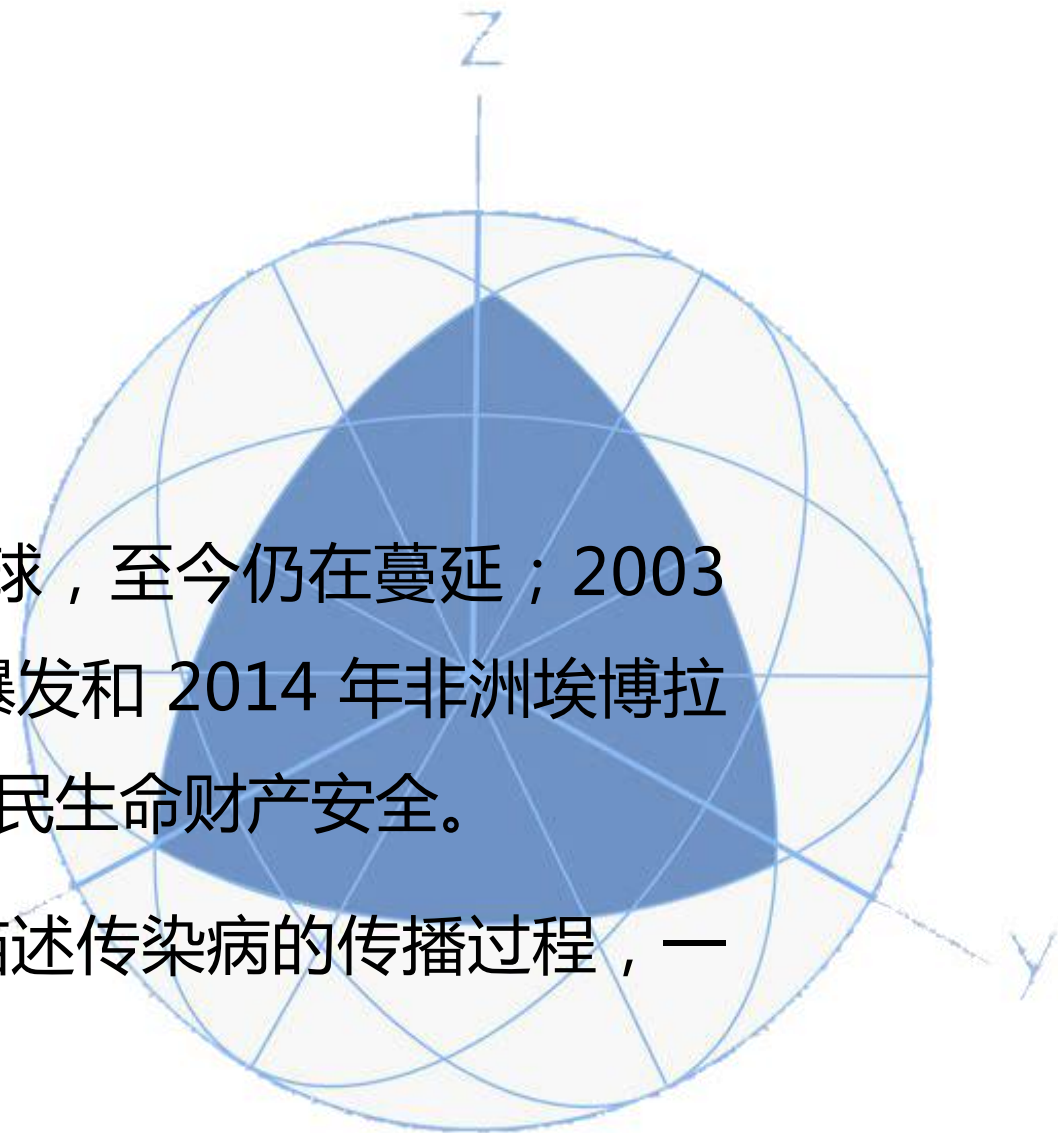


6.1.2 当今应用

例（传染病模型）

20 世纪 80 年代艾滋病毒开始肆虐全球，至今仍在蔓延；2003 年春 SARS 病毒、2005 年禽流感病毒爆发和 2014 年非洲埃博拉病毒以及当前的塞卡病毒，再次威胁人民生命财产安全。

长期以来，建立传染病的数学模型来描述传染病的传播过程，一直是各国政府和专家关注的课题。





廈門大學
XIAMEN UNIVERSITY

Part 2

微分方程思想 与建模方法



6.2.1 可用常微分方程思想建模的几种情形

一、在事件中某变量对另一变量的变化率与其他一些变量呈比例关系等

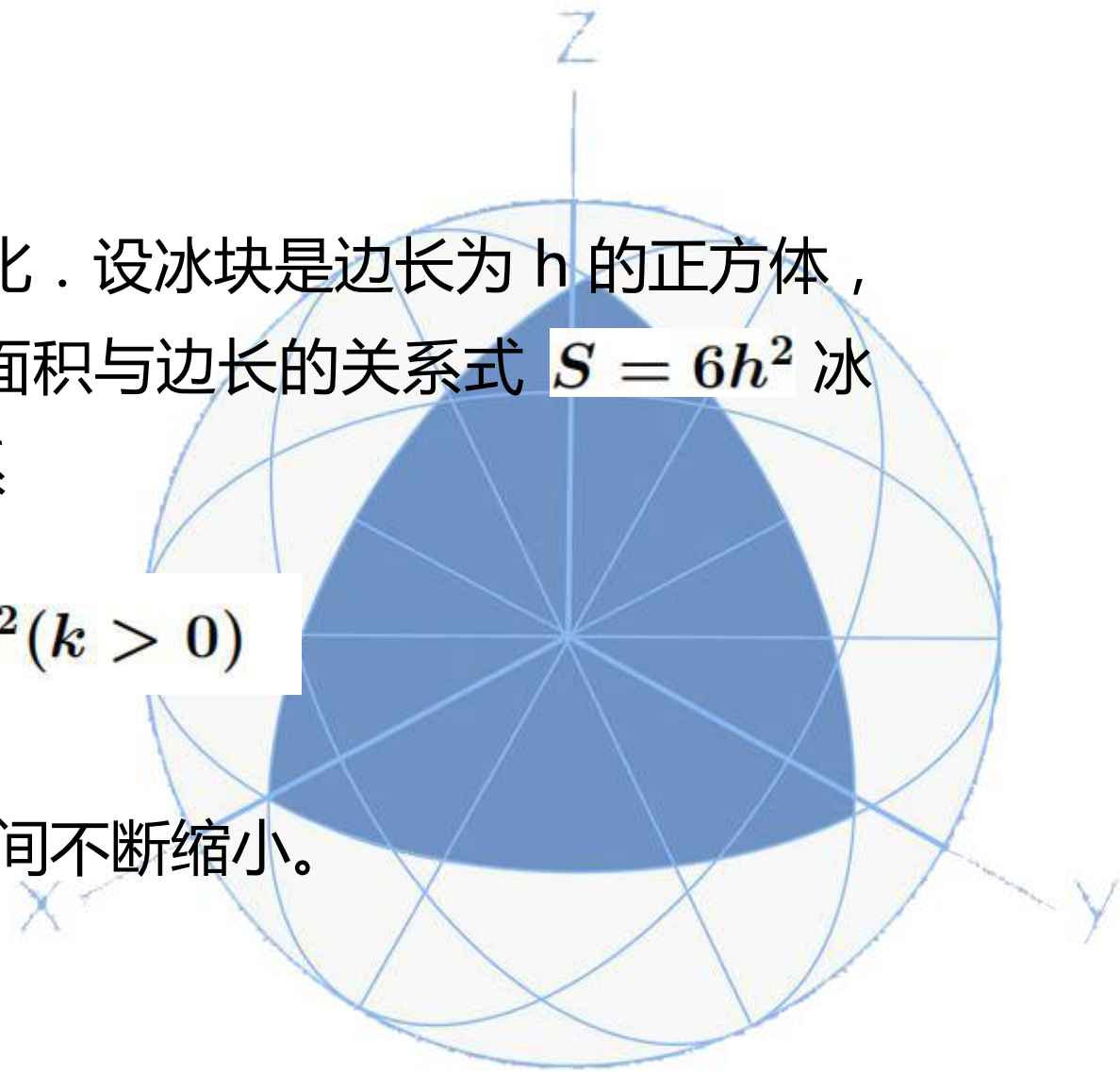
在事件中，利用物理规律或客观事实，建立某个变量对别的变量的变化率与另外一些变量的关系，如正反比关系等，就列出了微分方程。一般能建立一阶常微分方程或方程组，特殊情况可以建立二阶常微分方程组。



例 冰块的衰减率与其表面积成正比。设冰块是边长为 h 的正方体，体积与边长的关系式 $V = h^3$ ，表面积与边长的关系式 $S = 6h^2$ 冰块的衰减率 $\frac{dV}{dt}$ 具有以下正比例关系

$$\frac{dv}{dt} = -k6h^2 (k > 0)$$

其中 k 是常数，负号表示体积随时间不断缩小。





二、按已知规律或客观事实建立变量以及它们的导数之间的关系，即把自然科学的定律和原理转化为微分方程

在数学、力学、物理、化学等学科的许多现象中的变量间，符合某种规律或定律。例如，牛顿运动定律、牛顿冷却定律、放射性物质的放射性规律、曲线的切线性质等等，均已被实验所证明。这些已知的规律给出了未知量的导数与其他变量之间的关系，这样就可以列出微分方程。

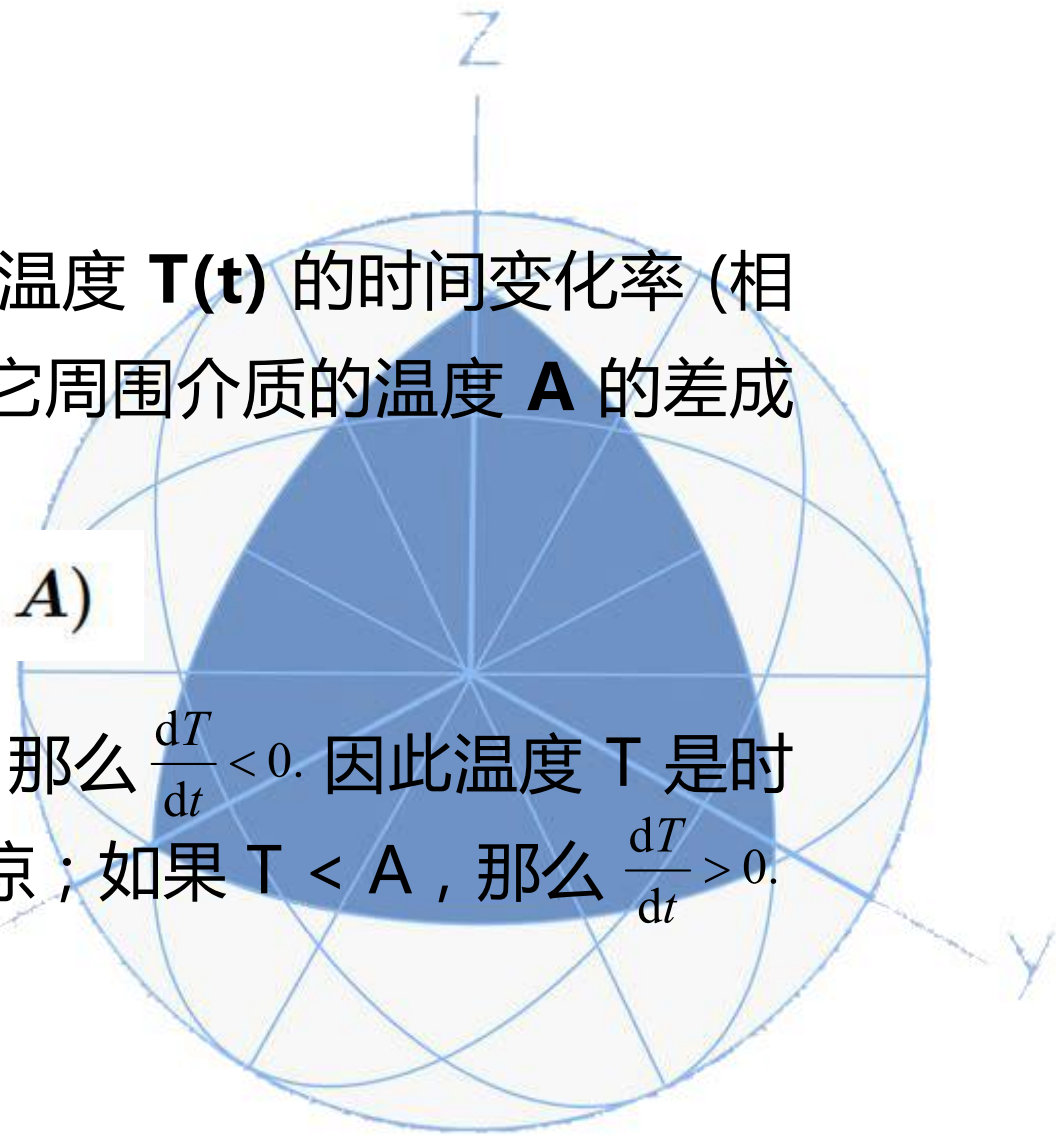
根据物理定律，这种方法既可以建立一阶常微分方程模型也可以建立二阶甚至高阶常微分方程模型。



例 牛顿冷却定律可表述为：一个物体温度 $T(t)$ 的时间变化率 (相对于时间的变化率) 与物体的温度 T 和它周围介质的温度 A 的差成比例，即

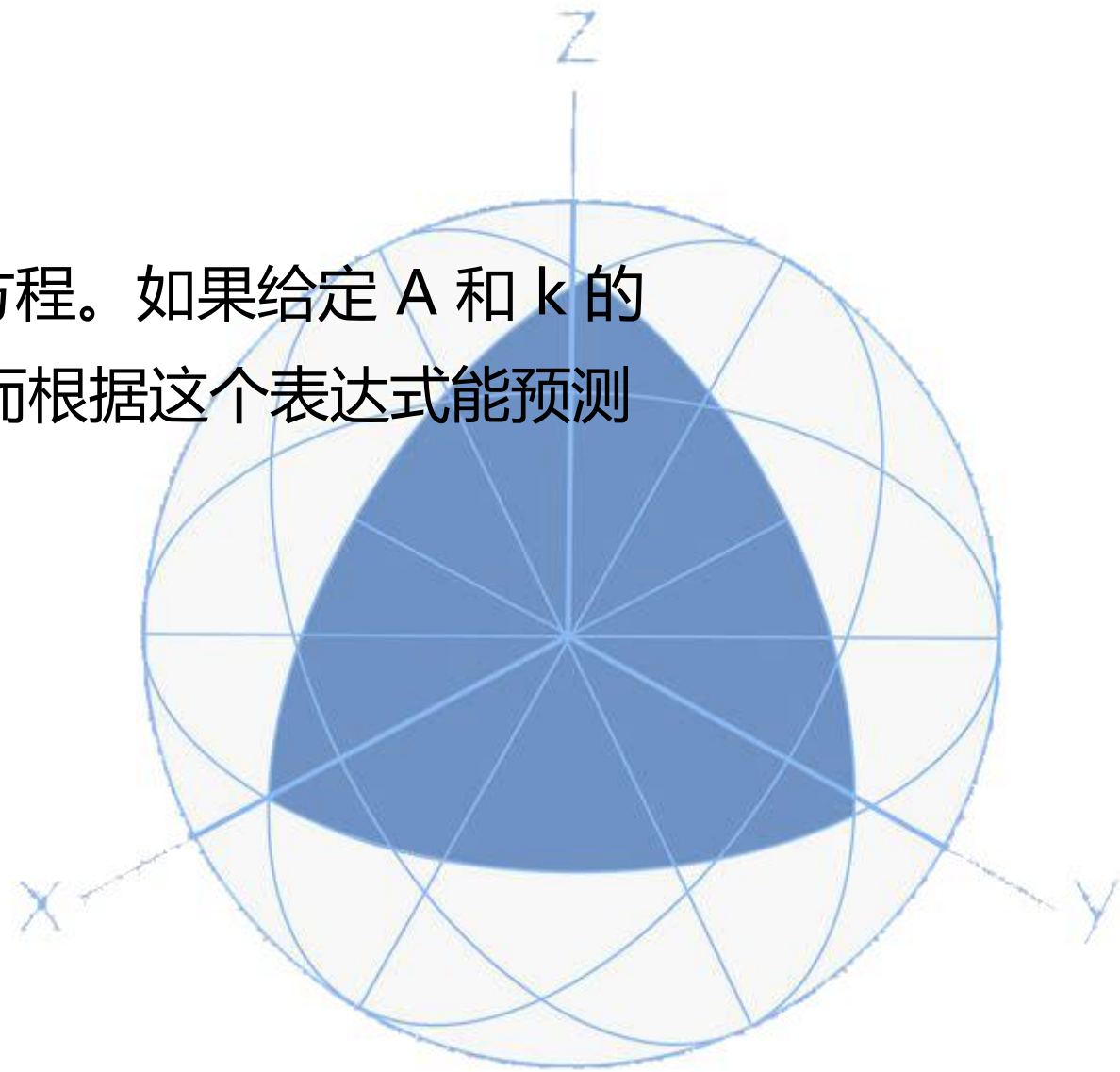
$$\frac{dT}{dt} = -k(T - A)$$

其中 k 为正常数。显然，如果 $T > A$ ，那么 $\frac{dT}{dt} < 0$ 。因此温度 T 是时间 t 的一个减函数，从而物体会慢慢变凉；如果 $T < A$ ，那么 $\frac{dT}{dt} > 0$ 。因此温度 T 是时间 t 的一个增函数。





这样，物理定律被转化为一个微分方程。如果给定 A 和 k 的值，将得到 $T(t)$ 的具体表达式，从而根据这个表达式能预测物体的将来温度。





例 托里拆利定律可表述为: 在排水容器中, 水的体积 V 的时间变化率与容器中水的深度 y 的平方根成比例, 即

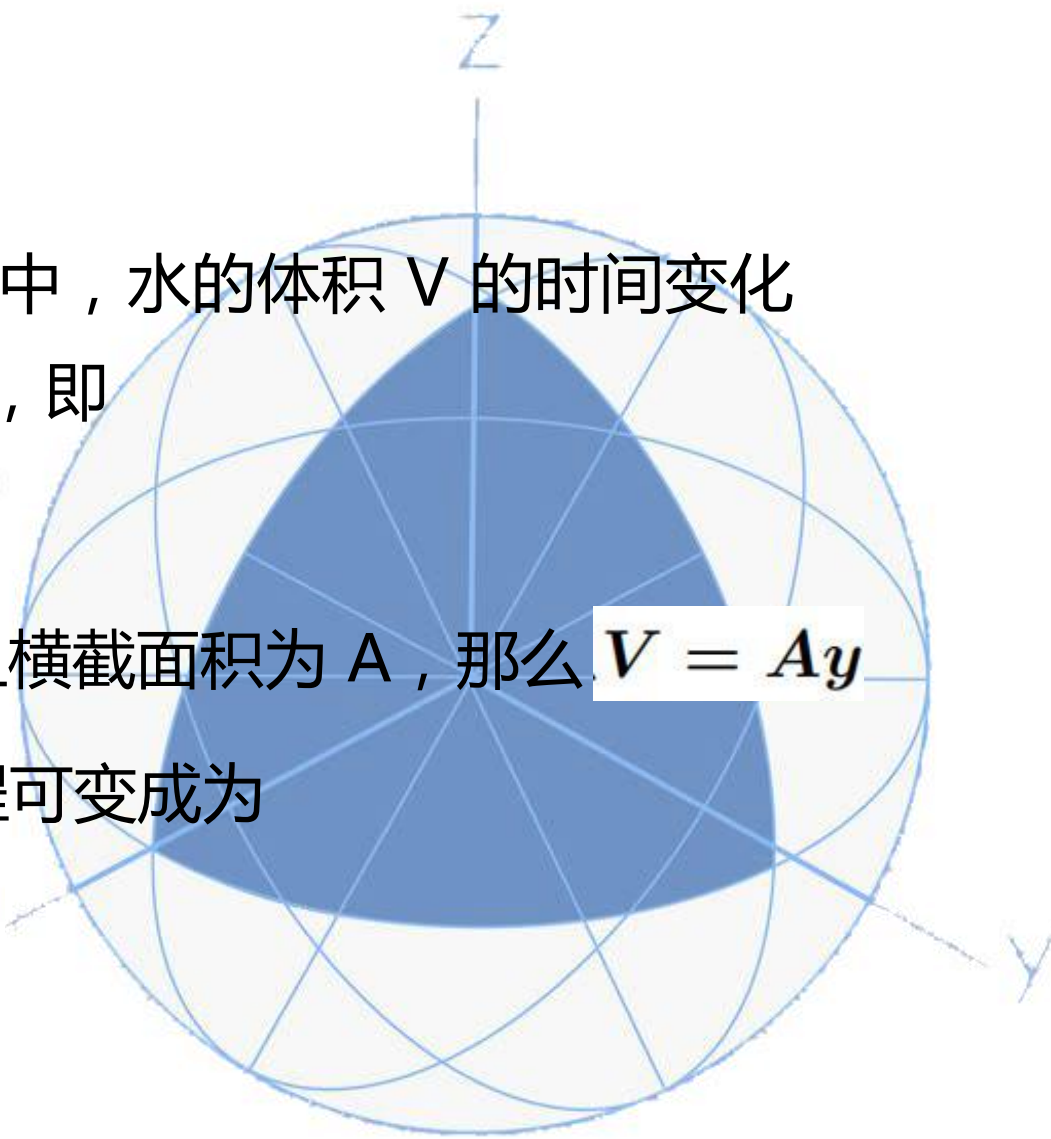
$$\frac{dV}{dt} = -k\sqrt{y}$$

其中 k 为常数。如果容器是一个直圆柱且横截面积为 A , 那么 $V = Ay$

所以 $\frac{dV}{dt} = A \cdot \frac{dy}{dt}$ 这种情况下, 原方程可变成

$$\frac{dy}{dt} = -h\sqrt{y}$$

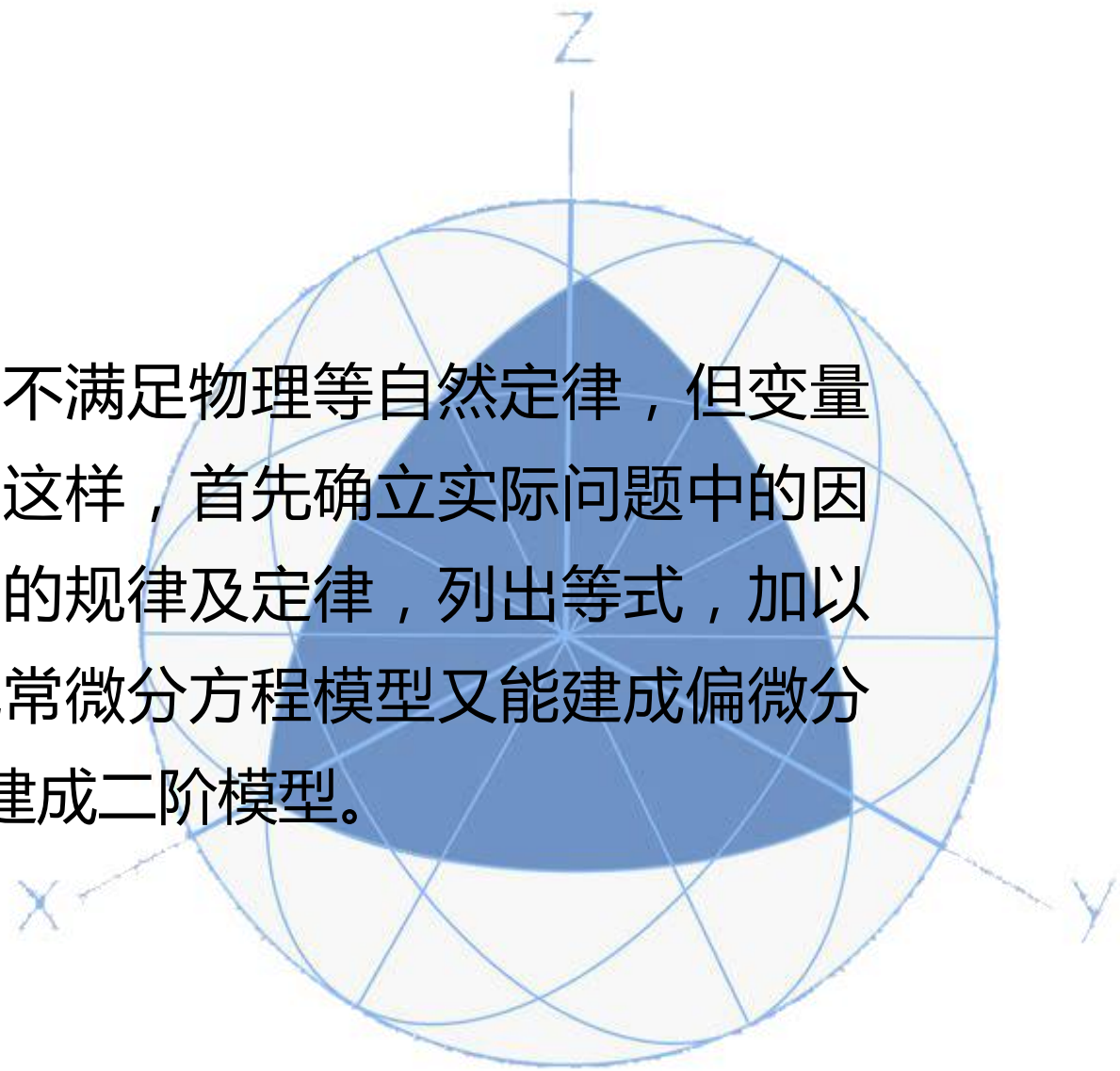
其中 $h = k/A$ 为一个常数。





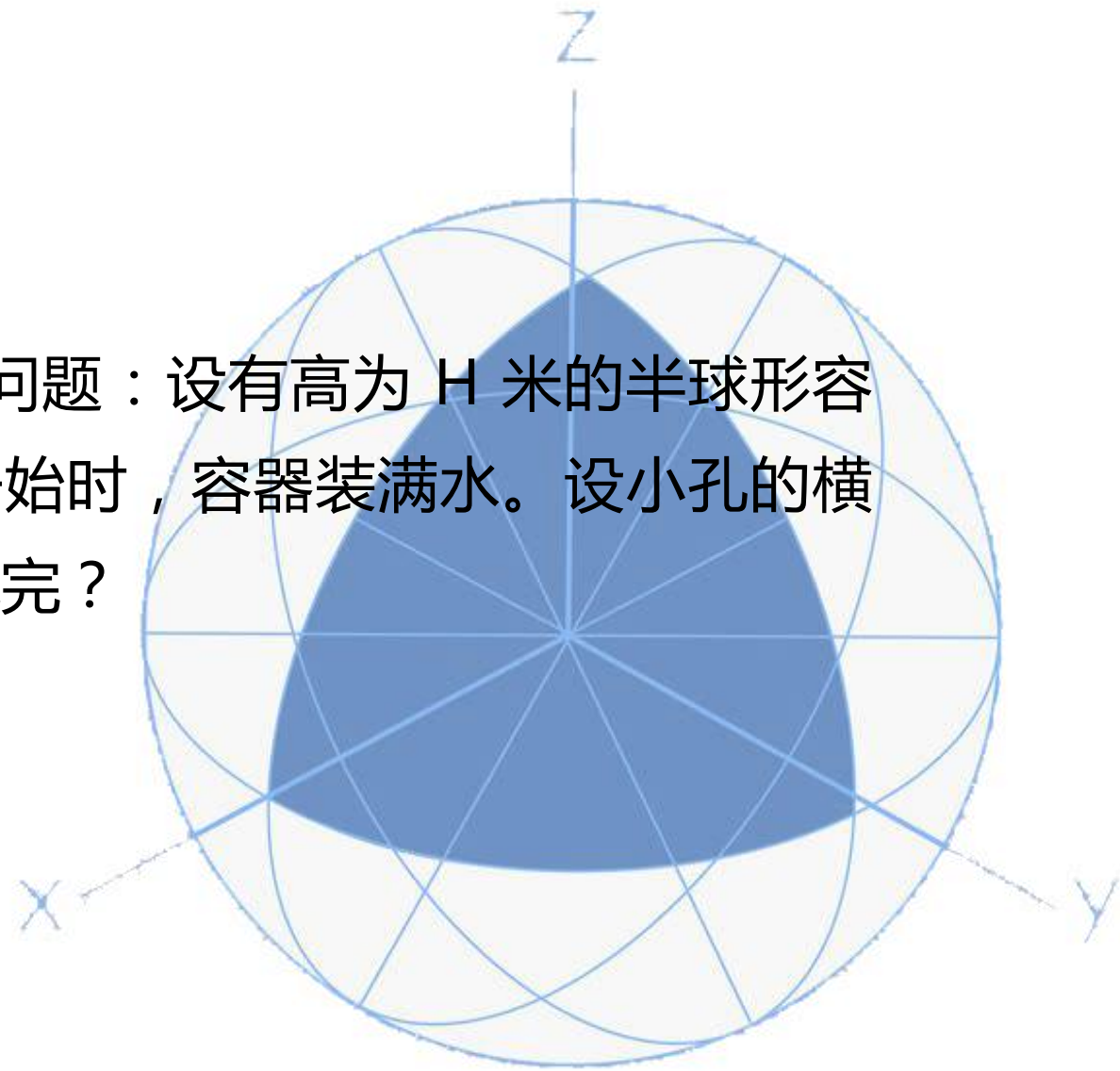
三、微元分析法

各变量及其未知函数的变化率之间不满足物理等自然定律，但变量的微元之间符合某些规律与定律，这样，首先确立实际问题中的因素，再确立与这些变量的微元有关的规律及定律，列出等式，加以整理变成微分方程式。这既能建成常微分方程模型又能建成偏微分方程模型，既能建成一阶模型又能建成二阶模型。





例 预测容器中水多少时间流完的问题：设有高为 H 米的半球形容器，水从它的底部小孔流出。在开始时，容器装满水。设小孔的横截面积为 $S \text{ cm}^2$ ，问要多少时间水流完？





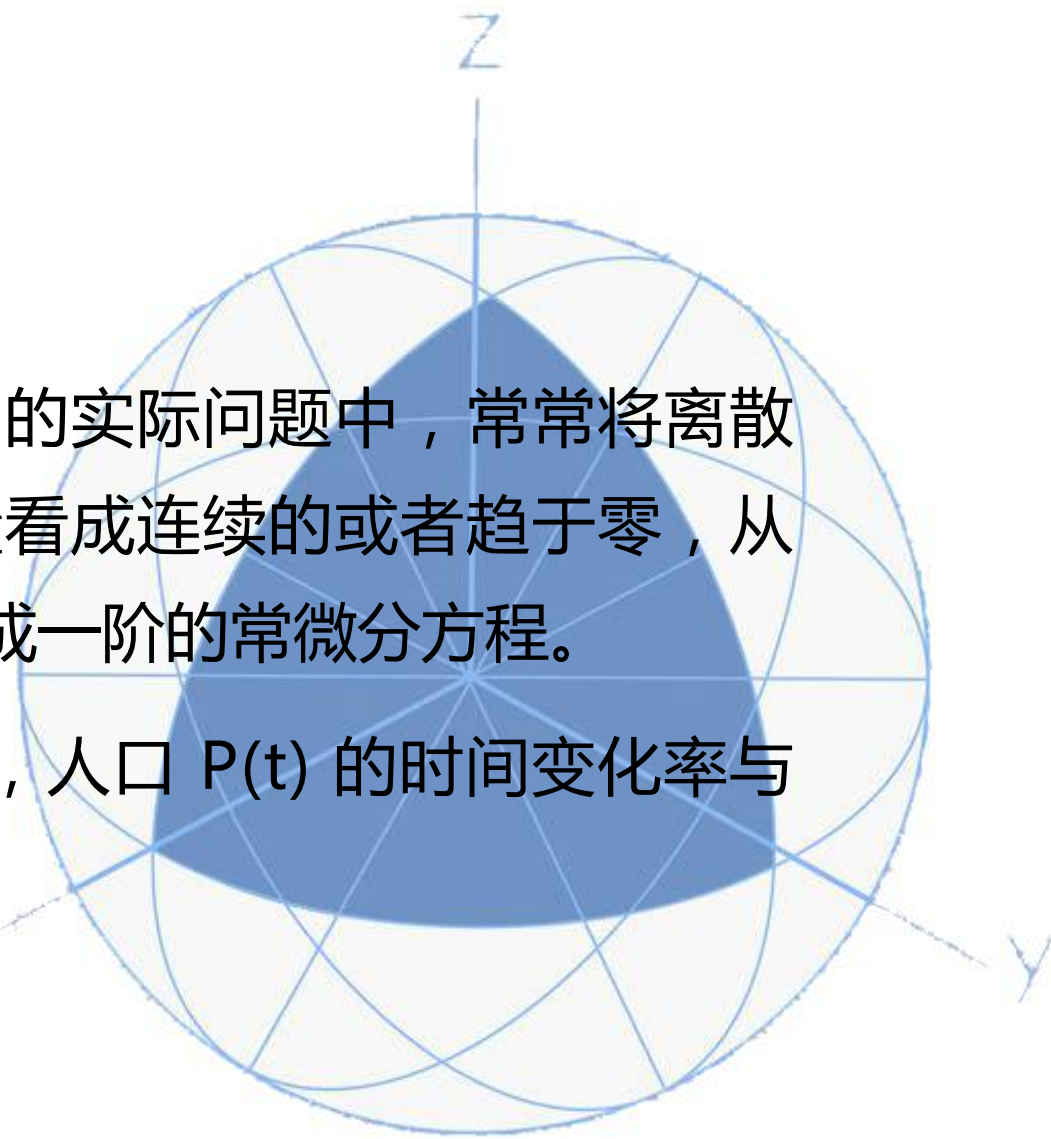
四、近似法

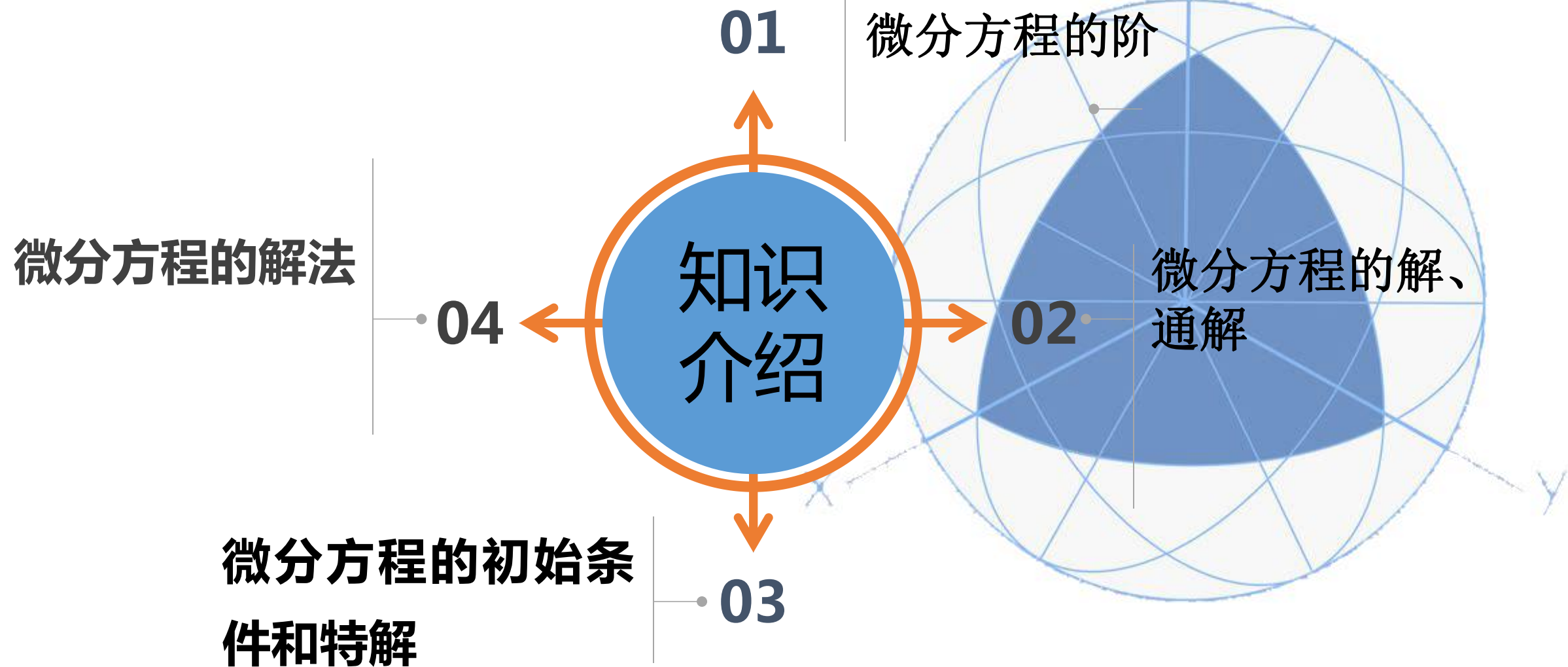
在生物、经济等学科和日常生活中提出的实际问题中，常常将离散个体变化或单位时间、重量等的某变量看成连续的或者趋于零，从而近似地建成微分方程。该方法只能建成一阶的常微分方程。

例 在出生率和死亡率都不变的情况下，人口 $P(t)$ 的时间变化率与人口的总数成比例

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

其中 k 为一个比例常数。







6.2.2 常微分方程基础知识介绍

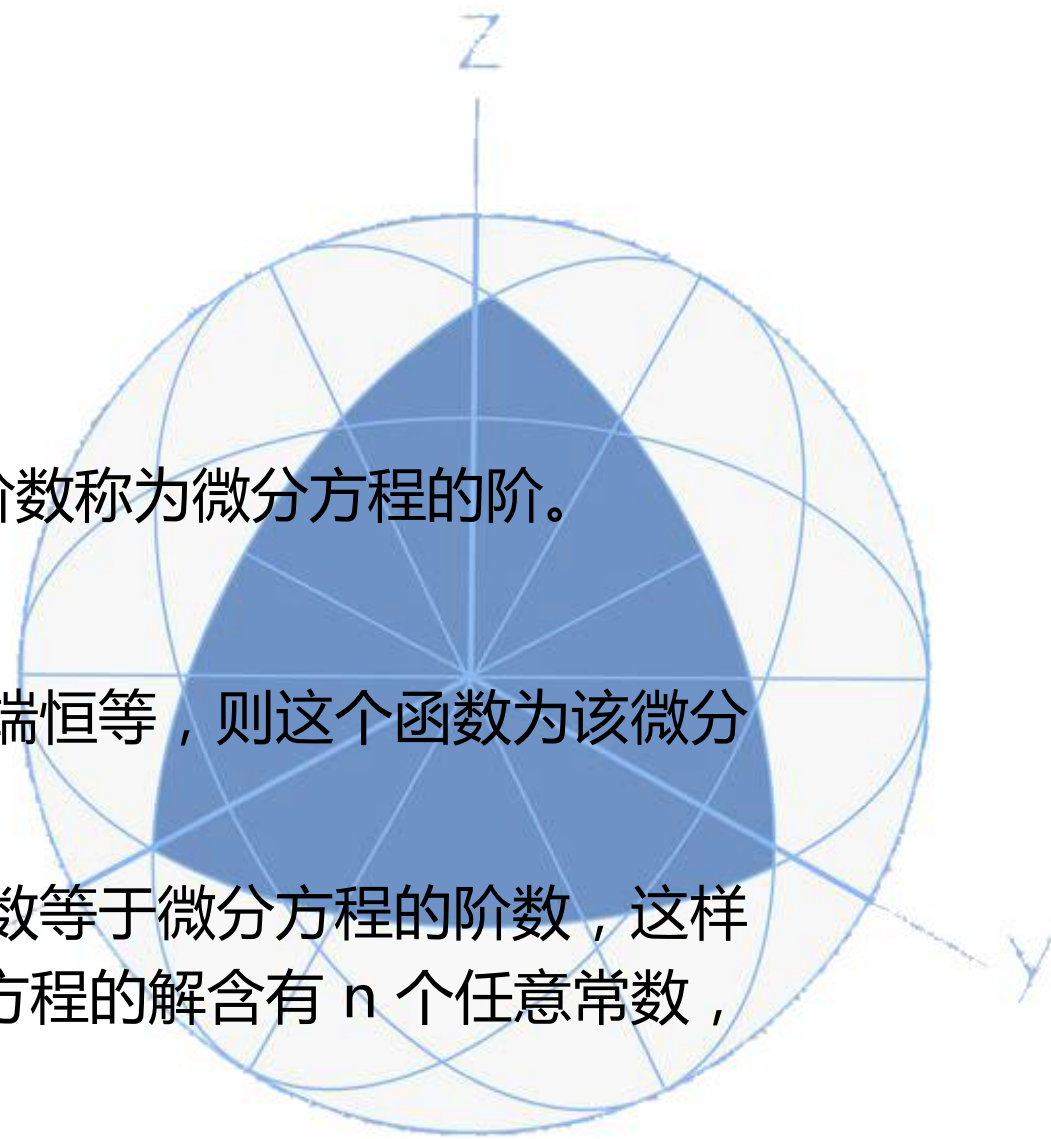
1、微分方程的阶

微分方程中所出现的未知函数导数的最高阶数称为微分方程的阶。

2、微分方程的解、通解

(1)若某函数代入微分方程后能使该方程两端恒等，则这个函数为该微分方程的解。

(2)如果微分方程的解中所含独立常数的个数等于微分方程的阶数，这样的解称为微分方程的通解，比如 n 阶微分方程的解含有 n 个任意常数，通解构成一个函数。



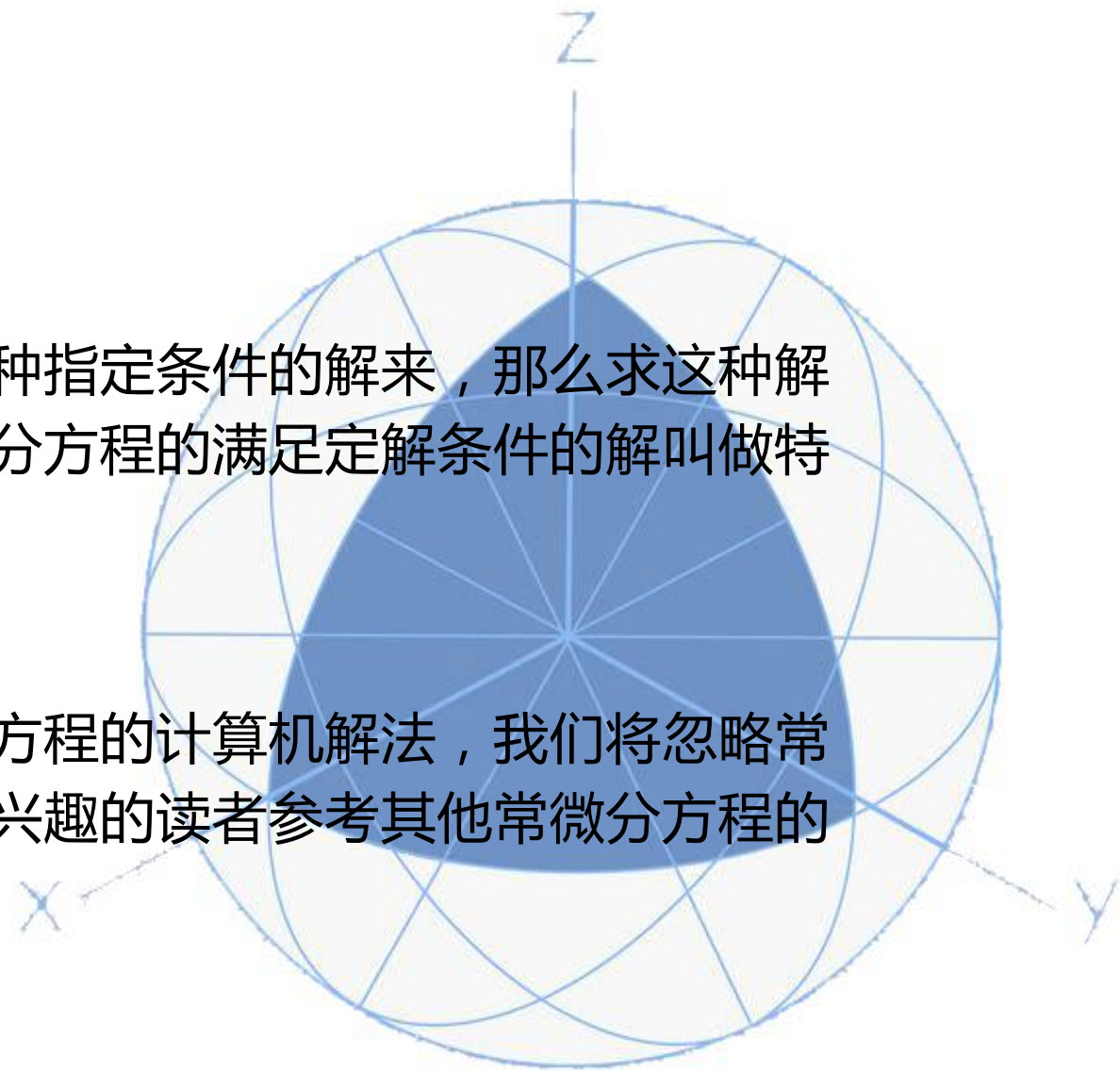


3、微分方程的初始条件和特解

如果根据实际问题要求出其中满足某种指定条件的解来，那么求这种解的问题叫做定解问题，对于一个常微分方程的满足定解条件的解叫做特解。

4、微分方程的解法

在本课程中只考虑建模方法和常微分方程的计算机解法，我们将忽略常微分方程（组）的数学解法，建议有兴趣的读者参考其他常微分方程的理论教材。





廈門大學
XIAMEN UNIVERSITY

Part 3

案例分析





近似法

案例五：普通消费品销售规律的巴
斯模型

按已知规律列式法

案例四：污染源强度的辨识——
质量守恒定律



建立一阶常微分方程

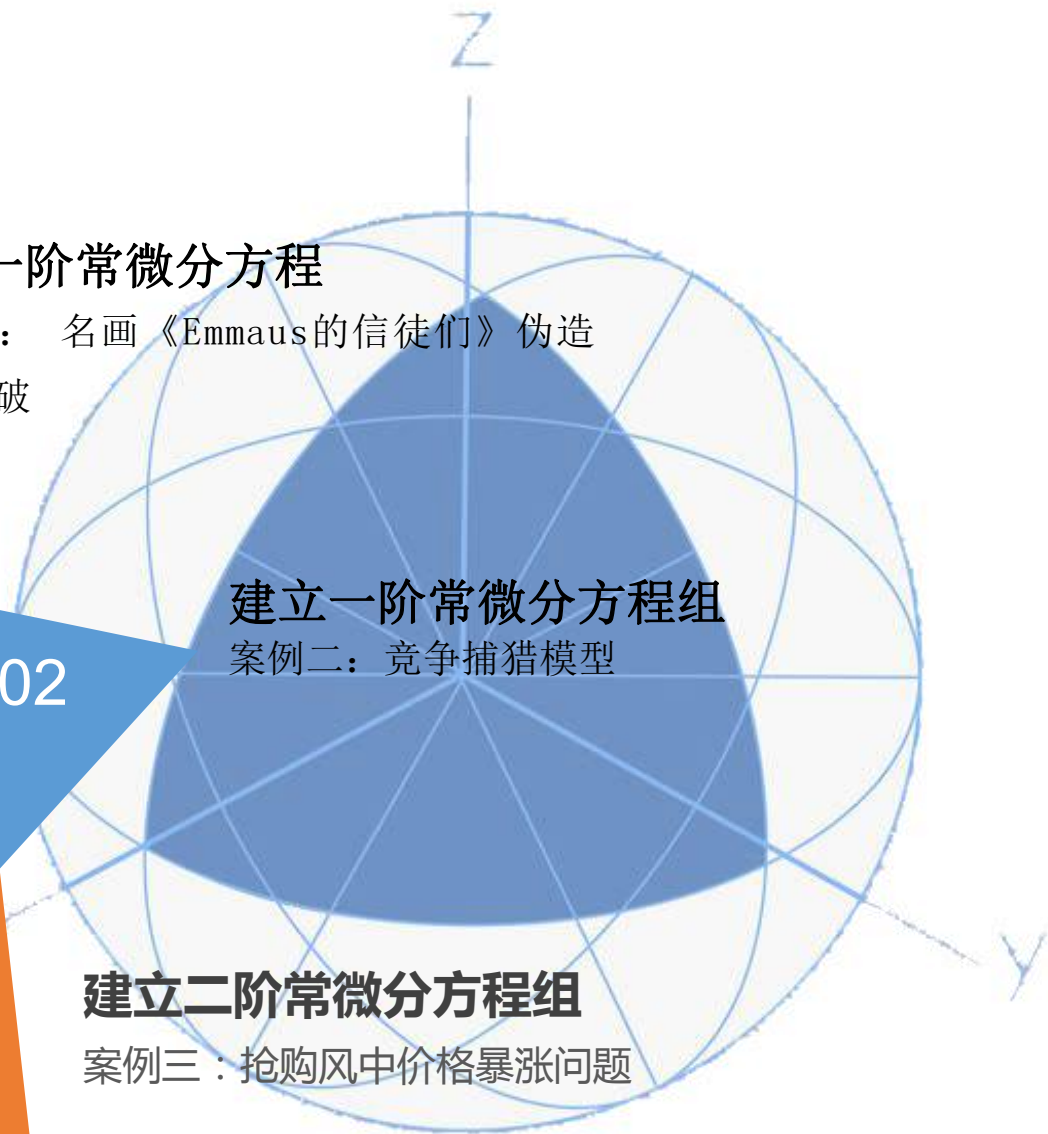
案例一：名画《Emmaus的信徒们》伪造
案的侦破

建立一阶常微分方程组

案例二：竞争捕猎模型

建立二阶常微分方程组

案例三：抢购风中价格暴涨问题





6.3.1 寻找某变量关于其他变量的变化率与另外一些变量之间的关系

一、建立一阶常微分方程

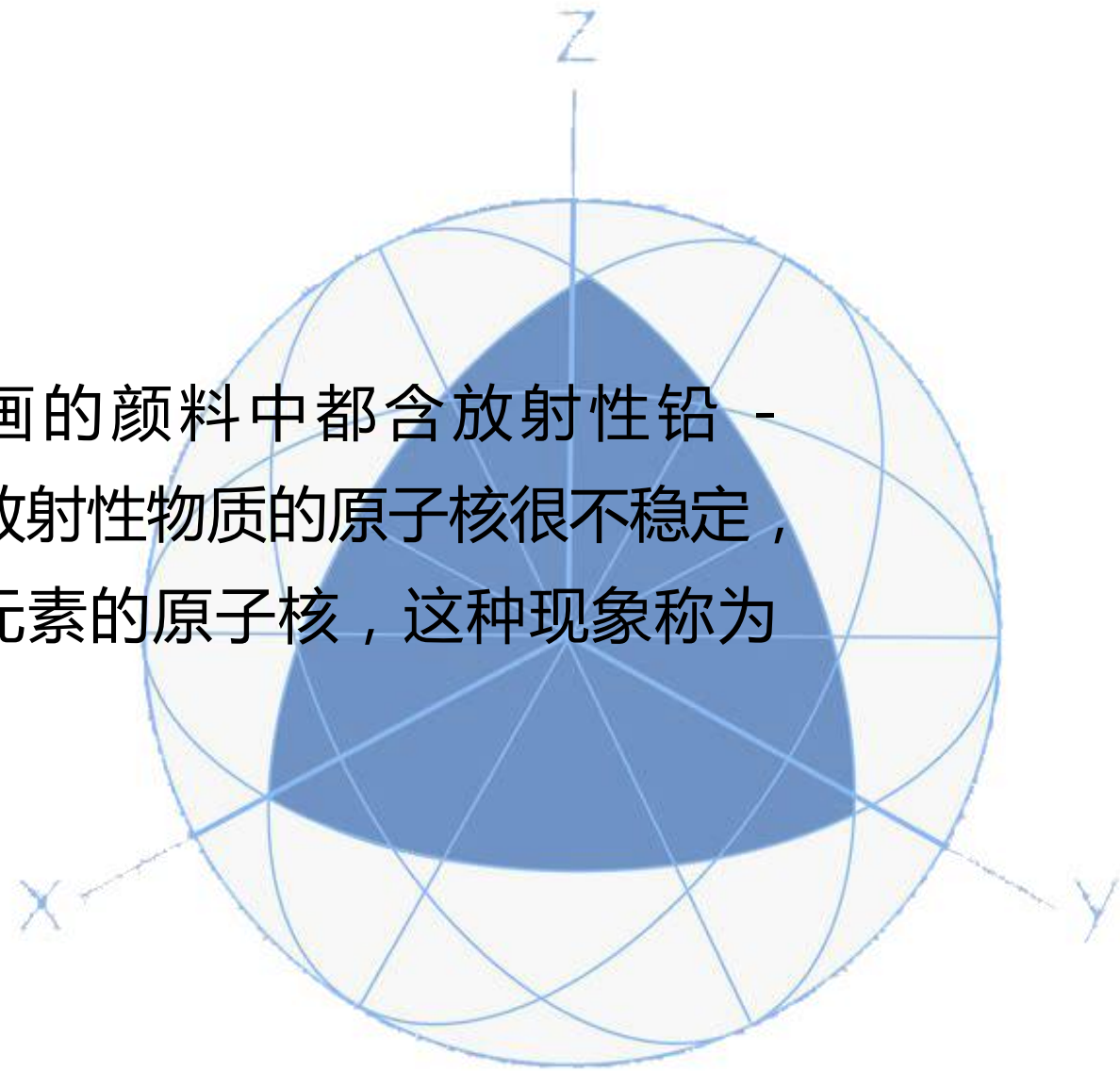
案例一：名画《Emmaus的信徒们》伪造案的侦破

问题背景：《Emmaus 的信徒们》是 17 世纪荷兰大画家 Jan Verrneer 的名画。第二次世界大战末期，比利时解放后，德国战场安全部开始追捕纳粹党徒。1945 年 5 月 29 日，法国三流画家 H.A, Van Meegeren 因通敌罪被捕。Meegeren 供认卖给法国人的《Emmaus 的信徒们》是他伪造的赝品，当时认为他的供词是假的，目的是逃脱通敌的罪责，著名艺术史专家 A.Bredius 也证明说那件《Emmaus 的信徒们》是真正的 Verrneer 的原作。直到 1967 年，卡内基—梅隆大学的科学家们才用数学建模的手段，无可置疑地证实了上述名画确为伪造品。让我们看看怎么应用常微分方程方法建模的。



问题分析：

画家用白铅做颜料，所有绘画的颜料中都含放射性铅 - ^{210}Pb 和镭 - ^{226}Ra ，放射性物质的原子核很不稳定，会自发地放出射线，变为另一种元素的原子核，这种现象称为“放射衰变”。





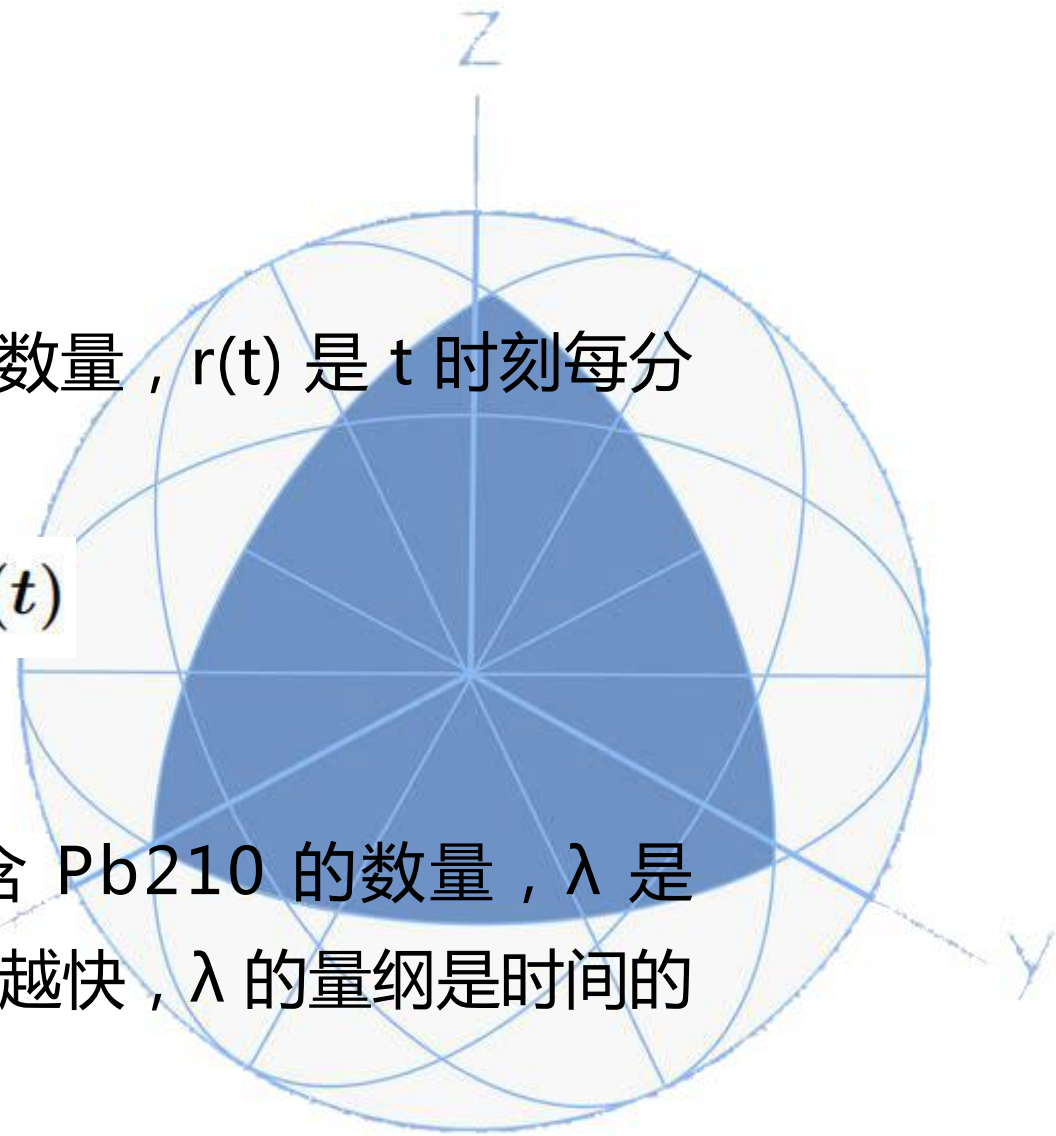
模型构建：

设 $y(t)$ 是 t 时刻每克白铅中 Pb210 的数量， $r(t)$ 是 t 时刻每分钟每克白铅中 Ra226 的衰变数量，则

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda y + r(t)$$

$$y(t_0) = y_0$$

这里 y_0 是制造时间 t_0 每克白铅所含 Pb210 的数量， λ 是 Pb210 的衰变常数， λ 越大物质衰变得越快， λ 的量纲是时间的倒数。





衡量物质衰变率的一个尺度是它的半衰期，即给定数量的放射性原子衰变一半所需要的时间．由于 $\text{Ra}226$ 的半衰期为 1600 年，而我们仅对 300 年左右的时间感兴趣，所以可设 $\text{Ra}226$ 保持常数 r ，于是用积分因子 $e^{\lambda t}$ 乘方程的两端可得

$$\frac{d(e^{\lambda t} y)}{dt} = r e^{\lambda t}$$

解得
$$y = \frac{r}{\lambda}(1 - e^{-\lambda(t-t_0)}) + y_0 e^{-\lambda(t-t_0)} \quad (6.3.1)$$

$y(t)$ 和 r 可以用仪器测得，为了求 $t-t_0$ ，只需想办法求 y_0 与 λ ．



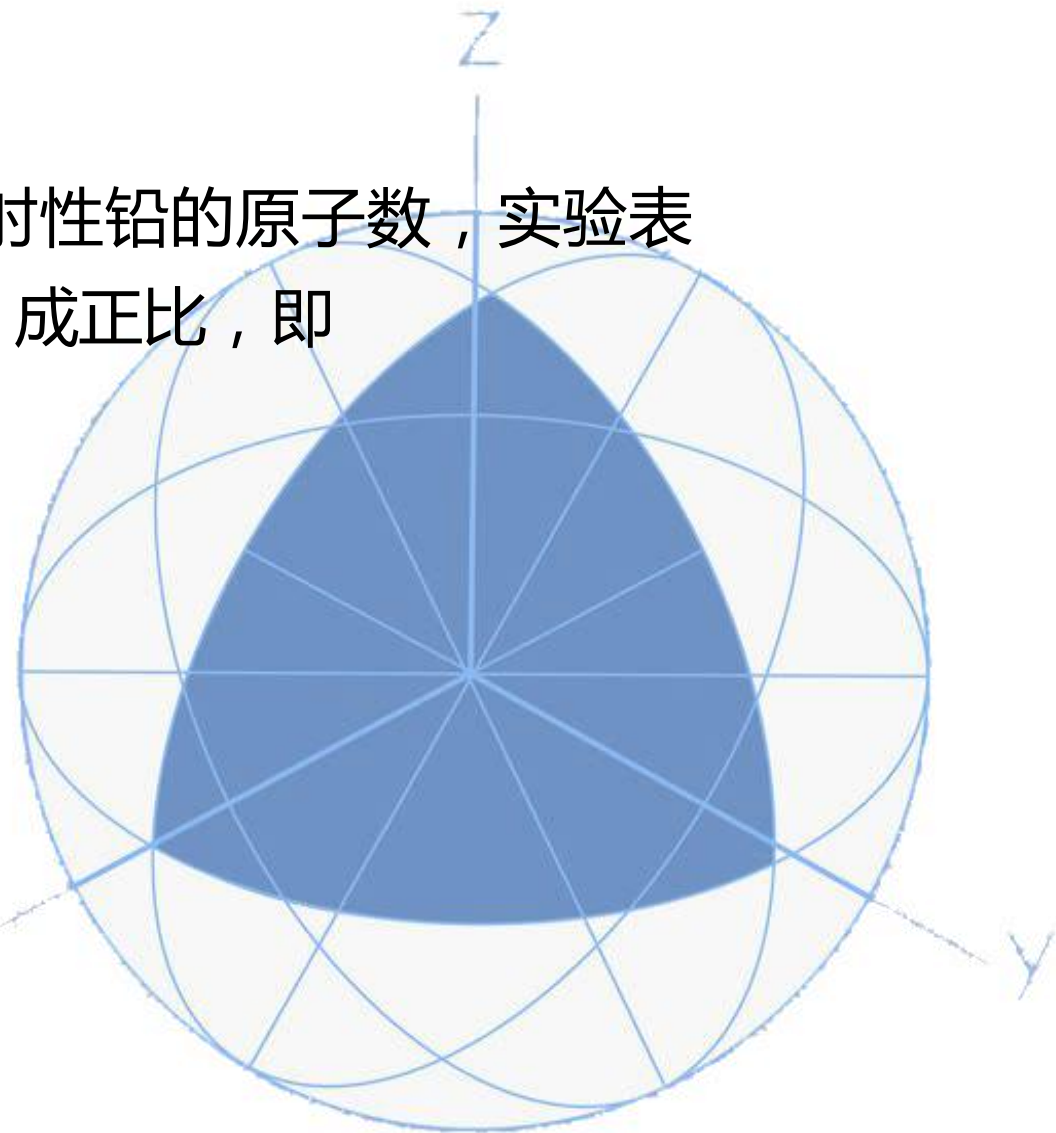
下面计算 λ ，令 $N(t)$ 表示时刻 t 时放射性铅的原子数，实验表明，在单位时间衰变的原子核数目与 N 成正比，即

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

$$N(0) = N_0$$

解得

$$\frac{dN}{dt} + \lambda N = 0$$





而

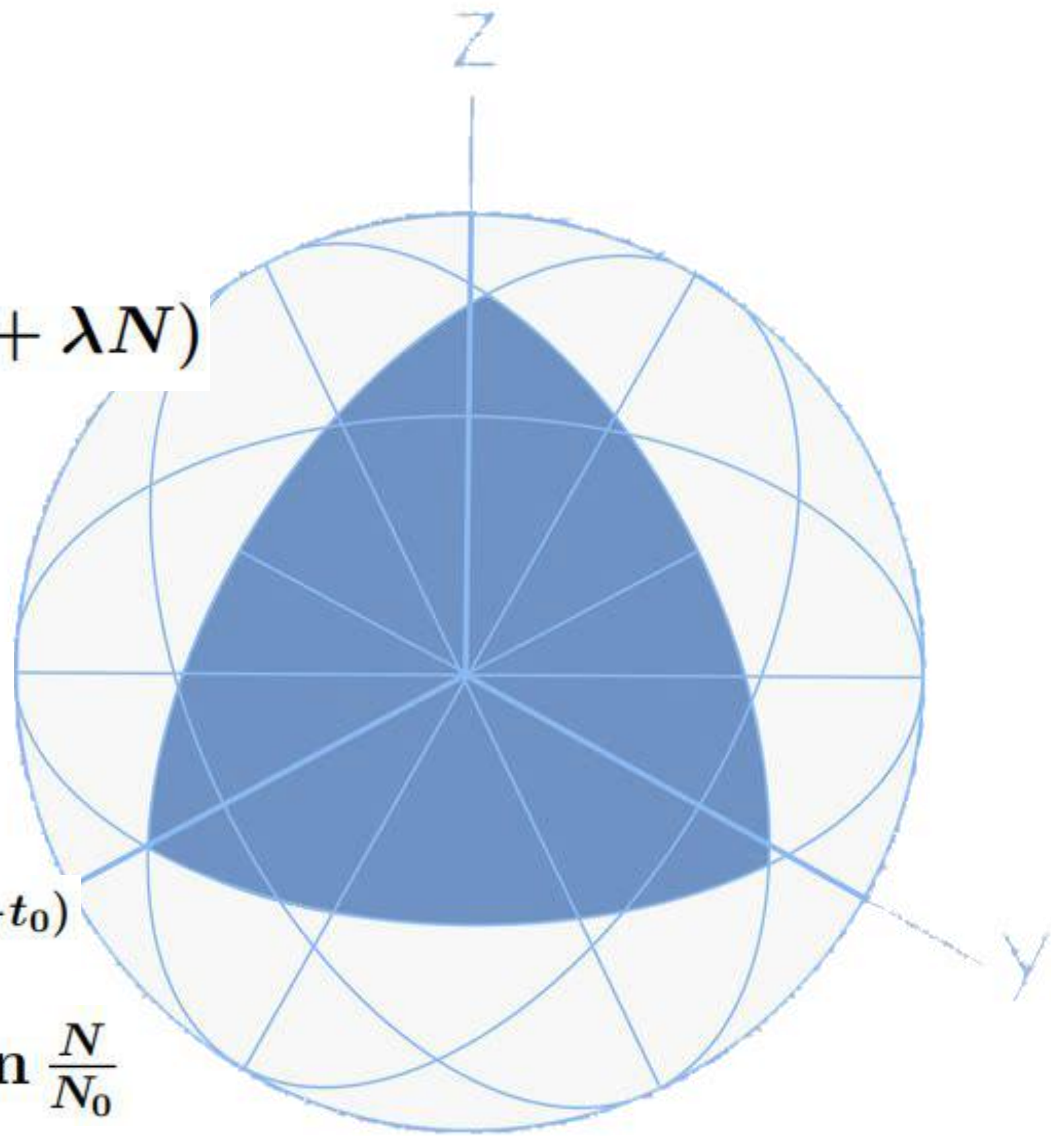
$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t} N) = e^{\lambda t} \left(\frac{dN}{dt} + \lambda N \right)$$

所以

$$\frac{d}{dt}(e^{\lambda t} N) = 0$$

即

$$N = N_0 e^{-\lambda(t-t_0)}$$
$$-\lambda(t - t_0) = \ln \frac{N}{N_0}$$





又知铅的半衰期为 22 年，故得 $\lambda = \frac{\ln 2}{22}$

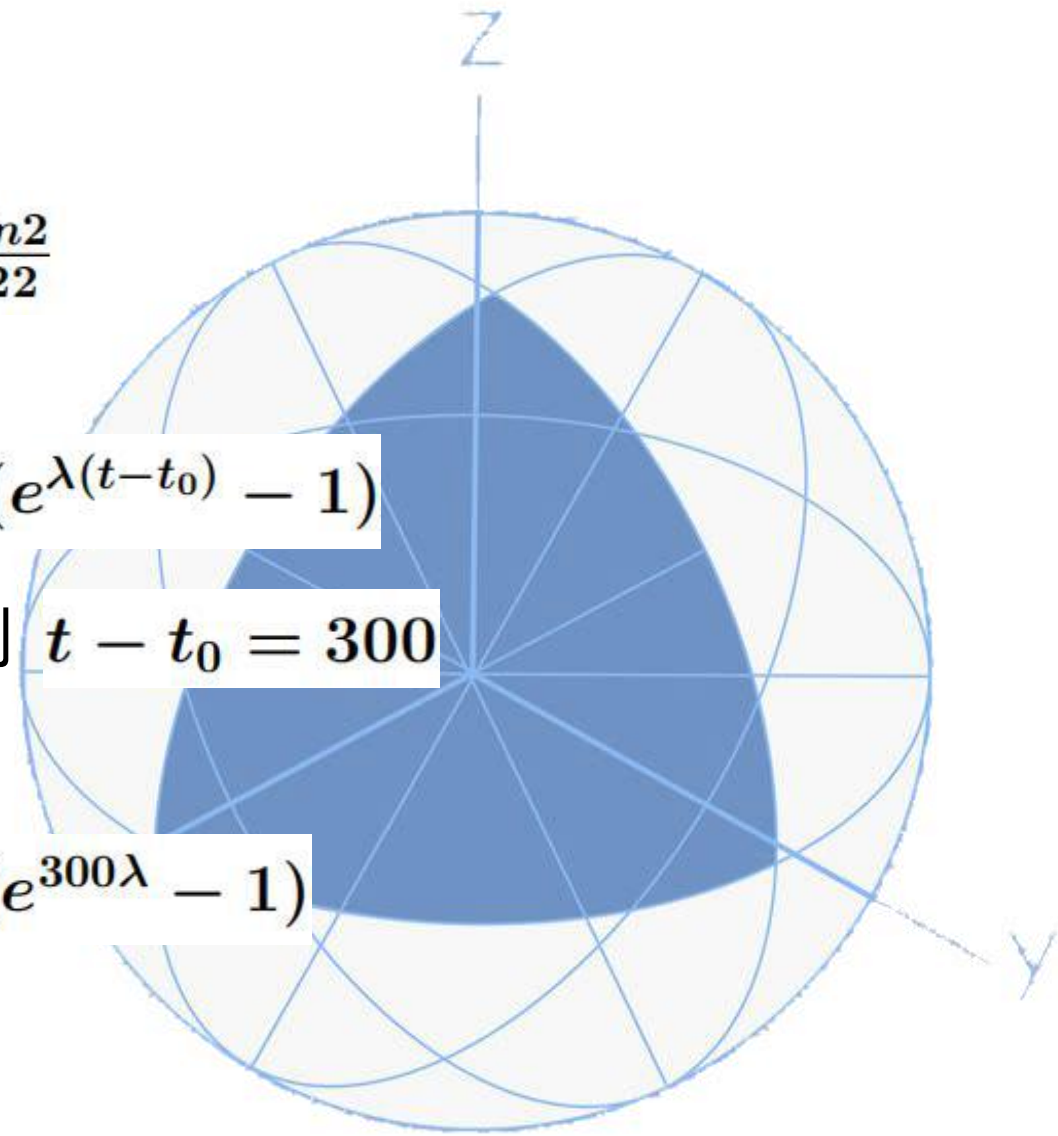
再计算 y_0 ，由 (6.3.1) 式得

$$\lambda y_0 = \lambda y(t) e^{\lambda(t-t_0)} - r(e^{\lambda(t-t_0)} - 1)$$

如果画是真品，已有 300 年的历史，则 $t - t_0 = 300$

于是代入上式得

$$\lambda y_0 = \lambda y(t) e^{300\lambda} - r(e^{300\lambda} - 1)$$

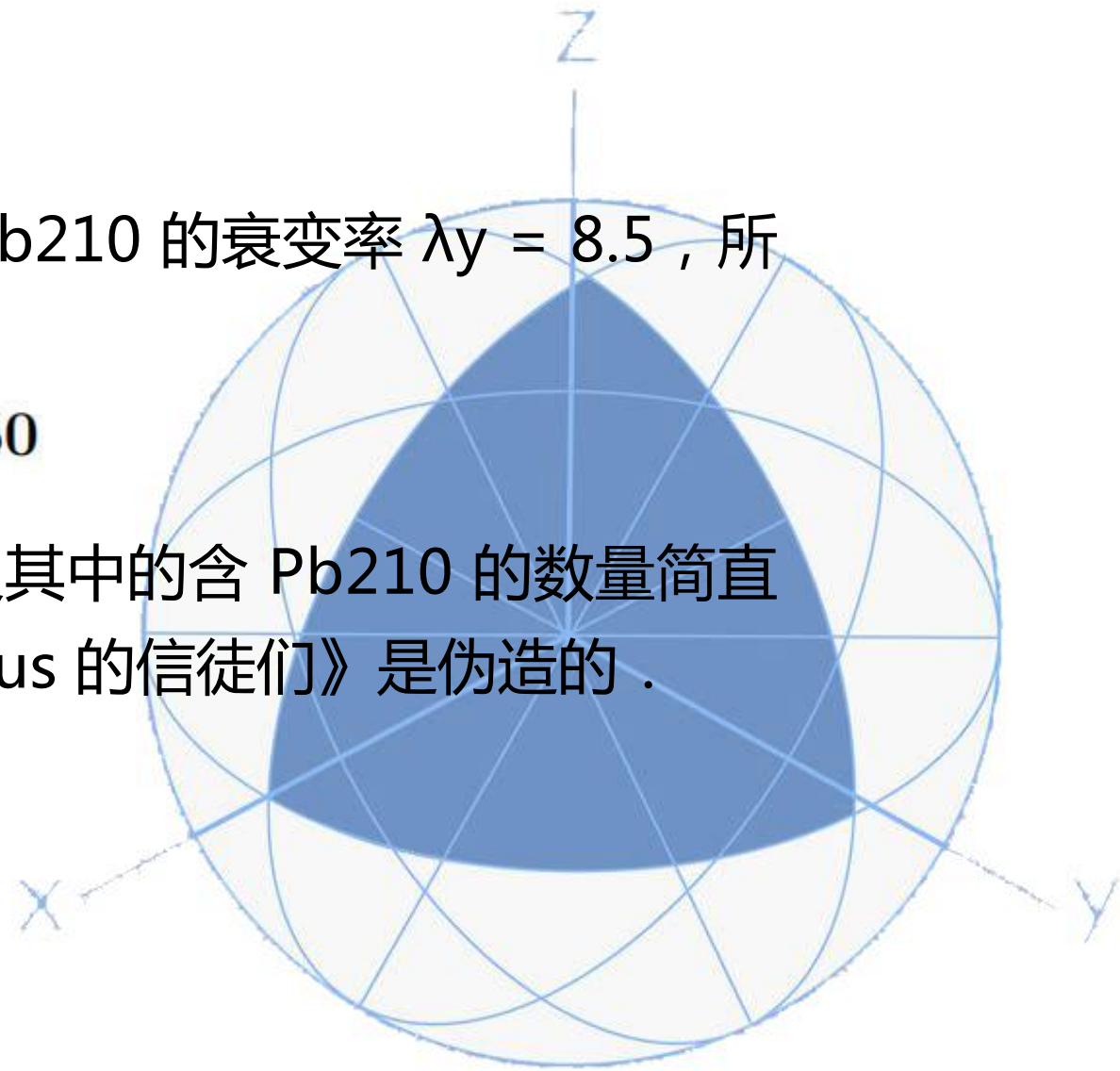




鐳 Ra226 的衰變率 $r = 0.8$ ，鉛 Pb210 的衰變率 $\lambda y = 8.5$ ，所以

$$\lambda y_0 = 98050$$

這個數相對於油畫中顏料的數量及其中的含 Pb210 的數量簡直太大了，不真！說明此幅《Emmaus 的信徒們》是偽造的。

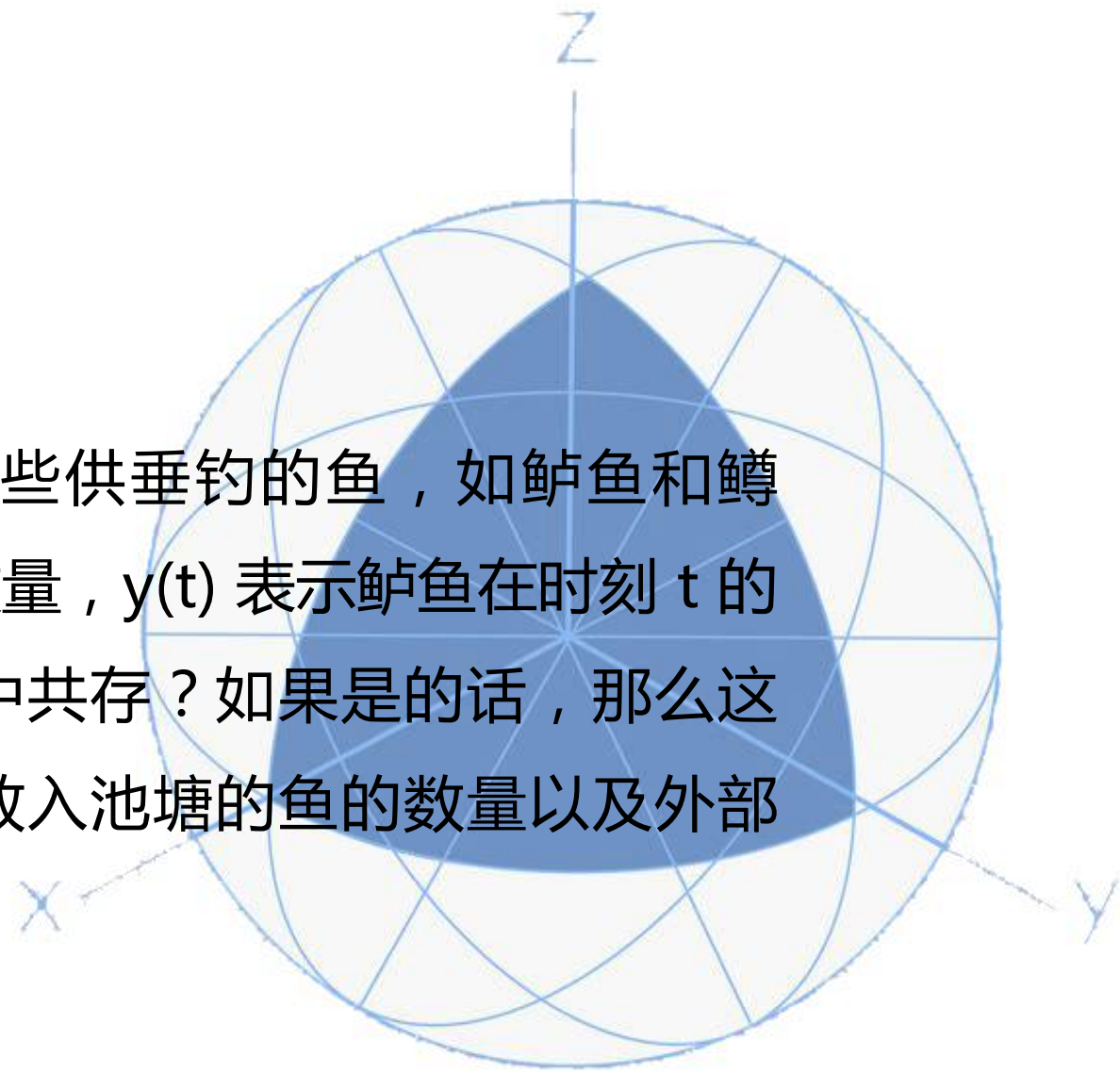




二、建立一阶常微分方程组

案例二：竞争捕猎模型

问题背景：设想在池塘里放置一些供垂钓的鱼，如鲈鱼和鳊鱼．设 $x(t)$ 表示鳊鱼在时刻 t 的数量， $y(t)$ 表示鲈鱼在时刻 t 的数量．问这两种鱼是否能在池塘中共存？如果是的话，那么这两种鱼数量的最终解受到一开始放入池塘的鱼的数量以及外部干扰的敏感程度有多大？





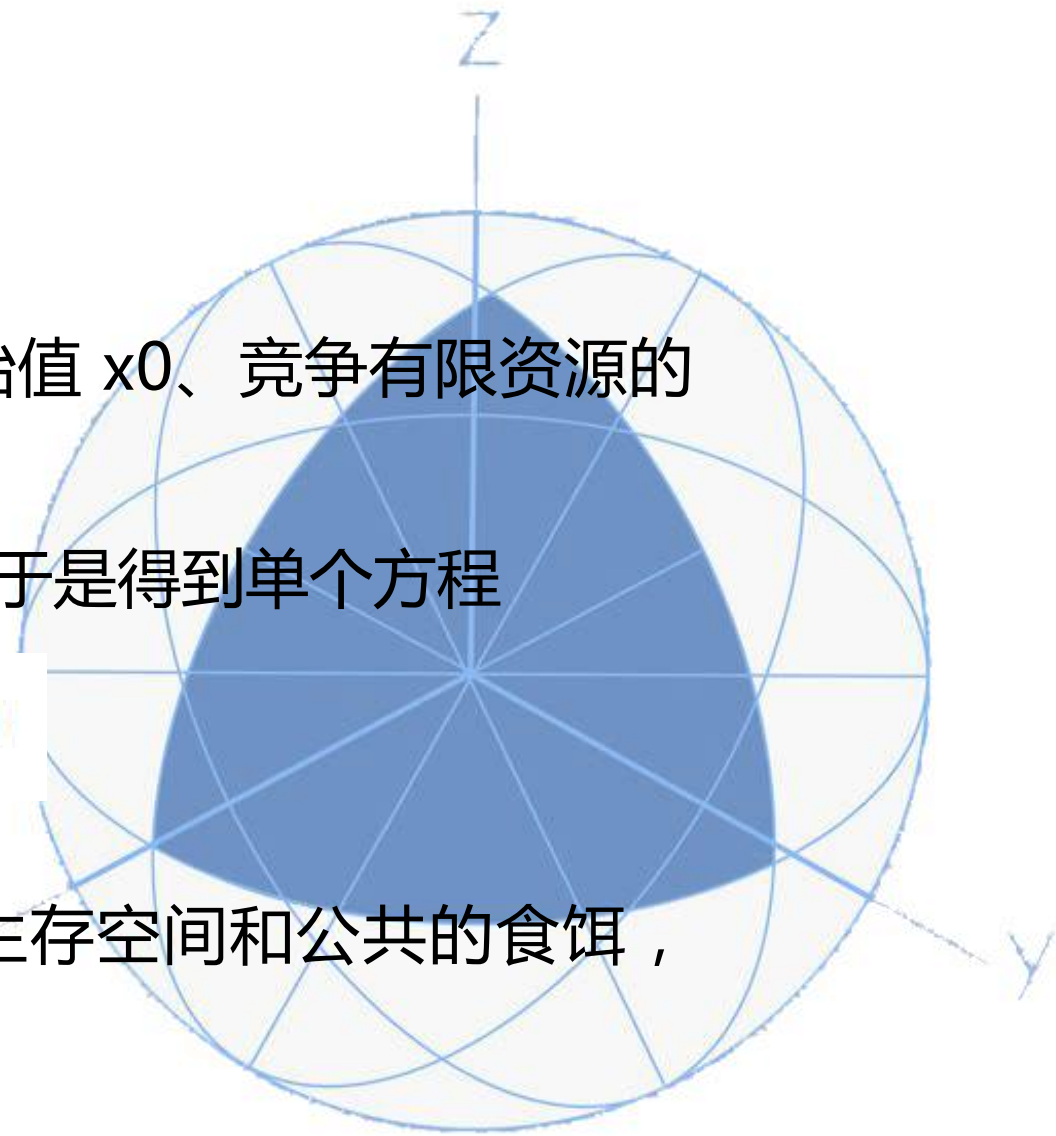
问题分析：

鱒鱼的数量 $x(t)$ 依赖于许多变量，初始值 x_0 、竞争有限资源的总量以及是否存在食肉动物等。

首先，假设环境能够支持无限条鱒鱼，于是得到单个方程

$$\frac{dx}{dt} = ax, a > 0$$

然后，我们考虑鱒鱼和鲈鱼一同竞争生存空间和公共的食饵，来改进这个模型。



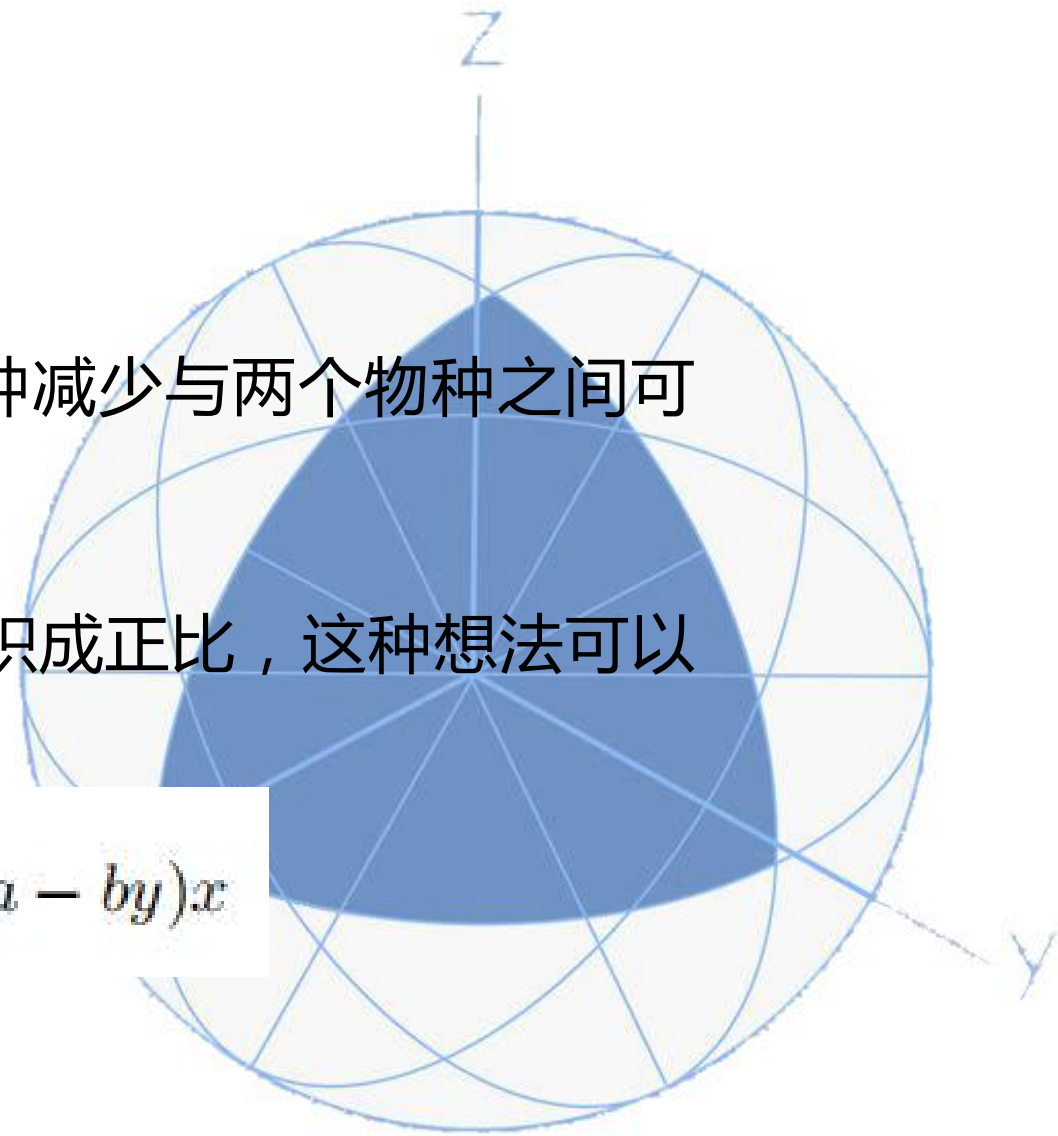


模型构建：

鲈鱼的作用是降低鳙鱼的增长率，这种减少与两个物种之间可能的作用大致成比例关系，

因此假定鳙鱼的减少量与 x 和 y 的乘积成正比，这种想法可以用方程来建模：

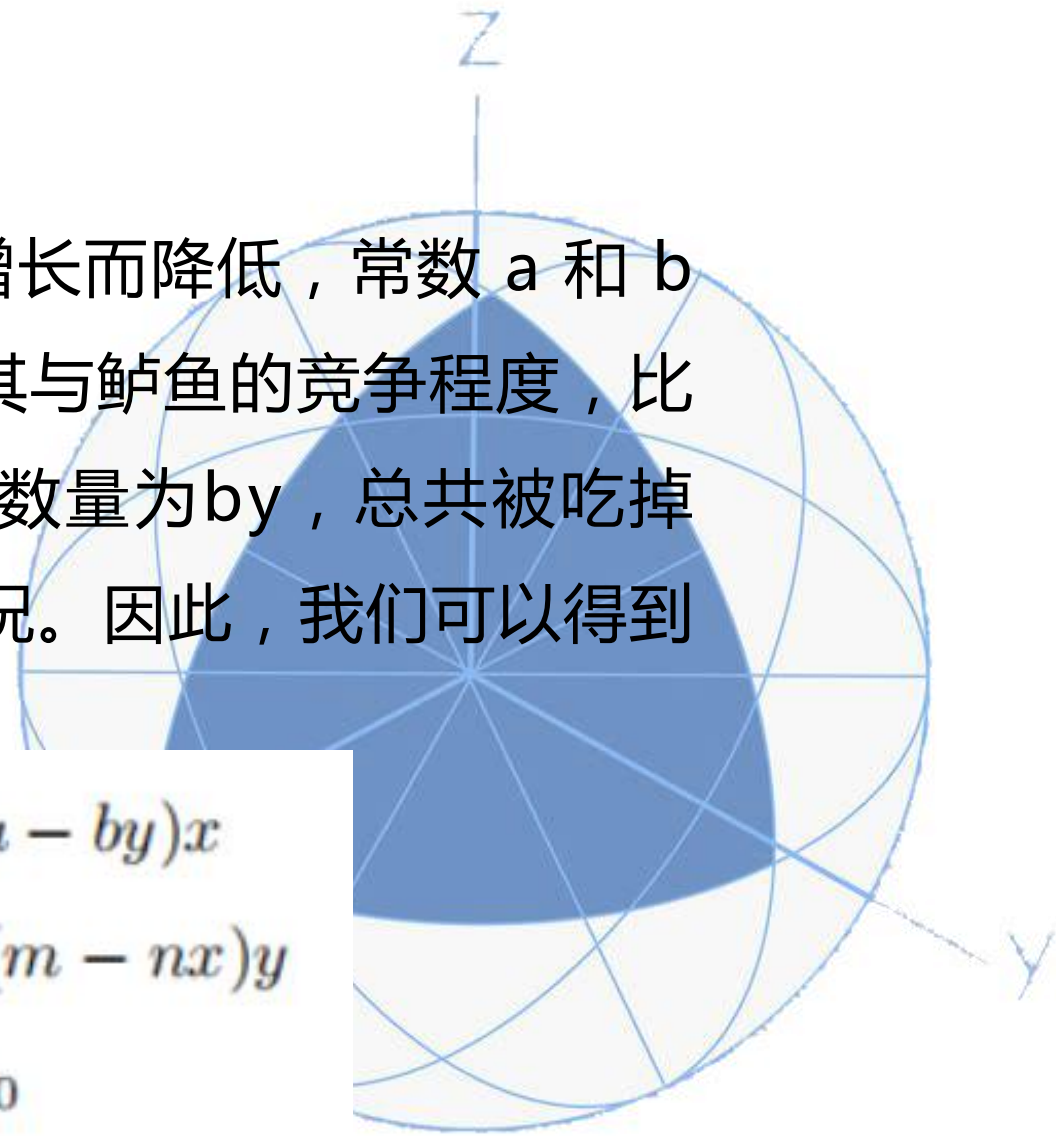
$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy = (a - by)x$$





固有增长率 $a - by$ 随着鲈鱼量级的增长而降低，常数 a 和 b 分别表示鳙鱼数量的自我调节能力及其与鲈鱼的竞争程度，比如：单位时间内每只鲈鱼吃掉鳙鱼的数量为 by ，总共被吃掉 bxy 。用同样的方式分析鲈鱼数量的情况。因此，我们可以得到一个方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy = (a - by)x \\ \frac{dy}{dt} = my - nxy = (m - nx)y \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0 \end{cases}$$





三、建立二阶常微分方程组

案例三：抢购风中的价格暴涨问题

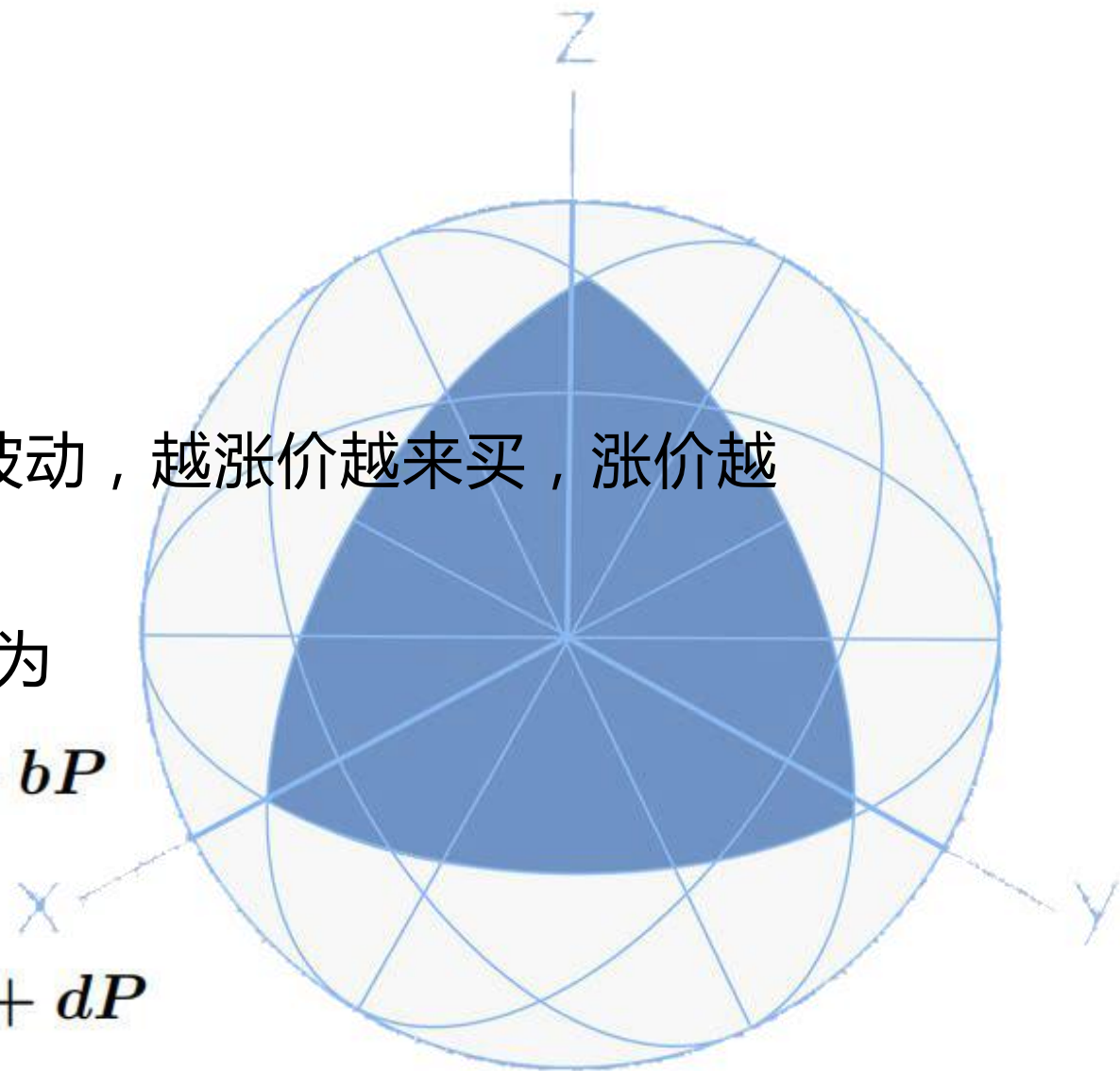
问题背景：消费者心理发生异常波动，越涨价越来买，涨价越快越来买，比如购房风。

模型构建：在正常情况下，需求量为

$$Q_d = a - bP$$

供给量为

$$Q_s = -c + dP$$





消费者心理发生异常波动，越涨价越来买，涨价越快越来买，价格随时间波动，

$$P = P(t)$$

越涨价越来买表明需求与供给和价格成正比，涨价越快越来买表明需求与供给和价格增长的加速度成正比，即需求 Q_d 与供给 Q_s 为

$$\begin{aligned} Q_d &= a - bP + A\frac{dP}{dt} + B\frac{d^2P}{dt^2} \\ Q_s &= -c + dP + C\frac{dP}{dt} + D\frac{d^2P}{dt^2} \end{aligned} \quad (3.7)$$

$A > C > 0$, $B > D > 0$, a 、 b 、 c 、 d 皆为正常数。



由于 $P(t)$ 的涨速与过剩需求 $Q_d - Q_s$ 成正比，故有其数学模型

$$\frac{dP}{dt} = \alpha(Q_d - Q_s) \quad (3.8)$$

这里 $\alpha > 0$. 把 Q_d 与 Q_s 的线性表达式 (3.7) 代入 (3.8) 得

$$\frac{dP}{dt} = \alpha \left[(B - D) \frac{d^2 P}{dt^2} + (A - C) \frac{dP}{dt} - (b + d)P + a + c \right]$$

整理得

$$\alpha(B - D) \frac{d^2 P}{dt^2} + [\alpha(A - C) - 1] \frac{dP}{dt} - \alpha(b + d)P = -\alpha(a + c),$$



令 $\frac{dP}{dt} = Q$ ，则与下面方程组等价

$$\frac{dP}{dt} = Q,$$

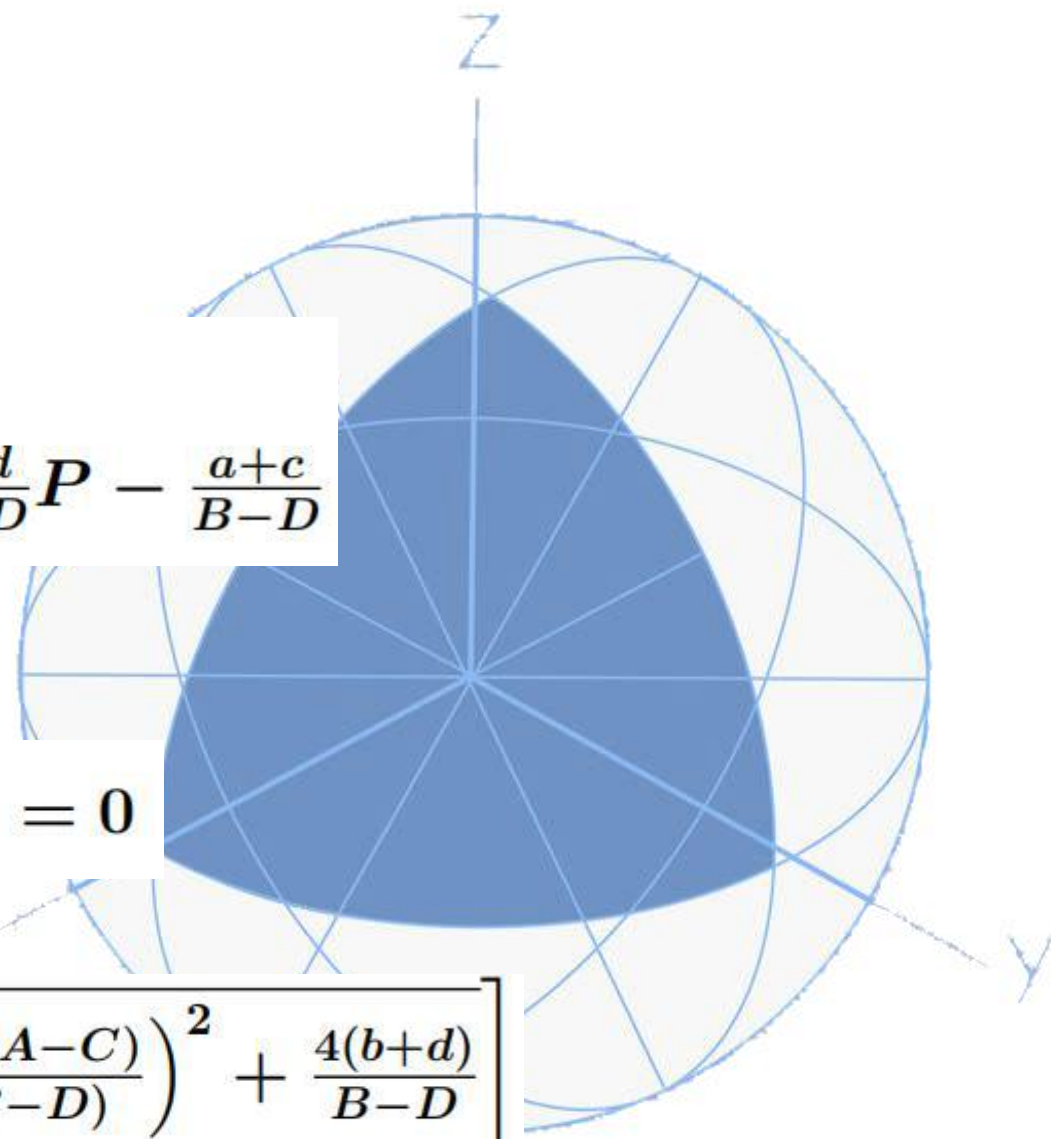
$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1-\alpha(A-C)}{\alpha(B-D)}Q + \frac{b+d}{B-D}P - \frac{a+c}{B-D}$$

上式的奇点为 $(\frac{a+c}{b+d}, 0)$ ，特征方程为

$$\lambda^2 - \frac{1-\alpha(A-C)}{\alpha(B-D)}\lambda - \frac{b+d}{B-D} = 0$$

特征根为

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1-\alpha(A-C)}{\alpha(B-D)} \pm \sqrt{\left(\frac{1-\alpha(A-C)}{\alpha(B-D)} \right)^2 + \frac{4(b+d)}{B-D}} \right]$$



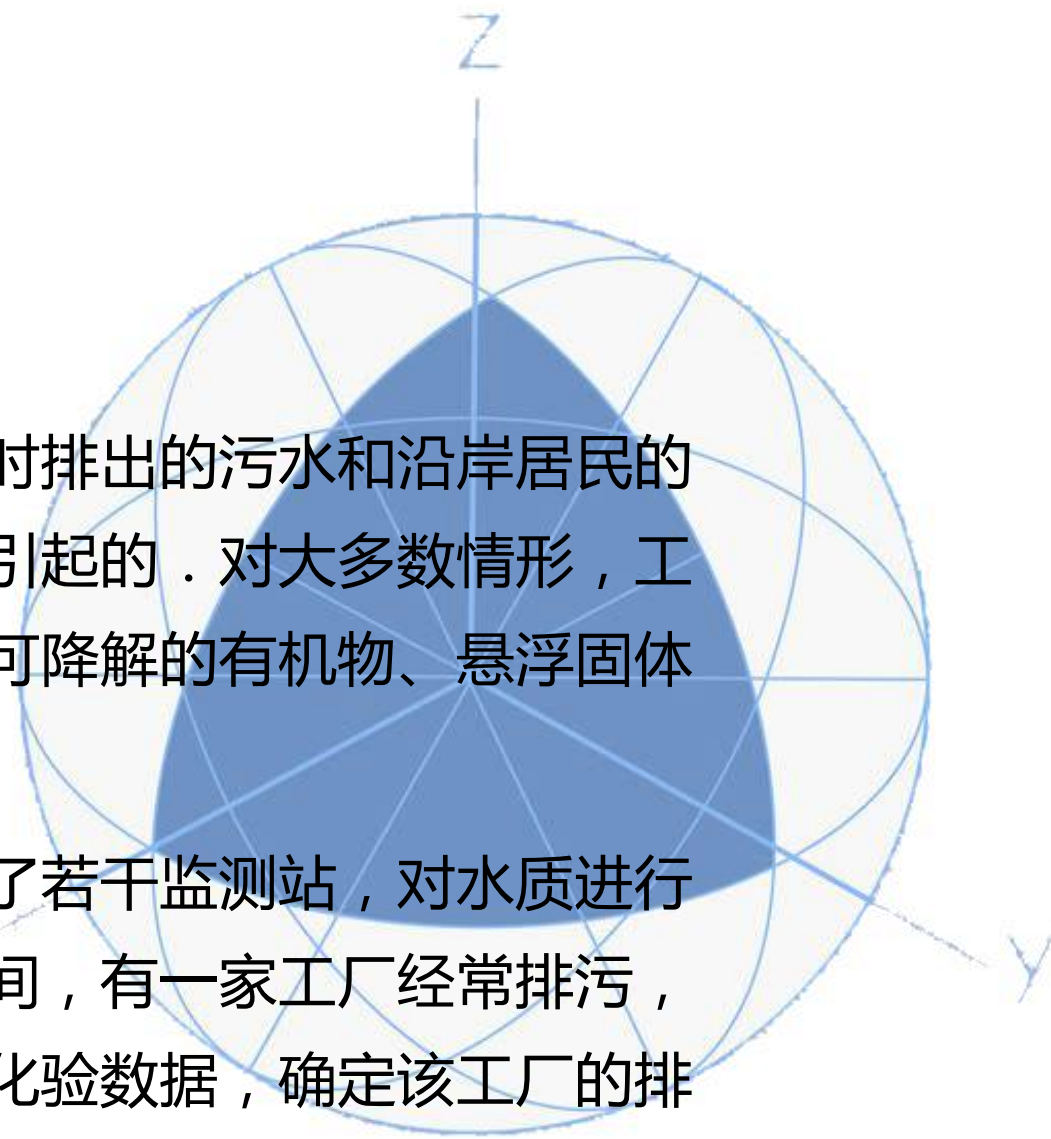


6.3.2按已知规律列式法

案例四：污染源强度的辨识—质量守恒定律

问题背景：河流的污染主要由沿岸工厂生产时排出的污水和沿岸居民的生活污水以及废弃污物经雨水冲刷流入河中引起的。对大多数情形，工厂的排污是主要的因素。工厂污水主要含有可降解的有机物、悬浮固体和有毒物质。

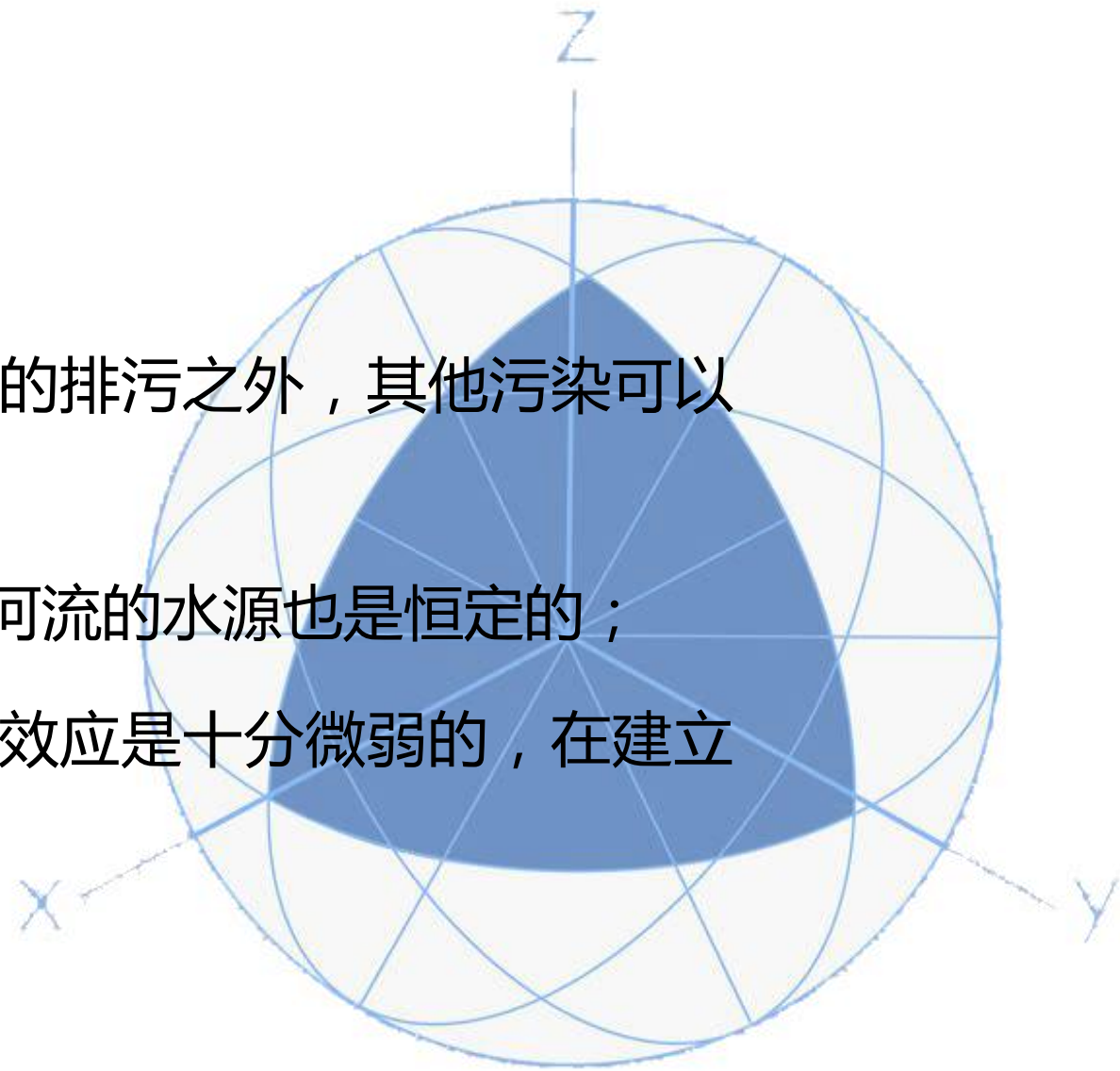
为了对环境进行监测，在主要河流上都设置了若干监测站，对水质进行定时的测量和化验。若在两个水质监测站之间，有一家工厂经常排污，如何根据工厂上游和下游两家监测站的测量化验数据，确定该工厂的排污量。





问题分析

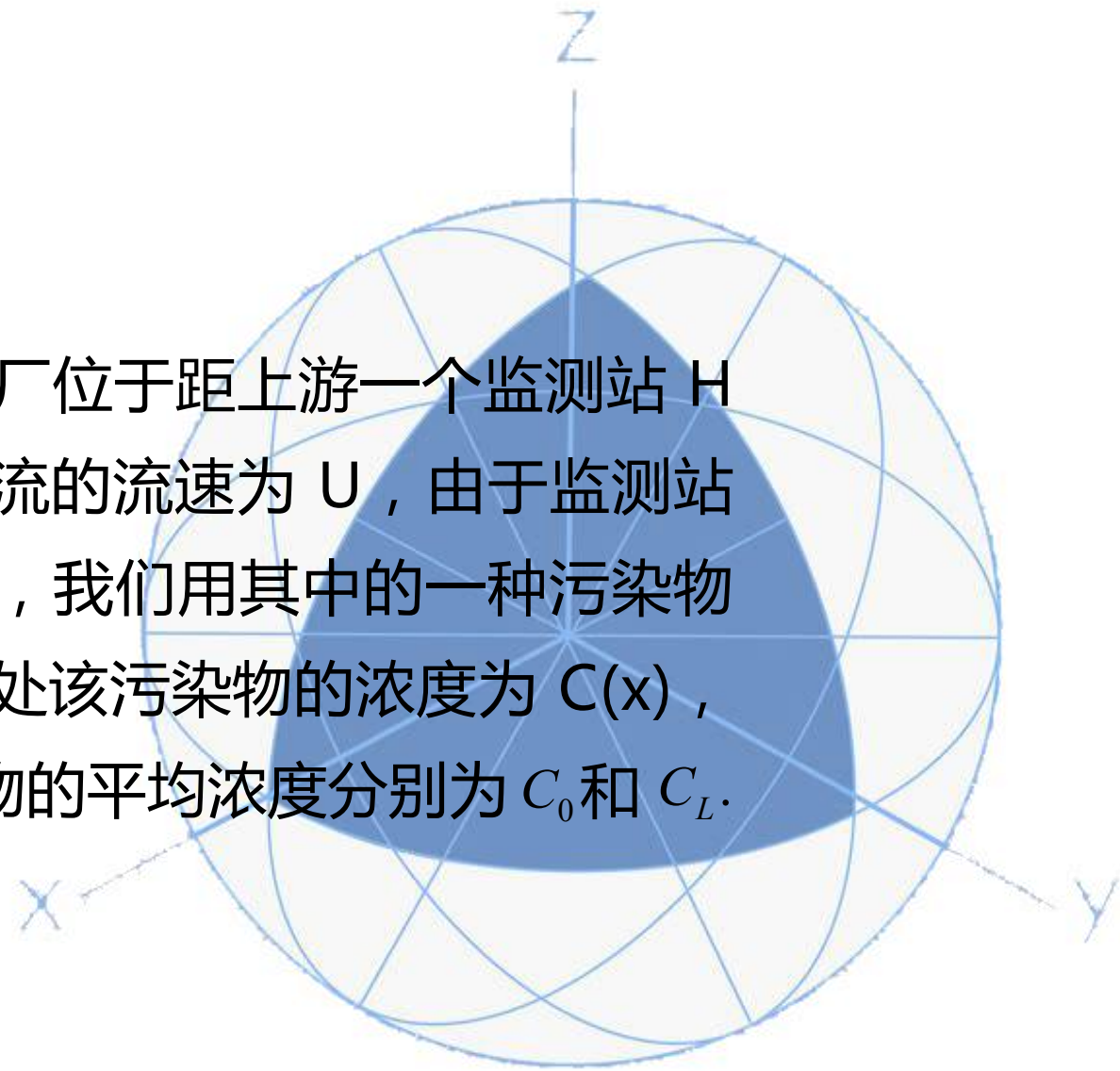
- (1) 假设在这两个监测站之间除了工厂的排污之外，其他污染可以忽略不计；
- (2) 假设这一段河道近似为等截面的，河流的水源也是恒定的；
- (3) 由于相对于流动而言污染物的扩散效应是十分微弱的，在建立模型时我们可以忽略污染物的扩散；





问题分析

(4) 设两个监测站之间的距离为 L ，工厂位于距上游一个监测站 H 处的河边，河流的横截面积为 A ，河流的流速为 U ，由于监测站可以对各种污染物及其指标进行测量，我们用其中的一种污染物为例来进行分析。令距上游监测站 x 处该污染物的浓度为 $C(x)$ ，上游监测站和下游监测站测得的污染物的平均浓度分别为 C_0 和 C_L 。





模型构建

我们首先建立污染物浓度变化的数学模型．引进浓度变化主要有两个因素，一个是河流的流动，另一因素是污染物的自然降解．考察河流位于 $[x, x + \Delta x]$ 的一小段，图 6.2 是河流的侧视图。

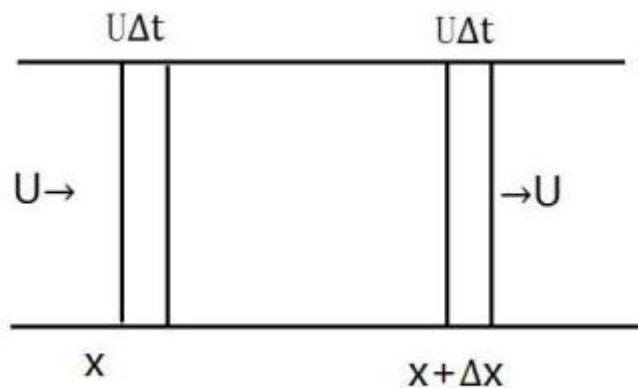
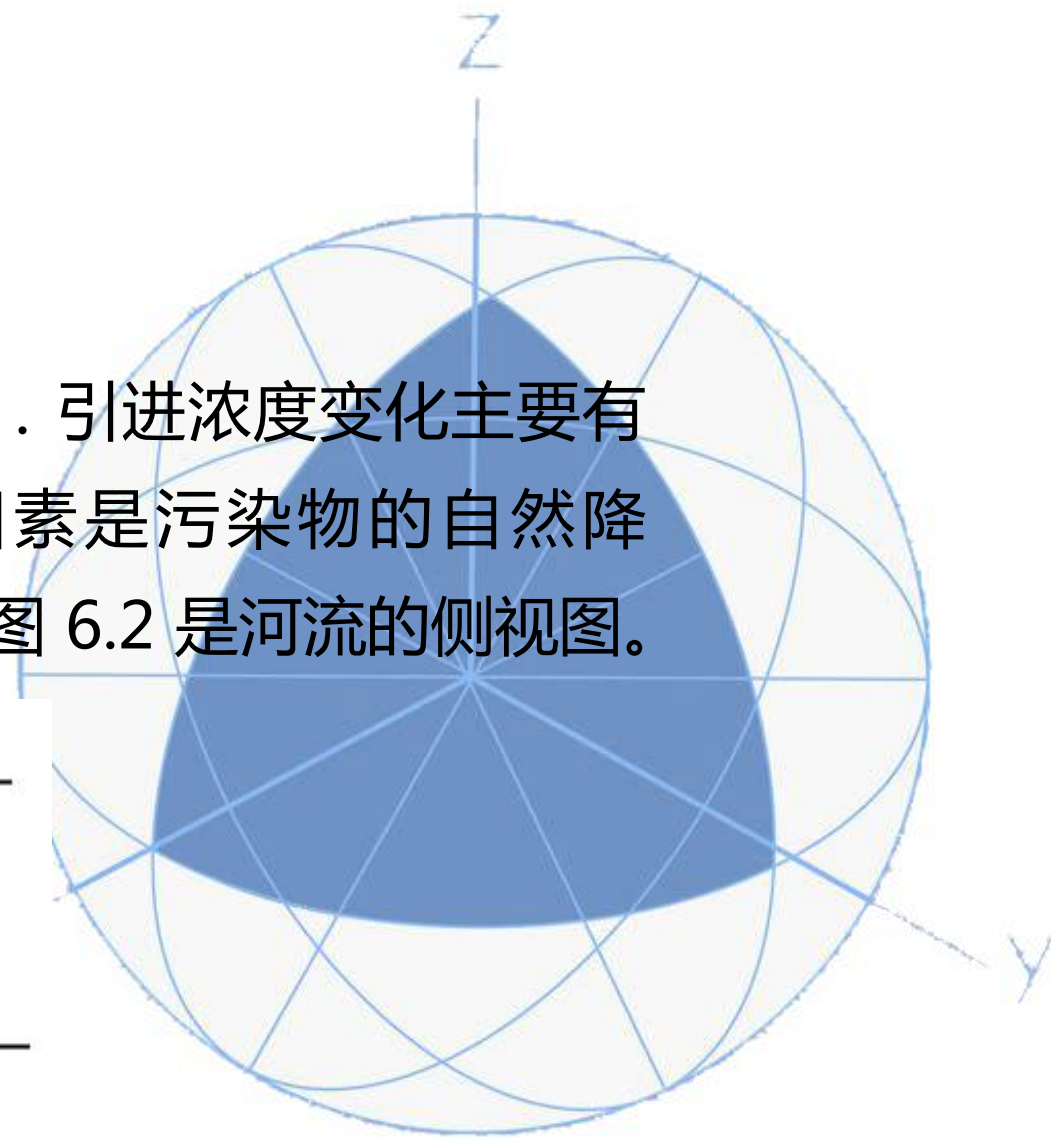


图 6.2





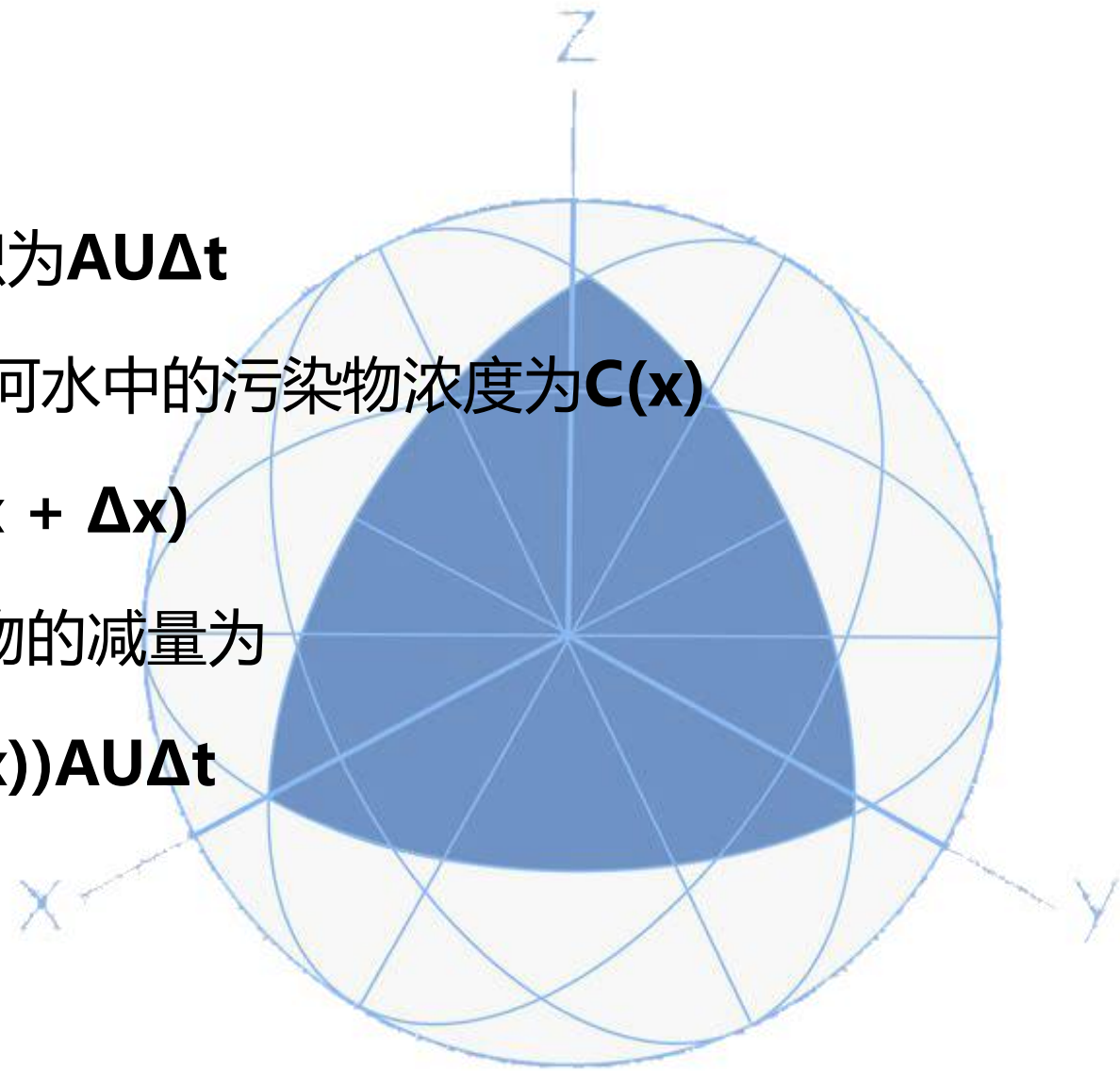
在 Δt 时间内，从左侧流入的河水体积为 $AU\Delta t$

从右侧流出同样体积的河水.左侧流入河水中的污染物浓度为 $C(x)$

而右侧流出河水中污染物的浓度为 $C(x + \Delta x)$

所以由河水流动引起这一段河流污染物的减量为

$$(C(x) - C(x + \Delta x))AU\Delta t$$



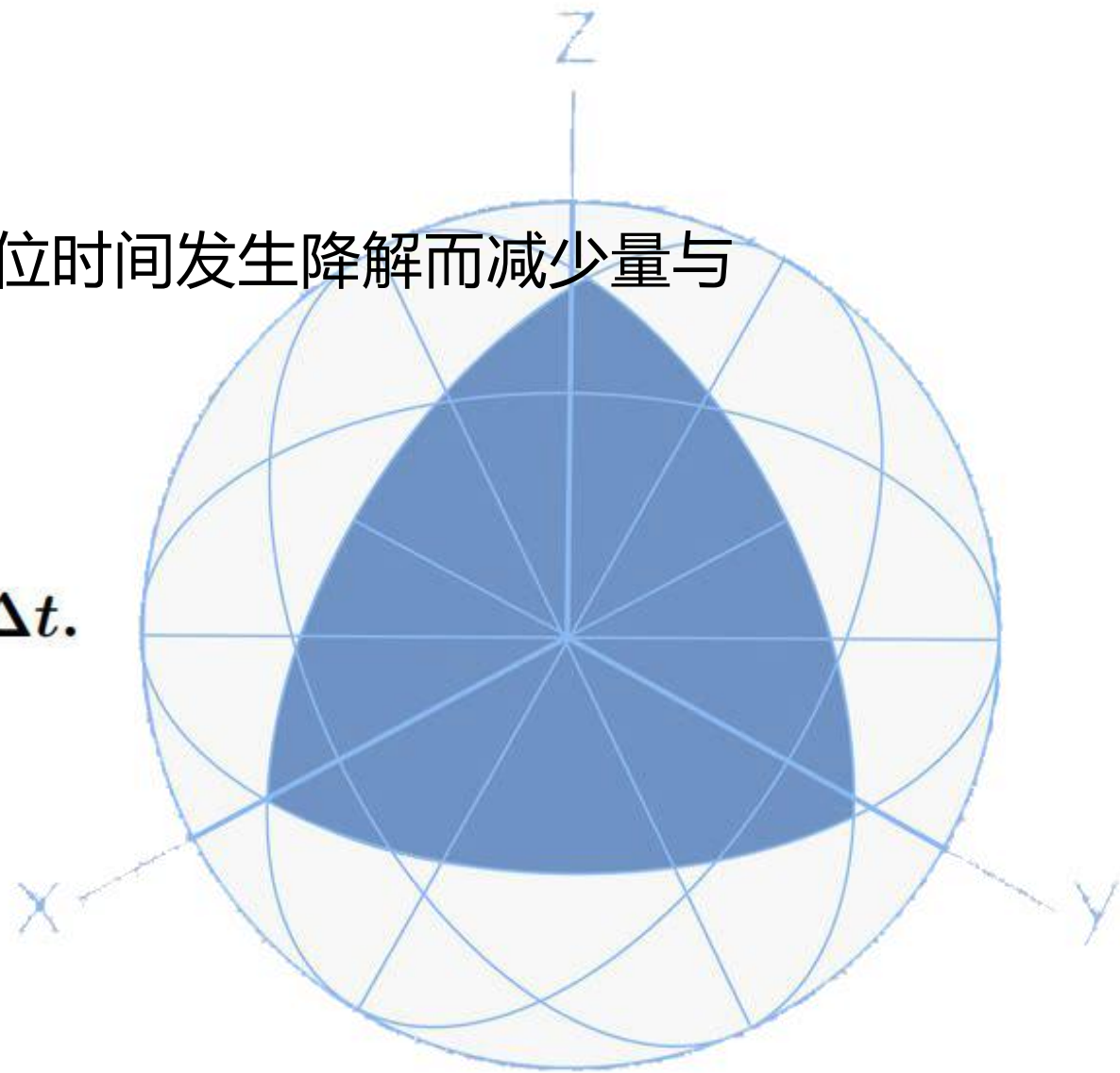


另一方面，这一段河流中的污染物单位时间发生降解而减少量与当时河段中的污染物量成正比。

因此，由降解而减少的污染物量为

$$kC(x)A\Delta x\Delta t.$$

其中比例系数 k 称为降解系数。



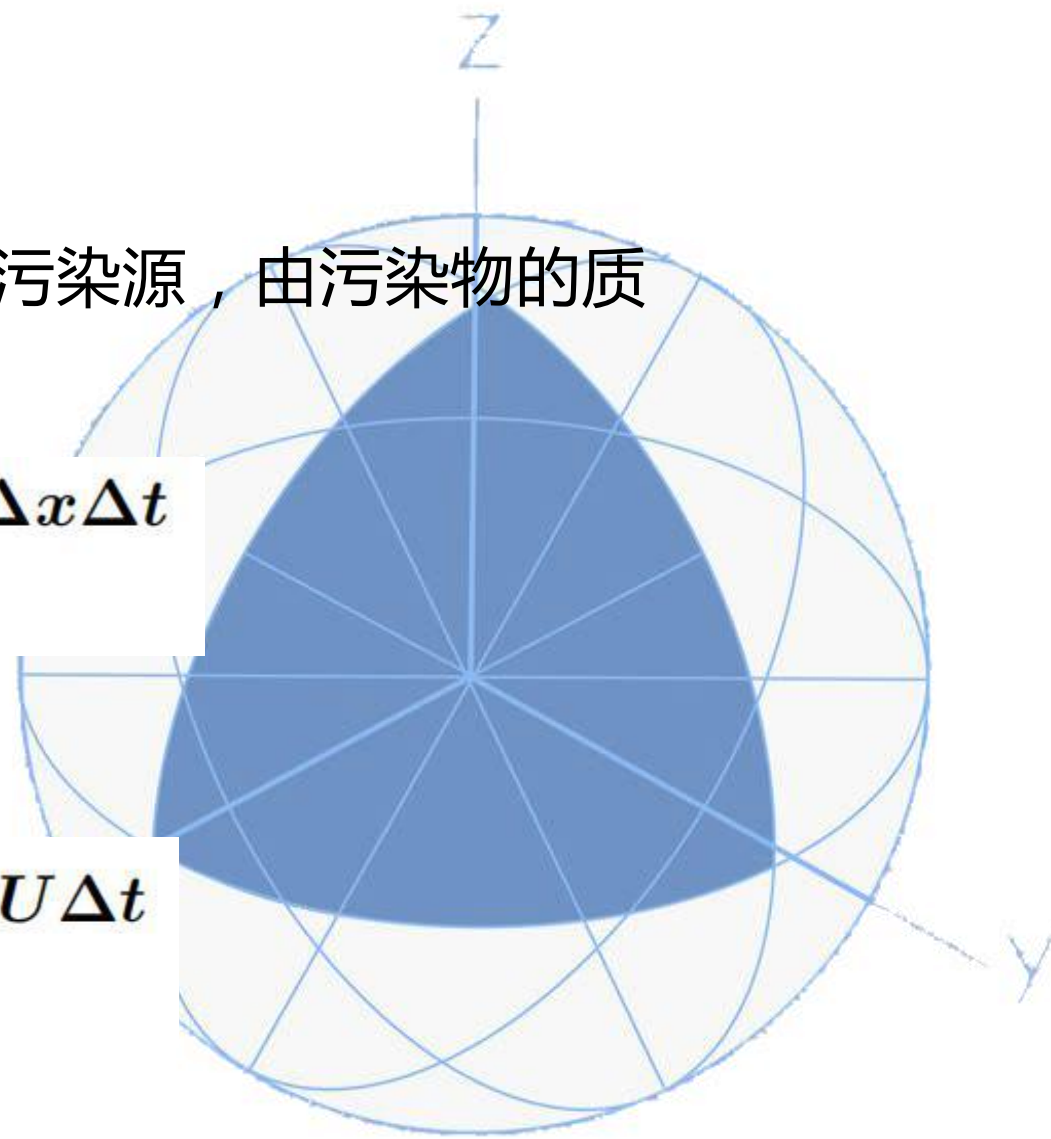


若在这一河段中没有工厂的排污，即没有污染源，由污染物的质量平衡有

$$C(x)AU\Delta t - kC(x)A\Delta x\Delta t \\ = C(x + \Delta x)AU\Delta t$$

因此有

$$(C(x) - C(x + \Delta x))AU\Delta t \\ = kC(x)A\Delta x\Delta t$$





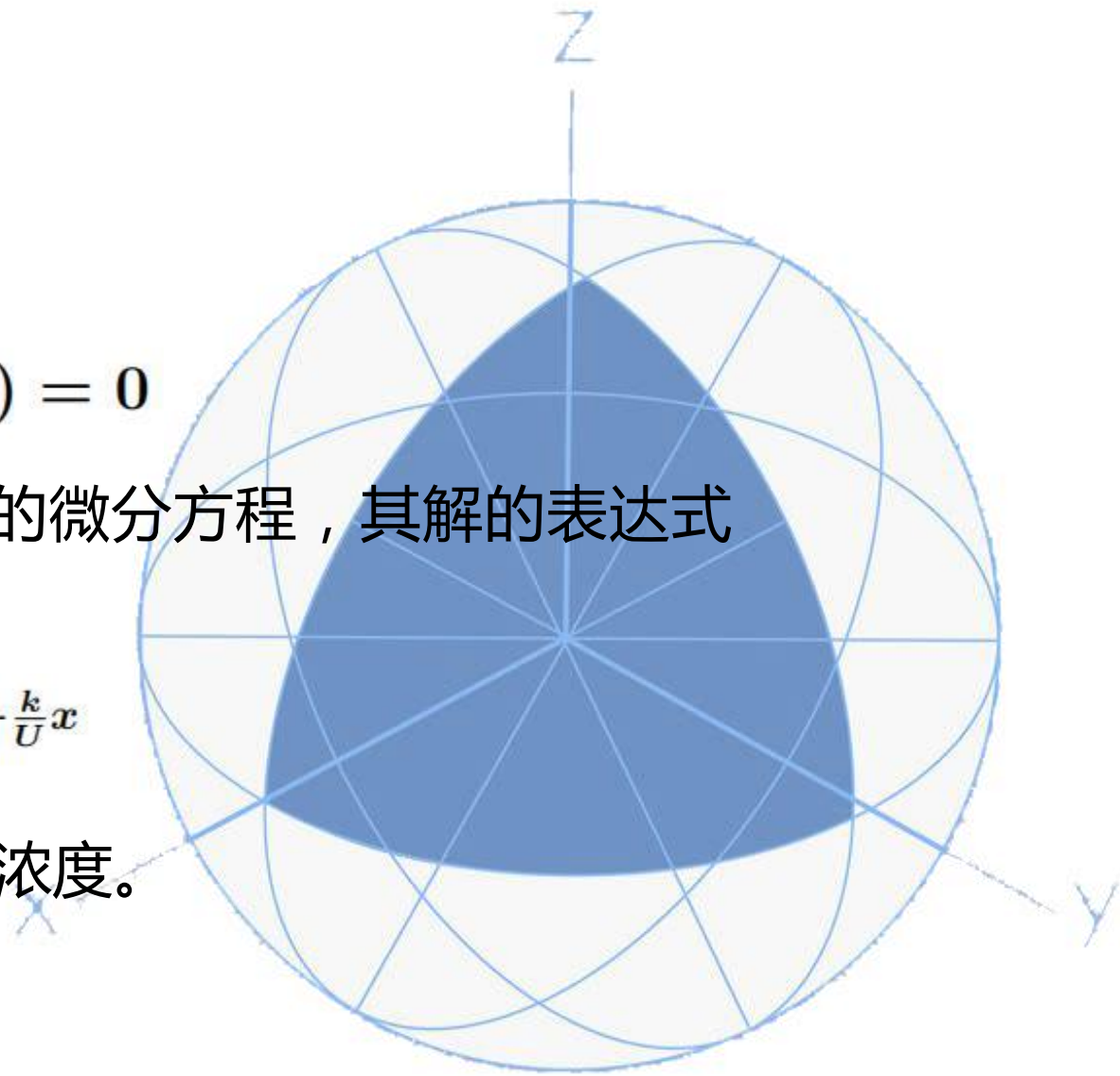
两边除以 $\Delta x \Delta t$, 令 Δx 趋于 0, 化简得

$$\frac{dC(x)}{dx} + \frac{k}{U}C(x) = 0$$

这就是无污染源河段污染物浓度满足的微分方程，其解的表达式为

$$C(x) = \alpha e^{-\frac{k}{U}x}$$

其中 $\alpha = C(0)$ 为河段开始处的污染物浓度。





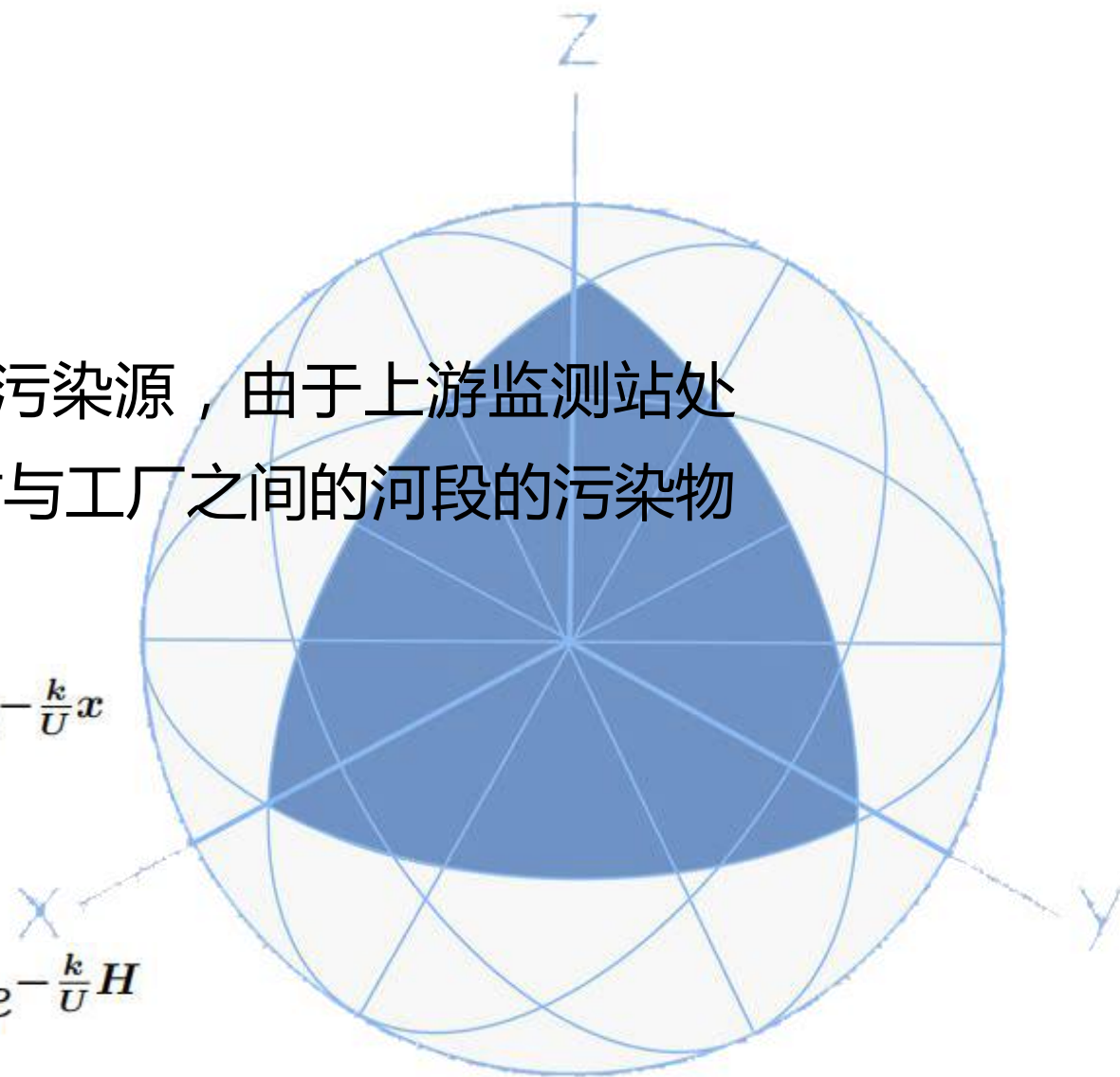
模型求解

若在这一河段中有工厂的排污，即有污染源，由于上游监测站处污染物的浓度为 C_0 ，那么在该监测站与工厂之间的河段的污染物浓度为

$$C(x) = C_0 e^{-\frac{k}{U}x}$$

工厂所在位置时，浓度应为

$$C(H) = C_0 e^{-\frac{k}{U}H}$$



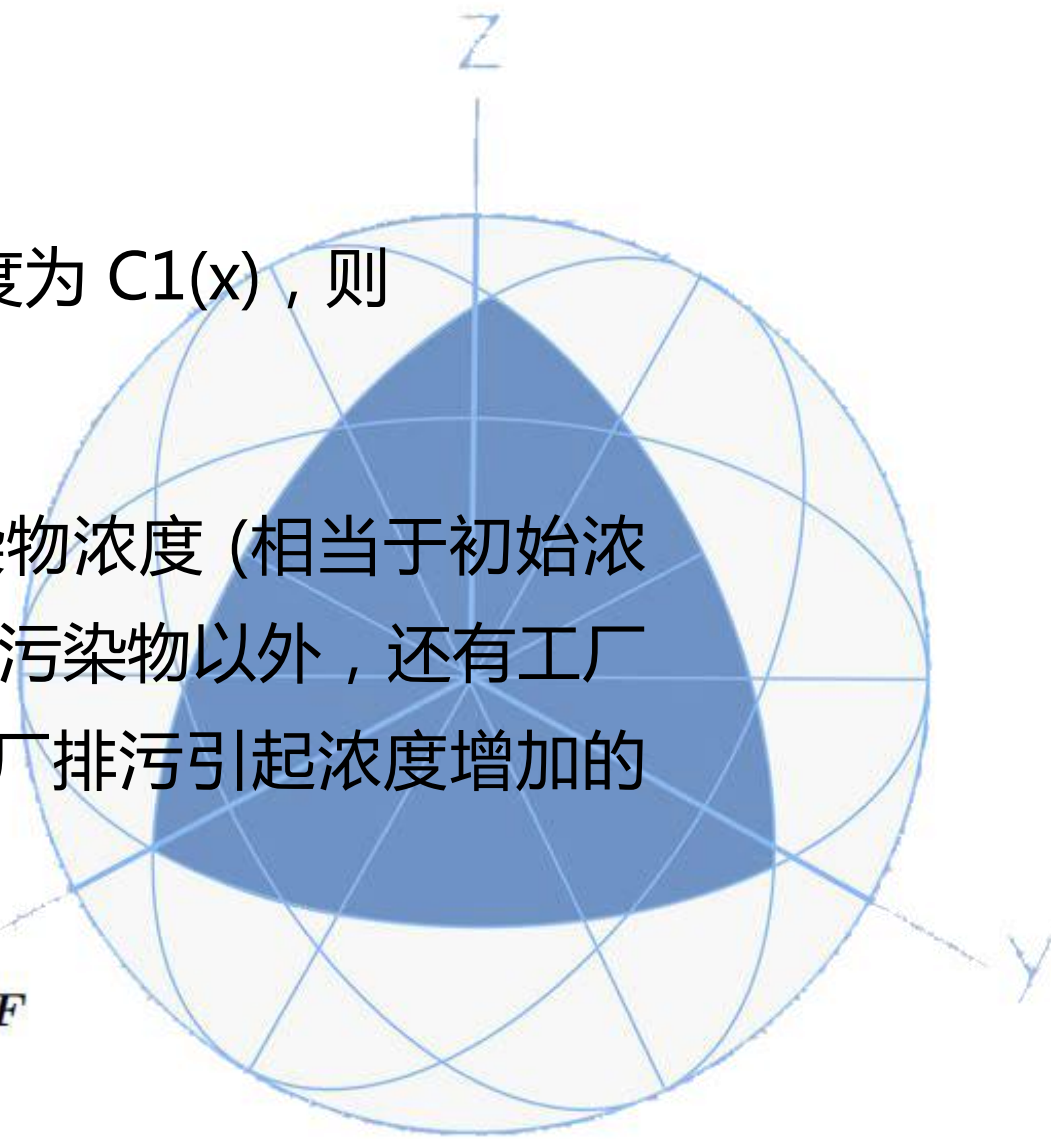


记从工厂所在位置开始的河段中污染物浓度为 $C_1(x)$ ，则

$$C_1(x) = \beta e^{-\frac{k}{U}x},$$

其中 x 为到工厂的距离， β 为工厂处污染物浓度 (相当于初始浓度)。注意到在工厂附近除了有上游流下的污染物以外，还有工厂排污引起的污染浓度的增加。记 C_F 为工厂排污引起浓度增加的部分，则工厂附近的污染物浓度应该是

$$\beta = C_0 e^{-\frac{k}{U}H} + C_F$$





因此工厂下游污染物浓度为

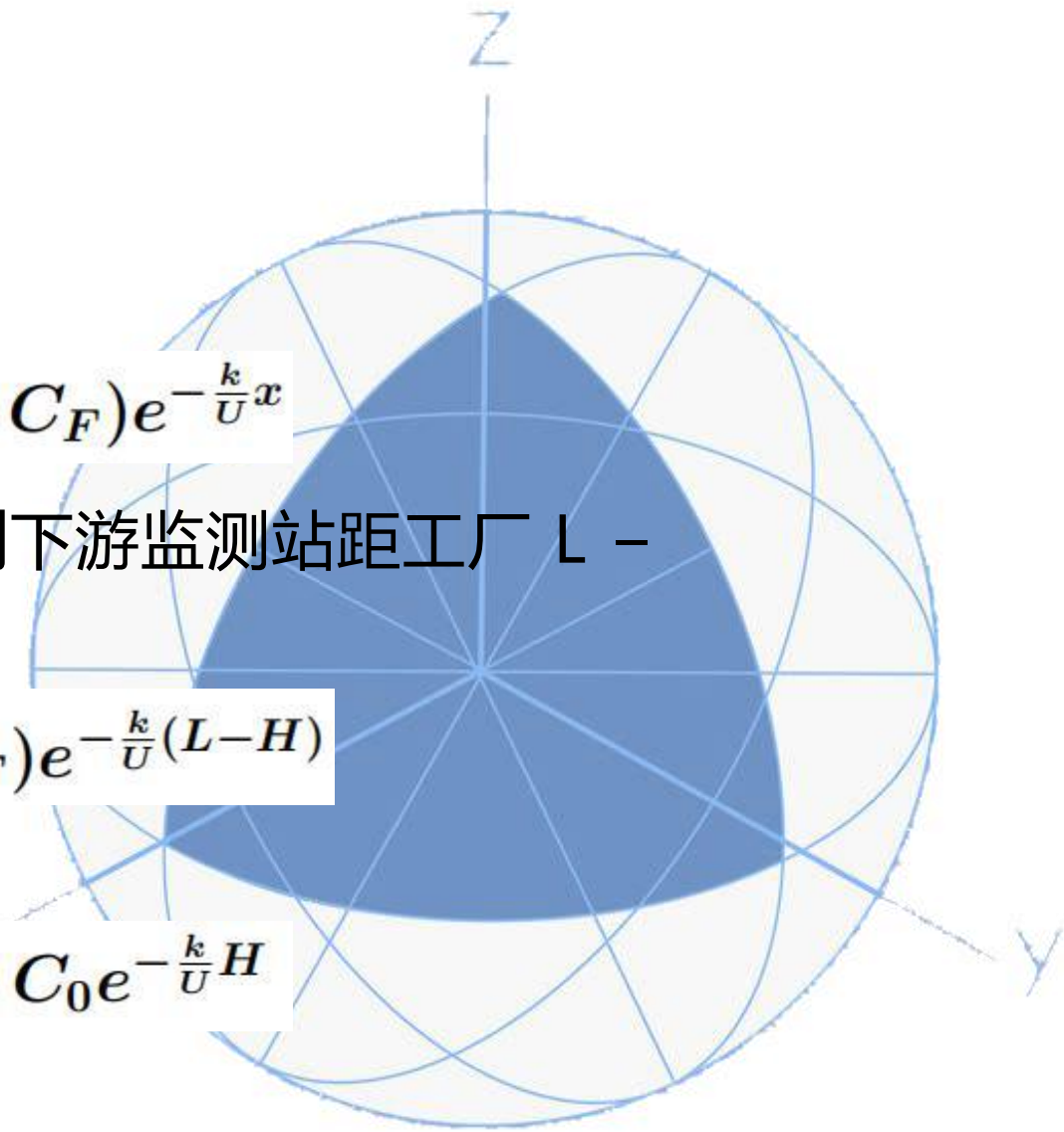
$$C_1(x) = (C_0 e^{-\frac{k}{U}H} + C_F) e^{-\frac{k}{U}x}$$

其中 x 为到工厂所在位置的距离。注意到下游监测站距工厂 $L - H$ ，该处的污染浓度为 C_L ，有

$$C_L = (C_0 e^{-\frac{k}{U}H} + C_F) e^{-\frac{k}{U}(L-H)}$$

由此解得

$$C_F = C_L e^{\frac{k}{U}(L-H)} - C_0 e^{-\frac{k}{U}H}$$

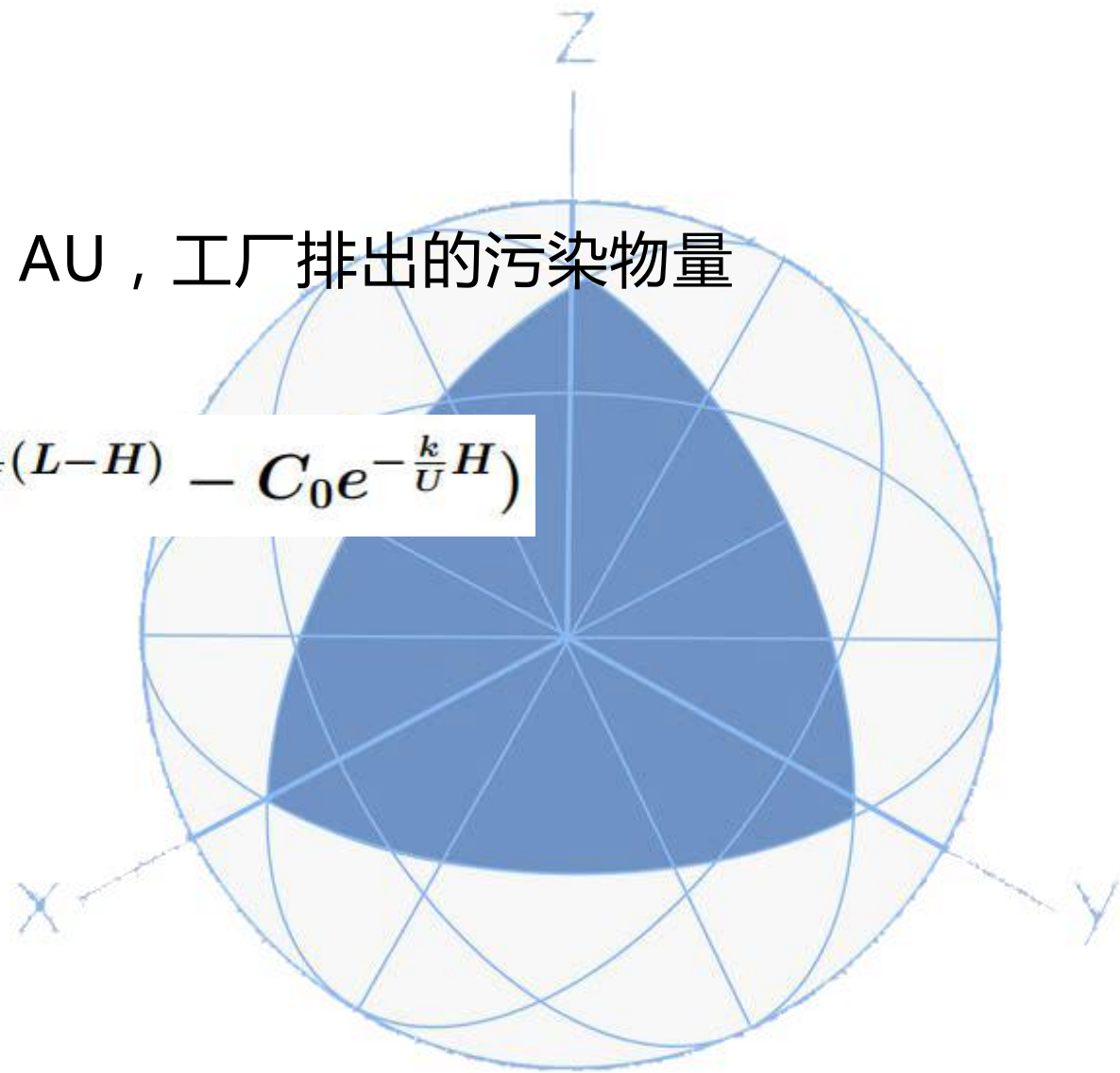




由于单位时间流向下游的河水体积为 AU ，工厂排出的污染物量为

$$AUC_F = AU(C_L e^{\frac{k}{U}(L-H)} - C_0 e^{-\frac{k}{U}H})$$

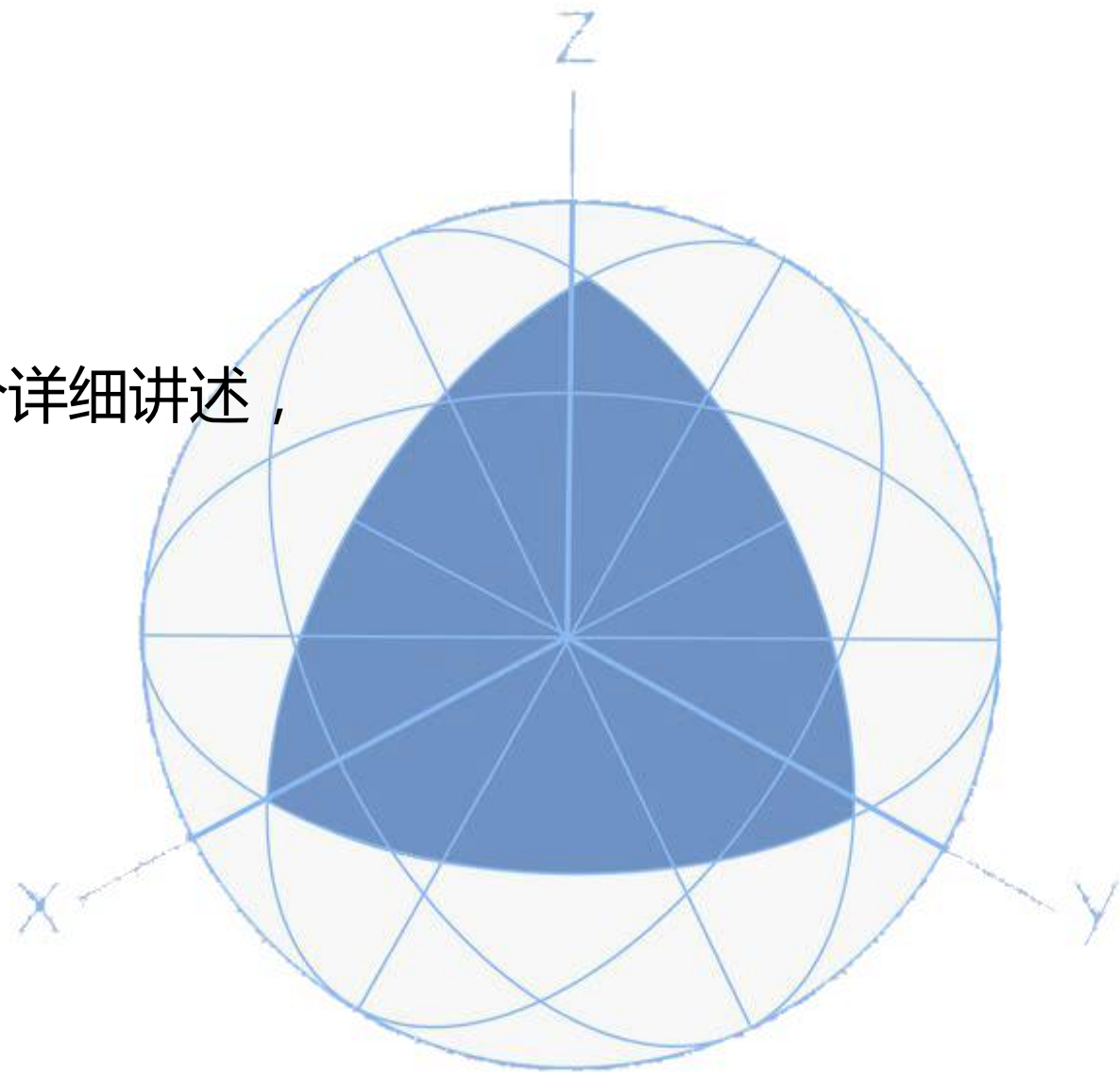
据此可以提出惩罚措施和整改需求。





6.3.3 微元分析法

该小节将在偏微分方程方法建模部分详细讲述，
此处略去。





6.3.4近似法

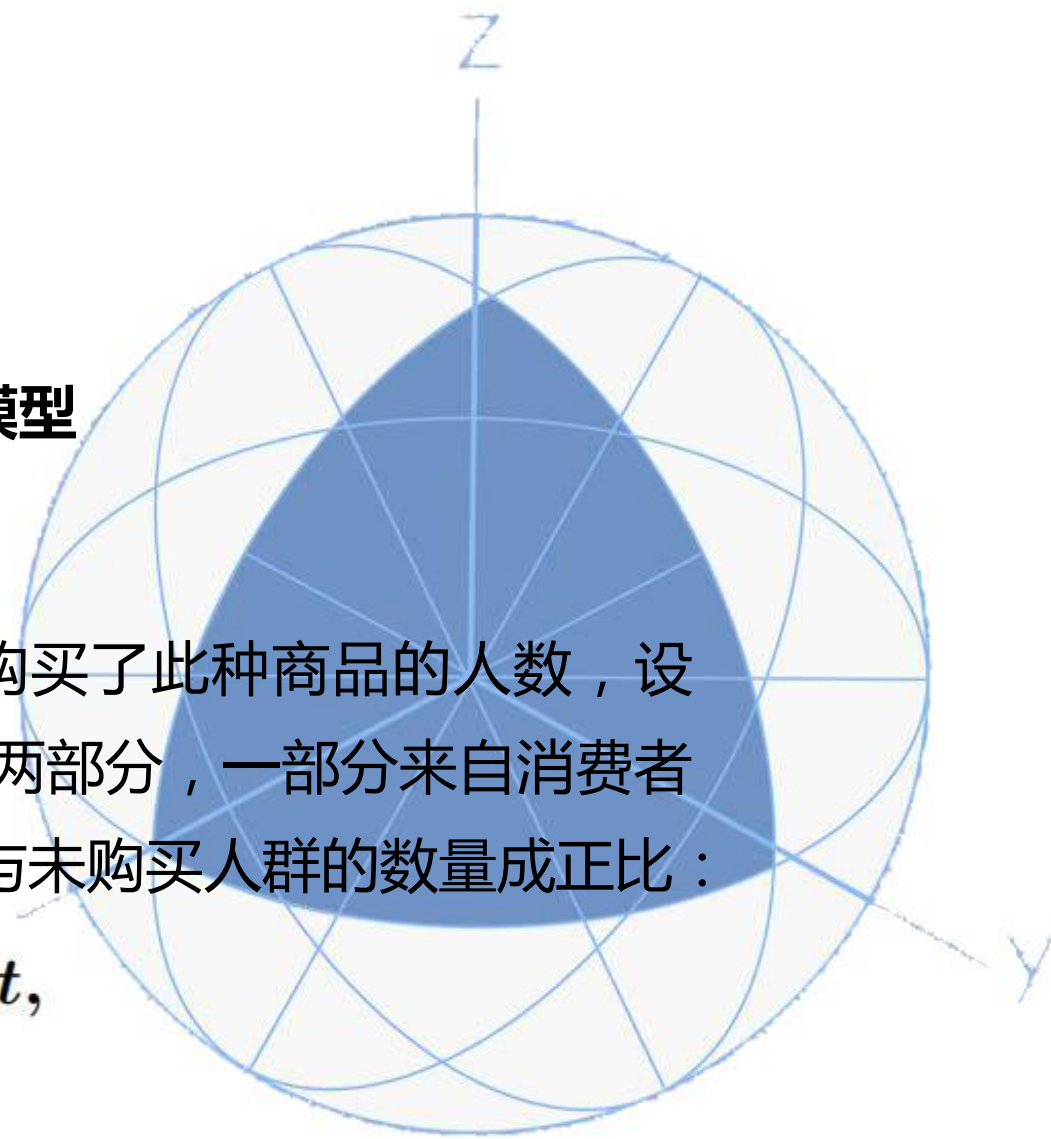
案例五：普通消费品销售规律的巴斯 Bass 模型

(1)巴斯 Bass 模型

设 K 为潜在的消费者人数， $N(t)$ 为时刻 t 购买了此种商品的人数，设在 Δt 时段内，购买者增加了 ΔN 。 ΔN 分为两部分，一部分来自消费者以外的信息（如广告等）导致的这部分，它与未购买人群的数量成正比：

$$a(K - N(t))\Delta t,$$

其中 a 为比例系数， $a > 0$ 。

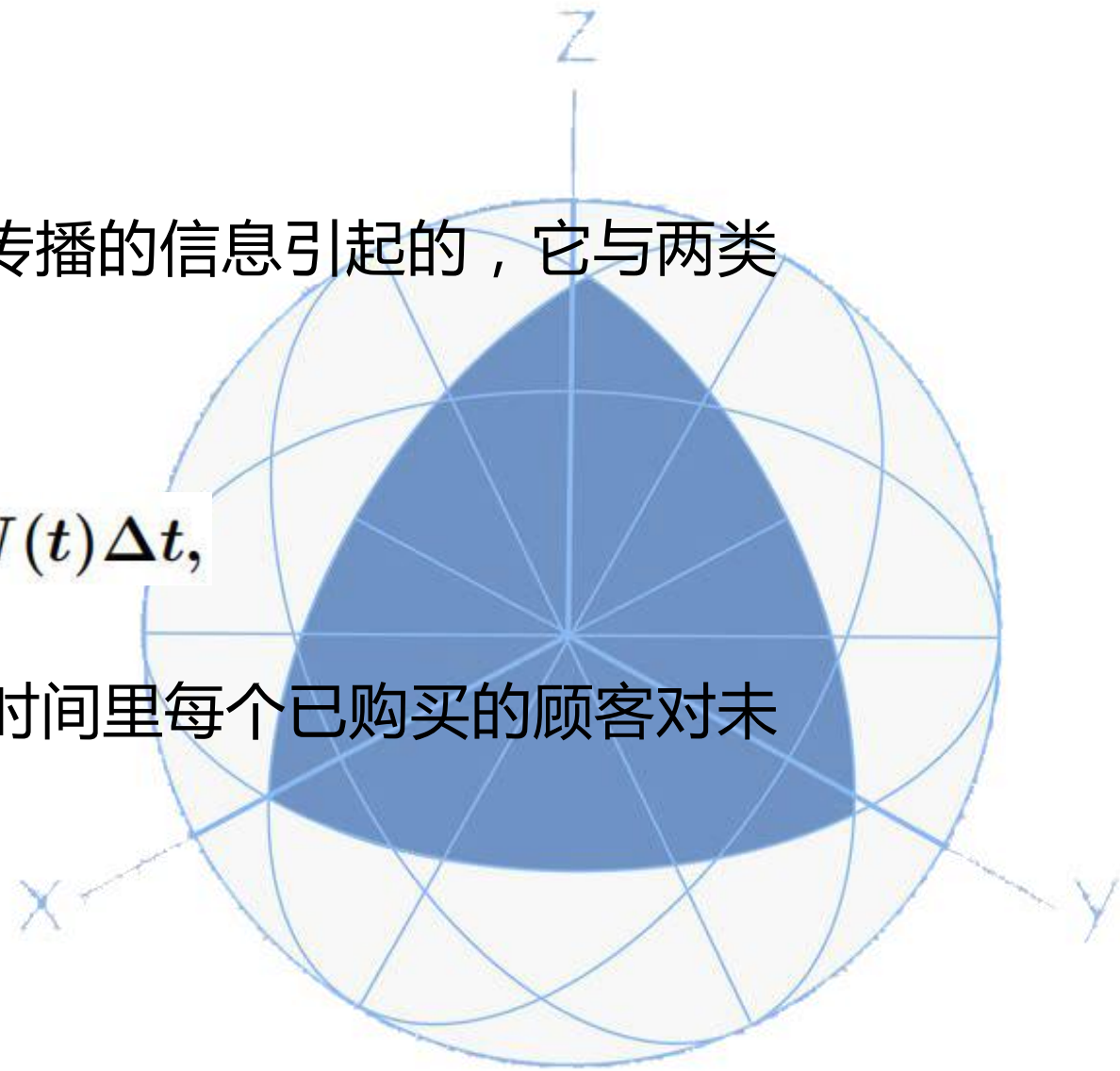




另一部分增量是由已购买的顾客所传播的信息引起的，它与两类人群相遇的总次数成正比，即：

$$b(K - N(t))N(t)\Delta t,$$

其中 $b > 0$ 为比例系数，表示单位时间里每个已购买的顾客对未购买群体的影响比例。





由上两式相加可以解得： $\Delta N = (K - N(t))(a + bN(t))\Delta t$

即

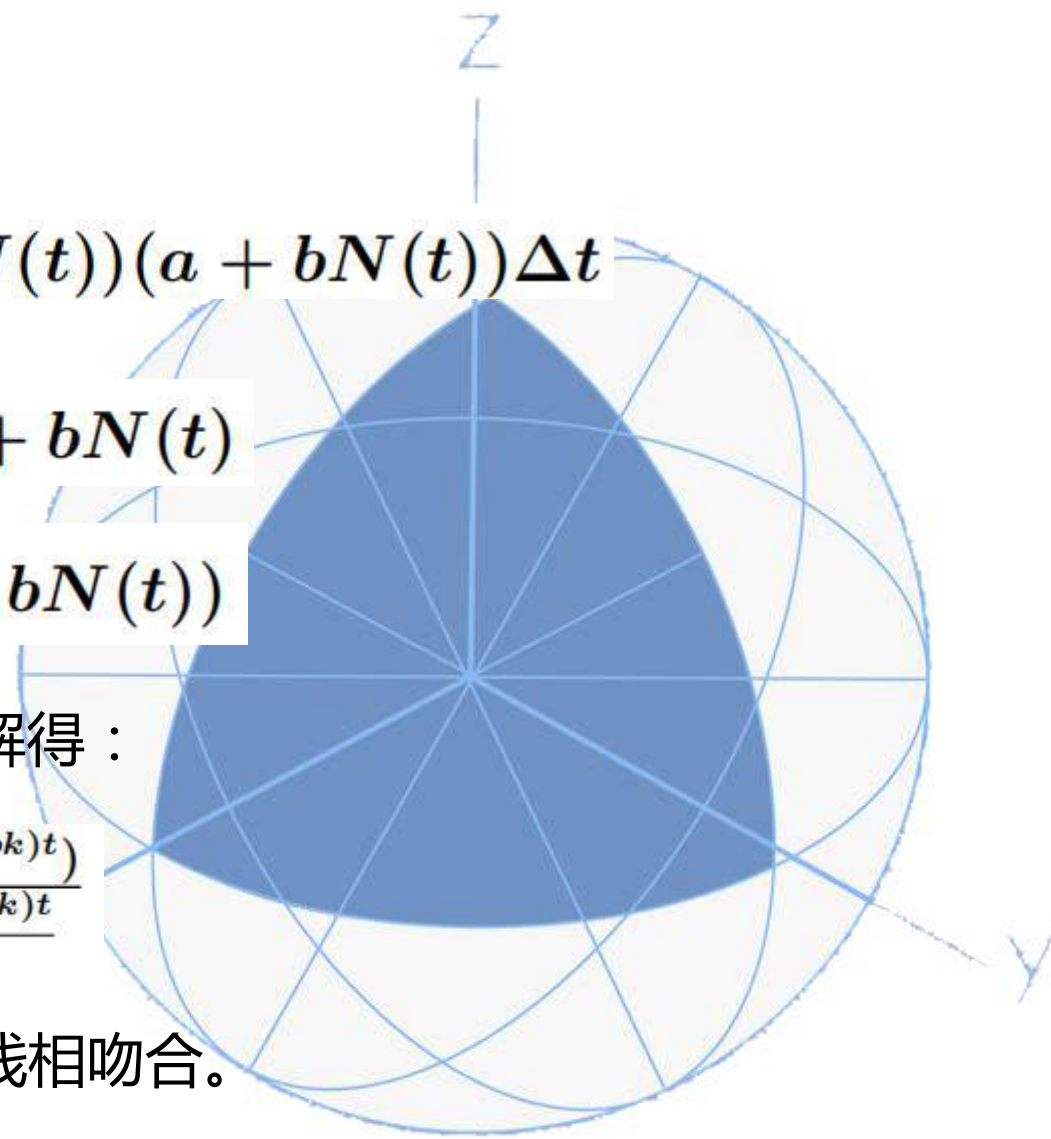
$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = (K - N(t))(a + bN(t))$$

令 $\Delta t \rightarrow 0$, $\frac{dN(t)}{dt} = (K - N(t))(a + bN(t))$

这就是 Bass 模型，初始条件为 $N(0) = 0$ ，解得：

$$N(t) = \frac{K(1 - e^{-(a+bk)t})}{1 + \frac{bke^{-(a+bk)t}}{a}}$$

这一图像呈单峰结构，和传统的产品生命曲线相吻合。

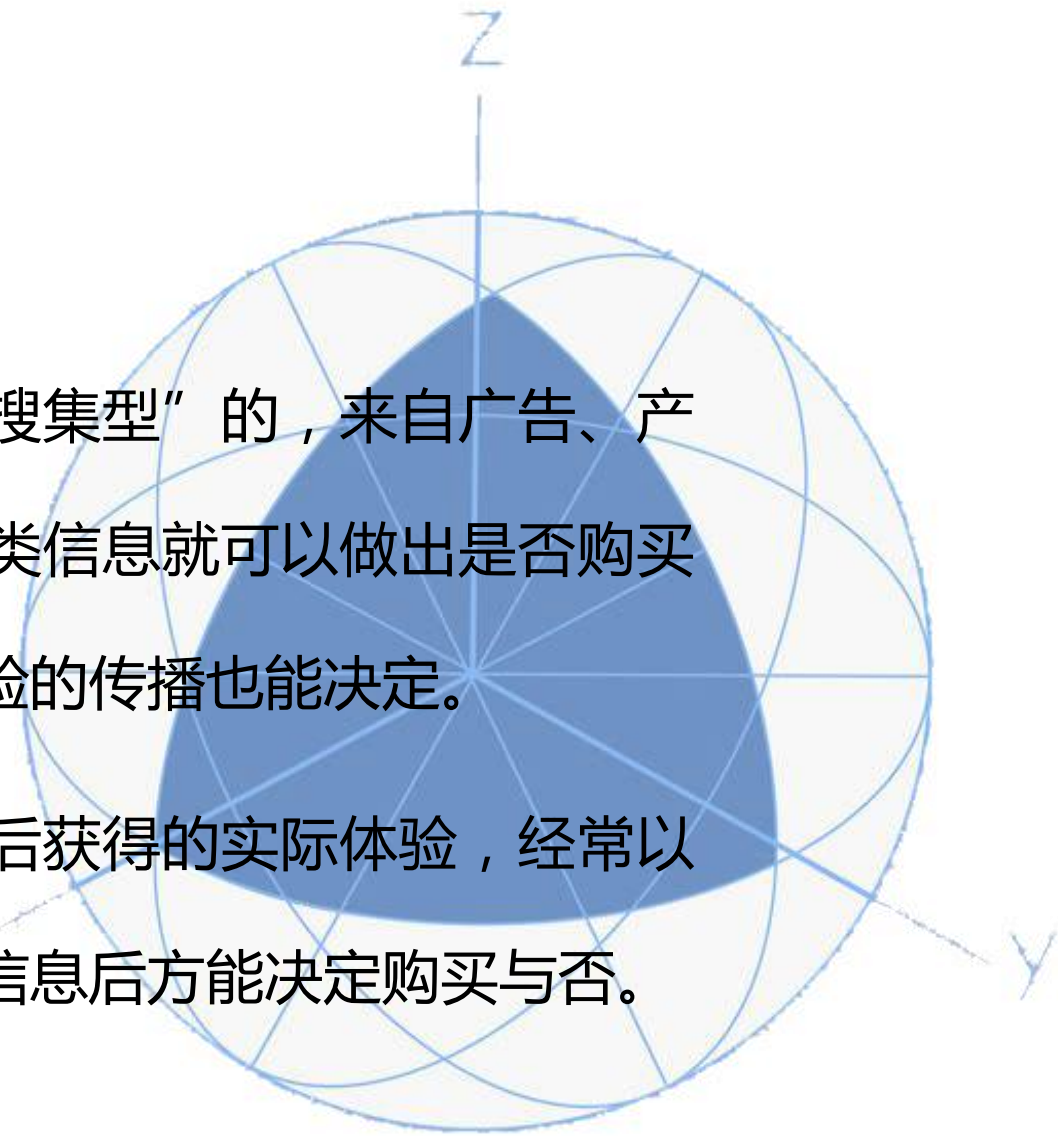




(2) 斯蒂芬斯 - 莫赛 (Steffens-Murthy) 模型

将消费者获得的信息分为两类，一类称为“搜集型”的，来自广告、产品说明、样品，“创新型”的顾客在获得此类信息就可以做出是否购买的决定，当然对其他用户使用后获得实际体验的传播也能决定。

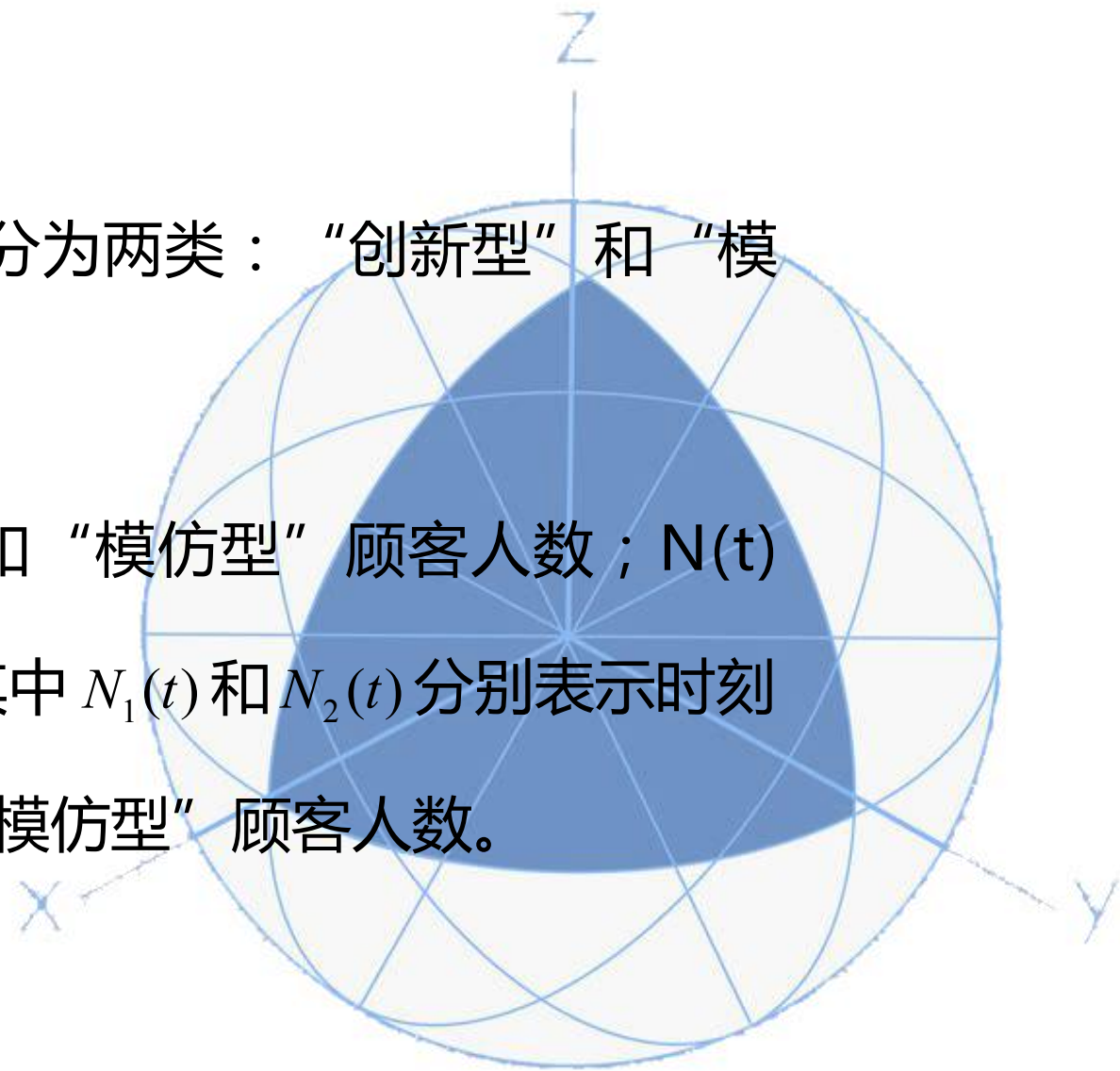
另一类信息称为“体验型”的，即用户使用后获得的实际体验，经常以口头形式传播，“模仿型”顾客在获得此类信息后方能决定购买与否。





设 K 为潜在的消费者人数，将顾客分为两类：“创新型”和“模仿型”。

设 K_1 和 K_2 分别表示“创新型”和“模仿型”顾客人数； $N(t)$ 为时刻 t 购买了此种商品的人数，其中 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 分别表示时刻 t 购买了此种商品的“创新型”和“模仿型”顾客人数。





设 $A_1(t)$ 为时刻 t 中已经获得“搜集型”信息的人数，这部分信息可以从消费者外部获得，也可以从已获得这种信息的人中取得，类似 Bass 模型：

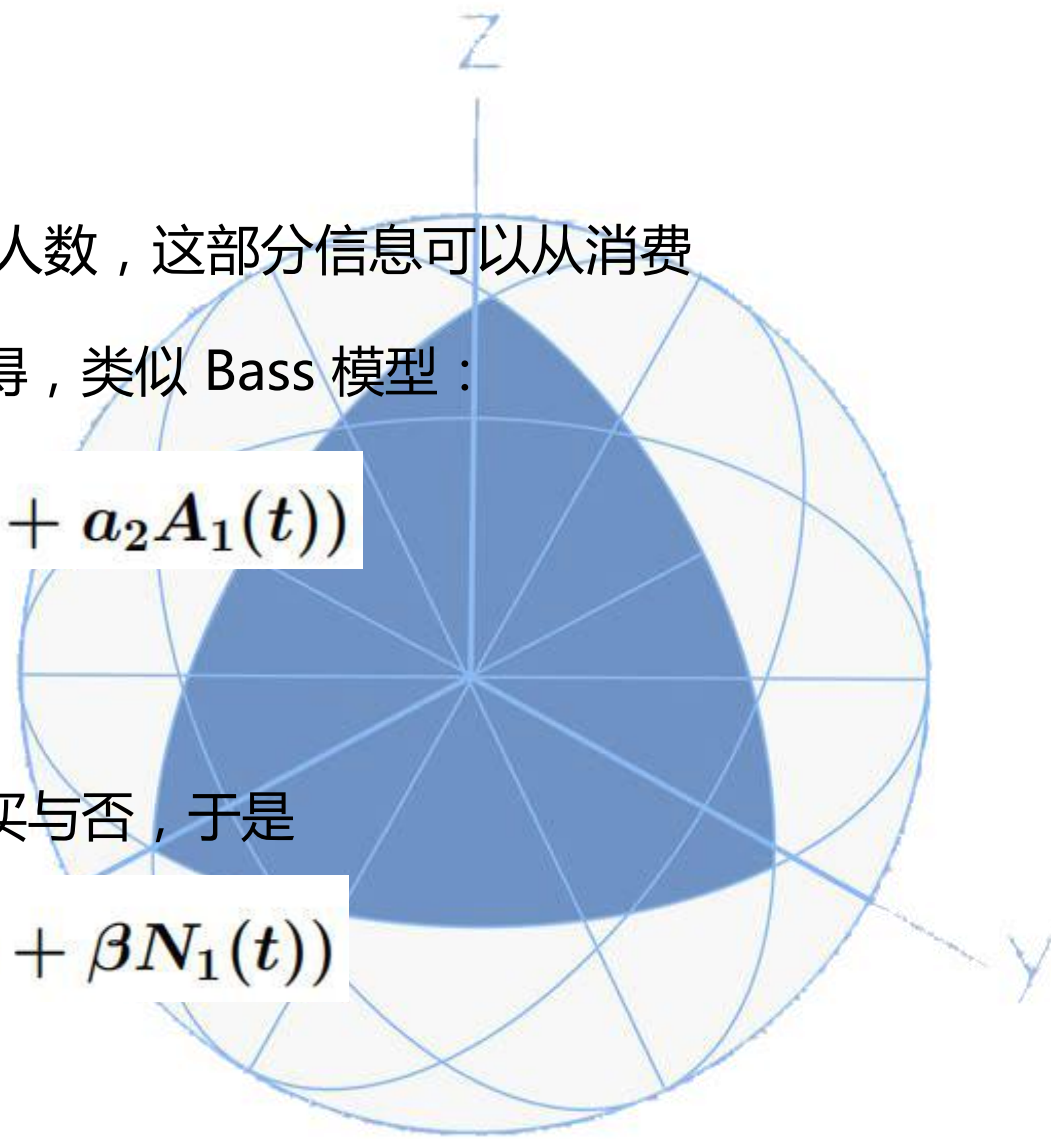
$$\frac{dA_1(t)}{dt} = (K_1 - A_1(t))(a_1 + a_2 A_1(t))$$

这里 $A_1(0) = 0, a_1 > 0, a_2 > 0$

由于获得了“搜集型”信息的顾客会立即决定购买与否，于是

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = (K_1 - N_1(t))(\alpha + \beta N_1(t))$$

这里 $N_1(0) = 0, \alpha > 0, \beta > 0$.





对于“模仿型”顾客，可以从已经购买该商品的“创新型”和“模仿型”两类

顾客中获得信息 $\frac{dN_2(t)}{dt} = \gamma(K_2 - N_2(t))(N_1(t) + N_2(t))$

其中 $\gamma > 0$, $N_2(0) = 0$. 我们忽略了顾客购买该商品后需要有一段短暂的试用才会传播体验信息的滞后. 这就是 Steffens-Murthy 模型

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = (K_1 - N_1(t))(\alpha + \beta N_1(t))$$

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = \gamma(K_2 - N_2(t))(N_1(t) + N_2(t))$$

$$N_1(0) = 0, N_2(0) = 0$$

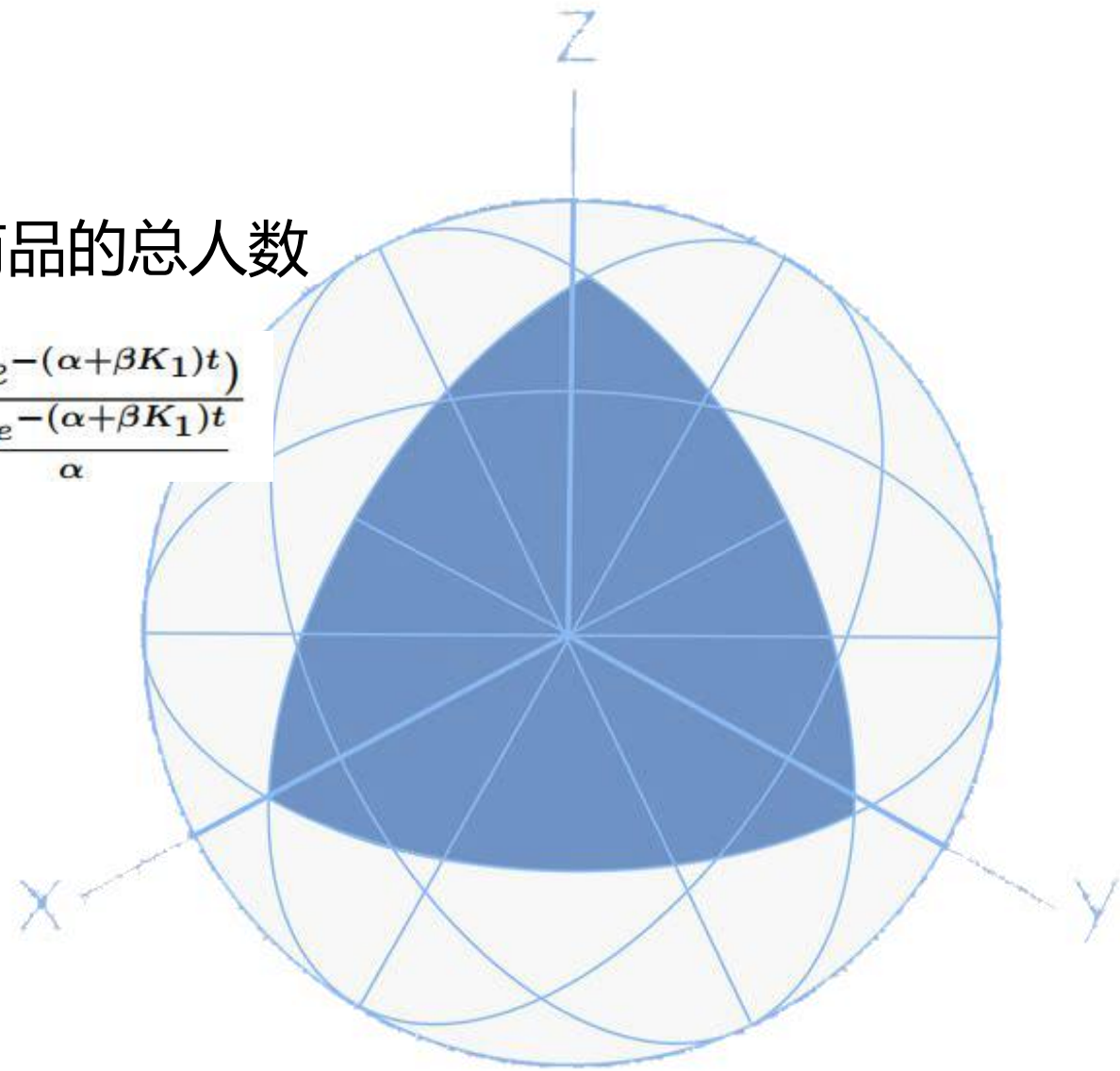
$$N(t) = N_1(t) + N_2(t)$$



$N(t) = N_1(t) + N_2(t)$ 为时刻 t 购买该商品的总人数

$$N_1(t) = \frac{K_1(1 - e^{-(\alpha + \beta K_1)t})}{1 + \frac{\beta K_1 e^{-(\alpha + \beta K_1)t}}{\alpha}}$$

$N_2(t)$ 可以用数值方法得到。





廈門大學
XIAMEN UNIVERSITY

THANK YOU

