

Introdução ao Cálculo - MAW117
Rogério Lourenço
rogerio.lourenco.im.ufrj@gmail.com
<https://rogerio-lourenco.github.io/pagina>
Prova Final - 30 de novembro de 2017

Leia a prova toda com atenção antes de começar. Boa prova.

1. **[2 pontos]** Considere a função $f : (0; 1) \rightarrow (0; +\infty)$ dada por

$$f(x) = \left(\frac{1}{\ln(x)} \right)^2.$$

Escreva a função inversa de f (não esqueça de determinar qual é o domínio e o contradomínio).

Atenção: Observe que está tomando o \ln de um número entre 0 e 1.

2. **[2 pontos]** Considere as seguintes funções $g, h, j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dadas por

$$h(x) = 4x^2 - 12x + 9, j(x) = 2^x \text{ e } g(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } x \leq 0; \\ 1, & \text{para } 0 < x \leq 1; \\ -1, & \text{para } x > 1. \end{cases}$$

Calcule a composta $(h \circ g \circ j)(x)$.

3. **[2 pontos]** Usando a notação da questão anterior, calcule a composta $(g \circ h)(x)$.
4. **[2 pontos]** Determine para quais valores reais de x é válida a inequação:

$$x(x-1)(x-2)(x+1)^2(x+2)^3 \geq 0$$

5. **[2 pontos]** Considere um real $q \neq 1$. Defina a função $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$S(n) = 1 + \sum_{i=1}^n q^i = 1 + q + q^2 + \dots + q^n.$$

Mostre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, S(n) = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$