Introdução ao Cálculo - MAW117
Rogério Lourenço - rogerio.lourenco.im.ufrj@gmail.com
Gabarito da Lista Complementar 3

1. O centro do círculo fica no centro do retângulo. Um segmento de reta que sai do centro para o vértice do retângulo determina um triângulo retângulo, cujos catetos medem a metade dos lados do retângulo.

   Por Pitágoras,
$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 3^2 = 9.$$
   Logo
$$y = \sqrt{36 - x^2}.$$
   Assim, $0 \leq x \leq \sqrt{36} = 6$, e portanto $A : [0, 6] \to \mathbb{R}$,
$$A(x) = xy = x\sqrt{36 - x^2}.$$

2. Se (x, y) é o vértice superior direito, o retângulo tem base com comprimento $2x$ e altura y. Como o x tem que ser não negativo e caber dentro da parábola, ≤ 3.

   A área é $A : [0, 3] \to \mathbb{R}$, onde
$$A(x) = 2x \cdot y = 2x \cdot (9 - x^2) = 18x - 2x^3.$$

3. A área do triângulo é dada pela metade do comprimento da base pela altura. Considere então uma reta $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$:
$$r(t) = (\alpha t + +\beta; \delta t + \gamma),$$
   que passa em $t = 0$ pelo ponto $(0, y)$ e em $t = 1$ pelo ponto $(3; 5)$. A primeira condição implica em
$$r(0) = (\beta; \gamma) = (0, y) \implies \begin{cases} \beta = 0; \\ \gamma = y. \end{cases}$$
   Usando isso junto com a segunda condição, temos
$$r(1) = (\alpha; \delta + y) = (3; 5) \implies \{\ \alpha = 3; \delta = 5 - y.$$
   Seja $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $r(t_0) = (x, 0)$. Então
$$r(t_0) = (3t_0; (5 - y)t_0 + y) = (x, 0) \implies \begin{cases} x = 3t_0; \\ t_0 = \frac{-y}{5-y}. \end{cases}$$
   Ou seja,
$$x = \frac{-3y}{5 - y} \implies (5-y)x+3y = 0 \implies 5x+y(3-x) = 0 \implies y = \frac{-5x}{3 - x} = \frac{5x}{x - 3}.$$

Logo, como podemos tomar qualquer $x > 0$, temos que a área é a função $A : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, onde

$$A(x) = \frac{xy}{2} = \frac{x}{2} \cdot \frac{5x}{x-3} = \frac{5x^2}{2(x-3)}.$$

4. Não, basta ver que $f(0) = 11$, assim como $f(6) = 11$.

5.

$$\begin{aligned} y &= \frac{x}{x^2-4} \\ (x^2-4)y &= x \\ yx^2 - 4y - x &= 0 \\ x(xy-1) - 4y &= 0 \\ x^2y - x - 4y &= 0, \end{aligned}$$

logo a inversa é $f^{-1} : \mathbb{R} \to]-2;2[$ é dada por

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{1+16y^2}}{2y}, \text{ se } y \neq 0; \\ 0, \text{ se } y = 0. \end{cases}$$

A solução com o outro sinal da raiz não é válida pois $x \in]-2;2[$.

Então

$$f^{-1}(1/2) = \frac{1-\sqrt{1+4}}{1} = 1 - \sqrt{5}.$$

6. O único "problema"é a raiz quadrada, logo o domínio de f tem que ser $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. Note que

$$f(0) = \frac{8}{\sqrt{0}+2} = 4$$

e a medida que tomarmos x maiores, o denominador crescer, logo o valor de f decai até 0 (porém nenhum valor de x alcança 0). Ou seja, a imagem de f é $]0, 4]$.

Tomando

$$y = \frac{8}{\sqrt{x}+2},$$

segue que

$$(\sqrt{x}+2)y = 8 \implies x = \left(\frac{8}{y} - 2\right)^2.$$

Ou seja, $f^{-1} :]0, 4] \to \mathbb{R}_+$ é dada por

$$f^{-1}(y) = \left(\frac{8}{y} - 2\right)^2.$$

Em particular, $f^{-1}(1/2) = (8/(1/2) - 2)^2 = (16 - 2)^2 = 14^2 = 196$.

No caso de g, o único "problema"é caso $x = -4$. Se y está na imagem de g, então

$$y = \frac{2x-5}{x+4} \implies yx + 4y = 2x - 5 \implies x(y-2) = -5 - 4y \implies x = \frac{-5-4y}{y-2}$$

e portanto $y \neq 2$. De fato, é fácil ver que $g(x) = 2$ não tem solução.

Então $g : \mathbb{R} \setminus \{-4\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}$ e $g^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{-4\}$ dada por

$$g^{-1}(y) = \frac{-5-4y}{y-2}.$$

7. O domínio tem que ser $[5, +\infty)$. Nesse caso, $f^{-1} : [5, +\infty) \to [2, +\infty)$ é dada por
$$f^{-1}(y) = 2 + \frac{\sqrt{16 - 4(9-y)}}{2},$$
basta tomar $f(x) = y$ e resolver o polinômio em x, onde tomamos a solução com sinal positivo da raiz quadrada por temos que ter $x \geq 2$.

8. (a) Domínio: $\mathbb{R}$, imagem: $(-\infty, 4]$;
   (b) Domínio: $(-\infty, 9]$, imagem: $[5, +\infty)$;
   (c) Domínio: $\mathbb{R} \setminus \{8\}$, imagem: $\mathbb{R} \setminus \{5\}$.

9. Podemos tomar $g = h$ e f a identidade. Também podemos tomar $g(x) = x^2 + 6x - 4$ e $f(x) = x^5$.

10. O argumento dentro da raiz deve ser não negativo. Além disso, x não pode nem ser 3 nem -3 (denominador não pode ser 0).

    A expressão
    $$\frac{x^2 - 5x}{x^2 - 9} = \frac{x(x-5)}{(x-3)(x+3)},$$
    muda de sinal nos pontos $-3, 0, 3$ e 5. Olhando caso a caso:

    (a) $x < -3$: Então $x < 0, x - 5 < 0, x + 3 < 0$ e $x - 3 < 0$ Logo a expressão é positiva.

    (b) $-3 < x < 0$. Então $x < 0, x - 5 < 0, x - 3 < 0$ e $x + 3 > 0$. Logo a expressão é negativa.

    (c) $0 < x < 3$. Então $x > 0, x - 3 < 0, x + 3 > 0, x - 5 < 0$. Logo a expressão é positiva.

    (d) $3 < x < 5$. Então $x > 0, x - 3 > 0, x + 3 > 0$ e $x - 5 < 0$. Logo a expressão é negativa.

    (e) $x > 5$. Então $x > 0, x - 3 > 0, x + 3 > 0$ e $x - 5 > 0$. Logo a expressão é positiva.

O domínio então é

$$D = (-\infty, -3[\cup[0, 3[\cup[5, +\infty).$$

11.

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\
&= g(x)^2 + 4g(x) \\
&= (3x-5)^2 + 4(3x-5). \\
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\
&= 3f(x) - 5 \\
&= 3(x^2+4x) - 5.
\end{aligned}$$

12. (a) $\frac{(x^2)^4 x^5}{x^4 (x^3)^2} = \frac{x^8 x^5}{x^4 x^6} = \frac{x^{13}}{x^{10}} = x^3$.

(b) $3\ln(x+5) + \frac{1}{2}\ln(2x-7)$;

(c) $4\ln(x) - 3\ln(2x-1) - 8\ln(7x-5)$;

(d) $\frac{1}{2} \cdot (-2) = -1$;

(e) $\log_4\left(\frac{36}{5} \cdot \frac{10}{9}\right) = \log_4(8) = \log_4(4 \cdot 2) = \log_4 4 + \log_4 2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$;

(f) $\ln(1) + \log_2(2^3) = 0 + 3 = 3$.

13.

$$\begin{aligned}
6(5^{2x-9}) &= 24 \\
5^{2x-9} &= \frac{24}{6} = 4 \\
\ln(5^{2x-9}) &= \ln(4) \\
(2x-9)\ln(5) &= \ln(2^2) \\
2x-9 &= \frac{2\ln(2)}{\ln(5)} \\
x &= \frac{1}{2}\left(9 + \frac{2\ln(2)}{\ln(5)}\right) = \frac{9}{2} + \frac{\ln(2)}{\ln(5)}.
\end{aligned}$$

14. (a) Chame $e^x = y$. Então $e^{2x} = y^2$ e a equação fica

$$y^2 - 2y - 15 = 0,$$

que é apenas uma equação do segundo grau. Portanto y é um dos valores dados por

$$\frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 15}}{2} = 1 \pm \sqrt{1+15} = 1 \pm 4.$$

Note que $y = e^x > 0$, portanto y pode apenas ser o valor positivo: $y = 1 + 4 = 5$. Então $x = \ln(5)$.

(b)

$$\begin{aligned}
\log_2(x+35) - \log_2 x &= 3 \\
\log_2\left(\frac{x+35}{x}\right) &= 3 \\
\frac{x+35}{x} &= 2^3 = 8 \\
x + 35 &= 8x \\
35 &= 7x \\
x &= \frac{35}{7} = 5.
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\log_6(x-11) + \log_6(x-6) &= 2 \\
\log_6(x-11)(x-6) &= 2 \\
\log_6(x^2 - 17x + 66) &= 2 \\
x^2 - 17x + 66 &= 6^2 = 36 \\
x^2 - 17x + 30 &= 0,
\end{aligned}$$

logo

$$x = \frac{17+13}{2} = 15 \text{ ou } x = \frac{17-13}{2} = 2.$$

(d) Chame $y = \ln(x)$. Como $\ln(x^2) = 2\ln(x) = 2y$, a equação fica

$$y^2 = 2y.$$

Então $y = 2 \implies \ln(x) = 2 \implies x = e^2$. A outra possibilidade $y = 0$ nos dá $x = e^0 = 1$.

(e)

$$\begin{aligned}
2\ln(x) - \ln(x+2) &= 0 \\
\ln\left(\frac{x^2}{x+2}\right) &= 0 \\
\frac{x^2}{x+2} &= 1 \\
x^2 - x - 2 &= 0 \\
x &= 2.
\end{aligned}$$

A outra possibilidade ($x = -1$) não é válida, pois temos $\ln(x)$ na equação e o domínio de ln é $\mathbb{R}_+^*$.

(f)

$$\begin{aligned}
\ln(x-3)+\ln(x+1) &= \ln(x+7)\\
\ln((x-3)(x+1)) &= \ln(x+7)\\
(x-3)(x+1) &= x+7\\
x^2-2x-3 &= x+7\\
x^2-3x-10 &= 0\\
x &= 5.
\end{aligned}$$

A outra possibilidade ($x = 2$) não é válida, pois temos $\ln(x-3)$ na equação e o domínio de ln é $\mathbb{R}_+^*$.