Introdução ao Cálculo - MAW117
Rogério Lourenço - rogerio.lourenco.im.ufrj@gmail.com
Gabarito Lista Substituiva

1. (a) Temos que
$$x^4 - a^4 = (x-a)\underbrace{(x^3 + ax^2 + a^2x + a^3)}_{=p(x)} + \underbrace{0}_{=q(x)}.$$
   (b) Temos que
$$x^3 = (x-a)\underbrace{(x^2 + ax + a^2)}_{=p(x)} + \underbrace{a^3}_{=q(x)}.$$

2. Como
$$3x^3 + 30x^2 + 54x + k = (3x+6)(x^2 + 8x + 2) + (k - 12),$$
então $3x + 6$ será um fator se $k - 12 = 0$, isto é, $k = 12$.

3. Se x_1 e x_2 são as raízes, então
$$\begin{aligned} a(x-x_1)(x-x_2) &= a(x^2 + x(-x_1 - x_2) + x_1x_2) \\ &= ax^2 + xa(-x_1 - x_2) + ax_1x_2 \\ &= ax^2 + bx + c, \end{aligned}$$
Logo
$$a(-x_1 - x_2) = b \text{ e } ax_1x_2 = c.$$
   (a) Pela observação acima,
$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}.$$
   (b) Temos também
$$x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$
   (c) Se $x_1 = -x_2$, então
$$-2m = \frac{-b}{a} = x_1 + x_2 = 0 \implies m = 0.$$

4. Se o polinômio de grau 3 tem raízes reais x_1, x_2 e x_3 e a como coeficiente de grau 3, então
$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx + d &= a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \\ &= a(x-x_1)(x^2 + x(-x_2 - x_3) + x_2x_3) \\ &= a(x^3 + x^2(-x_2 - x_3 - x_1) + x(x_2x_3 + x_2x_1 + x_1x_3) - x_1x_2x_3). \end{aligned}$$
Igualando os termos de mesmo grau, obtemos as equações desejadas:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= \frac{-b}{a}; \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= \frac{c}{a}; \\ x_1x_2x_3 &= \frac{-d}{a}. \end{cases}$$

5. (a)

$$(2x+3)^2 \leq 4 \implies -2 \leq 2x+3 \leq 2 \implies \frac{-5}{2} \leq x \leq \frac{-1}{2}.$$

(b) Temos que

$$4x^2 - 4x - 3 = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

Assim, olhando para o sinal de cada termo, temos que

	$x < \frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{2} < x < \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2} < x < 5$	$5 < x$
$x-5$	-	-	-	+
$x-\frac{3}{2}$	-	-	+	+
$x+\frac{1}{2}$	-	+	+	+
$\frac{x-5}{4x^2-4x-3}$	-	+	-	+

Temos então que a desigualdade se observa para todo x no conjunto

$$\left(-\infty, \frac{-1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 5\right).$$

(c) Considere primeiro o caso $x < 2$. Então $x - 2 < 0$ e $x - 5 < -3 < 0$, logo a inequação se torna

$$\frac{9}{(5-x)-3} > 2 - x \implies \frac{9}{2-x} > 2 - x.$$

Como $2 - x > 0$, temos que

$$9 > (2-x)^2 \implies -3 < 2 - x < 3 \implies -1 < x < 5.$$

Juntando com a hipótese inicial, temos que $x \in (-1; 2)$.

Agora, se $x \in (2; 5)$, então $x - 2 > 0$ e $x - 5 < 0$. A inequação se torna

$$\frac{9}{(5-x)-3} > x - 2 \implies \frac{9}{2-x} > x - 2.$$

Agora observe que $x-2 > 0$ e portanto $2-x < 0$. Mas então o termo do lado esquerdo é negativo, enquanto que o lado direito é positivo, mostrando que não há soluções no intervalo $(2; 5)$.

Considere agora $x > 5$. Então $x - 2 > 3 > 0$ e $x - 5 > 0$, então

$$\frac{9}{(x-5)-3} = \frac{9}{x-8} > x - 2.$$

Se $5 < x < 8$, temos uma situação como a anterior, logo, se houver solução, temos que ter $x > 8$.

Assumindo então $x > 8$, temos

$$\begin{aligned} & 9 > (x-8)(x-2) = x^2 - 10x + 16 \\ \implies & x^2 - 10 + 7 < 0 \\ \implies & x \in \left(5 - 3\sqrt{2}; 5 + 3\sqrt{2}\right) \cap (8; +\infty), \end{aligned}$$

isto é,
$$x \in (8; 5 + 3\sqrt{2}).$$
Juntando então com o caso inicial, temos que a inequação inicial é válida para
$$x \in (-1; 2) \cup (8; 5 + 3\sqrt{2}).$$

(d) Temos que resolver
$$\sqrt{1 - 3x} - \sqrt{5 + x} > 1 \implies \sqrt{1 - 3x} > 1 + \sqrt{5 + x}.$$
Como as raízes tem que ser reais, os termos dentro das raízes têm que ser não-negativos. Portanto
$$1 - 3x \geq 0 \implies x \leq \frac{1}{3}$$
e
$$5 + x \geq 0 \implies x \geq -5.$$
Ou seja, para começar, temos que considerar apenas valores no intervalo $\left[-5, \frac{1}{3}\right]$.
Agora, como o termo do lado esquerdo da inequação é positivo (já que é maior do que 1), podemos elevar ao quadrado ambos os lados:
$$1 - 3x > 1 + (5 + x) + 2\sqrt{5 + x} \implies -5 - 4x > 2\sqrt{5 + x} \geq 0.$$
Como a expressão acima tem que ser não-negativa, temos que $-5 - 4x > 0 \implies x < \frac{-5}{4}$, o que permite restringir o intervalo inicial para
$$\left[-5; \frac{-5}{4}\right].$$
Sendo ambos os lados não-negativos, podemos elevar os dois lados ao quadrado:
$$25 + 40x + 16x^2 > 4x + 20 \implies 16x^2 + 36x + 5 > 0.$$
A inequação acima é válida para
$$x \in \left(-\infty; \frac{-9 - \sqrt{61}}{8}\right) \cup \left(\frac{-9 + \sqrt{61}}{8}; +\infty\right).$$
Lembrando que já temos uma restrição para os possíveis valores de x, temos que a inequação inicial é valida para
$$x \in \left[-5; \frac{-9 - \sqrt{61}}{8}\right).$$

6. Seja $y = \arccos(x)$. Então $x = \cos(y)$ e portanto

$$1 - x^2 = 1 - \cos(y)^2 = \sin(y)^2.$$

Como $x \in [-1; 1]$, temos que $y \in [0; \pi]$ e portanto $\sin(y) \in [0; 1]$. Logo

$$\sqrt{1 - x^2} = \sin(\arccos(x)).$$

7. Observando que foi feito um comentário em sala de que o anunciado estava errado: deve-se mostrar que a desigualdade é válida para todo $n \in \mathbb{N}$ e para $x > -1$ (essa restrição em x nos dá que $1 + x > 0$).

   Considere o caso $n = 1$. Nesse caso a desigualdade é válida, pois

$$(1 + x)^1 = 1 + x = 1 + 1 \cdot x \geq 1 + 1 \cdot x.$$

   Agora façamos o passo de indução: suponha que seja válida para n. Vamos mostrar que isso implica que também é válida para $n + 1$. Para isso, note que

$$\begin{aligned} (1 + x)^{n+1} &= (1 + x)(1 + x)^n \\ &\geq (1 + x)(1 + nx) \\ &= 1 + nx + x + nx^2 \\ &= 1 + (n + 1)x + nx^2 \\ &\geq 1 + (n + 1)x, \end{aligned}$$

   já que $nx^2 \geq 0$, demonstrando o resultado.