

Introdução ao Cálculo - MAW117

Rogério Lourenço - rogerio.lourenco.im.ufrj@gmail.com

Gabarito da Lista Complementar 2

1. O domínio de ambas as funções é o conjunto dos inteiros entre 5 e 30, inclusive:

$$D = \{5, 6, \dots, 30\}.$$

Em reais, $p : D \rightarrow \mathbb{R}$ e $C : D \rightarrow \mathbb{R}$, com

$$x \in D \mapsto p(x) = \begin{cases} 100, & \text{se } x \leq 20; \\ 100 - 2(x - 20), & \text{se } x > 20. \end{cases}$$

O total arrecadado é o preço individual vezes o número de pessoas:

$$x \in D \mapsto C(x) = x \cdot p(x) = \begin{cases} 100x, & \text{se } x \leq 20; \\ 100x - 2(x - 20)x, & \text{se } x > 20. \end{cases}$$

2. (a) $A : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, onde

$$(x, y) \mapsto A(x, y) = xy$$

e $P : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, onde

$$(x, y) \mapsto P(x, y) = 2x + y.$$

- (b) Como $P(x, y) = 2x + y = 200$, então $y = 200 - 2x$ e portanto podemos definir $a : [0, 100] \rightarrow \mathbb{R}$ (pois y tem que ser positivo) e

$$a(x) = A(x, 200 - 2x) = x(200 - 2x) = -2x^2 + 200x.$$

- (c) Dessa vez, a partir de $2x + y = 200$, tomamos $x = \frac{200-y}{2}$. Então definimos $b : [0, 200] \rightarrow \mathbb{R}$ (pois x tem que ser positivo) e

$$b(y) = A\left(\frac{200-y}{2}, y\right) = \frac{200-y}{2}y = \frac{200y - y^2}{2}.$$

3. H é a receita total, dos dois produtos.

$$H(t) = 1.5t(1-t) + t^2(1-t) = (1-t)t(1.5+t).$$

4. H é o aumento da população no ano.

$$H(t) = t^3 - t - t^2.$$

5. H é o valor total das ações que essa pessoa tem.

$$H(t) = (t^3 + t) \frac{1}{t^2 + 1} = \frac{t(t^2 + 1)}{t^2 + 1} = t.$$

6. H é a quantidade total de monóxido de carbono emitida no instante t .

$$H(t) = g(f(t)) = 3(x^2 - 1) + 1 = 3x^2 - 2.$$

7. $f \circ g$ é a receita da empresa no instante t .
8. D é o número de mensagens autênticas (isto é, que não são spam) que foram enviadas no ano t .

P é a fração das mensagens enviadas no ano t que são spam.

Temos que

$$f(2017) = 1,54 \cdot 7^2 + 7,1 \cdot 7 + 31,4 = 156,56$$

e

$$g(2017) = 1,2 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7 + 14,5 = 115,3.$$

Então

$$D(2017) = f(2017) - g(2017) = 156,56 - 115,3 = 41,26$$

e

$$P(2017) = \frac{g(2017)}{f(2017)} = \frac{115,3}{156,56} \approx 0,736$$

9. Em janeiro a receita foi

$$\begin{aligned} R(P(0)) &= R(55) \\ &= -\frac{3 \cdot 55^3}{5000} + \frac{9 \cdot 55^2}{50} \\ &= 444,675. \end{aligned}$$

Junho corresponde a $t = 6$, então

$$\begin{aligned} R(P(6)) &= R\left(\frac{10}{81}6^3 - \frac{10}{3}6^2 + \frac{200}{9}6 + 55\right) \\ &= R(95) \\ &= -\frac{3 \cdot 95^3}{5000} + \frac{9 \cdot 95^2}{50} \\ &= 1110,075. \end{aligned}$$

Em dezembro:

$$\begin{aligned} R(P(11)) &= R\left(\frac{10}{81}11^3 - \frac{10}{3}11^2 + \frac{200}{9}11 + 55\right) \\ &= R(60,432) \\ &= 524,945. \end{aligned}$$