

Introdução ao Cálculo - MAW117

Rogério Lourenço - rogerio.lourenco.im.ufrj@gmail.com

Lista Substituíva

Data de entrega: 22 de novembro de 2017

1. Ache os polinômios p e q , com coeficientes reais, tais que (a é real):

(a) [0,5 pontos]

$$x^4 - a^4 = (x - a)p(x) + q(x).$$

(b) [0,5 pontos]

$$x^3 = (x - a)p(x) + q(x).$$

2. [0,5 ponto] Encontre k real de modo que $3x^3 + 30x^2 + 54x + k$ tenha $3x + 6$ como fator.

3. Sejam x_1 e x_2 as duas raízes reais da equação

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

onde a, b e c são reais, $a \neq 0$.

Mostre que

(a) [0,5 ponto] A soma das raízes é

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}.$$

(b) [0,5 ponto] O produto das raízes é

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

(c) [0,5 ponto] Usando os resultados acima, ache m real para que as raízes reais x_1 e x_2 da equação

$$x^2 - 2mx + m - 1 = 0$$

sejam opostas, isto é, $x_1 = -x_2$.

4. [1,0 ponto] Sejam a, b, c, d reais, $a \neq 0$. Considere a equação

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Suponha que a equação acima admita 3 soluções reais x_1, x_2 e x_3 . Mostre que valem as equações

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 &= \frac{-d}{a}; \\ x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 &= \frac{c}{a}; \\ x_1 + x_2 + x_3 &= \frac{-b}{a}. \end{aligned}$$

Dica: Dois polinômios são iguais se, e somente se, eles têm as mesmas raízes e têm o mesmo coeficiente no termo de maior grau.

5. Resolva as desigualdades

(a) [1,0 ponto]

$$(2x + 3)^2 \leq 4;$$

(b) [1,0 ponto]

$$\frac{x - 5}{4x^2 - 4x - 3} < 0;$$

(c) [1,0 ponto]

$$\frac{9}{|x - 5| - 3} > |x - 2|;$$

(d) [1,0 ponto]

$$\sqrt{1 - 3x} - \sqrt{5 + x} > 1.$$

6. [1,0 ponto] Seja $x \in [-1, 1]$. Mostre que

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}.$$

7. [1,0 ponto] Prove que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, (1 + x)^n \geq 1 + nx.$$