Matemática II - MAC126
Rogério Lourenço
rogerio.lourenco.im.ufrj@gmail.com
https://rogerio-lourenco.github.io/pagina
Gabarito 2 - 30 de novembro de 2017

1. Procurando os pontos críticos, obtemos o sistema

$$\begin{cases} 3x^2 + 6x - 9 = 0; \\ 3y^2 - 12 = 0. \end{cases}$$

Resolvendo as equações, obtemos que $x \in \{-3; 1\}$ e $y \in \{-2; 2\}$. Portanto temos 4 pontos críticos:

$$(-3; -2), (-3; 2), (1; -2), (1; 2).$$

A matriz das segundas derivadas é

$$\begin{bmatrix} 6x + 6 & 0 \\ 0 & 6y \end{bmatrix}.$$

- No ponto $(-3; -2)$, temos que

$$\det \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix} = 144 > 0$$

e como $-12 < 0$, esse é um ponto de máximo local.

- No ponto $(-3; 2)$, temos que

$$\det \begin{bmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} = -144 < 0$$

e portanto é um ponto de sela.

- No ponto $(1; -2)$, temos que

$$\det \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & -12 \end{bmatrix} = -144 < 0$$

e portanto é um ponto de sela.

- No ponto $(1; 2)$, temos que

$$\det \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} = 144 > 0$$

e como $12 > 0$, este é um ponto de mínimo local.

2. A função de erro quadrático para n pontos com a curva desejada é dada por
$$S(a,b)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{ax_i+b-y_i}{\sigma_i}\right)^2.$$
Essa função tem um mínimo quando $\nabla S=(\partial_a S;\partial_b S)=0$.

Temos que
$$\begin{aligned}\partial_a S &= \sum_{i=1}^{n}\frac{2(ax_i+b-y_i)x_i}{\sigma_i^2}\\ &= 2\sum_{i=1}^{n} a\frac{x_i^2}{\sigma_i^2}+b\frac{x_i}{\sigma_i^2}-\frac{x_iy_i}{\sigma_i^2}\\ &= 2(aA+bB-V),\end{aligned}$$
onde
$$A=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{\sigma_i^2}, B=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sigma_i^2}, V=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_iy_i}{\sigma_i^2}.$$
Analogamente,
$$\begin{aligned}\partial_b S &= \sum_{i=1}^{n}\frac{2}{\sigma_i^2}(ax_i+b-y_i)\\ &= 2\sum_{i=1}^{n} a\frac{x_i}{\sigma_i^2}+b\frac{1}{\sigma_i^2}-\frac{y_i}{\sigma_i^2}\\ &= 2(aB+bC-M),\end{aligned}$$
onde
$$C=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma_i^2}, M=\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i}{\sigma_i^2}.$$
Temos então o sistema
$$\begin{cases} aA+bB=V;\\ aB+bC=M.\end{cases}$$
Então
$$b=\frac{VB-AM}{B^2-AC}, a=\frac{BM-VC}{B^2-AC}.$$
Usando os dados do problema, temos que
$$\begin{cases} A\approx 7473,05;\\ B\approx 563,89;\\ V\approx 8100,06;\\ C\approx 51,71;\\ M\approx 617,2.\end{cases}$$

Assim,
$$a \approx \frac{-70821,19}{-68459,48} \approx 1,03 \text{ e } b \approx \frac{-44823,63}{-68459,48} \approx 0,65.$$
Ou seja, a reta que melhor se adapta aos dados é
$$y = 1,03 \cdot x + 0,65.$$

3. A função que nos dá o erro quadrático que se adapta a curva desejada para n pontos é
$$S(a;b) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{ax_i + bx_i^3 - y_i}{\sigma_i} \right)^2.$$
Então
$$\partial_a S = 2(aA + bB - V) = 0,$$
onde
$$A = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}, B = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^4}{\sigma_i^2} \text{ e } V = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}.$$
Da mesma forma,
$$\partial_b S = 2(aB + bC - M) = 0,$$
onde
$$C = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^6}{\sigma_i^2} \text{ e } M = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^3 y_i}{\sigma_i^2}.$$
Temos então o sistema
$$\begin{cases} aA + bB = V; \\ aB + bC = M. \end{cases}$$
A solução é dada por
$$a = \frac{BM - VC}{B^2 - AC}, b = \frac{VB - AM}{B^2 - AC}.$$
Com os dados do problema, temos
$$\begin{cases} A \approx 7473,05 \\ B \approx 15790100 \\ C \approx 356337403,39 \\ V \approx 8100,06 \\ M \approx 1704239,13. \end{cases}$$
Então
$$a \approx 1,1514 \text{ e } b \approx -0,0003.$$
Ou seja, a melhor curva é dada por
$$y = 1,1514 \cdot x - 0,0003 \cdot x^3.$$

4. Note que, se $y = ax^b$, se considerarmos $Y = \ln(y)$ e $X = \ln(x)$, temos que

$$Y = \ln(y) = \ln(ax^b) = \ln(a) + b\ln(x) = \alpha + \beta X,$$

onde $\alpha = \ln(a)$ e $\beta = b$. Dessa forma, se calcularmos os logaritmos dos dados, podemos achar a reta que melhor se adapta a esses novos dados. Achando essa reta, isto é, achando α e β, obtemos $a = e^\alpha$ e $b = \beta$ desejados.

Temos então que

X	Y
0,693	1,224
1,099	1,361
1,792	1,758
1,946	1,872
2,197	2,293

Usando o resultado da questão 2 (utilizando $\sigma_i = 1$ para todo i), temos que

$$\begin{cases} A = \sum_{i=1}^n X_i^2 \approx 13,51; \\ B = \sum_{i=1}^n X_i \approx 7,73; \\ V = \sum_{i=1}^n X_i Y_i \approx 14,17; \\ C = \sum_{i=1}^n 1 = 5; \\ M = \sum_{i=1}^n Y_i \approx 8,51. \end{cases}$$

Portanto

$$\alpha \approx 0,692 \text{ e } \beta \approx 0,65.$$

Logo $b = \beta$ e $a = e^\alpha \approx 1,998$. Isto é, a curva desejada é

$$y = 1,998 \cdot x^{0,65}.$$

5. Montando a função

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = 4y - 2z + \lambda(2x - y - z - 2) + \mu(x^2 + y^2 - 1),$$

temos que os pontos críticos de F fornecem o sistema

$$\begin{cases} 2\lambda + 2\mu x = 0; \\ 4 - \lambda + 2\mu y = 0; \\ -2 - \lambda = 0; \\ 2x - y - z - 2 = 0; \\ x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos duas soluções. Uma é

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{\sqrt{13}}; \\ y = \frac{3}{\sqrt{13}}; \\ z = -2 - \frac{7}{\sqrt{13}}; \\ \lambda = 2; \\ \mu = \sqrt{13}. \end{cases}$$

A outra é

$$\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{13}}; \\ y = -\frac{3}{\sqrt{13}}; \\ z = -2 + \frac{7}{\sqrt{13}}; \\ \lambda = 2; \\ \mu = -\sqrt{13}. \end{cases}$$

Os valores de f nesses pontos são

$$f\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}, -2 - \frac{7}{\sqrt{13}}\right) = 4 + \frac{26}{\sqrt{13}} = 4 + 2\sqrt{13} \approx 11,2111,$$

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}, -2 + \frac{7}{\sqrt{13}}\right) = 4 - \frac{26}{\sqrt{13}} = 4 - 2\sqrt{13} \approx -3,2111.$$

O primeiro ponto nos dá então o maior valor e o segundo ponto o menor valor.