Introdução ao Cálculo - MAW117
Rogério Lourenço
rogerio.lourenco.im.ufrj@gmail.com
https://rogerio-lourenco.github.io/pagina
Gabarito da Prova Final - 6 de dezembro de 2017

1. Note que, se $x > 0$, então $f(x) = e^{3x} > 1$, em particular, $f(x) = e^{3x} > 0$ e portanto
$$g(f(x)) = 1.$$
Se $-1 < x \leq 0$, então $f(x) = 1 - x^2$ e portanto
$$\begin{aligned} -1 < x \leq 0 \quad &\Longrightarrow \quad 0 \leq x^2 < 1 \\ &\Longrightarrow \quad -1 < -x^2 \leq 0 \\ &\Longrightarrow \quad 0 < 1 - x^2 \leq 1 \end{aligned}$$
e assim
$$g(f(x)) = 1.$$
Agora, se $x < -1$, temos $f(x) = 1 - x^2$ e portanto
$$\begin{aligned} x < -1 \quad &\Longrightarrow \quad x^2 > 1 \\ &\Longrightarrow \quad -x^2 < -1 \\ &\Longrightarrow \quad 1 - x^2 < 0 \end{aligned}$$
e assim
$$g(f(x)) = -1.$$
Falta apenas ver que
$$g(f(-1)) = g(1 - (-1)^2) = g(1 - 1) = g(0) = 0.$$
Juntando as informações acima, temos
$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x > -1; \\ 0, \text{ se } x = -1; \\ -1, \text{ se } x < -1. \end{cases}$$

2. Se $x \leq 0$ então $y = f(x) = 1 - x^2 \leq 1$. Então
$$-x^2 = y - 1 \implies x^2 = 1 - y \implies x = -\sqrt{1 - y}.$$
Note o sinal, já que estamos assumindo que $x \leq 0$.
Agora, se $x > 0$, então $y = f(x) = e^{3x} > 1$ e portanto
$$\ln(y) = 3x \implies \frac{\ln(y)}{3} = x.$$
Juntando as informações acima, temos que $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por
$$f^{-1}(y) = \begin{cases} -\sqrt{1 - y}, \text{ se } y \leq 1; \\ \frac{\ln(y)}{3}, \text{ se } y > 1. \end{cases}$$

3. Primeiro, note que $n \geq 5$ nos dá que $2^n \geq 2^5 = 32 > 4$. Então, suponha que a desigualdade seja válida para $n \geq 5$. Vemos que também será válida para $n+1$, pois

$$\begin{aligned} 4(n+1) &= 4n+4 \\ &< 2^n+4 \\ &< 2^n+32 \\ &< 2^n+2^n \\ &= 2 \cdot 2^n \\ &= 2^{n+1}. \end{aligned}$$

Agora, falta apenas verificar que é válida para $n = 5$. Isso é fácil de ver, pois

$$4 \cdot 5 = 20 < 32 = 2^5.$$

4. Temos que

$$-2 < x^2 + 3x + 1 < 2.$$

A expressão $y = x^2 + 3x + 1$ descreve uma parábola (virada para cima) que corta a reta $y = 2$ nos pontos

$$x^2 + 3x + 1 = 2 \implies x \in \left\{ \frac{-3-\sqrt{13}}{2}, \frac{-3+\sqrt{13}}{2} \right\}.$$

Além disso, essa parábola não corta a reta $y = -2$, pois

$$9 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 9 - 12 = -3 < 0.$$

Como a parábola está aberta para cima, temos que ela está toda acima da reta $y = -2$ (isto é, $x^2 + 3x + 1 > -2, \forall x \in \mathbb{R}$) e está abaixo da reta $y = 2$ para os valores de x entre $(-3-\sqrt{13})/2$ e $(-3+\sqrt{13})/2$. Isto é,

$$(x^2 + 3x + 1)^2 < 4 \iff \frac{-3-\sqrt{13}}{2} < x < \frac{-3+\sqrt{13}}{2}.$$

5. Note que

$$h(j(x)) = h(2^{-x}) = 2(2^{-x})^3 = 2 \cdot 2^{-3x} = 2^{1-3x}.$$

Observe que a quantidade acima é menor do que 1 caso o exponente seja negativo, isto é,

$$1 - 3x < 0 \implies -3x < -1 \implies 3x > 1 \implies x > \frac{1}{3}.$$

Logo

$$w(h(j(x))) = 2 \cdot 2^{1-3x} = 2^{2-3x}.$$

Da mesma forma, se $x \leq \frac{1}{3}$, o exponente é positivo e portanto $h(j(x)) \geq 1$ e assim $w(h(j(x))) = 3$.

Juntando essas informações,

$$(w \circ h \circ j)(x) = \begin{cases} 2^{2-3x}, \text{ se } x > \frac{1}{3}; \\ 3, \text{ se } x \leq \frac{1}{3}. \end{cases}$$