Introdução ao Cálculo - MAW117
Rogério Lourenço
rogerio.lourenco.im.ufrj@gmail.com
https://rogerio-lourenco.github.io/pagina
Gabarito da Prova 1 - 20 de Setembro de 2017

1. O comprimento x pode ser qualquer valor real estritamente positivo. O valor do perímetro será um valor real, portanto $P : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$. Pela informação sobre a área, temos que

$$\frac{xy}{2} = 5. \tag{1}$$

O perímetro é a soma da base x com a altura y com o comprimento da hipotenusa, que é dada por $\sqrt{x^2 + y^2}$, usando o Teorema de Pitágoras. Logo

$$P = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Usando a equação 1, temos que $y = \frac{2 \cdot 5}{x} = \frac{10}{x}$. Substituindo isso na expressão para P, temos

$$P(x) = x + \frac{10}{x} + \sqrt{x^2 + \frac{100}{x^2}}.$$

2. O perímetro é dada pela soma dos lados horizontais (de comprimento x) com o comprimento das laterais (cada uma é metade do perímetro do círculo de raio r, isto é, $\frac{2\pi r}{2} = \pi r$).

Logo, o perímetro e área são dados por

$$P = 2\pi r + 2x = 400. \tag{2}$$

A área é a soma das áreas de cada semi-circulo lateral (cada um tem área $\frac{\pi r^2}{2}$) e a área do retângulo central (que é $2rx$). Logo

$$A = 2\frac{\pi r^2}{2} + 2rx = \pi r^2 + 2rx.$$

Usando a equação 2, temos $x = \frac{400 - 2\pi r}{2}$. Logo, substituindo na expressão acima, temos

$$A(r) = \pi r^2 + 2r\frac{400 - 2\pi r}{2} = \pi r^2 + 400r - 2\pi r^2 = 400r - \pi r^2 = r(400 - \pi r),$$

onde r tem que ser estritamente positivo. Como temos que ter $x > 0$, segue que $0 < r < \frac{200}{\pi}$. Logo

$$A : \left]0, \frac{200}{\pi}\right[\to \mathbb{R}_+^*.$$

3. O termo dentro da raiz tem que ser não-negativo. Logo $9 - x^2 \geq 0$ e portanto $x^2 \leq 9$. Logo $|x| \leq 3$, isto é,

$$D = [-3, 3].$$

Se $y = f(x) = \sqrt{9 - x^2}$, então $y > 0$ e $y^2 = 9 - x^2$, isto é,

$$y^2 + x^2 = 3^2,$$

isto é, (x, y) faz parte do semi-círculo superior de centro na origem e raio 3. Portanto $0 \leq y \leq 3$, isto é, a imagem de f é $[0, 3]$.

4.

$$\begin{aligned}
\log_b\left(\frac{b^5x^2}{y^3}\right) &= \log_b(b^5x^2) - \log_b(y^3) \\
&= \log_b(b^5) + \log_b(x^2) - \log_b(y^3) \\
&= 5\log_b b + 2\log_b x - 3\log_b y \\
&= 5 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{5}{2} - 3 \cdot \frac{2}{3} \\
&= 5 + 5 - 2 \\
&= 8.
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
5 \cdot 2^{7t-4} &= 30 \\
2^{7t-4} &= 6 \\
7t - 4 &= \log_2 6 \\
t &= \frac{1}{7}\left(\log_2(2 \cdot 3) + 4\right) \\
t &= \frac{1}{7}\left(\log_2 2 + \log_2 3 + 4\right) \\
t &= \frac{1}{7}\left(1 + \log_2 3 + 4\right) \\
t &= \frac{1}{7}\left(5 + \log_2 3\right).
\end{aligned}$$

6. Para a função estar bem definida, o domínio precisa ser tal que o argumento dentro da raiz seja não negativo. Portanto $4x - 9 \geq 0$, logo $x \geq \frac{9}{4}$, isto é, o domínio é $\left[\frac{9}{4}, +\infty\right)$. Essa função cresce indefinidamente a partir de $f(9/4) = \sqrt{4 \cdot \frac{9}{4} - 9} = 0$, logo, para ser inversível, basta tomar a imagem $[0, +\infty)$ como o contradomínio.

   A inversa é $f^{-1} : [0, +\infty) \to \left[\frac{9}{4}, +\infty\right)$, e pode ser calculada por

$$y = \sqrt{4x - 9} \implies 4x - 9 = y^2 \implies x = \frac{y^2 + 9}{4},$$

isto é,

$$f^{-1}(y) = \frac{y^2 + 9}{4}.$$