Introdução ao Cálculo - MAW117
Rogério Lourenço - rogerio.lourenco.im.ufrj@gmail.com
Gabarito da Lista Complementar 1

1. (a) $f(0) = 0^2 + 1 = 1$;
   (b) $g(4) = \sqrt{|4|} = \sqrt{4} = 2$;
   (c) Como $0 < 1$, $h(0) = 0 - 1 = -1$;
   (d) Como $3/2 \geq 1$, $h(3/2) = 3/2 + 1 = 5/2$;
   (e) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{|x^2+1|} = \sqrt{x^2+1}$, já que $x^2 + 1 \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$;
   (f) $(f \circ g)(x) = \left(\sqrt{|x|}\right)^2 + 1 = |x| + 1$;
   (g) Como $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2+1} \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$, temos que
   $$(h \circ g \circ f)(x) = (g \circ f)(x) + 1 = \sqrt{x^2+1} + 1.$$
   (h) Novamente, como $(f \circ g)(x) = |x| + 1 \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$,
   $$(h \circ f \circ g)(x) = (|x| + 1) + 1 = |x| + 2.$$

2. Não é possível pois para cada x, há dois valores possíveis para y. No entanto, podemos escrever duas funções tais que $(x, y(x)) \in S$, para todo x do domínio. As funções são $y_1 : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ e $y_2 : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, dadas por
   $$x \in [-2, 2] \mapsto y_1(x) = 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \in \mathbb{R}$$
   e
   $$x \in [-2, 2] \mapsto y_2(x) = -3\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \in \mathbb{R}.$$
   As imagens são $y_1([-2, 2]) = [0, 3]$ e $y_2([-2, 2]) = [-3, 0]$.

3. (a) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}; x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$;
   (b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto g(x) = \sqrt{x^2+1}$;
   (c) $h : \mathbb{R} \setminus (-1; 1) \to \mathbb{R}; x \mapsto h(x) = \sqrt{x^2-1}$;
   (d) $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto j(x) = \sqrt{|x^2-1|}$;

4. $p : \mathbb{R} \to [0, 3] \times [0, 5] \times [0, 2.5]$.

5. $T : [0, 2] \times [0, 5] \to \mathbb{R}$.

6. (a) Se v for sobrejetiva, significa que o vôo está cheio.
   (b) Se v não for injetiva, significa que a companhia aérea vendeu o mesmo assento para dois passageiros diferentes.

(c) $v^{-1} : A \to I$ é a função que, dado um assento, retorna a identidade do passageiro nesse assento.

7. Para calcular $R(2017)$ e $R(2018)$, temos que obter os valores de α e β. Para isso, tome dois anos em que temos a receita, por exemplo, 2010 e 2011. Então
$$\begin{cases} R(2010) = 2010\alpha + \beta = 1; \\ R(2011) = 2011\alpha + \beta = 1,23. \end{cases}$$
Portanto, subtraindo a primeira equação da segunda, temos que
$$(2011\alpha + \beta) - (2010\alpha + \beta) = 1,23 - 1 \implies \alpha = 0,23.$$
Tendo o valor de α, temos
$$2010\alpha + \beta = 1 \implies \beta = 1 - 2010 \cdot 0,23 = 1 - 462,3 = -461,3$$
Portanto
$$R(2017) = 2017 \cdot 0,23 - 461,3 = 2,61$$
e
$$R(2018) = 2018 \cdot 0,23 - 461,3 = 2,84.$$
Agora, para termos $R(x) \geq 4$, temos que ter
$$\alpha x + \beta \geq 4 \implies x \geq \frac{4 - \beta}{\alpha} = \frac{4 + 461,3}{0,23} \approx 2023.$$

8. (a) O gráfico de g é igual ao gráfico de f transladado c unidades na vertical (se $c > 0$, é transladado para cima, se $c < 0$ é transladado para baixo).

   (b) O gráfico de g é igual ao gráfico de f escalonado por um fator c, isto é, se $|c| > 1$, o gráfico aumenta por esse fator. Se $|c| < 1$, o gráfico diminui por esse fator.

   Mais: se $c < 0$, o gráfico é invertido.

   (c) O gráfico de g é o gráfico de f transladado na horizontal. Se $c > 0$, a translação é para a esquerda. Se $c < 0$, a translação é para a direita.