Introdução ao Cálculo - MAW117
Rogério Lourenço
rogerio.lourenco.im.ufrj@gmail.com
https://rogerio-lourenco.github.io/pagina
Gabarito da Prova 2 - 22 de novembro de 2017

1. Faremos por indução. O caso $n = 1$ é fácil de verificar: $S(1) = 1^2 = 1$ e por outro lado
$$\frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{2 \cdot 3}{6} = 1.$$
Suponha agora que é válido para n. Temos que
$$\begin{aligned}
S(n+1) &= 1^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 \\
&= S(n) + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{(n+1)\left[n(2n+1) + 6(n+1)\right]}{6} \\
&= \frac{(n+1)\left[2n^2 + n + 6n + 6\right]}{6} \\
&= \frac{(n+1)\left[2n^2 + 3n + 4n + 6\right]}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6},
\end{aligned}$$
comprovando a fórmula para o caso $n+1$.

2. Invertendo, temos
$$\begin{aligned}
y &= \frac{(\cos(x)+1)^3}{8} \\
8y &= (\cos(x)+1)^3 \\
\sqrt[3]{8y} - 1 &= \cos(x) \\
\arccos\left(2\sqrt[3]{y} - 1\right) &= x.
\end{aligned}$$
Logo, a função inversa $f^{-1} : [0,1] \to [0,\pi]$ é dada por
$$f^{-1}(y) = \arccos\left(2\sqrt[3]{y} - 1\right).$$

3. Os termos mudam de sinal nos pontos $-1, -1/2, 0$ e 1. Nos pontos $0, -1$ e 1 a expressão é 0. No ponto $-1/2$ a expressão não está bem definida (pois nesse ponto $2x + 1 = 0$).

Olhando os sinais em cada região, temos:

Termo	$x < -1$	$-1 < x < -1/2$	$-1/2 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
x	-	-	-	+	+
$x - 1$	-	-	-	-	+
$x + 1$	-	+	+	+	+
$2x + 1$	-	-	+	+	+
$\frac{x(x-1)(x+1)}{2x+1}$	+	-	+	-	+

Portanto, a desigualdade é válida em

$$(-\infty, -1) \cup (-1/2, 0) \cup (1, +\infty).$$

4. Se $x \leq -2$, então $x - 1 \leq 0$ e $x + 2 \leq 0$ e portanto a desigualdade se torna

$$(-x + 1) + x + 2(-x - 2) = -2x - 3 \geq 3 \implies -2x \geq 6 \implies x \leq -3.$$

Juntando então, temos que $x \leq -3$.

Tome agora $-2 < x \leq 1$. Então $x - 1 \leq 0$ e $x + 2 > 0$ e portanto a desigualdade se torna

$$(-x + 1) + x + 2(x + 2) = 5 + 2x \geq 3 \implies 2x \geq -2 \implies x \geq -1.$$

Ou seja $-1 \leq x \leq 1$.

Por fim, tome $x > 1$. Então $x - 1 > 0$ e $x + 2 > 0$ e portanto a desigualdade se torna

$$(x - 1) + x + 2(x + 2) = 4x + 3 \geq 3 \implies 4x \geq 0 \implies x \geq 0,$$

de onde concluímos que $x > 1$.

Juntando os 3 casos, temos que os valores de x que satisfazem a inequação é

$$(-\infty, -3] \cup [-1, 1] \cup (1, +\infty).$$

5. Se tanto m quanto $-m$ são raízes, então

$$\begin{cases} am^4 + bm^3 + cm^2 + dm + e = 0; \\ am^4 - bm^3 + cm^2 - dm + e = 0. \end{cases}$$

Somando as equações, obtemos

$$2am^4 + 2cm^2 + 2e = 0 \implies a = \frac{-2e - 2cm^2}{2m^4} = \frac{-e - cm^2}{m^4}.$$