Matemática II - MAC126
Rogério Lourenço
rogerio.lourenco.im.ufrj@gmail.com
https://rogerio-lourenco.github.io/pagina
Gabarito 1 - 24 de outubro de 2017

1. Abrindo o parênteses, temos

$$\begin{aligned}
\int \sqrt[3]{x} \cdot \left(2x - \frac{1}{x}\right) dx &= \int x^{1/3} \cdot \left(2x^1 - x^{-1}\right) dx \\
&= \int \left(2x^{4/3} - x^{-2/3}\right) dx \\
&= 2\frac{x^{7/3}}{7/3} - \frac{x^{1/3}}{1/3} + C \\
&= \frac{6}{7} \cdot x^{7/3} - 3x^{1/3} + C.
\end{aligned}$$

2. Fazendo a substituição $u = \sqrt{x}$, temos que

$$du = \frac{1}{2} \cdot x^{-1/2}\, dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = \frac{1}{2u}\, dx \implies 2u\, du = dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos\left(\sqrt{x}\right)}{4\sqrt{x}}\, dx &= \int \frac{\cos(u)}{4u} \cdot 2u\, du \\
&= \int \frac{\cos(u)}{2}\, du \\
&= \frac{1}{2} \int \cos(u)\, du \\
&= \frac{1}{2} \sin(u) + C \\
&= \frac{1}{2} \sin\left(\sqrt{x}\right) + C.
\end{aligned}$$

3. Usando $f' = x$ e $g = \ln(|2x|)$, temos que $f = \frac{x^2}{2}$ e $g' = \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{1}{x}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int x \cdot \ln(|2x|)\, dx &= \int f' \cdot g\, dx \\
&= f \cdot g - \int f \cdot g'\, dx \\
&= \frac{x^2}{2} \ln(|2x|) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}\, dx \\
&= \frac{x^2}{2} \ln(|2x|) - \int \frac{x}{2}\, dx \\
&= \frac{x^2}{2} \ln(|2x|) - \frac{x^2}{4} + C.
\end{aligned}$$

4. Temos que

$$f'(x) = (e^x - e^{-2x})^2 = e^{2x} - 2e^{-x} + e^{-4x}.$$

Logo f é uma das funções da família

$$\int \left(e^{2x} - 2e^{-x} + e^{-4x}\right) dx = \frac{e^{2x}}{2} + 2e^{-x} - \frac{e^{-4x}}{4} + C,$$

bastando apenas achar o valor apropriado para a constante C. Então

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{e^{2x}}{2} + 2e^{-x} - \frac{e^{-4x}}{4} + C \\ \Longrightarrow f(0) &= \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{4} + C \\ &= \frac{9}{4} + C = 3 \\ C &= 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4} \\ \Longrightarrow f(x) &= \frac{e^{2x}}{2} + 2e^{-x} - \frac{e^{-4x}}{4} + \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

5. Temos que derivar cada alternativa e ver qual das derivadas é igual a $\frac{1}{1-x^2}$:

(a)

$$\big(\ln(|1-x^2|) + C\big)' = \frac{1}{1-x^2} \cdot (-2x) = \frac{-2x}{1-x^2}.$$

(b)

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{|x+1|}{|x-1|}\right) + C\right]' &= \left[\frac{1}{2}\left(\ln(|x+1|) - \ln(|x-1|)\right) + C\right]' \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{(x-1)-(x+1)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{-2}{x^2-1} \\ &= \frac{1}{1-x^2}. \end{aligned}$$

(c)

$$\left(x + \frac{1}{3x^3} + C\right)' = \left(x + \frac{1}{3}x^{-3} + C\right)' = 1 + \frac{-3}{3}x^{-4} = 1 - \frac{1}{x^4}.$$

Temos então que a alternativa correta é a (b).

6. Separe a integral em duas partes:

$$\int_1^e \frac{x^2 + \ln(\sqrt{x})}{x^3}\,dx = \int_1^e \frac{x^2}{x^3}\,dx + \int_1^e \frac{\ln(\sqrt{x})}{x^3}\,dx.$$

A primeira parcela é simplesmente

$$\begin{aligned}
\int_1^e \frac{x^2}{x^3}\,dx &= \int_1^e \frac{1}{x}\,dx \\
&= \ln|x|\Big|_1^e \\
&= \ln(e) - \ln(1) \\
&= 1 - 0 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Para a segunda parcela, observe que $\ln(\sqrt{x}) = \ln(x^{1/2}) = \frac{1}{2}\cdot\ln(x)$. Como estamos apenas tomando valores de x entre 1 e e, $x = |x|$, isto é,

$$\int_1^e \frac{\ln(\sqrt{x})}{x^3}\,dx = \frac{1}{2}\int_1^e \frac{\ln(|x|)}{x^3}\,dx.$$

Fazendo a substituição $u = \ln(|x|)$, temos $du = \frac{1}{x}\,dx$. Além disso, $x^2 = |x|^2 = (e^u)^2 = e^{2u}$ e o intervalo em u passa a ser de $\ln(1) = 0$ a $\ln(e) = 1$:

$$\int_1^e \frac{\ln(|x|)}{x^3}\,dx = \int_1^e \frac{\ln(|x|)}{x^2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{u}{e^{2u}}\,du = \int_0^1 ue^{-2u}\,du.$$

Resolvendo por partes:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 ue^{-2u}\,du &= u\cdot\frac{e^{-2u}}{-2}\bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{-2u}}{-2}\,du \\
&= \frac{-1}{2e^2} + \frac{1}{2}\,\frac{e^{-2u}}{-2}\bigg|_0^1 \\
&= \frac{-1}{2e^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2e^2} + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{-3}{4e^2} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{e^2 - 3}{4e^2}.
\end{aligned}$$

Juntanto tudo, obtemos:

$$\int_1^e \frac{x^2 + \ln(\sqrt{x})}{x^3}\,dx = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{e^2 - 3}{4e^2} = 1 + \frac{e^2 - 3}{8e^2} = \frac{9e^2 - 3}{8e^2}.$$

7. Primeiro, fazemos a substituição

$$u = e^x.$$

Com isso, $du = e^x\,dx = \frac{1}{e^{-x}}\,dx$ e o intervalo em u fica sendo entre os pontos

$$e^{\ln(\pi)} = \pi \text{ e } e^{\ln(2\pi)} = 2\pi.$$

Isto é,

$$\int_{\ln(\pi)}^{\ln(2\pi)} \frac{(\cos(e^x))^2 \cdot (\sin(e^x))^3}{e^{-x}}\,dx = \int_{\pi}^{2\pi} \cos(u)^2 \cdot \sin(u)^3\,du.$$

Com outra substituição

$$t = \cos(u)$$

temos $dt = -\sin(u)\,du$ e o intervalo em t vai de $\cos(\pi) = -1$ a $\cos(2\pi) = 1$:

$$\begin{aligned}
\int_{\ln(\pi)}^{\ln(2\pi)} \frac{(\cos(e^x))^2 \cdot (\sin(e^x))^3}{e^{-x}}\,dx &= \int_{\pi}^{2\pi} \cos(u)^2 \cdot \sin(u)^3\,du \\
&= \int_{\pi}^{2\pi} \cos(u)^2 \cdot \underbrace{\sin(u)^2}_{=1-\cos(u)^2} \cdot \sin(u)\,du \\
&= \int_{\pi}^{2\pi} \cos(u)^2 \cdot (1-\cos(u)^2) \cdot \sin(u)\,du \\
&= \int_{-1}^{1} -t^2(1-t^2)\,dt \\
&= -\int_{-1}^{1} (t^2 - t^4)\,dt \\
&= -\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_{-1}^{1} \\
&= -\left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \left(\frac{(-1)}{3} - \frac{(-1)}{5}\right)\right] \\
&= -\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right) \\
&= -\frac{4}{15}.
\end{aligned}$$