Introdução ao Cálculo - MAW117
Rogério Lourenço
rogerio.lourenco.im.ufrj@gmail.com
https://rogerio-lourenco.github.io/pagina
Gabarito da Prova Final - 30 de novembro de 2017

1. Como x está entre 0 e 1, $\ln(x)$ é menor do que zero. Portanto, se $y > 0$ for tal que
$$y = \left(\frac{1}{\ln(x)}\right)^2,$$
então
$$\frac{1}{\ln(x)} = -\sqrt{y}$$
e portanto
$$\ln(x) = \frac{-1}{\sqrt{y}} \implies x = e^{\frac{-1}{\sqrt{y}}}.$$
Temos então que $f^{-1} : (0; +\infty) \to (0; 1)$ e é dada por
$$f^{-1}(y) = e^{\frac{-1}{\sqrt{y}}}.$$

2. Se $x \leq 0$, então $0 < j(x) = 2^x \leq 1$ e portanto $(g \circ j)(x) = g(j(x)) = 1$. Segue que
$$(h \circ g \circ j)(x) = h(1) = 4 - 12 + 9 = 1.$$
Agora, se $x > 0$, então $j(x) = 2^x > 1$ e portanto $(g \circ j)(x) = g(j(x)) = -1$. Segue que
$$(h \circ g \circ j)(x) = h(2) = 4 \cdot (-1)^2 - 12 \cdot (-1) + 9 = 25.$$
Isto é, a composta é dada por
$$(h \circ g \circ j)(x) = \begin{cases} 1, & \text{para } x \leq 0; \\ 25, & \text{para } x > 0. \end{cases}$$

3. Primeiro, vamos determinar a região em que $h(x) > 1$:
$$4x^2 - 12x + 9 > 1 \implies 4x^2 - 12x + 8 > 0.$$
Isso ocorre para $x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$. Portanto,
$$x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty) \implies h(x) > 1 \implies (g \circ h)(x) = g(h(x)) = -1.$$
Agora, para $x \in [1; 2]$, temos que $h(x) \in [0, 1]$. Mais, como
$$h(x) = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2,$$

temos que $h(x) = 0$ apenas para $x = 3/2$. Portanto

$$x \in [1;2] \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\} \implies 0 < h(x) \leq 1 \implies (g \circ h)(x) = g(h(x)) = 1$$

e

$$(g \circ h)(3/2) = g(h(3/2)) = g(0) = 0.$$

Juntando tudo, temos que

$$(g \circ h)(x) = \begin{cases} -1, \text{ para } x < 1 \text{ ou } x > 2; \\ 1, \text{ para } 1 \leq x \leq 2 \text{ e } x \neq 3/2; \\ 0, \text{ para } x = 3/2. \end{cases}$$

4. Chame a expresão de $p(x)$. Temos que $p(x) = 0$ para $x \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$. Fora desse conjunto, $p(x) \neq 0$ e devemos ver os sinais de cada termo em cada intervalo determinado pelo conjunto acima:

	$x < -2$	$-2 < x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < 2$	$2 < x$
x	-	-	-	+	+	+
$x-1$	-	-	-	-	+	+
$x-2$	-	-	-	-	-	+
$(x+1)^2$	+	+	+	+	+	+
$(x+2)^3$	-	+	+	+	+	+
$p(x)$	+	-	-	+	-	+

Temos então que $p(x) > 0$ no intervalo

$$(-\infty; -2) \cup (0;1) \cup (2; +\infty).$$

Como queremos o conjunto em que $p(x) \geq 0$, temos que juntar os pontos em que $p(x) = 0$. Ou seja, a inequação desejada é válida em

$$(-\infty; -2] \cup \{-1\} \cup [0;1] \cup [2; +\infty).$$

5. A seguir darei dois modos diferentes de se provar isso.

- Provando diretamente: Multiplicando $S(n)$ por q, temos

$$\begin{aligned} S(n) &= 1 + q + \ldots + q^n; \\ qS(n) &= \quad\; q + \ldots + q^n + q^{n+1}. \end{aligned}$$

  Subtraindo a segunda equação da primeira, temos

$$S(n) - qS(n) = (1-q)S(n) = 1 - q^{n+1} \implies S(n) = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

- Por indução: Suponha que a identidade seja válida para $n \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que isso implica que é válida para $n+1$:

$$\begin{aligned} S(n+1) &= 1 + q + \ldots + q^n + q^{n+1} \\ &= S(n) + q^{n+1} \\ &= \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} \\ &= \frac{1 - q^{n+1} + (1-q)q^{n+1}}{1-q} \\ &= \frac{1 - q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+2}}{1-q} \\ &= \frac{1 - q^{(n+1)+1}}{1-q}. \end{aligned}$$

  Para terminar a indução, falta apenas mostrar que a identidade é verdadeira para $n = 1$. Isso é fácil de ver, pois

$$\frac{1 - q^{1+1}}{1-q} = \frac{1-q^2}{1-q} = \frac{(1+q)(1-q)}{1-q} = 1 + q = S(1).$$