Nome: Rogério Marcos Fernandes Neto NUSP: 10284632
Curso: Bacharelado em Ciência da Computação
MAC0320 - Introdução à Teoria dos Grafos

LISTA 5

E26. Mostre que se G é umg grafo k-regular com número ímpar de vértices, então $\chi'(G) > k$.

Solução:

Prova. Seja G um grafo k-regular de ordem n, com n ímpar. Suponha, por absudo, que $\chi'(G) \leq k$. Pela **delimitação 6.1** sabemos que $\chi'(G) \geq k$, portanto, temos que $\chi'(G) = k$. Isso é, existe um coloração $\{E_1, \ldots, E_k\}$ das arestas de G. Como cada vértice de G tem grau k, então cada aresta incidente em um vértice $v \in V(G)$ deve ser de uma das k cores. Portanto, cada cor E_i é um emparelhamento perfeito. Como cada aresta do emparelhamento cobre exatamente dois vértices, então cada cor E_i cobre um número par de vértices. Mas como cada E_i é perfeito, então G deve ter um número par de vértices, o que contradiz a hipótese sobre n. Portanto a afirmação vale. $\square$

E27. Seja G um grafo de ordem n. Mostre que se n é ímpar e G tem mais do que $\frac{1}{2}\Delta(G)(n-1)$ arestas, então $\chi'(G) > \Delta(G)$.

Solução:

Prova. Seja G um grafo de ordem n. Suponha que n é ímpar e que $|A(G)| > \frac{1}{2}\Delta(G)(n-1)$. Suponha, por absudo, que $\chi'(G) \leq \Delta(G)$. Pela **delimitação 6.1** sabemos que $\chi'(G) \geq \Delta(G)$, portanto, temos que $\chi'(G) = \Delta(G)$. Isso é, existe um coloração $\{E_1, \ldots, E_{\Delta(G)}\}$ das arestas de G. Como $|A(G)| > \frac{1}{2}\Delta(G)(n-1)$, então pelo **Princípio da Casa dos Pombos** alguma cor E_i possui pelo menos $\frac{n-1}{2} + 1$ arestas. Mas como cada aresta cobre dois vértices distintos, então E_i cobre

$$2\left(\frac{n-1}{2} + 1\right) = n + 1$$

vértices, o que é um absurdo, pois G possui apenas n vértices. $\square$

E28. Abel (A) convidou 3 casais para sua casa de campo:

Beto (B) & Carol (C); Duda (D) & Elis (E); e Félix (F) & Gina (G).

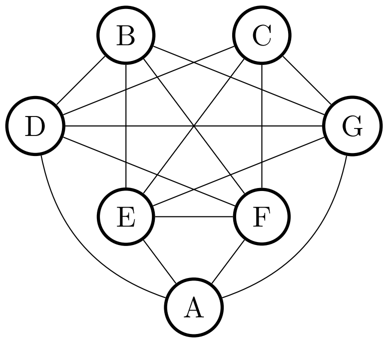
Como todo os convidados gostam de jogar tênis, Abel (A) decidiu organizar uns jogos obedecendo ao seguinte conjunto de regras:

(R1) Cada um dos 6 convidados deve jogar contra todos os outros condidados, excetuando o próprio cônjuge (marido/mulher).
(R2) Adicionalmente, A deve jogar contra D, E, F e G.
(R3) Ninguém deve fazer 2 jogos num mesmo dia.

PERGUNTA: Como devem ser realizados os jogos de modo a realizar todos os jogos desejados no menor número de dias?

Descreva como o problema pode ser formulado como um problema sobre grafos, diga como é o grafo, qual é o menor número de dias (justificando como concluiu isso), e apresente uma solução (pode ser uma tabela de jogos a serem realizados em cada um dos dias).

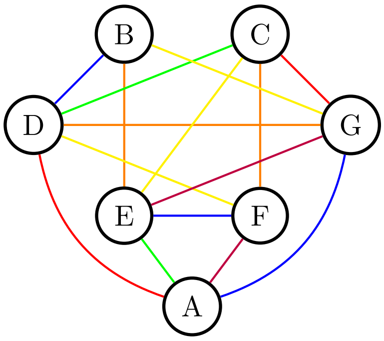
Solução: Podemos traduzir essa questão para um problema sobre grafos. Primeiramente vamos construir um grafo G onde $V(G)$ são todos os convidados mais o Abel e $A(G)$ são arestas uv se e somente se a pessoa u deve jogar contra a pessoa v. O grafo fica da seguinte forma:



Um emparelhamento E de G nos da uma opção de jogos que podemos fazer em um dia, uma vez que cada vértice tem no máximo uma aresta de E incidindo sobre ele e as duas pontas dessa aresta devem jogar uma contra a outra. Um outro emparelamento E', disjunto de E nos da outra opção de de jogos que poderiam ser feitos em outro dia, e assim por diante. Portanto, precisamos do menor número de emparelhamentos disjuntos não vazios de forma a cobrir todas as arestas de $A(G)$. Em outras paralvras, precisamos encontrar uma coloração das arestas de G com o menor número de cores possível. Dessa forma, o índice cromático de G deve nos dar a quatidade de dias necessários para realizar todos os jogos.
O grafo G possui 16 arestas e podemos ver que $\Delta(G) = 5$. Assim,

$$|A(G)| = 16 > \frac{1}{2}\Delta(G)(n-1) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 = 15$$

Portanto, pelo resultado de **E27** e pelo **Teorema 6.3** temos que $\chi'(G) = \Delta(G) + 1 = 6$. Portanto são necessários 6 dias para realizar os jogos nas condições dadas. Uma possível divisão desses jogos poderia ser realizada da seguinte forma:



Dia	Cor
1º	Vermelho
2º	Amarelo
3º	Verde
4º	Roxo
5º	Azul
6º	Laranja

Na figura, cada cor representa quais jogos serão realizados num determinado dia. A correpondência entre cores e dias é mostrada na tabela.

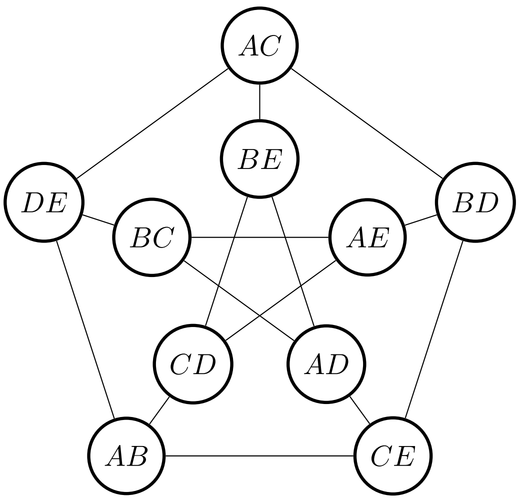
E29. Cinco pessoas devem participar de um campeonato de *bridge*:

Abel (A), Beto (B), Carlos (C), Duda (D) e Enzo (E).

Um jogo de *bridge* é jogado entre times formados por 2 pessoas. Todo time VW deve jogar contra todos os demais oturos times XY distintos (ou seja, U, V, X e Y devem ser 2 a 2 distintos). Note que os times não são fixos: podemos ter times AB, AC, AD, AE, ..., e cada um desses times deve jogar contra todos os demais (claramente não ao mesmo momento). Expressar cada time pelas iniciais dos nomes em ordem alfabética.

Se o mesmo time não pode jogar 2 vezes num memso dia, qual é o menor número de dias para a realização do campeonato? Descreva como o problema pode ser formulado como um problema sobre grafos, diga como é o grafo, qual é o menor número de dias (justificando como concluiu isso), e apresente uma solução (uma tabela dos jogos em cada um dos dias).

Soluçao: Podemos traduzir essa questão para um problema sobre grafos. O campeonato pode ser representado por um grafo G onde cada vértice de $V(G)$ é um time diferente e uma aresta uv pertence a $A(G)$ se e somente se os times u e v não tem membros em comum, ou seja $u \cap v = \emptyset$. Uma forma de desenha esse grafo é a seguinte:



Essa lei de formação do grafo resulta no **grafo de Petersen**. Assim como na questão anterior, emparelhamentos nos dão as opções de jogos que podemos fazer em um dia. Portanto, analogamente à questão anterior, o índice cromático desse grafo nos da o menor número de dias necessários para se realizar todos os jogos. O índice cromático do grafo de Petersen é bem conhecido e é 4. Portanto, com 4 dias é possível realizar todos os jogos. A tabela abaixo mostra como poderiam ser organizados esses jogos:

Dia	**Jogos**
1º	(AC vs BD); (BE vs CD); (BC vs AE); (DE vs AB); (AD vs CE)
2º	(AC vs DE); (BE vs AD); (AB vs CD); (BD vs CE)
3º	(DE vs BC); (AC vs BE); (BD vs AE); (AB vs CE)
4º	(BC vs AD); (CD vs AE)