

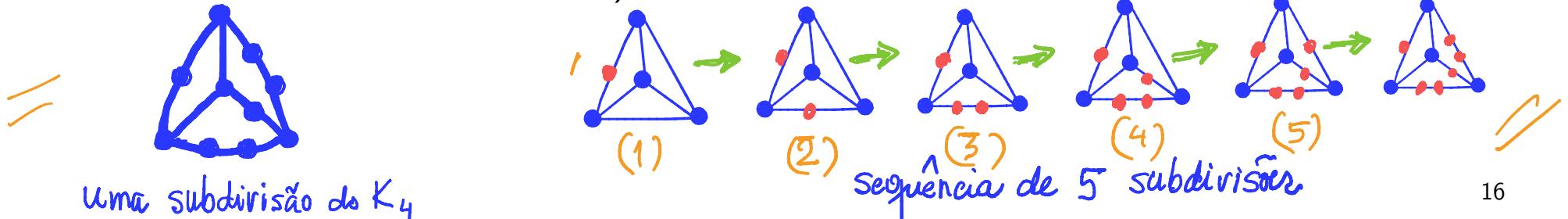
### 3 Caracterizações de grafos planares

Nesta seção veremos (pelo menos) uma caracterização de grafos planares. Para isso, precisamos introduzir o conceito de subdivisão de aresta e subdivisão de um grafo. Também usaremos o conceito de contração de aresta.

A operação de **subdivisão de uma aresta**  $\alpha = \{u, v\}$  de um grafo  $G$  consiste em remover  $\alpha$  de  $G$  e substituí-la por um caminho  $P = (u, x, v)$ , onde  $x$  é um vértice novo (ou seja, não pertencente a  $G$ ).



Começando com um grafo  $G$ , podemos usar essa operação repetidamente (nas arestas originais ou nas novas arestas obtidas). O grafo que se obtém é chamado uma **subdivisão de  $G$** : ele é obtido de  $G$  fazendo uma sequência de  $k \geq 0$  subdivisões de arestas nos sucessivos grafos que são obtidos neste processo. (O caso  $k = 0$  é quando não fazemos nenhuma subdivisão).



**FATO:**  $K_5$  e  $K_{3,3}$  não são planares.

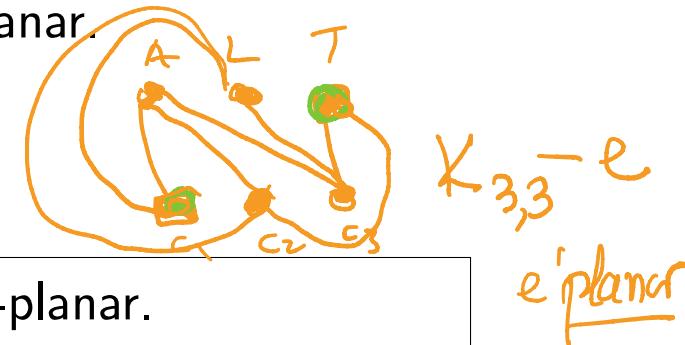
Chegamos a ver duas provas desse fato. Alguma razão especial?

**SIM!** Isto vai ficar claro nesta seção.

**EXERCÍCIO:** Qualquer subgrafo próprio de  $K_5$  ou de  $K_{3,3}$  é planar.

A prova do seguinte fato é imediata.

$K_5 - e$  é planar



$K_{3,3} - e$   
é planar

**FATO:** Se  $G$  é não-planar, então toda subdivisão de  $G$  é não-planar.

Temos então que, qualquer subdivisão de  $K_5$  ou de  $K_{3,3}$  é não-planar. Portanto, se  $G$  é um grafo planar, sabemos que  $G$  não contém nem uma subdivisão do  $K_5$  e nem uma do  $K_{3,3}$ . Ou seja, temos o seguinte fato (simples):

### CONDIÇÃO NECESSÁRIA PARA UM GRAFO SER PLANAR:

Não conter subdivisões nem do  $K_5$  e nem do  $K_{3,3}$ .

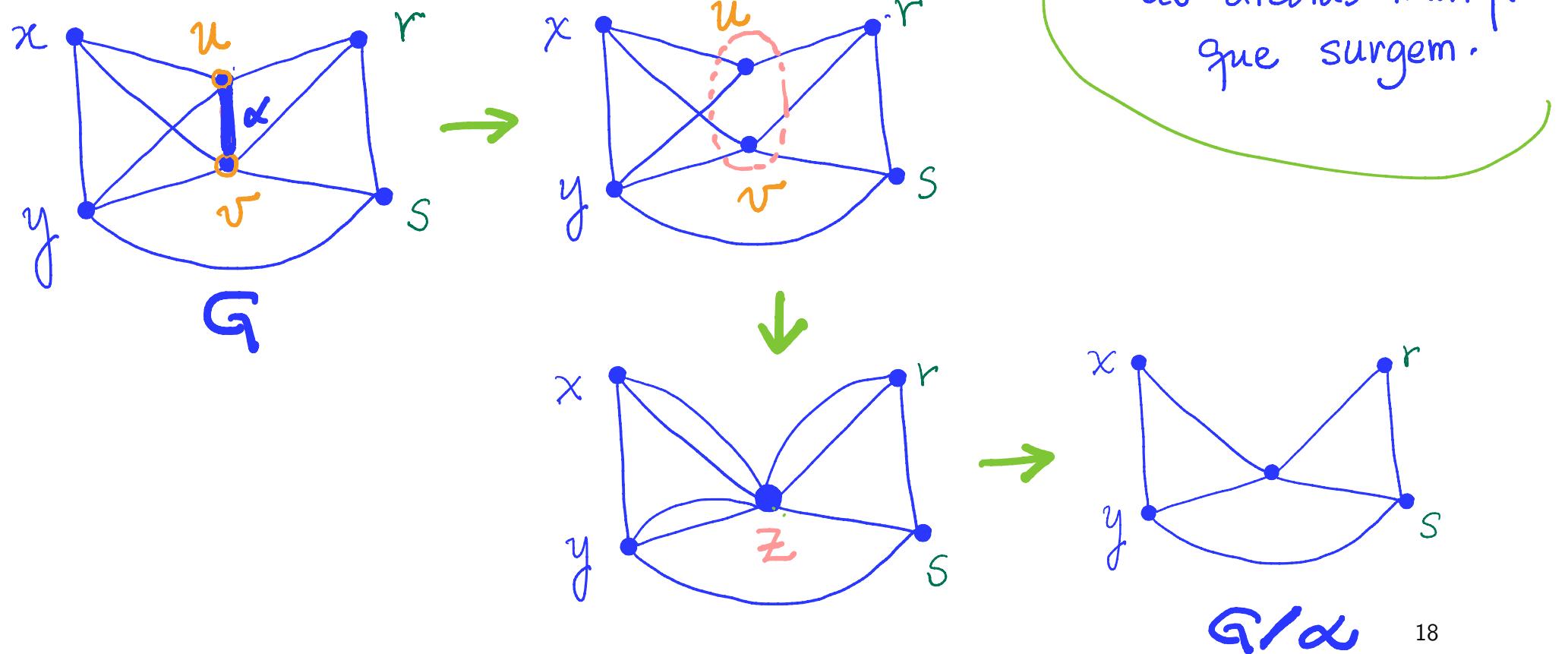
Kazimierz Kuratowski (1930) provou que a condição acima é **SUFICIENTE!**

Para fazer uma prova da suficiência da condição mencionada, precisamos de alguns conceitos e resultados.

A operação de **contração de uma aresta**  $\alpha = \{u, v\}$ ,  $u \neq v$ , de um grafo  $G$  consiste em remover  $\alpha$  de  $G$ , e identificar os vértices  $u$  e  $v$ , num único vértice  $z$ , e fazer com que as arestas de  $G$  incidentes a  $u$  ou  $v$  se tornem incidentes a  $z$  (no novo grafo).

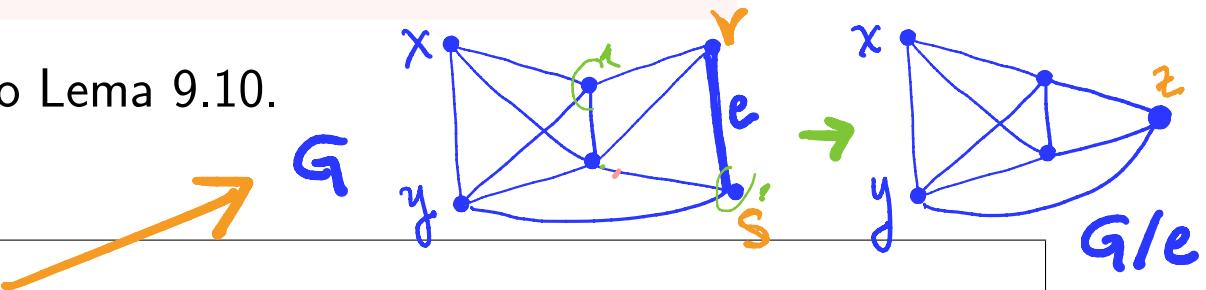
OBS: Em geral, arestas múltiplas incidentes a um mesmo par de vértices são descartadas, deixando apenas um representante: é o que faremos aqui.

Dependendo do contexto, pode ser importante deixar as arestas múltiplas.



- Resultados que serão usados na prova do Teorema de Kuratowski

Possivelmente veremos uma prova do Lema 9.10.

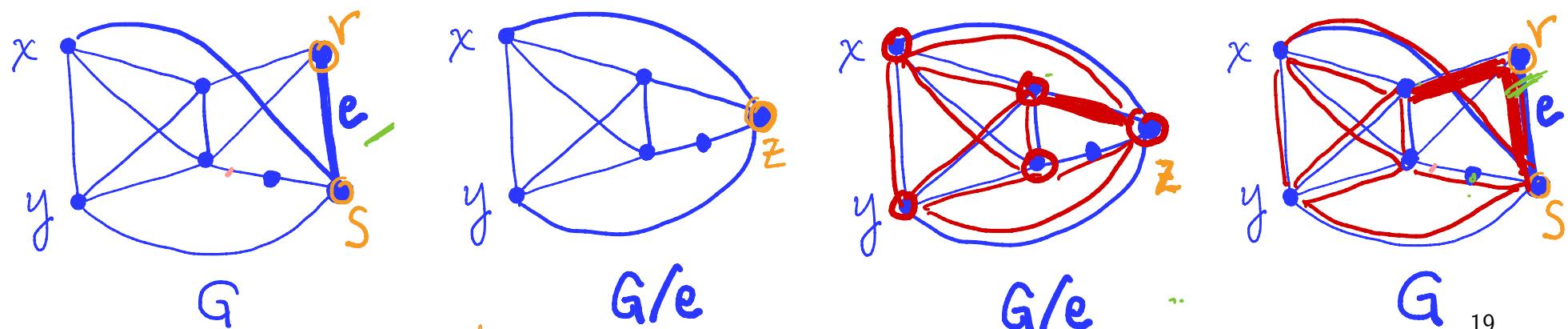


**Lema 9.10.** Thomassen, 1980

Se  $G$  é um grafo 3-conexo com pelo menos 5 vértices, então  $G$  contém uma aresta  $e$  tal que  $G/e$  é 3-conexo.

**Lema 9.11.** Seja  $G$  um grafo e  $e$  uma aresta qualquer de  $G$ . Se  $G/e$  contém uma subdivisão do  $K_5$  ou do  $K_{3,3}$ , então  $G$  contém uma subdivisão do  $K_5$  ou do  $K_{3,3}$ .

**Lema 9.12.** Seja  $G$  um grafo planar 2-conexo,  $G \neq C_n$ . Então  $G$  tem uma única imersão plana se e só se  $G$  é uma subdivisão de um grafo 3-conexo.



$\text{G}$  3-conexo  $\Rightarrow$   $\text{G}$  tem uma única imersão no plano.

## Importância do Teorema de Kuratowski (1930)

- Fornece uma caracterização de grafos planares em termos de um número essencialmente finito de subgrafos proibidos.
- Ocupa uma posição de destaque entre os critérios de planaridade conhecidos, não apenas pela sua beleza e simplicidade, mas também porque implica — de maneira relativamente simples — o critério de planaridade de MacLane (1937) e o de Whitney (1932), além de outros.
- Diferentemente de outros critérios de planaridade, fornece uma caracterização útil de grafos não-planares. (Certificado de não-planaridade)
- Aparentemente, quase todas as provas conhecidas do teorema podem ser transformadas em algoritmos polinomiais para testar planaridade de grafos. [Hopcroft e Tarjan (1974) desenvolveram um algoritmo linear para testar se um grafo é planar.]



A prova que veremos do Teorema de Kuratowski é baseada na prova dada no livro:

- T. Nishizeki and N Chiba, Planar Graphs: Theory and Algorithms, Elsevier, 1988.

(Altamente recomendado para quem tem interesse em algoritmos para grafos planares.)

### Teorema 9.13. (Caracterização de grafos planares) Kuratowski, 1930

Um grafo  $G$  é planar se e só se  $G$  não contém subdivisões nem do  $K_5$  e nem do  $K_{3,3}$ .

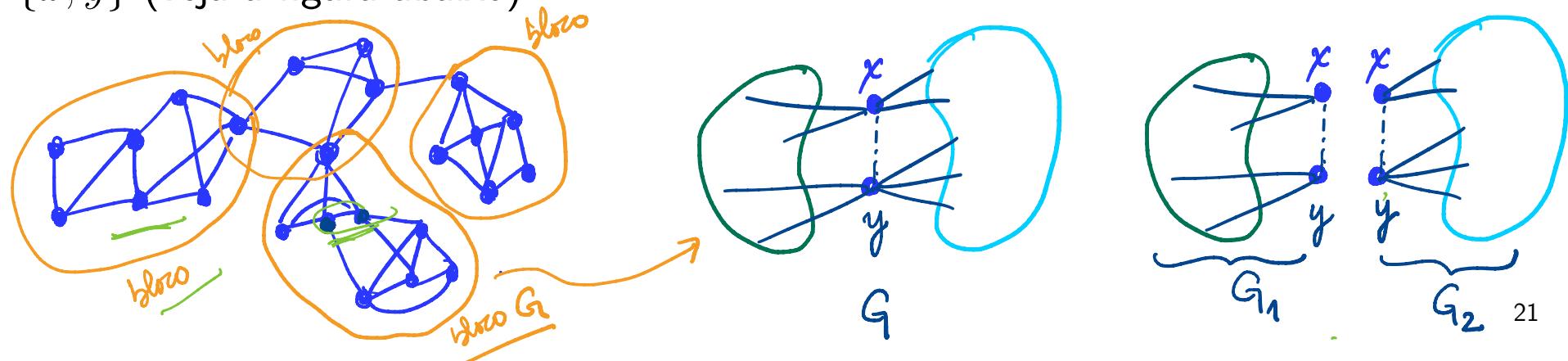
**Prova.** Já vimos que a condição mencionada é necessária. A essência deste teorema é a suficiência dessa condição, ou seja:

“Se  $G$  não contém subdivisões nem do  $K_5$  e nem do  $K_{3,3}$ , então  $G$  é planar.”

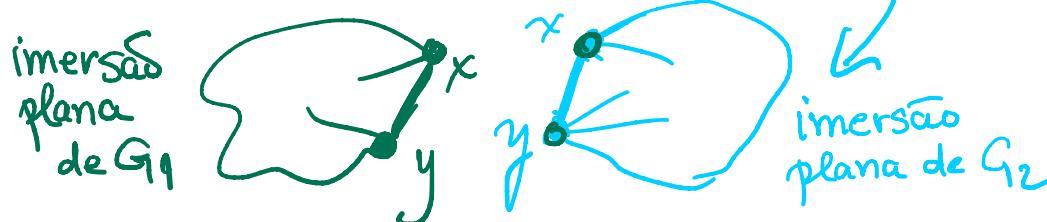
- A prova será feita por indução em  $n := |V(G)|$ . Como  $K_5 - e$  é planar para qualquer aresta  $e$  em  $K_5$ , a afirmação é verdadeira se  $n \leq 5$ . Suponhamos então que  $n \geq 6$ . Temos 2 casos a considerar.

#### Caso 1. $G$ não é 3-conexo.

É imediato que um grafo é planar se e só se cada um de seus blocos (subgrafos 2-conexos maximais) é planar. Podemos então supor que  $G$  seja 2-conexo. Neste caso,  $G$  tem um par separador  $\{x, y\}$ . Sejam  $G_1$  e  $G_2$  os ‘split graphs’ com relação ao par  $\{x, y\}$  (veja a figura abaixo).



Claramente  $G_1$  e  $G_2$  têm menos vértices que  $G$ , e também não contêm subdivisões do  $K_5$  e nem do  $K_{3,3}$ . Logo, pela hipótese de indução,  $G_1$  e  $G_2$  são planares. Além disso, ambos têm uma imersão plana na qual a aresta  $xy$  pertence à fronteira da face externa. Estas duas imersões planas podem ser acopladas em  $x$  e  $y$  de modo a produzir uma imersão plana de  $G$ . Portanto,  $G$  é planar.



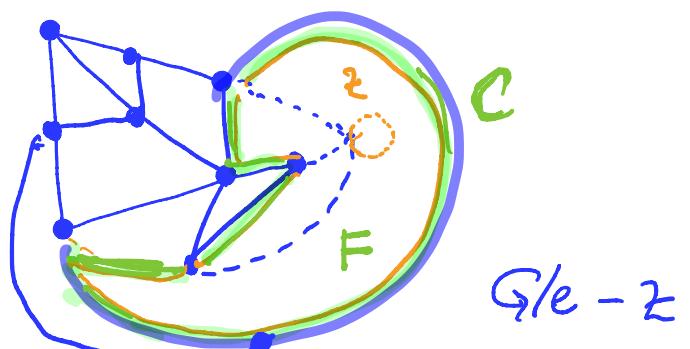
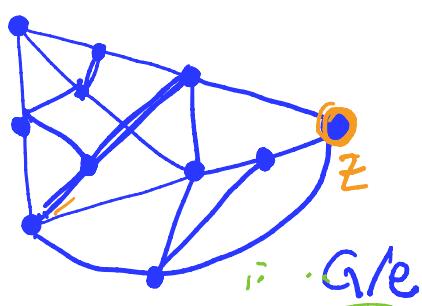
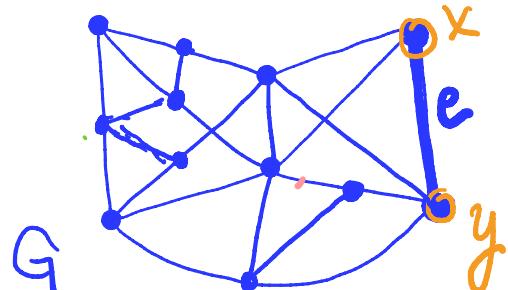
### Caso 2. $G$ é 3-conexo.

Como  $G$  é 3-conexo, pelo Lema 9.10 temos que  $G$  tem uma aresta  $e = xy$  tal que  $G/e$  é 3-conexo. Seja  $z$  o vértice obtido identificando-se os vértices  $x$  e  $y$ .

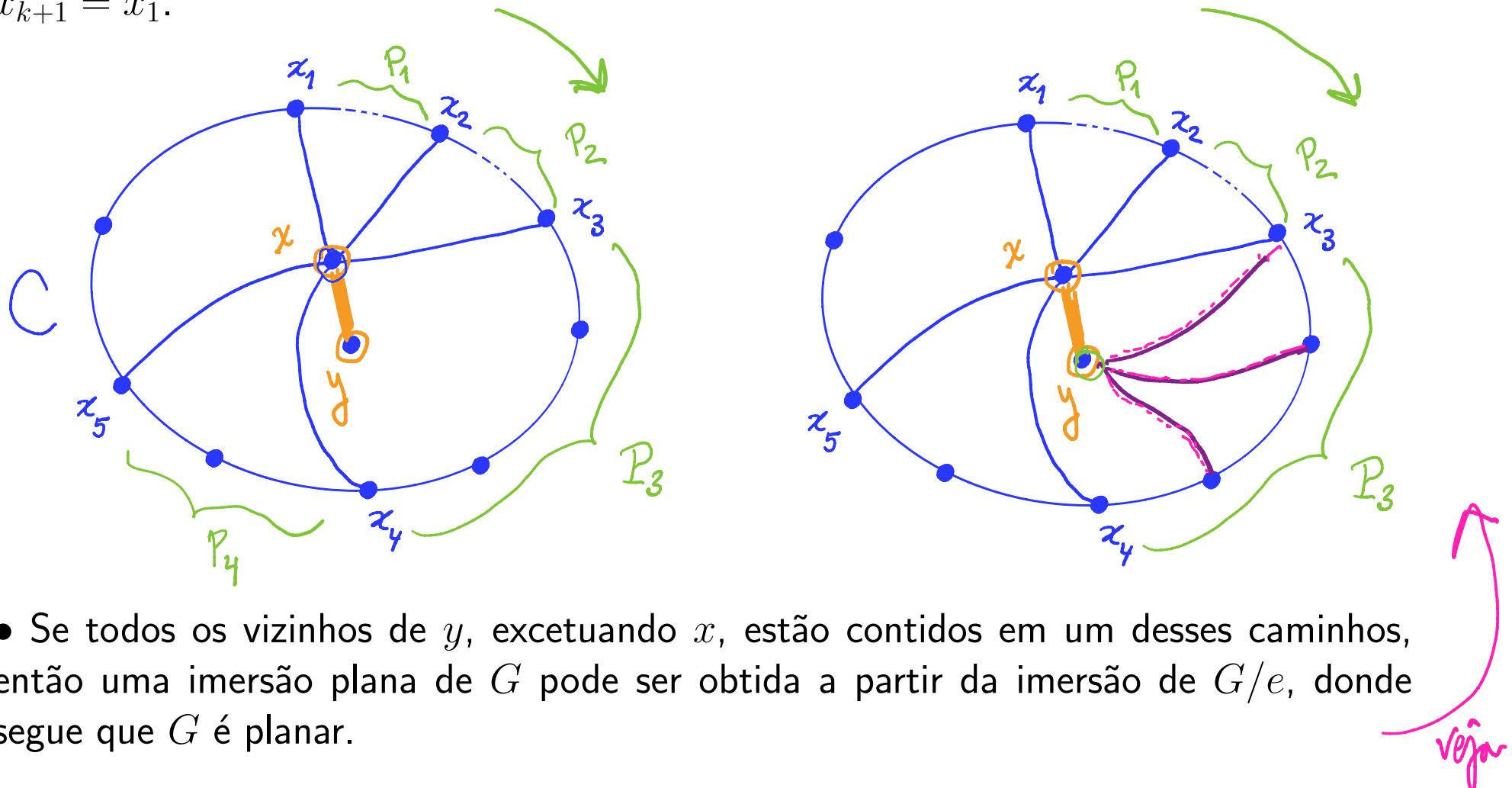
Pelo Lema 9.11,  $G/e$  não contém uma subdivisão do  $K_5$  e nem do  $K_{3,3}$ , e portanto, pela hipótese de indução,  $G/e$  é planar. Considere um grafo plano  $G/e$  e o subgrafo plano  $G/e - z$ .

Como  $G/e$  é 3-conexo, pelo Lema 9.12 a imersão plana de  $G/e$  é única.

Seja  $F$  a face do grafo plano  $G/e - z$  tal que em  $G/e$  esta contém o vértice  $z$ , e seja  $C$  o circuito facial que <sup>corresponde</sup> à fronteira da face  $F$ . É imediato que todos os vizinhos de  $x$  ou  $y$ , exceto eles próprios, devem pertencer a  $C$ .



Sejam  $x_1, x_2, \dots, x_k$  os vizinhos de  $x$  que ocorrem em  $C$  em ordem cíclica. Seja  $P_i$  o caminho em  $C$  que vai de  $x_i$  a  $x_{i+1}$  e não contém nenhum  $x_j$ ,  $j \notin \{i, i + 1\}$ , onde  $x_{k+1} = x_1$ .

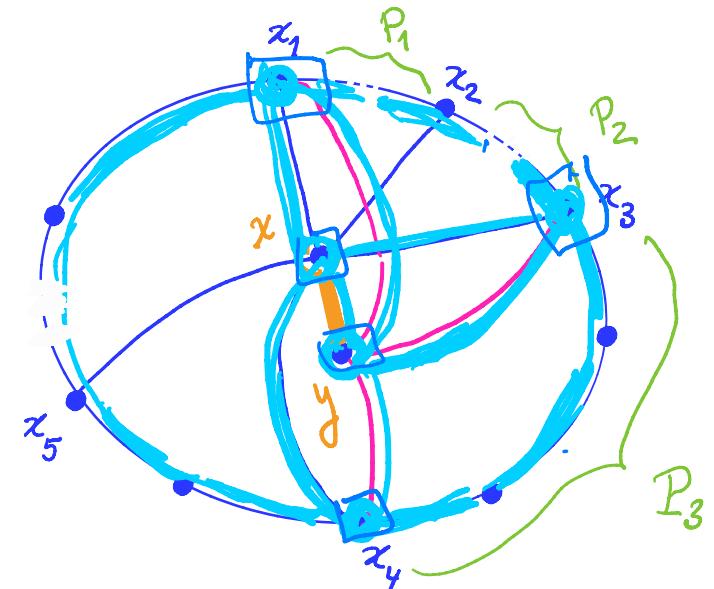
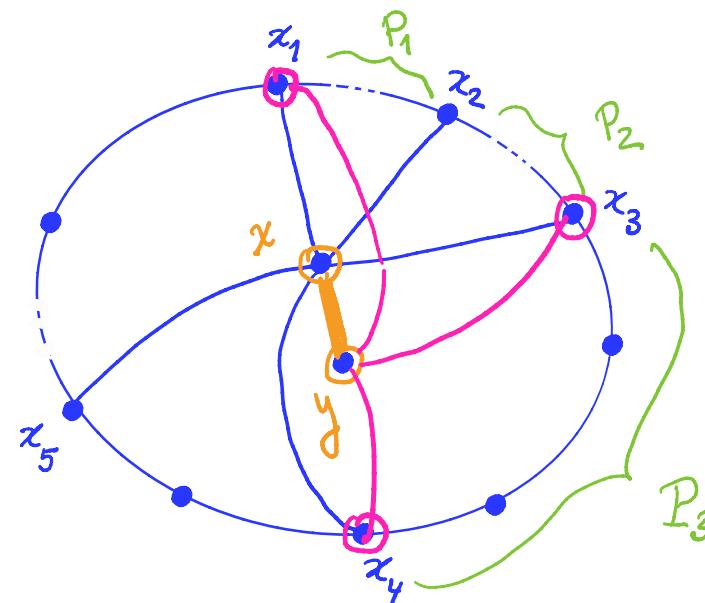


- Analisemos então o caso em que nem todos os vizinhos de  $y$ , excetuando  $x$ , estão contidos em um dos caminhos  $P_i$ . Como  $y$  tem 3 ou mais vizinhos incluindo  $x$ , uma das 3 possibilidades deve ocorrer:

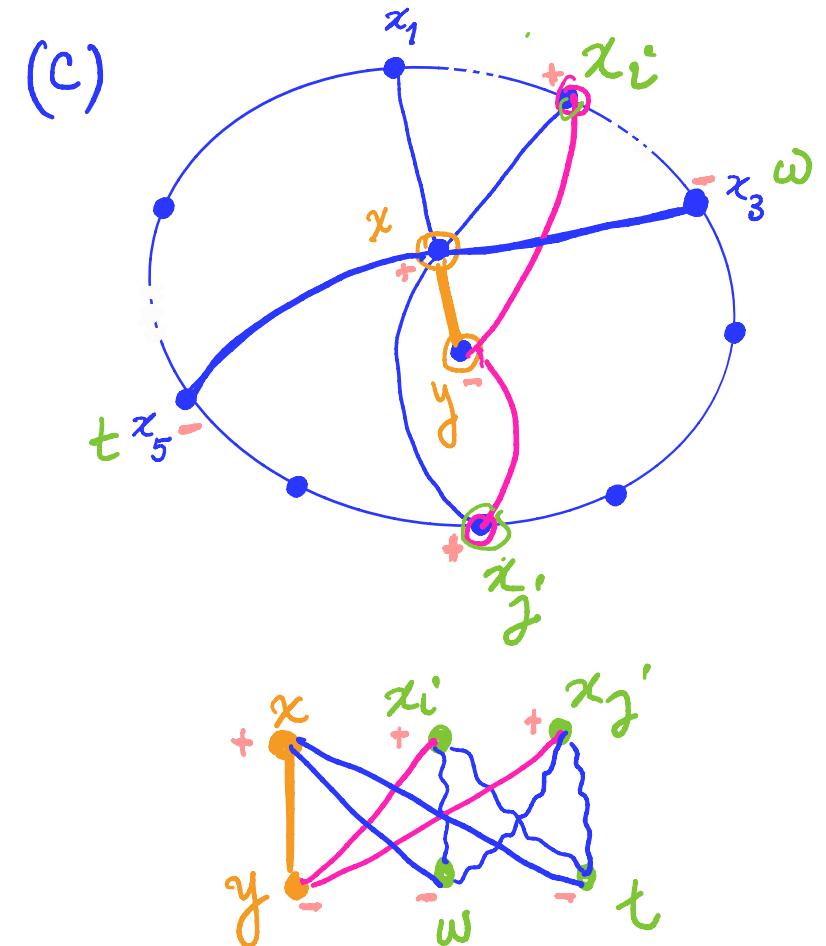
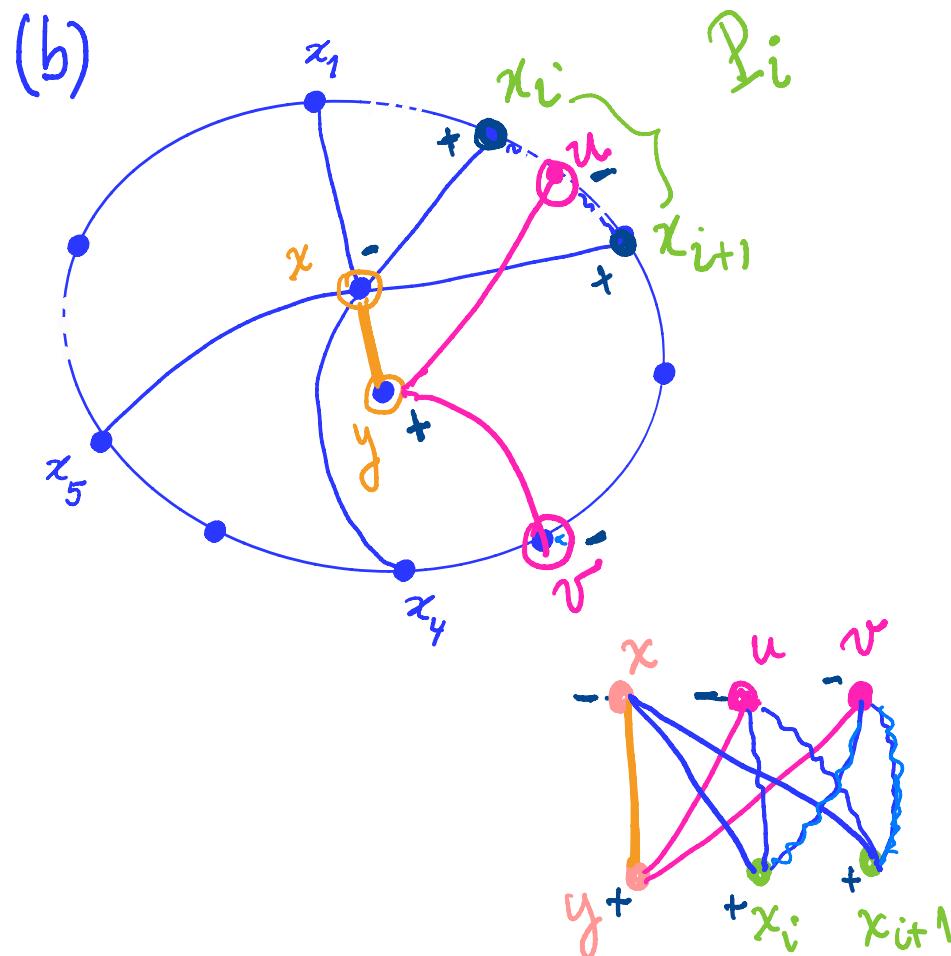
- (a)**  $y$  tem 3 ou mais vizinhos em  $\{x_1, \textcolor{orange}{y}, x_k\}$ ;
- (b)**  $y$  tem um vizinho  $u$  em  $P_i - \{x_i, x_{i+1}\}$  para algum  $i$ , e algum vizinho  $v$  não pertencente a  $P_i$ ;
- (c)**  $y$  tem 2 vizinhos  $x_i$  e  $x_j$  tais que  $j \neq i + 1$  e  $i \neq j + 1$ .

No caso **(a)** o subgrafo  $G$  induzido pelos vértices de  $C$  juntamente com  $x$  e  $y$  contém uma subdivisão do  $K_5$ , contrariando a hipótese.

**(a)**



Nos casos **(b)** e **(c)** o subgrafo de  $G$  induzido pelos vértices de  $C$  juntamente com  $x$  e  $y$  contém uma subdivisão do  $K_{3,3}$ , contrariando a hipótese.

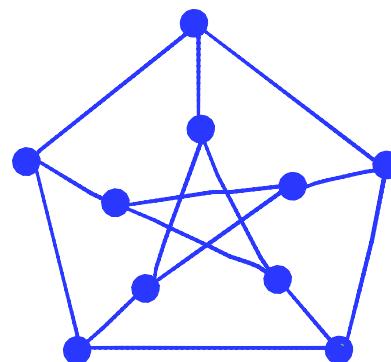


Como as 3 possibilidades analisadas não ocorrem, a prova está completa. □



**EXERCÍCIO 9.8.**

Prove que o grafo de Petersen não é planar. Faça duas provas distintas (uma usando o Teorema de Kuratowski, e outra usando um argumento sobre número de arestas).



- Fáry (1948) provou que todo grafo planar simples tem uma representação plana onde cada aresta é um segmento de reta.



