Nome: Rogério Marcos Fernandes Neto NUSP: 10284632
Curso: Bacharelado em Ciência da Computação
MAC0320 - Introdução à Teoria dos Grafos

LISTA 4

E16. Provar (nos moldes da prova vista em aula para o algoritmo de Kruskal) que o algoritmo descrito a seguir constrói uma árvore geradora de custo mínimo.

ALGORITMO DESAPEGADO

Entrada: Grafo conexo $G = (V, A)$, com custos c_a em cada aresta $a \in A$.
Saída: Árvore ótima T (árvore geradora de custo mínimo).

1. (Ordenação) Ordene as arestas de G em ordem não-crescente de seus custos. Chame-as de $a_1, a_2, \ldots, a_m$, sendo $c(a_1) \geq c(a_2) \geq \cdots \geq c(a_m)$.
2. $T \leftarrow G$.
3. Para $i = 1$ até m faça
   se $T - a_i$ é conexo então $T \leftarrow Ta_i$
4. Devolva T

Solução:

Prova. Seja G um grafo e seja T a árvore geradora de custo mínimo constuída pelo algoritmo DESAPEGADO.
Notemos, primeiramente, que T realmente é uma árvore geradora. O algoritmo remove arestas enquanto o grafo resultante for conexo. Portanto, T é um grafo conexo minimal, ou seja, é uma árvore.
Iremos provar agora que T realmente é ótima. Seja $A(T) = \{e_1, \ldots, e_k\}$, onde $c(e_i) \geq c(e_j)$ se $i < j$. Seja T^* uma árvore geradora ótima de G com mais arestas em comum com T. Suponha, por absurdo, que $T \neq T^*$.
Seja $e_j = uv$ a primeira aresta em $A(T)$ tal que $e_j \notin A(T^*)$ (isso é, $\{e_1, \ldots, e_{j-1}\} \in A(T^*)$) e seja P o único caminho em $T*$ que conecta uav. Então existe uma aresta xy em P que não pertence a T (do contrário, T teria um circuito). Como o algoritmo escolheu xy então temos que $c(xy) \geq c(uv)$. De fato, note que como xy pertence a um circuito, então

□