Introdução à Teoria dos Grafos (MAC0320 e MAC5770)

Lista 8 - Exercícios E30 a E33

Cap 7 - Coloração de vértices

Data para entrega dos exercícios: 1/junho/2020 (2a. feira)

E30. Seja G um grafo simples com n vértices, e seja α a cardinalidade de um conjunto independente máximo de G. Prove que

(a) $\frac{n}{\alpha} \leq \chi(G) \leq n - \alpha + 1$.

(b) Caracterize (diga como são) os grafos G de ordem n tais que $\chi(G) = n - \alpha + 1$.

E31. Seja G um grafo de ordem n. Prove, por indução em n, que $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1$.

E32. Seja G um grafo que tem uma coloração própria (de seus vértices) na qual toda cor é usada pelo menos 2 vezes. Mostre que G tem uma coloração (de seus vértices) com $\chi(G)$ cores que tem essa mesma propriedade.

E33. Sejam $I_1, I_2, \ldots, I_n$ intervalos fechados na reta real. Seja G o grafo simples com vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$ tal que para todo i, j,

$$v_i \text{ é adjacente a } v_j \text{ se e só se } I_i \cap I_j \neq \emptyset.$$

Mostre que $\chi(G) = \omega(G)$. (Lembramos que uma *clique* é um subgrafo completo, e $\omega(G)$ denota a cardinalidade de uma clique máxima em G) **Sugestão:** indução em n. Remova um intervalo que tem o menor extremo superior.

OBS: O grafo G acima definido é chamado de *grafo de intervalos.*

EXTRA - vale Bônus

[**B7.**] Seja G um grafo tal que todo par de circuitos ímpares tem (pelo menos) um vértice em comum. Mostre que G tem uma 5-coloração.

RECOMENDAÇÕES

Seguir todas as recomendações que têm sido feitas nas listas anteriores.

Resolver individualmente e sem consultas a outras fontes!