Nome: Rogério Marcos Fernandes Neto NUSP: 10284632
Curso: Bacharelado em Ciência da Computação
MAC0320 - Introdução à Teoria dos Grafos

LISTA 8

E30. Seja G um grafo simples com n vértices, e seja α a cardinalidade de um conjunto independente máximo de G. Prove que

(a) $\frac{n}{\alpha} \leq \chi(G) \leq n - \alpha + 1$.
(b) Caracterize (diga como são) os grafos G de ordem n tais que $\chi(G) = n - \alpha + 1$.

Solução: a)

Prova. Seja G um grafo de cardinalidade n e seja α a cardinalidade de um conjunto independente máximo de G. Sabemos que existe uma partição $\{X_1, X_2, \ldots, X_{\chi(G)}\}$ dos vértices de G em conjuntos independentes. Assim,

$$
\begin{aligned}
n &= \sum_{i=1}^{\chi(G)} |X_i| \\
n &\leq \sum_{i=1}^{\chi(G)} \alpha & \text{pois } |X_i| \leq \alpha \\
n &\leq \chi(G) \cdot \alpha \\
\implies \frac{n}{\alpha} &\leq \chi(G)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, sabemos que com exceção de alguma parte X_j com tamanho α, todas as outras tem tamanho pelo menos 1, isso é, $|X_i| \geq 1$, $i \neq j$. Portanto

$$
\begin{aligned}
n &= \sum_{i=1}^{\chi(G)} |X_i| \\
n &= \sum_{i=1, i\neq j}^{\chi(G)} |X_i| + |X_j| \\
n &\geq \sum_{i=1, i\neq j}^{\chi(G)} 1 + \alpha & \text{pois } |X_i| \geq 1 \text{ para } i \neq j \\
n &\geq (\chi(G) - 1) + \alpha \\
\implies \chi(G) &\leq n - \alpha + 1
\end{aligned}
$$

$\square$

b) Grafos dessa forma possuem uma *click* com $n - \alpha$ vértices e outros α vértices se conectam com todos os vértices da click mas não com eles mesmos. Mais formalmente, um grafo $G = (V, A)$ dessa forma é definido por

$$V := \{v_1, \dots, v_n\}$$
$$A := \{\{v_i v_j\} : i, j < \alpha \text{ ou } i < \alpha, j \geq \alpha\}$$

Note que dessa forma os $n - \alpha$ primeiros vértices formam uma click e os α ultimos vértices formam um conjunto independente de tamanho α. Portanto, se particionarmos V no menor número de componentes independentes possível, teremos uma componente de tamanho α e $\chi(G) - 1$ componentes de tamanho 1. Por construção, não existe outra opção de componentes de tamanho $\chi(G)$. Portanto temos que

$$n = \chi(G) - 1 + \alpha \implies \chi(G) = n - \alpha + 1$$

E31. Seja G um grafo de ordem n. Prove, por indução em n, que $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq n + 1$.

Solução:

Prova. Seja G um grafo de ordem n. Por indução em n iremos mostrar que $\chi(G)+\chi(\bar{G}) \leq n+1$.
Base: Suponha $n = 1$. Nesse caso, claramente tanto G quando $\bar{G}$ são coloridos com uma única cor e portanto temos que $\chi(G) + \chi(\bar{G}) = 1 + 1 \leq n + 1$.
Passo: Suponha agora que ≥ 2 e que a afirmação vale para grafos com até $n - 1$ vértices. Seja v um vértice qualquer de G e seja $H := G - v$. Como $|V(H)| = n - 1$ então, por hipótese, sabemos que $\chi(H) + \chi(\bar{H}) \leq (n - 1) + 1 = n$. Sejam $\{X_1, \dots, X_k\}$ e$\{X'_1, \dots, X'_{k'}\}$ colorações de H e $\bar{H}$ respectivamente.

a) Se $\chi(H) + \chi(\bar{H}) \leq n - 1$ podemos atribuir a v uma cor distinta das k cores utilizadas em H, e outra cor distinta das k' cores utilizadas em $\bar{H}$. Assim obtemos as colorações $\{\{v\}, X_1, \dots, X_k\}$ e $\{\{v\}X'_1, \dots, X'_{k'}\}$ para G e G' respectivamente. Portanto

$$\chi(G) + \chi(\bar{G}) = (\chi(H) + 1) + (\chi(\bar{H}) + 1) \leq n - 1 + 2 = n + 1$$

b) Se $\chi(H) + \chi(\bar{H}) = n$, então afirmo que se for atribuída uma nova cor a v para colorir G então não será atribuída uma nova cor para colorir v em $\bar{G}$ e vice-versa. De fato, suponha que sejam atribuídas novas cores para v em ambas as colorações. Então temos que $g_H(v) \geq k$ e $g_{\bar{H}}(v) \geq k'$. Mas sabemos também que $g_H(v) + g_{\bar{H}}(v) = n - 1$. Portanto, temos que

$$\chi(H) + \chi(\bar{H}) = k + k' \leq g_H(v) + g_{\bar{H}}(v) = n - 1$$

o que contradiz nossa hipótese. Portanto sabemos que $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \leq \chi(H) + \chi(\bar{H}) + 1 = n + 1$.

Portanto, pelo princípio da indução, a afirmação vale. $\square$

E32. Seja G um grafo que tem uma coloração própria (de seus vértices) na qual toda cor é usada pelo menos 2 vezes. Mostre que que G que tem uma coloração (de seus vérties) com $\chi(G)$ cores que tem essa mesma propriedade.

Solução:

Prova. Seja G um grafo que possui uma coloração própria $C = \{X_1, \ldots, X_k\}$ onde toda cor é usada pelo menos duas vezes. Seja $C' = \{X_1', \ldots, X_{k'}'\}$ uma coloração qualquer de G com $\chi(G) = k'$ cores. Se todas as cores de C' são utilizadas duas vezes então não há o que mostrar. Portanto, suponha que exista pelo menos uma cor que possui um único vértice. Iremos repetir o seguinte procedimento a fim de adequar a coloração C':

a) Tome v um vértice que seja o único de sua cor. Caso não exista tal vértice, pare.

b) Seja X_j o conjunto de vértices que tem a mesma cor que v em C

c) Pinte com a mesma cor de v em C' todos vértices de X_j.

Alguns fatos:

1. Note que o conjunto de vértices de X_j podem ser pintados com a mesma cor de v uma vez que v era o único de sua cor e todo vértice em X_j não é adjacente.

2. Vértices que ja foram repintados não serão repintados novamente, pois como vimos, todos os vértices de X_j foram pintados com a mesma cor e, como $|X_j| \geq 2$, não existem vértices solitários pertecentes a X_j.

3. A quantidade de cores não é alterada pois são utilizadas cores ja presentes nos vértices.

4. G é finito.

Devido a esses fatos o algoritmo para e o algoritmo está correto.

E33. Sejam $I_1, I_2, \ldots, I_n$ intervalos fechados na reta real. Seja G o grafo simples com vértices $v_1, v_e, \ldots, v_n$ tal que para todo i, j,

$$v_i \text{ é adjacente a } v_j \text{ se e só se } I_i \cap I_j \neq \emptyset$$

Mostre que $\chi(G) = \omega(G)$. (Lembramos que uma *clique* é um subgrafo completo, e $\omega(G)$ denora a cardinalidade de uma clique máxima em G) **Sugestão:** indução em n. Remova um intervalo que tem o menor extremo superior.

OBS: O grafo G acima definido é chamado de *grafo de intervalos.* $\square$

Solução:

Prova. Seja G um grafo de intervalos de ordem n.
Base: Suponha $n = 1$. Nesso caso é claro que $\chi(G) = \omega(G) = 1$ e portanto a afirmação vale.
Passo: Suponha $n \geq 2$ e que a afirmação vale para grafos de intervalos de ordem até $n - 1$. Seja I_j um intervalo com menor extremo inferior e seja $H := G - v_j$. Por hipótese temos que $\chi(H) = \omega(H)$, e portanto existe uma coloração $\{X_1, \dots, X_k\}$ dos vértices de H. Temos duas situações:

a) $\omega(G) = \omega(H) + 1$. Nessa caso, basta atribuir uma nova cor a v_j diferente das k cores utilizadas em H. Assim, $\{v_j, X_1, \dots, X_k\}$ é uma coloração para G com $\chi(G) = k + 1 = \omega(H) + 1 = \omega(G)$ cores.

b) $\omega(G) = \omega(H)$. Nesse caso, v_j tem, no máximo, $\omega(G) - 1$ vizinhos. De fato, como I_j tem extremo superior mínimo, então todo intervalo que intersecta I_j deve conter seu extremo superior. Caso contrário teríamos um intervalo com extremo superior menor que de I_j. Mas então v_j e seus vizinhos formam uma clique, pois todo intervalo I_i que intersecta I_j tem como ponto comum o extremo superior de I_j. Como sabemos que a maior clique tem tamanho $\omega(G)$, então I_j tem no máximo $\omega(G) - 1$ vizinhos. Portanto, basta atribuir a v_j uma cor distinta daquela de seus vizinhos. Assim, é possível colorir G com $\omega(G)$ cores.

Portanto, pelo princípio da indução afirmação vale. □

B7. Seja G um grafo tal que todo par de circuitos ímpares tem (pelo menos) um vértice em comum. Mostre que que G tem uma 5-coloração.

Solução:

Prova. Seja G um grafo tal que todo par de circuitos ímpares tem pelo menos um vértice em comum. Seja C um circuito ímpar qualquer em G e seja $H := G - C$. Como todo circuito ímpar em G tem pelo menos um vértice em comum com C, então H não tem circuitos ímpares. Portanto H é bipartido. Dessa forma, é possível colorir H com 2 cores, digamos $\{X_1, X_2\}$. Como C é um circuito impar então possível colorir C com 3 cores, digamos $\{X_3, X_4, X_5\}$. Mas então $\{X_1, \dots, X_5\}$ é uma coloração para G. De fato, $\{X_1, \dots, X_5\}$ partição de G em conjuntos independentes, pois G apenas acrescenta arestas que ligam C à H e não arestas que ligam H à H ou C à C. Dessa forma, a independencia entre os conjuntos é mantida. □