Nome: Rogério Marcos Fernandes Neto NUSP: 10284632
Curso: Bacharelado em Ciência da Computação
MAC0320 - Introdução à Teoria dos Grafos

LISTA 3

E11. Prove que se G é uma árvore tal que $\Delta(G) \geq k$, então G tem pelo menos k folhas.

Solução:

Prova. Seja G uma árvore tal que $\Delta(G) = l \geq k$. Seja v um vértice com maior grau em G e seja $G' = G - v$. Como toda aresta conectada à v é ponte, sabemos que G' tem l componentes, iremos chamar essas componentes de G'_i, $1 \leq i \leq l$. Se uma componente G'_i possui um único vértice u, então u é folha em G. Por outro lado, se G'_i possui pelo menos dois vértices então G'_i é uma árvore não trivial e pelo **teorema 3.4** sabemos que G'_i possui pelo menos duas folhas, das quais pelo menos uma também é folha de G. Portanto G tem pelo menos l folhas e, como $l \geq k$, então G tem pelo menos k folhas. □

E12. Prove que um grafo conexo com $n \geq 1$ vértices e m arestas possui pelo menos $m - n + 1$ circuitos.

Solução:

Prova. Seja G um grafo conexo com $n \geq 1$ vértices e m arestas, iremos mostrar que G possui pelo menos $m - n + 1$ circuitos. Prova por indução em m.
Base: seja $m = n - 1$. Então G é um grafo conexo acíclico e possui 0 circuitos, o que condiz com $m - n + 1 = n - 1 - n + 1 = 0$.
Passo: seja $m > n - 1$ e suponha que a afirmação vale para grafos com até $m - 1$ arestas. Como $m > n - 1$ então, pelo **teorema 3.2** G possui pelo menos um circuito C. Seja α uma aresta qualquer desse circuito e seja $G' = G - \alpha$. Então G' é conexo, pois a aresta removida pertencia a um circuito, e G' possui a mesma ordem de G. Assim, por hipótese, G' possui pelo menos $(m - 1) - n + 1$ circuitos, e como G' tem exatamente um circuito a menos que G então G possui pelo menos $(m - 1) - n + 1 + 1 = m - n + 1$ circuitos.
Portanto, pelo princípio da indução, vale a afirmação.

□

E13. Prove que todo grafo conexo G, simples e não-trivial, tem um árvore geradora T tal que $G - A(T)$ é desconexo.

Soluçao: Podemos reduzir esse problema a mostrar que dado um vértice v do grafo G, existe uma árvore geradora T que contém todas as arestas de v, uma vez que v seria um vértice isolado em $G - A(T)$. Segue a prova do fato.

Prova. Seja G um grafo conexo, simples e não trivial e seja v um vértice qualquer de G. Iremos mostrar que existe uma árvore que contém todas as arestas de v. Seja T uma árvore geradora de G que contém a maior quantidade de arestas de v. Suponha, por absurdo, que T não contém todas as arestas de v. Portanto existe um vértice u tal que $uv \in A(G)$ mas $uv \notin A(T)$. Seja $P = (v, \ldots, w, u)$ o caminho que liga v a u em T e seja $T' = -wu + uv$. Por construção, T' é conexo e também é gerador de G, mas T' possui mais arestas incidentes a v do que T, contrariando a hipótese sobre T, o que é um absurdo. □

E14. Seja G um grafo conexo, T_1 e T_2 árvores geradoras distintas de G, e seja α uma aresta de T_1. Prove que existe uma aresta β em T_2 tal que $T_1 - \alpha + \beta$ é uma árvore geradora de G.

Solução:

Prova. Seja G um grafo conexo e suponha que G possui duas árvores geradoras T_1 e T_2 distintas. Se T_1 e T_2 possuem alguma aresta γ em comum então podemos tomar $\alpha = \beta = \gamma$ e claramente $T_1 - \alpha + \beta$ é uma árvore geradora de G. Suponha então que T_1 e T_2 não possuem arestas em comum. Seja β um aresta qualquer de T_2, então, pelo **teorema 3.5**, $T_1 + \beta$ tem exatamente um circuito C. Seja α uma aresta de C distinta de β. Note que α pertence a T_1 e como α pertence a um circuito, então $T_1 + \beta - \alpha$ é arvore, conexo e gera G. □

E15. Definição: Uma k-coloração dos vértices de um grafo é uma atribuição de no máximo k cores distintas aos vértices desse grafo tal que vértices adjacentes recebem cores distintas.

Definição: Dizemos que um grafo é equi-bicolorido se tem uma 2-coloração de seus vértices com igual número de vértices de cada cor.

EXERCÍCIO: Prove que toda árvore equi-bicolorida tem pelo menos uma folha de cada cor. (*) Alunos da pós-graduação devem fazer duas provas distintas.

Solução: Para a prova desse fato iremos, primeiramente provar outro: seja G um grafo conexo 2-colorido, a soma dos graus dos vértices de mesma cor é igual a $|A|$.

Prova. Seja $G = (V, A)$ um grafo conexo 2-colorido. Como G é 2 colorido, G admite uma bipartição (X, Y). Toda aresta de G incide, por definição, em 2 vértices de cores diferentes. Dessa forma, as arestas que incidem a um vértice $v \in X$ não incidem a outros vértices de X. Portanto, ao efetuar a soma $\sum_{v \in X} g(v)$ estamos somando os graus atribuidos à arestas distintas. Como temos $|A|$ arestas, logo temos que $\sum_{v \in X} g(v) = |A|$. □

Agora sim, a prova pedida:

Prova. Seja $T = (V, A)$ uma árvore equi-bicolorida. Como T é equi-bicolorido, existe uma bipartição (X, Y) de T, cada uma representando uma cor. Além disso, devemos ter $|X| = |Y| = |V|/2$ uma vez que existem quantidades iguais de vértices de cada cor. Suponha, por absurdo, que só existam folhas em um dos conjuntos X ou Y. Sem perda de generalidade suponha que tal conjunto é X. Isso significa que $g(v) \geq 2, \forall v \in Y$. Como existem $|V|/2$ vértices em Y então sabemos que

$$\begin{aligned}\sum_{v \in Y} g(v) &\geq 2 \cdot |V|/2 = |V| \\ &> |V| - 1 = |A| && \text{Pois T é árvore}\end{aligned}$$

Mas se $\sum_{v \in Y} g(v) > |A|$ então, pela proposição provada anteriormente, T não é 2-colorida e portanto não é equi-bicolorida, contrariando a hipótese. $\square$