

Introdução à Teoria dos Grafos (MAC0320 e MAC5770)

Lista 3 - Exercícios E11 a E15

Árvores

Data para entrega da lista resolvida: 15/abril/2020

- E11.** Prove que se G é uma árvore tal que $\Delta(G) \geq k$, então G tem pelo menos k folhas.
- E12.** Prove que um grafo conexo com $n \geq 1$ vértices e m arestas possui pelo menos $m - n + 1$ circuitos.
- E13.** Prove que todo grafo conexo G , simples e não-trivial, tem um árvore geradora T tal que $G - A(T)$ é desconexo.
- E14.** Seja G um grafo conexo, T_1 e T_2 árvores geradoras distintas de G , e seja α uma aresta de T_1 . Prove que existe uma aresta β em T_2 tal que $T_1 - \alpha + \beta$ é uma árvore geradora de G .
- E15.** Definição: Uma k -coloração dos vértices de um grafo é uma atribuição de no máximo k cores distintas aos vértices desse grafo tal que vértices adjacentes recebem cores distintas.

Definição: Dizemos que um grafo é *equi-bicolorido* se tem uma 2-coloração de seus vértices com igual número de vértices de cada cor.

EXERCÍCIO: Prove que toda árvore equi-bicolorida tem pelo menos uma folha de cada cor.

(*) Alunos da pós-graduação devem fazer duas provas distintas.

EXTRA - vale Bônus

B3. (Não depende de conhecimentos dos capítulos 2 ou 3.)

Dizemos que um grafo conexo G é *divisor-comum* se cada vértice v de G pode receber um rótulo $r(v)$, que deve ser um número inteiro positivo, de modo que: dois vértices u, v em G são adjacentes se e só se os números $r(u)$ e $r(v)$ não são coprimos. OBS: Dois números p e q são coprimos se $\text{mdc}(p, q) = 1$.

- (a) Para mostrar que você entendeu a definição, desenhe dois grafos conexos não-isomorfos com 5 vértices e 4 arestas, e atribua rótulos aos seus vértices para mostrar que são divisores-comum.
- (b) Prove que todo grafo simples não-trivial é isomorfo a um grafo divisor-comum.

Requisitos sobre a lista a ser entregue pelo aluno

- (a) Resolver a lista em **folhas sulfite**, se for manuscrita (escanear e enviar).
- (b) **Identificar a lista**, colocando o seu nome completo e curso.
- (c) **Escrever o enunciado de cada exercício** (mesmo que você não consiga resolver).
- (d) Deixar um **espaçamento duplo** entre as linhas para facilitar a correção.
- (e) **Usar a terminologia adotada nas notas de aula**.
- (f) **Caprichar na apresentação** (produzir um texto legível).

Resolver individualmente e sem copiar de outras fontes!