Nome: Rogério Marcos Fernandes Neto   NUSP: 10284632
Curso: Bacharelado em Ciência da Computação
MAC0320 - Introdução à Teoria dos Grafos

LISTA 2

E7. Prove que quaisquer dois caminhos mais longos em um grafo conexo possuem (pelo menos) um vértice em comum.

Solução:

Prova. Prova por absurdo. Seja G um grafo conexo e sejam P e Q dois caminhos mais longos de comprimento k nesse grafo. Suponha que P e Q não possuem nenhum vértice em comum. Como G é conexo, então existe um caminho $R = (u, \ldots, v)$, onde $u \in V(P)$ e $v \in V(Q)$, que conecta algum vértice de P à algum vértice de Q. Seja P_u a maior seção de P tal que u está em umas das extremidades e Q_v a maior seção de Q tal que v está em uma das extremidades. Sem perda de generalidade, suponha que em amobos os casos os vértices correspondentes estão na ponta da direita. Então $\|P_u\|, \|Q_v\| \geq k/2$ e, portanto o caminho $P_u \cdot R \cdot Q_v$ possui comprimento $\|P_u \cdot R \cdot Q_v\| > k/2 + k/2 = k$, o que é um absurdo, pois P e Q são caminhos mais longos. □

E8. Prove por indução em k que o conjunto das arestas de um grafo conexo simples com $2k$ arestas, $k \geq 2$, pode ser particionado em caminhos de comprimento 2. A afirmação continuaria válida se omitíssemos a hipótese de conexidade? Justifique.

Solução:

Prova. Prova por indução em k. Seja G um grafo conexo simples com $2k$ arestas.
Base: Suponha $k = 1$, então G tem duas arestas e como G é simples e conexo, deve ter três vértices u, v e w. Portanto, o conjunto de arestas de G é $A(G) = \{uv, vw\}$. Esse conjunto pode ser particionado em um único caminho u a v.
Passo: Suponha agora que $k \geq 2$ e aque a afirmação vale para grafos com até $2(k-1)$ arestas. Seja $P = (i, j, k)$ um caminho qualquer de tamanho 2 e seja $G' = G \backslash P$. Então G' pode ter 1, 2 ou 3 componentes.
Caso 1: G' tem uma componente só. Nesse caso G' é um grafo conexo com $2(k-1)$ vértices. Nesse caso, por hipótese, G' possui uma partição Q de suas arestas em caminhos de tamanho dois e, portanto, $Q \cup P$ é uma partição em caminhos de tamanho 2 para G.
Caso 2: G' tem duas componentes G'_1 e G'_2.
Se cada componente possui quantidade par de arestas, então, por hipótese, existem partições Q_1 de $A(G'_1)$ e Q_2 de $A(G'_2)$ em caminhos de comprimento 2. Portanto, $Q_1 \cup Q_2 \cup C$ é uma partição para $A(G)$ em caminhos de tamanho 2.
Se cada componente possui quatidade impar de arestas, então cada uma dessa componentes contém pelo menos um dos vértices i, j, k, sendo que esses vértices não ocorrem ao mesmo tempo em duas componentes. Sem perda de generalidade, suponha que $i \in G'_1$ e $j \in G'_2$ e seja $G'' = G'_1 + ij$ e $G''' = G'_2 + jk$. Esses subgrafos tem número par de arestas e são conexos, portanto, por hipótese, existem partições Q'' de $A(G'')$ e Q''' de $A(G''')$ Em caminhos de comprimento 2. Portanto $Q'' \cup Q'''$ é uma partição para $A(G)$ em caminhos de comprimento 2.
Caso 3: G' tem três componentes componentes G'_1, G'_2 e G'_3.

Se cada componente possui quantidade par de arestas, então, por hipótese, existem partições Q_1 de $A(G'_1)$, Q_2 de $A(G'_2)$ e Q_3 de $A(G'_3)$ em caminhos de comprimento 2. Portanto, $Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup C$ é uma partição para $A(G)$ em caminhos de tamanho 2.
Se duas componentes possuem número ímpar de arestas, digamos G'_1 e G'_2, então cada uma dessas duas componentes contém pelo menos um dos vértices i, j, k, sendo que esses vértices não ocorrem ao mesmo tempo em duas componentes. Sem perda de generalidade, suponha que $i \in G'_1$ e $j \in G'_2$ e seja $G'' = G'_1 + ij$ e $G''' = G'_2 + jk$. Esses subgrafos tem número par de arestas e são conexos, portanto, por hipótese, existem partições Q'' de $A(G'')$, Q''' de $A(G''')$ e Q_3 de $A(G_3)$ em caminhos de comprimento 2. Portanto $Q'' \cup Q''' \cup Q_3$ é uma partição para $A(G)$ em caminhos de comprimento 2.
Portanto, pelo princípio da indução, a afirmação vale. □

E9. Prove que todo grafo simples G pode ser respresentado como a união de dois grafos disjuntos nas arestas G_1 e G_2 , tais que G_1 é acíclico e G_2 é um grafo cujos vértices são todos de grau par.

Solução:

Prova. Seja G um grafo simples. Iremos aplicar a ele o seguinte algoritmo:

Encontra-G1-G2(G)
$F \leftarrow G$
$H \leftarrow \emptyset$
enquanto *F tem algum circuito C* **faça**
    $F \leftarrow F \backslash C$
    $H \leftarrow H \cup C$
fim
devolva (F, H)

Afirmo que $F = G_1$ e $H = G_2$. De fato, como, a cada iteração, removemos os circuitos presentes em F, então, ao fim do algoritmo, F é a parte acíclica de G. Por outro lado, a cada iteração do algoritmo, acrescentamos um novo circuito de G em H, portanto, ao fim do algoritmo, H possui todos os circuitos de G. Como H é composto apenas de circuitos, todos seus vértices possuem grau par. O algoritmo, de fato, para em algum momento. Como, a cada iteração, ou paramos o laço ou reduzimos o tamanho do grafo, é garantido que o laço para em algum momento, e o algoritmo termina. □

E10. Prove que um grafo conexo G é euleriano se e só se G contém circuitos $C_1, C_2, \ldots, C_k$, dois a dois disjuntos nas arestas, tais que $A(G) = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_k$. (Exercício 21 do Capítulo 2.)

Solução:

Prova. Seja G um grafo conexo.
Suponha que G contém circuitos $C_1, C_2, \ldots, C_k$, dois a dois disjuntos nas arestas, tais que $A(G) = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_k$, iremos mostrar que G é euleriano. Seja v um vértice qualquer de G, como cada C_i é disjuntos dos outros então $g_G(v) = \sum_{i=1}^{k} g_{C_i}(v)$. Cada parcela $g_{C_i}(v)$ vale 2 se $v \in V(C_i)$ e 0 caso contrário. Portanto, o grau de todos os vértices é par. Como todos é

vértices possuem grau par então, pelo **Teorema 2.1**, G é euleriano.
Prova por indução no número n de vértices no grafo. Suponha agora que G é euleriano, iremos mostrar que $A(G)$ pode ser particionado em circuitos.
Base: Seja $n = 1$. Como o grafo não tem arestas então a afirmação é verdadeira por vacuidade.
Passo: Suponha que $n \geq 2$ e que a firmação vale grafos com até $n - 1$ vértices. Como G é euleriano e conexo, então $\delta(G) \geq 2$, portanto, pela **proposição 1.5** existe pelo menos um circuito C em G. Seja $G' = G - C$. Sabemos que G' possui $k \geq 1$ componentes G'_i,$1 \leq i \leq k$, e, além disso, todos os vértices de G' possuem grau par. Como $|V(G'_i)| < |V(G)|$, para todo i, então por hipótese cada G'_i pode ser particionado em circuitos. Seja P o conjunto que contém os circuitos de cada uma dessas partições. Como nenhum circuito de P possui arestas em comum com C e P também particiona G', então $Q = C \cup P$ particiona G.
Portanto, pelo principio da indução, vale a afirmação. □

B2. Seja G um grafo simples. Prove que, se G é auto-complementar de ordem $4k + 1$, então G tem um vértice de grau $2k$.

Solução:

Prova. Prova por absurdo. Seja G um grafo simples, auto-complementar de ordem $4k + 1$. Suponha que G não possui um vértice de grau $2k$. Seja

$$\phi(x) := \text{número de vértices em } G \text{ que possuem grau } x$$

Sabemos que

$$\sum_{0 \leq x \leq 4k} \phi(x) = |V(G)|$$

mas,

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq x \leq 4k} \phi(x) &= \sum_{0 \leq x < 2k} (\phi(x) + \phi(4k - x)) + \phi(2k) \\ &= \sum_{0 \leq x < 2k} (\phi(x) + \phi(4k - x)) \qquad \text{pois G não possui vértice com grau } 2k \end{aligned}$$

Mas como G é auto-complementar, então $\phi(x) = \phi(4k - x)$ para todo x. Potanto o somatório acima resulta em um número par, o que é um absurdo, pois sabemos que $|V(G)|$ é impar.

□