Nome: Rogério Marcos Fernandes Neto NUSP: 10284632
Curso: Bacharelado em Ciência da Computação
MAC0320 - Introdução à Teoria dos Grafos

LISTA 5

E17. Seja G um grafo com n vértices. Prove que se G é hamiltoniano, então $\alpha(G) \leq n/2$.

Definição: $\alpha(G)$ denota a cardinalidade de um maior conjunto estável (ou independente) de G. Um conjunto de vértices é estável (ou independente) se os seus vértices são dois a dois não-adjacentes.

Solução:

Prova. Seja G um grafo hamiltoniano de ordem n. Suponha, por absurdo, que $\alpha(G) > n/2$. Dessa forma, existe um conjunto independente $H \subseteq V(G)$ tal que $|H| > n/2$. Seja $H' = V(G - H)$. Como $|H| + |H'| = n$, então devemos ter $|H'| < n/2$, pois $|H| > n/2$. Assim, temos que o grafo $G - H'$ contém apenas vértices de H e portanto, possui $|H|$ componentes, pois os vértices de $|H|$ não são vizinhos dois-a-dois. Dessa forma, $c(G - H') = |H| > n/2 > |H'|$, e portanto, pelo **teorema 4.1**, G não pode ser hamiltoniano, contradizendo a hipótese. Portanto devemos ter $\alpha(G) \leq n/2$ $\square$

E18. Prove que se G é um grafo simples de ordem $n \geq 3$ com $|A(G)| \geq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2$, então G é hamiltoniano. Dê um exemplo de um grafo simples não hamiltoniano com n vértices e $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$ arestas. [Dica: Tentar usar uma das condições suficientes vistas.]

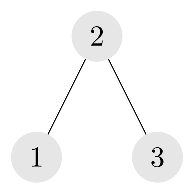
Solução:

Prova. Seja G um grafo simples de ordem $n \geq 3$ com $|A(G)| \geq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2$. Como o grafo não é completo então existem vértices não adjacentes em G. Sejam u e v dois vértices não adjacentes quaisquer de G. Seja $X = V(G) - u - v$. Como $|X| = n - 2$ então o número máximo de arestas que tem as duas pontas em X é $\binom{n-2}{2} = \frac{(n-2)(n-3)}{2}$. Portanto, existem pelo menos

$$\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2\right) - \left(\frac{(n-2)(n-3)}{2}\right) = n$$

aresta com pontas em u ou em v. Portanto $g(u) + g(v) = n$. Como u e v são genéricos, então, pelo **teorema 4.3 (Ore)**, G é hamiltoniano. $\square$

Exemplo: Seja o seguinte grafo:



Esse grafo possui $n = 3$ vértices e possui $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1 = \frac{2 \cdot 1}{2} + 1 = 2$ arestas. O grafo é acíclico e portanto não pode ser hamiltoniano.

E19. Seja G um grafo simples de ordem n. Prove que se $g(u) + g(v) \geq n - 1$ para todo par de vértices não-adjacentes u, v de G, então G tem um caminho hamiltoniano.

OBS: Dá para fazer a prova com a técnica do cruzamento, imitando a prova vista para o Teorema de Ore; se possível, faça uma prova sem usar essa técnica, mas usando uma construção que permita usar algum resultado sobre grafos hamiltonianos.

Solução:

Prova. Suponha que a afirmação seja falsa. Então existe um grafo sem caminho hamiltoniano maximal G de ordem n e para todo par de vértices $i, j \in V(G)$ não adjacentes temos que $g(i) + g(j) \geq n - 1$. Ou seja, G não possui um caminho hamiltoniano, mas par qualquer par de vértices não adjacentes $i, j \in V(G)$, temos que $G + ij$ possui um caminho hamiltoniano.
Seja $P = (u = v_1, v_2, \ldots, v_{n-1} = v)$ um caminho mais longo em G. Pela maximalidade de G sabemos que $V(P) = n - 1$. Seja w o único vértice de G que não está em P. Note que se v_i é vizinho de u então v_{i-1} não pode ser vizinho de w, pois senão

$$P' = (v_{n-1}, v_{n-2}, \ldots, v_i, v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, w)$$

seria um caminho hamiltoniano, contrariando a escolha de G. Portanto, para todo vértice adjacente a u existe um vértice em $G - w$ que não é adjacente a w. Além disso, note que w não pode ser vizinho de v, pois $P + vw$ seria um caminho hamiltoniano, também contrariando a escolha de G. Mas nesse caso,

$$g(w) \leq n - 1 - g(u) - 1 \iff g(w) + g(u) \leq n - 2$$

o que contraria nossa hipótese sobre o grau de vértices não adjacentes. Portanto a afirmação é verdadeira. □

E20. Seja G um grafo simples (X, Y)-bipartido com $|X| = |Y| = k \geq 2$. Prove que se para todo par u, v de vértices não-adjacentes tem-se que $g(u) + g(v) > k$, então G é hamiltoniano.

[Sugestão: Provar por contradição, imitando a prova feita para o Teorema de Dirac, usando a técnica do cruzamento.]

Solução:

Prova. Suponha que a afirmação seja falsa. Então existe um grafo não hamiltoniano maximal G e (X, Y)-bipartido com $|X| = |Y| = k \geq 2$ e para todo par de vértices $i \in X$, $j \in Y$ não adjacentes temos que $g(i) + g(j) > k$. Ou seja, G não é hamiltoniano, mas para qualquer par de vértices não adjacentes $i, j \in V(G)$, temos que $G + ij$ é hamiltoniano.
Se cada vértice de X estivesse ligado a todos os vértices de Y, equivalentemente teriamos que cada vértice de Y estaria de ligado a todos os vértices de X e o grafo G seria claramente hamiltoniano. Portanto existem dois vértices $u \in X$ e $v \in Y$ não adjacentes. Pela maximalidade de G temos que o grafo $H = G + uv$ é hamiltoniano e portanto, todo circuito hamiltoniano em H deve contem a aresta uv. Então G tem um caminho hamiltoniano $P = (u = v_1, v_2, \ldots, v = v_n)$. Note que se v_i é vizinho de u então v_{i-1} não pode ser vizinho de v. Pois nesse caso teriamos que

$$C = (v_1, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n, v_{i-1}, v_{i-2}, \ldots, v_1)$$

seria um circuito hamiltoniano, contrariando a escolha de G. Portanto, para todo vértice adjacente a u existe um vértice em $G - v$ que não é adjacente a v. Além disso, como G é bipartido, então v só se liga a vértices de X. Mas então, como $|X| = k$, temos

$$g(v) \leq k - g(u) \iff g(v) + g(u) \leq k$$

o que contraria nossa hipótese sobre o grau de vértices não adjacentes. Portanto a afirmação é verdadeira. $\square$