

Introdução à Teoria dos Grafos (MAC0320 e MAC5770)

Lista 6 - Exercícios E21 a E25

Cap 5 - Emparelhamentos

Data para entrega dos exercícios: 7/maio/2020

0=====0-----0=====0-----0=====0-----0=====0-----0

- E21.** Prove que uma árvore tem no máximo um emparelhamento perfeito.
- E22.** Sejam E e F emparelhamentos num grafo G . Prove que existem emparelhamentos E' e F' tais que $|E'| = |E| - 1$, $|F'| = |F| + 1$ e $E' \cup F' = E \cup F$.
- E23.** Seja G um grafo (X, Y) -bipartido simples com $|X| = |Y| = n \geq 1$. Prove que se $|A(G)| > n(n-1)$ então G contém um emparelhamento perfeito. (Sugestão: aplicar o Teorema de Hall.)
- E24.** Prove que se G é um grafo (X, Y) -bipartido com pelo menos uma aresta e $g(x) \geq g(y)$ para todo $x \in X$ e $y \in Y$, então G tem um emparelhamento que cobre X .
- E25.** Um *retângulo latino* $m \times n$ é uma matriz com m linhas e n colunas, cujas entradas são símbolos, sendo que cada símbolo ocorre no máximo uma vez em cada linha e em cada coluna. Um *quadrado latino* de ordem n é um retângulo latino $n \times n$ sobre n símbolos.
- Prove: Se $m < n$ então todo retângulo latino $m \times n$ sobre n símbolos pode ser estendido a um quadrado latino de ordem n .
- Dicas:** (i) usar o resultado do exercício E24 (mesmo que você não tenha resolvido esse exercício). (ii) Basta mostrar como se pode estender um retângulo latino $m \times n$, com $m < n$, a um retângulo latino $(m+1) \times n$.

EXTRA - vale Bônus

[B5.] Seja T uma árvore. Prove que T tem um emparelhamento perfeito se e só se $T - v$ tem um único componente de ordem ímpar para cada $v \in V(T)$.

EXTRA (resolver, mas não precisa entregar)

Seja G um grafo simples com n vértices, n par, e $g(v) > n/2$ para todo v em $V(G)$. Prove que G contém 3 emparelhamentos perfeitos dois a dois disjuntos. [Usar conhecimentos do Capítulo 4.]

RECOMENDAÇÕES

- (a) Resolver a lista em **folhas sulfite**, se for manuscrita (escanear e enviar).
- (b) **Identificar a lista**, colocando o seu nome completo e curso.
- (c) **Escrever o enunciado de cada exercício** (mesmo que você não consiga resolver).
- (d) Deixar um **espaçamento duplo** entre as linhas para facilitar a correção.
- (e) **Usar a terminologia adotada nas notas de aula**.
- (f) **Caprichar na apresentação** (produzir um texto legível).

Resolver individualmente e sem consultas a outras fontes!