

# Uma explicação sobre as características do grafo de Petersen

Bacharelado em Ciência da Computação  
MAC0320 - Introdução à Teoria dos Grafos

Rogério Marcos Fernandes Neto  
NUSP: 10284632

## 1 Introdução

Quando se inicia o estudo sobre um grafos, são estudadas diversas definições e características básicas que podemos quantificar ou atribuir a eles. Um grafo interessante que aparece em meio a esse estudo é o **grafo de Petersen**. O grafo de Petersen é um grafo bem característico que pode ser definido da seguinte forma:

**Definição 1:** Seja  $X := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . O grafo de Petersen é o grafo  $G = (V, A)$  onde  $V = \{\{v, w\} : v, w \in X, v \neq w\}$  e  $A := \{\{u, v\} : u \cap v = \emptyset\}$

Existem várias representações possíveis vindas dessa definição. A mais famosa é a seguinte figura:

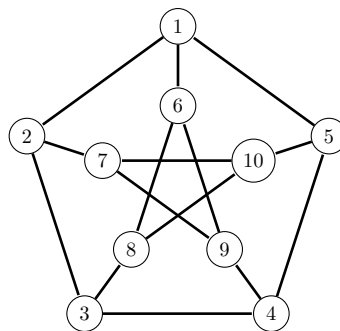


Figure 1: Grafo de Petersen

As próximas seções são dedicadas a explicar algumas características desse grafo. Cada seção será inspirada em um capítulo apresentado pela professora Yoshiko Wakabayashi. Não nos preocuparemos aqui em refazer todas as definições apresentadas em aula mas sim aplica-las diretamente. A menos que especificado de outra forma, iremos supor que o grafo  $G$  referido nas notações matemáticas se referem ao grafo de Petersen

## 2 Conceitos e Resultados Básicos

O grafo de Petersen possui 10 vértices no total e 15 arestas, isso é,  $|V(G)| = 10$  e  $|A(G)| = 15$ . Além disso, esse grafo é **simples** e **conexo**. Todos os vértices do grafo de Petersen possuem grau 3, isso pode ser conferido na **Figura 1**. Tal fato o classifica como o grafo **3-regular**.

Como o grafo de Petersen possui 15 arestas, então seu grafo complementar  $\bar{G}$  possui  $|V(\bar{G})| = |V(G)|(|V(G)| - 1)/2 - 15 = 30$  arestas e deve ser um grafo 6-regular. Pelo número de arestas de  $\bar{G}$  já é possível descartar a possibilidade de  $G$  ser **auto-complementar**. Uma possível representação de  $\bar{G}$  é:

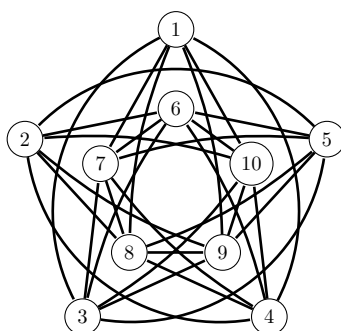


Figure 2: Complementar do grafo de Petersen

Outra possível configuração do grafo de Petersen e que, portanto, configura um **isomorfismo** dele é a seguinte:

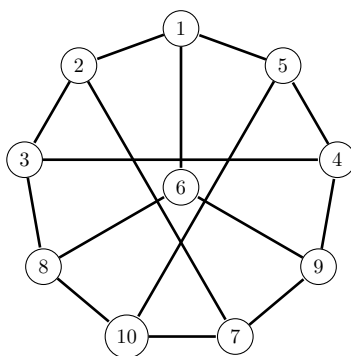


Figure 3: Outra configuração do grafo de Petersen

Se tentar procurar um circuito de tamanho menor que 5 no grafo de Petersen em pouco tempo verá que não está tendo sucesso. Isso sugere que talvez o menor comprimento de um circuito nesse grafo, sua **cintura**, valha 5. De fato, é fácil encontrar um circuito de tamanho 5 na Figura 3, tome a sequência (1, 6, 9, 4, 5) por exemplo. Dessa forma se provarmos que a cintura não pode ser menor 5, então está provado que  $\text{cint}(G) = 5$ . Uma prova desse fato segue.

*Prova.* Para essa prova, usaremos os conjuntos e as definições apresentadas em **Definição 1**. Seja  $G$  o grafo de Petersen e seja  $C$  um circuito em  $G$  de comprimento  $m$ . Suponha por absurdo

que  $m < 5$ . Temos dois casos:

$m = 3$ . Nesse caso, suponha que  $C = (u, v, w)$  e sem perda de generalidade suponha que  $u = \{a, b\}$ ,  $v = \{i, j\}$  e  $w = \{k, l\}$ , com  $a, b, i, j, k, l \in X$ . Como  $u, v, w$  são dois a dois vizinhos, então  $u, v, w$  são dois a dois disjuntos, mas então isso implica que  $a, b, i, j, k, l$  são todos distintos, mas, por definição  $|X| = 5$ , o que é um absurdo.

$m = 4$ . Nesse caso, suponha que  $C = (u, v, w, x)$  e sem perda de generalidade suponha que  $u = \{a, b\}$ ,  $v = \{i, j\}$ ,  $w = \{a, c\}$  e  $x = \{i, k\}$ . De fato, devemos ter  $u \cap w \neq \emptyset$  e  $v \cap x \neq \emptyset$  pois caso contrário seria formar um circuito de tamanho 3, contradizendo a hipótese sobre  $m$ . Portanto, devemos ter  $a, b, c, i, j, k$  todos distintos, mas sabemos que  $|X| = 5$ , o que é um absurdo.

□

Portanto, temos que  $\text{cint}(G) = 5$ .

Pela Figura 3 fica evidente um circuito de tamanho 9  $(1, 2, 3, 8, 10, 7, 9, 4, 5)$ . Esse, de fato, é o tamanho de um maior circuito em  $G$ , e portanto temos que a **circunferência** de  $G$  vale 9. Na seção sobre grafos hamiltonianos, veremos porque a circunferência desse grafo não pode valer 10.

Outro aspecto interessante desse grafo é que se tomar dois vértices quaisquer, verá que a distância entre eles é no máximo 2. Em outras palavras, temos que o **diâmetro** desse grafo vale 2. Um pequena prova do fato segue.

*Prova.* Seja  $G$  o grafo de Petersen. Seja  $u$  um vértice qualquer de  $G$ . Sabemos que  $u$  possui apenas 3 vizinhos.

Sejam  $i, j, k$  os 3 vizinhos de  $u$ . Sabemos que  $i, j, k$  não são vizinhos, caso contrário, teríamos um circuito de comprimento menor que 5, um absurdo, pois  $\text{cint}(G) = 5$ . Além do vértice  $u$  os vértices  $i, j, k$  não podem ter vértices vizinhos em comum. Suponha, sem perda de generalidade, que os vértices  $i$  e  $j$  possuem um vértice vizinho  $w$  em comum, então  $(u, i, w, j)$  é um circuito de tamanho menor que 5, um absurdo.

Portanto, juntos, os vértices  $i, j, k$  são vizinhos de 6 vértices distintos e diferentes de  $u$ , ou seja, os demais vértices do grafo  $G$ . Portanto  $u$  possui um caminho de comprimento 1 aos vértices  $i, j, k$  e um caminho de comprimento de tamanho 2 aos demais vértices do grafo.

Assim, temos que  $\text{diam}(G) = 2$ .

□

Por último, verá que não conseguirá encontrar uma bipartição em  $G$ . Isso se deve ao fato de que o grafo de Petersen não é bipartido. Segue a prova.

*Prova.* Pela **proposição 1.6** das notas de aula sabemos que um grafo é bipartido se e somente se não possui circuitos ímpares. Sabemos que  $G$  possui um circuito de tamanho 5, pois  $\text{cint}(G) = 5$ . Portanto, o grafo de Petersen não é bipartido.

□

### 3 Grafos Eulerianos

Dizemos que um grafo conexo possui um **trilha euleriana** se ele possui uma trilha que passa por todas as arestas de um grafo. Se um grafo conexo possui uma trilha euleriana fechada, dizemos que ele é um *grafoeuleriano*.

O grafo de Petersen não é Euleriano. Segue a prova:

*Prova.* De acordo com o **teorema 2.1** um grafo é euleriano se e só se todos os seus vértices possuem grau par. Todos os vértices do grafo de Petersen possuem grau 3, ou seja, grau ímpar. Portanto o grafo de Petersen Euleriano.  $\square$

Além disso, o grafo de Petersen também não possui um trilha euleriana. Segue a prova:

*Prova.* Pelo **corolário 2.2** sabemos que um grafo possui uma trilha euleriano se e só se esse grafo possui no máximo dois vértices de grau ímpar. O grafo de Petersen possui 10 vértices de grau ímpar e, portanto, não possui uma trilha euleriana.  $\square$

De acordo com o **corolário 2.3** se um grafo  $G$  possui  $2k > 2$  vértices de grau ímpar então é possível particionar  $A(G)$  em  $k$  trilhas disjuntas nas arestas. O grafo de Petersen possui 10 vértices de grau ímpar, portanto deve ser possível encontrar 5 trilhas disjuntas nas arestas que cubram todas as arestas de  $G$ . Tal configuração de caminhos pode ser vista na **Figura 4**, cada caminho foi colorido de uma cor diferente para facilitar a visualização.

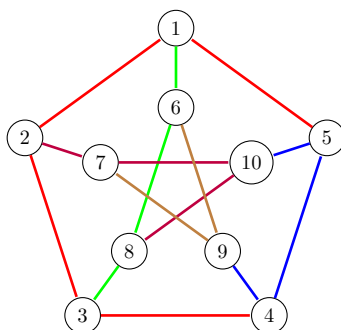


Figure 4: Partição das arestas do grafo de Petersen em 5 trilhas disjuntas nas arestas

Um pergunta interessante a se fazer seria: qual o número de mínimo de arestas a serem adicionadas do grafo de Petersen de forma que o grafo resultante seja euleriano. Bem, sabemos que todo vértice no grafo de Petersen tem grau ímpar, ou sejam, 10 vértices. Sabemos também que cada aresta inserida tem o potencial de transformar dois vértices de grau ímpar em vértices de grau par. Isso sugere que o número  $k$  mínimo de arestas a serem inseridas deve ser  $k \geq 10/2 = 5$ . Portanto, se conseguirmos encontrar 5 arestas que quando inseridas o grafo resultante é euleriano então sabemos que esse número mínimo vale 5. De fato, conseguimos encontrar tais 5 arestas, iterativamente acrescentar arestas entre dois vértices de grau ímpar não vizinhos. Uma possível organização grafo resultante fica como na **Figura 5**.

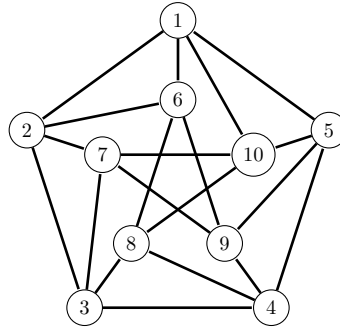


Figure 5: Grafo euleriano resultante de inserções de arestas no grafo de Petersen

Note que todo vértice possui grau par e, portanto, o grafo é euleriano.

## 4 Árvores

Árvores são grafos conexos minimais, ou seja, são grafos conexos com a menor quantidade de arestas possível. Uma propriedade marcantes desses grafos é que eles possuem  $n - 1$ , onde  $n$  é o número de vértices no grafo. Claramente o grafo de Petersen não é uma árvore.

Por outro lado, como o grafo de Petersen é conexo, então, pelo **corolário 3.6**, ele possui pelo menos uma árvore geradora. De fato, o grafo de Petersen não possui só uma árvore geradora, mas várias. Uma árvore geradora de exemplo pode ser vista na **Figura 5**.

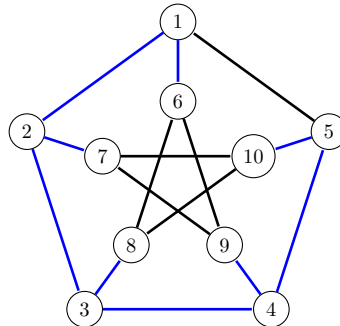


Figure 6: Uma árvore geradora do grafo de Petersen em azul

## 5 Grafos Hamiltonianos

Um caminho (ou circuito) hamiltoniano é um caminho (ou circuito) que passa por todos os vértices de um grafo. Dizemos que um grafo é hamiltoniano se ele possui um circuito hamiltoniano.

Se procurar, verá que o grafo de Petersen possui um caminho hamiltoniano. Esse caminho é fácil de ver na Figura 3, basta tomar o seguinte caminho  $(2, 3, 8, 10, 7, 9, 4, 5, 1, 6)$ .

Por outro lado encontrará problemas se tentar encontrar um circuito hamiltoniano no grafo de Petersen, porque o grafo de Petersen não é hamiltoniano. Uma prova segue:

*Prova.* Seja  $G$  o grafo de Petersen. Suponha, por absurdo, que  $G$  é hamiltoniano. Então existe um circuito  $C = (v_1, \dots, v_{10})$  que passa por todos os vértices de  $G$ .

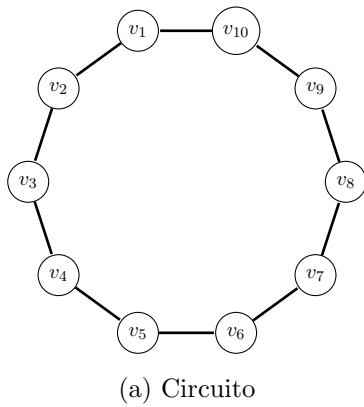


Figure 7: plots of....

□