

Introdução à Teoria dos Grafos (MAC0320 e MAC5770)

Lista 9 - Exercícios E34 a E38

Conexidade, Teorema de Menger

Data para entrega dos exercícios: 15/junho/2020 (2a. feira)

- E34.** Mostre que para todo par (k, ℓ) tais que $1 \leq k \leq \ell$, existe um grafo G tal que $\kappa(G) = k$ e $\kappa'(G) = \ell$.
- E35.** Seja G um grafo k -conexo e seja G' o grafo obtido de G acrescentando-se um novo vértice e arestas ligando esse vértice a todos os vértices de G . Prove que G' é $(k+1)$ -conexo.
- E36.** Prove que se G é um grafo bipartido k -regular conexo, então G é 2-conexo.
[Sugestão: Suponha que G tenha um vértice-de-corte x . Então $G = G_1 \cup G_2$, e $V(G_1) \cap V(G_2) = \{x\}$. Analise a quantidade de arestas em G_1 (lembrando que G é k -regular) e deduza – por essa análise – alguma informação sobre k relativamente a $g_{G_1}(x)$, de modo a obter uma contradição.]
- E37.** Se G é um grafo k -conexo, e $k \geq 2$, então qualquer conjunto de k vértices de G pertence a um mesmo circuito de G . (Tal circuito pode conter outros vértices adicionais além dos k vértices fixados.)
- E38.** Seja $G = (V, A)$ um grafo 2-conexo de ordem n , e sejam v_1, v_2 vértices de G . Sejam n_1 e n_2 inteiros positivos tais que $n_1 + n_2 = n$. Mostre que existe uma partição de V em $V_1 \cup V_2$ com $|V_1| = n_1$ e $|V_2| = n_2$, tal que $G[V_i]$ é conexo, e $v_i \in V_i$ para $i = 1, 2$.

EXTRA - vale Bônus

[B8.] Seja $G = (V, A)$ um grafo, $d \geq 2$ um inteiro, e s, t dois vértices de G que estão à distância d . Suponha que, para todo $S \subset V \setminus \{s, t\}$ tal que $|S| < k$, existe em $G - S$ um caminho entre s e t , de comprimento d . Mostre que em G existem k caminhos entre s e t , todos de comprimento d , que são dois a dois internamente disjuntos.

[Sugestão: pensar na construção de um grafo que resulta da orientação de algumas arestas de G , e usar o Teorema de Menger para grafos orientados.] [Pode também fazer outra prova sem usar essa sugestão.]

RECOMENDAÇÕES

Seguir todas as recomendações que têm sido feitas nas listas anteriores.

Resolver individualmente e sem consultas a outras fontes!