Nome: Rogério Marcos Fernandes Neto NUSP: 10284632
Curso: Bacharelado em Ciência da Computação
MAC0320 - Introdução à Teoria dos Grafos

LISTA 10

E39. Mostre que se G é um grafo simples conexo planar com cintura $k \geq 3$, então

$$|A(G)| \leq k(|V(G)| - 2)/(k - 2)$$

Usando o resultado acima prove que o grafo de Petersen não é planar. (Lembramos que a *cintura* de G é o comprimento de um menor circuito de G.)

Solução:

Prova. Seja G um grafo simples conexo com cintura $k \geq 3$.

Note que nesse grafo temos que $gr(f) \geq k$. De fato, como $n \geq k$ então a face externa deve ter no mínimo grau k (caso onde não existem arestas de corte), e, como G é simples, qualquer outra face é determinada por um circuito facial, e cada circuito dessa forma tem grau no mínimo k. Portanto, temos que

$$k|F(G)| \leq \sum_{f \in F(G)} gr(f)$$

Pelo **teorema 9.1** sabemos que $\sum_{f \in F(G)} gr(f) = 2|A(G)|$. Portanto

$$k|F(G)| \leq 2|A(G)|$$

Além disso, sabemos pela **fórmula de Euler** que $|F(A)| = 2 + |A(G)| - |V(G)|$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} k(2 + |A(G)| - |V(G)|) &\leq 2|A(G)| \\ 2k + |A(G)|k - |V(G)|k &\leq 2|A(G)| \\ |A(G)|k + 2|A(G)| &\leq |V(G)|k - 2k \\ |A(G)|(k-2) &\leq k(|V(G)| - 2) \\ |A(G)| &\leq \frac{k(|V(G)| - 2)}{(k-2)} \end{aligned}$$

□

Prova. O grafo de Petersen possui 10 arestas e cintura igual a $k = 5$. Temos que

$$|A(G)| = 15 > 13.333... = \frac{5(10-2)}{5-2} = \frac{k(|V(G)| - 2)}{(k-2)}$$

Portanto, pelo teorema provado acima, o grafo de Petersen não é planar. □

E40. Mostre que se G é um grafo de ordem 11, então ou G ou seu complemento não é planar.

Solução:

Prova. Seja G um grafo simples de ordem $n = 11$.

Se G não é planar não há o que provar. Portanto, suponha que G é planar, iremos mostrar que $\bar{G}$ não é planar. Como G é planar, pelo **teorema 9.4** sabemos que $A(G) \leq 3n - 6$. Sabemos que $A(G) + A(\bar{G}) = n(n-1)/2$. Portanto

$$\begin{aligned} A(\bar{G}) &= n(n-1)/2 - A(G) \\ A(\bar{G}) &\geq n(n-1)/2 - 3n + 6 \\ A(\bar{G}) &\geq n^2/2 - n/2 - 3n + 6 \\ A(\bar{G}) &\geq n^2/2 - 7n/2 + 6 \end{aligned}$$

Note que

$$28 = n^2/2 - 7n/2 + 6 > 3n - 6 = 27$$

Portanto, pelo **teorema 9.4** temos que $\bar{G}$ não é planar. □

E41. Um grafo planar G é *auto-dual* se é isomorfo ao seu dual (geométrico) G^*.

a) Mostre que se G é auto-dual, então $2|V(G)| = |A(G)| + 2$.

b) Mostre que nem todo grafo G com $2|V(G)| = |A(G)| + 2$ é auto-dual.

Solução:

a) *Prova.* Seja G um grafo auto-dual. Pela definição de grafo dual, sabemos que

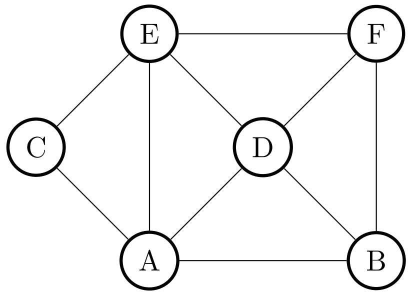
$$|V(G*)| = |F(G)|$$

Mas como G é auto-dual, sabemos que $|V(G*)| = |V(G)|$, pois G é isomorfo a G^*. Com essa enformação e a **fórmula de Euler** temos que

$$\begin{aligned} |V(G^*)| &= |F(G)| \\ |V(G)| &= |A(G)| + 2 - |V(G)| \\ 2|V(G)| &= |A(G)| + 2 \end{aligned}$$

□

b) Tome o seguinte grafo e nomeie de G:



Esse grafo possui $|V(G)| = 6$ e $|A(G)| = 10$. Portanto temos que

$$2|V(G)| = 12 = 10 + 2 = |A(G)| + 2$$

Mas note que esse grafo não é auto-dual. Os vértices E, A e D possuem grau 4. Entretanto, nenhuma face de G possui grau 4, e portanto, nenhum vértice de G^* terá grau 4. Portanto, G e G^* não podem ser isomorfos e G não é auto-dual.

E42. Para todo par u, v de vértices de um grafo, seja $\gamma(u, v)$ a cardinalide de uma *coleção máxima* de caminhos de u a v, dois a dois internamente disjuntos (nos vértices), cada um de comprimento pelo menos 2.

Prove que se G é um grafo tal que $\gamma(u, v) \leq 2$ para todo par $u, v \in V(G)$, etnão G é planar.

Solução: Para essa questão iremos prova primeiro a seguinte afirmação:

Lema Auxiliar: Se G é uma subdivisão de K_5 ou $K_{3,3}$ então existe um par de vértices $v, w \in V(G)$ tais que $\gamma(u, v) = 3$.

Prova. Seja G um grafo que é subdivisão de K_5 ou $K_{3,3}$.Faremos a prova por indução em $k \geq 0$, onde k é o número de vértices com grau 2 em G, ou seja, o número operações de subdivisão apicadas a K_5 ou $K_{3,3}$ que originam o grafo G.
Base: Suponha $k = 0$. Então G é K_5 ou $K_{3,3}$ em ambos os casos, existem 2 vértices $v, w \in V(G)$, tais que existem 3 caminhos distintos com comprimento maior que 2 e disjuntos nos vértices que ligam ambos.
Passo: Suponha $k \geq 1$ e que a afirmação vale para grafos originados com $k - 1$ operações de subdivisão. Seja $i \in V(G)$ um vértice de grau 2, ou seja, originado por uma operação de subdivisão e seja j um vizinho qualquer de i. Defina $G' = G/ij$ e seja z o vértice originado da contração das arestas i e j. Então G' possui exatamente $k - 1$ vértices com grau 2 e também é uma subdivisão de K_5 ou $K_{3,3}$ pois a operação de contração foi aplicado à uma aresta originada por uma subdivisão. Então, por hipótese, existem dois vértices $u, v \in V(G)$ que possuem 3 caminhos C_1, C_2, C_3 disjuntos nos vértices de tamanho pelo menos 2.
Se z não pertence a nenhum desses caminhos então os 3 caminhos também são 3 caminhos

disjuntos e de tamanho 2 em G.
Caso contrário, sem perda de generalidade, suponha que $z \in C_1$. Então $C_1 = (u = v_1, \ldots, z, \ldots, v = v_l)$. Defina $C' = (u = v_1, \ldots, i, j, \ldots, v = v_l)$.$C'$ possui comprimento maior que C_1 e os novos vértices utilizados não estão presentes nos outros caminhos C_2 e C_3 Assim temos que C_2, C_3, C' são 3 caminhos disjuntos nos vértices e de tamanho pelo menos 2 para os vértices u, v em G.

Portanto, pelo princípio da indução, a afirmação vale. $\square$

Agora para a prova pedida:

Prova. Seja G um grafo tal que $\gamma(u, v) \leq 2$ para todo $u, v \in V(G)$. Como $\gamma(u, v) \leq 2$ para todo $u, v \in V(G)$ então, pelo **Lema Auxiliar** G não possui subdivisões de K_5 e $K_{3,3}$ e portanto, pelo **Teorema de Kuratowski** o grafo G é planar. $\square$