Uma explicação sobre as características do grafo de Petersen

Bacharelado em Ciência da Computação
MAC0320 - Introdução à Teoria dos Grafos

Rogério Marcos Fernandes Neto
NUSP: 10284632

1 Introdução

Quando se inicia o estudo sobre um grafos, são estudadas diversas definições e características básicas que podemos quantificar ou atribuir a eles. Um grafo interessante que aparece em meio a esse estudo é o **grafo de Petersen**. O grafo de Petersen é um grafo bem característico que pode ser definido da seguinte forma:

Definição 1: Seja $X := \{1, 2, 3, 4, 5\}$. O grafo de Petersen é o grafo $G = (V, A)$ onde $V = \{\{v, w\} : y, w, \in X, y \neq w\}$ e $A := \{\{u, v\} : u \cap v = \emptyset\}$

Existem várias representações possíveis vindas dessa definição. A mais famosa é a seguinte figura:

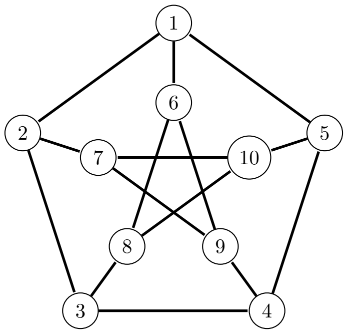


Figure 1: Grafo de Petersen

As próximas seções são dedicados a explicar algumas características desse grafo. Cada seção será inspirada em um capítulo apresentado pela professora Yoshiko Wakabayashi. Não nos preocuparemos aqui em refazer todas as definições apresentadas em aula mas sim aplica-las diretamente. A menos que específicado de outra forma, iremos supor que o grafo G referido nas notações matemáticas se referem ao grafo de Petersen

2 Conceitos e Resultados Básicos

O grafo de Petersen possui 10 vértices no total e 15 arestas, isso é, $|V(G)| = 10$ e $|A(G)| = 15$. Além disso, esse grafo é **simples** e **conexo**. Todos os vértices do grafo de Petersen possuem grau 3, isso pode ser conferido na **Figura 1**. Tal fato o classfica como o grafo **3-regular**.

Como o grafo de Petersen possui 15, arestas, então seu grafo complementar $\bar{G}$ posssui $|V(\bar{G})| = |V(G)|(|V(G)| - 1)/2 - 15 = 30$ arestas e deve ser um grafo 6-regular. Pelo número de arestas de $\bar{G}$ ja é possível descartar a possíbilidade de G ser **auto-complementar**. Uma possível representação de $\bar{G}$ é:

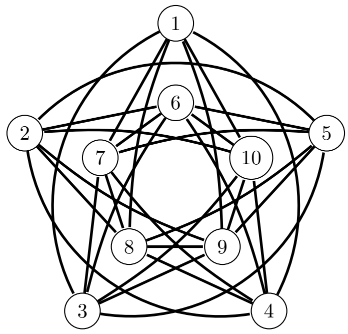


Figure 2: Complementar do grafo de Petersen

Outra possível configuração do grafo de Petersen e que, portanto, configura um **isomorfismo** dele é a seguinte:

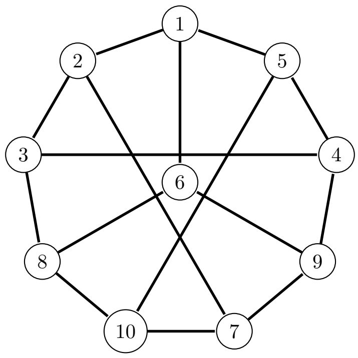


Figure 3: Outra configuração do grafo de Petersen

Se tentar procurar um circuito de tamanho menor que 5 no grafo de Petersen em pouco tempo verá que não está tendo sucesso. Isso sugere que talvez o menor comprimento de um circuito nesse grafo, sua **cintura**, valha 5. De fato, é fácil encontrar um circuito de tamanho 5 na Figura 3, tome a sequencia $(1, 6, 9, 4, 5)$ por exemplo. Dessa forma se provarmos que a cintura não pode ser menor 5, então está provado que $\text{cint}(G) = 5$. Uma prova desse fato segue.

Prova. Para essa prova, usaremos os conjuntos e as definições apresentadas em **Definição 1**. Seja G o grafo de Petersen e seja C um circuito em G de comprimento m. Suponha por absurdo que $m < 5$. Temos dois casos:

$m = 3$. Nesse caso, suponha que $C = (u, v, w)$ e sem perda de generalidade suponha que $u = \{a, b\}$, $v = \{i, j\}$ e $w = \{k, l\}$, com $a, b, i, j, k, l \in X$. Como u, v, w são dois a dois vizinhos, então u, v, w são dois a dois disjuntos, mas então isso implica que a, b, i, j, k, l são todos distintos, mas, por definição $|X| = 5$, o que é um absurdo.

$m = 4$. Nesse caso, suponha que $C = (u, v, w, x)$ e sem perda de generalidade suponha que $u = \{a, b\}$, $v = \{i, j\}$, $w = \{a, c\}$ e $x = \{i, k\}$. De fato, devemos ter $u \cap w \neq \emptyset$ e $v \cap x \neq \emptyset$ pois caso contrário seria fomar um circuito de tamanho 3, contradizendo a hipotese sobre m. Portanto, devemos ter a, b, c, i, j, k todos distintos, mas sabemos que $|X| = 5$, o que é um absurdo.

□

Portanto, temos que $\text{cint}(G) = 5$.

Pela Figura 3 fica evidente um circuito de tamanho 9 $(1, 2, 3, 8, 10, 7, 9, 4, 5)$. Esse, de fato, é o tamanho de um maior circuinto em G, e portanto temos que a **circunfêrencia** de G vale 9. Na seção sobre grafos hamiltonianos, veremos porque a circunferência desse grafo não pode valer 10.

Outro aspecto interessante desse grafo é que se tomar dois vértices quaisquer, verá que a distância entre eles é no máximo 2. Em outras palavras, temos que o **diâmetro** desse grafo vale 2. Um pequena prova do fato segue.

Prova. Seja G o grafo de Petersen. Seja u um vértice qualquer de G. Sabemos que u possui apenas 3 vizinhos.
Sejam i, j, k os 3 vizinhos de u. Sabemos que i, j, k não são vizinhos, caso contrário, teriamos um circuito de comprimento menor que 5, um absurdo, pois $\text{cint}(G) = 5$. Além do vértice u os vértices i, j, k não podem ter vértices vizinhos em comum. Suponha, sem perda de generalidade, que os vértices i e j possuem um vértice vizinho w em comum, então (u, i, w, j) é um circuito de tamanho menor que 5, um absurdo.
Portanto, juntos, os vértices i, j, k são vizinhos de 6 vértices distintos e diferentes de u, ou seja, os demais vértices do grafo G. Portanto u possui um caminho de comprimento 1 aos vértices i, j, k e um caminho de comprimento de tamanho 2 aos demais vértices do grafo.
Assim, temos que $\text{diam}(G) = 2$. □

Por último, verá que não conseguirá encontrar uma bipartição em G. Isso se deve ao fato de que o grafo de Petersen não é bipartido. Segue a prova.

Prova. Pela **proposição 1.6** das notas de aula sabemos que um grafo é bipartido se e somente se não possui circuitos ímpares. Sabemos que G possui um circuito de tamanho 5, pois $\text{cint}(G) = 5$. Portanto, o grafo de Petersen não pe bipartido. □

3 Grafos Eulerianos

Dizemos que um grafo conexo possui um **trilha euleriana** se ele possui uma trilha que passa por todas as arestas de um grafo. Se um grafo conexo possui uma trilha euleriana fechada, dizemos que ele é um $grafoeuleriano$.
O grafo de Petersen não é Euleriano. Segue a prova:

Prova. De acordo com o **teorema 2.1** um grafo é euleriano se e só se todos os seus vértices possuem grau par. Todos os vértices do grafo de Petersen possuem grau 3, ou seja, grau impar. Portanto o grafo de Petersen Euleriano. □

Além disso, o grafo de Petersen também não possui um trilha euleriana. Segue a prova:

Prova. Pelo **corolário 2.2** sabemos que um grafo possui uma trilha euleriano se e só se esse grafo possui no máximo dois vértices de grau ímpar. O grafo de Petersen possui 10 vérties de grau ímpar e, portanto, não possui uma trilha euleriana. □

De acordo com o **corolário 2.3** se um grafo G possui $2k > 2$ vértices de grau ímpar então é possível particionar $A(G)$ em k trilhas disjuntas nas arestas. O grafo de Petersen possui 10 vértices de grau ímpar, portanto deve ser possível encontrar 5 trilhas disjuntas nas arestas que cubram todas as areastas de G. Tal configuração de caminhos pode ser vista na **Figura 4**, cada caminho foi colorido de uma cor diferente para faciliar a vizualização.

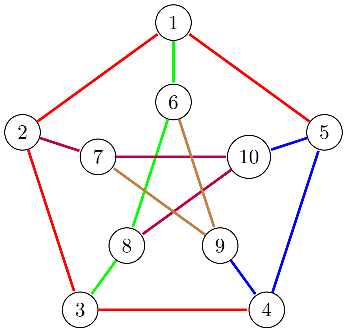


Figure 4: Partição das arestas do grafo de Petersen em 5 trilhas disjuntas nas arestas

Um pergunta interessante a se fazer seria: qual o número de mínimo de arestas a serem adicionadas do grafo de Petersen de forma que o grafo resultante seja euleriano. Bem, sabemos que todo vértice no grafo de Petersen tem grau impar, ou sejam, 10 vértices. Sabemos também que cada aresta inserida tem o potencial de transformar dois vértices de grau impar em vértices de grau par. Isso sugere que o número k mínimo de arestas a serem inseridas deve ser $k \geq 10/2 = 5$. Portanto, se conseguirmos encontrar 5 arestas que quando inseridas o grafo resultante é euleriano então sabemos que esse número mínimo vale 5. De fato, conseguimos encontrar tais 5 arestas, interativamente acrescentar arestas entre dois vértices de grau impar não viznhos. Uma possivel organização grafo resultante fica como na **Figura 5**.

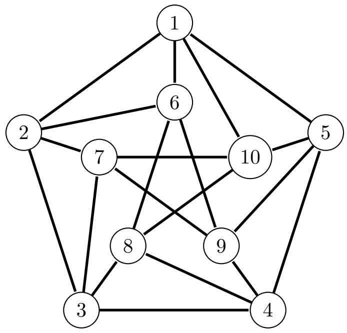


Figure 5: Grafo euleriano resultante de inserções de arestas no grafo de Petersen

Note que todo vértice possui grau par e, portanto, o grafo é euleriano.

4 Árvores

Árvores são grafos conexos minimais, ou seja, são grafos conexos com a menor quantidade de arestas possível. Uma propriedade marcantes desses grafos é que eles possuem $n-1$, onde n é o número de vértices no grafo. Claramente o grafo de Petersen não é uma árvore.
Por outro lado, como o grafo de Petersen é conexo, então, pelo **corolário 3.6**, ele possui pelo menos uma árvore geradora. De fato, o grafo de Petersen não possui só uma árvore geradora, mas várias. Uma árvore genadora de exemplo pode ser vista na **Figura 5**.

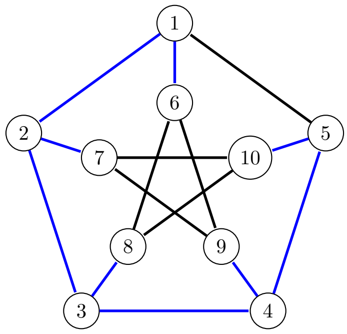


Figure 6: Uma árvore geradora do grafo de Petersen em azul

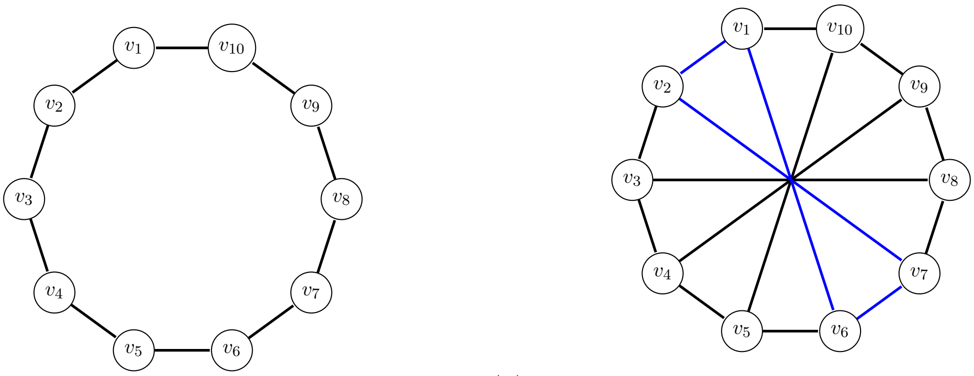
5 Grafos Hamiltonianos

Um caminho (ou circuito) hamiltoniano é um caminho (ou circuito) que passa por todos os vértices de um grafo. Dizemos que um grafo é hamiltoniano se ele possui um circuito hamiltoniano.

Se procurar, verá que o grafo de Petersen possui um caminho hamiltoniano. Esse caminho é fácil de ver na Figura 3, basta tomar o seguinte caminho $(2, 3, 8, 10, 7, 9, 4, 5, 1, 6)$.

Por outro lado encontrará problemas se tentar encontrar um circuito hamiltoniano no grafo de Petersen, porque o grafo de Petersen não é hamiltoniano. Uma prova segue:

Prova. Seja G o grafo de Petersen. Suponha, por absurdo, que G é hamiltoniano. Então existe um circuito $C = (v_1, \ldots, v_{10})$ que passa por todos os vértices de G.



(a) Circuito

(b) Circuito formado em azul, caso arestas liguem apenas vértices opostos

Figure 7: Prova de que o grafo de Petersen não é Hamiltoniano

Como todo vértice possui grau 3, então existem 5 arestas cruzando o circuito da **Figura 7 (a)**.

Note que cada aresta deve ligar vértices cuja distancia em C seja no mínimo 4, caso contrário, formamos um circuito de comprimento menor que 5, um absurdo. Se as arestas ligam apenas vértices opostos, isso é, vértices cuja distancia em C vale 5, então formariamos um circuito de tamanho 4, como mostrado na **Figura 7 (b)**, portanto, existe pelo menos uma aresta que liga dois vértices tal que a distancia entre eles em C valha 4.

Sem perda de generalidade, suponha que tal aresta ligue o vétice v_1 ao v_5. Sabemos então que o vértice v_6 deve se conectar ao vértice v_2 ou v_{10}. Masi se v_6 se liga à v_2 então (v_1, v_5, v_6, v_2) é um circuito de tamanho 4, um absurdo. Por outro lado, se v_6 se liga à v_{10} então (v_1, v_5, v_6, v_{10}), é um circuito de tamanho 4, um absurdo. Portanto o grafo de Petersen não pode ser Hamiltoniano. $\square$

Apesar de não ser um grafo hamiltoniano, o grafo de Petersen é o menor grafo **hipo-hamiltoniano**. Um grafo G é considerado hipo-hamiltoniano se G não é hamiltoniano mas $G - v$ é hamiltoniano para todo $v \in V(G)$.

6 Emparelhamento

Um **emparelhamento** em um grafo é um conjunto E de arestas duas a duas não adjacentes. Dado um grafo G dizemos que um vértice $x \in V(G)$ é coberto por E se existe alguma aresta em E que incide em x. Um emparelhamento é dito **perfeito** se cobre todas as arestas de G.

O grafo de Petersen possui um emparelhamento perfeito. Tal emparelhamento é facilmente visto pela Figura 1. Basta tomar todas as arestas que ligam os vértices externos aos vértices internos da figura. Tal emparelhamento pode ser visto em vermelho na **Figura 8**.

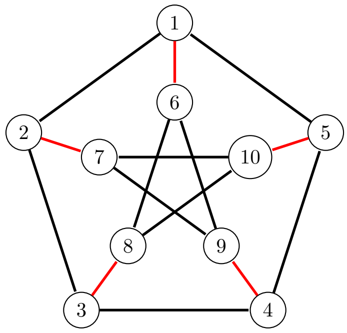


Figure 8: Emparelhamento perfeito no grafo de Petersen

Naturalmente, esse emparelhamento perfeito também é um emparelhamento máximo, ou seja, não existem nenhum outro emparelhamento com cardinalidade maior.

Outro conceito que anda muito próximo de emparelhamentos é o caonceito de **cobertura** em um grafo. Uma cobertura em um grafo G é um conjunto $K \subseteq V(G)$ tal que toda aresta de G tem pelo menos um dos extremos em K. Naturalmente, devemos ter $|E| \leq |K|$, $\forall E, \forall K$ em G. Isso ocorre porque pelo menos um dos extremos de cada aresta em $|E|$ deve pertencer a $|K|$. Portanto, se encontrarmos uma covertura com apenas 5 vértices para o grafo de Petersen, teríamos certeza que essa cobertura é mínima. Entretanto, tal emparelhamento não existe, o mínimo que conseguimos fazer é com 6 vértices. A **Figura 9** mostra tal cobertura.

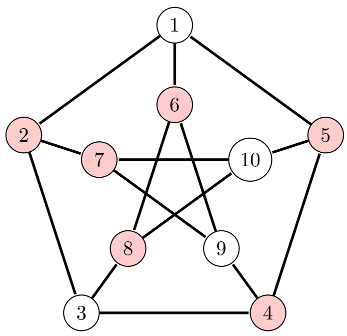
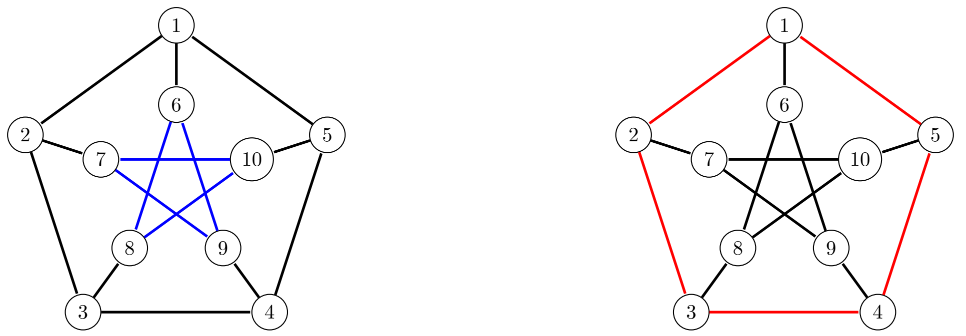


Figure 9: Cobertura mínima no grafo de Petersen

Uma pova de que são necessários pelo menos 6 vértices para cobrir o grafo de Petersen segue.

Prova. Iremos nos concentrar em dois conjuntos de arestas, um que chamarei de central e está destacado em azul na **Figura 10 (a)** e outro que chamarei de externo e que está destacado em vermelho na **Figura 10 (b)**



(a) Conjunto interno de arestas (b) Conjunto externo de arestas

Figure 10: Prova cobertura mínima do grafo de Petersen

Vamos olhar agora apenas para o conjunto central. Esse conjunto possui 5 arestas. Os únicos vértices que são incidentes às arestas do conjunto central são os vértices $6, 7, 8, 9, 10$. Como cada um desses vértices incide em no máximo 2 arestas do conjunto, então são necessários pelo menos 3 vértices dentre $6, 7, 8, 9, 10$ para cobrir o conjunto central.

Analogamente, o conjunto externo possui 5 arestas e somente os vértices $1, 2, 3, 4, 5$ são incidentes à elas. Como cada um desses vértices incide em exatamente duas arestas do conjunto, então para cobrir as 5 arestas são necessários pelo menos 3 vértices dentre $1, 2, 3, 4, 5$.

Portanto, são necessários pelo menos 6 vértices para cobrir o grafo de Petersen. Como encontramos um conjunto de vértices de tamanho 6 que cobre o grafo de Petersen, segue que esse é o tamanho mínimo de um conjunto de vértices que cobre o grafo de Petersen. $\square$