Nome: Rogério Marcos Fernandes Neto NUSP: 10284632
Curso: Bacharelado em Ciência da Computação
MAC0320 - Introdução à Teoria dos Grafos

**LISTA 5**

**E21.** Prove que uma árvore tem no máximo um emparelhamento perfeito.

**Solução:**

*Prova.* Seja $T$ uma árvore. Se $T$ não possui um emparelhamento perfeito então não há o que provar, portanto, suponha que $T$ possui um emparelhamento perfeito $E$.
Suponha, por absurdo, que existe um outro emparelhamento $E'$, distinto de $E$. Seja

$$H = G[E \triangle E']$$

Temos $g_H(v) \geq 2$ para todo $v \in H$ e, como $T$ é árvore e ambos $E$ e $E'$ são perfeitos, então todas as componentes de $H$ devem ser caminhos de comprimeto par. Afirmo que todas as componentes são caminhos de comprimento zero. De fato suponha que existe alguma componente $P = (v_1, \ldots, v_n)$ que é um caminho de comprimento maior que zero, e sem perda de generalidade suponha que $v_1 v_2 \in E$. Como $P$ tem comprimento par então $v_{n-1} v_n \in E'$ e $v_n$ deve ser um vértice solitário em $E$, o que contradiz a hipótese de $E$ ser perfeito. Portanto $H$ não possui arestas. Mas se $H$ não possui arestas então

$$E \triangle E' = \emptyset$$
$$\Longrightarrow E = E'$$

contradizendo a hipótese sobre a distinção entre $E$ e $E'$, o que completa a prova. □

**E22.** Sejam $E$ e $F$ emparelhamentos disjuntos num grafo $G$, com $|E| > |F|$. Prove que existem emparelhamentos $E'$ e $F'$ tais que $|E'| = |E| - 1$, $|F'| = |F| - 1$ e $E' \cup F' = E \cup F$.

**Solução:**

*Prova.* Sejam $E$ e $F$ emparelhamentos disjuntos num grafo $G$, com $|E| > |F|$. Seja $H := G[E \triangle F]$. Como $g_H(v) \leq 2$ para todo $v \in H$ então todas as componentes em $H$ são caminhos ou circuitos de tamanho par. Como $|E| > |F|$ então existe pelo menos uma componente em $H$ que é um caminho $P$ de comprimento impar, com mais arestas de $E$ que $F$. Sejam

$$E^* = E \cap A(P)$$
$$F^* = F \cap A(P)$$

Então temos que

$$E' = E - E^* + F^*$$
$$F' = F - F^* + E^*$$

Como trocamos o emparelhamento de uma componente por outro, então ambos $E'$ e $F'$ são emparelhamentos. Além disso, como o $P$ tinha tamanho ímpar, então temos que $|E'| = |E| - 1$ e $|F'| = |F| + 1$. Por fim, como em $E' \cup F'$ foram utilizadas as mesmas arestas que em $E \cup F$, então temos que $E \cup F = E' \cup F'$. □

**E23.** Seja $G$ um grafo $(X, Y)-$bipartido com $|X| = |Y| = n \geq 1$. Prove que se $|A(G)| > n(n-1)$ então $G$ contém um emparelhamento perfeito. (Sugestão: aplicar Teorema de Hall).

**Solução:**

*Prova.* Seja $G$ um grafo $(X, Y)-$bipartido com $|X| = |Y| = n \geq 1$ e $|A(G)| > n(n-1)$. Suponha, por absurdo, que $G$ não tem um emparelhamento perfeito. Como temos $|X| = |Y|$, isso implica que não existe emparelhamento que cobre $X$. Portanto, pelo Teorema de Hall, existe algum conjunto $S \subseteq X$ tal que $|Adj(S)| < |S|$. Dessa forma, existem no máximo

$$|S| * |Adj(S)| \leq |S| * (|S| - 1)$$

arestas que ligam $S$ à $Y$. Por outro lado, existem no máximo

$$(|X| - |S|)|Y| = (n - |S|)n$$

arestas que ligam $X - S$ à $Y$. Portanto, ao todo, o número de arestas que liga $X$ à $Y$, ou seja, $A(G)$, é menor igual a

$$\begin{aligned}
|S| * (|S| - 1) + (n - |S|)n &= |S|^2 - |S| + n^2 - |S|n \\
&= n^2 + |S|(|S| - 1 - n) \\
&\leq n^2 + n(n - 1 - n) && |S| \text{ é no máximo } |X| = n \\
&= n^2 - n = n(n-1)
\end{aligned}$$

o que contradiz a nossa hipótese. Portanto, a afirmação vale. □

**E24.** Prove que se $G$ é um grafo $(X, Y)$-bipartido com pelo menos uma aresta e $g(x) \geq g(y)$ para todo $x \in X$ e $y \in Y$, então $G$ tem um emparelhamento que cobre $X$.

**Solução:**

*Prova.* Seja $G$ um grafo $(X, Y)$-bipartido com $A(G) \geq 1$ e $g(x) \geq g(y)$ para todo $x \in X$ e $y \in Y$. Seja $S \subseteq X$ e defina

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{a \in A(G) : a \text{ incide em } S\} \\
A_2 &= \{a \in A(G) : a \text{ incide em } Adj(S)\}
\end{aligned}$$

Claramente, $A_1 \subseteq A_2$ e, portanto, $|A_1| \leq |A_2|$. Seja $k = \delta(S)$. Como todo vértice em $S$ possui grau maior ou igual a $k$, então temos que $k|S| \leq |A_1|$. Por outro lado, como $g(x) \geq g(y)$ para todo $x \in X$ e $y \in Y$, sabemos que $k = \Delta(Adj(S))$ e, portanto, $|A_2| \leq k|Adj(S)|$. Mas então temos que

$$\begin{aligned}
&k|S| \leq |A_1| \leq |A_2| \leq k|Adj(S)| \\
\implies &k|S| \leq k|Adj(S)| \\
\implies &|S| \leq |Adj(S)|
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema de Hall, existe um emparelhamento que cobre $X$. □

**E25.** Um *retangulo latino* $m \times n$ é uma matriz com $m$ linhas e $n$ colunas, cujas entradas são símbolos, sendo que cada símbolo ocorre no máximo uma vez em cada linha e em cada colunas. Um *quadrado latino* de ordem $n$ ŕ um retangulo latino $n \times n$ sobre n símbolos.

Prove: Se $m < n$ então todo retangulo latino $m \times n$ sobre $n$ símbolos pode ser estendido a um quadrado latino de ordem $n$.

**Solução:**

*Prova.* Suponha que temos um retangulo latino $m \times n$, com $m < n$. Iremos mostrar que é possível expandir esse retangulo para um retangulo latino $(m+1) \times n$.
Vamos construir um grafo $G$ $(X, Y)$-bipartido que represente esse retangulo. Sejam:

$$
\begin{array}{ll}
X := \{1, \ldots, n\} & \text{O conjunto dos } n \text{ símbolos} \\
Y := \{1, \ldots, n\} & \text{O conjunto das } n \text{ conlunas do retangulo}
\end{array}
$$

e seja:

$$A(G) = \{xy, x \in X, y \in Y : \text{símbolo } x \text{ ainda não ocupou a coluna } y\}$$

Como cada símbolo aparece em uma única coluna a cada linha, então temos que $g(x) = n - m > 0$, para todo $x \in X$. Pelo mesmo motivo, sabemos também que $g(y) = n - m > 0$, para todo $y \in Y$. Portanto, temos que $g(y) \geq g(x)$ para todo $y \in Y$ e $x \in X$, e pela questão **E24** sabemos que existe um emparelhamento que cobre $Y$, isso é, existe uma nova reorganização dos $n$ símbolos de modo que não hajam conflitos nem nas colunas nem nas linhas do retangulo. Portanto, é possível incluir uma nova linha na tabela. $\square$