Lançamento de projéteis

1 Objetivo

Estudar o comportamento de projéteis quando lançados obliquamente na superfície da Terra. Determinar experimentalmente a trajétoria do projétil e comparar com o modelo teórico.

2 Introdução Teórica

Ao se estudar o movimento de corpos sob ação da gravidade, observa-se algumas características, que intrigaram muitos cientistas ao longo da história. Assim, por exemplo, poderia se perguntar porque corpos lançados para cima, caem novamente ao solo. Ao lançar um projétil, observa-se que a sua trajetória é uma curva. Em particular, se o arremesso for feito horizontalmente a partir de uma determinada altura em relação à superfície, a trajetória é inclinada para baixo logo após o lançamento. Galileu Galilei foi o primeiro cientista a responder qual seria a curva descrita por este projétil e sugeriu que o movimento poderia ser descrito através da composição de dois movimentos: Um Movimento Retilínio Uniforme (MRU) na horizontal e um Movimento Retilíneo Uniformemente Acelerado (MRUA) na vertical, sujeito à aceleração da gravidade, análogo ao movimento de queda livre. É importante observar que estas aproximações valem quando a influência da resistência do ar pode ser desprezada e quando o movimento ocorre próximo à superfície da Terra, ou seja, em alturas muito pequenas comparadas com o raio da Terra, que é de aproximadamente 6370 km. Além disso, considera-se a superfície da Terra como sendo plana.

Considere o lançamento de um projétil de massa m por um canhão inclinado de um ângulo θ, conforme mostra a figura Fig.1. O projétil é lançado do repouso, sobre a superfície da Terra, a partir da origem de um sistema de coordenadas xy. O projétil abondona o canhão com uma velocidade inicial $\vec{v_0}$. A partir daí, o projétil descreve uma trajetória curvilínea até atingir o solo a uma distância $x = A$, denominada de alcance.

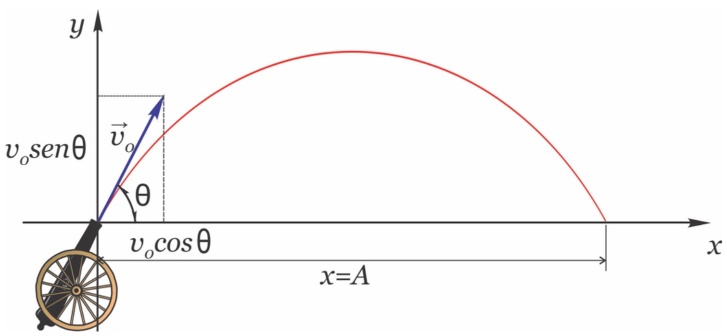

Fig. 1: Lançamento de um projétil no plano x, y.

De acordo com a proposta de Galileu, o movimento do projétil é decomposto em duas partes discutidas abaixo.

Movimento Vertical

Nesta etapa, o projétil descreve um Movimento Retilíneo Uniformemente Acelerado (MRUA), cuja equação da posição vertical $y(t)$ em função do tempo t, é:

$$y = y_0 + v_{y_0}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \tag{1}$$

onde y_0 é a altura inicial do projétil, v_{y_0} é a velocidade inicial vertical e a_y é a celeração vertical que, em módulo, é igual a aceleração da gravidade g. Assumindo $y_0 = 0$, $v_{y_0} = v_0 sen\theta$ e $a_y = -g$, a Eq.1, torna-se

$$y = v_0 sen\theta t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{2}$$

Movimento Horizontal

Nesta etapa, o projétil descreve um Movimento Retilíneo Uniforme(MRU), cuja equação da posição horizontal $x(t)$ em função do tempo t, é:

$$x = x_0 + v_{x_0}t \tag{3}$$

onde x_0 é a distância horizontal inicial do projétil e v_{x_0} é a velocidade inicial horizontal. Assumindo $x_0 = 0$ e $v_{x_0} = v_0 cos\theta$, a Eq.3, torna-se

$$t = \frac{x}{v_0 cos\theta} \tag{4}$$

Substituindo a Eq.4 na Eq.2, obtém-se

$$y = v_0 sen\theta \left(\frac{x}{v_0 cos\theta}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 cos\theta}\right)^2$$

ou

$$y = tg\theta x - \frac{g}{2v_0^2 cos^2\theta}x^2 \tag{5}$$

Quando $x = A$, tem-se $y = 0$. Substituindo esses valores na Eq.5, obtém-se

$$0 = tg\theta A - \frac{g}{2v_0^2 cos^2\theta}A^2 \Rightarrow \frac{g}{2v_0^2 cos^2\theta}A = \frac{sen\theta}{cos\theta} \Rightarrow gA = 2v_0^2 sen\theta cos\theta$$

$$\Rightarrow gA = v_0^2 sen2\theta \Rightarrow v_0^2 = \frac{gA}{sen2\theta}$$

ou

$$A = \frac{v_0^2}{g}sen2\theta \tag{6}$$

Neste experimento, o valor de v_0 será sempre o mesmo para todos os valores do ângulo θ. Em Particular, pode-se calcular o valor de v_0 escolhendo $\theta = 45^0$. Nesse caso, a Eq.6, torna-se

$$v_0^2 = \frac{gA_{45^0}}{sen90^0} = gA_{45^0} \tag{7}$$

onde A_{45^0} é o alcance, que deve ser medido para $\theta = 45^0$. Substituindo a Eq.7 na Eq.5, obtém-se

$$y = tg\theta x - \frac{1}{2A_{45^0}cos^2\theta}x^2 \tag{8}$$

Essa equação descreve o comportamento geral, para todo ângulo θ, da variável y em função da variável x, de acordo com o modelo clássico de Galileu. Em particular, para $\theta = 45^0$, a Eq.8, torna-se

$$y = tg45^0 x - \frac{1}{2A_{45^0} cos^2 45^0} x^2 = x - \frac{1}{2A_{45^0} \left(\sqrt{2}/2\right)^2} x^2$$

ou

$$y = -\left(\frac{1}{A_{45^0}}\right) x^2 + x \qquad \text{para} \qquad \theta = 45^0 \tag{9}$$

O modelo clássico de Galileu prevê, então, que a função $y = f(x)$ é do tipo parabólica.

3 Material Necessário

Canhão, projétil (esfera metálica), anteparo, nível de bolha, indicador magnético, escala de $1000,0\ mm$, esquadro, suportes, alcool, lenço de papel, fita crepe, folhas de papel carbono, hastes metálicas, duas folhas de papel milimetrado.

A fotografia da Fig.2, mostra todo o material que será usado nesta experiência. A função do anteparo neste experimento é registrar as diferentes posições (x, y) do projétil (esfera metálica) lançado pelo canhão. Uma escala milimetrada de $1000,0\ mm$, mostrada na fotografia da Fig.2, é utilizada para medir os alcances x e as alturas y do projétil.

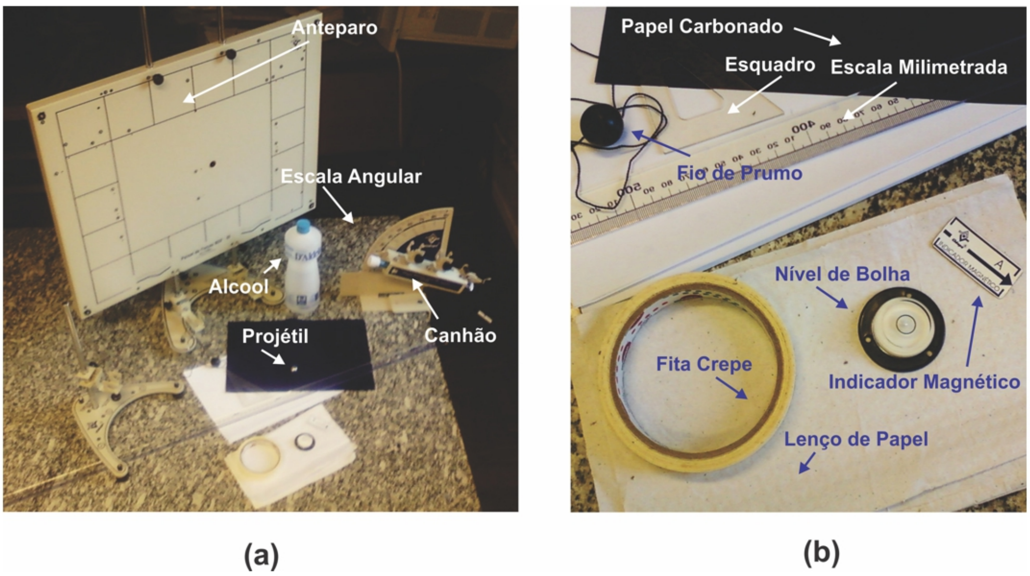

Fig. 2: Material que deverá ser usado neste experimento.

4 Procedimento Experimental

4.1 Comportamento da altura y em função da distância x do projétil

1. Escolha o ângulo $\theta = 45^0$ de inclinação do canhão, e mantenha o canhão na posição $x = 0$ da escala milimetrada, como mostra a fotografia das Figs.3(a) e (b). Como mostrados nessas figuras, um fio de prumo deve ser usado para definir, com um indicador magnético, a posição da referência $x = 0$ da escala milimetrada. A Fig.3(c) mostra em detalhes como definir a referência $y = 0$ das medidas verticais sobre o anteparo.

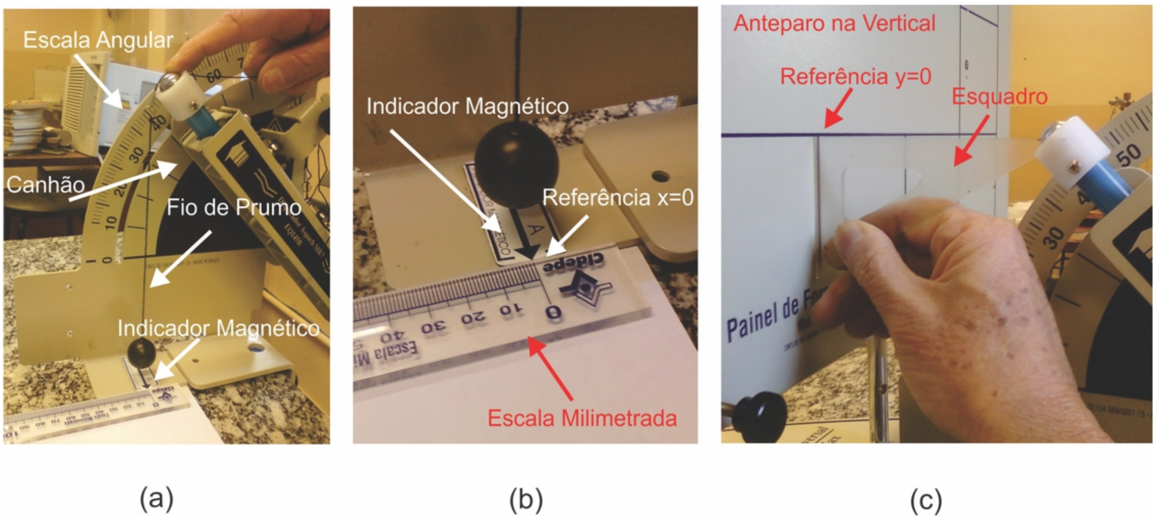

Fig. 3: (a) Procedimento geral dos alinhamentos das posições de referência $x = 0$ e $y = 0$ para o lançamento de projéteis.

2. Prepare o experimento posicionando o anteparo em frente ao canhão,inicialmente a uma distância $x = 0,2000\ m$, comforme mostra a fotografia das Figs.4(a) e (b). Engatilhe o canhão, conforme mostrado em detalhes na fotografia das Fig.4(c). Para se ter uma idéia do local que será atingido pelo projétil, dispare o canhão em direção ao anteparo, conforme mostrado em detalhes na fotografia da Fig.4(d).

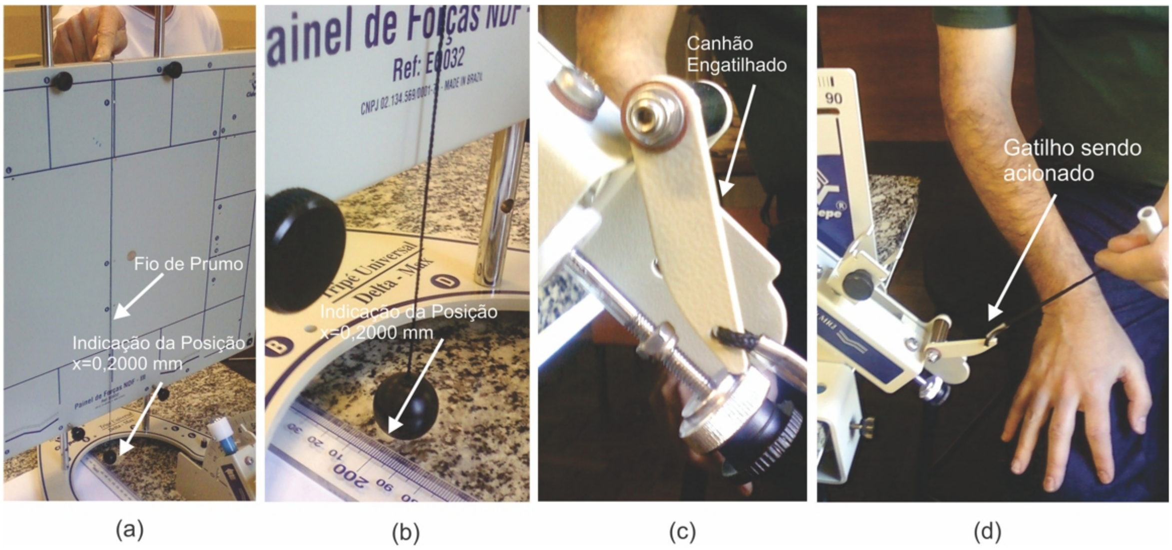

Fig. 4: (a)e(b) Posicionamento do anteparo em $x = 0,2000\ m$, (b)e(c)Uso do gatilho do canhão.

3. Com um pedaço de fita crepe, prenda o papel carbonado na região que, provavelmente, será atingida pelo projétil, como mostrado na Fig.5(a), e faça 5 disparos. Levante o papel carbonado do anteparo e observe os 5 pontos marcados no anteparo, conforme mostrado na fotografia da Fig.5(b) e (c). ***Refaça um lançamento caso o projétil atinja um local muito afastado dos demais pontos do anteparo.***

4. Conforme detalhado na sequência das fotografias das Figs.6(a),(b) e (c), meça as 5 alturas y marcadas no anteparo e anote-as na Tab.1. Com o lenço de papel embebido em alcool, apague as marcas deixadas no anteparo, como mostra a fotografia da Figs.6(d).

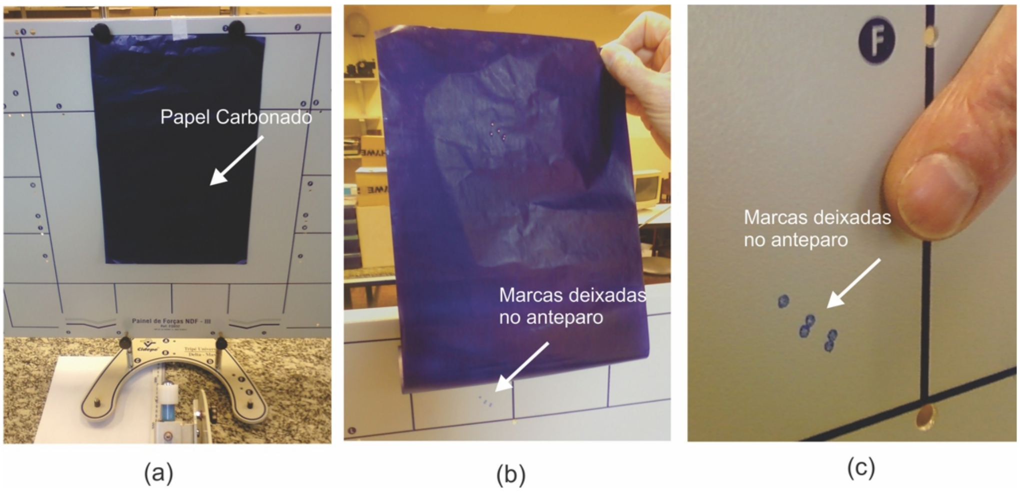

Fig. 5: (a)Papel carbonado preso por fita crepe,(b) e (c) marcas deixadas no anteparo em locais atingidos pelo projétil.

x (m)	y_1 (m)	y_2 (m)	y_3 (m)	y_4 (m)	y_5 (s)	$(\langle y\rangle \pm \delta y)$ (m)
$0,2000$						
$0,3000$						
$0,4000$						
$0,5000$						
$0,6000$						
$0,7000$						
$0,8000$						
$0,9000$						

Tab. 1: Tabela de dados para as posições x e y do projétil.

5. Repita os passos de 2 a 4 para todas as distâncias x do anteparo indicadas na Tab.1.

6. Calcule os valores médios $\langle y\rangle$ das 5 medidas de y, bem como, as incertezas totais δy correspondentes, para cada uma das distâncias x do anteparo, indicadas na Tab.1. Como aqui as incertezas aleatórias (posições dos pontos marcados no anteparo) são muito maiores do que a incerteza do aparelho (escala milimetrada), pode-se assumir somente a incerteza aleatória, dada pelo ***desvio padrão da média*** σ_m, como a incerteza total.

7. Para construir o gráfico da ***altura média*** $\langle y\rangle$ do projétil em função da distância x, marque os pontos da Tab.1 no papel milimetrado 1 anexo. No gráfico, coloque ***barras de erro*** na vertical, referentes as medidas das alturas do projétil, trace a curva que melhor se ajusta aos pontos do gráfico e observe se essa curva tem um comportamento parabólico conforme descrito pela Eq.9.

4.2 Comportamento do alcance A do projétil em função do ângulo θ de inclinação do canhão

1. Para esta experiência o anteparo deve ser montado na direção horizontal, conforme detalhado na sequência das fotografias da Fig.7. O nivelamento da superfície do anteparo pode ser feito com o nível de bolha.

2. Escolha o ângulo $\theta = 20^0$ de inclinação do canhão. Atuando nos parafusos de fixação que apoiam o anteparo, faça um alinhamento da altura da superfície do anteparo com a posição vertical $y = 0$ do canhão, conforme detalhado na fotografia da Fig.8.

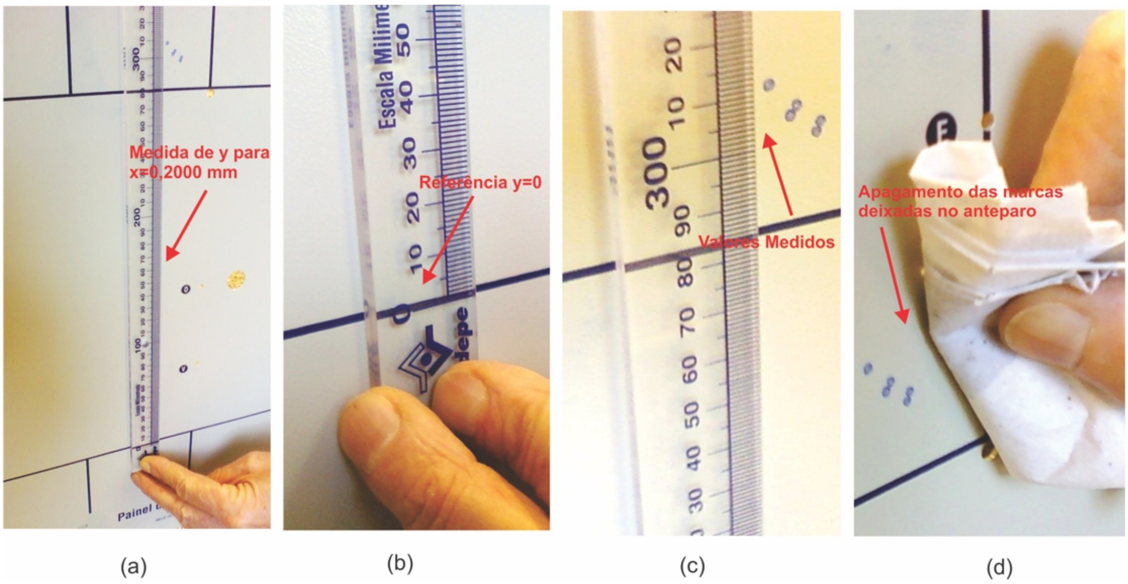

Fig. 6: (a)(b)e(c)Medida das alturas y para $x = 0,2000mm$ e (d)apagamento das marcas deixadas no anteparo.

θ (^{0})	A_1 (m)	A_2 (m)	A_3 (m)	A_4 (m)	A_5 (s)	$(\langle A\rangle \pm \delta A)$ (m)
20						
30						
40						
50						
60						
70						
80						

Tab. 2: Tabela de dados para os alcances A do projétil correspondentes a diferentes ângulos θ de inclinação do canhão.

3. Para se ter uma idéia do local que será atingido pelo projétil, engatilhe o canhão e dispare-o em direção ao anteparo.

4. Com um pedaço de fita crepe, prenda o papel carbonado na região que, provavelmente, será atingida pelo projétil, como mostrado nas fotografias das Figs.9 (a) e (b), e faça 5 disparos. Levante o papel carbonado do anteparo e observe os 5 pontos marcados no anteparo. ***Refaça um lançamento caso o projétil atinja um local muito afastado dos demais pontos do anteparo***.

5. Conforme mostra a fotografia da Fig.9(c), meça os 5 alcances A marcadas no anteparo e anote-os na Tab.2.

6. Repita os passos de 2 a 5 para todos os ângulos θ de inclinação do canhão indicadas na Tab.2.

7. Calcule os valores médios $\langle A\rangle$ das 5 medidas de A, bem como, as incertezas totais δA correspondentes, para todos os ângulos θ de inclinação do canhão indicadas na Tab.2. Admita aqui também que a incerteza total seja dada somente pelo ***desvio padrão da média*** σ_m.

8. Para construir o gráfico da ***alcance médio*** $\langle A\rangle$ do projétil em função dos ângulos θ de inclinação do canhão, marque os pontos da Tab.2 no papel milimetrado 2 anexo. No gráfico, coloque ***barras de erro*** na vertical, referentes as medidas dos alcances do projétil, trace a curva que melhor se ajusta aos pontos do gráfico e observe se essa curva tem um comportamento senoidal como descrito pela Eq.6.

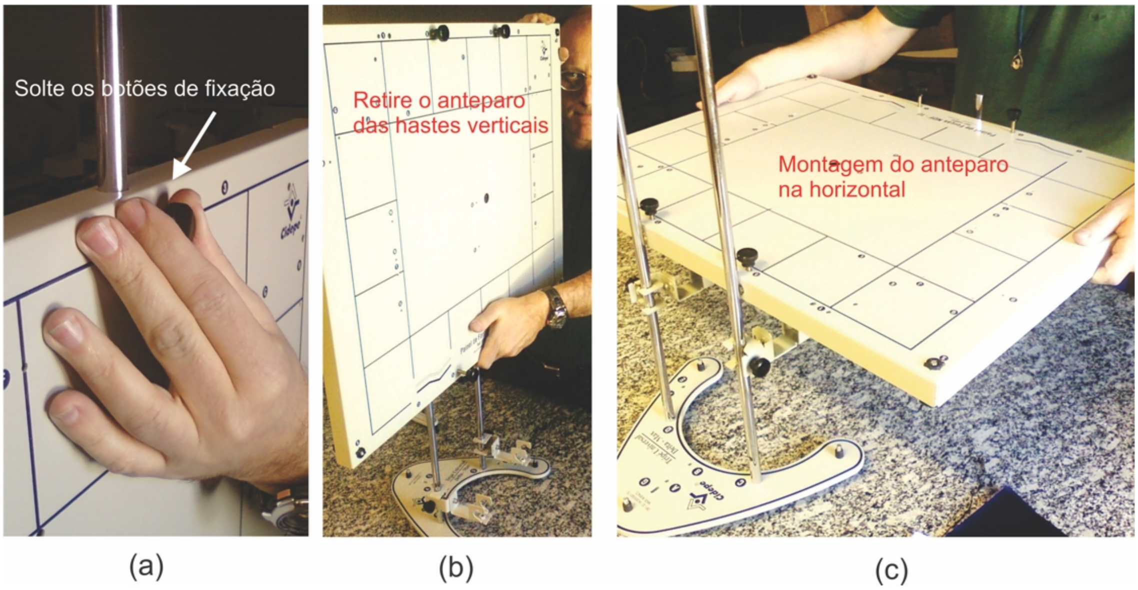

Fig. 7: (a)(b)e(c)Sequências para a montagem do anteparo na horizontal.

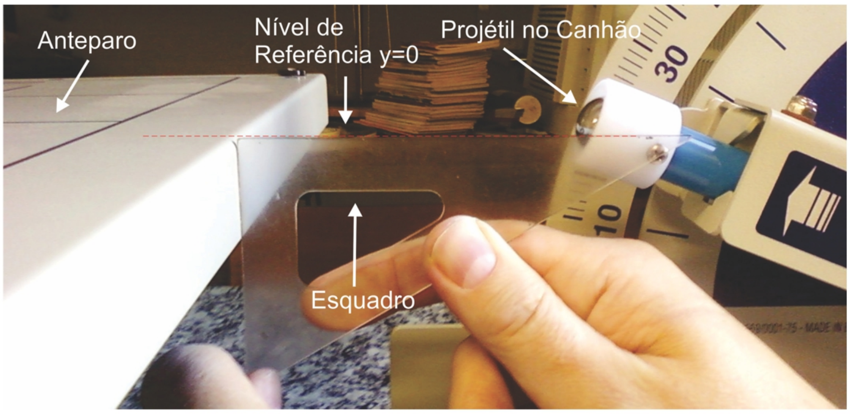

Fig. 8: Alinhamento da altura da superfície do anteparo com a posição vertical $y = 0$ do canhão.

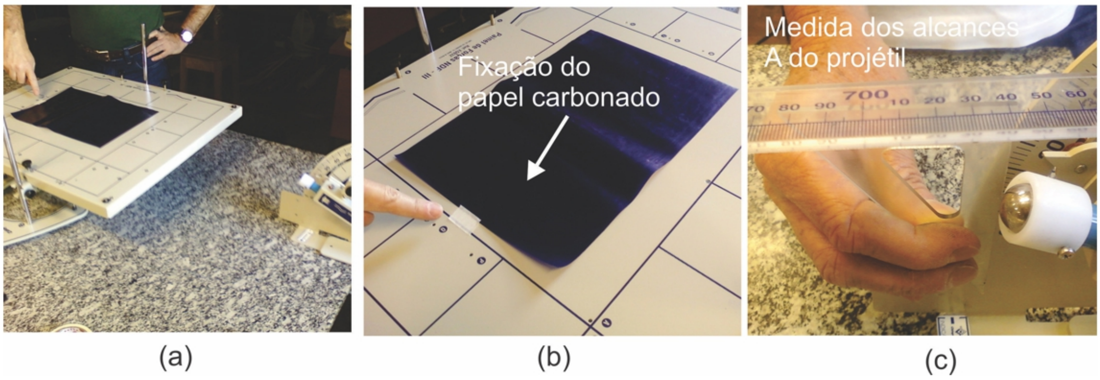

Fig. 9: Fixação do papel carbonado no anteparo.

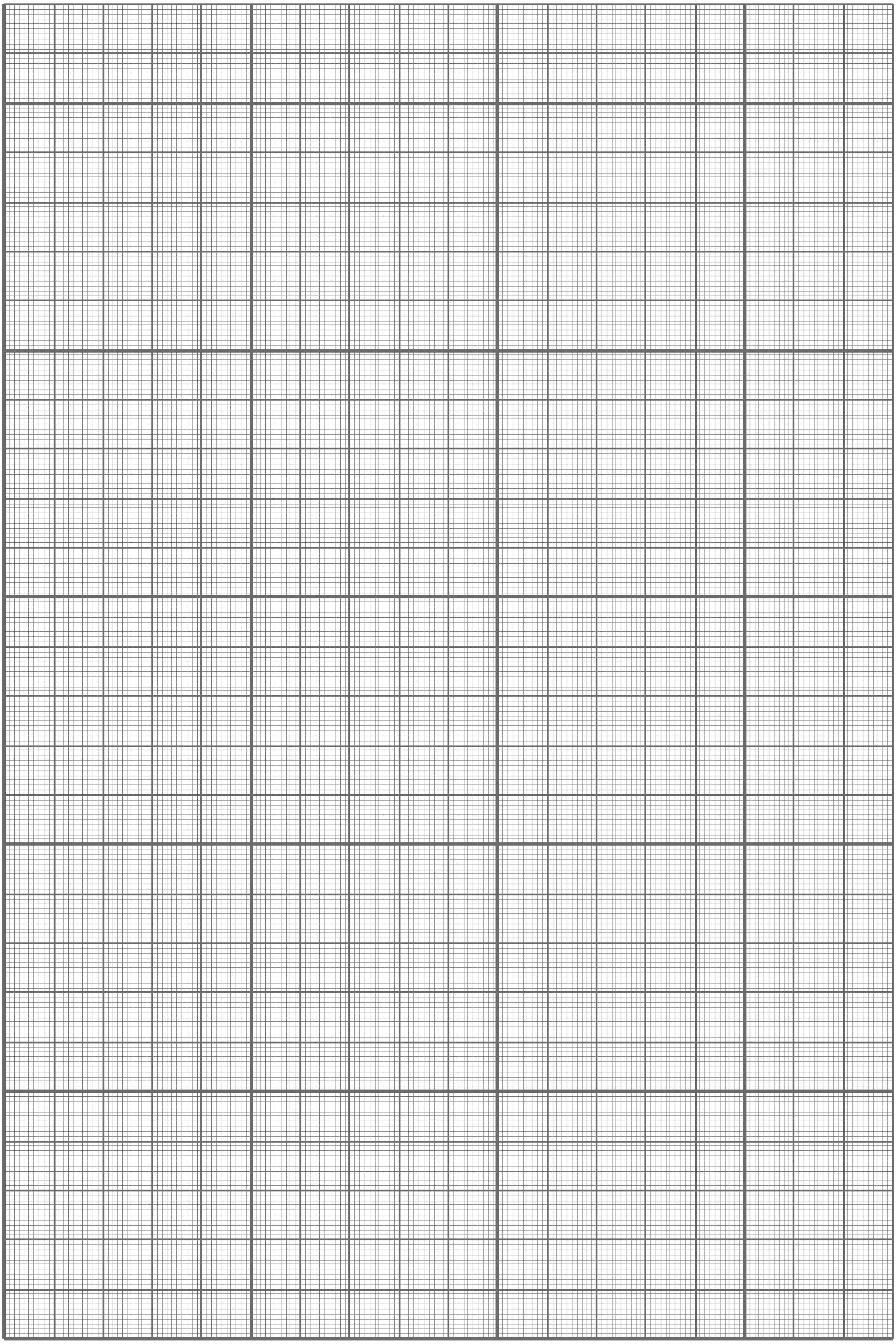

Fig. 10: Folha de papel milimetrado 1.

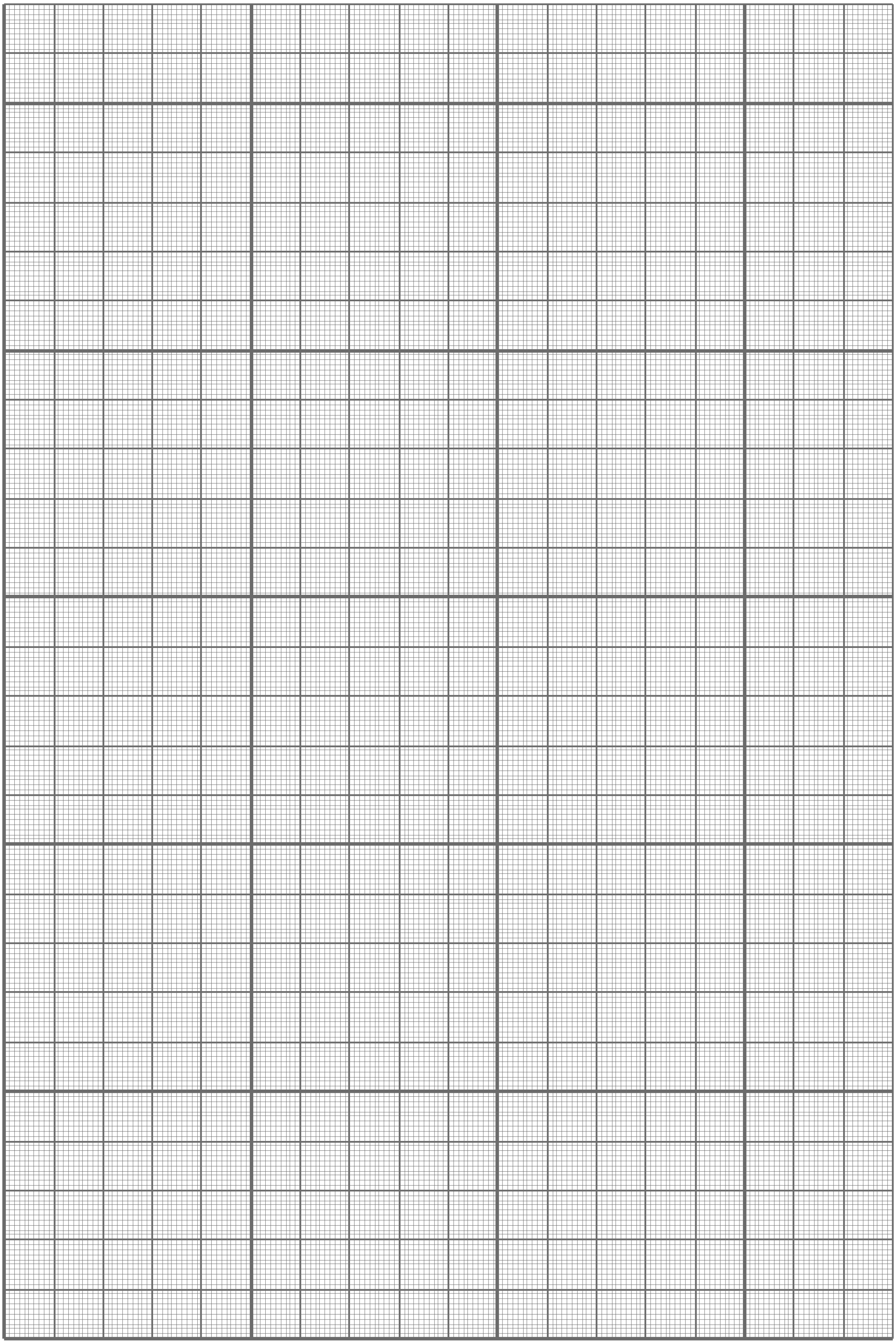

Fig. 11: Folha de papel milimetrado 2.