3 次元回転球殻内での粘性流体 (非圧縮ナビエーストークス方程式) の定式化

竹広 真一

平成 17 年 6 月 14 日

目 次

1 はじめに 1

2 慣性系での定式化 1
2.1 支配方程式 1
2.2 スケーリング 4
2.2.1 球殻の厚さでスケーリングする場合 4
2.2.2 外側球殻半径でスケーリングする場合 5
2.3 各スケーリング方程式系の対応関係 6
2.4 ポテンシャルによる方程式系の表現 7
2.4.1 支配方程式 7
2.4.2 速度場とポテンシャルとの関係式 9
2.4.3 境界条件 9
2.5 解析的な解の例 11
2.5.1 応力なし条件下での剛体回転解 11
2.5.2 粘着条件下での差分回転解 (流れが十分に遅い場合) 12

3 回転系での定式化 15
3.1 支配方程式 15
3.2 スケーリング 16
3.2.1 球殻の厚さでスケーリングする場合 17
3.2.2 外側球殻半径でスケーリングする場合 18
3.3 各スケーリング方程式系の対応関係 19

3.4 ポテンシャルによる方程式系の表現 19
3.4.1 支配方程式 20
3.4.2 速度場とポテンシャルとの関係式 21
3.4.3 境界条件 21
3.5 解析的な解の例 22
3.5.1 応力なし条件下での剛体回転解 22

参考文献 **22**

1　はじめに

ここでは中心が同じで回転している 2 つの球面の間にはさまれた球殻領域の非圧縮粘性流体の基礎方程式の定式化について記述する. 速度場をトロイダル–ポロイダルポテンシャルへ分解し, その時間発展方程式と境界条件を定式化する (Zhang and Busse,1987, Chandrasekhar, 1961).

2　慣性系での定式化

2.1　支配方程式

中心を共有する半径 r_i, r_o の球面に挟まれた球殻内にある非圧縮粘性流体について考える. 内外の球面の回転角速度をそれぞれ $\boldsymbol{\Omega}_i$, $\boldsymbol{\Omega}_o$ とする. 座標系を球殻の中心を原点し, 緯度経度座標系 (λ, φ, r) を張る.

支配方程式は非圧縮粘性流体のナビエーストークス方程式である.

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\mathcal{F}} \tag{2}$$

各々の記号は次の通りである:

$\boldsymbol{u}$	流速ベクトル. 成分毎に書く場合には, $\boldsymbol{u} = (u_\lambda, u_\varphi, u_r)$
ρ	流体の密度. 非圧縮を仮定しているので一定である.
p	流体の全圧力.
ν	動粘性率. 一様一定であるとする.
$\mathcal{F}$	外力.

緯度経度座標での成分で表示すれば (c.f. Landau and Lifshitz, 1987) [1]

$$\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial u_\lambda}{\partial\lambda} + \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial(u_\varphi\cos\varphi)}{\partial\varphi} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial r} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u_\lambda}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)u_\lambda + \frac{u_r u_\lambda}{r} - \frac{u_\varphi u_\lambda\tan\varphi}{r}$$

[1] ランダウの教科書での極座標表現で $\theta = \pi - \varphi, \phi = \lambda$, $v_\theta = u_\varphi, u_\phi = u_\lambda, v_r = u_r$, $\partial_\theta = -\partial_\varphi$, $\sigma_{\lambda\lambda} = \sigma_{\lambda\lambda}, \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi}, \sigma_{r\phi} = \sigma_{r\lambda}, \sigma_{r\theta} = -\sigma_{r\varphi}, \sigma_{\theta\phi} = -\sigma_{\lambda\varphi}$ と変換すれば良い.

$$= -\frac{1}{\rho r\cos\varphi}\frac{\partial p}{\partial\lambda} + \nu\left[\nabla^2 u_\lambda + \frac{2}{r^2\cos\varphi}\frac{\partial u_r}{\partial\lambda} - \frac{2\sin\varphi}{r^2\cos^2\varphi}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\lambda} - \frac{u_\lambda}{r^2\cos^2\varphi}\right] + \mathcal{F}_\lambda, \quad (4)$$

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)u_\varphi + \frac{u_r u_\varphi}{r} + \frac{u_\lambda^2\tan\varphi}{r}$$
$$= -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\varphi} + \nu\left[\nabla^2 u_\varphi + \frac{2\sin\varphi}{r^2\cos^2\varphi}\frac{\partial u_\lambda}{\partial\lambda} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} - \frac{u_\varphi}{r^2\cos^2\varphi}\right] + \mathcal{F}_\varphi, \quad (5)$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)u_r - \frac{u_\varphi^2 + u_\lambda^2}{r}$$
$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left[\nabla^2 u_r - \frac{2}{r^2\cos\varphi}\frac{\partial(u_\varphi\cos\varphi)}{\partial\varphi} - \frac{2}{r^2\cos\varphi}\frac{\partial u_\lambda}{\partial\lambda} - \frac{2u_r}{r^2}\right] + \mathcal{F}_r, \quad (6)$$

$$(7)$$

ここで

$$\boldsymbol{u}\cdot\nabla = \frac{u_\lambda}{r\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda} + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} + u_r\frac{\partial}{\partial r}, \quad (8)$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{r^2\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right), \quad (9)$$

である. また, 各応力成分は

$$\sigma_{\lambda\lambda} = -p + 2\eta\left(\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial u_\lambda}{\partial\lambda} + \frac{u_r}{r} - \frac{u_\varphi\tan\varphi}{r}\right), \quad (10)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = -p + 2\eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{u_r}{r}\right) \quad (11)$$

$$\sigma_{rr} = -p + 2\eta\frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad (12)$$

$$\sigma_{\lambda\varphi} = \eta\left(\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\lambda} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\lambda}{\partial\varphi} + \frac{u_\lambda\tan\varphi}{r}\right), \quad (13)$$

$$\sigma_{\varphi r} = \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}\right), \quad (14)$$

$$\sigma_{r\lambda} = \eta\left(\frac{\partial u_\lambda}{\partial r} + \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial u_r}{\partial\lambda} - \frac{u_\lambda}{r}\right). \quad (15)$$

運動学的境界条件は, 境界を横切る流れが存在しない, である. すなわち,

$$u_r = 0, \qquad \text{at} \quad r = r_i,\ r_o. \quad (16)$$

力学的境界条件としては, 応力なし (stress-free), もしくは粘着条件 (rigid) を考える.

応力なし条件の場合には $\sigma_{r\lambda} = \sigma_{\varphi r} = 0$ と $u_r = 0$ より,

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\lambda}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\varphi}{r}\right) = 0, \quad \text{at} \quad r = r_i,\ r_o. \quad (17)$$

粘着条件の場合には, 運動学的条件と合わせて,

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\Omega}_i \times \boldsymbol{r} \quad \text{at} \quad r = r_i, \qquad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\Omega}_o \times \boldsymbol{r} \quad \text{at} \quad r = r_o. \tag{18}$$

これらを成分で書き下すと[2]

$$u_\lambda = \Omega_i r_i[-\cos\varphi_i \sin\varphi \cos(\lambda_i - \lambda) + \sin\varphi_i \cos\varphi], \tag{19}$$
$$u_\varphi = \Omega_i r_i[\cos\varphi_i \sin(\lambda - \lambda_i)], \qquad \text{at} \ \ r = r_i, \tag{20}$$
$$u_\lambda = \Omega_o r_o[-\cos\varphi_o \sin\varphi \cos(\lambda_o - \lambda) + \sin\varphi_o \cos\varphi], \tag{21}$$
$$u_\varphi = \Omega_o r_o[\cos\varphi_o \sin(\lambda - \lambda_o)], \qquad \text{at} \ \ r = r_o. \tag{22}$$

ここで $\Omega_i = |\boldsymbol{\Omega_i}|$, $\Omega_o = |\boldsymbol{\Omega_o}|$ は内外球面の回転角速度の大きさ, (λ_i, φ_i), (λ_o, φ_o) は回転軸の方向を表す経度緯度である.

[2]経度 λ, 緯度 φ, 動径 r での緯度経度座標系の単位ベクトルを直線直交座標 (x, y, z) で成分表示すると, $\boldsymbol{e}_\lambda(\lambda,\varphi,r) = (-\sin\lambda, \cos\lambda, 0)$, $\boldsymbol{e}_\varphi(\lambda,\varphi,r) = (-\cos\lambda\sin\varphi, -\sin\lambda\sin\varphi, \cos\varphi)$, $\boldsymbol{e}_r(\lambda,\varphi,r) = (\cos\lambda\cos\varphi, \sin\lambda\cos\varphi, \sin\varphi)$ であり, $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$ である. 一方 λ_i, φ_i を内球面の回転軸方向を表す経度緯度とすると $\boldsymbol{k}_i = \boldsymbol{e}_r(\lambda_i, \varphi_i, r_i)$ である. したがって,

$$\boldsymbol{\Omega}_i \times \boldsymbol{r} = \Omega_i \boldsymbol{e}_r(\lambda_i, \varphi_i, r_i) \times r_i \boldsymbol{e}_r(\lambda, \varphi, r_i)$$

この各成分を計算すると

$$\begin{aligned}
u_\lambda &= \boldsymbol{e}_\lambda \cdot (\boldsymbol{\Omega}_i \times \boldsymbol{r}) \\
&= \Omega_i r_i \boldsymbol{e}_\lambda \cdot (\boldsymbol{e}_r(\lambda_i,\varphi_i,r_i) \times \boldsymbol{e}_r) \\
&= \Omega_i r_i \boldsymbol{e}_r(\lambda_i,\varphi_i,r_i) \cdot (\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\lambda) \\
&= \Omega_i r_i \boldsymbol{e}_r(\lambda_i,\varphi_i,r_i) \cdot \boldsymbol{e}_\varphi \\
&= \Omega_i r_i[\cos\lambda_i \cos\varphi_i(-\cos\lambda\sin\varphi) + \sin\lambda_i\cos\varphi_i(-\sin\lambda\sin\varphi) + \sin\varphi_i\cos\varphi] \\
&= \Omega_i r_i[-\cos\varphi_i \sin\varphi(\cos\lambda_i\cos\lambda + \sin\lambda_i\sin\lambda) + \sin\varphi_i\cos\varphi] \\
&= \Omega_i r_i[-\cos\varphi_i \sin\varphi\cos(\lambda_i - \lambda) + \sin\varphi_i\cos\varphi], \\
u_\varphi &= \boldsymbol{e}_\varphi \cdot (\boldsymbol{\Omega}_i \times \boldsymbol{r}) \\
&= \Omega_i r_i \boldsymbol{e}_\varphi \cdot (\boldsymbol{e}_r(\lambda_i,\varphi_i,r_i) \times \boldsymbol{e}_r) \\
&= \Omega_i r_i \boldsymbol{e}_r(\lambda_i,\varphi_i,r_i) \cdot (\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\varphi) \\
&= \Omega_i r_i \boldsymbol{e}_r(\lambda_i,\varphi_i,r_i) \cdot (-\boldsymbol{e}_\lambda) \\
&= -\Omega_i r_i \boldsymbol{e}_r(\lambda_i,\varphi_i,r_i) \cdot \boldsymbol{e}_\lambda \\
&= -\Omega_i r_i[\cos\lambda_i\cos\varphi_i(-\sin\lambda) + \sin\lambda_i\cos\varphi_i(\cos\lambda) + \sin\varphi_i(0)] \\
&= -\Omega_i r_i[\cos\varphi_i(-\cos\lambda_i\sin\lambda + \sin\lambda_i\cos\lambda)] \\
&= -\Omega_i r_i[\cos\varphi_i \sin(\lambda_i - \lambda)], \\
&= \Omega_i r_i[\cos\varphi_i \sin(\lambda - \lambda_i)], \\
u_r &= \boldsymbol{e}_r \cdot (\boldsymbol{\Omega}_i \times \boldsymbol{r}) \\
&= \Omega_i r_i \boldsymbol{e}_r \cdot (\boldsymbol{e}_r(\lambda_i,\varphi_i,r_i) \times \boldsymbol{e}_r) \\
&= \Omega_i r_i \boldsymbol{e}_r(\lambda_i,\varphi_i,r_i) \cdot (\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_r) = 0.
\end{aligned}$$

2.2 スケーリング

2.2.1 球殻の厚さでスケーリングする場合

熱対流問題との比較・対応を考察する場合には, 長さスケールを球殻の厚さでスケーリングするのがよい. その場合には各スケールは,

長さスケール	球殻の厚さ $D = r_o - r_i$
速度スケール	初期値の典型的な速度 U, あるいは外力 $\sqrt{D\mathcal{F}}$
時間スケール	D/U あるいは $\sqrt{D/\mathcal{F}}$
圧力のスケール	ρU^2 あるいは $\rho D\mathcal{F}$

その結果, 方程式系は

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0, \tag{23}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = -\nabla\pi + \frac{1}{R_e}\nabla^2\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\mathcal{F}} \tag{24}$$

となる. ここで $\boldsymbol{u}, \pi, \boldsymbol{\mathcal{F}}$ は各々無次元化された速度, 圧力, 外力としてあらためて定義しなおしたものである.

スケーリングによって現れた無次元数はレイノルズ数,

$$R_e \equiv \frac{\nu}{UD} \quad \text{or} \quad \frac{\nu}{\mathcal{F}}, \tag{25}$$

である. これに加えて系に現れる重要なパラメータとして内径外径比 $\zeta \equiv r_i/r_o$ が暗に存在する.

無次元化された境界条件は, 運動学的境界条件が

$$u_r = 0, \quad \text{at} \quad r = \frac{\zeta}{1-\zeta}, \frac{1}{1-\zeta}. \tag{26}$$

応力なし条件は

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\lambda}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\varphi}{r}\right) = 0, \quad \text{at} \quad r = \frac{\zeta}{1-\zeta}, \frac{1}{1-\zeta}. \tag{27}$$

粘着条件の場合は

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\Omega_i}\times\boldsymbol{r} \quad \text{at} \quad r = \frac{\zeta}{1-\zeta}, \qquad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\Omega_o}\times\boldsymbol{r} \quad \text{at} \quad r = \frac{1}{1-\zeta}. \tag{28}$$

成分で書けば

$$u_\lambda = \Omega_i\left(\frac{\zeta}{1-\zeta}\right)[-\cos\varphi_i\sin\varphi\cos(\lambda_i-\lambda)+\sin\varphi_i\cos\varphi], \tag{29}$$

$$u_\varphi = \Omega_i\left(\frac{\zeta}{1-\zeta}\right)[\cos\varphi_i\sin(\lambda-\lambda_i)], \quad \text{at} \quad r=\frac{\zeta}{1-\zeta}, \tag{30}$$

$$u_\lambda = \Omega_o\left(\frac{1}{1-\zeta}\right)[-\cos\varphi_o\sin\varphi\cos(\lambda_o-\lambda)+\sin\varphi_o\cos\varphi], \tag{31}$$

$$u_\varphi = \Omega_o\left(\frac{1}{1-\zeta}\right)[\cos\varphi_o\sin(\lambda-\lambda_o)], \quad \text{at} \quad r=\frac{1}{1-\zeta}, \tag{32}$$

$$\tag{33}$$

ここで $\boldsymbol{\Omega_i}, \boldsymbol{\Omega_o}$ および Ω_i, Ω_o は時間スケール分の 1 U/D あるいは $\sqrt{\mathcal{F}/D}$ で無次元化されたものであることに注意されたい. もしも流れが境界面の回転で励起される状況を考える場合には Ω_i, Ω_o のどちらかが 1 となるように速度スケールを (例えば $\Omega_i D$ に) 選べば良い.

2.2.2 外側球殻半径でスケーリングする場合

一方で, 球面 2 次元系との対応を考察する場合には, 長さスケールとして外側球殻半径を選ぶのが分かりやすい. その場合には各スケールは,

長さスケール	外側球殻の半径 r_o
速度スケール	初期値の典型的な速度 U, あるいは外力 $\sqrt{D\mathcal{F}}$
時間スケール	r_o/U あるいは $\sqrt{r_o/\mathcal{F}}$
圧力のスケール	ρU^2 あるいは $\rho r_o \mathcal{F}$

その結果, 方程式系は

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0, \tag{34}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = -\nabla\pi + \frac{1}{R_e^*}\nabla^2\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\mathcal{F}} \tag{35}$$

となる. $\boldsymbol{u}, \pi, \boldsymbol{\mathcal{F}}$ は先と同様, 各々無次元化された速度, 圧力, 外力としてあらためて定義しなおしたものである. スケーリングによって現れた無次元数は長さスケールの異なるレイノルズ数,

$$R_e^* \equiv \frac{\nu}{U r_o} \quad \text{or} \quad \frac{\nu}{\mathcal{F}}, \tag{36}$$

である. これに加えて系に現れるパラメータとして内径外径比 $\zeta \equiv r_i/r_o$ がやはり存在する.

無次元化された境界条件は, 運動学的境界条件が

$$u_r = 0, \quad \text{at} \quad r = \frac{\zeta}{1-\zeta}, \frac{1}{1-\zeta}. \tag{37}$$

応力なし条件は

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\lambda}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\varphi}{r}\right) = 0, \quad \text{at} \quad r = \zeta, 1. \tag{38}$$

粘着条件の場合は

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\Omega_i} \times \boldsymbol{r} \quad \text{at} \quad r = \zeta, \qquad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\Omega_o} \times \boldsymbol{r} \quad \text{at} \quad r = 1. \tag{39}$$

成分で書けば

$$u_\lambda = \Omega_i \left(\frac{\zeta}{1-\zeta}\right)[-\cos\varphi_i \sin\varphi\cos(\lambda_i - \lambda) + \sin\varphi_i \cos\varphi], \tag{40}$$

$$u_\varphi = \Omega_i \left(\frac{\zeta}{1-\zeta}\right)[\cos\varphi_i \sin(\lambda - \lambda_i)], \quad \text{at} \quad r = \zeta, \tag{41}$$

$$u_\lambda = \Omega_o \left(\frac{1}{1-\zeta}\right)[-\cos\varphi_o \sin\varphi\cos(\lambda_o - \lambda) + \sin\varphi_o \cos\varphi], \tag{42}$$

$$u_\varphi = \Omega_o \left(\frac{1}{1-\zeta}\right)[\cos\varphi_o \sin(\lambda - \lambda_o)], \quad \text{at} \quad r = 1. \tag{43}$$

$$\tag{44}$$

ここで $\boldsymbol{\Omega_i}, \boldsymbol{\Omega_o}$ および Ω_i, Ω_o は時間スケール分の 1 U/r_o あるいは $\sqrt{\mathcal{F}/r_o}$ で無次元化されたものであることに注意されたい. もしも流れが境界面の回転で励起される状況を考える場合にはΩ_i, Ω_o のどちらかが 1 となるように速度スケールを (例えば $\Omega_i r_o$ に) 選べば良い.

2.3　各スケーリング方程式系の対応関係

球殻の厚さを長さスケールとして選んだ場合との方程式系と比較すると, 無次元レイノルズ数の定義と, 境界での動径座標が異なるだけである. そこで以下では球殻の厚さを長さスケールとして選んだ場合の定式化のみ記す. 外側境界の半径を長さスケールとした場合の結果は, 以下で登場するレイノルズ数 R_e を R_e^* に, 境界での動径座標 $r = \zeta/1-\zeta, 1/1-\zeta$ を $r = \zeta, 1$ に読みかえれば良い.

各物理量の値を変換したい場合には上付き * 印を外側境界の半径を長さスケールとした場合の変数として

$$t^* \quad = \quad (D/r_o)t = (1-\zeta)t,$$

$$\begin{aligned}
\Omega^* &= (r_o/D)\Omega = (1/1-\zeta)\Omega, \\
R_e^* &= (D/r_o)R_e = (1-\zeta)R_e.
\end{aligned}$$

と計算すれば良い.

2.4 ポテンシャルによる方程式系の表現

2.4.1 支配方程式

連続の式のソレノイダル条件 (23) より, 速度場をトロイダル・ポロイダルポテンシャルを用いて表すことができる:

$$\boldsymbol{u} = \nabla\times(\psi\boldsymbol{r}) + \nabla\times\nabla\times(\phi\boldsymbol{r}), \tag{45}$$

(46)

これらのポテンシャル ψ, ϕ を用いて方程式系を表す. 運動方程式 (24) に $\boldsymbol{r}\cdot\nabla\times$, $\boldsymbol{r}\cdot\nabla\times\nabla\times$ を作用することで, [3]

$$\frac{\partial}{\partial t}(L_2\psi) = \frac{1}{R_e}L_2\nabla^2\psi - \boldsymbol{r}\cdot\nabla\times[(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}] + \boldsymbol{r}\cdot\nabla\times\boldsymbol{\mathcal{F}}, \tag{47}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(L_2\nabla^2\phi) = \frac{1}{R_e}L_2\nabla^2\nabla^2\phi + \boldsymbol{r}\cdot\nabla\times\nabla\times[(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}] - \boldsymbol{r}\cdot\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\mathcal{F}}, \tag{48}$$

が得られる. あるいは (47), (48) の右辺非線形項を恒等式

$$\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}\nabla|\boldsymbol{u}|^2 - \boldsymbol{u}\times(\nabla\times\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\nabla|\boldsymbol{u}|^2 + (\nabla\times\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{u}$$

を用いて変形した式,

$$\frac{\partial}{\partial t}(L_2\psi) = \frac{1}{R_e}L_2\nabla^2\psi - \boldsymbol{r}\cdot\nabla\times[(\nabla\times\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{u}] + \boldsymbol{r}\cdot\nabla\times\boldsymbol{\mathcal{F}}, \tag{49}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(L_2\nabla^2\phi) = \frac{1}{R_e}L_2\nabla^2\nabla^2\phi + \boldsymbol{r}\cdot\nabla\times\nabla\times[(\nabla\times\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{u}] - \boldsymbol{r}\cdot\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\mathcal{F}}, \tag{50}$$

が得られる. ここで式中の演算子 L_2 は半径 1 の球面上の 2 次元ラプラシアンの逆符号のものであり,

$$\begin{aligned}
L_2 &\equiv -r^2\nabla^2 + \frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} \\
&= -\left[\frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\right)\frac{\partial}{\partial\varphi}\right].
\end{aligned} \tag{51}$$

$\boldsymbol{r}\cdot\nabla\times, \boldsymbol{r}\cdot\nabla\times\nabla\times$ の座標表現は

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}\cdot\nabla\times\boldsymbol{\mathcal{F}} &= \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial\mathcal{F}_\varphi}{\partial\lambda} - \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\mathcal{F}_\lambda\cos\varphi), \\
\boldsymbol{r}\cdot\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\mathcal{F}} &= \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial(\nabla\times\boldsymbol{\mathcal{F}})_\varphi}{\partial\lambda} - \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}[(\nabla\times\boldsymbol{\mathcal{F}})_\lambda\cos\varphi] \\
&= \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\mathcal{F}_\lambda) - \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial\mathcal{F}_r}{\partial\lambda}\right) \\
&\quad -\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\cos\varphi\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\mathcal{F}_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\mathcal{F}_\varphi)\right)\right] \\
&= \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\mathcal{F}_\lambda) + \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\mathcal{F}_\varphi) \\
&\quad -\frac{1}{r\cos^2\varphi}\frac{\partial^2\mathcal{F}_r}{\partial\lambda^2} - \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\cos\varphi\frac{\partial\mathcal{F}_r}{\partial\varphi}\right)
\end{aligned}
$$

[3]トロイダル・ポロイダルポテンシャルの計算での便利な公式を導出しておく. 緯度経度座標系での回転は

$$
\nabla\times\boldsymbol{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi), \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\lambda) - \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial A_r}{\partial\lambda}, \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\lambda} - \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial(A_\lambda\cos\varphi)}{\partial\varphi}\right),
$$

である. したがって

$$
\begin{aligned}
\psi\boldsymbol{r} &= (0, 0, r\psi), \\
\nabla\times(\psi\boldsymbol{r}) &= \left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}, -\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}, 0\right) \\
\nabla\times\nabla\times(\psi\boldsymbol{r}) &= \left(\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right), \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right), \frac{L_2\psi}{r}\right), \\
\nabla\times\nabla\times\nabla\times(\psi\boldsymbol{r}) &= \left(-\frac{\partial(\nabla^2\psi)}{\partial\varphi}, \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial(\nabla^2\psi)}{\partial\lambda}, 0\right), \\
\nabla\times\nabla\times\nabla\times\nabla\times(\psi\boldsymbol{r}) &= \left(-\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial(\nabla^2\psi)}{\partial\lambda}\right), -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial(\nabla^2\psi)}{\partial\varphi}\right), -\frac{L_2\nabla^2\psi}{r}\right), \\
\nabla\times\nabla\times\nabla\times\nabla\times\nabla\times(\psi\boldsymbol{r}) &= \left(\frac{\partial(\nabla^2\nabla^2\psi)}{\partial\varphi}, -\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial(\nabla^2\nabla^2\psi)}{\partial\lambda}, 0\right), \\
\nabla\times\nabla\times\nabla\times\nabla\times\nabla\times\nabla\times(\psi\boldsymbol{r}) &= \left(\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial(\nabla^2\nabla^2\psi)}{\partial\lambda}\right), \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial(\nabla^2\nabla^2\psi)}{\partial\varphi}\right), \frac{L_2\nabla^2\nabla^2\psi}{r}\right),
\end{aligned}
$$

これらと $\boldsymbol{r}$ の内積をとることにより, 以下の公式が得られる.

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{r}\cdot(\psi\boldsymbol{r}) = r^2\psi \\
&\boldsymbol{r}\cdot\nabla\times\nabla\times(\psi\boldsymbol{r}) = L_2\psi \\
&\boldsymbol{r}\cdot\nabla\times\nabla\times\nabla\times\nabla\times(\psi\boldsymbol{r}) = -L_2\nabla^2\psi, \\
&\boldsymbol{r}\cdot\nabla\times\nabla\times\nabla\times\nabla\times\nabla\times\nabla\times(\psi\boldsymbol{r}) = L_2\nabla^2\nabla^2\psi, \\
&\boldsymbol{r}\cdot\nabla\times(\psi\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}\cdot\nabla\times\nabla\times\nabla\times(\psi\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}\cdot\nabla\times\nabla\times\nabla\times\nabla\times\nabla\times(\psi\boldsymbol{r}) = 0,
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial \mathcal{F}_\lambda}{\partial\lambda} + \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\mathcal{F}_\varphi\cos\varphi)\right)\right] + \frac{L_2\mathcal{F}_r}{r}.$$

2.4.2　速度場とポテンシャルとの関係式

トロイダル, ポロイダルポテンシャルから速度場を求める式は次の通りである:

$$u_\lambda = \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}\right), \tag{52}$$

$$u_\varphi = -\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\right), \tag{53}$$

$$u_r = \frac{L_2\,\phi}{r}. \tag{54}$$

逆に, 速度場の各成分からポテンシャルを求めるには, (45) に $\boldsymbol{r}\cdot$, $\boldsymbol{r}\cdot\nabla\times$ を作用させればよい.

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}\cdot[\nabla\times(\psi\boldsymbol{r}) + \nabla\times\nabla\times(\phi\boldsymbol{r})] = \boldsymbol{r}\cdot\nabla\times\nabla\times(\phi\boldsymbol{r}) = L_2\phi,$$

$$\boldsymbol{r}\cdot\nabla\times\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}\cdot\nabla\times[\nabla\times(\psi\boldsymbol{r}) + \nabla\times\nabla\times(\phi\boldsymbol{r})] = \boldsymbol{r}\cdot\nabla\times\nabla\times(\psi\boldsymbol{r}) = L_2\psi,$$

したがって,

$$\phi = L_2^{-1}(ru_r), \quad \psi = L_2^{-1}[\boldsymbol{r}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{u})]. \tag{55}$$

2.4.3　境界条件

運動学的境界条件 (37) をポテンシャルで表現すれば,

$$\phi = 0, \quad \text{at} \quad r = \frac{\zeta}{1-\zeta}, \frac{1}{1-\zeta}. \tag{56}$$

力学的境界条件が応力なしの場合は (38) をポテンシャルで表現して

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\psi}{r}\right) = 0, \quad \text{at} \quad r = \frac{\zeta}{1-\zeta}, \frac{1}{1-\zeta}. \tag{57}$$

粘着条件の場合には, (55) を用いて (39) をポテンシャルで表現して[4]

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = 0, \quad \psi = (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_i}), \quad \text{at} \quad r = \frac{\zeta}{1-\zeta},$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = 0, \quad \psi = (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_o}), \quad \text{at} \quad r = \frac{1}{1-\zeta},$$

成分で表せば[6]

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \tag{58}$$

$$\psi = \Omega_i \left(\frac{\zeta}{1-\zeta}\right)[\cos\varphi_i \cos\varphi \cos(\lambda_i - \lambda) + \sin\varphi_i \sin\varphi] \quad \text{at} \quad r = \frac{\zeta}{1-\zeta}, \tag{59}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \tag{60}$$

$$\psi = \Omega_o \left(\frac{1}{1-\zeta}\right)[\cos\varphi_o \cos\varphi \cos(\lambda_o - \lambda) + \sin\varphi_o \sin\varphi] \quad \text{at} \quad \frac{1}{1-\zeta}. \tag{61}$$

---

[4]ポロイダルポテンシャルの条件は, 境界球面上での水平発散が 0 であることから導かれる.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (r u_r)}{\partial r} = 0, \quad \text{at} \quad r = \frac{\zeta}{1-\zeta}, \frac{1}{1-\zeta},$$

ここで $u_r = L_2\phi/r$ より,

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (L_2\phi)}{\partial r} = 0, \quad \textit{i.e.} \quad \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \quad \text{at} \quad r = \frac{\zeta}{1-\zeta}, \frac{1}{1-\zeta}.$$

一方トロイダルポテンシャルは

$$\begin{aligned}
\psi &= L_2^{-1}[\boldsymbol{r}\cdot\nabla\times(\boldsymbol{\Omega_i}\times\boldsymbol{r})] \\
&= L_2^{-1}\boldsymbol{r}\cdot[(\nabla\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{\Omega_i} - (\nabla\cdot\boldsymbol{\Omega_i})\boldsymbol{r} + (\boldsymbol{r}\cdot\nabla)\boldsymbol{\Omega_i} - (\boldsymbol{\Omega_i}\cdot\nabla\cdot)\boldsymbol{r}] \\
&= L_2^{-1}\boldsymbol{r}\cdot[3\boldsymbol{\Omega_i} - \boldsymbol{\Omega_i}] = L_2^{-1}2(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_i}) = (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_i}). \quad \text{at} \quad r = \frac{\zeta}{1-\zeta}.
\end{aligned}$$

上の $L_2^{-1}2(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_i})$ の計算は, $(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega})$ を直交直線座標成分で書けばよく,

$$(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega}) = \Omega_x r\cos\varphi\cos\lambda + \Omega_y r\cos\varphi\sin\lambda + \Omega_z r\sin\varphi.$$

ここで $\cos\varphi\cos\lambda, \cos\varphi\sin\lambda, \sin\varphi$ はそれぞれ球面調和函数 Y_1^1, Y_1^0 の成分であるから L_2 の固有関数であり, その固有値は $1\times(1+1)=2$ である (L_2 の固有関数は Y_n^m で固有値は $n(n+1)$). 逆に L_2^{-1} に対しては $(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega})$ がやはり固有関数であり, その固有値は $1/2$ である. すなわち

$$L_2(\boldsymbol{r}\cdot\Omega) = 2(\boldsymbol{r}\cdot\Omega), \quad L_2^{-1}(\boldsymbol{r}\cdot\Omega) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}\cdot\Omega)$$

となる.

[6]$\boldsymbol{\Omega_i}, \boldsymbol{r}$ を直交直線座標成分で表し内積を計算すれば

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= r(\cos\varphi\cos\lambda, \cos\varphi\sin\lambda, \sin\varphi), \quad \boldsymbol{\Omega_i} = \Omega_i(\cos\varphi_i\cos\lambda_i, \cos\varphi_i\sin\lambda_i, \sin\varphi_i), \\
(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_i}) &= \Omega_i r(\cos\varphi\cos\lambda\cos\varphi_i\cos\lambda_i + \cos\varphi\sin\lambda\cos\varphi_i\sin\lambda_i + \sin\varphi\sin\varphi_i) \\
&= \Omega_i r(\cos\varphi\cos\varphi_i(\cos\lambda\cos\lambda_i + \sin\lambda\sin\lambda_i) + \sin\varphi\sin\varphi_i) \\
&= \Omega_i r(\cos\varphi\cos\varphi_i\cos(\lambda-\lambda_i) + \sin\varphi\sin\varphi_i).
\end{aligned}$$

ただし $r \equiv |\boldsymbol{r}|, \Omega_i \equiv |\boldsymbol{\Omega_i}|$ である. トロイダルポテンシャルの境界条件は変形を途中で止めた式,

$$\psi = \Omega_i\left(\frac{\zeta}{1-\zeta}\right)[\cos\varphi_i\cos\lambda_i\cos\varphi\cos\lambda + \cos\varphi_i\sin\lambda_i\cos\varphi\sin\lambda + \sin\varphi_i\sin\varphi]$$

から, 球面調和函数 $Y_n^m(\lambda,\varphi) = P_n^m(\sin\varphi)\exp(im\lambda)$ の $n=1$ 成分で表されることがわかる. そこ

2.5　解析的な解の例

2.5.1　応力なし条件下での剛体回転解

外力がない ($\mathcal{F}=0$) 応力なしの条件下では剛体回転する解が存在できる:

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}, \tag{62}$$

ここで $\boldsymbol{\Omega}=\Omega\boldsymbol{e_\Omega}$ は剛体回転を表す回転ベクトルであり, Ω は回転の大きさ, $\boldsymbol{e_\Omega}$ は回転軸方向の単位ベクトルである. 具体的な速度成分は

$$\begin{aligned}
u_\lambda(\lambda,\varphi,r) &= \Omega r[-\cos\varphi_\Omega\sin\varphi\cos(\lambda_\Omega-\lambda)+\sin\varphi_\Omega\cos\varphi],\\
u_\varphi(\lambda,\varphi,r) &= \Omega r[\cos\varphi_\Omega\sin(\lambda-\lambda_\Omega)],\\
u_r(\lambda,\varphi,r) &= 0.
\end{aligned}$$

ただし, $(\lambda_\Omega,\varphi_\Omega)$ は剛体回転の軸の方向を表す経度・緯度である. この流れを与えるトロイダル・ポロイダルポテンシャルは (55) より[7]

$$\begin{aligned}
\phi &= L_2^{-1}(ru_r)=0,\\
\psi &= L_2^{-1}[\boldsymbol{r}\cdot\nabla\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})]\\
&= L_2^{-1}\boldsymbol{r}\cdot[(\nabla\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{\Omega}-(\nabla\cdot\boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{r}+(\boldsymbol{r}\cdot\nabla)\boldsymbol{\Omega}-(\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla\cdot)\boldsymbol{r}]\\
&= L_2^{-1}\boldsymbol{r}\cdot[3\boldsymbol{\Omega}-\boldsymbol{\Omega}]=L_2^{-1}2(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega})=(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega}).
\end{aligned}$$

成分表示すれば

$$\phi=0,\quad \psi(\lambda,\varphi,r)=\Omega r[\cos\varphi_\Omega\cos\varphi\cos(\lambda_\Omega-\lambda)+\sin\varphi_\Omega\sin\varphi].$$

したがって, 応力なし条件 (57) を満たしている.

で $\psi(r=\zeta/(1-\zeta))$ を

$$\psi(\lambda,\varphi,r=\zeta/(1-\zeta))=\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n^0P_n^0(\sin\varphi)+\sum_{m=1}^{n}P_n^m(\sin\varphi)[a_n^m\sqrt{2}\cos(m\lambda)-b_n^m\sqrt{2}\sin(m\lambda)]\right]$$

と展開すると, $P_1^0(\sin\varphi)=\sin\varphi$, $P_1^1(\sin\varphi)=\cos\varphi$ であるから

$$\begin{aligned}
a_1^0 &= \Omega_i\left(\frac{\zeta}{1-\zeta}\right)\sin\varphi_i,\\
a_1^1 &= \Omega_i\left(\frac{\zeta}{1-\zeta}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi_i\cos\lambda_i,\\
b_1^1 &= -\Omega_i\left(\frac{\zeta}{1-\zeta}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi_i\sin\lambda_i
\end{aligned}$$

と展開係数が与えられる.

[7] このあたりの式変形は粘着境界条件をポテンシャルで表現するところの導出と全く同じである.

上の速度場が支配方程式満たしていることを確かめる. 連続の式は

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = \nabla\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}) = (\nabla\times\boldsymbol{\Omega})\cdot\boldsymbol{r} - (\nabla\times\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{\Omega} = 0.$$

運動方程式の粘性項はベクトル公式と連続の式を用いて

$$\nabla^2\boldsymbol{u} = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) - \nabla\times\nabla\times\boldsymbol{u} = \nabla\times\nabla\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}) = \nabla\times(2\boldsymbol{\Omega}) = 0.$$

慣性項はベクトルの公式を用いて変形すると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} &= \frac{1}{2}\nabla|\boldsymbol{u}|^2 - \boldsymbol{u}\times\nabla\times\boldsymbol{u}\\ &= \frac{1}{2}\nabla|\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}|^2 - (\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})\times\nabla\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})\end{aligned}$$

ここで

$$\nabla\times\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r} = (\nabla\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{\Omega} - (\nabla\cdot\boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{r} + (\boldsymbol{r}\cdot\nabla)\boldsymbol{\Omega} - (\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{r} = 3\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega} = 2\boldsymbol{\Omega}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} &= \frac{1}{2}\nabla|\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}|^2 - (\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r})\times 2\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}\nabla|\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}|^2 - (2\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{r} + (2\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{\Omega}\\ &= \frac{1}{2}\nabla|\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}|^2 - 2|\boldsymbol{\Omega}|^2\boldsymbol{r} + \nabla(\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{r})^2 = \frac{1}{2}\nabla|\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}|^2 - \nabla|\boldsymbol{\Omega}|^2|\boldsymbol{r}|^2 + \nabla(\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{r})^2\\ &= \nabla\left[\frac{1}{2}|\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}|^2 - |\boldsymbol{\Omega}|^2|\boldsymbol{r}|^2 + (\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{r})^2\right].\end{aligned}$$

したがってこれにバランスする圧力が

$$p = -\rho\left[\frac{1}{2}|\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}|^2 - |\boldsymbol{\Omega}|^2|\boldsymbol{r}|^2 + (\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{r})^2\right]$$

と定められる. したがって連続の式を満たすことができる.

2.5.2 粘着条件下での差分回転解 (流れが十分に遅い場合)

内外球殻の回転により引き起こされる球殻中の流れについて, 回転角速度が十分に小さく粘性項に比べて慣性項が無視できる状況での解を見出す[6] ($Re = \Omega_i D^2/\nu, \Omega_o D^2/\nu \ll 1$).

内外球殻がそれぞれ一定の角速度 $\boldsymbol{\Omega_i}, \boldsymbol{\Omega_o}$ で回転しているとする. 満たすべき方程式は, 外力がなく慣性項を無視した式,

$$L_2\nabla^2\psi = 0, L_2\nabla^2\nabla^2\phi = 0,$$

[6] Landau and Lifsiz, Vol.6, Fluid Mechanics, Section 20, Problem 1. を参照のこと.

境界での条件は粘着条件である.

$$\phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \quad \psi = (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_i}) \quad \text{at} \quad r = r_i = \frac{\zeta}{1-\zeta},$$
$$\phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0, \quad \psi = (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_o}) \quad \text{at} \quad r = r_o = \frac{1}{1-\zeta}.$$

そこで

$$\phi = 0, \quad \psi = A(r)(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_i}) + B(r)(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_o})$$

の形で解を求める. ここで $A(r), B(r)$ は境界条件

$$A(r=r_i) = 1, \quad A(r=r_o) = 0, \quad B(r=r_i) = 0, \quad B(r=r_o) = 1,$$

を満たす関数である. 仮定した解の形を支配方程式に代入すると, $A(r), B(r)$ の満たすべき方程式が[9]

[9]第 1 項目だけ代入すると

$$
\begin{aligned}
& L_2\nabla^2 A(r)(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_i}) = L_2\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} - \frac{L_2}{r^2}\right)A(r)(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_i}) \\
= \; & L_2\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}[A(r)(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_i})]\right) - \frac{L_2L_2A(r)(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_i})}{r^2} \\
= \; & \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}[A(r)L_2(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_i})]\right) - \frac{A(r)}{r^2}L_2L_2(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_i}) \\
= \; & \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}[A(r)2(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_i})]\right) - \frac{A(r)}{r^2}4(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_i}) \\
= \; & \frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}[A(r)(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_i})]\right) - \frac{4A(r)(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_i})}{r^2} \\
= \; & \frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_i})\frac{\partial A(r)}{\partial r} + r^2A(r)\frac{(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_i})}{r}\right) - \frac{4A(r)(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_i})}{r^2} \\
= \; & \frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_i})\frac{\partial A(r)}{\partial r}\right) + \frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}[rA(r)(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_i})] - \frac{4A(r)(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_i})}{r^2} \\
= \; & \frac{2(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_i})}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial A(r)}{\partial r}\right) + 2\frac{\partial A(r)}{\partial r}\frac{(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_i})}{r} + \frac{2(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_i})}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}[rA(r)] + 2\frac{A(r)}{r}\frac{(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_i})}{r} \\
& - \frac{4A(r)(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_i})}{r^2} \\
= \; & 2(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_i})\frac{\partial^2 A(r)}{\partial r^2} + \frac{4(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_i})}{r}\frac{\partial A(r)}{\partial r} + 2\frac{\partial A(r)}{\partial r}\frac{(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_i})}{r} + \frac{2(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_i})}{r}\frac{\partial A(r)}{\partial r} + \frac{2(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_i})A(r)}{r^2} \\
& - \frac{2A(r)(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_i})}{r^2} \\
= \; & 2(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_i})\frac{\partial^2 A(r)}{\partial r^2} + \frac{8(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_i})}{r}\frac{\partial A(r)}{\partial r} \\
= \; & 2(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_i})\left(\frac{\partial^2 A(r)}{\partial r^2} + \frac{4}{r}\frac{\partial A(r)}{\partial r}\right)
\end{aligned}
$$

第 2 項目についても同様に計算できる. $\boldsymbol{\Omega_i}$ と $\boldsymbol{\Omega_o}$ が異なる場合に限り $(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_i})$ と $(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_o})$ が恒等的に 0 とならないのでそれらの係数から A, B の微分方程式が求められる.

$$\frac{d^2A(r)}{dr^2}+\frac{4}{r}\frac{dA(r)}{dr}=0, \quad \frac{d^2B(r)}{dr^2}+\frac{4}{r}\frac{dB(r)}{dr}=0.$$

$A(r), B(r)=r^n$ の形を仮定すると,

$$n(n-1)r^{n-2}+4nr^{n-2}=0, \quad n(n+3)=0, \quad \text{i.e.} \quad n=0,-3$$

したがって,

$$A(r)=C_1+\frac{C_2}{r^3}, \quad B(r)=C_3+\frac{C_4}{r^3}$$

となる. ここで C_1, C_2, C_3, C_4 は定数である. 境界条件より

$$C_1+\frac{C_2}{r_i^3}=1, \quad C_1+\frac{C_2}{r_o^3}=0, \quad C_3+\frac{C_4}{r_i^3}=0, \quad C_3+\frac{C_4}{r_o^3}=1,$$

$$\begin{aligned}
C_1=\frac{1}{1-r_o^3/r_i^3}=-\frac{r_i^3}{r_o^3-r_i^3}, \quad C_2=\frac{r_i^3r_o^3}{r_o^3-r_i^3},\\
C_3=\frac{1}{(1-r_i^3/r_o^3)}=\frac{r_o^3}{r_o^3-r_i^3}, \quad C_4=-\frac{r_i^3r_o^3}{r_o^3-r_i^3}.
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
\phi &= 0,\\
\psi &= \left(-\frac{r_i^3}{r_o^3-r_i^3}+\frac{r_i^3r_o^3}{r_o^3-r_i^3}\frac{1}{r^3}\right)(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_i})+\left(\frac{r_o^3}{r_o^3-r_i^3}-\frac{r_i^3r_o^3}{r_o^3-r_i^3}\frac{1}{r^3}\right)(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_o})\\
&= -\frac{r_i^3}{r_o^3-r_i^3}\left(1-\frac{r_o^3}{r^3}\right)(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_i})+\frac{r_o^3}{r_o^3-r_i^3}\left(1-\frac{r_i^3}{r^3}\right)(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_o}).
\end{aligned}$$

無次元量で r_i, r_o を書けば

$$\begin{aligned}
\phi &= 0,\\
\psi &= -\frac{\zeta^3}{1-\zeta^3}\left(1-\frac{1}{(1-\zeta)^3r^3}\right)(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_i})+\frac{1}{1-\zeta^3}\left(1-\frac{\zeta^3}{(1-\zeta)^3r^3}\right)(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_o})
\end{aligned}$$

特に内球が存在しない場合には $r_i \longrightarrow 0$ として,

$$\phi=0, \quad \psi=(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_o}).$$

球内全体が剛体回転の解となる. 逆に外側の球が存在しない極限では $\boldsymbol{\Omega_o}=0, r_o \longrightarrow \infty$ として

$$\phi=0, \quad \psi=\frac{1}{r^3}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_i}).$$

速度場はトロイダルポテンシャルの定義 (45) より

$$\boldsymbol{u} = \nabla\times(\psi \boldsymbol{r}) = \nabla\psi \times \boldsymbol{r} + \psi\nabla\times\boldsymbol{r} = \nabla\psi \times \boldsymbol{r}.$$

ここで

$$\begin{aligned}\nabla[A(r)(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_i})]\times\boldsymbol{r} &= (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_i})[\nabla A(r)]\times\boldsymbol{r}A(r)[\nabla(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_i})]\times\boldsymbol{r} \\ &= A(r)\boldsymbol{\Omega_i}\times\boldsymbol{r}\end{aligned}$$

$A(r)$ は r だけの関数なので $\nabla A(r)$ は $\boldsymbol{r}$ と並行であり, $[\nabla A(r)]\times\boldsymbol{r} = 0$ であることに注意されたい. したがって,

$$\boldsymbol{u} = -\frac{r_i^3}{r_o^3 - r_i^3}\left(1 - \frac{r_o^3}{r^3}\right)(\boldsymbol{\Omega_i}\times\boldsymbol{r}) + \frac{r_o^3}{r_o^3 - r_i^3}\left(1 - \frac{r_i^3}{r^3}\right)(\boldsymbol{\Omega_o}\times\boldsymbol{r}).$$

3 回転系での定式化

3.1 支配方程式

中心を共有する半径 r_i, r_o の球面に挟まれた球殻内にある非圧縮粘性流体について考える. 座標系を球殻の中心を原点し, 外側球面の回転角速度の向きを北極方向とする緯度経度座標系 (λ, φ, r) とする. 外側の球面の回転角速度を $\boldsymbol{\Omega_o} = \Omega\boldsymbol{k}$, それに相対的な内側球面の回転角速度ベクトルを $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_i = \boldsymbol{\Omega_i} - \boldsymbol{\Omega_o} \equiv \tilde{\Omega}_i\boldsymbol{k}_i$ とする. ここで $\boldsymbol{k}_i, \boldsymbol{k}$ はそれぞれ内外球面の回転軸方向の単位ベクトルを表している. 以下ではチルダ記号を省略し, あらためて $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}_{\boldsymbol{i}} \to \boldsymbol{\Omega_i}$ $\tilde{\Omega}_i \to \Omega_i$ と定義しなおすことにする.

支配方程式は外側の球面とともにまわっている回転系での非圧縮粘性流体のナビエーストークス方程式である.

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0, \tag{63}$$
$$\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + 2\Omega\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla\tilde{p} + \nu\nabla^2\boldsymbol{u}. \tag{64}$$

各々の記号は次の通りである:

$\boldsymbol{u}$　回転系での流速ベクトル.
成分毎に書く場合には, $\boldsymbol{u} = (u_\lambda, u_\varphi, u_r)$

ρ　流体の密度. 非圧縮を仮定しているので一定である.

$\tilde{p}$　流体の圧力と遠心力.
遠心力は $\nabla \frac{1}{2}|\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}|^2$ の形でかけるのでこの圧力項に含めることができる.

$\boldsymbol{k}$　外側球面の回転軸方向の単位ベクトル

また, 動粘性率 ν は一定であるとする.

運動学的境界条件は, 境界を横切る流れが存在しない, である. すなわち,

$$u_r = 0, \quad \text{at} \quad r = r_i, \quad r_o. \tag{65}$$

力学的境界条件としては, 応力なし (stress-free), もしくは粘着条件 (rigid) を考える.

応力なし条件の場合には

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\lambda}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\varphi}{r}\right) = 0, \quad \text{at} \quad r = r_i, \quad r_o. \tag{66}$$

粘着条件の場合には,

$$u_\lambda = u_\varphi = 0, \quad \text{at} \quad r = r_o, \quad , \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\Omega_i} \times \boldsymbol{r} \quad \text{at} \quad r_i. \tag{67}$$

$\boldsymbol{r}$ は中心を原点とする位置ベクトルである. 成分で書き下すと

$$u_\lambda = u_\varphi = 0, \;\; \text{at} \;\; r = r_o, \tag{68}$$

$$u_\lambda = \Omega_i r_i[-\cos\varphi_i \sin\varphi \cos(\lambda_i - \lambda) + \sin\varphi_i \cos\varphi], \tag{69}$$

$$u_\varphi = \Omega_i r_i[\cos\varphi_i \sin(\lambda - \lambda_i)], \;\; \text{at} \;\; r = r_i. \tag{70}$$

ここで λ_i, φ_i は内球面の回転軸方向を表す経度緯度である.

3.2　スケーリング

慣性系の場合と同様に, 長さスケールとして 2 通りの場合を扱う.

3.2.1　球殻の厚さでスケーリングする場合

熱対流問題との比較・対応を考察する場合には, 長さスケールを球殻の厚さでスケーリングするのがよい. その場合には各スケールは,

長さスケール	球殻の厚さ $D = r_o - r_i$
速度スケール	初期値の典型的な速度 U, あるいは外力 $\sqrt{D\mathcal{F}}$
時間スケール	D/U あるいは $\sqrt{D/\mathcal{F}}$
圧力のスケール	ρU^2 あるいは $\rho D\mathcal{F}$

その結果, 方程式系は

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0, \tag{71}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + \frac{1}{R_o}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{u} = -\nabla\pi + \frac{1}{R_e}\nabla^2\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\mathcal{F}} \tag{72}$$

となる. ここで $\boldsymbol{u}, \pi, \boldsymbol{\mathcal{F}}$ は各々無次元化された速度, 圧力, 外力としてあらためて定義しなおしたものである.

スケーリングによって現れた無次元数はレイノルズ数とロスビー数,

$$R_e \equiv \frac{\nu}{UD} \quad \text{or} \quad \frac{\nu}{\mathcal{F}}, \tag{73}$$

$$R_o \equiv \frac{U}{2\Omega D} \quad \text{or} \quad \frac{\mathcal{F}}{2\Omega}, \tag{74}$$

である. これに加えて系に現れる重要なパラメータとして内径外径比 $\zeta \equiv r_i/r_o$ が暗に存在する.

無次元化された境界条件は, 運動学的境界条件が

$$u_r = 0, \quad \text{at} \quad r = \frac{\zeta}{1-\zeta}, \frac{1}{1-\zeta}. \tag{75}$$

応力なし条件は

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\lambda}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\varphi}{r}\right) = 0, \quad \text{at} \quad r = \frac{\zeta}{1-\zeta}, \frac{1}{1-\zeta}. \tag{76}$$

粘着条件の場合は

$$u_\lambda = 0, \quad u_\varphi = 0, \quad \text{at} \quad r = \frac{\zeta}{1-\zeta}, \tag{77}$$

$$u_\lambda = \Omega_i \left(\frac{1}{1-\zeta}\right)[-\cos\varphi_o \sin\varphi\cos(\lambda_o-\lambda)+\sin\varphi_o\cos\varphi], \tag{78}$$

$$u_\varphi = \Omega_i \left(\frac{1}{1-\zeta}\right)[\cos\varphi_o \sin(\lambda-\lambda_o)], \quad \text{at} \quad r=\frac{1}{1-\zeta}, \tag{79}$$

$$\tag{80}$$

ここで Ω_i は時間スケール分の 1 U/D あるいは $\mathcal{F}/D$ で無次元化されたものであることに注意されたい.

3.2.2 外側球殻半径でスケーリングする場合

一方で, 球面 2 次元系との対応を考察する場合には, 長さスケールとして外側球殻半径を選ぶのが分かりやすい. その場合には各スケールは,

長さスケール	外側球殻の半径 r_o
速度スケール	初期値の典型的な速度 U, あるいは外力 $\sqrt{D\mathcal{F}}$
時間スケール	r_o/U あるいは $\sqrt{r_o/\mathcal{F}}$
圧力のスケール	ρU^2 あるいは $\rho r_o \mathcal{F}$

その結果, 方程式系は

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0, \tag{81}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + \frac{1}{R_o^*}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{u} = -\nabla\pi + \frac{1}{R_e^*}\nabla^2\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\mathcal{F}} \tag{82}$$

となる. ここで $\boldsymbol{u}, \pi, \boldsymbol{\mathcal{F}}$ は先と同様, 各々無次元化された速度, 圧力, 外力としてあらためて定義しなおしたものである.

スケーリングによって現れた無次元数は長さスケールの異なるレイノルズ数とロスビー数,

$$R_e^* \equiv \frac{\nu}{U r_o} \quad \text{or} \quad \frac{\nu}{\mathcal{F}}, \tag{83}$$

$$R_o^* \equiv \frac{U}{2\Omega r_o} \quad \text{or} \quad \frac{\mathcal{F}}{2\Omega}, \tag{84}$$

である. これに加えて系に現れるパラメータとして内径外径比 $\zeta \equiv r_i/r_o$ がやはり存在する.

無次元化された境界条件は, 運動学的境界条件が

$$u_r = 0, \quad \text{at} \quad r = \zeta, 1. \tag{85}$$

応力なし条件は

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\lambda}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\varphi}{r}\right) = 0, \quad \text{at} \quad r = \zeta, 1. \tag{86}$$

粘着条件の場合は

$$u_\lambda = 0, \quad u_\varphi = 0, \quad \text{at} \quad r = \zeta, \tag{87}$$

$$u_\lambda = \Omega_i\,(1)\,[-\cos\varphi_o \sin\varphi \cos(\lambda_o - \lambda) + \sin\varphi_o \cos\varphi], \tag{88}$$

$$u_\varphi = \Omega_i\,(1)\,[\cos\varphi_o \sin(\lambda - \lambda_o)], \quad \text{at} \quad r = 1, \tag{89}$$

(90)

ここで Ω_i は時間スケール分の 1: U/r_o あるいは $\mathcal{F}/r_o$ で無次元化されたものであることに注意されたい.

3.3 各スケーリング方程式系の対応関係

球殻の厚さを長さスケールとして選んだ場合との方程式系と比較すると, 無次元レイノルズ数の定義と, 境界での動径座標が異なるだけである. そこで以下では球殻の厚さを長さスケールとして選んだ場合の定式化のみ記す. 外側境界の半径を長さスケールとした場合の結果は, 以下で登場するレイノルズ数 R_e を R_e^* に, ロスビー数 R_o を R_o^* に, 境界での動径座標 $r = \zeta/1-\zeta, 1/1-\zeta$ を $r = \zeta, 1$ に読みかえれば良い.

各物理量の値を変換したい場合には上付き * 印を外側境界の半径を長さスケールとした場合の変数として

$$\begin{aligned} t^* &= (D/r_o)t = (1-\zeta)t, \\ \Omega^* &= (r_o/D)\Omega = (1/1-\zeta)\Omega, \\ R_e^* &= (D/r_o)R_e = (1-\zeta)R_e, \\ R_o^* &= (D/r_o)R_o = (1-\zeta)R_o. \end{aligned}$$

と計算すれば良い.

3.4 ポテンシャルによる方程式系の表現

慣性系の場合と同様, 速度場をトロイダル・ポロイダルポテンシャルを用いて表現し, 支配方程式と境界条件を構成する.

3.4.1 支配方程式

連続の式のソレノイダル条件 (71) より, 速度場をトロイダル・ポロイダルポテンシャルを用いて表すことができる:

$$\boldsymbol{u} = \nabla\times(\psi\boldsymbol{r}) + \nabla\times\nabla\times(\phi\boldsymbol{r}). \tag{91}$$

これらのポテンシャル ψ, ϕ を用いて方程式系を表す. 運動方程式 (72) に $\boldsymbol{r}\cdot\nabla\times$, $\boldsymbol{r}\cdot\nabla\times\nabla\times$ を作用することで, [2]

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(L_2\psi) &= \frac{1}{R_o}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} - \frac{1}{R_o}Q\phi + \frac{1}{R_e}L_2\nabla^2\psi \\ &\quad -\boldsymbol{r}\cdot\nabla\times[(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}] + \boldsymbol{r}\cdot\nabla\times\boldsymbol{\mathcal{F}}, \end{aligned}\tag{92}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(L_2\nabla^2\phi) &= \frac{1}{R_o}\frac{\partial}{\partial\lambda}(\nabla^2\phi) + \frac{1}{R_o}Q\psi + \frac{1}{R_e}L_2\nabla^2\nabla^2\phi \\ &\quad +\boldsymbol{r}\cdot\nabla\times\nabla\times[(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}] - \boldsymbol{r}\cdot\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\mathcal{F}}, \end{aligned}\tag{93}$$

が得られる. あるいは, 恒等式 $\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}\nabla|\boldsymbol{u}|^2 + (\nabla\times\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{u}$ を用いて変形した式,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(L_2\psi) &= \frac{1}{R_o}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} - \frac{1}{R_o}Q\phi + \frac{1}{R_e}L_2\nabla^2\psi \\ &\quad -\boldsymbol{r}\cdot\nabla\times[(\nabla\times\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{u}] + \boldsymbol{r}\cdot\nabla\times\boldsymbol{\mathcal{F}}, \end{aligned}\tag{94}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(L_2\nabla^2\phi) &= \frac{1}{R_o}\frac{\partial}{\partial\lambda}(\nabla^2\phi) + \frac{1}{R_o}Q\psi + \frac{1}{R_e}L_2\nabla^2\nabla^2\phi \\ &\quad +\boldsymbol{r}\cdot\nabla\times\nabla\times[(\nabla\times\boldsymbol{u})\times\boldsymbol{u}] - \boldsymbol{r}\cdot\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\mathcal{F}}, \end{aligned}\tag{95}$$

が得られる. ここで式中の演算子 L_2 は半径 1 の球面上の 2 次元ラプラシアンの逆符号のものであり, 慣性系で定義したものと同じである. 演算子 Q は

$$Q \equiv \boldsymbol{k}\cdot\nabla - \frac{1}{2}(L_2\boldsymbol{k}\cdot\nabla + \boldsymbol{k}\cdot\nabla L_2) \tag{96}$$

で定義される演算子であり, 具体的には,

$$\boldsymbol{k}\cdot\nabla = \sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \tag{97}$$

$$Q = \sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{98}$$

$$-\frac{1}{2}\left[L_2\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) + \left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)L_2\right]. \tag{99}$$

3.4.2 速度場とポテンシャルとの関係式

トロイダル, ポロイダルポテンシャルから速度場を求める式, およびその逆の式は慣性系のものと同じである:

$$u_\lambda = \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial\lambda}\right), \tag{100}$$

$$u_\varphi = -\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\right), \tag{101}$$

$$u_r = \frac{L_2\,\phi}{r}. \tag{102}$$

$$\phi = L_2^{-1}(ru_r), \quad \psi = L_2^{-1}[\boldsymbol{r}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{u})]. \tag{103}$$

3.4.3 境界条件

運動学的境界条件 (85) をポテンシャルで表現すれば,

$$\phi = 0, \quad \text{at} \quad r = \frac{\zeta}{1-\zeta}, \frac{1}{1-\zeta}. \tag{104}$$

力学的境界条件が応力なしの場合は (86) をポテンシャルで表現して

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\psi}{r}\right) = 0, \quad \text{at} \quad r = \frac{\zeta}{1-\zeta}, \frac{1}{1-\zeta}. \tag{105}$$

粘着条件の場合には, (87) をポテンシャルで表現して

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = 0, \quad \psi = (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Omega_i}) \quad \text{at} \quad r = \frac{\zeta}{1-\zeta},$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = 0, \quad \psi = 0 \quad \text{at} \quad r = \frac{\zeta}{1-\zeta},$$

成分で表せば

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = 0, \tag{106}$$

$$\psi = \Omega_i\left(\frac{\zeta}{1-\zeta}\right)[\cos\varphi_i\cos\varphi\cos(\lambda_i-\lambda)+\sin\varphi_i\sin\varphi] \quad \text{at} \quad r = \frac{\zeta}{1-\zeta}, \tag{107}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = 0, \tag{108}$$

$$\psi = 0 \quad \text{at} \quad \frac{1}{1-\zeta}. \tag{109}$$

3.5 解析的な解の例

3.5.1 応力なし条件下での剛体回転解

参考文献

Chandrasekhar,S.,1961: *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Oxford University Press.

Zhang,K. and Busse,F.H.,1987: On the onset of convection in rotating spherical shells. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.*, **39**, 119–147.

Landau, L. D., Lifshitz, E. M., 1987 : Fluid Mechanics (Volume 6 of Course of theoretical physics), 2nd edition. Pergamon press, 539pp.

[4]慣性系の場合と同様, $\psi(r=\zeta/(1-\zeta)$ を球面調和函数の和で

$$\psi(\lambda,\varphi,r=\zeta/(1-\zeta)) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n^0 P_n^0(\sin\varphi) + \sum_{m=1}^{n} P_n^m(\sin\varphi)[a_n^m\sqrt{2}\cos(m\lambda) - b_n^m\sqrt{2}\sin(m\lambda)]\right]$$

と展開すると, $P_1^0(\sin\varphi)=\sin\varphi$, $P_1^1(\sin\varphi)=\cos\varphi$ であるから

$$\begin{aligned}
a_1^0 &= \Omega_i\left(\frac{\zeta}{1-\zeta}\right)\sin\varphi_i, \\
a_1^1 &= \Omega_i\left(\frac{\zeta}{1-\zeta}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi_i\cos\lambda_i, \\
b_1^1 &= -\Omega_i\left(\frac{\zeta}{1-\zeta}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi_i\sin\lambda_i
\end{aligned}$$

と展開係数が与えられる.