球領域および円盤領域での 1 次元拡散型方程式の解析解

竹広真一

平成 19 年 12 月 31 日

この文章では, チェビシェフ関数展開を利用した球および円盤領域の動径方向 1 次元計算のための SPMODEL ライブラリ (spml) のモジュール au_module のテストのために, 球および円筒領域での動径 1 次元拡散型方程式のさまざまな境界条件に対する解を (できるだけ) 解析的に求めることを行う.

1　球領域の動径 1 次元拡散問題

半径 a の球領域での拡散問題を考える. 支配方程式は

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \kappa\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right). \tag{1}$$

$r(0 \le r \le a)$ は動径座標, κ は拡散率 (正数) である. $\phi(r,t)$ は拡散する物理量であり, 例えば温度, 組成濃度, 磁場などである.

1.1　一般解

時間に関して指数型の解を仮定し,

$$\phi(r,t) = \tilde{\phi}(r)e^{\sigma t} \tag{2}$$

これを支配方程式に代入すると,

$$\sigma\tilde{\phi} = \kappa\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\tilde{\phi}}{dr}\right). \tag{3}$$

これををを変形すると

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\tilde{\phi}}{dr}\right) + \frac{-\sigma}{\kappa}\tilde{\phi},$$

さらに動径座標を

$$\tilde{r} = \sqrt{\frac{-\sigma}{\kappa}}r, \quad r = \sqrt{\frac{\kappa}{-\sigma}}\tilde{r}, \tag{4}$$

と変形すると,

$$\frac{1}{\tilde{r}^2}\frac{d}{d\tilde{r}}\left(\tilde{r}^2\frac{d\tilde{\phi}}{d\tilde{r}}\right) + \tilde{\phi} = 0.$$

この微分方程式は 0 次の球ベッセルの微分方程式であり, その一般解は 0 次の球ベッセル函数 $\mathcal{J}_0(\tilde{r}), \mathcal{N}_0(\tilde{r})$ の線形結合として表される.

1.2　ディリクレ境界条件の場合

境界条件は, 原点 $r = 0$ で特異性がなく, 外側境界 $r = a$ でディリクレ条件 $\tilde{\phi} = 0$ を考えることにする[1]. 原点の境界条件から

$$\tilde{\phi} = A\mathcal{J}_0(\tilde{r}) = A\frac{\sin\tilde{r}}{\tilde{r}} \tag{5}$$

$r = a$ の境界条件から

$$\tilde{a} = \sqrt{\frac{-\sigma}{\kappa}}a = n\pi, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

すなわち,

$$\sigma = -\frac{\kappa}{a^2}n^2\pi^2, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{7}$$

よって解は

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \mathcal{J}_0(\frac{n\pi}{a}r)\exp(-\frac{\kappa}{a^2}n^2\pi^2 t). = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\sin(\frac{n\pi}{a}r)}{\frac{n\pi}{a}r}\exp(-\frac{\kappa}{a^2}n^2\pi^2 t). \tag{8}$$

係数 A_n は初期条件からさだまる.

[1] 一般的には, ディリクレ条件だと $\tilde{\phi} = A$, しかしながら, ディリクレ条件の場合は定数部分を $\tilde{\phi} = A + \tilde{\phi}'$ と分離できるので結局値が 0 に対する解を解けば良いことになる. ノイマン条件の場合は...

1.3　ノイマン境界条件の場合

境界条件は, 原点 $r = 0$ で特異性がなく, 外側境界 $r = a$ でノイマン条件 $\dfrac{d\tilde{\phi}}{dr} = 0$ を考えることにする[2]. 原点の境界条件から

$$\tilde{\phi} = A\mathcal{J}_0(\tilde{r}) = A\frac{\sin\tilde{r}}{\tilde{r}}, \tag{9}$$

$r = a$ の境界条件から

$$\frac{d\tilde{\phi}}{dr} = A\mathcal{J}_0'(\tilde{r}) = A\frac{\tilde{r}\cos\tilde{r} - \sin\tilde{r}}{\tilde{r}^2} = 0,$$

したがって

$$\tilde{a}\cos\tilde{a} - \sin\tilde{a} = 0. \tag{10}$$

$x\cos x - \sin x = 0$ の解を α_n と求まったとすると,

$$\sqrt{\frac{-\sigma}{\kappa}}a = \alpha_n, \quad \sqrt{\frac{-\sigma}{\kappa}} = \frac{\alpha_n}{a}, \quad \sigma = -\kappa\frac{\alpha_n^2}{a^2},$$

$$\phi = A_n\frac{\sin\frac{\alpha_n r}{a}}{\frac{\alpha_n r}{a}}\exp\left(-\kappa\frac{\alpha_n^2}{a^2}t\right) \tag{11}$$

[2] 一般的なノイマン条件だと $\dfrac{d\tilde{\phi}}{dr} = A$.