チェビシェフ関数展開を利用した ガラーキン法

竹広真一

平成 18 年 1 月 18 日

この文書は, チェビシェフ関数展開ルーチンを利用したガラーキン法による数値計算の定式化を説明する.

1　チェビシェフ関数の性質

チェビシェフ関数系 $T_k(x)$ は区間 $[-1,1]$ で定義される関数からなり, 次の性質ような性質をもつ.

- 定義
$$x = \cos\theta; \quad T_k(x) = T_k(\cos\theta) = \cos k\theta. \tag{1}$$
- 微分の表現[1]
$$x = \cos\theta, \quad \frac{dT_k}{dx} = \frac{k\sin k\theta}{\sin\theta}, \quad \frac{d^2T_k}{dx^2} = \frac{-k^2\cos k\theta\sin\theta + k\sin k\theta\cos\theta}{\sin^3\theta}. \tag{2}$$

[1]
$$\begin{aligned}
\frac{dT_k}{dx} &= \frac{dT_k(\cos\theta)}{d\theta}\frac{d\theta}{dx} == \frac{(\cos k\theta)'}{(cos\theta)'} = \frac{k\sin k\theta}{\sin\theta}, \\
\frac{d^2T_k}{dx^2} &= \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dT_k}{dx}\right)\frac{d\theta}{dx} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{k\sin k\theta}{\sin\theta}\right)\frac{1}{(cos\theta)'} = \frac{k^2\cos k\theta\sin\theta - k\sin k\theta\cos\theta}{-\sin^3\theta}.
\end{aligned}$$

- 端点での値[2]

$$T_k(1) = 1, \quad T_k(-1) = (-1)^k, \tag{3}$$

$$\left.\frac{dT_k}{dx}\right|_{x=1} = k^2, \quad \left.\frac{dT_k}{dx}\right|_{x=-1} = (-1)^{k+1}k^2, \tag{4}$$

$$\left.\frac{d^2T_k}{dx^2}\right|_{x=1} = \frac{k^2(k^2-1)}{3}, \quad \left.\frac{d^2T_k}{dx^2}\right|_{x=-1} = (-1)^k\frac{k^2(k^2-1)}{3}. \tag{5}$$

- 微分方程式[3]

$$(1-x^2)\frac{d^2T_k}{dx^2} - x\frac{dT_k}{dx} + k^2T_k = 0. \tag{6}$$

- 漸化式[4]

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x). \tag{7}$$

---

[2]

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dT_k}{dx}\right|_{x=1} &= \lim_{\theta\to 0}\frac{k\sin k\theta}{\sin\theta} = \lim_{\theta\to 0}k^2\frac{\sin k\theta}{n\theta}\frac{\theta}{\sin\theta} = k^2, \\
\left.\frac{dT_k}{dx}\right|_{x=-1} &= \lim_{\theta\to\pi}\frac{k\sin k\theta}{\sin\theta} = \lim_{\varphi\to 0}\frac{k\sin k(\pi-\varphi)}{\sin(\pi-\varphi)} = \lim_{\varphi\to 0}\frac{-k\cos k\pi\sin\varphi}{\sin\varphi} \\
&= (-1)^{k+1}\lim_{\varphi\to 0}\frac{k\sin\varphi}{\sin\varphi} = (-1)^{k+1}k^2, \\
\left.\frac{d^2T_k}{dx^2}\right|_{x=1} &= \lim_{\theta\to 0}\frac{-k^2\cos k\theta\sin\theta + k\sin k\theta\cos\theta}{\sin^3\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{(-k^2\cos k\theta\sin\theta + k\sin k\theta\cos\theta)'}{(\sin^3\theta)'} \\
&= \lim_{\theta\to 0}\frac{k^3\sin k\theta\sin\theta - k^2\cos k\theta\cos\theta + k^2\cos k\theta\cos\theta - k\sin k\theta\sin\theta}{3\sin^2\theta\cos\theta} \\
&= \lim_{\theta\to 0}k(k^2-1)\frac{\sin k\theta}{3\sin\theta\cos\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{k^2(k^2-1)}{3}\frac{\sin k\theta}{k\theta}\frac{\theta}{\sin\theta}\frac{1}{\cos\theta} = \frac{n^2(n^2-1)}{3}. \\
\left.\frac{d^2T_k}{dx^2}\right|_{x=-1} &= \lim_{\theta\to\pi}\frac{-k^2\cos k\theta\sin\theta + k\sin k\theta\cos\theta}{\sin^3\theta} = \lim_{\theta\to\pi}k(k^2-1)\frac{\sin k\theta}{3\sin\theta\cos\theta} \\
&= \lim_{\varphi\to 0}\frac{k(k^2-1)}{3}\frac{\sin k(\pi-\varphi)}{\sin(\pi-\varphi)\cos(\pi-\varphi)} = \lim_{\varphi\to 0}\frac{k(k^2-1)}{3}\frac{-\cos k\pi\sin k\varphi}{-\sin\varphi\cos\varphi} \\
&= \lim_{\varphi\to 0}(-1)^k\frac{k(k^2-1)}{3}\frac{\sin k\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} = (-1)^k\frac{k(k^2-1)}{3}
\end{aligned}$$

[3]

$$\begin{aligned}
\frac{d^2T_k}{dx^2} &= \frac{-k^2\cos k\theta\sin\theta + k\sin k\theta\cos\theta}{\sin^3\theta}. = -k^2\frac{\cos k\theta}{\sin^2\theta} + k\frac{\sin k\theta\cos\theta}{\sin^3\theta}. = -k^2\frac{T_k(x)}{1-x^2} + \frac{k\sin k\theta}{\sin\theta}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} \\
&= -k^2\frac{T_k(x)}{1-x^2} + \frac{dT_k}{dx}\frac{x}{1-x^2} \to (1-x^2)\frac{d^2T_k}{dx^2} - x\frac{dT_k}{dx} + k^2T_k(x).
\end{aligned}$$

[4]三角関数の和を積に直す公式より

$$\cos(k+1)\theta + \cos(k-1)\theta = 2\cos k\theta\cos\theta \to T_{k+1}(x) + T_{k-1}(x) = 2xT_k(x).$$

- 昇降漸化式[5]

$$T_{k\pm1}(x) = xT_k(x) \mp \frac{1-x^2}{k}\frac{dT_k}{dx} \tag{8}$$

- 直交関係[6]

$$\int_{-1}^{1} T_k(x)T_l(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \alpha_k\delta_{kl}, \tag{9}$$

ここで

$$\alpha_k = \begin{cases} \pi & k=0 \\ \pi/2 & k\neq 0 \end{cases}. \tag{10}$$

である.

- 低次の関数形

$$T_0(x)=1,\ T_1(x)=x,\ T_2(x)=2x^2-1,\ T_3(x)=4x^3-3x,\ T_4(x)=8x^4-8x^2+1,\ldots \tag{11}$$

5

$$\begin{aligned} T_{k+1}(x) &= \cos(k+1)\theta = \cos k\theta\cos\theta - \sin k\theta\sin\theta = xT_k(x) - \frac{1}{k}\frac{k\sin k\theta}{\sin\theta}\sin^2\theta = xT_k(x) - \frac{1-x^2}{k}\frac{dT_k}{dx}, \\ T_{k-1}(x) &= \cos(k-1)\theta = \cos k\theta\cos\theta + \sin k\theta\sin\theta = xT_k(x) + \frac{1}{k}\frac{k\sin k\theta}{\sin\theta}\sin^2\theta = xT_k(x) + \frac{1-x^2}{k}\frac{dT_k}{dx}. \end{aligned}$$

6

$$\int_{-1}^{1} T_k(x)T_l(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{pi}^{0}\cos k\theta\cos l\theta\frac{-\sin\theta\ d\theta}{\sin\theta} = \int_0^{\pi}\cos k\theta\cos l\theta\ d\theta.$$

$k\neq l$ のとき

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi}\cos k\theta\cos l\theta\ d\theta &= \int_0^{\pi}\frac{1}{2}[\cos(k+l)\theta+\cos(k-l)\theta]\ d\theta \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k+l}\sin(n+m)\theta + \frac{1}{k-l}\sin(n-m)\theta\right]_0^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

$k=l\neq 0$ のとき

$$\int_0^{\pi}\cos k\theta\cos l\theta\ d\theta = \int_0^{\pi}\cos^2 k\theta\ d\theta = \int_0^{\pi}\frac{1}{2}[1+\cos 2k\theta]\ d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta+\frac{1}{2k}\sin 2k\theta\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

$k=l=0$ のとき

$$\int_0^{\pi}\cos k\theta\cos l\theta\ d\theta = \int_0^{\pi}\ d\theta = [\theta]_0^{\pi} = \pi.$$

2 チェビシェフ関数展開

区間 $[x_{min}, x_{max}]$ でとある時間発展方程式と境界条件の下での解をガラーキン法で数値計算したい. 区間 $[x_{min}, x_{max}]$ で定義された関数 $f^*(x^*)$ は次の線形写像で区間 $[-1, 1]$ での関数 $f(x)$ へと写される.

$$x^* = \frac{x_{max} + x_{min}}{2} + \frac{x_{max} - x_{min}}{2} \times x. \tag{12}$$

したがって, 区間 $[-1, 1]$ で $f(x)$ をチェビシェフ関数で構成された境界条件を満たす関数系 $\phi_n(x)$ を用いて

$$f(x) = \sum_{n=K_s}^{N} a_n \phi_n(x) \tag{13}$$

と表せればよい. $\phi_n(x)$ はガラーキン法の基底関数系であり, チェビシェフ関数の線形結合で表されるとする. K_s は基底関数のもっとも低い次数, K が最高次の切断次数を表す.

$$\phi_n(x) = \sum_{l=0}^{K} A_{ln} T_l(x) \tag{14}$$

$\phi_n(x)$ は n 次の多項式であることに注意されたい. (A_{ln}) は $(K+1) \times (K - K_s)$ の行列である.

一方で, $f(x)$ が K 次までのチェビシェフ関数系 $T_k(x)$ で展開されているとする. すなわち

$$f(x) = \sum_{k=0}^{K}{}'' c_k T_k(x) \equiv \frac{1}{2} c_0 T_0(x) + \sum_{k=1}^{K-1} c_k T_k(x) + \frac{1}{2} c_K T_K(x) = \sum_{n=0}^{K} \beta_k c_k T_k(x) \tag{15}$$

ただし

$$\beta_k = \begin{cases} 1/2 & (k = 0, K) \\ 1 & (k \neq 0, K) \end{cases} \tag{16}$$

である.

2.1 チェビシェフ係数からガラーキン係数の計算

いま c_k を計算できているとして, ガラーキン法による展開係数 a_n を求めることを考える. (13) と (14) から

$$f(x) = \sum_{n=K_s}^{K} a_n \phi_n(x) = \sum_{n=K_s}^{K} a_n \sum_{l=0}^{K} A_{ln} T_l(x).$$

これと (15) が等しいので

$$\sum_{k=0}^{K} \beta_k c_k T_k(x) = \sum_{n=K_s}^{K} a_n \sum_{l=0}^{K} A_{ln} T_l(x). \tag{17}$$

両辺に $\phi_m(x) = \sum_{l'=0}^{K} A_{l'm} T'_l(x)$ $(m = k_s, \dots, K)$ をかけて $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ を作用させ, チェビシェフ関数の直交関係を用いる.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{K} \sum_{l'=0}^{K} A_{l'm} T'_l(x) \beta_k c_k T_k(x) = \sum_{n=K_s}^{K} \sum_{l'=0}^{K} A_{l'm} T'_l(x) a_n \sum_{l=0}^{K} A_{ln} T_l(x), \\
&\sum_{k=0}^{K} \sum_{l'=0}^{K} A_{l'm} \beta_k c_k \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} T'_l(x) T_k(x) = \sum_{n=K_s}^{K} \sum_{l'=0}^{K} A_{l'm} a_n \sum_{l=0}^{K} A_{ln} \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} T'_l(x) T_l(x), \\
&\sum_{k=0}^{K} \sum_{l'=0}^{K} A_{l'm} \beta_k c_k \alpha_k \delta_{l'k} = \sum_{n=K_s}^{K} \sum_{l'=0}^{K} A_{l'm} a_n \sum_{l=0}^{K} A_{ln} \alpha_l \delta_{l'l}, \\
&\sum_{k=0}^{K} \alpha_k \beta_k c_k A_{km} = \sum_{n=K_s}^{K} a_n \sum_{l=0}^{K} \alpha_l A_{lm} A_{ln},
\end{aligned}$$

ここで $B_{mn} \equiv \sum_{l=0}^{K} \alpha_l A_{lm} A_{ln}$ と書き直すと行列の積の形にかけて

$$\sum_{k=0}^{K} \alpha_k \beta_k c_k A_{km} = \sum_{n=K_s}^{K} B_{mn} a_n \quad (m = k_s, \dots, K)$$

すなわち,

$$\begin{aligned}
&(\alpha_0 \beta_0 c_0,\ \cdots,\ \alpha_k \beta_k c_k,\ \cdots,\ \alpha_K \beta_K c_K) \cdot \begin{pmatrix} A_{0k_s} & \cdots & A_{0m} & \cdots & A_{Kk_s} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ A_{kk_s} & \cdots & A_{km} & \cdots & A_{kk_s} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ A_{Kk_s} & \cdots & A_{Km} & \cdots & A_{KK} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} B_{k_s k_s} & \cdots & B_{k_s m} & \cdots & B_{Kk_s} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ B_{kk_s} & \cdots & B_{km} & \cdots & B_{kk_s} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ B_{Kk_s} & \cdots & B_{Km} & \cdots & B_{KK} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{k_s} \\ \cdots \\ a_m \\ \cdots \\ a_K \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

この連立方程式を解くことにより c_k から a_n を求めることができる.

2.2 ガラーキン係数からチェビシェフ係数の計算

逆にガラーキン法による展開係数 a_k から c_k を求めるための式は, (17) の両辺に $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}T_m(x) \quad (m=0,\ldots,K)$ を作用させて直交関係を用いると良い.

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}T_m(x)\sum_{k=0}^{K}\beta_k c_k T_k(x) = \int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}T_m(x)\sum_{n=K_s}^{K}a_n\sum_{l=0}^{K}A_{ln}T_l(x),\\
&\sum_{k=0}^{K}\beta_k c_k\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}T_m(x)T_k(x) = \sum_{n=K_s}^{K}a_n\sum_{l=0}^{K}A_{ln}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}T_m(x)T_l(x),\\
&\sum_{k=0}^{K}\beta_k c_k\alpha_m\delta_{mk} = \sum_{n=K_s}^{K}a_n\sum_{l=0}^{K}A_{ln}\alpha_m\delta_{ml},\\
&\alpha_m\beta_m c_m = \sum_{n=K_s}^{K}a_n A_{mn}\alpha_m,\\
&c_m = \frac{1}{\beta_m}\sum_{n=K_s}^{K}A_{mn}a_n, \quad (m=0,\ldots,K).
\end{aligned}$$

行列の形で書き直すと

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ \cdots \\ c_m \\ \cdots \\ c_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{0,K_s}/\beta_0 & \ldots & A_{0,k}/\beta_0 & \ldots & A_{0,K}/\beta_0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m,K_s}/\beta_m & \ldots & A_{m,k}/\beta_m & \ldots & A_{m,K}/\beta_m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{K,K_s}/\beta_K & \ldots & A_{K,k}/\beta_K & \ldots & A_{K,K}/\beta_K \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{K_s} \\ \cdots \\ a_k \\ \cdots \\ a_K \end{pmatrix} \tag{18}$$

2.3 境界値問題の解法

与えられた関数 $g(x)$ に対して, とある境界条件の下で

$$\mathcal{L}[f(x)] = g(x) \tag{19}$$

を満たす関数 $f(x)$ を求めるという境界値問題を解くことを考える. ここで $\mathcal{L}$ は $f(x)$ に働く線形微分作用素であるとする.

このような問題をチェビシェフ・ガラーキン法で解くには, $f(x)$ を境界条件を満たすガラーキン基底で表現し,

$$f(x) = \sum_{n=K_s}^{K}a_n\phi_n(x) = \sum_{n=K_s}^{K}a_n\sum_{l=0}^{K}A_{ln}T_l(x),$$

とおく. 一方, 与えられた関数 $g(x)$ はチェビシェフ関数展開されており,

$$g(x) = \sum_{k=0}^{K}{}'' b_k T_k(x) = \sum_{k=0}^{K} \beta_k b_k T_k(x) \tag{20}$$

そうすると

$$\sum_{n=K_s}^{K} a_n \sum_{l=0}^{K} A_{ln} \mathcal{L}[T_l(x)] = \sum_{k=0}^{K} \beta_k b_k T_k(x), \tag{21}$$

の式で b_k から a_n を求める式を構成すれば良い. $\mathcal{L}$ は線形作用素であるから

$$\mathcal{L}[T_l(x)] = \sum_{p=0}^{K} L_{lp} T_p(x) \tag{22}$$

の形に書き直せる. さらに両辺に $\phi_m(x) = \sum_{l'=0}^{K} A_{l'm} T_l'(x)$ $(m = k_s, \ldots, K)$ をかけて $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ を作用させ, チェビシェフ関数の直交関係を用いると,

$$\begin{aligned}
\sum_{l'=0}^{K} A_{l'm} T_l'(x) \sum_{n=K_s}^{K} a_n \sum_{l=0}^{K} A_{ln} \sum_{p=0}^{K} L_{lp} T_p(x) &= \sum_{l'=0}^{K} A_{l'm} T_l'(x) \sum_{k=0}^{K} \beta_k b_k T_k(x), \\
\sum_{l'=0}^{K} A_{l'm} \sum_{n=K_s}^{K} a_n \sum_{l=0}^{K} A_{ln} \sum_{p=0}^{K} L_{lp} \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} T_l'(x) T_p(x) & \\
= \sum_{l'=0}^{K} A_{l'm} \sum_{k=0}^{K} \beta_k b_k \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} T_l'(x) T_k(x), & \\
\sum_{l'=0}^{K} A_{l'm} \sum_{n=K_s}^{K} a_n \sum_{l=0}^{K} A_{ln} \sum_{p=0}^{K} L_{lp} \alpha_p \delta_{l'p} &= \sum_{l'=0}^{K} A_{l'm} \sum_{k=0}^{K} \beta_k b_k \alpha_k \delta_{l'k} \\
\sum_{n=K_s}^{K} a_n \sum_{l=0}^{K} \sum_{p=0}^{K} A_{ln} L_{lp} \alpha_p A_{pm} &= \sum_{k=0}^{K} \alpha_k \beta_k b_k A_{km}
\end{aligned}$$

ここで $D_{nm} \equiv \sum_{l=0}^{K} \sum_{p=0}^{K} A_{ln} L_{lp} \alpha_p A_{pm}$ とおけば行列の形で書き直して

$$\sum_{n=K_s}^{K} D_{nm} a_n = \sum_{k=0}^{K} \alpha_k \beta_k b_k A_{km}, \quad (m = k_s, \ldots, K) \tag{23}$$

$$(a_{k_s},\ \ldots,\ a_n,\ \ldots,\ a_K) \cdot \begin{pmatrix} D_{k_s k_s} & \cdots & D_{k_s m} & \cdots & D_{k_s K} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ D_{n k_s} & \cdots & D_{nm} & \cdots & D_{nK} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ D_{K k_s} & \cdots & D_{Km} & \cdots & D_{KK} \end{pmatrix}$$

$$= \quad (\alpha_0\beta_0 b_0,\ \ldots,\ \alpha_k\beta_k b_k,\ \ldots,\ \alpha_K\beta_K b_K)\cdot\begin{pmatrix} A_{0k_s} & \cdots & A_{0m} & \cdots & A_{0K} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ A_{kk_s} & \cdots & A_{km} & \cdots & A_{kK} \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ A_{Kk_s} & \cdots & A_{Km} & \cdots & A_{KK} \end{pmatrix} \tag{24}$$

この連立方程式を解くことにより b_k から a_n を求めることができる.

3　ディリクレ・ノイマン境界条件に対する定式化

3.1　ディリクレ・ノイマン境界条件に対するガラーキン基底の例：その 1

k 次の基底が

$$\phi_k(x) = T_k(x) + C_{k-1}T_{k-1}(x) + C_{k-2}T_{k-2}(x)$$

の場合の各境界条件に対応するガラーキン基底を求める ($k = 2, \ldots, K$). この場合, チェビシェフ係数とガラーキン係数の間の変換行列 (A_{ln}) は

$$A_{k,k} = 1, \quad A_{k-1,k} = C_{k-1}, \quad A_{k-2,k} = C_{k-2}, \tag{25}$$

と与えられることになる.

3.1.1　両端境界で値が 0 の場合 (両端ディリクレ条件)

境界条件 $\phi_k(1) = \phi_k(-1) = 0$ より,

$$\phi_k(1) = 1 + C_{k-1} + C_{k-2} = 0,$$
$$\phi_k(-1) = (-1)^k + (-1)^{k-1}C_{k-1} + (-1)^{k-2}C_{k-2} = 0.$$

これを解くと

$$C_{k-1} = 0, \quad C_{k-2} = -1. \tag{26}$$

したがって

$$\phi_k(x) = T_k(x) - T_{k-2}(x). \tag{27}$$

3.1.2　両端境界で微分が 0 の場合 (両端ノイマン条件)

区間両端での微分が 0 となる境界条件

$$\frac{df}{dx} = 0 \quad \text{at} \quad x = -1, 1 \tag{28}$$

の場合は

$$\phi_k'(1) = k^2 + (k-1)^2 C_{k-1} + (k-2)^2 C_{k-2} = 0,$$
$$\phi_k'(-1) = (-1)^k k^2 + (-1)^{k-1}(k-1)^2 C_{k-1} + (-1)^{k-2}(k-2)^2 C_{k-2} = 0.$$

ただしこの場合, $k=2$ では境界条件を満たすことができないので $k = 3, \dots, K$ である. $k=2$ の基底は特別に扱い, $\phi_2(x) = T_0(x)$ とおく必要がある.

これを解くと,

$$C_{k-1} = 0, \quad C_{k-2} = -\left(\frac{k}{k-2}\right)^2, \tag{29}$$

したがって

$$\phi_2(x) = T_0(x), \quad \phi_k(x) = T_k(x) - \left(\frac{k}{k-2}\right)^2 T_{k-2}(x). \tag{30}$$

変換行列は

$$A_{0,2} = 1,$$
$$A_{k,k} = 1, \quad A_{k-2,k} = -\left(\frac{k}{k-2}\right)^2 \quad (k = 3, \dots, K) \tag{31}$$

3.1.3　片側端境界で値が 0, 他方で微分値が 0 の場合 (片側ディリクレ, 片側ノイマン条件)

区間両端での条件が, 片側の値が 0, もう一方で微分値が 0 となる境界条件

$$f(1) = 0, \quad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=-1} = 0, \tag{32}$$

の場合を考える. この境界条件から

$$\phi_k(1) = 1 + C_{k-1} + C_{k-2} = 0,$$
$$\phi_k'(-1) = (-1)^k k^2 + (-1)^{k-1}(k-1)^2 C_{k-1} + (-1)^{k-2}(k-1)^2 C_{k-2} = 0.$$

これを解くと,

$$C_{k-1} = \frac{k^2 - (k-2)^2}{(k-1)^2 + (k-2)^2}, \quad C_{k-2} = -\frac{k^2 + (k-1)^2}{(k-1)^2 + (k-2)^2}, \tag{33}$$

3.1.4 片側端境界で微分値が 0, 他方で値が 0 の場合 (片側ノイマン, 片側ディリクレ条件)

区間両端での条件が, 片側の微分値が 0, もう一方で値が 0 となる境界条件

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=1} = 0, \quad , f(-1) = 0, \tag{34}$$

の場合を考える. この境界条件から

$$\phi'_k(1) = k^2 + (k-1)^2 C_{k-1} + (k-2)^2 C_{k-2} = 0,$$
$$\phi'_k(-1) = (-1)^k + (-1)^{k-1} C_{k-1} + (-1)^{k-2} C_{k-2} = 0.$$

これを解くと,

$$C_{k-1} = -\frac{k^2 - (k-2)^2}{(k-1)^2 + (k-2)^2}, \quad C_{k-2} = -\frac{k^2 + (k-1)^2}{(k-1)^2 + (k-2)^2}, \tag{35}$$

3.2 一般的な混合境界条件

区間両端での条件が, ディリクレ・ノイマン型の混合した一般的な場合を考える. すなわち[7]

$$\alpha_{1,1} \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=1} + \alpha_{0,1} f(1) = 0, \tag{36}$$
$$\alpha_{1,-1} \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=-1} + \alpha_{0,-1} f(-1) = 0, \tag{37}$$

[7] 区間 $[x_{min}, x_{max}]$ での関数 $f^*(x^*)$ に対する境界条件が

$$\alpha^*_{1,x_{max}} \left.\frac{df^*}{dx^*}\right|_{x^*=x_{max}} + \alpha^*_{0,x_{max}} f^*(x_{max}) = 0, \quad \alpha^*_{1,x_{min}} \left.\frac{df^*}{dx^*}\right|_{x^*=x_{min}} + \alpha^*_{0,x_{min}} f^*(x_{min}) = 0,$$

と与えられた場合の, 区間 $[-1,1]$ へ写された関数に対する境界条件を表すには微分関係

$$\frac{df^*}{dx^*} = \frac{dx}{dx^*}\frac{df}{dx} = \frac{2}{x_{max} - x_{min}}\frac{df}{dx} \equiv \frac{1}{D_{fac}}\frac{df}{dx}$$

を気をつけなければならない. ここで $D_{fac} \equiv (x_{max} - x_{min})/2$ である. したがって, 対応する境界条件は

$$\frac{\alpha^*_{1,x_{max}}}{D_{fac}} \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=1} + \alpha^*_{0,x_{max}} f(1) = 0, \quad \frac{\alpha^*_{1,x_{min}}}{D_{fac}} \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=-1} + \alpha^*_{0,x_{min}} f(-1) = 0,$$

となる.

ここで $\alpha_{i,j}$ は定数係数であり, $\alpha_{1,1}$ と $\alpha_{0,1}$, $\alpha_{1,-1}$ と $\alpha_{0,-1}$ および $\alpha_{0,1}$ と $\alpha_{0,-1}$ は同時に 0 とはならないと仮定する. この境界条件から

$$\begin{aligned}
&\alpha_{1,1}\phi'(1) + \alpha_{0,1}\phi(1)\\
&= \alpha_{1,1}(k^2 + (k-1)^2 C_{k-1} + (k-2)^2 C_{k-2}) + \alpha_{0,1}(1 + C_{k-1} + C_{k-2}) = 0,\\
&\alpha_{1,-1}\phi'(-1) + \alpha_{0,-1}\phi(-1)\\
&= \alpha_{1,-1}[(-1)^{k+1}k^2 + (-1)^k (k-1)^2 C_{k-1} + (-1)^{k-1}(k-2)^2 C_{k-2}]\\
&+\alpha_{0,-1}[(-1)^k + (-1)^{k-1}C_{k-1} + (-1)^{k-2}C_{k-2}] = 0,
\end{aligned}$$

行列の形式でかけば

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{k-1} \\ C_{k-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix},$$

ただし

$$\begin{aligned}
a &= \alpha_{1,1}(k-1)^2 + \alpha_{0,1}\\
b &= \alpha_{1,1}(k-2)^2 + \alpha_{0,1}\\
c &= \alpha_{1,-1}(k-1)^2 - \alpha_{0,-1}\\
d &= -\alpha_{1,-1}(k-2)^2 + \alpha_{0,-1}\\
e &= -(\alpha_{1,1}k^2 + \alpha_{0,1})\\
f &= -(-\alpha_{1,-1}k^2 + \alpha_{0,-1}).
\end{aligned}$$

これを解くと

$$\begin{pmatrix} C_{k-1} \\ C_{k-2} \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} -d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} de-bf \\ -ce+af \end{pmatrix}.$$

係数行列の行列式が 0 となってしまう特別な場合として, $k=2$ の係数行列式が 0 となる場合を考えよう. このときには基底の一つが

$$\phi_2(x) = C_1 T_1(x) + C_0 T_0(x)$$

という形となることを意味している. C_1, C_0 は片側の境界条件から定めることができて, 例えば $x=1$ での境界条件から

$$\alpha_{1,1}C_1 + \alpha_{0,1}(C_1 + C_0) = 0, \quad (\alpha_{1,1} + \alpha_{0,1})C_1 + \alpha_{0,1}C_0 = 0,$$

すなわち

$$C_1 = -\alpha_{0,1} \quad C_0 = \alpha_{1,1} + \alpha_{0,1}, \tag{38}$$

と定められる. したがって

$$\phi_2(x) = -\alpha_{0,1}T_1(x) + (\alpha_{1,1} + \alpha_{0,1})C_0 T_0(x).$$

結局, この場合は変換行列の 0 行目だけ修正して

$$A_{1,2} = -\alpha_{0,1}, \quad A_{0,2} = \alpha_{1,1} + \alpha_{0,1} \tag{39}$$

$$A_{k,k} = 1, \quad A_{k-1,k} = C_{k-1}, \quad A_{k-2,k} = C_{k-2}, \quad (k \geq 3). \tag{40}$$

と与えられることになる.

3.3 ディリクレ・ノイマン境界条件に対するガラーキン基底の例：その 2

3.3.1 両端境界で値が 0 の場合 (両端ディリクレ条件)

$T_k(1) = \cos 0 = 1$, $T_k(-1) = \cos k\pi = (-1)^k$ である. 特に $T_0(1) = T_0(-1) = 1, T_1(1) = 1, T_1(-1) = -1$ であるから, 両端で値が 0 となるようなガラーキン基底は

$$\begin{aligned}
\phi_2(x) = T_2(x) - T_0(x), &\qquad \phi_3(x) = T_3(x) - T_1(x), \\
\cdots &\qquad \cdots \\
\phi_{2k}(x) = T_{2k}(x) - T_0(x), &\qquad \phi_{2k+1}(x) = T_{2k+1}(x) - T_1(x), \\
\cdots &\qquad \cdots \\
\phi_{K-1}(x) = T_{K-1}(x) - T_1(x), &\qquad \phi_K(x) = T_K(x) - T_0(x).
\end{aligned}$$

暗黙のうちに K が偶数であることを用いている. 変換行列 $(\tilde{A}_{nk})$ は

$$(\tilde{A}_{nk}) = \begin{pmatrix}
-1 & 0 & \ldots & -1 & 0 & \ldots & 0 & -1 \\
0 & -1 & \ldots & 0 & -1 & \ldots & -1 & 0 \\
1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1
\end{pmatrix} \tag{41}$$

解析的に書けば

$$\tilde{A}_{0,k} = -[1 + (-1)^k]/2 \qquad (k = 2, 3, \ldots, K) \tag{42}$$

$$\tilde{A}_{1,k} = -[1 - (-1)^k]/2 \qquad (k = 2, 3, \ldots, K-1) \tag{43}$$

$$\tilde{A}_{k,k} = 1 \qquad (k = 2, 3, \ldots, K) \tag{44}$$

3.3.2 両端境界で微分が 0 の場合 (両端ノイマン条件)

区間両端での微分が 0 となる境界条件

$$\frac{df}{dx} = 0 \quad \text{at} \quad x = -1, 1 \tag{45}$$

の場合を考える.

チェビシェフ関数の微分は

$$\frac{dT_k(x)}{dx} = \frac{dT_k(\cos\theta)}{d\theta} = \frac{(\cos n\theta)'}{(\cos\theta)'} = \frac{n \sin n\theta}{\sin\theta} \tag{46}$$

$x = 1$ での微分値は $\theta \to 0$ の極限をとって

$$\frac{dT_k(x)}{dx}|_{x=1} = \lim_{\theta\to 0} \frac{k \sin k\theta}{\sin\theta} = \lim_{\theta\to 0} k^2 \frac{\sin n\theta}{k\theta} \frac{\theta}{\sin\theta} = k^2. \tag{47}$$

$x = -1$ での微分値は $\varphi = \pi - \theta$ と変換して

$$\begin{aligned} \frac{dT_k(x)}{dx}|_{x=-1} &= \lim_{\varphi\to 0} \frac{k \sin k(\pi - \varphi)}{\sin(\pi - \varphi)} = \lim_{\varphi\to 0} \frac{-k \cos k\pi \sin k\varphi}{\sin\varphi} \\ &= \lim_{\varphi\to 0} (-1)^{k+1} k^2 \frac{\sin k\varphi}{n\varphi} \frac{\varphi}{\sin\varphi} = (-1)^{k+1} k^2. \end{aligned} \tag{48}$$

したがって, 境界条件を満たすガラーキン基底を

$$\begin{aligned} \phi_2(x) &= T_0(x), \\ \phi_3(x) &= T_3(x) - 3^2 T_1(x) \\ \phi_4(x) &= T_4(x) - (4/2)^2 T_2(x) \\ &\cdots \\ \phi_{2k-1}(x) &= T_{2k-1}(x) - (2k-1)^2 T_1(x) \\ \phi_{2k}(x) &= T_{2k}(x) - k^2 T_2(x) \end{aligned}$$

これにあわせて変換行列は

$$(\tilde{A}_{nk}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -3^2 & 0 & -5^2 & \dots & -(2k-1)^2 & 0 & \dots & (K-1)^2 & 0 \\ 0 & -4^2 & 0 & \dots & 0 & -k^2 & \dots & 0 & (K/2)^2 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{49}$$

解析的に書けば

$$A_{0,2} = 1, \tag{50}$$

$$A_{1,k} = -[1-(-1)^k]k^2/2 \qquad (k = 3, 4, \dots, K-1) \tag{51}$$

$$A_{2,k} = -[1+(-1)^k]k^2/8 \qquad (k = 3, 4, \dots, K) \tag{52}$$

$$A_{k,k} = 1 \qquad (k = 3, 4, \dots, K) \tag{53}$$

3.3.3 片側端境界で値が 0, 他方で微分値が 0 の場合 (片側ディリクレ, 片側ノイマン条件)

区間両端での条件が, 片側の値が 0, もう一方で微分値が 0 となる境界条件

$$f(1) = 0, \quad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=-1} = 0, \tag{54}$$

の場合を考える. k 次の基底を

$$\phi_k(x) = T_k(x) + C_1 T_1(x) + C_0 T_0(x)$$

と仮定する. 境界条件から

$$\phi_k'(-1) = (-1)^{k+1} \cdot k^2 + C_1 = 0, \quad \phi_k(1) = 1 + C_1 + C_0 = 0,$$

これを解くと

$$C_1 = (-1)^k \cdot k^2, \quad C_0 = (-1)^{k+1} \cdot k^2 - 1$$

よって基底関数は

$$\phi_n(x) = T_k(x) + (-1)^k \cdot k^2 T_1(x) + [(-1)^{n+1} \cdot n^2 - 1] T_0(x). \tag{55}$$

対応して変換行列は

$$\tilde{A}_{0,k} = [(-1)^{k+1} \cdot k^2 - 1] \qquad (n = 2, 3, \ldots, K) \tag{56}$$

$$\tilde{A}_{1,k} = (-1)^k \cdot k^2 \qquad (n = 2, 3, \ldots, K) \tag{57}$$

$$\tilde{A}_{k,k} = 1 \qquad (n = 2, 3, \ldots, K) \tag{58}$$

3.3.4 片側端境界で微分値が 0, 他方で値が 0 の場合 (片側ノイマン, 片側ディリクレ条件)

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=1} = 0, \quad , f(-1) = 0, \tag{59}$$

の場合を考える. 先と同様に n 次の基底を

$$\phi_k(x) = T_k(x) + C_1 T_1(x) + C_0 T_0(x)$$

と仮定する. 境界条件から

$$\phi_k(-1) = (-1)^n - C_1 + C_0 = 0, \quad \phi'_k(1) = k^2 + C_1 = 0,$$

これを解くと

$$C_1 = -k^2, \quad C_0 = -k^2 + (-1)^{k+1}$$

よって基底関数は

$$\phi_k(x) = T_k(x) - n^2 T_1(x) + [-k^2 + (-1)^{k+1}] T_0(x). \tag{60}$$

対応して変換行列は

$$\tilde{A}_{0,k} = [-k^2 + (-1)^{k+1}] \qquad (k = 2, 3, \ldots, K) \tag{61}$$

$$\tilde{A}_{1,k} = -k^2 \qquad (k = 2, 3, \ldots, K) \tag{62}$$

$$\tilde{A}_{k,k} = 1 \qquad (k = 2, \ldots, K) \tag{63}$$

3.4　一般的な混合境界条件

区間両端での条件が, ディリクレ・ノイマン型の混合した一般的な場合を考える. すなわち[8]

$$\alpha_{1,1}\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=1}+\alpha_{0,1}f(1)=0, \tag{64}$$

$$\alpha_{1,-1}\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=-1}+\alpha_{0,-1}f(-1)=0, \tag{65}$$

ここで $\alpha_{i,j}$ は定数係数である. この境界条件を満たす n 次の基底を

$$\phi_k(x)=T_k(x)+C_1T_1(x)+C_0T_0(x)$$

と仮定する. 境界条件から

$$\alpha_{1,1}(k^2+C_1)+\alpha_{0,1}(1+C_1+C_0)=0,$$
$$\alpha_{1,-1}[(-1)^{k+1}k^2+C_1]+\alpha_{0,-1}[(-1)^k-C_1+C_0]=0,$$

これを整理すると

$$\begin{pmatrix}\alpha_{1,1}+\alpha_{0,1} & \alpha_{0,1}\\ \alpha_{1,-1}-\alpha_{0,-1} & \alpha_{0,-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\ C_0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\alpha_{1,1}\cdot k^2+\alpha_{0,1}\\ \alpha_{1,-1}\cdot(-1)^{k+1}k^2+\alpha_{0,-1}\cdot(-1)^k\end{pmatrix},$$

よって, 左辺係数行列の行列式が 0 でない, すなわち

$$(\alpha_{1,1}+\alpha_{0,1})\alpha_{0,-1}-(\alpha_{1,-1}-\alpha_{0,-1})\alpha_{0,1}=\alpha_{1,-1}\alpha_{0,1}-\alpha_{1,1}\alpha_{0,-1}-2\alpha_{0,-1}\alpha_{0,1}\neq 0 \tag{66}$$

の場合には C_1, C_0 を定めることができて,

$$\begin{pmatrix}C_1\\ C_0\end{pmatrix}=-\frac{1}{(\alpha_{1,1}+\alpha_{0,1})\alpha_{0,-1}-(\alpha_{1,-1}-\alpha_{0,-1})\alpha_{0,1}}\begin{pmatrix}\alpha_{0,-1} & -\alpha_{0,1}\\ -\alpha_{1,-1}+\alpha_{0,-1} & \alpha_{1,1}+\alpha_{0,1}\end{pmatrix}$$

[8]区間 $[x_{min}, x_{max}]$ での関数 $f^*(x^*)$ に対する境界条件が

$$\alpha^*_{1,x_{max}}\left.\frac{df^*}{dx^*}\right|_{x^*=x_{max}}+\alpha^*_{0,x_{max}}f^*(x_{max})=0,\quad \alpha^*_{1,x_{min}}\left.\frac{df^*}{dx^*}\right|_{x^*=x_{min}}+\alpha^*_{0,x_{min}}f^*(x_{min})=0,$$

と与えられた場合の, 区間 $[-1,1]$ へ写された関数に対する境界条件を表すには微分関係

$$\frac{df^*}{dx^*}=\frac{dx}{dx^*}\frac{df}{dx}=\frac{2}{x_{max}-x_{min}}\frac{df}{dx}\equiv\frac{1}{D_{fac}}\frac{df}{dx}$$

を気をつけなければならない. ここで $D_{fac}\equiv(x_{max}-x_{min})/2$ である. したがって, 対応する境界条件は

$$\frac{\alpha^*_{1,x_{max}}}{D_{fac}}\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=1}+\alpha^*_{0,x_{max}}f(1)=0,\quad \frac{\alpha^*_{1,x_{min}}}{D_{fac}}\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=-1}+\alpha^*_{0,x_{min}}f(-1)=0,$$

となる.

$$
\begin{aligned}
&\quad\times\begin{pmatrix} \alpha_{1,1}\cdot k^2+\alpha_{0,1} \\ \alpha_{1,-1}\cdot(-1)^{k+1}k^2+\alpha_{0,-1}\cdot(-1)^k \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\alpha_{1,-1}\alpha_{0,1}-\alpha_{1,1}\alpha_{0,-1}-2\alpha_{0,-1}\alpha_{0,1}} \\
&\times\begin{pmatrix} \alpha_{0,-1}[\alpha_{1,1}\cdot k^2+\alpha_{0,1}]-\alpha_{0,1}[\alpha_{1,-1}\cdot(-1)^{k+1}k^2+\alpha_{0,-1}\cdot(-1)^k] \\ (-\alpha_{1,-1}+\alpha_{0,-1})(\alpha_{1,1}\cdot k^2+\alpha_{0,1})+(\alpha_{1,1}+\alpha_{0,1})[\alpha_{1,-1}\cdot(-1)^{k+1}k^2+\alpha_{0,-1}\cdot(-1)^k] \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

対応する変換行列は

$$
\begin{aligned}
\tilde{A}_{0,k} &= C_0(k) \qquad (k=2,3,\ldots,K) \qquad (67)\\
\tilde{A}_{1,k} &= C_1(k) \qquad (k=2,3,\ldots,K) \qquad (68)\\
\tilde{A}_{k,k} &= 1 \qquad (n=2,3,\ldots,K) \qquad (69)
\end{aligned}
$$

係数行列式が 0 となる場合には基底の取り方を変えなければならない．係数行列式が 0 となる時には基底の一つが

$$\phi_2(x)=C_1T_1(x)+C_0T_0(x)$$

という形となることを意味している．C_1, C_0 は片側の境界条件から定めることができて, 例えば $x=1$ での境界条件から

$$\alpha_{1,1}C_1+\alpha_{0,1}(C_1+C_0)=0, \quad (\alpha_{1,1}+\alpha_{0,1})C_1+\alpha_{0,1}C_0=0,$$

すなわち

$$C_1=-\alpha_{0,1} \quad C_0=\alpha_{1,1}+\alpha_{0,1}, \qquad (70)$$

と定められる．したがって

$$\phi_2(x)=-\alpha_{0,1}T_1(x)+(\alpha_{1,1}+\alpha_{0,1})C_0T_0(x).$$

$n>2$ での境界条件を満たす n 次の基底は

$$\phi_k(x)=T_k(x)+C_2T_2(x)+C_1T_0(x)$$

と仮定する．境界条件から

$$
\begin{aligned}
\alpha_{1,1}(k^2+4C_2+C_1)+\alpha_{0,1}(1+C_2+C_1)=0,\\
\alpha_{1,-1}[(-1)^{k+1}k^2-4C_2+C_1]+\alpha_{0,-1}[(-1)^k+C_2-C_1]=0,
\end{aligned}
$$

これを整理すると

$$\begin{pmatrix} 4\alpha_{1,1}+\alpha_{0,1} & \alpha_{1,1}+\alpha_{0,1} \\ -4\alpha_{1,-1}+\alpha_{0,-1} & \alpha_{1,-1}-\alpha_{0,-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_2 \\ C_1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \alpha_{1,1}\cdot k^2+\alpha_{0,1} \\ \alpha_{1,-1}\cdot(-1)^{k+1}k^2+\alpha_{0,-1}\cdot(-1)^k \end{pmatrix},$$

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} C_2 \\ C_1 \end{pmatrix} &= -\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\
&\quad\times \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} de-bf \\ -ce+af \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

ただし

$$
\begin{aligned}
a &= 4\alpha_{1,1}+\alpha_{0,1} \\
b &= \alpha_{1,1}+\alpha_{0,1} \\
c &= -4\alpha_{1,-1}+\alpha_{0,-1} \\
d &= \alpha_{1,-1}-\alpha_{0,-1} \\
e &= \alpha_{1,1}\cdot k^2+\alpha_{0,1} \\
f &= \alpha_{1,-1}\cdot(-1)^{k+1}k^2+\alpha_{0,-1}\cdot(-1)^k
\end{aligned}
$$

対応する変換行列は

$$\tilde{A}_{0,2} = \alpha_{1,1}+\alpha_{0,1} \tag{71}$$

$$\tilde{A}_{1,2} = -\alpha_{0,1} \tag{72}$$

$$\tilde{A}_{1,k} = C_1(k) \qquad (k=3,4,\dots,K) \tag{73}$$

$$\tilde{A}_{2,k} = C_2(k) \qquad (k=3,4,\dots,K) \tag{74}$$

$$\tilde{A}_{k,k} = 1 \qquad (n=3,4,\dots,K) \tag{75}$$

特別な場合に先の結果と一致することを確認しておこう.

$\alpha_{1,1}=\alpha_{1,-1}=0$, $\alpha_{0,1}=\alpha_{0,-1}=1$ の場合は両端ディリクレ条件に一致する. このとき上の係数 C_1, C_0 は

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-(-1)^k \\ 1+(-1)^k \end{pmatrix}$$

$\alpha_{1,1}=\alpha_{0,-1}=0$, $\alpha_{0,1}=\alpha_{1,-1}=1$ の場合は片側ディリクレ, 片側ノイマン条件に一致する. このとき上の係数 C_1, C_0 は

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(-1)^{k+1}\cdot k^2 \\ -1+(-1)^{k+1}\cdot k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^k\cdot k^2 \\ (-1)^{k+1}\cdot k^2-1 \end{pmatrix}$$

$\alpha_{0,1}=\alpha_{1,-1}=0$, $\alpha_{1,1}=\alpha_{0,-1}=1$ の場合はもう一つの片側ディリクレ, 片側ノイマン条件に一致する. このとき上の係数 C_1, C_0 は

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} k^2 \\ k^2+(-1)^k \end{pmatrix}$$

$\alpha_{1,1}=\alpha_{1,-1}=1$, $\alpha_{0,1}=\alpha_{0,-1}=0$ の場合は両端ノイマン条件に一致する. このとき上の係数 C_2, C_1 は $a=4, b=1, c=-4, d=1, e=k^2, f=(-1)^{k+1}k^2$ より

$$\begin{pmatrix} C_2 \\ C_1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} k^2-(-1)^{k+1}k^2 \\ 4k^2+4(-1)^{k+1}k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -[1+(-1)^k]k^2/8 \\ -[1-(-1)^k]k^2/2 \end{pmatrix}$$

また最低次の基底は

$$\phi_2(x)=T_0(x)$$

である.

4　非圧縮流体の流線関数・ポテンシャルのための定式化

4.1　非圧縮流体の流線関数・ポテンシャルのためのガラーキン基底の例：その 1

n 次の基底が

$$\phi_k(x)=T_k(x)+C_{k-1}T_{k-1}(x)+C_{k-2}T_{k-2}(x)+C_{k-3}T_{k-3}(x)+C_{k-4}T_{k-4}(x)$$

の場合の各境界条件に対応するガラーキン基底を求める. この場合, チェビシェフ係数とガラーキン係数の間の変換行列 (A_{ln}) は

$$\begin{aligned} &A_{k,k}=1, \\ &A_{k-1,k}=C_{k-1,k}, \quad A_{k-2,k}=C_{k-2}, \\ &A_{k-3,k}=C_{k-3,k}, \quad A_{k-4,k}=C_{k-4}, \end{aligned} \tag{76}$$

と与えられることになる.

4.1.1　両境界で粘着条件の場合

両境界で粘着条件の場合を考える．この場合区間両端での条件は, 値と微分値がともに 0 となる境界条件となる．すなわち,

$$f(1) = f(-1) = 0, \quad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=-1} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=1} = 0. \tag{77}$$

境界条件を適用すると,

$$\begin{aligned}
&\phi_k(1) = 1 + C_{k-1} + C_{k-2} + C_{k-3} + C_{k-4} = 0,\\
&\phi_k(-1) = (-1)^k(1 - C_{k-1} + C_{k-2} - C_{k-3} + C_{k-4}) = 0,\\
&\phi'_k(1) = T'_k + T'_{k-1}C_{k-1} + T'_{k-2}C_{k-2} + T'_{k-3}C_{k-3} + T'_{k-4}C_{k-4} = 0,\\
&\phi'_k(-1) = (-1)^k(T'_k - T'_{k-1}C_{k-1} + T'_{k-2}C_{k-2} - T'_{k-3}C_{k-3} + T'_{k-4}C_{k-4}) = 0.
\end{aligned}$$

ここで $T'_k = \left.\dfrac{\partial T_k}{\partial x}\right|_{x=1} = k^2$ である．これを解くと

$$\begin{aligned}
C_{k-1} &= C_{k-3} = 0,\\
C_{k-2} &= -\frac{T'_k - T'_{k-4}}{T'_{k-2} - T'_{k-4}} = -\frac{2(k-2)}{k-3},\\
C_{k-4} &= -\frac{T'_k - T'_{k-2}}{T'_{k-2} - T'_{k-4}} = -\frac{k-1}{k-3}.
\end{aligned}$$

4.1.2　両境界で自由すべり条件の場合

両境界で自由すべり条件の場合を考える．この場合区間両端での条件は, 値と 2 階微分値がともに 0 となる境界条件となる．すなわち,

$$f(1) = f(-1) = 0, \quad \left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=-1} = \left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=1} = 0. \tag{78}$$

境界条件を適用すると,

$$\begin{aligned}
&\phi_k(1) = 1 + C_{k-1} + C_{k-2} + C_{k-3} + C_{k-4} = 0,\\
&\phi_k(-1) = (-1)^k(1 - C_{k-1} + C_{k-2} - C_{k-3} + C_{k-4}) = 0,\\
&\phi''_k(1) = T''_k + T''_{k-1}C_{k-1} + T''_{k-2}C_{k-2} + T''_{k-3}C_{k-3} + T''_{k-4}C_{k-4} = 0,\\
&\phi''_k(-1) = (-1)^k(T''_k - T''_{k-1}C_{k-1} + T''_{k-2}C_{k-2} - T''_{k-3}C_{k-3} + T''_{k-4}C_{k-4}) = 0.
\end{aligned}$$

ここで $T''_k = \left.\frac{\partial^2 T_k}{\partial x^2}\right|_{x=1} = \frac{k^2(k^2-1)}{3}$ である．これを解くと

$$
\begin{aligned}
C_{k-1} &= C_{k-3} = 0, \\
C_{k-2} &= -\frac{T''_k - T''_{k-4}}{T''_{k-2} - T''_{k-4}}, \\
C_{k-4} &= \frac{T''_k - T''_{k-2}}{T''_{k-2} - T''_{k-4}}
\end{aligned}
$$

4.1.3 片側自由すべり条件, 他方粘着条件の場合

片側自由すべり条件, 他方粘着条件の場合を考える．この場合, 片側境界にて値と 2 階微分値, もう一方では値と 1 階微分値が 0 となる境界条件となる．すなわち,

$$
f(1) = f(-1) = 0, \quad \left.\frac{d^2 f}{dx^2}\right|_{x=1} = \left.\frac{d^1 f}{dx^1}\right|_{x=-1} = 0. \tag{79}
$$

境界条件を適用すると,

$$
\begin{aligned}
\phi_k(1) &= 1 + C_{k-1} + C_{k-2} + C_{k-3} + C_{k-4} = 0, \\
\phi_k(-1) &= (-1)^k(1 - C_{k-1} + C_{k-2} - C_{k-3} + C_{k-4}) = 0, \\
\phi''_k(1) &= T''_k + T''_{k-1}C_{k-1} + T''_{k-2}C_{k-2} + T''_{k-3}C_{k-3} + T''_{k-4}C_{k-4} = 0, \\
\phi'_k(-1) &= (-1)^k(T'_k - T'_{k-1}C_{k-1} + T'_{k-2}C_{k-2} - T'_{k-3}C_{k-3} + T'_{k-4}C_{k-4}) = 0,
\end{aligned}
$$

である．これを解くと

$$
\begin{aligned}
C_{k-1} &= -C_{k-3}, \\
C_{k-2} &= -C_{k-4} - 1, \\
C_{k-3} &= \frac{1}{\Delta}(T'_{k-2} - T'_{k-4})(T''_k - T''_{k-2}) - (T''_{k-2} - T''_{k-4})(T'_k - T'_{k-2}), \\
C_{k-4} &= \frac{1}{\Delta}(T'_{k-1} - T'_{k-3})(T''_k - T''_{k-2}) + (T''_{k-1} - T''_{k-3})(T'_k - T'_{k-2}),
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\Delta = (T''_{k-1} - T''_{k-3})(T'_{k-2} - T'_{k-4}) + (T'_{k-1} - T'_{k-3})(T''_{k-2} - T''_{k-4})
$$

である．

4.1.4　片側粘着条件, 他方自由すべり条件の場合

片側粘着条件, 他方自由すべり条件の場合を考える．この場合, 片側境界にて値と 1 階微分値, もう一方では値と 2 階微分値が 0 となる境界条件となる．すなわち,

$$f(1) = f(-1) = 0, \quad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=1} = \left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=-1} = 0. \tag{80}$$

境界条件を適用すると,

$$\begin{aligned}
&\phi_k(1) = 1 + C_{k-1} + C_{k-2} + C_{k-3} + C_{k-4} = 0,\\
&\phi_k(-1) = (-1)^k(1 - C_{k-1} + C_{k-2} - C_{k-3} + C_{k-4}) = 0,\\
&\phi'_k(1) = T'_k + T'_{k-1}C_{k-1} + T'_{k-2}C_{k-2} + T'_{k-3}C_{k-3} + T'_{k-4}C_{k-4} = 0,\\
&\phi''_k(-1) = (-1)^k(T''_k - T''_{k-1}C_{k-1} + T''_{k-2}C_{k-2} - T''_{k-3}C_{k-3} + T''_{k-4}C_{k-4}) = 0,
\end{aligned}$$

である．これを解くと

$$\begin{aligned}
C_{k-1} &= -C_{k-3},\\
C_{k-2} &= -C_{k-4} - 1,\\
C_{k-3} &= \frac{1}{\Delta}(T''_{k-2} - T''_{k-4})(T'_k - T'_{k-2}) - (T'_{k-2} - T'_{k-4})(T''_k - T''_{k-2}),\\
C_{k-4} &= \frac{1}{\Delta}(T''_{k-1} - T''_{k-3})(T'_k - T'_{k-2}) + (T'_{k-1} - T'_{k-3})(T''_k - T''_{k-2}),
\end{aligned}$$

ここで

$$\Delta = (T'_{k-1} - T'_{k-3})(T''_{k-2} - T''_{k-4}) + (T''_{k-1} - T''_{k-3})(T'_{k-2} - T'_{k-4})$$

である．

4.2　非圧縮流体の流線関数・ポテンシャルのためのガラーキン基底の例：その 2

n 次の基底が

$$\phi_k(x) = T_k(x) + C_3T_3(x) + C_2T_2(x) + C_1T_1(x) + C_0T_0(x)$$

の場合の各境界条件に対応するガラーキン基底を求める．この場合, チェビシェフ係数とガラーキン係数の間の変換行列 (A_{ln}) は

$$\begin{aligned}
&A_{k,k} = 1,\\
&A_{3,k} = C_3, \quad A_{2,k} = C_2,\\
&A_{1,k} = C_1, \quad A_{0,k} = C_0,
\end{aligned} \tag{81}$$

と与えられることになる．

4.2.1　両境界で粘着条件の場合

両境界で粘着条件の場合を考える．この場合区間両端での条件は, 値と微分値がともに 0 となる境界条件となる．すなわち,

$$f(1) = f(-1) = 0, \quad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=-1} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=1} = 0. \tag{82}$$

境界条件を適用すると,

$$\begin{aligned}
\phi_k(1) &= 1 + C_3 + C_2 + C_1 + C_0 = 0, \\
\phi_k(-1) &= (-1)^k - C_3 + C_2 - C_1 + C_0 = 0, \\
\phi'_k(1) &= k^2 + 9C_3 + 4C_2 + C_1 = 0, \\
\phi'_k(-1) &= (-1)^{k+1}k^2 + 9C_3 - 4C_2 + C_1 = 0.
\end{aligned}$$

これを解くと

$$C_3 = \frac{1}{16}[1-(-1)^k](1-k^2),\ C_2 = -\frac{1}{8}[(-1)^k+1]k^2, \tag{83}$$

$$C_1 = -\frac{1}{16}[1-(-1)^k](9-k^2),\ C_0 = \frac{1}{8}[(-1)^k+1](k^2-4). \tag{84}$$

4.2.2　両境界で自由すべり条件

両境界で自由すべり条件の場合を考える．この場合区間両端での条件は, 値と 2 階微分値がともに 0 となる境界条件となる．すなわち,

$$f(1) = f(-1) = 0, \quad \left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=-1} = \left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=1} = 0. \tag{85}$$

境界条件から

$$\begin{aligned}
\phi_k(1) &= 1 + C_3 + C_2 + C_1 + C_0 = 0, \\
\phi_k(-1) &= (-1)^n - C_3 + C_2 - C_1 + C_0 = 0, \\
\phi''_k(1) &= \frac{k^2(k^2-1)}{3} + 24C_3 + 4C_2 = 0, \\
\phi''_k(-1) &= (-1)^k\frac{k^2(k^2-1)}{3} - 24C_3 + 4C_2 = 0.
\end{aligned}$$

これを解くと

$$C_3 = -\frac{1}{144}[1-(-1)^k]k^2(k^2-1), \tag{86}$$

$$C_2 = -\frac{1}{24}[(-1)^k + 1]k^2(k^2 - 1), \tag{87}$$
$$C_1 = \frac{1}{144}[1 - (-1)^k][k^2(k^2 - 1) - 72], \tag{88}$$
$$C_0 = \frac{1}{24}[(-1)^k + 1][k^2(k^2 - 1) - 12]. \tag{89}$$

4.2.3　片側自由すべり条件, 他方粘着条件の場合

片側自由すべり条件, 他方粘着条件の場合を考える. この場合, 片側境界にて値と 2 階微分値, もう一方では値と 1 階微分値が 0 となる境界条件となる. すなわち,

$$f(1) = f(-1) = 0, \quad \left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=1} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=-1} = 0. \tag{90}$$

境界条件から

$$\begin{aligned}
\phi_k(1) &= 1 + C_3 + C_2 + C_1 + C_0 = 0,\\
\phi_k(-1) &= (-1)^n - C_3 + C_2 - C_1 + C_0 = 0,\\
\phi_k''(1) &= \frac{k^2(k^2-1)}{3} + 24C_3 + 4C_2 = 0,\\
\phi_k'(-1) &= (-1)^{k+1}k^2 + 9C_3 - 4C_2 + C_1 = 0.
\end{aligned}$$

これを解くと

$$C_3 = -\frac{1}{32}\left[\frac{1}{3}k^2(k^2-1) + (-1)^{k+1}k^2 - \frac{1-(-1)^k}{2}\right], \tag{91}$$
$$C_2 = -\frac{1}{48}k^2(k^2-1) + \frac{3}{16}(-1)^{k+1}k^2 - \frac{3}{32}[1-(-1)^k], \tag{92}$$
$$C_1 = \frac{1}{96}k^2(k^2-1) + \frac{1}{32}(-1)^{k+1}k^2 - \frac{33}{64}[1-(-1)^k], \tag{93}$$
$$C_0 = \frac{1}{48}k^2(k^2-1) - \frac{3}{16}(-1)^{k+1}k^2 + \frac{3}{32}[1-(-1)^k] - \frac{1}{2}[1+(-1)^k]. \tag{94}$$

4.2.4　片側粘着条件条件, 他方自由すべりの場合

片側粘着条件, 他方自由すべり条件の場合を考える. この場合, 片側境界にて値と 1 階微分値, もう一方では値と 2 階微分値が 0 となる境界条件となる. すなわち,

$$f(1) = f(-1) = 0, \quad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=1} = \left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=-1} = 0. \tag{95}$$

境界条件から

$$
\begin{aligned}
\phi_k(1) &= 1 + C_3 + C_2 + C_1 + C_0 = 0,\\
\phi_k(-1) &= (-1)^n - C_3 + C_2 - C_1 + C_0 = 0,\\
\phi_k'(1) &= k^2 + 9C_3 + 4C_2 = 0,\\
\phi_k''(-1) &= (-1)^k \frac{k^2(k^2-1)}{3} - 24C_3 + 4C_2 + C_1 = 0.
\end{aligned}
$$

これを解くと

$$C_3 = \frac{1}{32}\left[\frac{(-1)^k}{3}k^2(k^2-1) - k^2 + \frac{1-(-1)^k}{2}\right], \tag{96}$$

$$C_2 = -\frac{(-1)^k}{48}k^2(k^2-1) - \frac{3}{16}k^2 + \frac{3}{32}[1-(-1)^k], \tag{97}$$

$$C_1 = -\frac{(-1)^k}{96}k^2(k^2-1) + \frac{1}{32}k^2 - \frac{33}{64}[1-(-1)^k], \tag{98}$$

$$C_0 = \frac{(-1)^k}{48}k^2(k^2-1) + \frac{3}{16}k^2 - \frac{3}{32}[1-(-1)^k] - \frac{1}{2}[1+(-1)^k]. \tag{99}$$