球面調和函数変換

竹広真一

平成 19 年 11 月 5 日

この文書は, 球面調和関数変換の基本的な定式化を行う.

1 球面調和函数変換

切断波数 M の球面調和函数逆変換は次のように表される.

$$g(\lambda,\mu)=\sum_{n=0}^{M}\sum_{m=-n}^{n} s_n^m P_n^m(\mu)\exp(im\lambda) \tag{1}$$

ここで λ は経度, $\mu=sin\varphi$ は sin 緯度である. $P_n^m(\mu)$ はルジャンドル陪函数であり, ISPACK では 2 に正規化されたものを用いている.

$$P_n^m(\mu)=\sqrt{(2n+1)\frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)}}\frac{1}{2^n n!}(1-\mu^2)^{|m|/2}\frac{d^{n+|m|}}{d\mu^{n+|m|}}(\mu^2-1)^n, \quad \int_{-1}^{1}\{P_n^m(\mu)\}^2 d\mu=2. \tag{2}$$

$g(\lambda,\mu)$ が実数であることから s_n^m は

$$s_n^{-m}=\{s_n^m\}^* \tag{3}$$

の関係を満たしている[1]. この制約から逆変換を次のように書き直すことができる.

[1] $\sum_{m=-n}^{n} s_n^m e^{im\lambda}$ を展開して $\cos(m\lambda)$, $\sin(m\lambda)$ の項を取りだすと

$$\begin{aligned} s_n^m e^{im\lambda}+s_n^{-m}e^{-im\lambda} &= Re[s_n^m]\cos(m\lambda)+iRe[s_n^m]\sin(m\lambda)+iIm[s_n^m]\cos(m\lambda)-Im[s_n^m]\sin(m\lambda) \\ &\quad +Re[s_n^{-m}]\cos(m\lambda)-iRe[s_n^{-m}]\sin(m\lambda)+iIm[s_n^{-m}]\cos(m\lambda)+Im[s_n^{-m}]\sin(m\lambda) \end{aligned}$$

$$g(\lambda,\mu)=\sum_{n=0}^{M}\left[a_n^0P_n^0(\mu)+\sum_{m=1}^{n}\left\{a_n^mP_n^m(\mu)\sqrt{2}\cos(m\lambda)-b_n^mP_n^m(\mu)\sqrt{2}\sin(m\lambda)\right\}\right]. \tag{4}$$

ただし

$$a_n^0=Re[s_n^0],\quad a_n^m=\sqrt{2}Re(s_n^m),\quad b_n^m=\sqrt{2}Im(s_n^m),\quad (m=1,2,\dots,n,n=1,\dots,M) \tag{5}$$

2　ルジャンドル陪函数

補間の際必要となるルジャンドル陪函数の性質を記しておく. 2 で正規化されているため通常のルジャンドル陪函数と性質が変わることに注意されたい. 通常のルジャンドル陪函数を $\tilde{P}_n^m$, 2 で正規化されたルジャンドル陪函数を P_n^m と表すと

$$\tilde{P}_n^m(\mu)=(-i)^m\sqrt{\frac{1}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}}P_n^m(\mu) \tag{6}$$

である[2]. 通常のルジャンドル函数の性質として,

$$\tilde{P}_m^m(\mu)=(-1)^m(2m-1)!!(1-\mu^2)^{m/2},\quad \tilde{P}_{m+1}^m(\mu)=\mu(2m+1)\tilde{P}_m^m. \tag{7}$$

三項漸化式

$$\tilde{P}_{n+1}^m(\mu)=\frac{2n+1}{n-m+1}\mu\tilde{P}_n^m(\mu)-\frac{n+m}{n-m+1}\tilde{P}_{n-1}^m(\mu). \tag{8}$$

低次のルジャンドル陪函数

$$\tilde{P}_1^0(\mu)=\mu,\quad \tilde{P}_1^1(\mu)=-\sqrt{1-\mu^2}, \tag{9}$$

$$\tilde{P}_2^0(\mu)=\frac{1}{2}(3\mu^2-1),\quad \tilde{P}_2^1(\mu)=-3\mu\sqrt{1-\mu^2},\quad \tilde{P}_2^2(\mu)=3(1-\mu^2). \tag{10}$$

積分

$$\int_{-1}^{1}\{\tilde{P}_n^m(\mu)\}^2d\mu=\frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}. \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &= (Re[s_n^m]+Re[s_n^{-m}])\cos(m\lambda)+(-Im[s_n^m]+Im[s_n^{-m}])\sin(m\lambda)\\ &\quad +i(Im[s_n^m]+Im[s_n^{-m}])\cos(m\lambda)+i(Re[s_n^m]-Re[s_n^{-m}])\sin(m\lambda).\end{aligned}$$

虚数部が 0 になる条件から $Re[s_n^m]=Re[s_n^{-m}], Im[s_n^m]=-Im[s_n^{-m}]$, すなわち $s_n^{-m}=\{s_n^m\}^*$ である.

[2]ISPACK で用いているルジャンドル陪函数は符号の定義も違っていることに注意されたい

2 で正規化されたルジャンドル陪函数に書き換えると, m, m+1 次のルジャンドル陪函数は[3],

$$
\begin{aligned}
P_m^m(\mu) &= \frac{\sqrt{(2m+1)!}}{2^m m!}(1-\mu^2)^{m/2}. && (12)\\
P_{m+1}^m(\mu) &= \mu\sqrt{2m+3}P_m^m(\mu). && (13)
\end{aligned}
$$

三項漸化式は[4]

$$
P_{n+1}^m(\mu) = \sqrt{\frac{(2n+3)(2n+1)}{(n-m+1)(n+m+1)}}\mu P_n^m(\mu) - \sqrt{\frac{(2n+3)(n+m)(n-m)}{(2n-1)(n+m+1)(n-m+1)}}P_{n-1}^m(\mu). \tag{14}
$$

3

$$
\begin{aligned}
\tilde{P}_m^m(\mu) &= (-1)^m\sqrt{\frac{(2m)!}{2m+1}}P_m^m(\mu) = (-1)^m(2m-1)!!(1-\mu^2)^{m/2},\\
P_m^m(\mu) &= \sqrt{\frac{2m+1}{(2m)!}}(2m-1)!!(1-\mu^2)^{m/2} = \sqrt{\frac{2m+1}{(2m)!}}\frac{(2m)!}{2^m m!}(1-\mu^2)^{m/2}\\
&= \frac{\sqrt{(2m+1)(2m)!}}{2^m m!}(1-\mu^2)^{m/2},\\
&= \frac{\sqrt{(2m+1)!}}{2^m m!}(1-\mu^2)^{m/2}.\\
\tilde{P}_{m+1}^m(\mu) &= \sqrt{\frac{(2m+1)!}{2m+3}}P_{m+1}^m(\mu) = \mu(2m+1)\tilde{P}_m^m = \mu(2m+1)\sqrt{\frac{(2m)!}{2m+1}}P_m^m(\mu),\\
P_{m+1}^m(\mu) &= \mu(2m+1)\sqrt{\frac{(2m)!}{2m+1}\frac{2m+3}{(2m+1)!}}P_m^m(\mu) = \mu(2m+1)\sqrt{\frac{2m+3}{(2m+1)^2}}P_m^m(\mu)\\
&= \mu\sqrt{2m+3}P_m^m(\mu).
\end{aligned}
$$

4

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{1}{2n+3}\frac{(n+m+1)!}{(n-m+1)!}}P_{n+1}^m(\mu) = \sqrt{\frac{1}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}}\frac{2n+1}{n-m+1}\mu P_n^m(\mu)\\
&-\sqrt{\frac{1}{2n-1}\frac{(n+m-1)!}{(n-m-1)!}}\frac{n+m}{n-m+1}P_{n-1}^m(\mu),\\
&P_{n+1}^m(\mu) = \sqrt{\frac{2n+3}{2n+1}\frac{(n-m+1)!}{(n+m+1)!}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}}\frac{2n+1}{n-m+1}\mu P_n^m(\mu)\\
&-\sqrt{\frac{2n+3}{2n-1}\frac{(n-m+1)!}{(n+m+1)!}\frac{(n+m-1)!}{(n-m-1)!}}\frac{n+m}{n-m+1}P_{n-1}^m(\mu),\\
&= \sqrt{\frac{2n+3}{2n+1}\frac{n-m+1}{n+m+1}}\frac{2n+1}{n-m+1}\mu P_n^m(\mu) - \sqrt{\frac{2n+3}{2n-1}\frac{(n-m+1)(n-m)}{(n+m+1)(n+m)}}\frac{n+m}{n-m+1}P_{n-1}^m(\mu),\\
&= \sqrt{\frac{(2n+3)(2n+1)}{(n-m+1)(n+m+1)}}\mu P_n^m(\mu) - \sqrt{\frac{(2n+3)(n+m)(n-m)}{(2n-1)(n+m+1)(n-m+1)}}P_{n-1}^m(\mu).
\end{aligned}
$$

低次のルジャンドル陪函数は

$$P_1^0(\mu)=\sqrt{3}\mu,\quad P_1^1(\mu)=\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{1-\mu^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{1-\mu^2}, \tag{15}$$

$$P_2^0(\mu)=\frac{\sqrt{5}}{2}(3\mu^2-1),\quad P_2^1(\mu)=\sqrt{\frac{5}{6}}3\mu\sqrt{1-\mu^2},\quad =\sqrt{\frac{30}{2}}\mu\sqrt{1-\mu^2}, \tag{16}$$

$$P_2^2(\mu)=\sqrt{\frac{5}{24}}3(1-\mu^2)=\frac{\sqrt{120}}{24}3(1-\mu^2)=\frac{\sqrt{30}}{4}(1-\mu^2). \tag{17}$$

積分

$$\int_{-1}^{1}\{P_n^m(\mu)\}^2 d\mu=2. \tag{18}$$

3 補間の計算

今, 関数 $g(\lambda,\mu)$ の球面調和関数変換 s_n^m が与えられたとき任意の点 (λ,μ) における関数の値を Clenshow's Recurrence Formula [5] を用いて計算する.

[5] Clenshow's Recurrence Formula:
関数 $f(x)$ がとある関数系 $F_k(x)$ で

$$f(x)=\sum_0^N c_k F_k(x)$$

と表されているとする. さらに関数系が次の漸化式

$$F_{n+1}(x)=\alpha(n,x)F_n(x)+\beta(n,x)F_{n-1}(x)$$

を満たしているとする. このとき漸化式

$$y_{N+2}=y_{N+1}=0,\quad y_k=\alpha(k,x)y_{k+1}+\beta(k+1,x)y_{k+2}+c_k$$

で定義される量 $y_k,(k=N,N-1,\ldots,m)$ を用いると $f(x)$ を求めるための関数系の和は

$$f(x)=\beta(m+1,x)F_m(x)y_{m+2}+F_{m+1}(x)y_{m+1}+F_m(x)c_m$$

と計算することができる.

☆「証明」
y_k に関する漸化式を c_k について解き, $f(x)$ の式に代入すると

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_0^N c_k F_k(x)\\
&= y_N F_N(x)\\
&\quad +[y_{N-1}-\alpha(N-1,x)y_N]F_{N-1}(x)\\
&\quad +[y_{N-2}-\alpha(N-2,x)y_{N-1}-\beta(N-1,x)y_N]F_{N-2}(x)\\
&\quad +[y_{N-3}-\alpha(N-3,x)y_{N-2}-\beta(N-2,x)y_{N-1}]F_{N-3}(x)
\end{aligned}$$

ルジャンドル逆変換の和の順序を変えて

$$
\begin{aligned}
g(\lambda,\mu) &= \sum_{n=0}^{M} a_n^0 P_n^0(\mu) + \sum_{m=1}^{n}\sum_{n=m}^{M} + \left\{a_n^m P_n^m(\mu)\sqrt{2}\cos(m\lambda) - b_n^m P_n^m(\mu)\sqrt{2}\sin(m\lambda)\right\} \\
&= \sum_{n=0}^{M} a_n^0 P_n^0(\mu) + \sum_{m=1}^{n}\sqrt{2}\cos(m\lambda)\sum_{n=m}^{M} a_n^m P_n^m(\mu) - \sum_{m=1}^{n}\sqrt{2}\sin(m\lambda)\sum_{n=m}^{M} b_n^m P_n^m(\mu)
\end{aligned}
$$

n についての和は Clenshow's Recurrence Formula で計算できる．漸化式から $\alpha(n,m,x) = \sqrt{\dfrac{(2n+3)(2n+1)}{(n-m+1)(n+m+1)}}x, \beta(n,m) = -\sqrt{\dfrac{(2n+3)(n+m)(n-m)}{(2n-1)(n+m+1)(n-m+1)}}$ とおいて，$f_m(\mu) = \sum_{n=m}^{M} a_n^m P_n^m(\mu)$ は

$$
\begin{aligned}
& y_{K+2} = y_{K+1} = 0, \\
& y_k = \alpha(k,m,\mu)y_{k+1} + \beta(k+1,m)y_{k+2} + a_k^m, \quad (k = K, K-1, \dots, m+1) \qquad (19)\\
& f_m(\mu) = \beta(m+1,m)y_{m+2}P_m^m(\mu) + P_{m+1}^m(\mu)y_{m+1} + a_m^m P_m^m(\mu) \\
& = \beta(m+1,m)y_{m+2}P_m^m(\mu) + \mu\sqrt{2m+3}P_m^m(\mu)y_{m+1} + a_m^m P_m^m(\mu) \\
& = \left[a_m^m + \beta(m+1,m)y_{m+2} + \mu\sqrt{2m+3}y_{m+1}\right] P_m^m(\mu). \qquad (20)
\end{aligned}
$$

ただし $P_m^m(\mu) = \dfrac{\sqrt{(2m+1)!}}{2^m m!}(1-\mu^2)^{m/2}$ と計算することができる．$\sum_{n=m}^{M} b_n^m P_n^m(\mu)$ の和も同様に計算できる．$\sum_{n=0}^{M} a_n^0 P_n^0(\mu)$ の場合は $f_0(\mu) = \sum_{n=0}^{M} a_n^0 P_n^0(\mu)$ は

$$
\begin{aligned}
& y_{K+2} = y_{K+1} = 0, \\
& y_k = \alpha(k,0,\mu)y_{k+1} + \beta(k+1,0)y_{k+2} + a_k^0, \quad (k = K, K-1, \dots, 1), \qquad (21)\\
& f_0(\mu) = \beta(1,0)y_2 P_m^m(\mu) + P_1^0(\mu)y_1 + a_0^0 P_0^0(\mu) = \beta(1,0)y_2 + \sqrt{3}\mu y_1 + a_0^0 \qquad (22)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \cdots \\
& +[y_{m+2} - \alpha(m+2,x)y_{m+3} - \beta(m+3,x)y_{m+4}]F_{m+2}(x) \\
& +[y_{m+1} - \alpha(m+1,x)y_{m+2} - \beta(m+2,x)y_{m+3}]F_{m+1}(x) \\
& +[c_m + \beta(m+1,x)y_{m+2} - \beta(m+1,x)y_{m+2}]F_m(x)
\end{aligned}
$$

最後の項だけ c_0 のまま残し，$\beta(1,x)y_2$ をわざと足し引きしている．各 y_k について整理すると

$$
\begin{aligned}
f(x) \;=\; & y_N[F_N - \alpha(N-1,x)F_{N-1} - \beta(N-1,x)F_{N-2}] \\
& + y_{N-1}[F_{N-1} - \alpha(N-2,x)F_{N-2} - \beta(N-2,x)F_{N-3}] \\
& \cdots \\
& + y_{m+2}[F_{m+2} - \alpha(m+1,x)F_{m+1} - \beta(m+1,x)F_m] \\
& + y_{m+1}F_{m+1} + c_m F_m + \beta(m+1,x)y_{m+2}F_m
\end{aligned}
$$

$F_k(x)$ の漸化式より $k = N, N-1, \dots, 2$ まではキャンセルし，残りの項は最後の行だけになる．したがって

$$
f(x) = \beta(m+1,x)y_{m+2}F_m + y_{m+1}F_{m+1} + c_m F_m
$$

4　エネルギー・エンストロフィースペクトルの計算

今, 流線関数 $\psi(\lambda,\varphi)$ の球面調和函数展開係数 a_n^m, b_n^m が与えられたとき全エネルギー E 次のように計算される.

$$
\begin{aligned}
E &= \int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2+\frac{1}{\cos^2\varphi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right)^2\right]\cos\varphi d\varphi d\lambda \\
&= \frac{1}{2}\left\{\int_0^{2\pi}\left[\psi\cos\varphi\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}d\lambda-\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\psi\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\cos\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)\cos\varphi d\varphi d\lambda\right. \\
&\quad\left.+\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{\psi}{\cos^2\varphi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right)\right]_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi-\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\psi}{\cos^2\varphi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda^2}\cos\varphi d\varphi d\lambda\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{-\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\psi\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\cos\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)\right]\cos\varphi d\varphi d\lambda\right. \\
&\quad\left.-\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda^2}\cos\varphi d\varphi d\lambda\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{-\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\psi\left[\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(\cos\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)+\frac{\psi}{\cos^2\varphi}\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda^2}\right]\cos\varphi d\varphi d\lambda\right\} \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\psi\nabla^2\psi\cos\varphi d\varphi d\lambda. \qquad (23)
\end{aligned}
$$

ここで, 球面調和函数展開係数を用いると

$$
\psi=\sum_{n=0}^{M}a_n^0P_n(\sin\varphi)+\sum_{n=0}^{M}\sum_{m=1}^{m}\sqrt{2}a_n^mP_n^m(\sin\varphi)cos(m\lambda)-\sum_{n=0}^{M}\sum_{m=1}^{m}\sqrt{2}b_n^mP_n^m(\sin\varphi)sin(m\lambda) \qquad (24)
$$

であるから,

$$
\begin{aligned}
E &= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\psi\nabla^2\psi\cos\varphi d\varphi d\lambda \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\sum_{n=0}^{M}a_n^0P_n(\sin\varphi)+\sum_{n=0}^{M}\sum_{m=1}^{n}\sqrt{2}a_n^mP_n^m(\sin\varphi)\cos(m\lambda)\right. \\
&\quad\left.-\sum_{n=0}^{M}\sum_{m=1}^{n}\sqrt{2}b_n^mP_n^m(\sin\varphi)\sin(m\lambda)\right] \\
&\quad\left[\sum_{n'=0}^{M}n'(n'+1)a_{n'}^0P_n'(\sin\varphi)+\sum_{n'=0}^{M}\sum_{m'=1}^{n'}\sqrt{2}n'(n'+1)a_n'^{m'}P_n'^{m'}(\sin\varphi)\cos(m'\lambda)\right. \\
&\quad\left.-\sum_{n'=0}^{M}\sum_{m'=1}^{n'}\sqrt{2}n'(n'+1)b_n'^{m'}P_n'^{m'}(\sin\varphi)\sin(m'\lambda)\right]\cos\varphi d\varphi d\lambda \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{M}\sum_{n'=0}^{M}n'(n'+1)a_{n'}^0a_n'^0\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}P_n(\sin\varphi)P_n'(\sin\varphi)\cos\varphi d\varphi d\lambda
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{M}\sum_{m=1}^{n}\sum_{n'=0}^{M}\sum_{m'=0}^{n'} 2n'(n'+1)a_n^m a_{n'}^{m'} \\
&\quad\times\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} P_n^m(\sin\varphi)\cos(m\lambda)P_n'^{m'}(\sin\varphi)\cos(m'\lambda)\cos\varphi d\varphi d\lambda \\
&+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{M}\sum_{m=1}^{n}\sum_{n'=0}^{M}\sum_{m'=0}^{n'} 2n'(n'+1)b_n^m b_{n'}^{m'} \\
&\quad\times\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} P_n^m(\sin\varphi)\sin(m\lambda)P_n'^{m'}(\sin\varphi)\sin(m'\lambda)\cos\varphi d\varphi d\lambda \\
= \;& \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{M}\sum_{n'=0}^{M} n'(n'+1)a_{n'}^0 a_n'^0 4pi\delta_{n,n'} \\
&+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{M}\sum_{m=1}^{n}\sum_{n'=0}^{M}\sum_{m'=1}^{n'} 2n'(n'+1)a_n^m a_{n'}^{m'}\pi\delta_{m,m'}\cdot 2\delta_{n,n'} \\
&+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{M}\sum_{m=1}^{n}\sum_{n'=0}^{M}\sum_{m'=1}^{n'} 2n'(n'+1)b_n^m b_{n'}^{m'}\pi\delta_{m,m'}\cdot 2\delta_{n,n'} \\
= \;& 4\pi\left[\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{M} n(n+1)|a_n^0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{M}\sum_{m=1}^{n} n(n+1)|a_n^m|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{M}\sum_{m=1}^{n} n(n+1)|b_n^m|^2\right] \qquad (25)
\end{aligned}
$$

これより全エネルギーを (n,m) 各成分にわけることができて, $\frac{1}{2}n(n+1)|a_n^0|^2$ をエネルギースペクトルの $(n,0)$ 成分, $\frac{1}{2}n(n+1)|a_n^m|^2$ をエネルギースペクトルの (n,m) 成分, $\frac{1}{2}n(n+1)|b_n^m|^2$ をエネルギースペクトルの $(n,-m)$ 成分と呼ぶ.

同じような計算を全エンストロフィーにも行うことができる.

$$
\begin{aligned}
Q \;=\;& \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\nabla^2\psi)^2\cos\varphi d\varphi d\lambda \\
=\;& \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\sum_{n=0}^{M} n(n+1)a_n^0 P_n(\sin\varphi) + \sum_{n=0}^{M}\sum_{m=1}^{n}\sqrt{2}n(n+1)a_n^m P_n^m(\sin\varphi)\cos(m\lambda)\right. \\
&\left.-\sum_{n=0}^{M}\sum_{m=1}^{n}\sqrt{2}n(n+1)b_n^m P_n^m(\sin\varphi)\sin(m\lambda)\right] \\
&\left[\sum_{n'=0}^{M} n'(n'+1)a_{n'}^0 P_n'(\sin\varphi) + \sum_{n'=0}^{M}\sum_{m'=1}^{n'}\sqrt{2}n'(n'+1)a_n'^{m'} P_n'^{m'}(\sin\varphi)\cos(m'\lambda)\right. \\
&\left.-\sum_{n'=0}^{M}\sum_{m'=1}^{n'}\sqrt{2}n'(n'+1)b_n'^{m'} P_n'^{m'}(\sin\varphi)\sin(m'\lambda)\right]\cos\varphi d\varphi d\lambda \\
=\;& \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{M}\sum_{n'=0}^{M} n(n+1)n'(n'+1)a_{n'}^0 a_n'^0\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} P_n(\sin\varphi)P_n'(\sin\varphi)\cos\varphi d\varphi d\lambda
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{M}\sum_{m=1}^{n}\sum_{n'=0}^{M}\sum_{m'=0}^{n'} 2n(n+1)n'(n'+1)a_n^m a_{n'}^{m'} \\
&\qquad\times\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} P_n^m(\sin\varphi)\cos(m\lambda)P_n'^{m'}(\sin\varphi)\cos(m'\lambda)\cos\varphi d\varphi d\lambda \\
&+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{M}\sum_{m=1}^{n}\sum_{n'=0}^{M}\sum_{m'=0}^{n'} 2n(n+1)n'(n'+1)b_n^m b_{n'}^{m'} \\
&\qquad\times\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} P_n^m(\sin\varphi)\sin(m\lambda)P_n'^{m'}(\sin\varphi)\sin(m'\lambda)\cos\varphi d\varphi d\lambda \\
=\ &\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{M}\sum_{n'=0}^{M} n(n+1)n'(n'+1)a_{n'}^0 a_n'^0 4pi\delta_{n,n'} \\
&+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{M}\sum_{m=1}^{n}\sum_{n'=0}^{M}\sum_{m'=0}^{n'} 2n(n+1)n'(n'+1)a_n^m a_{n'}^{m'}\pi\delta_{m,m'}\cdot 2\delta_{n,n'} \\
&+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{M}\sum_{m=1}^{n}\sum_{n'=0}^{M}\sum_{m'=0}^{n'} 2n(n+1)n'(n'+1)b_n^m b_{n'}^{m'}\pi\delta_{m,m'}\cdot 2\delta_{n,n'} \\
=\ &4\pi\left[\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{M} n^2(n+1)^2|a_n^0|^2+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{M}\sum_{m=-n}^{n} n^2(n+1)^2|a_n^m|^2+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{M}\sum_{m=-n}^{n} n^2(n+1)^2|b_n^m|^2\right]
\end{aligned}
\tag{26}
$$

これより全エンストロフィーを (n,m) 各成分にわけることができて，$\frac{1}{2}n^2(n+1)^2|a_n^0|^2$ をエネルギースペクトルの $(n,0)$ 成分，$\frac{1}{2}n^2(n+1)^2|a_n^m|^2$ をエネルギースペクトルの (n,m) 成分，$\frac{1}{2}n^2(n+1)^2|b_n^m|^2$ をエネルギースペクトルの $(n,-m)$ 成分と呼ぶ.