動径座標のスペクトル法

竹広 真一

2008 年 7 月 20 日

2 次元極座標, 3 次元円筒座標, および 3 次元球座標での原点で C^∞ 級の微分可能な滑らかな関数をスペクトル法により表現するための動径座標の展開関数について述べる.

1 直交多項式系

円筒座標 (r,ϕ) での C^∞ 級の関数 $f(r,\phi)$ を表現するスペクトル法をさがす. 方位角方向に Fourier 展開して

$$f(r,\phi)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(r)e^{im\phi}. \tag{1}$$

このとき $f_m(r)$ は極での微分可能条件から $r\to 0$ で $O(r^{|m|+2p})$ と振る舞わなければならないことがわかる[1]. ここで p は非負の整数である.

さて, 極での条件を満たしつつ, 展開関数が境界で Gibbs の現象が生じないよう定義となる微分方程式が境界で特異であり[2], かつ重み関数が円筒および球の幾何学的形状に都合のよい $f_m(r)$ の表現を求めたい. また, 3 項間の漸化式を満たし取りあつかいが簡単であるので直交多項式が望ましい.

[1]Matsushima and Marcus の参考文献 [6] を参照すべし. 球座標では

$$g(\lambda,\varphi,r)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} g_n^m(r)Y_n^m(\lambda,\varphi)$$

なる関数について $g_n^m(r)$ は $r\to 0$ で $O(r^{|n|+2p})$ と振る舞わなければならないはず.

[2]Matsushima and Marcus (1995) の参考文献 11 を参照すべし

この 3 つの要請を満たす定義となる微分方程式として, $0 \geq r \geq 1$ で定義される特異な Strum-Liouville 型方程式

$$\frac{(1-r^2)^{1-\alpha}}{r^\beta}\frac{d}{dr}\left((1-r^2)^\alpha r^\beta \frac{dy}{dr}\right) - \frac{|m|(|m|+\beta-1)}{r^2}y + n(n+2\alpha+\beta-1)y = 0, \quad (2)$$

ただし n, m は整数で $0 \leq |m| \leq n$ であり, $0 < \alpha \leq 1$, β は正の整数である.

式 (2) は $n+m$ が偶数のとき n 次の多項式の解を持ち $r=0$ に関するフロベニウスの級数を用いて解 $y = Q_n^m(\alpha, \beta; r)$ を閉じた形で書くことができる.

$$Q_n^m(\alpha,\beta;r) = \sum_{p=0}^{(n-|m|)/2} \frac{(-1)^{p+(n-|m|)/2}\Gamma\left(\dfrac{n+|m|+\gamma-1}{2}+p\right)\Gamma\left(\dfrac{2|m|+\beta+1}{2}\right)}{p!\left(\dfrac{n-|m|}{2}-p\right)!\Gamma\left(\dfrac{2|m|+\beta+1}{2}+p\right)\Gamma\left(\dfrac{2|m|+\gamma-1}{2}\right)} r^{|m|+2p}, \quad (3)$$

ただし $\gamma \equiv 2\alpha+\beta$ である[3]. m が偶数であれば $Q_n^m(\alpha,\beta;r)$ は r の偶関数, 奇数であれば奇関数である. $r \to 0$ で $Q_n^m(\alpha,\beta;r)$ は $O(r^{|m|})$ で振る舞うので極座標 (r, ϕ)

[3]式 (2) の解を r の q 次から始まる級数 $y = \sum_{l=0}^{\infty} a_l r^{q+l}$ の形で求める. これを式 (2) に代入すると

$$\frac{(1-r^2)^{1-\alpha}}{r^\beta}\frac{d}{dr}\left((1-r^2)^\alpha r^\beta \frac{d}{dr}\sum_{l=0}^{\infty} a_l r^{q+l}\right) - |m|(|m|+\beta-1)\sum_{l=0}^{\infty} a_l r^{q+l-2} + n(n+2\alpha+\beta-1)\sum_{l=0}^{\infty} a_l r^{q+l} = 0,$$

第 1 項目を整理すると

$$\begin{aligned}
&\frac{(1-r^2)^{1-\alpha}}{r^\beta}\frac{d}{dr}\left((1-r^2)^\alpha r^\beta \frac{d}{dr}\sum_{l=0}^{\infty} a_l r^{q+l}\right) = \frac{(1-r^2)^{1-\alpha}}{r^\beta}\frac{d}{dr}(1-r^2)^\alpha r^\beta \sum_{l=0}^{\infty}(q+l)a_l r^{q+l-1} \\
= \;& (1-r^2)\sum_{l=0}^{\infty}(q+l)a_l \frac{d}{dr} r^{q+l-1} + \frac{(1-r^2)^{1-\alpha}}{r^\beta}(-2\alpha r)(1-r^2)^{\alpha-1} r^\beta \sum_{l=0}^{\infty}(q+l)a_l r^{q+l-1} \\
&+ \frac{(1-r^2)^{1-\alpha}}{r^\beta}(1-r^2)^\alpha \beta r^{\beta-1}\sum_{l=0}^{\infty}(q+l)a_l r^{q+l-1} \\
= \;& (1-r^2)\sum_{l=0}^{\infty}(q+l)(q+l-1)a_l r^{q+l-2} + (-2\alpha r)\sum_{l=0}^{\infty}(q+l)a_l r^{q+l-1} + \frac{(1-r^2)}{r}\beta\sum_{l=0}^{\infty}(q+l)a_l r^{q+l-1} \\
= \;& (1-r^2)\sum_{l=0}^{\infty}(q+l)(q+l-1)a_l r^{q+l-2} - \sum_{l=0}^{\infty} 2\alpha(q+l)a_l r^{q+l} + (1-r^2)\sum_{l=0}^{\infty}\beta(q+l)a_l r^{q+l-2} \\
= \;& (1-r^2)\sum_{l=0}^{\infty}(q+l)(q+l+\beta-1)a_l r^{q+l-2} - \sum_{l=0}^{\infty} 2\alpha(q+l)a_l r^{q+l} \\
= \;& \sum_{l=0}^{\infty}(q+l)(q+l+\beta-1)a_l r^{q+l-2} - \sum_{l=0}^{\infty}(q+l)(q+l+\beta-1)a_l r^{q+l} - \sum_{l=0}^{\infty} 2\alpha(q+l)a_l r^{q+l} \\
= \;& \sum_{l=0}^{\infty}(q+l)(q+l+\beta-1)a_l r^{q+l-2} - \sum_{l=0}^{\infty}(q+l)(q+l+2\alpha+\beta-1)a_l r^{q+l}
\end{aligned}$$

において $Q_n^m(\alpha,\beta;r)e^{im\phi}$ は極の条件を正確に満たすことになる. $Q_n^m(\alpha,\beta;r)$ は完

これを元の式に代入して整理すると

$$\sum_{l=0}^{\infty}(q+l)(q+l+\beta-1)a_l r^{q+l-2}-\sum_{l=0}^{\infty}(q+l)(q+l+2\alpha+\beta-1)a_l r^{q+l}$$
$$-|m|(|m|+\beta-1)\sum_{l=0}^{\infty}a_l r^{q+l-2}+n(n+2\alpha+\beta-1)\sum_{l=0}^{\infty}a_l r^{q+l}=0,$$
$$\sum_{l=0}^{\infty}[(q+l)(q+l+\beta-1)-|m|(|m|+\beta-1)]a_l r^{q+l-2}$$
$$+\sum_{l=0}^{\infty}[n(n+2\alpha+\beta-1)-(q+l)(q+l+2\alpha+\beta-1)]a_l r^{q+l}=0,$$
$$\sum_{l=0}^{\infty}(q+l-|m|)(q+l+|m|+\beta-1)a_l r^{q+l-2}+\sum_{l=0}^{\infty}(n-q-l)(q+l+n+2\alpha+\beta-1)a_l r^{q+l}=0,$$

最低次の項から次数 q が定まる. 第 1 項目の $l=0$ から

$$(q-|m|)(q+|m|+\beta-1)a_0=0,\quad i.e.\quad q=|m|.$$

$l=1$ からは

$$(|m|+1-|m|)(|m|+|m|+\beta-1)a_1=0,\quad i.e.\quad a_1=0.$$

$q=|m|$ を代入して a_l の漸化式を導こう. 第 1 項目の $l=0,1$ は 0 となっているので

$$\sum_{l=2}^{\infty}l(l+2|m|+\beta-1)a_l r^{|m|+l-2}+\sum_{l=0}^{\infty}(n-|m|-l)(l+n+|m|+\gamma-1)a_l r^{q+l}=0,$$
$$\sum_{l=0}^{\infty}(l+2)(l+2|m|+\beta+1)a_{l+2}r^{|m|+l}+\sum_{l=0}^{\infty}(n-|m|-l)(l+n+|m|+\gamma-1)a_l r^{|m|+l}=0,$$

ただし $\gamma=2\alpha+\beta$ である. したがって

$$a_{l+2}=-\frac{(n-|m|-l)(l+n+|m|+\gamma-1)}{(l+2)(l+2|m|+\beta+1)}a_l$$

$a_1=0$ より l が奇数の項は 0 である. そこで $l=2p-2$ と置き換えて

$$a_{2p}=-\frac{(n-|m|-2p+2)(2p+n+|m|+\gamma-3)}{2p(2p+2|m|+\beta-1)}a_{2p-2}$$

これより $n-|m|$ が偶数ならば $p=(n-|m|)/2+1$ 番目の項は分子の一つめのカッコの中味が 0 となるので $p=(n-|m|)/2$ までで級数が閉じる. さらに

$$\begin{aligned}a_{2p}&=-\frac{(n-|m|-2p+2)(2p+n+|m|+\gamma-3)}{2p(2p+2|m|+\beta-1)}a_{2p-2}\\&=-\frac{\left(\dfrac{n-|m|}{2}-p+1\right)\left(\dfrac{n+|m|+\gamma-3}{2}+p\right)}{p\left(\dfrac{2|m|+\beta-1}{2}+p\right)}a_{2p-2}\end{aligned}$$

全系をなし, 重み関数

$$w(\alpha,\beta;r)=\frac{r^{\beta}}{(1-r^2)^{1-\alpha}} \tag{4}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^2\frac{\left(\dfrac{n-|m|}{2}-p+1\right)\left(\dfrac{n-|m|}{2}-p+2\right)\left(\dfrac{n+|m|+\gamma-3}{2}+p\right)\left(\dfrac{n+|m|+\gamma-3}{2}+p-1\right)}{p(p-1)\left(\dfrac{2|m|+\beta-1}{2}+p\right)\left(\dfrac{2|m|+\beta-1}{2}+p-1\right)}a_{2p-4} \\
&= (-1)^p\frac{\left(\dfrac{n-|m|}{2}-p+1\right)\left(\dfrac{n-|m|}{2}-p+2\right)\cdots\left(\dfrac{n-|m|}{2}\right)}{p(p-1)\cdots 1} \\
&\quad \frac{\left(\dfrac{n+|m|+\gamma-3}{2}+p\right)\left(\dfrac{n+|m|+\gamma-3}{2}+p-1\right)\cdots\left(\dfrac{n+|m|+\gamma-3}{2}+1\right)}{\left(\dfrac{2|m|+\beta-1}{2}+p\right)\left(\dfrac{2|m|+\beta-1}{2}+p-1\right)\cdots\left(\dfrac{2|m|+\beta-1}{2}+1\right)}a_0 \\
&= (-1)^p\frac{\left(\dfrac{n-|m|}{2}\right)!\Gamma\left(\dfrac{n+|m|+\gamma-1}{2}+p\right)\Gamma\left(\dfrac{2|m|+\beta+1}{2}\right)}{p!\left(\dfrac{n-|m|}{2}-p\right)!\Gamma\left(\dfrac{n+|m|+\gamma-1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{2|m|+\beta+1}{2}+p\right)}a_0
\end{aligned}
$$

ここで a_0 として

$$a_0=\frac{(-1)^{(n-|m|)/2}\Gamma\left(\dfrac{n+|m|+\gamma-1}{2}\right)}{\left(\dfrac{n-|m|}{2}\right)!\Gamma\left(\dfrac{2|m|+\gamma-1}{2}\right)}$$

を選ぶと

$$a_{2p}=(-1)^{p+(n-|m|)/2}\frac{\Gamma\left(\dfrac{n+|m|+\gamma-1}{2}+p\right)\Gamma\left(\dfrac{2|m|+\beta+1}{2}\right)}{p!\left(\dfrac{n-|m|}{2}-p\right)!\Gamma\left(\dfrac{2|m|+\gamma-1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{2|m|+\beta+1}{2}+p\right)}$$

に関して直交している．すなわち[4]

$$\int_0^1 Q_n^m(\alpha,\beta;r)Q_{n'}^m(\alpha,\beta;r)w(\alpha,\beta;r)dr = I_n^m(\alpha,\beta)\delta_{n,n'}, \qquad (5)$$

積分定数 $I_n^m(\alpha,\beta)$ の漸化式が後に示される．与えられた $I_n^m(\alpha,\beta)$ を用いて直交関数系を規格化して

$$\Phi_n^m(\alpha,\beta;r) = (I_n^m(\alpha,\beta))^{-1/2}Q_n^m(\alpha,\beta;r) \qquad (6)$$

とする．$\Phi_n^m(\alpha,\beta;r)$ は極座標で与えられる単位円盤 $D \equiv \{(r,\phi)|0 \le r \le 1, 0 \le \phi \le 2\pi\}$ 上でのスカラー関数を展開するのに用いることができて

$$f(r,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n,m+n\ \ even}^{n} f_n^m \Phi_n^m(\alpha,\beta;r)e^{im\phi}, \qquad (7)$$

ここで f_n^m は複素展開係数である．$\Phi_n^m(\alpha,\beta;r)$ の極での正しい振舞により $f(r,\phi)$ は円盤 D 上で C^∞ 級であることに注意されたい．係数 f_n^m は

$$f_n^m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 f(r,\phi)\Phi_n^m(\alpha,\beta;r)e^{-im\phi}w(\alpha,\beta;r)drd\phi, \qquad (8)$$

[4]式 (2) に $Q_{n'}^m(\alpha,\beta;r)w(\alpha,\beta;r)$ をかけて領域積分すると

$$\int_0^1 Q_{n'}^m \frac{d}{dr}\left((1-r^2)^\alpha r^\beta \frac{dQ_n^m}{dr}\right)dr - \int_0^1 \frac{|m|(|m|+\beta-1)}{r^2}Q_{n'}^m Q_n^m w dr + n(n+2\alpha+\beta-1)\int_0^1 Q_{n'}^m Q_n^m w dr = 0,$$

$\alpha > 0$ に注意して第 1 項目を 2 度部分積分して入れ換えると,

$$\begin{aligned}\int_0^1 Q_{n'}^m \frac{d}{dr}\left((1-r^2)^\alpha r^\beta \frac{dQ_n^m}{dr}\right)dr &= \left[Q_{n'}^m(1-r^2)^\alpha r^\beta \frac{dQ_n^m}{dr}\right]_0^1 - \int_0^1 (1-r^2)^\alpha r^\beta \frac{dQ_{n'}^m}{dr}\frac{dQ_n^m}{dr} \\ = -\left[Q_n^m(1-r^2)^\alpha r^\beta \frac{dQ_{n'}^m}{dr}\right]_0^1 &+ \int_0^1 Q_n^m \frac{d}{dr}\left((1-r^2)^\alpha r^\beta \frac{dQ_{n'}^m}{dr}\right)dr = \int_0^1 Q_n^m \frac{d}{dr}\left((1-r^2)^\alpha r^\beta \frac{dQ_{n'}^m}{dr}\right)dr\end{aligned}$$

ここで $Q_{n'}^m$ の満たす微分方程式

$$\frac{(1-r^2)^{1-\alpha}}{r^\beta}\frac{d}{dr}\left((1-r^2)^\alpha r^\beta \frac{dQ_{n'}^m}{dr}\right) - \frac{|m|(|m|+\beta-1)}{r^2}Q_{n'}^m + n'(n'+2\alpha+\beta-1)Q_{n'}^m = 0,$$

を用いると,

$$\begin{aligned}\int_0^1 Q_n^m \frac{d}{dr}\left((1-r^2)^\alpha r^\beta \frac{dQ_{n'}^m}{dr}\right)dr &= \int_0^1 \frac{|m|(|m|+\beta-1)}{r^2}Q_{n'}^m Q_n^m w dr \\ &\quad -n'(n'+2\alpha+\beta-1)\int_0^1 Q_{n'}^m Q_n^m w dr,\end{aligned}$$

これを最初の式に代入して整理すると $|m|$ が係数に含まれる項はキャンセルして

$$[n'(n'+2\alpha+\beta-1) - n(n+2\alpha+\beta-1)]\int_0^1 Q_{n'}^m Q_n^m w dr = 0.$$

したがって $n \ne n'$ ならば $\int_0^1 Q_{n'}^m Q_n^m w dr = 0$ となる．

により求められる．C^∞ 級に対する展開式 (7) がスペクトル収束 (すなわち代数的収束より速い) することは, 微分方程式 (2) と (8) を用いることで示すことができる．r に対して部分積分をすることにより[5],

$$f_n^m = \frac{1}{2\pi n(n+2\alpha+\beta-1)} \int_0^{2\pi} \int_0^1 h(r,\phi) \Phi_n^m(\alpha,\beta;r) e^{-im\phi} w(\alpha,\beta;r) dr d\phi, \quad (9)$$

ただし

$$h(r,\phi) = -\frac{(1-r^2)^{1-\alpha}}{r^\beta} \frac{d}{dr}\left((1-r^2)^\alpha r^\beta \frac{df}{dr} \right) + \frac{|m|(|m|+\beta-1)}{r^2} f. \quad (10)$$

f に $r^{|m|}e^{im\phi}$ を代入することにより, $f(r,\phi)$ が極での条件を満たせば $h(r,\phi)$ もまた極での条件を満たすことがわかる[6]．部分積分を繰り返すことにより式 (7) の $f(r,\phi)$ へのスペクトル収束を示すことができる[7].

2 数値計算の手順

ここでは実際に $\Phi_n^m(\alpha,\beta;r)$ と 式 (7) の f_n^m を数値的に見積もるための手順を議論する．簡単のため以下では $Q_n^m(\alpha,\beta;r)$, $\Phi(\alpha,\beta;r)$, $I_n^m(\alpha,\beta)$, $w(\alpha,\beta;r)$ の引数 α,β

[5] (2) を用いると

$$\Phi_n^m(\alpha,\beta;r) = \frac{1}{n(n+2\alpha+\beta-1)} \left[-\frac{(1-r^2)^{1-\alpha}}{r^\beta} \frac{d}{dr}\left((1-r^2)^\alpha r^\beta \frac{d\Phi_n^m}{dr} \right) + \frac{|m|(|m|+\beta-1)}{r^2} \Phi_n^m. \right]$$

これを (8) に代入して部分積分を 2 度行うと (9) を得る．

[6] 実際に $r^{|m|}$ を代入すると

$$\begin{aligned} h(r,\phi) &= -\frac{(1-r^2)^{1-\alpha}}{r^\beta} \frac{d}{dr}\left((1-r^2)^\alpha |m| r^{|m|+\beta-1} \right) + |m|(|m|+\beta-1) r^{|m|-2} \\ &= -(1-r^2)|m|(|m|+\beta-1) r^{|m|-2} - (1-r^2)^{1-\alpha}(1-r^2)^{\alpha-1}(-2\alpha r)|m| r^{|m|-1} \\ &\quad + |m|(|m|+\beta-1) r^{|m|-2} \\ &= |m|(|m|+\beta-1) r^{|m|} + 2\alpha |m| r^{|m|} = |m|(|m|+2\alpha+\beta-1) r^{|m|} \end{aligned}$$

したがって $h(r,\phi)$ も原点で $r^{|m|}$ の振舞をする．

[7] $\Phi_n^m(\alpha,\beta;r)$ を (2) で変形して部分積分を $2l$ 回繰り返すと, 境界 $r=0,1$ で $(1-r^2)^\alpha r^\beta = 0$ となるので積分の寄与だけが残り,

$$f_n^m = \frac{1}{2\pi n^l (n+2\alpha+\beta-1)^l} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \mathcal{D}_l f(r,\phi) \Phi_n^m(\alpha,\beta;r) e^{-im\phi} w(\alpha,\beta;r) dr d\phi,$$

ただし

$$\mathcal{D}_l = \left[-\frac{(1-r^2)^{1-\alpha} nh}{r^\beta} \frac{d}{dr}\left((1-r^2)^\alpha r^\beta \frac{d}{dr} \right) + \frac{|m|(|m|+\beta-1)}{r^2} \right]^l$$

である．$f(r,\phi)$ が円盤上で C^∞ 級であり, さらに先の一つ目の式変形から $\mathcal{D}_l f$ は極での条件を満たしている．したがって $\mathcal{D}_l f$ も C^∞ 級であるので n によらず有界な値で積分値が制限される．したがって f_n^m はどのような代数的収束 $1/n^{2l}$ よりも速く収束する．

を省略する．まずいくつかの有用な関係式を導出する．$n > |m|$ に対して Q_n^m は次の関係式を満たす．

$$r\frac{d}{dr}(Q_n^m(r) - Q_{n-2}^m(r)) = nQ_n^m(r) + (n+\gamma-3)Q_{n-2}^m(r). \tag{11}$$

ここで $Q^m_{|m|-2}(r) \equiv 0$ である．式 (11) は (3) を代入することで容易に確かめられる[8]．式 (11) を用いて式 (2) の階数を一つ下げることができて[9],

$$(1-r^2)r\frac{d}{dr}Q_n^m(r) \;=\; \left(-nr^2 + \frac{|m|(|m|+\beta-1)+n(n+\gamma-\beta-2)}{2n+\gamma-3}\right)Q_n^m(r)$$

---

[8]

$$
\begin{aligned}
& r\frac{d}{dr}(Q_n^m(r) - Q_{n-2}^m(r)) \\
&= \sum_{p=0}^{(n-|m|)/2} \frac{(-1)^{p+(n-|m|)/2}(|m|+2p)\Gamma\left(\frac{n+|m|+\gamma-1}{2}+p\right)\Gamma\left(\frac{2|m|+\beta+1}{2}\right)}{p!\left(\frac{n-|m|}{2}-p\right)!\Gamma\left(\frac{2|m|+\beta+1}{2}+p\right)\Gamma\left(\frac{2|m|+\gamma-1}{2}\right)} r^{|m|+2p} \\
&\quad - \sum_{p=0}^{(n-|m|)/2-1} \frac{(-1)^{p+(n-|m|)/2-1}(|m|+2p)\Gamma\left(\frac{n+|m|+\gamma-3}{2}+p\right)\Gamma\left(\frac{2|m|+\beta+1}{2}\right)}{p!\left(\frac{n-|m|}{2}-1-p\right)!\Gamma\left(\frac{2|m|+\beta+1}{2}+p\right)\Gamma\left(\frac{2|m|+\gamma-1}{2}\right)} r^{|m|+2p} \\
&= \sum_{p=0}^{(n-|m|)/2} \frac{(-1)^{p+(n-|m|)/2}[n+(-n+|m|+2p)]\Gamma\left(\frac{n+|m|+\gamma-1}{2}+p\right)\Gamma\left(\frac{2|m|+\beta+1}{2}\right)}{p!\left(\frac{n-|m|}{2}-p\right)!\Gamma\left(\frac{2|m|+\beta+1}{2}+p\right)\Gamma\left(\frac{2|m|+\gamma-1}{2}\right)} r^{|m|+2p} \\
&\quad - \sum_{p=0}^{(n-|m|)/2-1} \frac{(-1)^{p+(n-|m|)/2-1}(|m|+2p)\Gamma\left(\frac{n+|m|+\gamma-3}{2}+p\right)\Gamma\left(\frac{2|m|+\beta+1}{2}\right)}{p!\left(\frac{n-|m|}{2}-1-p\right)!\Gamma\left(\frac{2|m|+\beta+1}{2}+p\right)\Gamma\left(\frac{2|m|+\gamma-1}{2}\right)} r^{|m|+2p} \\
&= n\sum_{p=0}^{(n-|m|)/2} \frac{(-1)^{p+(n-|m|)/2}\Gamma\left(\frac{n+|m|+\gamma-1}{2}+p\right)\Gamma\left(\frac{2|m|+\beta+1}{2}\right)}{p!\left(\frac{n-|m|}{2}-p\right)!\Gamma\left(\frac{2|m|+\beta+1}{2}+p\right)\Gamma\left(\frac{2|m|+\gamma-1}{2}\right)} r^{|m|+2p} \\
&\quad - \sum_{p=0}^{(n-|m|)/2} \frac{(-1)^{p+(n-|m|)/2}(n-|m|-2p)\Gamma\left(\frac{n+|m|+\gamma-1}{2}+p\right)\Gamma\left(\frac{2|m|+\beta+1}{2}\right)}{p!\left(\frac{n-|m|}{2}-p\right)!\Gamma\left(\frac{2|m|+\beta+1}{2}+p\right)\Gamma\left(\frac{2|m|+\gamma-1}{2}\right)} r^{|m|+2p} \\
&\quad - \sum_{p=0}^{(n-|m|)/2-1} \frac{(-1)^{p+(n-|m|)/2-1}(|m|+2p)\Gamma\left(\frac{n+|m|+\gamma-3}{2}+p\right)\Gamma\left(\frac{2|m|+\beta+1}{2}\right)}{p!\left(\frac{n-|m|}{2}-1-p\right)!\Gamma\left(\frac{2|m|+\beta+1}{2}+p\right)\Gamma\left(\frac{2|m|+\gamma-1}{2}\right)} r^{|m|+2p} \\
&= nQ_n^m \\
&\quad - \sum_{p=0}^{(n-|m|)/2-1} \frac{(-1)^{p+(n-|m|)/2}(n-|m|-2p)\Gamma\left(\frac{n+|m|+\gamma-1}{2}+p\right)\Gamma\left(\frac{2|m|+\beta+1}{2}\right)}{p!\left(\frac{n-|m|}{2}-p\right)!\Gamma\left(\frac{2|m|+\beta+1}{2}+p\right)\Gamma\left(\frac{2|m|+\gamma-1}{2}\right)} r^{|m|+2p} \\
&\quad - \sum_{p=0}^{(n-|m|)/2-1} \frac{(-1)^{p+(n-|m|)/2-1}(|m|+2p)\Gamma\left(\frac{n+|m|+\gamma-3}{2}+p\right)\Gamma\left(\frac{2|m|+\beta+1}{2}\right)}{p!\left(\frac{n-|m|}{2}-1-p\right)!\Gamma\left(\frac{2|m|+\beta+1}{2}+p\right)\Gamma\left(\frac{2|m|+\gamma-1}{2}\right)} r^{|m|+2p} \\
&= nQ_n^m
\end{aligned}
$$

$$
+\frac{(n-|m|+\gamma-\beta-2)(n+|m|+\gamma-3)}{2n+\gamma-3}Q_{n-2}^{m}. \qquad (12)
$$

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{p=0}^{(n-|m|)/2-1}\frac{(-1)^{p+(n-|m|)/2}2\left(\frac{n+|m|+\gamma-3}{2}+p\right)\Gamma\left(\frac{n+|m|+\gamma-1}{2}+p\right)\Gamma\left(\frac{2|m|+\beta+1}{2}\right)}{p!\left(\frac{n-|m|}{2}-1-p\right)!\Gamma\left(\frac{2|m|+\beta+1}{2}+p\right)\Gamma\left(\frac{2|m|+\gamma-1}{2}\right)}r^{|m|+2p}\\
&-\sum_{p=0}^{(n-|m|)/2-1}\frac{(-1)^{p+(n-|m|)/2-1}(|m|+2p)\Gamma\left(\frac{n+|m|+\gamma-3}{2}+p\right)\Gamma\left(\frac{2|m|+\beta+1}{2}\right)}{p!\left(\frac{n-|m|}{2}-1-p\right)!\Gamma\left(\frac{2|m|+\beta+1}{2}+p\right)\Gamma\left(\frac{2|m|+\gamma-1}{2}\right)}r^{|m|+2p}\\
&= nQ_n^m\\
&+\sum_{p=0}^{(n-|m|)/2-1}\frac{(-1)^{p+(n-|m|)/2-1}(n+\gamma-3+|m|+2p)\Gamma\left(\frac{n+|m|+\gamma-1}{2}+p\right)\Gamma\left(\frac{2|m|+\beta+1}{2}\right)}{p!\left(\frac{n-|m|}{2}-1-p\right)!\Gamma\left(\frac{2|m|+\beta+1}{2}+p\right)\Gamma\left(\frac{2|m|+\gamma-1}{2}\right)}r^{|m|+2p}\\
&-\sum_{p=0}^{(n-|m|)/2-1}\frac{(-1)^{p+(n-|m|)/2-1}(|m|+2p)\Gamma\left(\frac{n+|m|+\gamma-3}{2}+p\right)\Gamma\left(\frac{2|m|+\beta+1}{2}\right)}{p!\left(\frac{n-|m|}{2}-1-p\right)!\Gamma\left(\frac{2|m|+\beta+1}{2}+p\right)\Gamma\left(\frac{2|m|+\gamma-1}{2}\right)}r^{|m|+2p}\\
&= nQ_n^m+\sum_{p=0}^{(n-|m|)/2-1}\frac{(-1)^{p+(n-|m|)/2-1}(n+\gamma-3)\Gamma\left(\frac{n+|m|+\gamma-1}{2}+p\right)\Gamma\left(\frac{2|m|+\beta+1}{2}\right)}{p!\left(\frac{n-|m|}{2}-1-p\right)!\Gamma\left(\frac{2|m|+\beta+1}{2}+p\right)\Gamma\left(\frac{2|m|+\gamma-1}{2}\right)}r^{|m|+2p}\\
&= nQ_n^m+(n+\gamma-3)Q_{n-2}^m
\end{aligned}
$$

[9] Q_n^m, Q_{n-2}^m に対する微分方程式は (2) より

$$
\begin{aligned}
&\frac{(1-r^2)^{1-\alpha}}{r^\beta}\frac{d}{dr}\left((1-r^2)^\alpha r^\beta\frac{dQ_n^m}{dr}\right)-\frac{|m|(|m|+\beta-1)}{r^2}Q_n^m+n(n+2\alpha+\beta-1)Q_n^m=0,\\
&\frac{(1-r^2)^{1-\alpha}}{r^\beta}\frac{d}{dr}\left((1-r^2)^\alpha r^\beta\frac{dQ_{n-2}^m}{dr}\right)-\frac{|m|(|m|+\beta-1)}{r^2}Q_{n-2}^m+(n-2)(n+2\alpha+\beta-3)Q_{n-2}^m=0,
\end{aligned}
$$

2 つの式を引き算すると

$$
\begin{aligned}
&\frac{(1-r^2)^{1-\alpha}}{r^\beta}\frac{d}{dr}\left[(1-r^2)^\alpha r^\beta\frac{d}{dr}(Q_n^m-Q_{n-2}^m)\right]-\frac{|m|(|m|+\beta-1)}{r^2}(Q_n^m-Q_{n-2}^m)\\
&+n(n+2\alpha+\beta-1)Q_n^m-(n-2)(n+2\alpha+\beta-3)Q_{n-2}^m=0.
\end{aligned}
$$

第 1 項に (11) を適用すると

$$
\begin{aligned}
&\frac{(1-r^2)^{1-\alpha}}{r^\beta}\frac{d}{dr}\left[(1-r^2)^\alpha r^{\beta-1}(nQ_n^m+(n+\gamma-3)Q_{n-2}^m)\right]-\frac{|m|(|m|+\beta-1)}{r^2}(Q_n^m-Q_{n-2}^m)\\
&+n(n+2\alpha+\beta-1)Q_n^m-(n-2)(n+2\alpha+\beta-3)Q_{n-2}^m=0,\\
&\frac{(1-r^2)}{r}n\frac{dQ_n^m}{dr}+\frac{(1-r^2)}{r}(n+\gamma-3)\frac{dQ_{n-2}^m}{dr}\\
&+\frac{(1-r^2)^{1-\alpha}}{r^\beta}[(1-r^2)^{\alpha-1}(-2\alpha r)r^{\beta-1}+(1-r^2)^\alpha(\beta-1)r^{\beta-2}][nQ_n^m+(n+\gamma-3)Q_{n-2}^m]
\end{aligned}
$$

$$
-\frac{|m|(|m|+\beta-1)}{r^2}(Q_n^m - Q_{n-2}^m) + n(n+2\alpha+\beta-1)Q_n^m - (n-2)(n+2\alpha+\beta-3)Q_{n-2}^m = 0,
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{(1-r^2)}{r}n\frac{dQ_n^m}{dr} + \frac{(1-r^2)}{r}(n+\gamma-3)\frac{dQ_{n-2}^m}{dr} \\
&+\left(-2\alpha+(\beta-1)\frac{(1-r^2)}{r^2}\right)[nQ_n^m + (n+\gamma-3)Q_{n-2}^m] \\
&-\frac{|m|(|m|+\beta-1)}{r^2}(Q_n^m - Q_{n-2}^m) + n(n+2\alpha+\beta-1)Q_n^m - (n-2)(n+2\alpha+\beta-3)Q_{n-2}^m = 0,
\end{aligned}
$$

(11) を再度用いて $\dfrac{dQ_{n-2}^m}{dr}$ を消去すると

$$
\begin{aligned}
&\frac{(1-r^2)}{r}n\frac{dQ_n^m}{dr} + \frac{(1-r^2)}{r^2}(n+\gamma-3)\left\{r\frac{dQ_n^m}{dr} - [nQ_n^m + (n+\gamma-3)Q_{n-2}^m]\right\} \\
&+\left(-2\alpha+(\beta-1)\frac{(1-r^2)}{r^2}\right)[nQ_n^m + (n+\gamma-3)Q_{n-2}^m] \\
&-\frac{|m|(|m|+\beta-1)}{r^2}(Q_n^m - Q_{n-2}^m) + n(n+2\alpha+\beta-1)Q_n^m - (n-2)(n+2\alpha+\beta-3)Q_{n-2}^m = 0,
\end{aligned}
$$

$\dfrac{dQ_n^m}{dr}$ の項の係数は

$$
\frac{(1-r^2)}{r}n + \frac{(1-r^2)}{r^2}(n+\gamma-3)r = \frac{(1-r^2)}{r}(2n+\gamma-3).
$$

Q_n^m の項の係数は

$$
\begin{aligned}
&-\frac{(1-r^2)}{r^2}(n+\gamma-3)n + \left(-2\alpha+(\beta-1)\frac{(1-r^2)}{r^2}\right)n - \frac{|m|(|m|+\beta-1)}{r^2} + n(n+2\alpha+\beta-1) \\
=\ & n\left[-\frac{(1-r^2)}{r^2}(n+\gamma-3) + \left(-2\alpha+(\beta-1)\frac{(1-r^2)}{r^2}\right) + (n+2\alpha+\beta-1)\right] - \frac{|m|(|m|+\beta-1)}{r^2} \\
=\ & n\left[-\frac{(1-r^2)}{r^2}(n+\gamma-\beta-2) + (n+\beta-1)\right] - \frac{|m|(|m|+\beta-1)}{r^2} \\
=\ & n\left[-\frac{(n+\gamma-\beta-2)}{r^2} + (n+\gamma-\beta-2+n+\beta-1)\right] - \frac{|m|(|m|+\beta-1)}{r^2} \\
=\ & n\left[-\frac{(n+\gamma-\beta-2)}{r^2} + (2n+\gamma-3)\right] - \frac{|m|(|m|+\beta-1)}{r^2} \\
=\ & n(2n+\gamma-3) - \frac{|m|(|m|+\beta-1) + n(n+\gamma-\beta-2)}{r^2}.
\end{aligned}
$$

Q_{n-2}^m の項の係数は

$$
\begin{aligned}
&-\frac{(1-r^2)}{r^2}(n+\gamma-3)(n+\gamma-3)\left(-2\alpha+(\beta-1)\frac{(1-r^2)}{r^2}\right)(n+\gamma-3) \\
&+\frac{|m|(|m|+\beta-1)}{r^2} - (n-2)(n+2\alpha+\beta-3) \\
=\ & (n+\gamma-3)^2[-2\alpha-(\beta-1)](n+\gamma-3) - (n-2)(n+\gamma-3)
\end{aligned}
$$

(11) を再度用いて微分項を消去すると[10],

$$
\begin{aligned}
& -(n-|m|+2)(n+|m|+\beta+1)(2n+\gamma-3)Q^m_{n+2}(r) \\
& +(2n+\gamma-1)\{(2n+\gamma-3)(2n+\gamma+1)r^2-2n(n+\gamma-1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& +\frac{-(n+\gamma-3)^2+(\beta-1)(n+\gamma-3)+|m|(|m|+\beta-1)}{r^2} \\
= \quad & (n+\gamma-3)[(n+\gamma-3)-2\alpha-\beta+1-(n-2)] \\
& +\frac{-(n+\gamma-3)^2+(\beta-1)(n+\gamma-3)+|m|^2+|m|(\beta-1)}{r^2} \\
= \quad & \frac{-(n+\gamma-|m|-3)(n+\gamma+|m|-3)+(\beta-1)(n+\gamma+|m|-3)}{r^2} \\
= \quad & -\frac{(n+\gamma+|m|-3)(n+\gamma-|m|-\beta-2)}{r^2}.
\end{aligned}
$$

まとめると

$$
\begin{aligned}
& \frac{(1-r^2)}{r}(2n+\gamma-3)\frac{dQ^m_n}{dr}+\left[n(2n+\gamma-3)-\frac{|m|(|m|+\beta-1)+n(n+\gamma-\beta-2)}{r^2}\right]Q^m_n \\
& -\frac{(n+\gamma-|m|-3)(n+\gamma+|m|-\beta-2)}{r^2}Q^m_{n-2}=0, \\
& (1-r^2)r\frac{dQ^m_n}{dr}=\left[-nr^2+\frac{|m|(|m|+\beta-1)+n(n+\gamma-\beta-2)}{2n+\gamma-3}\right]Q^m_n \\
& +\frac{(n+\gamma+|m|-3)(n+\gamma-|m|-\beta-2)}{2n+\gamma-3}Q^m_{n-2},
\end{aligned}
$$

[10](12) を $n\to n+2$ とした式

$$
\begin{aligned}
(1-r^2)r\frac{d}{dr}Q^m_{n+2}(r) \quad = \quad & \left(-(n+2)r^2+\frac{|m|(|m|+\beta-1)+(n+2)(n+\gamma-\beta)}{2n+\gamma+1}\right)Q^m_{n+2} \\
& +\frac{(n-|m|+\gamma-\beta)(n+|m|+\gamma-1)}{2n+\gamma+1}Q^m_n.
\end{aligned}
$$

と (12) を引き算して

$$
\begin{aligned}
(1-r^2)r\frac{d}{dr}(Q^m_{n+2}-Q^m_n) \quad = \quad & \left(-(n+2)r^2+\frac{|m|(|m|+\beta-1)+(n+2)(n+\gamma-\beta)}{2n+\gamma+1}\right)Q^m_{n+2}(r) \\
& +\frac{(n-|m|+\gamma-\beta)(n+|m|+\gamma-1)}{2n+\gamma+1}Q^m_n \\
& -\left(-nr^2+\frac{|m|(|m|+\beta-1)+n(n+\gamma-\beta-2)}{2n+\gamma-3}\right)Q^m_n(r) \\
& -\frac{(n-|m|+\gamma-\beta-2)(n+|m|+\gamma-3)}{2n+\gamma-3}Q^m_{n-2}.
\end{aligned}
$$

左辺に (11) を適用すると

$$
\begin{aligned}
& (1-r^2)[(n+2)Q^m_{n+2}+(n+\gamma-1)Q^m_n] \\
& =\left(-(n+2)r^2+\frac{|m|(|m|+\beta-1)+(n+2)(n+\gamma-\beta)}{2n+\gamma+1}\right)Q^m_{n+2}+\frac{(n-|m|+\gamma-\beta)(n+|m|+\gamma-1)}{2n+\gamma+1}Q^m_n \\
& -\left(-nr^2+\frac{|m|(|m|+\beta-1)+n(n+\gamma-\beta-2)}{2n+\gamma-3}\right)Q^m_n(r)-\frac{(n-|m|+\gamma-\beta-2)(n+|m|+\gamma-3)}{2n+\gamma-3}Q^m_{n-2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-2|m|(|m|+\beta-1)-(\gamma-3)(\beta+1)\}Q_n^m(r)\\
&-(n-|m|+\gamma-\beta-2)(n+|m|+\gamma-3)(2n+\gamma+1)Q_{n-2}^m(r)=0 \quad (13)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(-(1-r^2)(n+2)-(n+2)r^2+\frac{|m|(|m|+\beta-1)+(n+2)(n+\gamma-\beta)}{2n+\gamma+1}\right)Q_{n+2}^m\\
&+\left[-(n+\gamma-1)(1-r^2)+\frac{(n-|m|+\gamma-\beta)(n+|m|+\gamma-1)}{2n+\gamma+1}+nr^2\right.\\
&\left.-\frac{|m|(|m|+\beta-1)+n(n+\gamma-\beta-2)}{2n+\gamma-3}\right]Q_n^m-\frac{(n-|m|+\gamma-\beta-2)(n+|m|+\gamma-3)}{2n+\gamma-3}Q_{n-2}^m.
\end{aligned}
$$

Q_{n+2}^m の係数は

$$
\begin{aligned}
&-(1-r^2)(n+2)-(n+2)r^2+\frac{|m|(|m|+\beta-1)+(n+2)(n+\gamma-\beta)}{2n+\gamma+1}\\
=\;&-(n+2)+\frac{|m|(|m|+\beta-1)+(n+2)(n+\gamma-\beta)}{2n+\gamma+1}\\
=\;&\frac{-(n+2)(2n+\gamma+1)+|m|(|m|+\beta-1)+(n+2)(n+\gamma-\beta)}{2n+\gamma+1}\\
=\;&\frac{-(n+2)(n+\beta+1)+|m|(|m|+\beta-1)}{2n+\gamma+1}=\frac{-(n+2)^2-(n+2)(\beta-1)+|m|^2+|m|(\beta-1)}{2n+\gamma+1}\\
=\;&\frac{-(n+|m|+2)(n-|m|+2)-(n-|m|+2)(\beta-1)}{2n+\gamma+1}=\frac{-(n+|m|+\beta+1)(n-|m|+2)}{2n+\gamma+1}
\end{aligned}
$$

Q_n^m の係数は

$$
\begin{aligned}
&-(n+\gamma-1)(1-r^2)+\frac{(n-|m|+\gamma-\beta)(n+|m|+\gamma-1)}{2n+\gamma+1}+nr^2-\frac{|m|(|m|+\beta-1)+n(n+\gamma-\beta-2)}{2n+\gamma-3}\\
=\;&(2n+\gamma-1)r^2-(n+\gamma-1)+\frac{(n-|m|+\gamma-\beta)(n+|m|+\gamma-1)}{2n+\gamma+1}-\frac{|m|(|m|+\beta-1)+n(n+\gamma-\beta-2)}{2n+\gamma-3}
\end{aligned}
$$

r^2 の項以外の項を通分した分子は

$$
\begin{aligned}
&-(n+\gamma-1)(2n+\gamma+1)(2n+\gamma-3)+(n-|m|+\gamma-\beta)(n+|m|+\gamma-1)(2n+\gamma-3)\\
&-|m|(|m|+\beta-1)(2n+\gamma+1)-n(n+\gamma-\beta-2)(2n+\gamma+1)\\
=\;&-(n+\gamma-1)(2n+\gamma+1)(2n+\gamma-3)+\{(n+\gamma-\beta)(n+\gamma-1)-(\beta-1)|m|-|m|^2\}(2n+\gamma-3)\\
&-|m|(|m|+\beta-1)(2n+\gamma+1)-n(n+\gamma-\beta-2)(2n+\gamma+1)\\
=\;&-(n+\gamma-1)(2n+\gamma+1)(2n+\gamma-3)+\{(n+\gamma-\beta)(n+\gamma-1)-|m|(|m|+\beta-1)\}(2n+\gamma-3)\\
&-|m|(|m|+\beta-1)(2n+\gamma+1)-n(n+\gamma-\beta-2)(2n+\gamma+1)\\
=\;&-(n+\gamma-1)(2n+\gamma+1)(2n+\gamma-3)+(n+\gamma-\beta)(n+\gamma-1)(2n+\gamma-3)\\
&-2|m|(|m|+\beta-1)(2n+\gamma-1)-n(n+\gamma-\beta-2)(2n+\gamma+1)\\
=\;&-(n+\gamma-1)(2n+\gamma+1)(2n+\gamma-3)+(n+\gamma)(n+\gamma-1)(2n+\gamma-3)-\beta(n+\gamma-1)(2n+\gamma-3)\\
&-2|m|(|m|+\beta-1)(2n+\gamma-1)-n(n+\gamma-2)(2n+\gamma+1)+\beta n(2n+\gamma+1)\\
=\;&-(n+\gamma-1)(2n+\gamma+1)(2n+\gamma-3)+(n+\gamma)(n+\gamma-1)(2n+\gamma-3)\\
&-2|m|(|m|+\beta-1)(2n+\gamma-1)-n(n+\gamma-2)(2n+\gamma+1)+\beta[n(2n+\gamma+1)-(n+\gamma-1)(2n+\gamma-3)]\\
=\;&-(n+\gamma-1)(2n+\gamma+1)(2n+\gamma-3)+(n+\gamma)(n+\gamma-1)(2n+\gamma-3)\\
&-2|m|(|m|+\beta-1)(2n+\gamma-1)-n(n+\gamma-2)(2n+\gamma+1)-\beta(\gamma-3)(2n+\gamma-1)\\
=\;&-(n+\gamma-1)(2n+\gamma-3)(n+1)-n(n+\gamma-2)(2n+\gamma+1)
\end{aligned}
$$

式 (3) において $n=|m|, |m|+2$ と置くと[11]

$$Q_{|m|}^{|m|} = r^{|m|}, \tag{14}$$

$$Q_{|m|+2}^{|m|} = \frac{2|m|+\gamma-1}{2}\left(\frac{2|m|+\gamma+1}{2|m|+\beta+1}r^2-1\right)r^{|m|} \tag{15}$$

これらの値からスタートして高次の $Q_n^m(r)$ の値を漸化式 (13) によって求めること

$$\begin{aligned}
& -2|m|(|m|+\beta-1)(2n+\gamma-1)-\beta(\gamma-3)(2n+\gamma-1)\\
=\ & -(2n+1)\gamma^2-(6n^2-2n-4)\gamma-(4n^3-6n^2-4n-3)\\
& -2|m|(|m|+\beta-1)(2n+\gamma-1)-\beta(\gamma-3)(2n+\gamma-1)\\
=\ & -(2n+\gamma-1)[(2n+1)\gamma+(2n^3-2n-3)]\\
& -2|m|(|m|+\beta-1)(2n+\gamma-1)-\beta(\gamma-3)(2n+\gamma-1)\\
=\ & -(2n+\gamma-1)[2n(n+\gamma+1)+(\gamma-3)]-2|m|(|m|+\beta-1)(2n+\gamma-1)-\beta(\gamma-3)(2n+\gamma-1)\\
=\ & -(2n+\gamma-1)2n(n+\gamma+1)-2|m|(|m|+\beta-1)(2n+\gamma-1)-(\beta+1)(\gamma-3)(2n+\gamma-1)
\end{aligned}$$

よって, 全ての項をまとめると

$$\begin{aligned}
& \frac{-(n+|m|+\beta+1)(n-|m|+2)}{2n+\gamma+1}Q_{n+2}^m\\
& +(2n+\gamma-1)\left[r^2-\frac{2n(n+\gamma+1)+2|m|(|m|+\beta-1)+(\beta+1)(\gamma-3)}{(2n+\gamma+1)(2n+\gamma-3)}\right]Q_n^m\\
& -\frac{(n-|m|+\gamma-\beta-2)(n+|m|+\gamma-3)}{2n+\gamma-3}Q_{n-2}^m,
\end{aligned}$$

分母をはらって

$$\begin{aligned}
& -(n+|m|+\beta+1)(n-|m|+2)(2n+\gamma-3)Q_{n+2}^m\\
& +(2n+\gamma-1)\left[(2n+\gamma+1)(2n+\gamma-3)r^2-2n(n+\gamma+1)-2|m|(|m|+\beta-1)-(\beta+1)(\gamma-3)\right]Q_n^m\\
& -(n-|m|+\gamma-\beta-2)(n+|m|+\gamma-3)(2n+\gamma+1)Q_{n-2}^m.
\end{aligned}$$

[11]

$$\begin{aligned}
Q_{|m|}^{|m|} &= \sum_{p=0}^{0}\frac{(-1)^p\Gamma\left(\frac{2|m|+\gamma-1}{2}+p\right)\Gamma\left(\frac{2|m|+\beta+1}{2}\right)}{p!\,(-p)!\Gamma\left(\frac{2|m|+\beta+1}{2}+p\right)\Gamma\left(\frac{2|m|+\gamma-1}{2}\right)}r^{|m|+2p}\\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{2|m|+\gamma-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2|m|+\beta+1}{2}\right)}{0!\,(0)!\Gamma\left(\frac{2|m|+\beta+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2|m|+\gamma-1}{2}\right)}r^{|m|} = r^{|m|},\\
Q_{|m|+2}^{|m|} &= \sum_{p=0}^{1}\frac{(-1)^{p+1}\Gamma\left(\frac{2|m|+\gamma+1}{2}+p\right)\Gamma\left(\frac{2|m|+\beta+1}{2}\right)}{p!\,(1-p)!\Gamma\left(\frac{2|m|+\beta+1}{2}+p\right)\Gamma\left(\frac{2|m|+\gamma-1}{2}\right)}r^{|m|+2p}\\
&= \frac{(-1)\Gamma\left(\frac{2|m|+\gamma+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2|m|+\beta+1}{2}\right)}{0!\,(1)!\Gamma\left(\frac{2|m|+\beta+1}{2}+p\right)\Gamma\left(\frac{2|m|+\gamma-1}{2}\right)}r^{|m|}
\end{aligned}$$

ができる. 正規化係数 I_n^m の漸化式は (13) に直交関係 (5) を適用することにより得られる[12].

$$I_n^m = \frac{(2n+\gamma-5)(n-|m|+\gamma-\beta-2)(n+|m|+\gamma-3)}{(n-|m|)(n+|m|+\beta-1)(2n+\gamma-1)} I_{n-2}^m, \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
& +\frac{(-1)^2\Gamma\left(\frac{2|m|+\gamma+1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{2|m|+\beta+1}{2}\right)}{1!\,(0)!\Gamma\left(\frac{2|m|+\beta+1}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{2|m|+\gamma-1}{2}\right)} r^{|m|+2} \\
= & -\frac{2|m|+\gamma-1}{2} r^{|m|} + \frac{\frac{2|m|+\gamma+1}{2}\frac{2|m|+\gamma-1}{2}}{\frac{2|m|+\beta+1}{2}} r^{|m|+2} \\
= & \frac{2|m|+\gamma-1}{2}\left(\frac{2|m|+\gamma+1}{2|m|+\beta+1} r^2 - 1\right) r^{|m|}
\end{aligned}$$

[12](13) に $Q_{n+2}w(r)$ をかけて積分すると,

$$\begin{aligned}
& -(n-|m|+2)(n+|m|+\beta+1)(2n+\gamma-3)I_{n+2} \\
& +(2n+\gamma-1)(2n+\gamma-3)(2n+\gamma+1)\int_0^1 r^2 Q_{n+2}^m Q_n^m w(r)dr = 0, \\
& -(n-|m|+2)(n+|m|+\beta+1)I_{n+2} + (2n+\gamma-1)(2n+\gamma+1)\int_0^1 r^2 Q_{n+2}^m Q_n^m w(r)dr = 0,
\end{aligned}$$

$n \to n-2$ と次数を下げると

$$-(n-|m|)(n+|m|+\beta-1)I_n + (2n+\gamma-5)(2n+\gamma-3)\int_0^1 r^2 Q_n^m Q_{n-2}^m w(r)dr$$

再度 (13) に $Q_{n-2}w(r)$ をかけて積分すると,

$$\begin{aligned}
& (2n+\gamma-1)(2n+\gamma-3)(2n+\gamma+1)\int_0^1 r^2 Q_n^m Q_{n-2}^m w(r)dr \\
& -(n-|m|+\gamma-\beta-2)(n+|m|+\gamma-3)(2n+\gamma+1)I_{n-2} = 0 \\
& (2n+\gamma-1)(2n+\gamma-3)\int_0^1 r^2 Q_n^m Q_{n-2}^m w(r)dr - (n-|m|+\gamma-\beta-2)(n+|m|+\gamma-3)I_{n-2} = 0
\end{aligned}$$

先の式とあわせて積分の項を消去できて

$$\begin{aligned}
& -(n-|m|)(n+|m|+\beta-1)(2n+\gamma-1)I_n + (2n+\gamma-5)(n-|m|+\gamma-\beta-2)(n+|m|+\gamma-3)I_{n-2} = 0, \\
& I_n = \frac{(2n+\gamma-5)(n-|m|+\gamma-\beta-2)(n+|m|+\gamma-3)}{(n-|m|)(n+|m|+\beta-1)(2n+\gamma-1)} I_{n-2}
\end{aligned}$$

スタートの値 $I^m_{|m|}$ は (14) を (5) に代入して[13]

$$
I^m_{|m|} = \frac{\Gamma\left(\dfrac{\gamma-\beta}{2}\right)\Gamma\left(|m|+\dfrac{\beta+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(|m|+\dfrac{\gamma+1}{2}\right)}. \tag{17}
$$

次に (7) でのスペクトル係数 f^m_n を評価する．偶数 M に対して $f(r,\phi)$ の部分和近似 $f_M(r,\phi)$,

$$
f_m(r) = \sum_{n=|m|,n+m\ \mathrm{even}}^{\hat{M}} f^m_n \Phi^m_n(r), \qquad f_M(r,\phi) = \sum_{m=-M+1}^{M-1} f_m(r) e^{im\phi} \sim f(r,\phi), \tag{18}
$$

を考える．ここで $\hat{M}$ は m が奇数のとき $\hat{M}=M-1$, 偶数のとき $\hat{M}=M-2$ である．$M=2^p$ を選べば $f_m(r)$ を求めるのに FFT が使える．(18) の逆変換は

$$
f^m_n = \int_0^1 f_m(r)\Phi^m_n(r)w(r)dr. \tag{19}
$$

ここでわれわれは f^m_n を効率的に計算するための (19) に対するガウス積分を導出する．まず関数の積 $f_m(r)\Phi^m_n(r)$ がせいぜい $2M-2$ 次の偶関数であることに注意しよう．(19) のラグランジュ積分公式は (補遺 A 参照),

$$
\int_0^1 f_m(r)\Phi^m_n(r)w(r)dr = \sum_{i=1}^{M/2} f_m(r_i)\Phi^m_n(r_i)w_i + E, \tag{20}
$$

ここで r_i は積分座標の格子点, E は公式の誤差である．ここでは $0 \le r_1 < r_2 < \ldots < r_{M/2} \le 1$ を仮定する．重み w_i は

$$
w_i \equiv \frac{1}{\left.\dfrac{\pi'(r)}{2r}\right|_{r_i}} \int_0^1 \frac{\pi(r)}{r^2-r_i^2} w(r)dr, \tag{21}
$$

---

[13]

$$
\begin{aligned}
I^m_{|m|} &= \int_0^1 r^{2|m|+\beta}(1-r^2)^{\alpha-1}dr = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{|m|+(\beta-1)/2}(1-t)^{\alpha-1}dt \\
&= \frac{1}{2}B\left(\alpha, |m|+\frac{\beta+1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma\left(|m|+\dfrac{\beta+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\alpha+|m|+\dfrac{\beta+1}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\dfrac{\gamma-\beta}{2}\right)\Gamma\left(|m|+\dfrac{\beta+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(|m|+\dfrac{\gamma+1}{2}\right)}
\end{aligned}
$$

ただしガンマ関数, ベータ関数の公式

$$
B(p,q) = \int_0^1 (1-t)^{p-1}t^{q-1}dt, \quad B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},
$$

を用いた

ただし,

$$\pi(r) = \prod_{j=1}^{M/2} (r^2 - r_j^2). \tag{22}$$

公式 (20) は関数の積 $f_m(r)\Phi_n^m(r)$ が $M-2$ 次と同じかそれ以下であるときに正確になる. さて, $f_m(r)\Phi_n^m(r)$ を $\pi(r)$ で割り, $f_m(r)\Phi_n^m(r) = s(r) + \pi(r)q(r)$ と書き直すことができる. ただし $s(r)$ と $q(r)$ はせいぜい $M-2$ 次の偶関数である. これを (20) に代入し, $1 \le i \le M/2$ に対して $s(r_i) = f_m(r_i)\Phi_n^m(r_i)$ であることを用いると[14]

$$E = \int_0^1 \pi(r)q(r)w(r)dr. \tag{23}$$

したがって, もしわれわれが $\pi(r) = Q_M^0(r)$ と選べば, 直交関係から E は 0 となり[15], $f_M(r,\phi)$ が $f(r,\phi)$ と等しいときには係数 f_n^m を (19) と (20) から正確に計算できる. よってガウス積分の格子点は Q_M^0 の正の零点に対応する. Q_M^0 の零点は数値的に計算しなければならない.

ガウス積分の重み係数 w_i は以下のようにして見積もられる. まず (13) を書き直し

[14]実際に代入すると

$$\int_0^1 f_m(r)\Phi_n^m(r)w(r)dr = \int_0^1 s(r)w(r)dr + \int_0^1 \pi(r)q(r)w(r)dr = \sum_{i=1}^{M/2} s(r_i)w_i + E,$$

第 1 項どうしが等しいので E の表式が得られる.

[15]Q_M^0 は M 次の多項式であり M 次より小さい多項式とは直交する. $q(r)$ はせいぜい $M-2$ 次なので誤差の積分は 0 となる.

て[16],

$$\frac{r^2 Q_n^0(r)}{I_n^0} = \frac{C_n}{I_n^0} Q_{n+2}^0(r) + D_n Q_n^0(r) + \frac{C_{n-2}}{I_{n-2}^0} Q_{n-2}^0(r), \tag{24}$$

ただし

$$C_n \equiv \frac{(n+2)(n+\beta+1)}{(2n+\gamma-1)(2n+\gamma+1)}. \tag{25}$$

D_n の詳細は必要ないので定義を述べない. (24) に $Q_n^0(\rho)$ をかけて r と ρ を入れ換えた式を引き算し, $n=0$ から M までの偶数を足しあわせるとクリストッフェ

[16] (13) で $m=0$ とした式は

$$\begin{aligned}
&-(n+2)(n+\beta+1)(2n+\gamma-3)Q_{n+2}^0(r)\\
&+(2n+\gamma-1)\{(2n+\gamma-3)(2n+\gamma+1)r^2 - 2n(n+\gamma-1)-(\gamma-3)(\beta+1)\}Q_n^m(r)\\
&-(n+\gamma-\beta-2)(n+\gamma-3)(2n+\gamma+1)Q_{n-2}^m(r) = 0,\\
&(2n+\gamma-1)(2n+\gamma-3)(2n+\gamma+1)r^2 Q_n^m(r) = (n+2)(n+\beta+1)(2n+\gamma-3)Q_{n+2}^0(r)\\
&+(2n+\gamma-1)[2n(n+\gamma-1)+(\gamma-3)(\beta+1)]Q_n^m(r)\\
&+(n+\gamma-\beta-2)(n+\gamma-3)(2n+\gamma+1)Q_{n-2}^m(r) = 0,\\
&r^2 Q_n^m(r) = \frac{(n+2)(n+\beta+1)}{(2n+\gamma-1)(2n+\gamma+1)} Q_{n+2}^0(r)\\
&+\frac{2n(n+\gamma-1)+(\gamma-3)(\beta+1)}{(2n+\gamma-3)(2n+\gamma+1)} Q_n^m(r) + \frac{(n+\gamma-\beta-2)(n+\gamma-3)}{(2n+\gamma-1)(2n+\gamma-3)} Q_{n-2}^m(r) = 0,
\end{aligned}$$

ここで $C_n \equiv \dfrac{(n+2)(n+\beta+1)}{(2n+\gamma-1)(2n+\gamma+1)}$ を用いると, $C_{n-2} \equiv \dfrac{n(n+\beta-1)}{(2n+\gamma-5)(2n+\gamma-3)}$ であるから,

$$\begin{aligned}
&r^2 Q_n^m(r) = C_n Q_{n+2}^0(r)\\
&+\frac{2n(n+\gamma-1)+(\gamma-3)(\beta+1)}{(2n+\gamma-3)(2n+\gamma+1)} Q_n^m(r) + C_{n-2}\frac{(2n+\gamma-5)(n+\gamma-\beta-2)(n+\gamma-3)}{n(n+\beta-1)(2n+\gamma-1)} Q_{n-2}^m(r) = 0,
\end{aligned}$$

I_n^0 で割ると

$$\frac{r^2 Q_n^m(r)}{I_n^0} = \frac{C_n}{I_n^0} Q_{n+2}^0(r) + D_n Q_n^m(r) + \frac{C_{n-2}}{I_n^0}\frac{(2n+\gamma-5)(n+\gamma-\beta-2)(n+\gamma-3)}{n(n+\beta-1)(2n+\gamma-1)} Q_{n-2}^m(r) = 0.$$

ただし $D_n = \dfrac{2n(n+\gamma-1)+(\gamma-3)(\beta+1)}{I_n^0(2n+\gamma-3)(2n+\gamma+1)}$ である. (16) で $m=0$ とした式から

$$I_n^0 = \frac{(2n+\gamma-5)(n+\gamma-\beta-2)(n+\gamma-3)}{n(n+\beta-1)(2n+\gamma-1)} I_{n-2}^0,$$

したがって,

$$\frac{r^2 Q_n^m(r)}{I_n^0} = \frac{C_n}{I_n^0} Q_{n+2}^0(r) + D_n Q_n^m(r) + \frac{C_{n-2}}{I_{n-2}^0} Q_{n-2}^m(r) = 0.$$

ルーダブルー公式が得られる[17].

$$\sum_{p=0,\mathrm{even}}^{M}\frac{Q_p^0(r)Q_p^0(\rho)}{I_p^0}=\frac{C_M}{I_M^0}\left(\frac{Q_{M+2}^0(r)Q_M^0(\rho)-Q_{M+2}^0(\rho)Q_M^0(r)}{r^2-\rho^2}\right). \qquad (26)$$

ρ を r_i に置き換えて $Q_M^0(r_i)=0$ であることを用い, 両辺に $Q_0^0(r)w(r)$ をかけて

[17] (24) に $Q_n^0(\rho)$ をかけた式は

$$\frac{r^2Q_n^0(r)Q_n^0(\rho)}{I_n^0}=\frac{C_n}{I_n^0}Q_{n+2}^0(r)Q_n^0(\rho)+D_nQ_n^0(r)Q_n^0(\rho)+\frac{C_{n-2}}{I_{n-2}^0}Q_{n-2}^0(r)Q_n^0(\rho),$$

r と ρ を入れ換えた式は

$$\frac{\rho^2Q_n^0(r)Q_n^0(\rho)}{I_n^0}=\frac{C_n}{I_n^0}Q_{n+2}^0(\rho)Q_n^0(r)+D_nQ_n^0(r)Q_n^0(\rho)+\frac{C_{n-2}}{I_{n-2}^0}Q_{n-2}^0(\rho)Q_n^0(r),$$

辺々引き算して

$$\frac{(r^2-\rho^2)Q_n^0(r)Q_n^0(\rho)}{I_n^0}=\frac{C_n}{I_n^0}[Q_{n+2}^0(r)Q_n^0(\rho)Q_{n+2}^0(\rho)Q_n^0(r)]+\frac{C_{n-2}}{I_{n-2}^0}[Q_{n-2}^0(r)Q_n^0(\rho)-Q_{n-2}^0(\rho)Q_n^0(r)]$$
$$=\frac{C_n}{I_n^0}[Q_{n+2}^0(r)Q_n^0(\rho)-Q_{n+2}^0(\rho)Q_n^0(r)]-\frac{C_{n-2}}{I_{n-2}^0}[Q_n^0(r)Q_{n-2}^0(\rho)-Q_n^0(\rho)Q_{n-2}^0(r)]$$

$n=0$ から M までの偶数に関して足しあわせると $Q_{-2}^0=0$ に注意して

$$(r^2-\rho^2)\sum_{p=0,\ \mathrm{even}}^{M}\frac{Q_p^0(r)Q_p^0(\rho)}{I_p^0}=\frac{C_M}{I_M^0}[Q_{M+2}^0(r)Q_M^0(\rho)-Q_{M+2}^0(\rho)Q_M^0(r)].$$

0 から 1 まで積分し, さらに (24) で $r = r_i$ した式を用いると[18]

$$\int_0^1 \frac{Q_M^0}{r^2 - r_i^2} w(r) dr = \frac{I_{M-2}^0}{C_{M-2}^0 Q_{M-2}^0(r_i)}. \tag{27}$$

この式と (21) を $\pi(r) = Q_M^0(r)$ とともに用い, (12) から w_i の式が得られる[19].

$$w_i = \frac{2(2M+\gamma-3)r_i^2(1-r_i^2)}{(M+\gamma-\beta-2)(M+\gamma-3)C_{M-2}[\Phi_M^0(r_i)]^2}. \tag{28}$$

選点法では積分格子点は境界条件を適用するために, 境界上に格子点がある方が良い. その場合ガウス–ラダウ (Gauss-Radau) 積分法を用いることができる. $\pi(r)$ の

[18] ρ を r_i に置き換えて $Q_M^0(r_i) = 0$ であることを用いると

$$\sum_{p=0,\mathrm{even}}^{M} \frac{Q_p^0(r_i)Q_p^0(r)}{I_p^0} = -\frac{C_M}{I_M^0}\frac{Q_{M+2}^0(r_i)Q_M^0(r)}{r^2 - r_i^2}.$$

$Q_0^0(r)w(r)$ をかけて 0 から 1 まで積分すると, $Q_p^0 Q_0^0$ の積分は直交関係から $p = 0$ の項だけ残る. さらに $Q_0^0(r) = 1$ であるから

$$\frac{Q_0^0(r_i)}{I_0^0}\int_0^1 Q_0^0(r)^2 w(r) dr = -\frac{C_M Q_{M+2}^0(r_i)}{I_M^0}$$

$\int_0^1 Q_0^0(r)^2 w(r) dr = I_0^0$ なので左辺は 1 となる. したがって

$$\int_0^1 \frac{Q_M^0(r)}{r^2 - r_i^2} w(r) dr = -\frac{I_M^0}{C_M Q_{M+2}^0(r_i)}.$$

ここで (24) において $n = M, r = r_i$ を適用すると $Q_M^0(r_i) = 0$ なので

$$0 = \frac{C_M}{I_M^0} Q_{M+2}^0(r_i) + \frac{C_{M-2}}{I_{M-2}^0} Q_{M-2}^0(r_i),$$

となる. したがって

$$\int_0^1 \frac{Q_M^0(r)}{r^2 - r_i^2} w(r) dr = \frac{I_{M-2}^0}{C_{M-2} Q_{M-2}^0(r_i)}.$$

[19] (12) において $r = r_i, n = M, m = 0$ とした式は, $Q_M^0(r_i) = 0$ であるから

$$(1 - r_i^2) r_i \frac{d}{dr} Q_M^0(r_i) = \frac{(M+\gamma-\beta-2)(M+\gamma-3)}{2M+\gamma-3} Q_{M-2}^0.$$

したがって

$$\left.\frac{\pi'(r)}{2r}\right|_{r_i} = \frac{(M+\gamma-\beta-2)(M+\gamma-3)}{2(2M+\gamma-3)r_i^2(1-r_i^2)} Q_{M-2}^0,$$

これと (27) を (21) に代入すると

$$w_i = \frac{2(2M+\gamma-3)r_i^2(1-r_i^2)}{(M+\gamma-\beta-2)(M+\gamma-3)Q_{M-2}^0}\frac{I_{M-2}^0}{C_{M-2}Q_{M-2}^0(r_i)} = \frac{2(2M+\gamma-3)r_i^2(1-r_i^2)}{(M+\gamma-\beta-2)(M+\gamma-3)C_M[\Phi_{M-2}^0]^2}$$

適切な選び方は

$$\pi(r) = Q^0_M(r) - \frac{(M+\gamma-\beta-2)(M+\gamma-3)}{M(M+\beta-1)} Q^0_{M-2}(r). \tag{29}$$

ただし $\pi(r)$ は $\pi(1)=0$ となるようにとってある[20]. $1 \le i \le M/2-1$ の重み係数は次のように与えられる.

$$w_i = \frac{2(2M+\gamma-5)r_i^2}{(M+\gamma-\beta-2)(M+\gamma-3)[\Phi^0_{M-2}(r_i)]^2} \tag{30}$$

[20] (12) において $n=M, m=0, r=1$ と選ぶと

$$\begin{aligned}
0 &= \left(-M + \frac{M(M+\gamma-\beta-2)}{2M+\gamma-3}\right) Q^m_M(1) + \frac{(M+\gamma-\beta-2)(M+\gamma-3)}{2M+\gamma-3} Q^m_{n-2}, \\
0 &= M[-(2M+\gamma-3)+(M+\gamma-\beta-2)]Q^m_M(1) + (M+\gamma-\beta-2)(M+\gamma-3)Q^m_{n-2}, \\
0 &= M[-(M+\beta-1)]Q^m_M(1) + (M+\gamma-\beta-2)(M+\gamma-3)Q^m_{n-2}, \\
Q^m_M(1) &= \frac{(M+\gamma-\beta-2)(M+\gamma-3)}{M(M+\beta-1)} Q^m_{n-2}.
\end{aligned}$$

よって (29) は $r=1$ で 0 となる.

(28) を求めたのと同じように (26) と $\pi(r_i) = 0$ を用いて求めることができる[21]

[21](26) を $M-2$ まで適用して

$$\sum_{p=0,\mathrm{even}}^{M-2} \frac{Q_p^0(r)Q_p^0(\rho)}{I_p^0} = \frac{C_{M-2}}{I_{M-2}^0}\left(\frac{Q_M^0(r)Q_{M-2}^0(\rho) - Q_M^0(\rho)Q_{M-2}^0(r)}{r^2-\rho^2}\right).$$

$\pi(r) = Q_M^0(r) - E_M Q_{M-2}^0(r)$ と書き表すことにすると $\pi(r_i) = 0$ より $Q_M^0(r_i) = E_M Q_{M-2}^0(r_i)$. $\rho = r_i$ ととることにより

$$\begin{aligned}
\sum_{p=0,\mathrm{even}}^{M-2} \frac{Q_p^0(r)Q_p^0(r_i)}{I_p^0} &= \frac{C_{M-2}}{I_{M-2}^0}\left(\frac{Q_M^0(r)Q_{M-2}^0(r_i) - Q_M^0(r_i)Q_{M-2}^0(r)}{r^2-r_i^2}\right) \\
&= \frac{C_{M-2}}{I_{M-2}^0}\left(\frac{Q_M^0(r)Q_{M-2}^0(r_i) - E_M Q_{M-2}^0(r_i)Q_{M-2}^0(r)}{r^2-r_i^2}\right) \\
&= \frac{C_{M-2}}{I_{M-2}^0} I_M^0 \left(\frac{Q_M^0(r) - E_M Q_{M-2}^0(r)}{r^2-r_i^2}\right) = \frac{C_{M-2}Q_{M-2}^0(r_i)}{I_{M-2}^0}\frac{\pi(r)}{r^2-r_i^2}.
\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_0^1 drQ_0^0(r)w(r)$ を作用させると (28) を求めたのと同じように左辺が 1 となる. したがって,

$$1 = \frac{C_{M-2}Q_{M-2}^0(r_i)}{I_{M-2}^0}\int_0^1 \frac{\pi(r)}{r^2-r_i^2}dr, \qquad \int_0^1 \frac{\pi(r)}{r^2-r_i^2}dr = \frac{I_{M-2}^0}{C_{M-2}Q_{M-2}^0(r_i)}.$$

一方 $\left.\dfrac{\pi'(r)}{2r}\right|_{r_i}$ の方は

$$\pi'(r) = Q'_M(r_i) - E_M Q'_{M-2}(r_i)$$

(11) を用いると $r_i {Q'}_M^0(r_i) - r_i {Q'}_{M-2}(r) = MQ_M^0(r_i) + (M+\gamma-3)Q_{M-2}^0(r_i)$ であるから,

$$\begin{aligned}
\pi'(r) &= {Q'}_M^0(r_i) - E_M\left[{Q'}_M^0(r_i) - \frac{M}{r_i}Q_M^0(r_i) - \frac{M+\gamma-3)}{r_i}Q_{M-2}^0(r_i)\right] \\
&= (1-E_M){Q'}_M^0(r_i) + \frac{E_M}{r_i}\left[ME_M - (M+\gamma-3)\right]Q_{M-2}^0(r_i) \\
&= (1-E_M){Q'}_M^0(r_i) + \frac{E_M}{r_i}\left[\frac{(M+\gamma-\beta-2)(M+\gamma-3)}{M+\beta-1} - (M+\gamma-3)\right]Q_{M-2}^0(r_i) \\
&= (1-E_M){Q'}_M^0(r_i) + \frac{E_M(M+\gamma-3)}{r_i}\left[\frac{(M+\gamma-\beta-2)}{M+\beta-1} - 1\right]Q_{M-2}^0(r_i) \\
&= (1-E_M){Q'}_M^0(r_i) + \frac{E_M(M+\gamma-3)(2M+\gamma-3)}{r_i(M+\beta-1)}Q_{M-2}^0(r_i).
\end{aligned}$$

ここで (12) から $r_i \neq 1$ について

$$\begin{aligned}
&(1-r_i^2)r_i{Q'}_M^0(r) \\
&= \left(-Mr_i^2 + \frac{M(M+\gamma-\beta-2)}{2M+\gamma-3}\right)Q_M^0(r) + \frac{(M+\gamma-\beta-2)(M+\gamma-3)}{2M+\gamma-3}Q_{M-2}^0 \\
&= \left(-Mr_i^2 + \frac{M(M+\gamma-\beta-2)}{2M+\gamma-3}\right)E_M Q_{M-2}^0(r) + \frac{(M+\gamma-\beta-2)(M+\gamma-3)}{2M+\gamma-3}Q_{M-2}^0
\end{aligned}$$

$r_{M/2}=1$ に対応する重み係数 $w_{M/2}$ は関係式

$$w_{M/2}=I_0^0-\sum_{i=1}^{M/2-1}w_i, \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
&= -r_i^2 ME_M Q_{M-2}^0(r)+\left[\frac{M(M+\gamma-\beta-2)}{2M+\gamma-3}E_M+\frac{(M+\gamma-\beta-2)(M+\gamma-3)}{2M+\gamma-3}\right]Q_{M-2}^0 \\
&= -r_i^2 ME_M Q_{M-2}^0(r)+\frac{M+\gamma-\beta-2}{2M+\gamma-3}\left[ME_M+M+\gamma-3\right]Q_{M-2}^0 \\
&= -r_i^2 ME_M Q_{M-2}^0(r)+\frac{M+\gamma-\beta-2}{2M+\gamma-3}\left[M\frac{(M+\gamma-\beta-2)(M+\gamma-3)}{M(M+\beta-1)}+M+\gamma-3\right]Q_{M-2}^0 \\
&= -r_i^2 ME_M Q_{M-2}^0(r)+\frac{(M+\gamma-\beta-2)(M+\gamma-3)}{2M+\gamma-3}\left[\frac{(M+\gamma-\beta-2)}{M+\beta-1}+1\right]Q_{M-2}^0 \\
&= -r_i^2 ME_M Q_{M-2}^0(r)+\frac{(M+\gamma-\beta-2)(M+\gamma-3)(2M+\gamma-3)}{(2M+\gamma-3)(M+\beta-1)}Q_{M-2}^0 \\
&= -r_i^2 ME_M Q_{M-2}^0(r)+\frac{(M+\gamma-\beta-2)(M+\gamma-3)}{M+\beta-1}Q_{M-2}^0 \\
= \quad & -r_i^2 ME_M Q_{M-2}^0(r)+ME_M Q_{M-2}^0=(1-r_i^2)ME_M Q_{M-2}^0(r), \\
& {Q'}_M^0(r)=\frac{ME_M}{r_i}Q_{M-2}^0(r).
\end{aligned}$$

が成り立つので,

$$\begin{aligned}
\pi'(r) &= (1-E_M)\frac{ME_M}{r_i}Q_{M-2}^0(r)+\frac{E_M(M+\gamma-3)(2M+\gamma-3)}{r_i(M+\beta-1)}Q_{M-2}^0(r_i) \\
&= \frac{E_M}{r_i}Q_{M-2}^0(r)\left[(1-E_M)M+\frac{(M+\gamma-3)(2M+\gamma-3)}{M+\beta-1}\right] \\
&= \frac{E_M}{r_i}Q_{M-2}^0(r)\left[M-\frac{(M+\gamma-\beta-2)(M+\gamma-3)}{M+\beta-1}+\frac{(M+\gamma-3)(2M+\gamma-3)}{M+\beta-1}\right] \\
&= \frac{E_M}{r_i}Q_{M-2}^0(r)\left[M+\frac{M+\gamma-3}{M+\beta-1}[-(M+\gamma-\beta-2)+(2M+\gamma-3)]\right] \\
&= \frac{E_M}{r_i}Q_{M-2}^0(r)\left[M+\frac{(M+\gamma-3)(M+\beta-1)}{M+\beta-1}\right] \\
&= \frac{E_M(2M+\gamma-3)}{r_i}Q_{M-2}^0(r).
\end{aligned}$$

よってガウスの重み係数は (21) より

$$\begin{aligned}
w_i &\equiv \frac{1}{\left.\frac{\pi'(r)}{2r}\right|_{r_i}}\int_0^1\frac{\pi(r)}{r^2-r_i^2}w(r)dr=\frac{2r_i^2}{E_M(2M+\gamma-3)Q_{M-2}^0(r)}\frac{I_{M-2}^0}{C_{M-2}Q_{M-2}^0(r_i)} \\
&= \frac{2r_i^2}{E_M C_{M-2}(2M+\gamma-3)}\frac{I_{M-2}^0}{[Q_{M-2}^0(r_i)]^2} \\
&= \frac{2r_i^2}{2M+\gamma-3}\frac{M(M+\beta-1)}{(M+\gamma-\beta-2)(M+\gamma-3)}\frac{(2M+\gamma-5)(2M+\gamma-3)}{M(M+\beta-1)}\frac{1}{[\Phi_{M-2}^0(r_i)]^2} \\
&= \frac{2r_i^2(2M+\gamma-5)}{(M+\gamma-\beta-2)(M+\gamma-3)}\frac{1}{[\Phi_{M-2}^0(r_i)]^2}.
\end{aligned}$$

から計算される[22].

$f_m(r)\Phi_n^m(r)$ の次数が $\pi(r)q(r)$ と同じであるので (29) の形からガウス–ラダウ積分は $f_m(r)\Phi_n^m(r)$ の次数が $2M-4$ 以下であるときに正確となる. $2M-2$ の程度の精度をのぞむためには格子点の数を 1 つ増やせばよい. すると積分の精度は $2M$ となる.

2 つの関数の積はガウス積分の $M/2$ 個の格子点あるいはガウス–ラダウ積分の $M/2+1$ 個の格子点を選点に選ぶことで効率的に計算できる. 非エイリアシング化は 3/2 則を用いて実現できる.

数値積分を実行するためにはそれぞれの選点における $Q_n^m(r)$ の値を保管しておく必要がある. このことは $O(M^3)$ のメモリーを必要とし典型的な 2 次元計算ではこれが最大の必要メモリーとなる. しかしながら同じ状況が球面調和函数のルジャンドル陪函数を用いるときに生じる. (18), (20) の変換は本質的に行列の演算であり FFT ほど効率的でない. しかしながら, 行列が十分に大きければ我々の基底関数に対して高速変換を適用できる. 擬スペクトル法に関しては複極展開の適用がもう一つの選択肢である.

3 作用素

微分やその他の演算を楽な方法で計算するためには漸化関係式が望ましい. ここでは基本的な演算である r^2, $r(d/dr)$ とその逆演算の漸化関係式を示す.(そしてヘルムホルツ演算子とその逆演算の手順を示す.) さて

$$g_m(r) = \sum_{n=|m|,n+meven}^{\infty} a_n^m Q_n^m(r), \tag{32}$$

と, ある線形作用素 L があって,

$$Lg_m(r) = \sum_{n=|m|,n+meven}^{\infty} b_n^m Q_n^m(r). \tag{33}$$

ここで後に便利になるように, $n > \hat{M}$ に対して $a_n^m \equiv 0$ を仮定する. ただし $\hat{M}$ は (18) で定義したものと同様である.

[22](20) において, $n=m=0$, $f_m(r)=Q_0^0(r)=1$ と選ぶと

$$\int_0^1 Q_0^0\Phi_0^0(r)w(r)dr = \sum_{i=1}^{M/2} Q_0^0(r_i)\Phi_0^0(r_i)w_i, \qquad \sqrt{I_0^0} = \sum_{i=1}^{M/2}\frac{w_i}{\sqrt{I_0^0}}, \qquad I_0^0 = \sum_{i=1}^{M/2} w_i.$$

$L = r(d/dr)$ を考える. (32) をに代入し, (11) を繰りかえし用いると[23]

$$b_n^m = na_n^m + (2n+\gamma-1)\sum_{p=n+2,p+n=even}^{\infty} a_p^m. \tag{34}$$

b_{n+2}^m を得るために添え字 n をシフトし, 和の項を取り除くと $L = r(d/dr)$ についての漸化式が得られる[24].

$$b_n^m = \frac{2n+\gamma-1}{2n+\gamma+3} b_{n+2}^m + \frac{(2n+\gamma-1)(n+\gamma+1)}{2n+\gamma+3} a_{n+2}^m + na_n^m. \tag{35}$$

---

[23](11) より

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=|m|,n+meven}^{\infty} b_n^m Q_n^m = r\frac{dg}{dr} = \sum_{n=|m|,n+meven}^{\infty} a_n^m r \frac{dQ_n^m}{dr} \\
&= \sum_{n=|m|,n+meven}^{\infty} a_n^m \left(r\frac{dQ_{n-2}^m}{dr} + nQ_n^m + (n+\gamma-3)Q_{n-2}^m \right) \\
&= \sum_{n=|m|,n+meven}^{\infty} a_n^m [nQ_n^m + (n+\gamma-3)Q_{n-2}^m] \\
&+ \sum_{n=|m|,n+meven}^{\infty} a_n^m \left(r\frac{dQ_{n-4}^m}{dr} + (n-2)Q_{n-2}^m + (n+\gamma-5)Q_{n-4}^m \right) \\
&= \sum_{n=|m|,n+meven}^{\infty} a_n^m [nQ_n^m + (n+\gamma-3)Q_{n-2}^m] \\
&+ \sum_{n=|m|,n+meven}^{\infty} a_n^m [(n-2)Q_{n-2}^m + (n+\gamma-5)Q_{n-4}^m \\
&+ \sum_{n=|m|,n+meven}^{\infty} a_n^m \left(r\frac{dQ_{n-6}^m}{dr} + (n-4)Q_{n-4}^m + (n+\gamma-7)Q_{n-6}^m \right) \\
&+ \dots \\
&= \sum_{n=|m|,n+meven}^{\infty} a_n^m [nQ_n^m + (2n+\gamma-5)Q_{n-2}^m + (2n+\gamma-9)Q_{n-4}^m + (2n+\gamma-13)Q_{n-6}^m + \dots] \\
&= \sum_{n=|m|,n+meven}^{\infty} a_n^m nQ_n^m + \sum_{n=|m|-2,n+meven}^{\infty} (2n+\gamma-1)a_{n+2}^m Q_n^m \\
&+ \sum_{n=|m|-4,n+meven}^{\infty} (2n+\gamma-1)a_{n+4} Q_n^m + \sum_{n=|m|-6,n+meven}^{\infty} (2n+\gamma-1)a_{n+6} Q_n^m + \dots
\end{aligned}$$

両辺に $Q_{n'}^m w(r)$ をかけて積分することにより

$$b_{n'}^m = na_{n'}^m + (2n'+\gamma-1)\sum_{p=n'+2,even}^{\infty} a_p.$$

[24]

$$b_n^m = na_n^m + (2n+\gamma-1)\sum_{p=n+2,p+n=even}^{\infty} a_p^m.$$

$b^m_{\hat{M}+2} \equiv 0$ を初期値として逆方向に数値的に安定に計算して b^m_n について解くことができる. $r(d/dr)$ の逆演算のための漸化式は, (35) を a^m_n について逆に解くことにより得られる. この漸化式は定めることのできない a^0_0 を除いて, $a^m_{\hat{M}+2} \equiv 0$ を初期値として安定に計算できる. a^0_0 の項は $r(d/dr)^{-1}$ の積分定数として供される.

もしも $L = r^2$ ならば, (3) とともに (13) と (32) を用いて, $n \geq |m|$ に対して[25],

$$b^m_n = \frac{(n-|m|)(n+|m|+\beta-1)}{(2n+\gamma-5)(2n+\gamma-3)} a^m_{n-2}$$

の n を $n+2$ に置き換えた式は

$$b^m_{n+2} = (n+2)a^m_{n+2} + (2n+\gamma+3) \sum_{p=n+4,p+n=even}^{\infty} a^m_p.$$

上の式に $2n+\gamma+3$, 下の式に $2n+\gamma-1$ をかけて引き算すれば

$$\begin{aligned}
&(2n+\gamma+3)b^m_n - (2n+\gamma-1)b^m_{n+2} \\
&= n(2n+\gamma+3)a^m_n - (2n+\gamma-1)(n+2)a^m_{n+2} + (2n+\gamma-1)(2n+\gamma+3)a^m_{n+2}, \\
&(2n+\gamma+3)b^m_n = (2n+\gamma-1)b^m_{n+2} + n(2n+\gamma+3)a^m_n + (2n+\gamma-1)(n+\gamma+1)a^m_{n+2}, \\
&b^m_n = \frac{2n+\gamma-1}{2n+\gamma+3} b^m_{n+2} + n a^m_n + \frac{(2n+\gamma-1)(n+\gamma+1)}{2n+\gamma+3} a^m_{n+2}.
\end{aligned}$$

[25] $g_m(r) = \sum_{n=|m|,n+meven}^{\infty} a^m_n Q^m_n(r)$ に対して r^2 を作用させると

$$\begin{aligned}
&L g_m(r) = \sum_{n=|m|,n+meven}^{\infty} b^m_n Q^m_n(r) = \sum_{n=|m|,n+meven}^{\infty} a^m_n r^2 Q^m_n(r) \\
&= \sum_{n=|m|,n+meven}^{\infty} a^m_n \left[\frac{(n-|m|+2)(n+|m|+\beta+1)}{(2n+\gamma-1)(2n+\gamma+1)} Q^m_{n+2} \right. \\
&\left. + \frac{2n(n+\gamma-1)+2|m|(|m|+\beta-1)+(\gamma-3)(\beta+1)}{(2n+\gamma-3)(2n+\gamma+1)} Q^m_n + \frac{(n-|m|+\gamma-\beta-2)(n+|m|+\gamma-3)}{(2n+\gamma-1)(2n+\gamma-3)} Q^m_{n-2} \right] \\
&= \sum_{n=|m|,n+meven}^{\infty} \left[\frac{(n-|m|+2)(n+|m|+\beta+1)}{(2n+\gamma-1)(2n+\gamma+1)} a^m_n Q^m_{n+2} \right. \\
&+ \frac{2n(n+\gamma-1)+2|m|(|m|+\beta-1)+(\gamma-3)(\beta+1)}{(2n+\gamma-3)(2n+\gamma+1)} a^m_n Q^m_n \\
&\left. + \frac{(n-|m|+\gamma-\beta-2)(n+|m|+\gamma-3)}{(2n+\gamma-1)(2n+\gamma-3)} a^m_n Q^m_{n-2} \right]
\end{aligned}$$

両辺に $Q^m_{n'} w(r)$ をかけて 0 から 1 まで積分すると, 直交関係から

$$\begin{aligned}
b^m_n = &\frac{(n-|m|)(n+|m|+\beta-1)}{(2n+\gamma-5)(2n+\gamma-3)} a^m_{n-2} \\
&+ \frac{2n(n+\gamma-1)+2|m|(|m|+\beta-1)+(\gamma-3)(\beta+1)}{(2n+\gamma-3)(2n+\gamma+1)} a^m_n \\
&+ \frac{(n-|m|+\gamma-\beta)(n+|m|+\gamma-1)}{(2n+\gamma+3)(2n+\gamma+1)} a^m_{n+2}
\end{aligned}$$

$$
+\frac{2n(n+\gamma-1)+2|m|(|m|+\beta-1)+(\gamma-3)(\beta+1)}{(2n+\gamma+1)(2n+\gamma-3)}a_n^m
+\frac{(n-|m|+\gamma-\beta)(n+|m|+\gamma-1)}{(2n+\gamma+3)(2n+\gamma+1)}a_{n+2}^m, \tag{36}
$$

ただし $a_{|m|-2}^m \equiv 0$ である．もしも $\gamma = 3$ で $n = m = 0$ ならば, 右辺の第 2 項は $(\beta+1)/(\gamma+1)a_n^m$ とする．(36) によって $|m| \le n \le \hat{M}+2$ に対する b_n^m を計算することができる．$1/r^2$ 作用素に対する逆方向の漸化式は (36) を a_{n-2}^m について解くことにより得られる．初期値は $a_{M+2}^m \equiv 0$, $a_{M+4}^m \equiv 0$ である．しかしながらこの漸化式は数値的に不安定である．a_n^m は (36) をピボットなしの 3 重対角行列の LU 分解して解くことにより安定に, かつ安価に求めることができる．ここで大事なことは b_n^m で表わされる関数が $r \to 0$ にて $O(r^{|m|+2p+2})$ で振る舞うことである．ここで p は整数である．でなければ結果の $g_m(r)$ が座標の特異点のまわりで不完全な振る舞いをする．

A　ラグランジュ補間と積分

区間 [0,1] の中の格子点 $[r_1,\ldots,r_n]$ 上での関数 $f(r)$ の値 $f(r_0), f(r_1),\ldots,f(r_n)$ が与えられているときに任意の点 r での $f(r)$ の値を r^{2n-2} までの r^2 の多項式で表し, ガウス積分の評価を行う．

まず, Hilderbrand (1974) にしたがって格子点 $[x_0, x_1,\ldots,x_n]$ 上での関数 $f(x)$ の値 $f(x_0), f(x_1),\ldots,f(x_n)$ が与えられているときに任意の点 x での $f(x)$ の値を x^n までの多項式で補間することを考える (ラグランジュ補間法)．すなわち n 次の多項式 $l_k(x)$ があって

$$
f(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) f(x_k) \tag{37}
$$

多項式 $l_k(x)$ を見出すには, 各格子点での値が正確であることから求められる．すなわち

$$
l_k(x_k) = 1, \quad k = 0,\ldots,n, \qquad l_k(x_l) = 0, \quad l \ne k, k = 0,\ldots,n. \tag{38}
$$

あるいはクロネッカーのデルタ記号を用いて

$$
l_k(x_l) = \delta_{kl}. \tag{39}
$$

$l_k(x)$ がせいぜい x の n 次多項式であることと $k \ne l$ の条件から

$$
l_k(x) = C_k(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n) = C_k\frac{\prod_{l=0}^{n}(x-x_l)}{x-x_k} \tag{40}
$$

と書ける. ただし C_k は定数である. C_k を求めるには $l_k(x_k)=1$ から求められる.

$$
\begin{aligned}
l_k(x_k) &= C_k(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)=1,\\
C_k &= \frac{1}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}.
\end{aligned}
$$

よって

$$
l_k(x) = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}. \tag{41}
$$

ここで

$$
\pi(x) = (x-x_0)\cdots(x-x_k)\cdots(x-x_n) = \prod_{l=0}^{n}(x-x_l)
$$

を用いると

$$
\pi'(x) = \sum_{j=0}^{n}\frac{\pi(x)}{x-x_j}
$$

であるから

$$
\pi'(x_k) = \left.\frac{\pi(x)}{x-x_k}\right|_{x=x_k} = (x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n).
$$

よって

$$
C_k = \frac{1}{\pi'(x_k)}, \tag{42}
$$

と書くことができて, 結局

$$
l_k(x) = \frac{\pi(x)}{(x-x_k)\pi'(x_k)}, \quad \pi(x) = \prod_{l=0}^{n}(x-x_l). \tag{43}
$$

$f(r)$ が r^2 の多項式のときには, $x\to r^2$ に置き換えて

$$
f(r) = \sum_{k=0}^{n} l_k(r)f(r_k), \tag{44}
$$

$$
l_k(r) = \frac{(r^2-r_0^2)\cdots(r^2-r_{k-1}^2)(r^2-r_{k+1}^2)\cdots(r^2-r_n^2)}{(r_k^2-r_0^2)\cdots(r_k^2-r_{k-1}^2)(r_k^2-r_{k+1}^2)\cdots(r_k^2-r_n^2)} \tag{45}
$$

ここで $\pi(r)$ を

$$
\pi(r) = (r^2-r_0^2)\cdots(r^2-r_k^2)\cdots(r^2-r_n^2) = \prod_{k=0}^{n}(r^2-r_k^2) \tag{46}
$$

と定義すると, この場合微分は

$$
\pi'(r) = 2r\sum_{j=0}^{n}\frac{\pi(r)}{r^2-r_j^2}
$$

であるから

$$\left.\frac{\pi'(r)}{2r}\right|_{r_k} = \left.\frac{\pi(r)}{r^2 - r_k^2}\right|_{r=r_k} = (r_k^2 - r_0^2)\cdots(r_k^2 - r_{k-1}^2)(r_k^2 - r_{k+1}^2)\cdots(r_k^2 - r_n^2).$$

したがって

$$l_k(r) = \frac{\pi(r)}{(r^2 - r_k^2)\left.\dfrac{\pi'(r)}{2r}\right|_{r_k}}. \tag{47}$$

文献

Matsushima, T., Marcus, P. S., 1995: A spectral method for polar coordinates. *J. Comp. Phys.* **120**, 365–374

Hilderbrand, F. B., 1974: Introduction to numerical analysis. *McGraw-Hill*, 669pp.

石岡圭一, 2004: スペクトル法による数値計算入門, 東京大学出版会, 230pp.