

SPMODEL サンプルプログラム

## 水路領域

2 次元ビジネス方程式モデル:  
ケルビン・ヘルムホルツ不安定の計算

kh1.f90

小高 正嗣

2004 年 6 月 8 日

## 目 次

1	概要	2
2	支配方程式系	3
2.1	支配方程式系 . . . . .	3
2.2	境界条件 . . . . .	4
3	離散化	5
3.1	空間離散化 . . . . .	5
3.2	空間方向のスペクトル表現 . . . . .	5
3.3	時間積分 . . . . .	7
4	使用モジュールとその他の設定	9
5	数値実験	10
6	参考文献	12
	謝辞	13

## 1 概要

SPMODEL サンプルプログラム『kh1.f90』に用いられている基礎方程式と境界条件, および, このプログラムを用いた数値実験の方法について解説する. 基礎方程式は 2 次元のブシネスク方程式系である. 計算はスペクトル法を用いて行い, 展開関数は水平方向にはフーリエ級数, 鉛直方法には境界条件にあわせてフーリエ正弦級数またはフーリエ余弦級数を用いる. 波数切断は三角切断である. スペクトル変換と逆変換および微分演算には, SPMODEL ライブラリ (spml) の `esc_module` を用いている. 数値実験では水路中心で向きが反転する平行流を与えた場合に生じるケルビン・ヘルムホルツ不安定の計算を行う.

### プログラム名

kh1.f90

### プログラム取得元

<http://www.gfd-dennou.org/arch/spmodel/2d-channel-esc/boussinesq/kh-instability/SIGEN.htm>

### SPMODEL サンプルプログラム目次

<http://www.gfd-dennou.org/arch/spmodel/sample.htm>

### SPMODEL の使い方

<http://www.gfd-dennou.org/arch/spmodel>

## 2 支配方程式系

ここでは支配方程式系と境界条件を記す.

### 2.1 支配方程式系

支配方程式系は 2 次元のブシネスク方程式系である (Chandrasekhar, 1961).

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (U + u)\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial(U + u)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\nabla^{2p}u, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (U + u)\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\rho}{\rho_0}g + \nu\nabla^{2p}v, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (U + u)\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} = \kappa\nabla^{2p}\rho. \quad (4)$$

各記号の定義は表 1 に表す. 基本場の速度  $U$  は  $y$  にのみ依存すると仮定する.

渦度  $\zeta$  と流線関数  $\psi$

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (5)$$

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (6)$$

を導入し, 渦度と密度の予報方程式として支配方程式系を表すと以下のようになる<sup>1</sup>

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + U\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{d^2U}{dy^2}\frac{\partial \psi}{\partial x} + J(\psi, \zeta) + \frac{g}{\rho_0}\frac{\partial \rho}{\partial x} = \nu\nabla^{2p}\zeta + F_\zeta, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + U\frac{\partial \rho}{\partial x} + J(\psi, \rho) = \kappa\nabla^{2p}\rho. \quad (8)$$

ここで  $J(A, B)$  はヤコビアン

$$J(A, B) = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial x}$$

である.

<sup>1</sup>渦度方程式に表れる  $-\frac{dU}{dz}\frac{\partial u}{\partial x}$  項は無視する.

記号	変数/物理定数
$x$	水平座標
$y$	鉛直座標
$t$	時間
$u$	$x$ 方向速度
$U(y)$	$x$ 方向速度 (基本場)
$v$	$y$ 方向速度
$\rho_0$	平均密度
$\rho$	密度
$\psi$	流線関数
$\zeta$	渦度
$g$	重力加速度
$p$	超粘性の次数
$\nu$	動粘性係数
$\kappa$	熱拡散係数

表 1: 変数, 物理定数の定義

## 2.2 境界条件

境界条件は水平に周期境界条件, 鉛直方向には  $y = 0, y_m$  に置いた剛体壁面で  $v = 0$ , 応力なし, 熱フラックスなしとする. 水平方向の境界条件は計算領域をそれぞれ  $x_m$  とすると

$$\zeta(x + x_m, y) = \zeta(x, y) \quad (9)$$

などと表される. 鉛直方向の境界条件は  $y = 0, y_m$  において,

$$\psi = \text{Const.}, \quad (10)$$

$$\zeta = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = 0 \quad (12)$$

である. 境界で与える  $\psi$  の値は簡単のため 0 とした.

### 3 離散化

この節では方程式系の空間離散化および使用した時間積分法について説明し、プログラム内で実際に用いられている方程式を記述する。

#### 3.1 空間離散化

支配方程式 (7), (8) の離散表現は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_{i,j}}{\partial t} + U_{i,j} \frac{\partial \zeta_{i,j}}{\partial x} - \frac{d^2 U_{i,j}}{dz^2} \frac{\partial \psi_{i,j}}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{i,j}}{\partial x} \frac{\partial \zeta_{i,j}}{\partial y} - \frac{\partial \psi_{i,j}}{\partial y} \frac{\partial \zeta_{i,j}}{\partial x} + \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho_{i,j}}{\partial x} \quad (13) \\ = \nu \nabla^{2p} \zeta_{i,j}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \rho_{i,j}}{\partial t} + U_{i,j} \frac{\partial \rho_{i,j}}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{i,j}}{\partial x} \frac{\partial \rho_{i,j}}{\partial y} - \frac{\partial \psi_{i,j}}{\partial y} \frac{\partial \rho_{i,j}}{\partial x} = \kappa \nabla^{2p} \rho_{i,j}. \quad (14)$$

ここで添字  $i, j$  は格子点  $(x_i, y_j)$  上の値であることを表す。

#### 3.2 空間方向のスペクトル表現

空間離散化した支配方程式 (13), (14) をスペクトル法を用いて表現する。スペクトル展開は水平方向にフーリエ級数、鉛直方向には境界条件にあわせてフーリエ正弦級数またはフーリエ余弦級数を用いて行う。非線形項を扱う場合は、先に格子点上での非線形項の値を計算し、その値のスペクトルを求める方法 (変換法) を用いる。浮力項についても同様に扱う。以下では  $k, l$  をそれぞれ  $x, y$  方向波数、 $K, L$  を切断波数、 $I, J$  を格子点数とする。

$\zeta_{i,j}, \psi_{i,j}, \rho_{i,j}$  はスペクトル逆変換によって以下のように展開される。

$$\zeta_{i,j} = \sum_{k=-K}^K \sum_{l=0}^L \exp\left(\frac{2\pi i k x_i}{x_m}\right) \sin\left(\frac{\pi l y_j}{y_m}\right) \hat{\zeta}_{k,l}, \quad (15)$$

$$\psi_{i,j} = \sum_{k=-K}^K \sum_{l=0}^L \exp\left(\frac{2\pi i k x_i}{x_m}\right) \sin\left(\frac{\pi l y_j}{y_m}\right) \hat{\psi}_{k,l}, \quad (16)$$

$$\rho_{i,j} = \sum_{k=-K}^K \sum_{l=0}^L \exp\left(\frac{2\pi i k x_i}{x_m}\right) \cos\left(\frac{\pi l y_j}{y_m}\right) \hat{\rho}_{k,l}. \quad (17)$$

スペクトル係数  $\hat{\zeta}_{i,j}, \hat{\psi}_{i,j}, \hat{\rho}_{i,j}$  はスペクトル変換によって以下のように与えられる.

$$\hat{\zeta}_{k,l} = \frac{1}{I} \frac{1}{J} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \exp\left(-\frac{2\pi i k x_i}{x_m}\right) \sin\left(\frac{\pi l y_j}{y_m}\right) \zeta_{i,j}, \quad (18)$$

$$\hat{\psi}_{k,l} = \frac{1}{I} \frac{1}{J} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \exp\left(-\frac{2\pi i k x_i}{x_m}\right) \sin\left(\frac{\pi l y_j}{y_m}\right) \psi_{i,j}, \quad (19)$$

$$\hat{\rho}_{k,l} = \frac{1}{I} \frac{1}{J} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \exp\left(-\frac{2\pi i k x_i}{x_m}\right) \cos\left(\frac{\pi l y_j}{y_m}\right) \rho_{i,j}. \quad (20)$$

以上を用いると支配方程式 (14), (14) のスペクトル表現は以下ようになる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\zeta}_{k,l}(t)}{\partial t} = & -\frac{1}{I} \frac{1}{J} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \exp\left(-\frac{2\pi i k x_i}{x_m}\right) \sin\left(\frac{\pi l y_j}{y_m}\right) U_{i,j} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)_{i,j} \\ & + \frac{1}{I} \frac{1}{J} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \exp\left(-\frac{2\pi i k x_i}{x_m}\right) \sin\left(\frac{\pi l y_j}{y_m}\right) \left(\frac{d^2 U}{dy^2}\right)_{i,j} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)_{i,j} \\ & - \frac{1}{I} \frac{1}{J} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \exp\left(-\frac{2\pi i k x_i}{x_m}\right) \sin\left(\frac{\pi l y_j}{y_m}\right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{i,j} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)_{i,j} \\ & + \frac{1}{I} \frac{1}{J} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \exp\left(-\frac{2\pi i k x_i}{x_m}\right) \sin\left(\frac{\pi l y_j}{y_m}\right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_{i,j} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)_{i,j} \\ & - \frac{1}{I} \frac{1}{J} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \exp\left(-\frac{2\pi i k x_i}{x_m}\right) \sin\left(\frac{\pi l y_j}{y_m}\right) \frac{g}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_{i,j} \\ & - \nu \left[ \left(\frac{2\pi k}{x_m}\right)^{2p} + \left(\frac{\pi l}{y_m}\right)^{2p} \right] \hat{\zeta}_{k,l}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}_{k,l}(t)}{\partial t} = & -\frac{1}{I} \frac{1}{J} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \exp\left(-\frac{2\pi i k x_i}{x_m}\right) \cos\left(\frac{\pi l y_j}{y_m}\right) U_{i,j} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_{i,j} \\ & - \frac{1}{I} \frac{1}{J} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \exp\left(-\frac{2\pi i k x_i}{x_m}\right) \cos\left(\frac{\pi l y_j}{y_m}\right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{i,j} \left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)_{i,j} \\ & + \frac{1}{I} \frac{1}{J} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \exp\left(-\frac{2\pi i k x_i}{x_m}\right) \cos\left(\frac{\pi l y_j}{y_m}\right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_{i,j} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_{i,j} \\ & - \kappa \left[ \left(\frac{2\pi k}{x_m}\right)^{2p} + \left(\frac{\pi l}{y_m}\right)^{2p} \right] \hat{\rho}_{k,l}. \end{aligned} \quad (22)$$

ここで

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)_{i,j} = \sum_{k=-K}^K \sum_{l=0}^L \exp\left(\frac{2\pi i k}{x_m}\right) \sin\left(\frac{\pi l}{y_m}\right) \frac{2\pi i k}{x_m} \hat{\zeta}_{k,l}, \quad (23)$$

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)_{i,j} = \sum_{k=-K}^K \sum_{l=0}^L \exp\left(\frac{2\pi i k}{x_m}\right) \cos\left(\frac{\pi l}{y_m}\right) \frac{\pi l}{y_m} \hat{\zeta}_{k,l}, \quad (24)$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_{i,j} = \sum_{k=-K}^K \sum_{l=0}^L \exp\left(\frac{2\pi i k}{x_m}\right) \sin\left(\frac{\pi l}{y_m}\right) \frac{2\pi i k}{x_m} \hat{\psi}_{k,l}, \quad (25)$$

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)_{i,j} = \sum_{k=-K}^K \sum_{l=0}^L \exp\left(\frac{2\pi i k}{x_m}\right) \cos\left(\frac{\pi l}{y_m}\right) \frac{\pi l}{y_m} \hat{\psi}_{k,l}, \quad (26)$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_{i,j} = \sum_{k=-K}^K \sum_{l=0}^L \exp\left(\frac{2\pi i k}{x_m}\right) \cos\left(\frac{\pi l}{y_m}\right) \frac{2\pi i k}{x_m} \hat{\rho}_{k,l}, \quad (27)$$

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial y}\right)_{i,j} = - \sum_{k=-K}^K \sum_{l=0}^L \exp\left(\frac{2\pi i k}{x_m}\right) \sin\left(\frac{\pi l}{y_m}\right) \frac{\pi l}{y_m} \hat{\rho}_{k,l} \quad (28)$$

である.

### 3.3 時間積分

ここでは時間積分法について記述し, プログラム内で実際に用いられている方程式を記述する. 以下では  $\Delta t$  を時間格子間隔, 時刻  $\tau \Delta t$  における  $\hat{\zeta}_{k,l}$  の値を  $\hat{\zeta}_{k,l}^\tau$  等と表す.

時間方向の離散化は Euler スキームを用いて行う. 時空間方向に離散化された方程式は以下のように表される.

$$\hat{\zeta}_{k,l}^{\tau+1} = \hat{\zeta}_{k,l}^\tau + \Delta t \hat{F}_{k,l}^\tau, \quad (29)$$

$$\hat{\rho}_{k,l}^{\tau+1} = \hat{\rho}_{k,l}^\tau + \Delta t \hat{G}_{k,l}^\tau, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \hat{F}_{k,l}^\tau = & -\frac{1}{I} \frac{1}{J} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \exp\left(-\frac{2\pi i k x_i}{x_m}\right) \sin\left(\frac{\pi l y_j}{y_m}\right) U_{i,j} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)_{i,j} \\ & + \frac{1}{I} \frac{1}{J} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \exp\left(-\frac{2\pi i k x_i}{x_m}\right) \sin\left(\frac{\pi l y_j}{y_m}\right) \left(\frac{d^2 U}{dy^2}\right)_{i,j} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)_{i,j}^\tau \\ & - \frac{1}{I} \frac{1}{J} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \exp\left(-\frac{2\pi i k x_i}{x_m}\right) \sin\left(\frac{\pi l y_j}{y_m}\right) \left(\frac{\partial \psi_{i,j}}{\partial x}\right)_{i,j}^\tau \left(\frac{\partial \zeta_{i,j}}{\partial y}\right)_{i,j}^\tau \\ & + \frac{1}{I} \frac{1}{J} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \exp\left(-\frac{2\pi i k x_i}{x_m}\right) \sin\left(\frac{\pi l y_j}{y_m}\right) \left(\frac{\partial \psi_{i,j}}{\partial y}\right)_{i,j}^\tau \left(\frac{\partial \zeta_{i,j}}{\partial x}\right)_{i,j}^\tau \\ & - \frac{1}{I} \frac{1}{J} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \exp\left(-\frac{2\pi i k x_i}{x_m}\right) \sin\left(\frac{\pi l y_j}{y_m}\right) \frac{g}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho_{i,j}}{\partial x}\right)_{i,j}^\tau \end{aligned}$$

$$-\nu \left[ \left( \frac{2\pi k}{x_m} \right)^{2p} + \left( \frac{\pi l}{y_m} \right)^{2p} \right] \hat{\zeta}_{k,l}^\tau, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \hat{G}_{i,j}^\tau = & -\frac{1}{I} \frac{1}{J} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \exp \left( -\frac{2\pi i k x_i}{x_m} \right) \cos \left( \frac{\pi l y_j}{y_m} \right) U_{i,j} \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_{i,j}^\tau \\ & -\frac{1}{I} \frac{1}{J} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \exp \left( -\frac{2\pi i k x_i}{x_m} \right) \cos \left( \frac{\pi l y_j}{y_m} \right) \left( \frac{\partial \psi_{i,j}}{\partial x} \right)_{i,j}^\tau \left( \frac{\partial \rho_{i,j}}{\partial y} \right)_{i,j}^\tau \\ & +\frac{1}{I} \frac{1}{J} \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \exp \left( -\frac{2\pi i k x_i}{x_m} \right) \cos \left( \frac{\pi l y_j}{y_m} \right) \left( \frac{\partial \psi_{i,j}}{\partial y} \right)_{i,j}^\tau \left( \frac{\partial \rho_{i,j}}{\partial x} \right)_{i,j}^\tau \\ & -\kappa \left[ \left( \frac{2\pi k}{x_m} \right)^{2p} + \left( \frac{\pi l}{y_m} \right)^{2p} \right] \hat{\rho}_{k,l}^\tau. \end{aligned} \quad (32)$$



## 4 使用モジュールとその他の設定

スペクトル変換と逆変換, 微分演算は SPMODEL ライブラリ (spml) の `esc_module` に含まれる関数を用いて行う. フーリエ正弦および余弦変換, それらの逆変換の際の数値積分は台形公式を用いて行う. spml が下位で使用する ISPACK の仕様から, 格子点数  $I, J$  は偶数で, かつ  $I/2, J/2 = 2^a 3^b 5^c$  ( $a, b, c$  は 0 または整数) でなければならない. 非線形項の計算によって生じるエリアジングを防ぐため, 格子点数  $I, J$  と切断波数  $K, L$  は  $I > 3K, J > 3K/2$  を満たすように与える.

## 5 数値実験

数値実験では水路中心で向きが反転する平行流を与え, ケルビン・ヘルムホルツ不安定が生じる様子を計算する. 基本場の速度分布は以下のように与える.

$$U(y) = U_0 \tanh \left( \frac{y - y_m/2}{A_0} \right) \quad (33)$$

初期の密度分布は

$$\rho = \rho_0 - \frac{\delta\rho}{2} \left[ \tanh \left( \frac{y - y_m/2}{A_0} \right) + 1 \right] \quad (34)$$

とし, 流線関数は微小な振幅を持つ乱数として与える. パラメータは表 2 にまとめた値を用いる.

格子点数  $I, J$  と切断波数  $K, L$  はそれぞれ  $I = 128, J = 64, K = L = 42$  とする. 時間格子間隔  $\Delta t$  は  $0.25 \times 10^{-4}$  sec, 計算ステップ数は 40,000 ステップである.

図 1 に計算された密度分布の時間変化の様子を示す.

パラメータ	数値
$\rho_0$	1000 kgm <sup>-3</sup>
$\delta\rho$	50 kgm <sup>-2</sup>
$g$	9.8 msec <sup>-2</sup>
$p$	5
$\nu$	10 <sup>-16</sup> m <sup>2</sup> sec <sup>-1</sup>
$\kappa$	10 <sup>-16</sup> m <sup>2</sup> sec <sup>-1</sup>
$x_m$	0.18 m
$y_m$	0.06 m
$U_0$	0.3 msec <sup>-1</sup>
$A_0$	0.002 m

表 2: 使用したパラメータの値

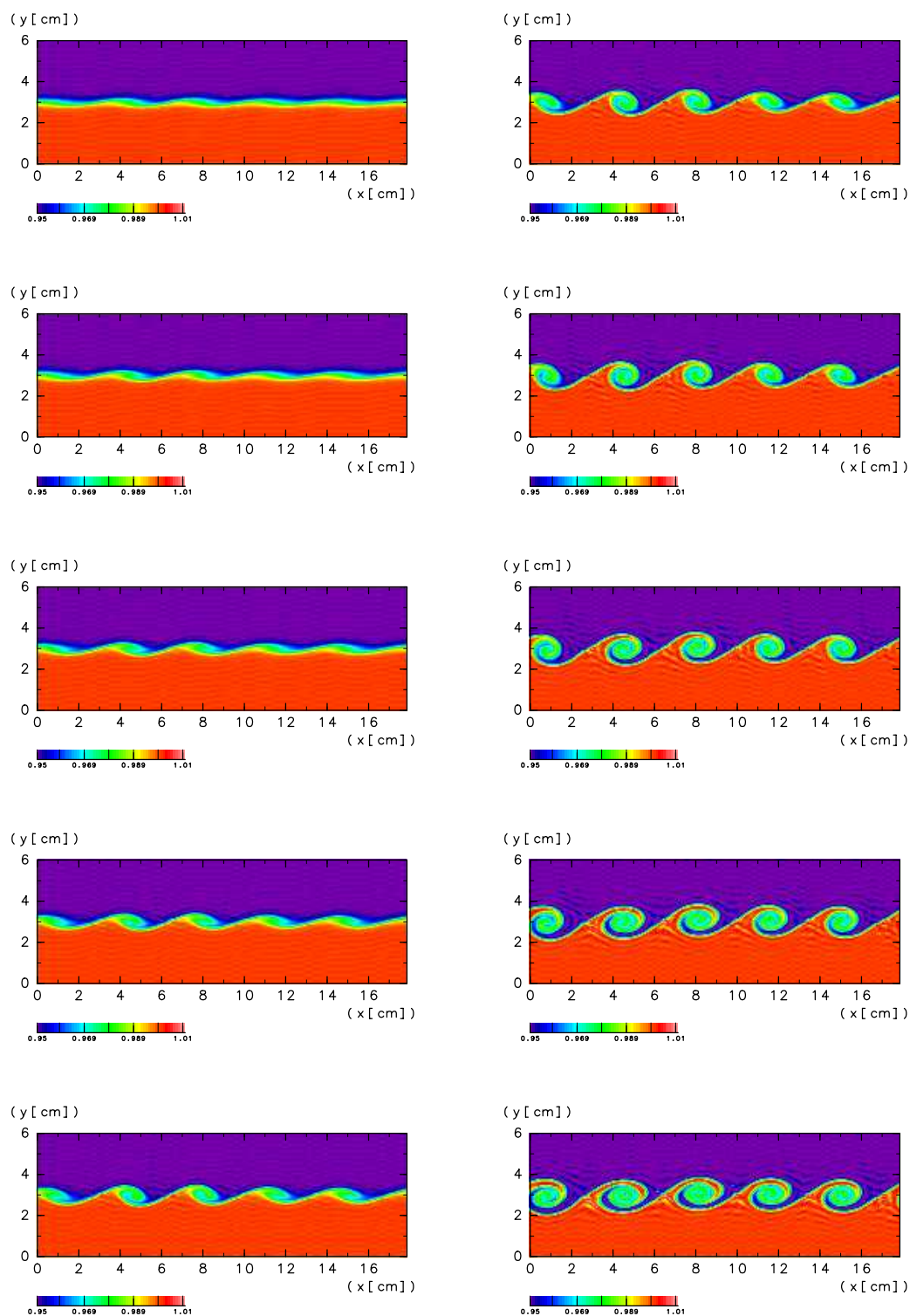


図 1: 密度分布の時間変化. 左上から右下へと順に  $t = 0.82, 0.84, 0.86, 0.88, 0.9, 0.92, 0.94, 0.96, 0.98, 1.0$  sec の結果. 寒色から暖色へと色が変化するにつれて密度が高いことを示している.

## 6 参考文献

Chandrasekhar, S., 1961: Hydrodynamic and Hdromagnetic stability. Oxford University Press.

GFD-online (酒井 敏, 飯澤 功, 荒巻 英治), 1997: 実験室の中の空と海, 内部重力波, [http://www.gfd-dennou.org/arch/gfd-exp/gfd\\_exp/exp-j/doc/iw/guide01.htm](http://www.gfd-dennou.org/arch/gfd-exp/gfd_exp/exp-j/doc/iw/guide01.htm).

竹広真一, 石岡圭一, 森川靖大, 小高正嗣, 石渡正樹, 林祥介, SPMODEL 開発グループ, 2004: 階層的地球流体力学スペクトルモデル集 (SPMODEL), <http://www.gfd-dennou.org/arch/spmodel/>, 地球流体電脳倶楽部.

## 謝辞

本資源は, 地球流体電脳倶楽部のインターネット上での学術知識の集積と活用の実験の一環として

<http://www.gfd-dennou.org/arch/spmodel/>

において公開されているものである (©地球流体電脳倶楽部スペクトルモデルプロジェクト spmodel@gfd-dennou.org 2002. ). 本資源は, 著作者の諸権利に抵触しない (迷惑をかけない) 限りにおいて自由に利用していただいて構わない. なお, 利用する際には今一度自ら内容を確認することを願います (無保証無責任原則).

本資源に含まれる元資源提供者 (図等の版元等を含む) からは, 直接的な形での WEB 上での著作権または使用許諾を得ていない場合があるが, 勝手ながら, 「未来の教育」のための実験という学術目的であることをご理解いただけるものと信じ, 学術標準の引用手順を守ることによって諸手続きを略させていただいている. 本資源の利用者には, この点を理解の上, 注意して扱っていただけるようお願いする. 万一, 不都合のある場合には

spmodel@gfd-dennou.org

まで連絡していただければ幸いである.