

# 数学分析笔记

rogeryoungh

2021 年 5 月 30 日

# 目录

<b>第一章 实数集与函数</b>	<b>1</b>
1.1 集合	1
1.2 映射	1
1.3 关系	2
1.4 域公理	4
1.5 数系的构造	5
1.5.1 自然数	6
1.5.2 整数	6
1.5.3 有理数	7
1.5.4 实数 · Dedekind 分割	8
1.5.5 实数 · Cauchy 序列	9
1.5.6 复数	10
<b>第二章 数列极限</b>	<b>12</b>
2.1 数列极限的概念	12
2.2 收敛数列的性质	12
2.3 数列极限存在的条件	14
2.4 Cauchy 准则	15
2.5 Stolz 公式	16
2.6 例题	16
<b>第三章 函数极限</b>	<b>18</b>
3.1 函数极限的概念	18
3.2 函数极限的性质	19
3.3 函数极限存在的条件	19
3.4 两个重要的极限	20
3.5 无穷小量与无穷大量	20
3.6 常见等价无穷小	21
<b>第四章 函数的连续性</b>	<b>22</b>
4.1 连续性的概念	22
4.2 连续函数的性质	23
4.3 初等函数的连续性	24

<b>第五章 导数和微分</b>	<b>25</b>
5.1 导数的定义 . . . . .	25
5.2 求导法则 . . . . .	26
5.2.1 基本求导法则 . . . . .	27
5.2.2 基本初等函数导数公式 . . . . .	27
5.3 单调性与导数 . . . . .	27
<b>第六章 微分中值定理</b>	<b>28</b>
6.1 拉格朗日 Lagrange 定理 . . . . .	28
6.2 Cauchy 中值定理 . . . . .	28
6.3 凹凸性 . . . . .	28
<b>第七章 积分的方法与技巧</b>	<b>30</b>
7.1 积分的存在性 . . . . .	30
7.1.1 定积分 . . . . .	31
7.1.2 可积条件 . . . . .	32
7.2 分项积分法 . . . . .	33

# 第一章 实数集与函数

我初次用的书是华师的数分，现在发觉基础部分有相当多的细节。仍待调整。

若无额外说明，皆在  $\mathbb{R}$  下。

实数集与函数的基础是集合和映射，仍有很多术语不曾了解。

参考自李逸的《基本分析讲义》。

## 1.1 集合

集合的交并补是熟知的。

定义有序对为  $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$ ，其中  $a$  称为有序对的第一坐标，而  $b$  称为第二坐标。特殊的， $(a, a) = \{a\}$ 。

定义集合的笛卡尔 Cartesian 乘积为

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \text{ 且 } b \in B\}$$

一般  $A \times B \neq B \times A$ 。同样可以推广到多个集合

$$\prod X_i := X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n = (X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$$

其元素  $x$  是多层嵌套，我们可以简记为

$$x = (\cdots (x_1, x_2), x_3), \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_n)$$

称  $x_i := \text{pr}_i(x)$  为  $x$  的第  $i$  个分量， $\text{pr}$  是投影映射。当所有  $X_i$  都等于  $X$  时，上述乘积记为  $X^n$ 。

## 1.2 映射

设  $C$  和  $D$  为两个给定的集合。

### 定义 1.2.1 【赋值法则】

设  $R$  是  $C \times D$  的一个子集，若满足当  $(c, d_1) \in R$  且  $(c, d_2) \in R \Rightarrow d_1 = d_2$ ，称  $R$  是一个赋值法则。

赋值法则的定义域 Domain 和像域 Image Set 约定如下

$$\text{Dom}(R) := \{c \in C \mid \exists d \in D, (c, d) \in R\}$$

$$\text{Im}(R) := \{d \in D \mid \exists c \in C, (c, d) \in R\}$$

### 定义 1.2.2

设  $R$  为一个赋值法则,  $B$  为满足  $\mathbf{Im}(R) \subseteq B$  的一个集合, 记二元对  $(R, B)$  为一个映射,  $B$  称为值域。定义  $f$  的定义域  $A$  和像域为  $R$  的定义域和像域。记作

$$f: A \rightarrow B, a \mapsto f(a)$$

称  $f$  的图为

$$\mathbf{graph}(f) := \{(a, f(a)) \in A \times B \mid a \in A\}$$

对任意给定的  $A$  的子集  $A_0$ , 定义  $f$  在  $A_0$  上的限制为映射

$$f|_{A_0} = f: A_0 \rightarrow B$$

称映射  $f$  和  $g$  的复合为

$$g \circ f: A \rightarrow C, a \mapsto g(f(a))$$

显然  $g \circ f$  仅当  $\mathbf{Im}(f) \subseteq \mathbf{Dom}(g)$  时有定义。 $f \circ g$  一般与  $g \circ f$  不相等。

若映射  $f$  满足

- (1)  $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$ , 称  $f$  为单射。
  - (2) 对任意的  $b \in B$  存在  $a \in A$  满足  $f(a) = b$ , 称  $f$  为满射。
  - (3)  $f$  既是单射又是满射, 称  $f$  为双射。
- 若  $f$  为双射, 我们定义它的逆映射  $f^{-1}$  为

$$f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$$

映射  $*$ :  $X \times X \rightarrow X$  通常也称为集合  $X$  上的运算, 此时我们把  $*(x, y)$  记做  $x * y$ 。对  $X$  中的非空子集定义

$$A * B := *(a \times B) = \{A * b \mid a \in A, b \in B\}$$

### 定义 1.2.3

- (1) 若  $A * A \subseteq A$ , 则称  $A$  在运算  $*$  下封闭。
- (2) 若  $x * (y * z) = (x * y) * z$ , 则称运算  $*$  是结合的。
- (3) 若  $x * y = y * x$ , 则称运算  $*$  是交换的。
- (4) 若存在  $e \in X$  使得  $e * x = x * e = x$ , 则称  $e$  为  $X$  上的单位元。

如果映射定义中的  $B$  是一个数域, 则把映射称为函数。

## 1.3 关系

简要提及一下关系的部分知识。称集合  $S \times S$  的子集  $C$  为关系。把  $(x, y) \in C$  记作  $xCy$ 。

### 定义 1.3.1 【等价关系】

若集合  $S$  上的关系  $C$  满足

- (1) 自反性: 对任意的  $x \in S$  有  $xCx$ 。
- (2) 对称性: 若  $xCy$  则  $yCx$ 。

(3) 传递性: 若  $xCy$  且  $yCz$  则  $xCz$ 。

则称  $C$  为等价关系, 一般用  $\sim$  来表示等价关系。

记  $x \in A$  的等价类:

$$[x] := \{y \in A \mid y \sim x\}$$

### 定义 1.3.2 【序关系】

若集合  $S$  上的关系  $C$  满足

(1) 相容性: 对任意的  $x, y \in S$  且  $x \neq y$  满足要么  $xCy$  要么  $yCx$ 。

(2) 非自反性: 不存在  $x \in S$  使得  $xCx$ 。

(3) 传递性: 若  $xCy$  且  $yCz$  则  $xCz$ 。

则称  $C$  为序关系, 一般用  $<$  来表示序关系, 称  $(S, C)$  为有序集。

$x < y$  也可以记作  $y > x$ 。记号  $x \leq y$  指的是  $x < y$  或  $x = y$ , 即是  $x > y$  的否定。

若在  $S$  内定义了一种序, 便是有序集。

### 定义 1.3.3 【上界】

设有序集  $S$  的非空子集  $E$ , 若存在  $a \in S$  使得任取  $x \in E$  满足  $x \leq a$ , 我们称  $E$  有上界,  $a$  称为  $E$  的一个上界。

同样可以得到下界。

### 定义 1.3.4 【上确界】

设有序集  $S$  的非空子集  $E$ , 且  $E$  有上界。若存在一个数  $a \in S$  满足:

(1)  $a$  是  $E$  的上界:  $\forall x \in E$ , 有  $x \leq a$ 。

(2) 任何小于  $a$  的数不是数集  $E$  的上界:  $\forall \mu < a, \exists x_0 \in E$  使得  $x_0 > \mu$ 。

则称数  $a$  为数集  $E$  的上确界, 记作  $\sup E$ 。

类似的可定义有界集的下确界  $a = \inf E$ 。

### 定义 1.3.5 【最小上界性】

如果有序集  $S'$  的任何非空有上界子集  $E$  有最小上界, 则称  $S$  有最小上界性。设  $E$  是有序集  $S$  的子集, 若对任意的有上界的  $E$  都有  $\sup E \in S$ , 那么称  $S$  有最小上界性。

例如  $\mathbb{Q} \cap (0, \sqrt{2})$  是  $\mathbb{Q}$  的非空子集, 其上界  $\sqrt{2}$  并不在  $\mathbb{Q}$  内。

同样的有最小下界性。可以证明, 有最小上界性的一定有最大下界性。展开描述即

### 定理 1.3.6

设  $B$  是具有最小上界性的集合  $S$  的子集, 则对任意的有下界的  $B$  都有  $\inf B \in S$ 。

**证明** 对于每个  $B$ , 构造  $L$  为  $B$  的下界组成的集合, 显然每个  $B$  中的元素都是  $L$  的上界。由最小上界性知, 存在  $\sup L \in S$ 。

尝试证明  $\inf B = \sup L$ 。

对于任意的  $x \in B$ ，若  $x < \sup L$ ，则存在比  $\sup L$  小的  $L$  的上界  $x$ ，矛盾。故  $x \geq \sup L$ ，即  $\sup L$  是  $B$  的下界。

设  $B$  的下界  $x$  有  $x > \sup L$ ，那么  $x \in L$ ，则存在比  $\sup L$  大的  $L$  元素，矛盾。故不存在比  $\sup L$  大的  $B$  的下界。

综上， $B$  的下界存在且  $\inf B = \sup L \in S$ 。

□

## 1.4 域公理

集合  $F$  上定义的加法  $+$  和乘法  $\cdot$  若满足  $(x, y, z \in F)$

F1 加法结合率:  $x + (y + z) = (x + y) + z$ 。

F2 加法交换律:  $x + y = y + x$ 。

F3 存在加法单位元: 存在  $0 \in F$ ，使得对任意  $x \in F$  有  $0 + x = x$ 。

F4 加法逆元的存在性: 对任意  $x \in F$ ，总存在  $-x \in F$ ，使得  $x + (-x) = 0$ 。

F5 乘法结合率:  $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ 。

F6 乘法交换律:  $x \cdot y = y \cdot x$ 。

F7 存在乘法单位元: 存在  $1 \in F$ ，使得  $1 \neq 0$  且对任意  $x \in F$  有  $1 \cdot x = x$ 。

F8 乘法逆元的存在性: 对任意  $x \in F - \{0\}$ ，总存在  $x^{-1} \in F$ ，使得  $x \cdot x^{-1} = 1$ 。

F9 乘法分配律:  $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ 。

则称  $(F, +, \cdot)$  为一个域。

注意  $-x$  只是一个记号。同样的， $x^{-1}$  也只是一个记号。

### 定义 1.4.1 【有序域】

若域  $F$  是满足如下条件的有序集

(1) 当  $x, y, z \in F$  且  $y < z$  时， $x + y < x + z$ 。

(2) 如果  $x, y \in F$ ，且  $x > 0, y > 0$ ，则  $xy > 0$ 。

那么称  $F$  是一个有序域。

例如  $\mathbb{Q}$  是有序域。

### 定理 1.4.2 【存在定理】

具有最小上界性的有序域  $\mathbb{R}$  存在，且包容着  $\mathbb{Q}$  作为子域。

这个命题的证明较为复杂，是从  $\mathbb{Q}$  出发构造  $\mathbb{R}$ ，而且其中有很多重要的信息，决定单独一章，这里略过。

### 定理 1.4.3 【Achimedes 原理】

对于  $x, y \in \mathbb{R}$  且  $x > 0$ ，那么必定存在正整数  $n$ ，使得  $nx > y$ 。

**证明** 设  $A = \{nx \mid n \in \mathbb{N}^+\}$ ，若不存在  $n$  则  $y$  将是  $A$  的一个上界，由最小上界性可知  $A$  的上确界存在。

又因为小于上确界的数  $\sup A - x$  不是上确界，即存在  $m \in \mathbb{N}^+$  使得  $\sup A - x < mx$ ，即  $\sup A < (m+1)x$ ，矛盾。

故必定存在  $n$  使得  $nx > y$ 。

□

#### 定义 1.4.4 【度量空间】

称集合  $X$  的元素为点，若存在  $X$  上双变量的函数  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ，满足  $(x, y, z \in X)$

(1) 若  $x \neq y$ ，则  $d(x, y) > 0$ ；仅  $d(x, x) = 0$ 。

(2) 对于任意的  $x, y$  都有  $d(x, y) = d(y, x)$ 。

(3) 对于任意的  $z$ ，都有  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ 。

就称  $(X, d)$  是一个度量空间（度量空间），函数  $d$  称作其上的距离函数。

这里的空间的含义是线性空间。

对于  $X$  的子集  $Y$ ，定义其距离函数

$$d_Y: Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}, (y_1, y_2) \mapsto d_Y(y_1, y_2) = d(y_1, y_2)$$

则  $(Y, d_Y)$  仍是度量空间，称  $d_Y$  是  $d$  在  $Y$  上的诱导度量。 $(Y, d_Y)$  称作是  $(X, d)$  的子（度量）空间。

#### 定义 1.4.5 【稠密性】

给定度量空间  $(X, d)$ ， $Y$  是  $X$  的子集。如果对任意的  $x \in X$  和任意小的  $\varepsilon > 0$ ，都存在  $y \in Y$ ，使得  $d(y, x) < \varepsilon$ ，我们就称  $Y$  在  $X$  中是稠密的。

#### 例 1.4.6

$\mathbb{Q}$  在  $\mathbb{R}$  中稠密：对于  $x, y \in \mathbb{R}$  且  $x < y$ ，那么必定存在  $p \in \mathbb{Q}$ ，使得  $x < p < y$ 。

**证明** 由 Archimedes 原理，可设存在  $n \in \mathbb{N}^+$  使得  $n(y - x) > 1$ 。

再设存在  $m_1, m_2 \in \mathbb{N}^+$ ，使得  $m_1 > nx, m_2 > -nx$ 。于是

$$-m_2 < nx < m_1$$

因此存在  $m \in \mathbb{N}^+$  有  $-m_2 \leq m \leq m_1$  使得

$$m - 1 \leq nx < m \leq 1 + nx < ny$$

从而存在  $p = m/n$  使得  $x < p < y$ 。

□

## 1.5 数系的构造

直到我读了陶哲轩的《实分析》时，才感到接受了实数理论。实数的定义是公理化的，不是构造性的。

更具体的说，我们不需要知道实数是什么，只需知道这些对象有什么性质，我们就可以抽象的处理它们。从其他的数学对象出发来构造实数是可能的，有多种多样的模型，只要它们服从所有的公理并正确的运作，都是满足的。

实数究竟有多少性质？从自然数开始。



### 公理 1.5.1 【Peano 公理】

若集合  $N$  和其上的映射  $v(n)$  满足

- (1)  $0 \in N$ 。
  - (2) 若  $n \in N$ ，则  $v(n) \in N$ 。
  - (3) 对于任意的  $n \in N$ ， $v(n) \neq 0$ 。
  - (4) 若  $v(m) \neq v(n)$ ，则  $m \neq n$ 。
  - (5)【归纳原理】设  $P(n)$  是关于自然数的性质，假设只要  $P(n)$  为真，则  $P(v(n))$  也为真；且  $P(0)$  为真。那么对  $N$  中所有的元素  $P$  都为真。
- 那么称  $N$  为自然数，记作  $\mathbb{N}$ ， $v(n)$  称为后继函数。

### 1.5.1 自然数

设  $m, n \in \mathbb{N}$ ，定义  $\mathbb{N}$  上的加法  $+$  和乘法  $\cdot$  为

$$\begin{aligned} 0 + m &:= m, & v(n) + m &:= v(n + m) \\ 0 \cdot m &:= m, & v(n) \cdot m &:= n \cdot m + m \end{aligned}$$

我们可以利用归纳原理推出我们熟悉的一些性质。

### 定理 1.5.2 【 $\mathbb{N}$ 的代数算律】

对于  $a, b, c \in \mathbb{N}$  有

- (1) 加法是结合的和交换的，且有单位元  $0$ 。
- (2) 乘法是结合的和交换的，且有单位元  $1$ 。
- (3) 分配律： $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ 。

### 定义 1.5.3 【 $\mathbb{N}$ 的序】

设  $m, n \in \mathbb{N}$ 。

- (1) 若存在  $a \in \mathbb{N}$ ，使得  $n = m + a$ ，称  $m$  小于等于  $n$ ，记作  $m \leq n$ 。
- (2) 若  $n \geq m$  且  $n \neq m$ ，则称  $m$  严格小于  $n$ ，记作  $m < n$ 。

可以验证， $<$  和  $\leq$  是  $\mathbb{N}$  上的序关系。

### 定理 1.5.4 【加法保序】

对于  $a, b \in \mathbb{N}$ ，若  $a > b$ ，则  $a + c > b + c$ 。

### 1.5.2 整数

接下来几节，都是记  $a, b, c$  为当前集合的元素， $x, y, z$  都是被构造的集合的元素。

为了表达整数，定义二元组  $(a, b)$ ，其中  $a, b \in \mathbb{N}$ 。记全体二元组的集合为  $Z$ 。我们约定

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$$

因为自然数的序是已定义的，于是定义  $Z$  上的序关系

$$(a, b) \leq (c, d) \Leftrightarrow a + d \leq b + c$$

然后是定义  $N$  上的加法和乘法

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac, bd)$$

可以验证,  $(n, 0)$  与  $n$  有相同的性状, 我们可以令其相等, 从而把自然数嵌入到整数内。至此, 我们可以着手验证整数是否满足我们预想的性质。

#### 定理 1.5.5 【 $\mathbb{Z}$ 的代数算律】

对于  $x, y, z \in \mathbb{Z}$  有

(1) 加法是结合的和交换的, 且有单位元  $0$ , 逆元存在。

(2) 乘法是结合的和交换的, 且有单位元  $1$ 。

(3) 分配律:  $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ 。

即  $\mathbb{Z}$  是一个交换环。于是

#### 定理 1.5.6 【 $\mathbb{Z}$ 是有序域】

(1) 加法保序: 当  $x, y, z \in \mathbb{Z}$  且  $y < z$  时,  $x + y < x + z$ 。

(2) 乘法保序: 如果  $x, y \in \mathbb{Z}$ , 且  $x > 0, y > 0$ , 则  $xy > 0$ 。

我们有理由相信,  $(a, b)$  符合我们对整数的一切想象。因此  $Z = \mathbb{Z}$ 。

另外的, 定义整数的负运算为  $-(a, b) = (b, a)$ , 以此定义减法

$$x - y := x + (-y)$$

可以验证

$$(a, 0) - (b, 0) = (a, b) = a - b$$

### 1.5.3 有理数

类似的, 记整数的二元组  $(a, b)$ , 其中  $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ , 记全体二元组的集合为  $Q$ 。我们约定

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$$

因为整数的序是已定义的, 于是定义  $Q$  上的序关系

$$(a, b) \leq (c, d) \Leftrightarrow ad \leq bc$$

于是定义  $Q$  上的加法和乘法

$$(a, b) + (c, d) := (ad + bc, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) := (a \cdot c, b \cdot d)$$

定义加法逆元为  $-(a, b) := (-a, b)$ 。可以验证,  $(a, 1)$  与  $a$  有相同的性状, 我们可以令其相等, 从而把整数嵌入到有理数内。

至此, 我们可以着手验证有理数是否满足我们预想的性质。

### 定理 1.5.7 【 $\mathbb{Q}$ 的代数算律】

对于  $x, y, z \in \mathbb{Q}$  有

- (1) 加法是结合的和交换的, 且有单位元 0, 逆元存在。
- (2) 乘法是结合的和交换的, 且有单位元 1, 非零元逆元存在。
- (3) 分配律:  $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ 。

即  $\mathbb{Q}$  是一个域。

### 定理 1.5.8 【 $\mathbb{Q}$ 是有序域】

- (1) 加法保序: 当  $x, y, z \in \mathbb{Q}$  且  $y < z$  时,  $x + y < x + z$ 。
- (2) 乘法保序: 如果  $x, y \in \mathbb{Q}$ , 且  $x > 0, y > 0$ , 则  $xy > 0$ 。

我们有理由相信,  $(a, b)$  符合我们对有理数的一切想象。因此  $Q = \mathbb{Q}$ 。

另外, 定义倒数  $(a, b)^{-1} = (b, a)$ , 显然  $a, b \neq 0$ 。从而定义除法

$$x/y := x \cdot y^{-1}$$

可以验证,

$$(a, 1)/(b, 1) = (a, b) = a/b$$

## 1.5.4 实数 · Dedekind 分割

### 定义 1.5.9 【Dedekind 分割】

设  $A \subset \mathbb{Q}, A' = \mathbb{C}_{\mathbb{Q}}A$ , 若满足以下三个条件

- (1)  $A \neq \emptyset, A' \neq \emptyset$ ;
  - (2) 当  $p \in A, q \in A'$  时,  $p < q$ ;
  - (3) 任给  $p \in A$ , 存在  $q \in A$ , 使得  $p < q$ ;
- 则称  $A$  为  $\mathbb{Q}$  的一个分割, 记分割的全体为  $R$ 。

集合的相等即是  $R$  上的等价关系。 $R$  上的序关系定义是

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \leq B$$

定义加法

$$A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

于是可以定义负运算

$$-A := \{s \in \mathbb{Q} \mid \exists r > 0, -s - r \in \mathbb{C}_{\mathbb{Q}}A\}$$

$$-A := \{s \in \mathbb{Q} \mid \exists r \in \mathbb{C}_{\mathbb{Q}}A, s < -r\}$$

然而乘法因为负数的问题, 我们需要分类讨论。 $R$  中存在加法单位元  $0^* = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0\}$ , 对于正实数  $A, B \geq 0^*$ , 定义乘法

$$A \cdot B := \{p \in \mathbb{Q} \mid \text{存在 } 0 < a \in A, \text{ 存在 } 0 < b \in B, p < ab\}$$

同时

$$A \cdot B := \begin{cases} -((-A) \cdot B), & A < 0^*, B \geq 0^* \\ -(A \cdot (-B)), & A \geq 0^*, B < 0^* \\ -((-A) \cdot (-B)), & A < 0^*, B < 0^* \end{cases}$$

当  $A > 0^*$  时, 定义乘法逆元

$$A^{-1} := \{s \in \mathbb{Q} \mid \exists r \in \mathbb{C}_{\mathbb{Q}} A, s < r^{-1}\}$$

当  $A < 0^*$  时, 定义乘法逆元为  $A^{-1} := -(-A^{-1})$ 。

至此, 我们可以着手验证实数是否满足我们预想的性质。

### 定理 1.5.10 【 $\mathbb{R}$ 的代数算律】

对于  $x, y, z \in \mathbb{R}$  有

- (1) 加法是结合的和交换的, 且有单位元 0, 逆元存在。
- (2) 乘法是结合的和交换的, 且有单位元 1, 非零元逆元存在。
- (3) 分配律:  $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ 。

即  $\mathbb{R}$  是一个域。

### 定理 1.5.11 【 $\mathbb{R}$ 是有序域】

- (1) 加法保序: 当  $x, y, z \in \mathbb{R}$  且  $y < z$  时,  $x + y < x + z$ 。
- (2) 乘法保序: 如果  $x, y \in \mathbb{R}$ , 且  $x > 0, y > 0$ , 则  $xy > 0$ 。

我们有理由相信,  $\text{LIM}(a_n)$  符合我们对实数性质的一切想象, 从而  $R = \mathbb{R}$ 。

实数和有理数的最基本的一个区别就是有最小上界性。

### 定理 1.5.12

$\mathbb{R}$  有最小上界性。

**证明** 设  $\alpha$  是  $R$  的非空子集, 设  $\alpha$  存在上界  $B$ 。令

$$S = \bigcup_{A \in \alpha} A$$

下证  $S = \sup A$ 。

首先证明  $S$  是分割。显然  $S$  非空, 又因为对任意的  $A \in \alpha$  都有  $A \subset B$ , 故  $S \subset B$ , 因此  $S \neq \mathbb{Q}$ 。取  $p \in S, q \notin S$ , 于是存在  $A_0 \in \alpha$  使得  $p \in A_0$ , 此时  $q \notin A_0$ , 故  $p < q$ 。设  $p \in S$ , 于是存在  $A_0 \in \alpha$  使得  $p \in A_0$ , 此时存在  $q \in A_0$  使得  $p < q$ , 且  $q \in S$ 。

其次, 对任意的  $A \in \alpha$  必然  $A \leq S$ , 故  $S$  是  $A$  的一个上界。若  $S' < S$ , 则有  $s \in S, s \notin S'$ , 同时存在  $A_0 \in \alpha$  使得  $s \in A_0$ , 故  $S' < A_0$ , 故  $S'$  不是  $A$  的上界。

因此  $S = \sup A$ 。 □

## 1.5.5 实数 · Cauchy 序列

我们试图得到实数, 是因为有理数还不足以表示所有的数, 比如  $x^2 = 2$  的解。得到实数和前面的方法有所不同, 要复杂的多。

一个有理数上的序列  $\{a_n\}$ , 是一个从集合  $\mathbb{N}$  到  $\mathbb{Q}$  的一个映射, 即我们以前说的数列。

对于  $\mathbb{Q}$  上的无限序列  $\{a_n\}$ , 若对于任意的  $\varepsilon > 0$  存在  $N \geq 0$  使得当  $j, k \geq N$  时有

$$d(a_j, a_k) < \varepsilon$$

则称序列  $\{a_n\}$  为 Cauchy 序列, 记作  $\text{LIM}(a_n)$ 。记 Cauchy 序列的全体为集合  $R$ 。

对于 Cauchy 序列  $\text{LIM}(a_n), \text{LIM}(b_n)$ , 若对于任意的  $\varepsilon > 0$  存在  $N \geq 0$  使得当  $n \geq N$  时有

$$d(a_n, b_n) < \varepsilon$$

则记作  $\text{LIM}(a_n) = \text{LIM}(b_n)$ 。

定义  $R$  的序关系, 对于实数  $x, y$ , 若存在 Cauchy 序列满足  $x = \text{LIM}(a_n), y = \text{LIM}(b_n)$ , 对于  $n \geq 1$  有  $a_n \leq b_n$ , 则  $\text{LIM}(a_n) \leq \text{LIM}(b_n)$ 。

于是定义  $R$  上的加法和乘法

$$\text{LIM}(a_n) + \text{LIM}(b_n) := \text{LIM}(a_n + b_n)$$

$$\text{LIM}(a_n) \cdot \text{LIM}(b_n) := \text{LIM}(a_n b_n)$$

定义负运算  $-\text{LIM}(a_n) := \text{LIM}(-a_n)$ 。

定义倒数时会因为恼人的 0 出现了一些困难, 解决的方法即是把 0 排出。若存在  $c \in \mathbb{Q}$  满足  $c > 0$  使得  $d(a_n, 0) \geq c$ , 则称  $\{a_n\}$  为限制离开零的序列。若  $x$  为不为零的实数, 则必存在一个限制离开零的 Cauchy 序列  $\text{LIM}(a_n) = x$ 。

于是我们可以定义, 设  $x$  为一个不为零的实数, 则存在限制离开零的 Cauchy 序列  $x = \text{LIM}(a_n)$ , 定义倒数为

$$x^{-1} := \text{LIM}(a_n^{-1})$$

可以验证, 常数 Cauchy 序列  $\{a_n\}$  与  $a$  具有相同的性状, 因此可以令它们相等, 从而使有理数嵌入到实数中。

至此, 我们可以着手验证实数是否满足我们预想的性质, 在 Dedekind 分割中提过了, 这里不再重复。

另外, 定义  $R$  上的 Cauchy 序列, 若对于任意的实数  $\varepsilon > 0$  存在  $N \geq 0$  使得当  $j, k \geq N$  时有

$$d(a_j, a_k) \leq \varepsilon$$

可以证明,  $R$  上的 Cauchy 序列与  $\mathbb{Q}$  上的 Cauchy 序列等价。

若存在实数  $L$  满足, 存在  $N > 0$  使得当  $n \geq N$  时, 都有  $d(a_n, L) \leq \varepsilon$ , 则  $a_n$  收敛于  $L$ , 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

可以验证

$$\text{LIM}(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

### 1.5.6 复数

记实数的二元组  $(a, b)$ , 其中  $a, b \in R$ , 记全体二元组的集合为  $C$ 。我们约定

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

复数没有序关系。定义  $C$  上的加法和乘法

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$$

定义加法逆元为  $-(a, b) := (-a, -b)$ 。可以验证,  $(a, 0)$  与  $a$  具相同的性状, 我们可以令其相等, 从而把实数嵌入到复数域内。

定义非零数的乘法逆元  $(a, b)^{-1} := \left( \frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2} \right)$ 。

## 第二章 数列极限

### 2.1 数列极限的概念

#### 定义 2.1.1 【数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义】

设  $\{a_n\}$  为数列,  $A$  为定数。若对任给的正数  $\varepsilon$ , 总存在正整数  $N = N(\varepsilon)$ , 使得当  $n > N$  时有

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

则称数列  $\{a_n\}$  收敛于  $A$ , 或称  $A$  为数列  $\{a_n\}$  的极限, 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \text{ 或 } a_n \rightarrow A (n \rightarrow \infty)$$

等价定义: 任给  $\varepsilon > 0$ , 若在  $U(A; \varepsilon)$  之外数列  $\{a_n\}$  中的项至多只有有限个, 则称  $\{a_n\}$  收敛于极限  $A$ 。

若对于数列  $\{a_n\}$ , 不存在  $A$  使得  $a_n \rightarrow A$ , 则称数列  $\{a_n\}$  发散。

特殊地, 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 则称  $\{a_n\}$  为无穷小数列。

#### 定义 2.1.2 【无穷大数列】

若数列  $\{a_n\}$  满足: 对任意正数  $M > 0$ , 存在正整数  $N$ , 使得当  $n > N$  时,

(1)  $a_n > M$ , 则称数列  $\{a_n\}$  发散于正无穷大, 记作  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ , 或  $a_n \rightarrow +\infty$ 。

(2) 有  $a_n < -M$ , 则称数列  $\{a_n\}$  发散于负无穷大, 记作  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ , 或  $a_n \rightarrow -\infty$ 。

### 2.2 收敛数列的性质

#### 定理 2.2.1 【唯一性】

若数列  $\{a_n\}$  收敛, 则它只有一个极限。

**证明** 如果数列  $\{a_n\}$  同时以  $A, B$  为极限, 即任给  $\varepsilon > 0$ , 总存在  $N_1, N_2$ , 使得

$$|a_n - A| < \varepsilon, n > N_1; \quad |a_n - B| < \varepsilon, n > N_2$$

那么当  $n > \max\{N_1, N_2\}$  时需要恒成立

$$2\varepsilon > |a_n - A| + |a_n - B| \geq |A - B|$$

当  $A \neq B$  时, 对于  $2\varepsilon < |A - B|$  不恒成立, 因此只能  $A = B$ 。

□

**定理 2.2.2 【有界性】**

若数列  $\{a_n\}$  收敛, 则  $\{a_n\}$  有界。

**证明** 不妨设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ 。令  $\varepsilon = 1$ , 那么存在  $n > N$  使得

$$|a_n - A| \leq 1$$

令

$$M = \{|a_1|, \dots, |a_N|, |A-1|, |A+1|\}$$

那么对任意正整数  $n$ , 总有  $|a_n| \leq M$ 。 □

**定理 2.2.3 【保不等式性, 保序性】**

设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ , 则有

(1) 如果存在  $n > N$  使得  $a_n \geq b_n$  恒成立, 则  $A \geq B$ 。

(2) 反之, 如果  $A > B$ , 则存在  $n > N_1$  使得  $a_n > b_n$  恒成立。

**证明** (1) 如果设  $B - A = 2\delta > 0$ , 那么存在  $N_2, N_3 > N$

$$|a_n - A| < \delta, n > N_2; \quad |b_n - B| < \delta, n > N_3$$

于是当  $n > \max\{N_2, N_3\}$  时有

$$a_n < A + \delta = B - \delta < b_n$$

因此矛盾, 故  $A \geq B$ 。

(2) 设  $A - B = 2\delta > 0$ , 那么存在  $N_2, N_3$

$$|a_n - A| < \delta, n > N_2; \quad |b_n - B| < \delta, n > N_3$$

于是存在  $N_1 = \max\{N_2, N_3\}$ , 当  $n > N_1$  时有

$$a_n > A - \delta = B + \delta > b_n$$

□

若  $b_n$  是常数列,  $A \neq 0$ , 我们还可得到推论: 存在  $N$ , 使得当  $n > N$  时, 有

$$\frac{1}{2}|A| < |a_n| < \frac{3}{2}|A|$$

**定理 2.2.4 【迫敛性, 夹逼定理】**

设数列  $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$  满足当  $n > N_0$  有  $a_n \leq c_n \leq b_n$ 。若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$$

则  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$ 。

**证明** 即对于任给的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N_1, N_2$ , 使得当  $n > N_1$  有

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$



当  $n > N_2$  有

$$A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon$$

因此当  $n > \max\{N_0, N_1, N_2\}$  时, 有

$$A - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < A + \varepsilon$$

□

### 定理 2.2.5 【四则运算】

设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ , 则有

(1)  $\{\alpha a_n + \beta b_n\}$  收敛到  $\alpha A + \beta B$ , 其中  $\alpha, \beta$  为常数。

(2)  $\{a_n b_n\}$  收敛到  $AB$ 。

(3) 当  $B \neq 0$  时,  $\{a_n/b_n\}$  收敛到  $A/B$ 。

**证明** (1) 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在  $N_1, N_2$  使得

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2|\alpha| + 1}, n > N_1; \quad |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2|\beta| + 1}, n > N_2$$

则当  $n > \max\{N_1, N_2\}$  时有

$$\begin{aligned} |(\alpha a_n + \beta b_n) - (\alpha A + \beta B)| &\leq |\alpha||a_n - A| + |\beta||b_n - B| \\ &< \frac{\varepsilon|\alpha|}{2|\alpha| + 1} + \frac{\varepsilon|\beta|}{2|\beta| + 1} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

(2) 由收敛数列的有界性, 存在  $M$  使得  $|a_n| \leq M$ , 那么

$$0 \leq |a_n b_n - AB| = |(a_n - A)b_n + A(b_n - B)| \leq M|a_n - A| + |A||b_n - B|$$

由迫敛性知  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n b_n - AB| = 0$ 。

(3) 由保号性的推论, 存在  $N$  使得当  $n > N$  时有  $|b_n| > \frac{|B|}{2}$ , 那么

$$0 \leq \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{B} \right| = \frac{|b_n - B|}{|b_n||B|} \leq \frac{2}{|B|^2} |b_n - B|$$

由迫敛性知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{B} \right| = 0$ 。

□

### 定义 2.2.6 【数列的子列】

设  $\{a_n\}$  为数列, 如果  $\{n_k\}$  是一列严格递增的正整数, 则数列  $\{a_{n_k}\}$  称为数列  $\{a_n\}$  的一个子列。

特殊的子列  $\{a_{2k}, a_{2k-1}\}$  分别称为偶子列与奇子列。

### 定理 2.2.7

数列  $\{a_n\}$  收敛的充要条件:  $\{a_n\}$  的任何子列都收敛。

## 2.3 数列极限存在的条件

### 定义 2.3.1

若数列  $\{a_n\}$  各项满足关系式  $a_n \leq a_{n+1}$  ( $a_n \geq a_{n+1}$ ), 则称  $\{a_n\}$  为递增 (递减) 数列, 统称为单调数列。

### 定理 2.3.2 【单调有界定理】

单调有界数列必有极限。

### 定理 2.3.3 【致密性定理】

任何有界数列必定有收敛的子列。

## 2.4 Cauchy 准则

### 定义 2.4.1

设  $\{a_n\}$  为数列, 如果任给  $\varepsilon > 0$ , 均存在  $N(\varepsilon)$  使当  $m, n > N(\varepsilon)$  时有

$$|a_m - a_n| < \varepsilon$$

则称  $\{a_n\}$  为 Cauchy 数列或基本列。

### 定理 2.4.2

Cauchy 数列必定时有界数列。

**证明** 取  $\varepsilon = 1$ , 则存在  $N$  使得当  $m, n > N$  时有

$$|a_m - a_n| < 1$$

令  $M = \max\{|a_k| + 1 \mid 1 \leq k \leq N + 1\}$ , 则当  $n \leq N$  时显然有  $|a_n| \leq M$ , 而当  $n > N$  时有

$$|a_n| \leq |a_n - a_{N+1}| + |a_{N+1}| < 1 + |a_{N+1}| \leq M$$

这说明  $\{a_n\}$  是有界数列。 □

### 定理 2.4.3 【Cauchy 收敛准则】

$\{a_n\}$  为 Cauchy 数列当且仅当它是收敛的。

**证明** (1) 充分性: 设  $\{a_n\}$  收敛到  $A$ , 则任给  $\varepsilon > 0$  存在  $N$ , 当  $n > N$  时有

$$|a_n - A| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

因此当  $m, n > N$  时有

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - A| + |A - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

这说明  $a_n$  为 Cauchy 数列。

(2) 必要性: Todo …… □

Cauchy 收敛准则的条件称为 Cauchy 条件。

## 2.5 Stolz 公式

### 定理 2.5.1

对于任意的  $1 \leq k \leq n$ , 设  $b_k > 0$  且  $m \leq \frac{a_k}{b_k} \leq M$ , 则有

$$m \leq \frac{\sum a_n}{\sum b_n} \leq M$$

### 定理 2.5.2 【Stolz 公式一】

设数列  $\{x_n\}, \{y_n\}$ , 且  $\{y_n\}$  严格单调地趋于  $+\infty$ , 如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = A$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = A$$

证明 分类讨论 Todo……

□

### 定理 2.5.3 【Stolz 公式二】

设数列  $\{y_n\}$  严格单调地趋于 0, 且数列  $\{x_n\}$  也收敛到 0, 那么如果

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = A$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = A$$

证明 分类讨论 Todo……

□

## 2.6 例题

### 问题

设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ , 求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum a_n}{n} = A$ 。

解 即对于任给的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $n > N_1$  使得

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

那么变形有

$$\left| \frac{\sum a_n}{n} - A \right| \leq \frac{\sum |a_n - A|}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{N_1} |a_k - A|}{n} + \frac{\sum_{k=N_1+1}^n |a_k - A|}{n}$$

注意到  $\sum_{k=1}^{N_1} |a_k - A|$  已经为定值, 从而存在  $n > N_2$  使得

$$\frac{\sum_{k=1}^{N_1} |a_k - A|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

因此当  $n > \max\{N_1, N_2\}$  时有

$$LHS < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n - N_1}{n} \times \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

## 第三章 函数极限

### 3.1 函数极限的概念

#### 定义 3.1.1

设  $f$  为定义在  $[a, +\infty)$  上的函数,  $A$  为定数。若对任给的  $\varepsilon > 0$ , 存在正数  $M = M(\varepsilon) \geq a$ , 使得当  $x > M$  时, 有

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

则称函数  $f$  当  $x$  趋于  $+\infty$  时以  $A$  为极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow +\infty)$$

类似的有  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  和  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 。

不难证明

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$$

#### 定义 3.1.2

设函数  $f$  在  $U^\circ(x_0; \delta')$  内有定义,  $A$  为定数。若对任给的  $\varepsilon > 0$ , 存在正数  $\delta < \delta'$ , 使得当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时, 有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , 则称函数  $f$  当  $x$  趋于  $x_0$  时以  $A$  为极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)$$

#### 定义 3.1.3

设函数  $f$  在  $U_+^\circ(x_0; \delta')$  内有定义,  $A$  为定数。若对任给的  $\varepsilon > 0$ , 存在正数  $\delta < \delta'$ , 使得当  $x_0 < x < x_0 + \delta$  时, 有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , 则称函数  $f$  当  $x$  趋于  $x_0^+$  时以  $A$  为极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0^+)$$

类似的还有左极限  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ , 统称为单侧极限。又可记为

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \text{ 与 } f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

同理还有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$$

## 3.2 函数极限的性质

### 定理 3.2.1 【唯一性】

若极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在, 则此极限是唯一的。

### 定理 3.2.2 【局部有界性】

若极限  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在, 则  $f$  在  $x_0$  的某空心邻域  $U^\circ(x_0)$  上有界。

### 定理 3.2.3 【保不等式性】

设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  均存在。若存在正数  $N_0$ , 使得当  $n > N_0$  时, 有  $a_n \leq b_n$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 。

### 定理 3.2.4 【迫敛性】

设  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$ , 且在某  $U^\circ(x_0; \delta')$  上有

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

则  $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = A$ 。

### 定理 3.2.5 【四则运算法则】

若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  与  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  均存在, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

若  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$$

## 3.3 函数极限存在的条件

### 定理 3.3.1 【海涅 (Heine) 定理, 归结原则】

若  $f(x)$  在  $U^\circ(x_0; \delta')$  上有定义。  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在的充要条件是: 任何含于  $U^\circ(x_0; \delta')$  且以  $x_0$  为极限的数列  $\{x_n\}$ , 极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$  都存在且相等。

即若对任何  $x_n \rightarrow x_0 (n \rightarrow \infty)$  有  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 。

### 定理 3.3.2

设  $f(x)$  在点  $x_0$  的某空心右邻域  $U_+^\circ(x_0)$  有定义, 则  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$  的充要条件是: 对任何以  $x_0$  为极限的递减数列  $\{x_n\} \subset U_+^\circ(x_0)$ , 有  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ 。

### 定理 3.3.3

设  $f(x)$  为定义在  $U_+^\circ(x_0)$  上的单调有界函数, 则右极限  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$  存在。

### 定理 3.3.4 【Cauchy 准则】

设  $f(x)$  在  $U^\circ(x_0; \delta')$  上有定义, 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  存在的充要条件是: 任给  $\varepsilon > 0$ , 存在正数  $\delta(< \delta')$ , 使得对任何  $x', x'' \in U^\circ(x_0, \delta)$ , 有  $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ 。

## 3.4 两个重要的极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

## 3.5 无穷小量与无穷大量

### 定义 3.5.1 【无穷小量】

设函数  $f$  在某  $U^\circ(x_0)$  上有定义, 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ , 则称  $f$  为当  $x \rightarrow x_0$  时的无穷小量。

### 定义 3.5.2 【有界量】

设函数  $f$  在某  $U^\circ(x_0)$  上有界, 则称  $f$  为当  $x \rightarrow x_0$  时的有界量。

无穷小量收敛于 0 的速度有快有慢。设当  $x \rightarrow x_0$  时,  $f$  与  $g$  均为无穷小量。

若  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ , 则称当  $x \rightarrow x_0$  时  $f$  为  $g$  的高阶无穷小量, 或称  $g$  为  $f$  的低阶无穷小量。

记作

$$f(x) = o(g(x))(x \rightarrow x_0)$$

特别地,  $f$  为当  $x \rightarrow x_0$  时的无穷小量记作

$$f(x) = o(1)(x \rightarrow x_0)$$

若存在正数  $K$  和  $L$ , 使得在某  $U^\circ(x_0)$  上有

$$K \leq \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq L$$

则称  $f$  与  $g$  为当  $x \rightarrow x_0$  时的同阶无穷小量。特别当

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0$$

时,  $f$  与  $g$  必为同阶无穷小量。

若  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$  则称  $f$  与  $g$  是当  $x \rightarrow x_0$  时的等价无穷小量。记作

$$f(x) \sim g(x) (x \rightarrow x_0)$$

注意并不是任何两个无穷小量都可以进行这种阶的比较。例如  $x \rightarrow 0$  时,  $x \sin \frac{1}{x}$  和  $x^2$  都是无穷小量, 但它们的比都不是有界量。

### 定理 3.5.3

设函数  $f, g, h$  在  $U^\circ(x_0)$  上有定义, 且有  $f(x) \sim g(x) (x \rightarrow x_0)$ , 则

1. 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)h(x) = A$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)h(x) = A$ 。

2. 若  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)}{f(x)} = B$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)}{g(x)} = B$

### 定义 3.5.4 【无穷大量】

设函数  $f$  在某  $U^\circ(x_0)$  上有定义, 若对任给的  $G > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得当  $x \in U^\circ(x_0; \delta) \subset U^\circ(x_0)$  时, 有  $|f(x)| > G$ , 则称函数  $f$  当  $x \rightarrow x_0$  时有非正常极限  $\infty$ , 记作  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ 。

## 3.6 常见等价无穷小

实际上这些等价无穷小就是 Talor 展开。

$$\begin{aligned} \frac{x}{1-x} &= x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + O(x^6) \\ \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + O(x^6) \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7) \\ 1 - \cos x &= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + O(x^6) \\ e^x - 1 &= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + O(x^6) \\ \tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + O(x^7) \\ \sqrt{x+1} - 1 &= \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \frac{7x^5}{256} + O(x^6) \\ \arcsin x &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + O(x^7) \\ \arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + O(x^7) \end{aligned}$$



## 第四章 函数的连续性

### 4.1 连续性的概念

#### 定义 4.1.1 【连续性】

设函数  $f$  在某  $U(x_0)$  上有定义。若

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

则称  $f$  在点  $x_0$  连续。

记  $\Delta x = x - x_0$ , 称为自变量  $x$  在点  $x_0$  的增量或改变量。设  $y_0 = f(x_0)$ , 相应的函数  $y$  在点  $x_0$  的增量记为

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = y - y_0$$

连续性的  $\varepsilon - \delta$  形式定义: 若对任给的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得当  $|x - x_0| < \delta$  时, 有  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ , 则称函数  $f$  在点  $x_0$  连续。

或者进一步表示为

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right)$$

#### 定义 4.1.2

设函数  $f$  在某  $U_+(x_0)$  上有定义。若

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

则称  $f$  在点  $x_0$  右连续。同理左连续。

因此函数  $f$  在点  $x_0$  连续的充要条件是:  $f$  在点  $x_0$  既是左连续, 又是右连续。

#### 定义 4.1.3 【间断点】

设函数  $f$  在某  $U^\circ(x_0)$  上有定义。若  $f$  在点  $x_0$  无定义, 或  $f$  在点  $x_0$  有定义而不连续, 则称点  $x_0$  为函数  $f$  的间断点或不连续点。

若  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , 而  $f$  在点  $x_0$  无定义, 或有定义但  $f(x_0) \neq A$ , 则称点  $x_0$  为  $f$  的可去间断点。

若函数  $f$  在点  $x_0$  的左、右极限都存在, 但  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ , 则称点  $x_0$  为函数  $f$  的跳跃间断点。

可去间断点与跳跃间断点统称为第一类间断点, 所有其他形式的间断点统称为第二类间断点。

若函数  $f$  在区间  $I$  上的每一点都连续, 则称  $f$  为  $I$  上的连续函数。对于闭区间或半开区间的端点, 函数在这些点上连续是指左连续或右连续。

## 4.2 连续函数的性质

### 定理 4.2.1 【局部有界性】

若函数  $f$  在点  $x_0$  连续, 则  $f$  在某  $U(x_0)$  上有界。

### 定理 4.2.2 【局部保号性】

若函数  $f$  在点  $x_0$  连续, 且  $f(x_0) > 0$ , 则对任何正数  $r < f(x_0)$ , 存在某  $U(x_0)$ , 使得对一切  $x \in U(x_0)$ , 有  $f(x) > r$ 。

### 定理 4.2.3 【四则运算】

若函数  $f, g$  在点  $x_0$  连续, 则  $f \pm g, f \cdot g, f/g$  也都在点  $x_0$  连续。

### 定理 4.2.4

若函数  $f$  在点  $x_0$  连续,  $g$  在点  $u_0$  连续,  $u_0 = f(x_0)$ , 则复合函数  $g \circ f$  在  $x_0$  连续。

### 定义 4.2.5

设  $f$  为定义在数集  $D$  上的函数。若存在  $x_0 \in D$ , 使得对一切  $x \in D$ , 有  $f(x_0) \geq f(x)$ , 则称  $f$  在  $D$  上有最大值, 并称  $f(x_0)$  为  $f$  在  $D$  上的最大值。

### 定理 4.2.6 【最大、最小值定理】

若函数  $f$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 则  $f$  在闭区间  $[a, b]$  上有最大值与最小值。

### 定理 4.2.7 【介值定理】

若函数  $f$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 且  $f(a) \neq f(b)$ 。若  $\mu$  为介于  $f(a)$  和  $f(b)$  之间的任何实数。则至少存在一点  $x_0 \in (a, b)$  使得  $f(x_0) = \mu$ 。

### 定理 4.2.8

若函数  $f$  在  $[a, b]$  上严格单调并连续, 则反函数  $f^{-1}$  在其定义域  $[\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}]$  上连续。

### 定义 4.2.9

设  $f$  是定义在区间  $I$  上的函数。若对任给的  $\varepsilon > 0$  存在  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  使得对任何  $x', x'' \in I$ , 只要  $|x' - x''| < \delta$  就有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

就称函数  $f$  在区间  $I$  上一致连续。

**定理 4.2.10 【一致连续性】**

若函数  $f$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 则  $f$  在  $[a, b]$  上一致连续。

## 4.3 初等函数的连续性

**定理 4.3.1**

设  $p > 0$ ,  $a, b$  为任意两个实数, 则有

$$p^a \cdot p^b = p^{a+b}, (p^a)^b = p^{ab}$$

**定理 4.3.2**

指数函数  $a^x (a > 0)$  在  $\mathbb{R}$  上是连续的。

## 第五章 导数和微分

### 5.1 导数的定义

#### 定义 5.1.1

设函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  的某邻域有定义, 若极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

存在, 则称函数  $f$  在点  $x_0$  可导, 并称该极限为函数  $f$  在点  $x_0$  的导数, 记作  $f'(x_0)$ 。

#### 定理 5.1.2

若函数  $f$  在点  $x_0$  可导, 则  $f$  在点  $x_0$  连续。

#### 定义 5.1.3

设函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  的某右邻域  $[x_0, x_0 + \delta)$  上有定义, 若右极限

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, (0 < \Delta x < \delta)$$

存在, 则称该极限值为  $f$  在点  $x_0$  的右导数, 记作  $f'_+(x)$ 。同理有左导数。

左导数和右导数统称为单侧导数。

#### 定理 5.1.4

若函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  的某邻域上有定义, 则  $f'(x_0)$  存在的充要条件是  $f'_-(x)$  与  $f'_+(x)$  都存在且相等。

若函数  $f$  在区间  $I$  上每一点都可导 (对区间端点, 仅考虑相应的单侧导数), 则称  $f$  为  $I$  上的可导函数。此时对每一个  $x \in I$ , 都有  $f$  的一个导数  $f'(x)$  (或单侧导数) 与之对应。

这样就定义了一个在  $I$  上的函数, 称为导函数, 简称为导数。记作  $f', y', \frac{dy}{dx}$ , 即

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta) - f(x)}{\Delta}, x \in I$$

有时  $f'(x_0)$  也可写作  $y'|_{x=x_0}$  或  $\frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$ 。

曲线  $y = f(x)$  在点  $(x_0, y_0)$  的切线方程是

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

### 定义 5.1.5

若函数  $f$  在点  $x_0$  的某邻域  $U(x_0)$  上对一切  $x \in U(x_0)$  有

$$f(x_0) \geq f(x)$$

则称  $f$  在点  $x_0$  取得极大值，称点  $x_0$  为极大值点。同理有极小值点。

极大值、极小值统称为极值，极大值点、极小值点统称为极值点。

### 定理 5.1.6 【费马定理】

设函数  $f$  在点  $x_0$  的某邻域上有定义，且在点  $x_0$  可导。若点  $x_0$  为极值点，则必有  $f'(x_0) = 0$ 。

## 5.2 求导法则

### 定理 5.2.1

若函数  $u(x)$  和  $v(x)$  在点  $x_0$  可导，则函数  $f(x) = u(x) \pm v(x)$  在点  $x_0$  也可导，且

$$f'(x_0) = u'(x_0) \pm v'(x_0)$$

函数  $f(x) = u(x)v(x)$  在点  $x_0$  也可导，且

$$f'(x_0) = u'(x_0)v'(x_0)$$

若  $v(x) \neq 0$ ，则函数  $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$  在点  $x_0$  也可导，且

$$f'(x_0) = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v(x_0)^2}$$

### 定理 5.2.2

设  $y = f(x)$  为  $x = \phi(y)$  的反函数，若  $\phi(y)$  在点  $y_0$  的某邻域上连续、严格单调且  $\phi'(y_0) \neq 0$ ，则  $f(x)$  在点  $x_0 = \phi(y_0)$  可导，且

$$f'(x_0) = \frac{1}{\phi'(y_0)}$$

### 定理 5.2.3

设  $u = \phi(x)$  在点  $x_0$  可导， $y = f(u)$  在点  $u_0 = \phi(x_0)$  可导，则复合函数  $f \circ \phi$  在点  $x_0$  可导，且

$$(f \circ \phi)'(x_0) = f'(u_0)\phi'(x_0) = f'(\phi(x_0))\phi'(x_0)$$

### 5.2.1 基本求导法则

1.  $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2.  $(uv)' = u'v + uv'$
3.  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
4.  $(u \pm v)' = u' \pm v'$

### 5.2.2 基本初等函数导数公式

1.  $(c)' = 0$  ( $c$  为常数)
2.  $(x^a)' = ax^{a-1}$  ( $a$  为任意实数)
3.  $(\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x, (\tan x)' = \sec^2 x$
4.  $(\cot x)' = -\csc^2 x, (\sec x)' = \sec x \tan x, (\csc x)' = -\csc x \cot x$
5.  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
6.  $(a^x)' = a^x \ln a$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ )
7.  $(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a}$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ )

## 5.3 单调性与导数

### 定理 5.3.1

设  $f$  在区间  $I$  上可导, 则  $f(x)$  在  $I$  上递增 (减) 的充要条件时

$$f'(x) \geq 0 (\leq 0)$$

### 定理 5.3.2 【介值定理】

设  $f$  为  $[a, b]$  上的连续函数,  $\mu$  为严格介于  $f(a)$  和  $f(b)$  之间的数, 则存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f(\xi) = \mu$ 。

## 第六章 微分中值定理

### 6.1 拉格朗日 Lagrange 定理

#### 定理 6.1.1 【罗尔 Rolle 中值定理】

若函数  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  中可微, 且  $f(a) = f(b)$ 。则存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi) = 0$ 。

#### 定理 6.1.2

若函数  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  中可微, 则存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Lagrange 公式还有下面几种等价形式

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a), a < \xi < b$$

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b - a))(b - a), 0 < \theta < 1$$

$$f(a + h) - f(a) = f'(a + \theta h)h, 0 < \theta < 1$$

### 6.2 Cauchy 中值定理

#### 定理 6.2.1

设  $f, g$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  中可微, 且  $g'(x) \neq 0$ , 则存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

### 6.3 凹凸性

#### 定义 6.3.1

设  $f$  为定义在区间  $I$  上的函数, 若对  $I$  上当任意两点  $x_1, x_2$  和任意实数  $\lambda \in (0, 1)$  总有

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

则称  $f$  为  $I$  上的凸函数。反之，如果总有

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

则称  $f$  为  $I$  上的凹函数。



## 第七章 积分的方法与技巧

这部分我的参考书是《积分的方法与技巧》（金玉明等）。

### 7.1 积分的存在性

先放这，稍后做整理。

#### 定义 7.1.1

设函数  $f$  与  $F$  在区间  $I$  上都有定义。若

$$F'(x) = f(x), x \in I$$

则称  $F$  为  $f$  在区间  $I$  上的一个原函数。

#### 定理 7.1.2

设  $F$  是  $f$  在区间  $I$  上的一个原函数，则（1） $F+C$  也是  $f$  在  $I$  上的原函数，其中  $C$  为任意常量函数（2） $f$  在  $I$  上的任意两个原函数之间，只可能相差一个常数。

**证明** （1）显然

$$[F(x) + C]' = F'(x) = f(x), x \in I$$

（2）设  $F$  和  $G$  是  $f$  在  $I$  上的任意两个原函数，则有

$$[F(x) - G(x)]' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0, x \in I$$

根据 Lagrange 中值定理，有

$$F(x) - G(x) \equiv C, x \in I$$

□

#### 定义 7.1.3

函数  $f$  在区间  $I$  上的全体原函数称为  $f$  在  $I$  上的不定积分，记作

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

其中  $\int$  称为积分号， $f(x)$  为被积函数， $f(x)dx$  为被积表达式， $x$  称为积分变量。

### 7.1.1 定积分

设闭区间  $[a, b]$  上有  $n - 1$  个点, 依次为

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

它们把  $[a, b]$  分为  $n$  个小区间  $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i], i = 1, \cdots, n$ 。这些分点或这些闭子区间构成对  $[a, b]$  的一个分割, 记为

$$T = \{x_0, \cdots, x_n\} \text{ 或 } \{\Delta_1, \cdots, \Delta_n\}$$

小区间  $\Delta_i$  的长度为  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ , 并记

$$\|T\| = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}$$

称为分割的模。

#### 定义 7.1.4

设  $f$  是定义在  $[a, b]$  上的一个函数。对于  $[a, b]$  的一个分割  $T = \{\Delta_1, \cdots, \Delta_n\}$ , 任取点  $\xi \in \Delta_i, i = 1, \cdots, n$ , 并作和式

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

称此和式为函数  $f$  在  $[a, b]$  上的一个积分和, 也称黎曼和。

显然, 积分既与分割  $T$  与有关, 又与所选取的点集  $\{\xi_i\}$  有关。

#### 定义 7.1.5

设  $f$  是定义在  $[a, b]$  上的一个函数,  $J$  是一个确定的实数。若对任给的正数  $\epsilon$ , 总存在某一正数  $\delta$ , 使得对  $[a, b]$  的任何分割  $T$ , 以及在其上任意选取的点集  $\{\xi_i\}$ , 只要  $\|T\| < \delta$ , 就有

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i - J \right| < \epsilon$$

则称函数  $f$  在区间  $[a, b]$  上可积或黎曼可积; 数  $J$  称为  $f$  在  $[a, b]$  上的定积分或黎曼积分, 记作

$$J = \int_a^b f(x) dx = \lim_{\|T\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

其中  $f$  称为被积函数,  $x$  称为积分变量,  $[a, b]$  称为积分区间,  $a, b$  分别称为这个定积分的下限和上限。

#### 定理 7.1.6 【Newton - Leibniz 公式】

若函数  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 且存在原函数  $F$ , 即  $F'(x) = f(x), x \in [a, b]$ , 则  $f$  在  $[a, b]$  上可积, 且

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

**证明** 即证对于任给的  $\epsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$  使得当  $\|T\| < \delta$  时有

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i - [F(b) - F(a)] \right| < \epsilon$$

对于任意分割  $T$ , 在每个小区间  $[x_{i-1}, x_i]$  上对  $F(x)$  使用 Lagrange 中值定理, 则分别存在  $\eta_i \in (x_{i-1}, x_i), i = 1, \dots, n$ , 使得

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n F'(\eta_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\eta_i) \Delta x_i$$

又因为  $f$  在  $[a, b]$  上一致连续, 因此存在  $\delta > 0$  当  $x_1, x_2 \in [a, b]$  且  $|x_1 - x_2| < \delta$  时, 有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

由  $\Delta x_i \leq \|T\| < \delta$  时, 任取  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , 便有  $|\xi_i - \eta_i| < \delta$ , 于是

$$LHS = \left| \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) - f(\eta_i)] \Delta x_i \right| \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \varepsilon$$

于是  $f$  在  $[a, b]$  上可积。 □

### 7.1.2 可积条件

#### 定理 7.1.7

若函数  $f$  在  $[a, b]$  上可积, 则  $f$  在  $[a, b]$  上必定有界。

**证明** 反证, 若  $f$  在  $[a, b]$  上无界, 则对于即对于  $[a, b]$  的任意分割  $T$ , 必存在属于  $T$  的某区间  $\Delta_k$ , 使  $f$  在其上无界。在  $i \neq k$  的各个区间  $\Delta_i$  上取定  $\xi_i$ , 记

$$G = \left| \sum_{i \neq k} f(\xi_i) \Delta x_i \right|$$

任意大的正数  $M$ , 存在  $\xi_k \in \Delta_k$ , 使得

$$|f(\xi_k)| > \frac{M+G}{\Delta x_k}$$

于是有

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \right| \geq |f(\xi_k) \Delta x_k| - \left| \sum_{i \neq k} f(\xi_i) \Delta x_i \right| > \frac{M+G}{\Delta x_k} \cdot \Delta x_k - G = M$$

□

有界函数不一定黎曼可积, 比如 Dirichlet 函数。

设  $T$  为对  $[a, b]$  的任意分割。由  $f$  在  $[a, b]$  上有界, 它在每个  $\Delta_i$  上存在上、下确界:

$$M_i = \sup_{x \in \Delta_i} f(x), m_i = \inf_{x \in \Delta_i} f(x), i = 1, \dots, n$$

作和

$$S(T) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, s(T) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

分别称为  $f$  关于分割  $T$  的上和与下和 (或称达布上和与达布下和, 统称达布和)。任给  $\xi_i \in \Delta_i, i = 1, \dots, n$ , 显然有

$$m(b-a) \leq s(T) \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \leq S(T) \leq M(b-a)$$

与积分和相比较, 达布和只与分割  $T$  有关, 而与点集  $\{\xi_i\}$  无关。

### 命题 7.1.8

给定分割  $T$ ，对于任何点集  $\{\xi_i\}$  而言，上和是所有积分和的上确界，下和是所有积分和的下确界。

**证明** 设  $\Delta_i$  中  $M_i$  是  $f(x)$  的上确界，故可选取点  $\xi = \Delta_i$ ，使  $f(\xi_i) > M_i - \frac{\varepsilon}{b-a}$ ，于是有

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i > \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i - \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = S(T) - \varepsilon$$

即  $S(T)$  是全体积分和的上确界。类似可证  $s(T)$  是全体积分和的下确界。  $\square$

### 命题 7.1.9

设  $T'$  为分割  $T$  添加  $p$  个新分点后所得到的分割，则有

### 定理 7.1.10

函数  $f$  在  $[a, b]$  上可积的充要条件是：人格  $\varepsilon > 0$ ，总存在相应的一个分割  $T$  使得

$$S(T) - s(T) < \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i = \varepsilon$$

其中  $\omega$  称为  $f$  在  $\Delta_i$  上的振幅。

由充要条件，我们可以得到一系列的可积函数类。

### 定理 7.1.11

若  $f$  为  $[a, b]$  上的连续函数，则  $f$  在  $[a, b]$  上可积。

**证明** 由于  $f$  在闭区间  $[a, b]$  上一致连续，即任给  $\varepsilon > 0$ ，存在  $\delta > 0$ ，对  $[a, b]$  中任意两点  $x_1, x_2$ ，只要  $|x_1 - x_2| < \delta$ ，便有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

所以对于在  $[a, b]$  的分割  $T$  满足  $\|T\| < \delta$ ，在  $T$  所属的任一小区间  $\Delta_i$  上，都有

$$\omega_i = M_i - m_i = \sup_{x_1, x_2 \in \Delta_i} |f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

从而

$$\sum_T \omega_i \Delta x_i \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_T \Delta x_i = \varepsilon$$

$\square$

## 7.2 分项积分法

若干微分式的和或差的不定积分，等于每个微分式的各自积分的和或差。

$$\int (f(x) + g(x) - h(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx - \int h(x) dx$$

因此多项式的积分可以简单的通过积分各个单项式得到。

如果一个分式的分母为多项式，则可把它化成最简单的分式再积分。如

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left( \frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a} \right)$$

这里可以通过通分后待定系数得到。于是其积分为

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C$$

对于更复杂的真分式的情况，若要计算的是

$$\int \frac{mx + n}{x^2 + px + q} dx$$

分母不一定能直接分解，但总能进行配方

$$x^2 + px + q = \left( x + \frac{p}{2} \right)^2 + q - \frac{p^2}{4} = t^2 \pm a^2$$

再令  $A = m, B = n - \frac{1}{2}mp$ ，可得

$$\int \frac{mx + n}{x^2 + px + q} dx = \int \frac{At + B}{t^2 \pm a^2} dt = A \int \frac{tdt}{t^2 \pm a^2} + B \int \frac{dt}{t^2 \pm a^2}$$

其中

$$\begin{aligned} A \int \frac{tdt}{t^2 \pm a^2} &= \frac{A}{2} \int \frac{d(t^2 \pm a^2)}{t^2 \pm a^2} = \frac{A}{2} \ln |t^2 \pm a^2| + C \\ B \int \frac{dt}{t^2 + a^2} &= \frac{B}{a} \arctan \frac{t}{a} + C \\ B \int \frac{tdt}{t^2 - a^2} &= \frac{B}{2a} \ln \left| \frac{t - a}{t + a} \right| + C \end{aligned}$$

因此当  $p^2 < 4q$  时，可以得到

$$\begin{aligned} \int \frac{mx + n}{x^2 + px + q} &= \frac{A}{2} \ln |t^2 + a^2| + \frac{B}{a} \arctan \frac{t}{a} + C \\ &= \frac{m}{2} \ln |x^2 + px + q| + \frac{2n - mp}{\sqrt{4q - p^2}} \arctan \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C \end{aligned}$$

当  $p^2 > 4q$  时，可以得到

$$\begin{aligned} \int \frac{mx + n}{x^2 + px + q} &= \frac{A}{2} \ln |t^2 - a^2| + \frac{B}{2a} \ln \left| \frac{t - a}{t + a} \right| \\ &= \frac{m}{2} \ln |x^2 + px + q| + \frac{2n - mp}{2\sqrt{4q - p^2}} \ln \left| \frac{2x + p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2x + p + \sqrt{p^2 - 4q}} \right| + C \end{aligned}$$