数学分析笔记

rogeryoungh

2021 年 5 月 18 日

目录

第一章　实数集与函数

我初次用的书是华师的数分，现在发觉基础部分有相当多的细节。仍待调整。

若无额外说明，皆在 $\mathbb{R}$ 下。

实数集与函数的基础是集合和映射，仍有很多术语不曾了解。

参考自李逸的《基本分析讲义》。

1.1　集合

集合的交并补是熟知的。

定义有序对为 $(a,b) \coloneqq \{\{a\},\{a,b\}\}$，其中 a 称为有序对的第一坐标，而 b 称为第二坐标。特殊的，$(a,a)=\{a\}$。

定义集合的笛卡尔 Cartesian 乘积为

$$A\times B \coloneqq \{(a,b)\mid a\in A\text{且}b\in B\}$$

一般 $A\times B\neq B\times A$。同样可以推广到多个集合

$$\prod X_i \coloneqq X_1\times X_2\times\cdots\times X_n=(X_1\times\cdots\times X_{n-1})\times X_n$$

其元素 x 是多层嵌套，我们可以简记为

$$x=(\cdots(x_1,x_2),x_3),\cdots,x_n)=(x_1,\cdots,x_n)$$

称 $x_i \coloneqq \mathrm{pr}_i(x)$ 为 x 的第 i 个分量，pr 是投影映射。当所有 X_i 都等于 X 时，上述乘积记为 X^n。

1.2　映射

设 C 和 D 为两个给定的集合。

定义 1.2.1【赋值法则】 设 R 是 $C\times D$ 的一个子集，若满足当 $(c,d_1)\in R$ 且 $(c,d_2)\in R\Rightarrow d_1=d_2$，称 R 是一个赋值法则。

赋值法则的定义域 Domain 和像域 Image Set 约定如下

$$\mathbf{Dom}(R)\coloneqq\{c\in C\mid \exists d\in D,(c,d)\in R\}$$
$$\mathbf{Im}(R)\coloneqq\{d\in D\mid \exists c\in C,(c,d)\in R\}$$

定义 1.2.2 设 R 为一个赋值法则，B 为满足 $\mathbf{Im}(R)\subseteq B$ 的一个集合，记二元对 (R,B) 为一个映射，B 称为值域。定义 f 的定义域 A 和像域为 R 的定义域和像域。记作

$$f:A\to B,a\mapsto f(a)$$

称 f 的图为

$$\mathbf{graph}(f) \coloneqq \{(a, f(a)) \in A \times B \mid a \in A\}$$

对任意给定的 A 的子集 A_0，定义 f 在 A_0 上的限制为映射

$$f\mid_{A_0} = f : A_0 \to B$$

称映射 f 和 g 的复合为

$$g \circ f : A \to C, a \mapsto g(f(a))$$

显然 $g \circ f$ 仅当 $\mathbf{Im}(f) \subseteq \mathbf{Dom}(g)$ 时有定义。$f \circ g$ 一般与 $g \circ f$ 不相等。

若映射 f 满足

（1） $f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1, a_2$，称 f 为单射。

（2）对任意的 $b \in B$ 存在 $a \in A$ 满足 $f(a) = b$，称 f 为满射。

（3） f 既是单射又是满射，称 f 为双射。

若 f 为双射，我们定义它的逆映射 f^{-1} 为

$$f^{-1}(b) = a \Leftrightarrow f(a) = b$$

映射 $\diamond$：$X \times X \to X$ 通常也称为集合 X 上的运算，此时我们把 $\diamond(x, y)$ 记做 $x \diamond y$。对 X 中的非空子集定义

$$A \diamond B \coloneqq \diamond(a \times B) = \{A \diamond b \mid a \in A, b \in B\}$$

定义 1.2.3 （1）若 $A \diamond A \subseteq A$，则称 A 在运算 $\diamond$ 下封闭。

（2）若 $x \diamond (y \diamond z) = (x \diamond y) \diamond z$，则称运算 $\diamond$ 是结合的。

（3）若 $x \diamond y = y \diamond x$，则称运算 $\diamond$ 是交换的。

（4）若存在 $e \in X$ 使得 $e \diamond x = x \diamond e = x$，则称 e 为 X 上的单位元。

如果映射定义中的 B 是一个数域，则把映射称为函数。

1.3 关系

简要提及一下关系的部分知识。称集合 $S \times S$ 的子集 C 为关系。把 $(x, y) \in C$ 记作 xCy。

定义 1.3.1 【等价关系】 若集合 S 上的关系 C 满足

（1）自反性：对任意的 $x \in S$ 有 xCx。

（2）对称性：若 xCy 则 yCx。

（3）传递性：若 xCy 且 yCz 则 xCz。

则称 C 为等价关系，一般用 $\sim$ 来表示等价关系。

记 $x \in A$ 的等价类：

$$[x] \coloneqq \{y \in A \mid y \sim x\}$$

定义 1.3.2 【序关系】 若集合 S 上的关系 C 满足

（1）相容性：对任意的 $x, y \in S$ 且 $x \neq y$ 满足要么 xCy 要么 yCx。

（2）非自反性：不存在 $x \in S$ 使得 xCx。

（3）传递性：若 xCy 且 yCz 则 xCz。

则称 C 为序关系，一般用 $<$ 来表示序关系，称 (S, C) 为有序集。

$x < y$ 也可以记作 $y > x$。记号 $x \leqslant y$ 指的是 $x < y$ 或 $x = y$，即是 $x > y$ 的否定。

若在 S 内定义了一种序，便是有序集。

定义 1.3.3 【上界】 设有序集 S 的非空子集 E，若存在 $a \in S$ 使得任取 $x \in E$ 满足 $x \leqslant a$，我们称 E 有上界，a 称为 E 的一个上界。

同样可以得到下界。

定义 1.3.4 【上确界】 设有序集 S 的非空子集 E，且 E 有上界。若存在一个数 $a \in S$ 满足：

（1） a 是 E 的上界：$\forall x \in E$，有 $x \leqslant a$。

（2）任何小于 a 的数不是数集 E 的上界：$\forall \mu < a, \exists x_0 \in E$ 使得 $x_0 > \mu$。

则称数 a 为数集 E 的上确界，记作 $\sup E$。

类似的可定义有界集的下确界 $a = \inf E$。

定义 1.3.5 【最小上界性】 如果有序集 S' 的任何非空有上界子集 E 有最小上界，则称 S 有最小上界性。设 E 是有序集 S 的子集，若对任意的有上界的 E 都有 $\sup E \in S$，那么称 S 有最小上界性。

例如 $\mathbb{Q} \cap (0, \sqrt{2})$ 是 $\mathbb{Q}$ 的非空子集，其上界 $\sqrt{2}$ 并不在 $\mathbb{Q}$ 内。

同样的有最小下界性。可以证明，有最小上界性的一定有最大下界性。展开描述即

定理 1.3.6 设 B 是具有最小上界性的集合 S 的子集，则对任意的有下界的 B 都有 $\inf B \in S$。

证明 对于每个 B，构造 L 为 B 的下界组成的集合，显然每个 B 中的元素都是 L 的上界。由最小上界性知，存在 $\sup L \in S$。

尝试证明 $\inf B = \sup L$。

对于任意的 $x \in B$，若 $x < \sup L$，则存在比 $\sup L$ 小的 L 的上界 x，矛盾。故 $x \geqslant \sup L$，即 $\sup L$ 是 B 的下界。

设 B 的下界 x 有 $x > \sup L$，那么 $x \in L$，则存在比 $\sup L$ 大的 L 元素，矛盾。故不存在比 $\sup L$ 大的 B 的下界。

综上，B 的下界存在且 $\inf B = \sup L \in S$。 □

1.4 域公理

集合 F 上定义的加法 $+$ 和乘法 $\cdot$ 若满足 $(x, y, z \in F)$

F1 加法结合率：$x + (y + z) = (x + y) + z$。

F2 加法交换律：$x + y = y + x$。

F3 存在加法单位元：存在 $0 \in F$，使得对任意 $x \in F$ 有 $0 + x = x$。

F4 加法逆元的存在性：对任意 $x \in F$，总存在 $-x \in F$，使得 $x + (-x) = 0$。

F5 乘法结合率：$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$。

F6 乘法交换律：$x \cdot y = y \cdot x$。

F7 存在乘法单位元：存在 $1 \in F$，使得 $1 \neq 0$ 且对任意 $x \in F$ 有 $1 \cdot x = x$。

F8 乘法逆元的存在性：对任意 $x \in F - \{0\}$，总存在 $x^{-1} \in F$，使得 $x \cdot x^{-1} = 0$。

F9 乘法分配律：$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$。

则称 $(F, +, \cdot)$ 为一个域。

注意 $-x$ 只是一个记号。同样的，x^{-1} 也只是一个记号。

定义 1.4.1 【有序域】 若域 F 是满足如下条件的有序集

（1）当 $x, y, z \in F$ 且 $y < z$ 时，$x + y < x + z$。

（2）如果 $x, y \in F$，且 $x > 0, y > 0$，则 $xy > 0$。

那么称 F 是一个有序域。

例如 $\mathbb{Q}$ 是有序域。

定理 1.4.2 【存在定理】 具有最小上界性的有序域 $\mathbb{R}$ 存在，且包容着 $\mathbb{Q}$ 作为子域。

这个命题的证明较为复杂，是从 $\mathbb{Q}$ 出发构造 $\mathbb{R}$，而且其中有很多重要的信息，决定单独一章，这里略过。

定理 1.4.3 【Achimedes 原理】 对于 $x, y \in \mathbb{R}$ 且 $x > 0$，那么必定存在正整数 n，使得 $nx > y$。

证明 设 $A = \{nx \mid n \in \mathbb{N}^+\}$，若不存在 n 则 y 将是 A 的一个上界，由最小上界性可知 A 的上确界存在。

又因为小于上确界的数 $\sup A - x$ 不是上确界，即存在 $m \in \mathbb{N}^+$ 使得 $\sup A - x < mx$，即 $\sup A < (m+1)x$，矛盾。

故必定存在 n 使得 $nx > y$。 □

定义 1.4.4 【度量空间】 称集合 X 的元素为点，若存在 X 上双变量的函数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$，满足（$x, y, z \in R$）

（1）若 $x \neq y$，则 $d(x, y)$；仅 $d(x, x) = 0$。

（2）对于任意的 x, y 都有 $d(x, y) = d(y, x)$。

（3）对于任意的 z，都有 $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$。

就称 (X, d) 是一个度量空间（度量空间），函数 d 称作其上的距离函数。

这里的空间的含义是线性空间。

对于 X 的子集 Y，定义其距离函数

$$d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}, (y_1, y_2) \mapsto d_Y(y_1, y_2) = d(y_1, y_2)$$

则 (Y, d_Y) 仍是度量空间，称 d_Y 是 d 在 Y 上的诱导度量。(Y, d_Y) 称作是 (X, d) 的子（度量）空间。

定义 1.4.5 【稠密性】 给定度量空间 (X, d)，Y 是 X 的子集。如果对任意的 $x \in X$ 和任意小的 $\varepsilon > 0$，都存在 $y \in Y$，使得 $d(y, x) < \varepsilon$，我们就称 Y 在 X 中是稠密的。

例 1.4.6 $\mathbb{Q}$ 在 $\mathbb{R}$ 中稠密：对于 $x, y \in \mathbb{R}$ 且 $x < y$，那么必定存在 $p \in \mathbb{Q}$，使得 $x < p < y$。

证明 由 Achimedes 原理，可设存在 $n \in \mathbb{N}^+$ 使得 $n(y - x) > 1$。

再设存在 $m_1, m_2 \in \mathbb{N}^+$，使得 $m_1 > nx, m_2 > -nx$。于是

$$-m_2 < nx < m_1$$

因此存在 $m \in \mathbb{N}^+$ 有 $-m_2 \leqslant m \leqslant m_1$ 使得

$$m - 1 \leqslant nx < m \leqslant 1 + nx < ny$$

从而存在 $p = m/n$ 使得 $x < p < y$。 □

1.5 数系的构造

直到我读了陶哲轩的《实分析》时，才感到接受了实数理论。实数的定义是公理化的，不是构造性的。

更具体的说，我们不需要知道实数是什么，只需知道这些对象有什么性质，我们就可以抽象的处理它们。从其他的数学对象出发来构造实数是可能的，有多种多样的模型，只要它们服从所有的公理并正确的运作，都是满足的。

实数究竟有多少性质？从自然数开始。

公理 1.5.1 【Peano 公理】 若集合 N 和其上的映射 $v(n)$ 满足

（1） $0 \in N$。

（2）若 $n \in N$，则 $v(n) \in N$。

（3）对于任意的 $n \in N$，$v(n) \neq 0$。

（4）若 $v(m) \neq v(n)$，则 $m \neq n$。

（5）【归纳原理】设 $P(n)$ 是关于自然数的性质，假设只要 $P(n)$ 为真，则 $P(v(n))$ 也为真；且 $P(0)$ 为真。那么对 N 中所有的元素 P 都为真。

那么称 N 为自然数，记作 $\mathbb{N}$，$v(n)$ 称为后继函数。

1.5.1 自然数

设 $m, n \in \mathbb{N}$，定义 $\mathbb{N}$ 上的加法 $+$ 和乘法 $\cdot$ 为

$$0 + m \coloneqq m, \quad v(n) + m \coloneqq v(n+m)$$

$$0 \cdot m \coloneqq m, \quad v(n) \cdot m \coloneqq n \cdot m + m$$

我们可以利用归纳原理推出我们熟悉的一些性质。

定理 1.5.2 【$\mathbb{N}$ 的代数算律】 对于 $a, b, c \in \mathbb{N}$ 有

（1）加法是结合的和交换的，且有单位元 0。

（2）乘法是结合的和交换的，且有单位元 1。

（3）分配律：$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$。

定义 1.5.3 【$\mathbb{N}$ 的序】 设 $m, n \in \mathbb{N}$。

（1）若存在 $a \in \mathbb{N}$，使得 $n = m + a$，称 m 小于等于 n，记作 $m \leqslant n$。

（2）若 $n \geqslant m$ 且 $n \neq m$，则称 m 严格小于 n，记作 $m < n$。

可以验证，$<$ 和 $\leqslant$ 是 $\mathbb{N}$ 上的序关系。

定理 1.5.4 【加法保序】 对于 $a, b \in \mathbb{N}$，若 $a > b$，则 $a + c > b + c$。

1.5.2 整数

接下来几节，都是记 a, b, c 为当前集合的元素，x, y, z 都是被构造的集合的元素。

为了表达整数，定义二元组 (a, b)，其中 $a, b \in \mathbb{N}$。记全体二元组的集合为 Z。我们约定

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$$

因为自然数的序是已定义的，于是定义 Z 上的序关系

$$(a, b) \leqslant (c, d) \Leftrightarrow a + d \leqslant b + c$$

然后是定义 N 上的加法和乘法

$$(a, b) + (c, d) \coloneqq (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) \coloneqq (ac, bd)$$

可以验证，$(n, 0)$ 与 n 有相同的性状，我们可以令其相等，从而把自然数嵌入到整数内。至此，我们可以着手验证整数是否满足我们预想的性质。

定理 1.5.5 【$\mathbb{Z}$ 的代数算律】 对于 $x, y, z \in \mathbb{Z}$ 有

（1）加法是结合的和交换的，且有单位元 0，逆元存在。

（2）乘法是结合的和交换的，且有单位元 1。

（3）分配律：$(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$。

即 $\mathbb{Z}$ 是一个交换环。于是

定理 1.5.6 【$\mathbb{Z}$ 是有序域】 （1）加法保序：当 $x,y,z\in\mathbb{Z}$ 且 $y<z$ 时，$x+y<x+z$。

（2）乘法保序：如果 $x,y\in\mathbb{Z}$，且 $x>0,y>0$，则 $xy>0$。

我们有理由相信，(a,b) 符合我们对整数的一切想象。因此 $Z=\mathbb{Z}$。

另外的，定义整数的负运算为 $-(a,b)=(b,a)$，以此定义减法

$$x-y\coloneqq x+(-y)$$

可以验证

$$(a,0)-(b,0)=(a,b)=a-b$$

1.5.3 有理数

类似的，记整数的二元组 (a,b)，其中 $a,b\in\mathbb{Z},b\neq 0$，记全体二元组的集合为 Q。我们约定

$$(a,b)=(c,d)\Leftrightarrow ad=bc$$

因为整数的序是已定义的，于是定义 Q 上的序关系

$$(a,b)\leqslant(c,d)\Leftrightarrow ad\leqslant bc$$

于是定义 Q 上的加法和乘法

$$(a,b)+(c,d)\coloneqq(ad+bc,b+d)$$

$$(a,b)\cdot(c,d)\coloneqq(a\cdot c,b\cdot d)$$

定义加法逆元为 $-(a,b)\coloneqq(-a,b)$。可以验证，$(a,1)$ 与 a 有相同的性状，我们可以令其相等，从而把整数嵌入到有理数内。

至此，我们可以着手验证有理数是否满足我们预想的性质。

定理 1.5.7 【$\mathbb{Q}$ 的代数算律】 对于 $x,y,z\in\mathbb{Q}$ 有

（1）加法是结合的和交换的，且有单位元 0，逆元存在。

（2）乘法是结合的和交换的，且有单位元 1，非零元逆元存在。

（3）分配律：$(x+y)\cdot z=x\cdot z+y\cdot z$。

即 $\mathbb{Q}$ 是一个域。

定理 1.5.8 【$\mathbb{Q}$ 是有序域】 （1）加法保序：当 $x,y,z\in\mathbb{Q}$ 且 $y<z$ 时，$x+y<x+z$。

（2）乘法保序：如果 $x,y\in\mathbb{Q}$，且 $x>0,y>0$，则 $xy>0$。

我们有理由相信，(a,b) 符合我们对有理数的一切想象。因此 $Q=\mathbb{Q}$。

另外，定义倒数 $(a,b)^{-1}=(b,a)$，显然 $a,b\neq 0$。从而定义除法

$$x/y\coloneqq x\cdot y^{-1}$$

可以验证,

$$(a,1)/(b,1)=(a,b)=a/b$$

1.5.4 实数 · Dedekind 分割

定义 1.5.9 【Dedekind 分割】 设 $A\subset\mathbb{Q},A'=\complement_{\mathbb{Q}}A$，若满足以下三个条件

（1） $A\neq\varnothing,A'\neq\varnothing$；

（2）当 $p\in A,q\in A'$ 时，$p<q$；

（3）任给 $p\in A$，存在 $q\in A$，使得 $p<q$；

则称 A 为 $\mathbb{Q}$ 的一个分割，记分割的全体为 R。

集合的相等即是 R 上的等价关系。R 上的序关系定义是

$$A \subseteq B \Leftrightarrow A \leqslant B$$

定义加法

$$A + B \coloneqq \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

于是可以定义负运算

$$-A \coloneqq \{s \in \mathbb{Q} \mid \exists r > 0, -s - r \in \complement_{\mathbb{Q}} A\}$$

$$-A \coloneqq \{s \in \mathbb{Q} \mid \exists r \in \complement_{\mathbb{Q}} A, s < -r\}$$

然而乘法因为负数的问题，我们需要分类讨论。R 中存在加法单位元 $0^* = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geqslant 0\}$，对于正实数 $A, B \geqslant 0^*$，定义乘法

$$A \cdot B \coloneqq \{p \in \mathbb{Q} \mid \text{存在 } 0 < a \in A,\ \text{存在 } 0 < b \in B, p < ab\}$$

同时

$$A \cdot B \coloneqq \begin{cases} -((-A) \cdot B), & A < 0^*, B \geqslant 0^* \\ -(A \cdot (-B)), & A \geqslant 0^*, B < 0^* \\ -((-A) \cdot (-B)), & A < 0^*, B < 0^* \end{cases}$$

当 $A > 0^*$ 时，定义乘法逆元

$$A^{-1} \coloneqq \{s \in \mathbb{Q} \mid \exists r \in \complement_{\mathbb{Q}} A, s < r^{-1}\}$$

当 $A < 0^*$ 时，定义乘法逆元为 $A^{-1} \coloneqq -(-A^{-1})$。

至此，我们可以着手验证实数是否满足我们预想的性质。

定理 1.5.10 【$\mathbb{R}$ 的代数算律】 对于 $x, y, z \in \mathbb{R}$ 有

（1）加法是结合的和交换的，且有单位元 0，逆元存在。

（2）乘法是结合的和交换的，且有单位元 1，非零元逆元存在。

（3）分配律：$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$。

即 $\mathbb{R}$ 是一个域。

定理 1.5.11 【$\mathbb{R}$ 是有序域】 （1）加法保序：当 $x, y, z \in \mathbb{R}$ 且 $y < z$ 时，$x + y < x + z$。

（2）乘法保序：如果 $x, y \in \mathbb{R}$，且 $x > 0, y > 0$，则 $xy > 0$。

我们有理由相信，$\mathrm{LIM}(a_n)$ 符合我们对实数性质的一切想象，从而 $R = \mathbb{R}$。

实数和有理数的最基本的一个区别就是有最小上界性。

定理 1.5.12 $\mathbb{R}$ 有最小上界性。

证明 设 α 是 R 的非空子集，设 α 存在上界 B。令

$$S = \bigcup_{A \in \alpha} A$$

下证 $S = \sup A$。

首先证明 S 是分割。显然 S 非空，又因为对任意的 $A \in \alpha$ 都有 $A \subset B$，故 $S \subset B$，因此 $S \neq \mathbb{Q}$。取 $p \in S, q \notin S$，于是存在 $A_0 \in \alpha$ 使得 $p \in A_0$，此时 $q \notin A_0$，故 $p < q$。设 $p \in S$，于是存在 $A_0 \in \alpha$ 使得 $p \in A_0$，此时存在 $q \in A_0$ 使得 $p < q$，且 $q \in S$。

其次，对任意的 $A \in \alpha$ 必然 $A \leqslant S$，故 S 是 A 的一个上界。若 $S' < S$，则有 $s \in S, s \notin S'$，同时存在 $A_0 \in \alpha$ 使得 $s \in A_0$，故 $S' < A_0$，故 S' 不是 A 的上界。

因此 $S = \sup A$。 □

1.5.5 实数 · Cauchy 序列

我们试图得到实数，是因为有理数还不足以表示所有的数，比如 $x^2 = 2$ 的解。得到实数和前面的方法有所不同，要复杂的多。

一个有理数上的序列 $\{a_n\}$，是一个从集合 $\mathbb{N}$ 到 $\mathbb{Q}$ 的一个映射，即我们以前说的数列。

对于 $\mathbb{Q}$ 上的无限序列 $\{a_n\}$，若对于任意的 $\varepsilon > 0$ 存在 $N \geqslant 0$ 使得当 $j, k \geqslant N$ 时有

$$d(a_j, a_k) < \varepsilon$$

则称序列 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 序列，记作 $\mathrm{LIM}(a_n)$。记 Cauchy 序列的全体为集合 R。

对于 Cauchy 序列 $\mathrm{LIM}(a_n), \mathrm{LIM}(b_n)$，若对于任意的 $\varepsilon > 0$ 存在 $N \geqslant 0$ 使得当 $n \geqslant N$ 时有

$$d(a_n, b_n) < \varepsilon$$

则记作 $\mathrm{LIM}(a_n) = \mathrm{LIM}(b_n)$。

定义 R 的序关系，对于实数 x, y，若存在 Cauchy 序列满足 $x = \mathrm{LIM}(a_n), y = \mathrm{LIM}(b_n)$，对于 $n \geqslant 1$ 有 $a_n \leqslant b_n$，则 $\mathrm{LIM}(a_n) \leqslant \mathrm{LIM}(b_n)$。

于是定义 R 上的加法和乘法

$$\mathrm{LIM}(a_n) + \mathrm{LIM}(b_n) \coloneqq \mathrm{LIM}(a_n + b_n)$$
$$\mathrm{LIM}(a_n) \cdot \mathrm{LIM}(b_n) \coloneqq \mathrm{LIM}(a_n b_n)$$

定义负运算 $-\mathrm{LIM}(a_n) \coloneqq \mathrm{LIM}(-a_n)$。

定义倒数时会因为恼人的 0 出现了一些困难，解决的方法即是把 0 排出。若存在 $c \in \mathbb{Q}$ 满足 $c > 0$ 使得 $d(a_n, 0) \geqslant c$，则称 $\{a_n\}$ 为限制离开零的序列。若 x 为不为零的实数，则必存在一个限制离开零的 Cauchy 序列 $\mathrm{LIM}(a_n) = x$。

于是我们可以定义，设 x 为一个不为零的实数，则存在限制离开零的 Cauchy 序列 $x = \mathrm{LIM}(a_n)$，定义倒数为

$$x^{-1} \coloneqq \mathrm{LIM}(a_n^{-1})$$

可以验证，常数 Cauchy 序列 $\{a_n\}$ 与 a 具有相同的性状，因此可以令它们相等，从而使有理数嵌入到实数中。

至此，我们可以着手验证实数是否满足我们预想的性质，在 Dedekind 分割中提过了，这里不再重复。

另外，定义 R 上的 Cauchy 序列，若对于任意的实数 $\varepsilon > 0$ 存在 $N \geqslant 0$ 使得当 $j, k \geqslant N$ 时有

$$d(a_j, a_k) \leqslant \varepsilon$$

可以证明，R 上的 Cauchy 序列与 $\mathbb{Q}$ 上的 Cauchy 序列等价。

若存在实数 L 满足，存在 $N > 0$ 使得当 $n \geqslant N$ 时，都有 $d(a_n, L) \leqslant \varepsilon$，则 a_n 收敛于 L，记作

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

可以验证

$$\mathrm{LIM}(a_n) = \lim_{n \to \infty} a_n$$

1.5.6 复数

记实数的二元组 (a, b)，其中 $a, b \in R$，记全体二元组的集合为 C。我们约定

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = b \wedge c = d$$

复数没有序关系。定义 C 上的加法和乘法

$$(a,b)+(c,d) \coloneqq (a+c, b+d)$$
$$(a,b)\cdot(c,d) \coloneqq (ac-bd, ad+bc)$$

定义加法逆元为 $-(a,b) \coloneqq (-a,-b)$。可以验证，$(a,0)$ 与 a 具相同的性状，我们可以令其相等，从而把实数嵌入到复数域内。

定义非零数的乘法逆元 $(a,b)^{-1} \coloneqq \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$。

第二章　数列极限

2.1　数列极限的概念

定义 2.1.1 【数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义】 设 $\{a_n\}$ 为数列，A 为定数。若对任给的正数 ε，总存在正整数 $N = N(\varepsilon)$，使得当 $n > N$ 时有

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 A，或称 A 为数列 $\{a_n\}$ 的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A\text{，或 } a_n \to a(n \to \infty)$$

等价定义：任给 $\varepsilon > 0$，若在 $U(A;\varepsilon)$ 之外数列 $\{a_n\}$ 中的项至多只有有限个，则称 $\{a_n\}$ 收敛于极限 A。

若对于数列 $\{a_n\}$，不存在 A 使得 $a_n \to A$，则称数列 $\{a_n\}$ 发散。

特殊地，若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，则称 $\{a_n\}$ 为无穷小数列。

定义 2.1.2 【无穷大数列】 若数列 $\{a_n\}$ 满足：对任意正数 $M > 0$，存在正整数 N，使得当 $n > N$ 时，

（1） $a_n > M$，则称数列 $\{a_n\}$ 发散于正无穷大，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$，或 $a_n \to +\infty$。

（2）有 $a_n < M$，则称数列 $\{a_n\}$ 发散于负无穷大，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$，或 $a_n \to -\infty$。

2.2　收敛数列的性质

定理 2.2.1 【唯一性】 若数列 $\{a_n\}$ 收敛，则它只有一个极限。

证明　如果数列 $\{a_n\}$ 同时以 A, B 为极限，即任给 $\varepsilon > 0$，总存在 N_1, N_2，使得

$$|a_n - A| < \varepsilon, n > N_1; \quad |a_n - B| < \varepsilon, n > N_2$$

那么当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时需要恒成立

$$2\varepsilon > |a_n - A| + |a_n - B| \geqslant |A - B|$$

当 $A \neq B$ 时，对于 $2\varepsilon < |A - B|$ 不恒成立，因此只能 $A = B$。 □

定理 2.2.2 【有界性】 若数列 $\{a_n\}$ 收敛，则 $\{a_n\}$ 有界。

证明　不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$。令 $\varepsilon = 1$，那么存在 $n > N$ 使得

$$|a_n - A| \leqslant 1$$

令

$$M = \{|a_1|, \cdots, |a_N|, |A - 1|, |A + 1|\}$$

那么对任意正整数 n，总有 $|a_n| \leqslant M$。 □

定理 2.2.3 【保不等式性，保序性】 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$，则有

（1）如果存在 $n > N$ 使得 $a_n \geqslant b_n$ 恒成立，则 $A \geqslant B$。

（2）反之，如果 $A > B$，则存在 $n > N_1$ 使得 $a_n > b_n$ 恒成立。

证明 （1）如果设 $B - A = 2\delta > 0$，那么存在 $N_2, N_3 > N$

$$|a_n - A| < \delta, n > N_2; \qquad |b_n - B| < \delta, n > N_3$$

于是当 $n > \max\{N_2, N_3\}$ 时有

$$a_n < A + \delta = B - \delta < b_n$$

因此矛盾，故 $A \geqslant B$。

（2）设 $A - B = 2\delta > 0$，那么存在 N_2, N_3

$$|a_n - A| < \delta, n > N_2; \qquad |b_n - B| < \delta, n > N_3$$

于是存在 $N_1 = \max\{N_2, N_3\}$，当 $n > N_1$ 时有

$$a_n > A - \delta = B + \delta > b_n$$

□

若 b_n 是常数列，$A \neq 0$，我们还可得到推论：存在 N，使得当 $n > N$ 时，有

$$\frac{1}{2}|A| < |a_n| < \frac{3}{2}|A|$$

定理 2.2.4 【迫敛性，夹逼定理】 设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 满足当 $n > N_0$ 有 $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$。若

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A = \lim_{n\to\infty} c_n$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$。

证明 即对于任给的 $\varepsilon > 0$，存在 N_1, N_2，使得当 $n > N_1$ 有

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

当 $n > N_2$ 有

$$A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon$$

因此当 $n > \max\{N_0, N_1, N_2\}$ 时，有

$$A - \varepsilon < a_n \leqslant b_n \leqslant c_n < A + \varepsilon$$

□

定理 2.2.5 【四则运算】 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$，则有

（1）$\{\alpha a_n + \beta b_n\}$ 收敛到 $\alpha A + \beta B$，其中 α, β 为常数。

（2）$\{a_n b_n\}$ 收敛到 AB。

（3）当 $B \neq 0$ 时，$\{a_n / b_n\}$ 收敛到 A/B。

证明 （1）任给 $\varepsilon > 0$，存在 N_1, N_2 使得

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2|\alpha| + 1}, n > N_1; \qquad |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2|\beta| + 1}, n > N_2$$

则当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时有

$$\begin{aligned}
|(\alpha a_n + \beta b_n) - (\alpha A + \beta B)| &\leqslant |\alpha||a_n - A| + |\beta||b_n - B| \\
&< \frac{\varepsilon|\alpha|}{2|\alpha|+1} + \frac{\varepsilon|\beta|}{2|\beta|+1} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

（2）由收敛数列的有界性，存在 M 使得 $|a_n| \leqslant M$，那么

$$0 \leqslant |a_n b_n - AB| = |(a_n - A)b_n + A(b_n - B)| \leqslant M|a_n - A| + |A||b_n - B|$$

由迫敛性知 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n b_n - AB| = 0$。

（3）由保号性的推论，存在 N 使得当 $n > N$ 时有 $|b_n| > \dfrac{|B|}{2}$，那么

$$0 \leqslant \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right| = \frac{|b_n - B|}{|b_n||B|} \leqslant \frac{2}{|B|^2}|b_n - B|$$

由迫敛性知 $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{1}{b_n} - \dfrac{1}{B}\right| = 0$。 □

定义 2.2.6 【数列的子列】 设 $\{a_n\}$ 为数列，如果 $\{n_k\}$ 是一列严格递增的正整数，则数列 $\{a_{n_k}\}$ 称为数列 $\{a_n\}$ 的一个子列。

特殊的子列 $\{a_{2k}, a_{2k-1}\}$ 分别称为偶子列与奇子列。

定理 2.2.7 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件：$\{a_n\}$ 的任何子列都收敛。

2.3 数列极限存在的条件

定义 2.3.1 若数列 $\{a_n\}$ 各项满足关系式 $a_n \leqslant a_{n+1} (a_n \geqslant a_{n+1})$，则称 $\{a_n\}$ 为递增（递减）数列，统称为单调数列。

定理 2.3.2 【单调有界定理】 单调有界数列必有极限。

定理 2.3.3 【致密性定理】 任何有界数列必定有收敛的子列。

2.4 Cauchy 准则

定义 2.4.1 设 $\{a_n\}$ 为数列，如果任给 $\varepsilon > 0$，均存在 $N(\varepsilon)$ 使当 $m, n > N(\varepsilon)$ 时有

$$|a_m - a_n| < \varepsilon$$

则称 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 数列或基本列。

定理 2.4.2 Cauchy 数列必定时有界数列。

证明 取 $\varepsilon = 1$，则存在 N 使得当 $m, n > N$ 时有

$$|a_m - a_n| < 1$$

令 $M = \max\{|a_k| + 1 \mid 1 \leqslant k \leqslant N+1\}$，则当 $n \leqslant N$ 时显然有 $|a_n| \leqslant M$，而当 $n > N$ 时有

$$|a_n| \leqslant |a_n - a_{N+1}| + |a_{N+1} < 1 + |a_{N+1}| \leqslant M$$

这说明 $\{a_n\}$ 是有界数列。 □

定理 2.4.3 【Cauchy 收敛准则】 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 数列当且仅当它是收敛的。

证明 （1）充分性：设 $\{a_n\}$ 收敛到 A，则任给 $\varepsilon > 0$ 存在 N，当 $n > N$ 时有

$$|a_n - A| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

因此当 $m, n > N$ 时有

$$|a_m - a_n| \leqslant |a_m - A| + |A - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

这说明 a_n 为 Cauchy 数列。

（2）必要性：Todo …… □

Cauchy 收敛准则的条件称为 Cauchy 条件。

2.5 Stolz 公式

定理 2.5.1 对于任意的 $1 \leqslant k \leqslant n$，设 $b_k > 0$ 且 $m \leqslant \dfrac{a_k}{b_k} \leqslant M$，则有

$$m \leqslant \frac{\sum a_n}{\sum b_n} \leqslant M$$

定理 2.5.2 【Stolz 公式一】 设数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$，且 $\{y_n\}$ 严格单调地趋于 $+\infty$，如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = A$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = A$$

证明 分类讨论 Todo…… □

定理 2.5.3 【Stolz 公式二】 设数列 $\{y_n\}$ 严格单调地趋于 0，且数列 $\{x_n\}$ 也收敛到 0，那么如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = A$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = A$$

证明 分类讨论 Todo…… □

2.6 例题

问题 2.6.1 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，求证：$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum a_n}{n} = A$。

解 即对于任给的 $\varepsilon > 0$，存在 $n > N_1$ 使得

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

那么变形有

$$\left|\frac{\sum a_n}{n} - A\right| \leqslant \frac{\sum |a_n - A|}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{N_1} |a_k - A|}{n} + \frac{\sum_{k=N_1+1}^{n} |a_k - A|}{n}$$

注意到 $\sum_{k=1}^{N_1} |a_k - A|$ 已经为定值，从而存在 $n > N_2$ 使得

$$\frac{\sum_{k=1}^{N_1} |x_k - A|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

因此当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时有

$$LHS < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n - N_1}{n} \times \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

第三章　函数极限

3.1　函数极限的概念

定义 3.1.1　设 f 为定义在 $[a,+\infty)$ 上的函数，A 为定数。若对任给的 $\varepsilon>0$，存在正数 $M=M(\varepsilon)\geqslant a$，使得当 $x>M$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称函数 f 当 x 趋于 $+\infty$ 时以 A 为极限，记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to+\infty)$$

类似的有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$。

不难证明

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=A$$

定义 3.1.2　设函数 f 在 $U^\circ(x_0;\delta')$ 内有定义，A 为定数。若对任给的 $\varepsilon>0$，存在正数 $\delta<\delta'$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称函数 f 当 x 趋于 x_0 时以 A 为极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0)$$

定义 3.1.3　设函数 f 在 $U^\circ_+(x_0;\delta')$ 内有定义，A 为定数。若对任给的 $\varepsilon>0$，存在正数 $\delta<\delta'$，使得当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称函数 f 当 x 趋于 x_0^+ 时以 A 为极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0^+)$$

类似的还有左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$，统称为单侧极限。又可记为

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0^+} f(x) \text{ 与 } f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

同理还有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A$$

3.2　函数极限的性质

定理 3.2.1 【唯一性】　若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则此极限是唯一的。

定理 3.2.2 【局部有界性】　若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则 f 在 x_0 的某空心邻域 $U^\circ(x_0)$ 上有界。

定理 3.2.3 【保不等式性】　设 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 与 $\lim_{x\to x_0} g(x)$ 均存在。若存在正数 N_0，使得当 $n>N_0$ 时，有 $a_n\leqslant b_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty} b_n$。

定理 3.2.4 【迫敛性】 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$，且在某 $U^\circ(x_0;\delta')$ 上有

$$f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)$$

则 $\lim_{x\to x_0} h(x)=A$。

定理 3.2.5 【四则运算法则】 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 均存在，则

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} g(x)$$

若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$，则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$$

3.3 函数极限存在的条件

定理 3.3.1 【海涅（Heine）定理，归结原则】 若 $f(x)$ 在 $U^\circ(x_0;\delta')$ 上有定义。$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充要条件是：任何含于 $U^\circ(x_0;\delta')$ 且以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}$，极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x_n)$ 都存在且相等。

即若对任何 $x_n\to x_0(n\to\infty)$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$。

定理 3.3.2 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某空心右邻域 $U_+^\circ(x_0)$ 有定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$ 的充要条件是：对任何以 x_0 为极限的递减数列 $\{x_n\}\subset U_+^\circ(x_0)$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$。

定理 3.3.3 设 $f(x)$ 为定义在 $U_+^\circ(x_0)$ 上的单调有界函数，则右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$ 存在。

定理 3.3.4 【Cauchy 准则】 设 $f(x)$ 在 $U^\circ(x_0;\delta')$ 上有定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充要条件是：任给 $\varepsilon>0$，存在正数 $\delta(<\delta')$，使得对任何 $x',x''\in U^\circ(x_0,\delta)$，有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。

3.4 两个重要的极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$$

3.5 无穷小量与无穷大量

定义 3.5.1 【无穷小量】 设函数 f 在某 $U^\circ(x_0)$ 上有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，则称 f 为当 $x\to x_0$ 时的无穷小量。

定义 3.5.2 【有界量】 设函数 f 在某 $U^\circ(x_0)$ 上有界，则称 f 为当 $x\to x_0$ 时的有界量。

无穷小量收敛于 0 的速度有快有慢。设当 $x\to x_0$ 时，f 与 g 均为无穷小量。

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，则称当 $x\to x_0$ 时 f 为 g 的高阶无穷小量，或称 g 为 f 的低阶无穷小量。
记作

$$f(x)=o(g(x))(x\to x_0)$$

特别地，f 为当 $x \to x_0$ 时的无穷小量记作

$$f(x) = o(1)(x \to x_0)$$

若存在正数 K 和 L，使得在某 $U^\circ(x_0)$ 上有

$$K \leqslant \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leqslant L$$

则称 f 与 g 为当 $x \to x_0$ 时的同阶无穷小量。特别当

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = c \neq 0$$

时，f 与 g 必为同阶无穷小量。

若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ 则称 f 与 g 是当 $x \to x_0$ 时的等价无穷小量。记作

$$f(x) \sim g(x)(x \to x_0)$$

注意并不是任何两个无穷小量都可以进行这种阶的比较。例如 $x \to 0$ 时，$x \sin \dfrac{1}{x}$ 和 x^2 都是无穷小量，但它们的比都不是有界量。

定理 3.5.3 设函数 f, g, h 在 $U^\circ(x_0)$ 上有定义，且有 $f(x) \sim g(x)(x \to x_0)$，则

1. 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)h(x) = A$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)h(x) = A$。
2. 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{h(x)}{f(x)} = B$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{h(x)}{g(x)} = B$

定义 3.5.4 【无穷大量】 设函数 f 在某 $U^\circ(x_0)$ 上有定义，若对任给的 $G > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $x \in U^\circ(x_0; \delta) \subset U^\circ(x_0)$ 时，有 $|f(x)| > G$，则称函数 f 当 $x \to x_0$ 时有非正常极限 ∞，记作 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$。

3.6 常见等价无穷小

实际上这些等价无穷小就是 Talor 展开。

$$\begin{aligned}
\frac{x}{1-x} &= x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 && +O(x^6) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} && +O(x^6) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} && +O(x^7) \\
1 - \cos x &= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} && +O(x^6) \\
\mathrm{e}^x - 1 &= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} && +O(x^6) \\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} && +O(x^7) \\
\sqrt{x+1} - 1 &= \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \frac{7x^5}{256} && +O(x^6) \\
\arcsin x &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} && +O(x^7) \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} && +O(x^7)
\end{aligned}$$

第四章　函数的连续性

4.1　连续性的概念

定义 4.1.1 【连续性】 设函数 f 在某 $U(x_0)$ 上有定义。若

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

则称 f 在点 x_0 连续。

记 $\Delta x = x - x_0$，称为自变量 x 在点 x_0 的增量或改变量。设 $y_0 = f(x_0)$，相应的函数 y 在点 x_0 的增量记为

$$\Delta y = f(x) - f(x) = f(x + \Delta) - f(x_0) = y - y_0$$

连续性的 $\varepsilon - \delta$ 形式定义: 若对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, 则称函数 f 在点 x_0 连续。

或者进一步表示为

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right)$$

定义 4.1.2 设函数 f 在某 $U_+(x_0)$ 上有定义。若

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

则称 f 在点 x_0 右连续。同理左连续。

因此函数 f 在点 x_0 连续的充要条件是：f 在点 x_0 既是左连续，又是右连续。

定义 4.1.3 【间断点】 设函数 f 在某 $U^\circ(x_0)$ 上有定义。若 f 在点 x_0 无定义，或 f 在点 x_0 有定义而不连续，则称点 x_0 为函数 f 的间断点或不连续点。

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，而 f 在点 x_0 无定义，或有定义但 $f(x_0) \neq A$，则称点 x_0 为 f 的可去间断点。

若函数 f 在点 x_0 的左、右极限都存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$，则称点 x_0 为函数 f 的跳跃间断点。

可去间断点与跳跃间断点统称为第一类间断点，所有其他形式的间断点统称为第二类间断点。

若函数 f 在区间 I 上的每一点都连续，则称 f 为 I 上的连续函数。对于闭区间或半开区间的端点，函数在这些点上连续是指左连续或右连续。

4.2　连续函数的性质

定理 4.2.1 【局部有界性】 若函数 f 在点 x_0 连续，则 f 在某 $U(x_0)$ 上有界。

定理 4.2.2 【局部保号性】 若函数 f 在点 x_0 连续，且 $f(x_0) > 0$，则对任何正数 $r < f(x_0)$，存在某 $U(x_0)$，使得对一切 $x \in U(x_0)$，有 $f(x) > r$。

定理 4.2.3 【四则运算】 若函数 f,g 在点 x_0 连续，则 $f \pm g, f \cdot g, f/g$ 也都在点 x_0 连续。

定理 4.2.4 若函数 f 在点 x_0 连续，g 在点 u_0 连续，$u_0 = f(x_0)$，则复合函数 $g \circ f$ 在 x_0 连续。

定义 4.2.5 设 f 为定义在数集 D 上的函数。若存在 $x_0 \in D$，使得对一切 $x \in D$，有 $f(x_0) \geq f(x)$，则称 f 在 D 上有最大值，并称 $f(x_0)$ 为 f 在 D 上的最大值。

定理 4.2.6【最大、最小值定理】 若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 f 在闭区间 $[a,b]$ 上有最大值与最小值。

定理 4.2.7 【介值定理】 若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a) \neq f(b)$。若 μ 为介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任何实数。则至少存在一点 $x_0 \in (a,b)$ 使得 $f(x_0) = \mu$。

定理 4.2.8 若函数 f 在 $[a,b]$ 上严格单调并连续,则反函数 f^{-1} 在其定义域 $[\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}]$ 上连续。

定义 4.2.9 设 f 是定义在区间 I 上的函数。若对任给的 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ 使得对任何 $x', x'' \in I$，只要 $|x' - x''| < \delta$ 就有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

就称函数 f 在区间 I 上一致连续。

定理 4.2.10 【一致连续性】 若函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 f 在 $[a,b]$ 上一致连续。

4.3 初等函数的连续性

定理 4.3.1 设 $p > 0$，a,b 为任意两个实数，则有

$$p^a \cdot p^b = p^{a+b}, (p^a)^b = p^{ab}$$

定理 4.3.2 指数函数 $a^x (a > 0)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是连续的。

第五章　导数和微分

5.1　导数的定义

定义 5.1.1　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域有定义，若极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在，则称函数 f 在点 x_0 可导，并称该极限为函数 f 在点 x_0 的导数，记作 $f'(x_0)$。

定理 5.1.2　若函数 f 在点 x_0 可导，则 f 在点 x_0 连续。

定义 5.1.3　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某右邻域 $[x_0,x_0+\delta)$ 上有定义，若右极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},(0<\Delta x<\delta)$$

存在，则称该极限值为 f 在点 x_0 的右导数，记作 $f'_+(x)$。同理有左导数。

左导数和右导数统称为单侧导数。

定理 5.1.4　若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域上有定义，则 $f'(x_0)$ 存在的充要条件是 $f'_-(x)$ 与 $f'_+(x)$ 都存在且相等。

若函数 f 在区间 I 上每一点都可导（对区间端点，仅考虑相应的单侧导数），则称 f 为 I 上的可导函数。此时对每一个 $x\in I$，都有 f 的一个导数 $f'(x)$ （或单侧导数）与之对应。

这样就定义了一个在 I 上的函数，称为导函数，简称为导数。记作 $f',y',\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，即

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta)-f(x)}{\Delta},x\in I$$

有时 $f'(x_0)$ 也可写作 $y'\mid_{x=x_0}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mid_{x=x_0}$。

曲线 $y=f(x)$ 在点 (x_0,y_0) 的切线方程是

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

定义 5.1.5　若函数 f 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 上对一切 $x\in U(x_0)$ 有

$$f(x_0)\geqslant f(x)$$

则称 f 在点 x_0 取得极大值，称点 x_0 为极大值点。同理有极小值点。

极大值、极小值统称为极值，极大值点、极小值点统称为极值点。

定理 5.1.6 【费马定理】　设函数 f 在点 x_0 的某邻域上有定义，且在点 x_0 可导。若点 x_0 为极值点，则必有 $f'(x_0)=0$。

5.2 求导法则

定理 5.2.1 若函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 在点 x_0 可导，则函数 $f(x) = u(x) \pm v(x)$ 在点 x_0 也可导，且

$$f'(x_0) = u'(x_0) \pm v'(x_0)$$

函数 $f(x) = u(x)v(x)$ 在点 x_0 也可导，且

$$f'(x_0) = u'(x_0)v'(x_0)$$

若 $v(x) \neq 0$，则函数 $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ 在点 x_0 也可导，且

$$f'(x_0) = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v(x_0)^2}$$

定理 5.2.2 设 $y = f(x)$ 为 $x = \phi(x)$ 的反函数，若 $\phi(y)$ 在点 y_0 的某邻域上连续、严格单调且 $\phi'(y_0) \neq 0$，则 $f(x)$ 在点 $x_0 = \phi(y_0)$ 可导，且

$$f'(x_0) = \frac{1}{\phi'(y_0)}$$

定理 5.2.3 设 $u = \phi(x)$ 在点 x_0 可导，$y = f(u)$ 在点 $u_0 = \phi(x_0)$ 可导，则复合函数 $f \circ \phi$ 在点 x_0 可导，且

$$(f \circ \phi)'(x_0) = f'(u_0)\phi'(x_0) = f'(\phi(x_0))\phi'(x_0)$$

5.2.1 基本求导法则

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2. $(uv)' = u'v + uv'$
3. $\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
4. $(u \pm v)' = u' \pm v'$

5.2.2 基本初等函数导数公式

1. $(c)' = 0$（c 为常数）
2. $(x^a)' = ax^{a-1}$（a 为任意实数）
3. $(\sin x)' = \cos x, (\cos x)' = -\sin x, (\tan x)' = \sec^2 x$
4. $(\cot x)' = -\csc^2 x, (\sec x)' = \sec x \tan x, (\csc x)' = -\csc x \cot x$
5. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
6. $(a^x)' = a^x \ln a (a > 0 \text{且} a \neq 1)$
7. $(\log_a |x|)' = \dfrac{1}{x \ln a} (a > 0 \text{且} a \neq 1)$

5.3 单调性与导数

定理 5.3.1 设 f 在区间 I 上可导，则 $f(x)$ 在 I 上递增（减）的充要条件时

$$f'(x) \geqslant 0 (\leqslant 0)$$

定理 5.3.2 【介值定理】 设 f 为 $[a, b]$ 上的连续函数，μ 时严格介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的数，则存在 $\xi \in (a, b)$，使得 $f(\xi) = \mu$。

第六章　微分中值定理

6.1　拉格朗日 Lagrange 定理

定理 6.1.1 【罗尔 Rolle 中值定理】 若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 中可微，且 $f(a)=f(b)$。则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$。

定理 6.1.2 若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 中可微，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Lagrange 公式还有下面几种等价形式

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),a<\xi<b$$

$$f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a),0<\theta<1$$

$$f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h,0<\theta<1$$

6.2　Cauchy 中值定理

定理 6.2.1 设 f,g 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 中可微，且 $g'(x)\neq 0$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

6.3　凹凸性

定义 6.3.1 设 f 为定义在区间 I 上的函数，若对 I 上当任意两点 x_1,x_2 和任意实数 $\lambda\in(0,1)$ 总有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

则称 f 为 I 上的凸函数。反之，如果总有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geqslant \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

则称 f 为 I 上的凹函数。

第七章　积分的方法与技巧

这部分我的参考书是《积分的方法与技巧》(金玉明等)。

7.1　积分的存在性

先放这，稍后做整理。

定义 7.1.1　设函数 f 与 F 在区间 I 上都有定义。若

$$F'(x) = f(x), x \in I$$

则称 F 为 f 在区间 I 上的一个原函数。

定理 7.1.2　设 F 是 f 在区间 I 上的一个原函数，则（1）$F+C$ 也是 f 在 I 上的原函数，其中 C 为任意常量函数（2）f 在 I 上的任意两个原函数之间，只可能相差一个常数。

证明　（1）显然

$$[F(x)+C]' = F'(x) = f(x), x \in I$$

（2）设 F 和 G 是 f 在 I 上的任意两个原函数，则有

$$[F(x)-G(x)]' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0, x \in I$$

根据 Lagrange 中值定理，有

$$F(x) - G(x) \equiv C, x \in I$$

□

定义 7.1.3　函数 f 在区间 I 上的全体原函数称为 f 在 I 上的不定积分，记作

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$$

其中 $\displaystyle\int$ 称为积分号，$f(x)$ 为被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$ 为被积表达式，x 称为积分变量。

7.1.1　定积分

设闭区间 $[a,b]$ 上有 $n-1$ 个点，依次为

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

它们把 $[a,b]$ 分为 n 个小区间 $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i], i = 1, \cdots, n$。这些分点或这些闭子区间构成对 $[a,b]$ 的一个分割，记为

$$T = \{x_0, \cdots, x_n\} \text{ 或 } \{\Delta_1, \cdots, \Delta_n\}$$

小区间 Δ_i 的长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，并记

$$\|T\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$$

称为分割的模。

定义 7.1.4 设 f 是定义在 $[a,b]$ 上的一个函数。对于 $[a,b]$ 的一个分割 $T=\{\Delta_1,\cdots,\Delta_n\}$，任取点 $\xi\in\Delta_i, i=1,\cdots,n$，并作和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

称此和式为函数 f 在 $[a,b]$ 上的一个积分和，也称黎曼和。

显然，积分既与分割 T 与有关，又与所选取的点集 $\{\xi_i\}$ 有关。

定义 7.1.5 设 f 是定义在 $[a,b]$ 上的一个函数，J 是一个确定的实数。若对任给的正数 ϵ，总存在某一正数 δ，使得对 $[a,b]$ 的任何分割 T，以及在其上任意选取的点集 $\{\xi_i\}$，只要 $\|T\|<\delta$，就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - J\right| < \varepsilon$$

则称函数 f 在区间 $[a,b]$ 上可积或黎曼可积；数 J 称为 f 在 $[a,b]$ 上的定积分或黎曼积分，记作

$$J=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

其中 f 称为被积函数，x 称为积分变量，$[a,b]$ 称为积分区间，a,b 分别称为这个定积分的下限和上限。

定理 7.1.6【Newton - Leibniz 公式】 若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，且存在原函数 F，即 $F'(x)=f(x), x\in[a,b]$，则 f 在 $[a,b]$ 上可积，且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$$

证明 即证对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得当 $\|T\|<\delta$ 时有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - [F(b)-F(a)]\right| < \varepsilon$$

对于任意分割 T,在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上对 $F(x)$ 使用 Lagrange 中值定理,则分别存在 $\eta_i\in(x_{i-1},x_i), i=1,\cdots,n$，使得

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{n}F'(\eta_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}f(\eta_i)\Delta x_i$$

又因为 f 在 $[a,b]$ 上一致连续，因此存在 $\delta>0$ 当 $x_1,x_2\in[a,b]$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，有

$$f(x_1)-f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

由 $\Delta x_i\leqslant\|T\|<\delta$ 时，任取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，便有 $|\xi_i-\eta_i|<\delta$，于是

$$LHS=\left|\sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i)-f(\eta_i)]\Delta x_i\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\varepsilon$$

于是 f 在 $[a,b]$ 上可积。 □

7.1.2 可积条件

定理 7.1.7 若函数 f 在 $[a,b]$ 上可积，则 f 在 $[a,b]$ 上必定有界。

证明 反证，若 f 在 $[a,b]$ 上无界，则对于即对于 $[a,b]$ 的任意分割 T，必存在属于 T 的某区间 Δ_k，使 f 在其上无界。在 $i \neq k$ 的各个区间 Δ_i 上取定 ξ_i，记

$$G = \left|\sum_{i \neq k} f(\xi)\Delta x_i\right|$$

任意大的正数 M，存在 $\xi_k \in \Delta_k$，使得

$$|f(\xi_k)| > \frac{M+G}{\Delta x_k}$$

于是有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi)\Delta x_i\right| \geqslant |f(\xi_k)\Delta x_k| - \left|\sum_{i \neq k} f(\xi)\Delta x_i\right| > \frac{M+G}{\Delta x_k} \cdot \Delta x_k - G = M$$

□

有界函数不一定黎曼可积，比如 Dirichlet 函数。

设 T 为对 $[a,b]$ 的任意分割。由 f 在 $[a,b]$ 上有界，它在每个 Δ_i 上存在上、下确界：

$$M_i = \sup_{x \in \Delta_i} f(x), m_i = \inf_{x = \Delta_i} f(x), i = 1, \cdots, n$$

作和

$$S(T) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, s(T) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

分别称为 f 关于分割 T 的上和与下和(或称达布上和与达布下和, 统称达布和)。任给 $\xi_i = \Delta_i, i = 1, \cdots, n$, 显然有

$$m(b-a) \leqslant s(T) \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \leqslant S(T) \leqslant M(b-a)$$

与积分和相比较，达布和只与分割 T 有关，而与点集 $\{\xi_i\}$ 无关。

命题 7.1.8 给定分割 T，对于任何点集 $\{\xi_i\}$ 而言，上和时所有积分和的上确界，下和是所有积分和的下确界。

证明 设 Δ_i 中 M_i 是 $f(x)$ 的上确界，故可选取点 $\xi = \Delta_i$，使 $f(\xi_i) > M_i - \frac{\varepsilon}{b-a}$，于是有

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i > \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i - \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = S(T) - \varepsilon$$

即 $S(T)$ 是全体积分和的上确界。类似可证 $s(T)$ 是全体积分和的下确界。 □

命题 7.1.9 设 T' 为分割 T 添加 p 个新分点后所得到的分割，则有

定理 7.1.10 函数 f 在 $[a,b]$ 上可积的充要条件是：人格 $\varepsilon > 0$，总存在相应的一个分割 T 使得

$$S(T) - s(T) < \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = \varepsilon$$

其中 ω 称为 f 在 Δ_i 上的振幅。

由充要条件，我们可以得到一系列的可积函数类。

定理 7.1.11 若 f 为 $[a,b]$ 上的连续函数，则 f 在 $[a,b]$ 上可积。

证明 由于 f 在闭区间 $[a,b]$ 上一致连续，即任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对 $[a,b]$ 中任意两点 x_1,x_2，只要 $|x_1-x_2|<\delta$，便有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

所以对于在 $[a,b]$ 的分割 T 满足 $\|T\|<\delta$，在 T 所属的任一小区间 Δ_i 上，都有

$$\omega_i=M_i-m_i=\sup_{x_1,x_2\in\Delta_i}|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\frac{\varepsilon}{b-a}$$

从而

$$\sum_T\omega_i\Delta x_i\leqslant\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_T\Delta x_i=\varepsilon$$

□

7.2 分项积分法

若干微分式的和或差的不定积分，等于每个微分式的各自积分的和或差。

$$\int(f(x)+g(x)-h(x))\,\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x+\int g(x)\mathrm{d}x-\int h(x)\mathrm{d}x$$

因此多项式的积分可以简单的通过积分各个单项式得到。

如果一个分式的分母为多项式，则可把它化成最简单的分式再积分。如

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)$$

这里可以通过通分后待定系数得到。于是其积分为

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$$

对于更复杂的真分式的情况，若要计算的是

$$\int\frac{mx+n}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$$

分母不一定能直接分解，但总能进行配方

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}=t^2\pm a^2$$

再令 $A=m,B=n-\dfrac{1}{2}mp$，可得

$$\int\frac{mx+n}{x^2+px+q}\mathrm{d}x=\int\frac{At+B}{t^2\pm a^2}\mathrm{d}t=A\int\frac{t\mathrm{d}t}{t^2\pm a^2}+B\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2\pm a^2}$$

其中

$$\begin{aligned}
A\int\frac{t\mathrm{d}t}{t^2\pm a^2}&=\frac{A}{2}\int\frac{\mathrm{d}(t^2\pm a^2)}{t^2\pm a^2}=\frac{A}{2}\ln|t^2\pm a^2|+C\\
B\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2}&=\frac{B}{a}\arctan\frac{t}{a}+C\\
B\int\frac{t\mathrm{d}t}{t^2-a^2}&=\frac{B}{2a}\ln\left|\frac{t-a}{t+a}\right|+C
\end{aligned}$$

因此当 $p^2 < 4q$ 时，可以得到

$$\begin{aligned}\int \frac{mx+n}{x^2+px+q} &= \frac{A}{2}\ln|t^2+a^2| + \frac{B}{a}\arctan\frac{t}{a} + C \\ &= \frac{m}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{2n-mp}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C\end{aligned}$$

当 $p^2 > 4q$ 时，可以得到

$$\begin{aligned}\int \frac{mx+n}{x^2+px+q} &= \frac{A}{2}\ln|t^2-a^2| + \frac{B}{2a}\ln\left|\frac{t-a}{t+a}\right| \\ &= \frac{m}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{2n-mp}{2\sqrt{4q-p^2}}\ln\left|\frac{2x+p-\sqrt{p^2-4q}}{2x+p+\sqrt{p^2-4q}}\right| + C\end{aligned}$$