# 数学分析笔记

SHUXUEFENXIBIJI

rogeryoungh

2021 年 3 月 18 日 · LaTeX

# 目录

# 第 1 章 实数集与函数

我初次用的书是华师的数分，后面还会加一些别的书的内容。可能会有点乱，有空了做整理。

集合论与函数和映射视作熟知的。若无额外说明，皆在 $\mathbb{R}$ 下。

## 1.1 实数

有理数和无理数统称实数，有理数可用分数形式 $\dfrac{p}{q}$ 表示，也可用有限十进小数或无限十进循环小数表示；而无限十进不循环小数则成为无理数。

为了让任意实数都可用一个确定的无限小数来表示，如下规定：

对于正有限小数（包括正整数）$x$，当 $x = a_0.a_1a_2\cdots a_n$ 时，其中 $0 \geq a_i \geq 9, i = 1, 2, \cdots, n, a_n \neq 0$，$a_0$ 为非负整数，即

$$x = a_0.a_1a_2\cdots(a_n - 1)9999\cdots,$$

而当 $x = a_0$ 为正整数时，则记

$$x = (a_0 - 1).9999\cdots$$

对于负有限小数（包括负整数）$y$，则先将 $-y$ 表示为无限小数，再在所得无限小数之前加负号。并规定 0 表示为 $0.0000\cdots$。

实数有以下性质：

1. 实数集 $\mathbb{R}$ 对加、减、乘、除（除数不为 0）四则运算是封闭的。
2. 实数集是有序的：任意 $a, b$ 必满足三个关系之一（$a < b, a = b, a > b$）。
3. 实数的大小关系具有传递性：若 $a > b, b > c$，则有 $a > c$。
4. 实数具有阿基米德性：对任何 $a, b \in \mathbb{R}$，若 $b > a > 0$，则存在正整数 $n$，使得 $na > b$。
5. 实数集具有稠密性：任意 $a, b$ 之间必存在另一个实数，可以是有理数，也可以是无理数。

### 1.1.1 数集 · 确界原理

区间分为无限区间和有限区间。

设实数 $a < b$，则称数集 $\{x \mid a < x < b\}$ 为开区间，记作 $(a, b)$；数集 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为闭区间，记作 $[a, b]$；数集 $\{x \mid a \leqslant x < b\}$ 和 $\{x \mid a < x \leqslant b\}$ 都称为半开半闭区间，分别记作 $[a, b)$ 和 $(a, b]$。以上几类区间统称为有限区间。

满足关系式 $x \geqslant a$ 的全体实数 $x$ 的集合记作 $[a, +\infty)$，类似地，有 $(-\infty, a], (a, \infty), (-\infty, a)$。特殊地 $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$。这几类区间统称为无限区间。

设 $\delta > 0$，满足 $|x - a| < \delta$ 的 $x$ 的集合称为点 $a$ 的 $\delta$ 邻域，记作 $U(a; \delta)$，或简单的记作 $U(a)$，即有

$$U(a; \delta) = (a - \delta, a + \delta)$$

点 $a$ 的空心 $\delta$ 邻域定义为

$$U^{\circ}(a;\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$$

也可以简单的记作 $U^{\circ}(a)$。

此外，常用的邻域还有：

点 $a$ 的 $\delta$ 右邻域 $U_{+}(a;\delta)=[a,a+\delta)$，左邻域 $U_{-}(a;\delta)$。以及点 $a$ 的空心 $\delta$ 左、右邻域 $U_{-}^{\circ}(a)$ 与 $U_{+}^{\circ}(a)$。

以及 $\infty$ 邻域 $U(\infty)=\{x\mid |x|>M\}$，其中 $M$ 为充分大的正数。类似的还有 $U(+\infty)=\{x\mid x>M\}$ 和 $U(-\infty)=\{x\mid x<-M\}$。

**定义 1.1 【有界集】**

设 $S$ 为一个非空数集，若存在数 $M\in$ 使得 $\forall x\in S$

（1）都有 $x\leqslant M$，则称 $M$ 是 $S$ 的一个上界。

（2）都有 $x\geqslant M$，则称 $M$ 是 $S$ 的一个下界。

♣

若数集 $S$ 既有上界又有下界，则称 $S$ 为有界集，反之称为无界集。

**定义 1.2 【上确界】**

设 $S$ 是一个数集，若数 $\beta$ 满足：

（1）$\beta$ 是 $S$ 的上界：$\forall x\in S$，有 $x\leqslant\beta$。

（2）任何小于 $\beta$ 的数不是数集 $S$ 的上界：$\forall\mu<\beta,\exists x_0\in S$ 使得 $x_0>\mu$。

则称数 $\beta$ 为数集 $S$ 的上确界，记作 $\sup S$。

♣

**定义 1.3 【下确界】**

设 $S$ 是一个数集，若数 $\alpha$ 满足：

（1）$\alpha$ 是 $S$ 的下界：$\forall x\in S$，有 $x\geqslant\alpha$。

（2）任何大于 $\alpha$ 的数不是数集 $S$ 的下界：$\forall\mu>\alpha,\exists x_0\in S$ 使得 $x_0<\mu$。

则称数 $\alpha$ 为数集 $S$ 的下确界，记作 $\inf S$。

♣

上确界与下确界统称为确界。应注意，数集 $S$ 的确界可能属于 $S$，也可能不属于 $S$。

**定理 1.1 【确界原理】**

设 $S$ 为非空数集，若 $S$ 有上界，则 $S$ 必有上确界；若 $S$ 有下界，则 $S$ 必有下确界。

♡

若把 $\pm\infty$ 看作非正常上下确界，前文定义视为正常上（下）确界，那么任一非空数集必有上下确界。

## 1.2 函数的上下界

**定义 1.4**

设 $f$ 为定义在 $D$ 上的函数。若存在数 $M(L)$，使得对每一个 $x \in D$，有 $f(x) \leqslant M(f(x) \geq L)$，则称 $f$ 为 $D$ 上的有上（下）界函数，$M(L)$ 称为 $f$ 在 $D$ 上的一个上（下）界。

反之，若存在数 $M(L)$，使得对每一个 $x \in D$，有 $f(x) \geqslant M(f(x) \leqslant L)$，则称 $f$ 为 $D$ 上的有无上（下）界函数。♣

**定义 1.5**

设 $f$ 为定义在 $D$ 上的函数。若存在正数 $M$，使得对每一个 $x \in D$，有 $|f(x)| \leqslant M$，则称 $f$ 为 $D$ 上的有界函数。

反之，若存在正数 $M$，使得对每一个 $x \in D$，有 $|f(x)| \geq M$，则称 $f$ 为 $D$ 上的无界函数。♣

记函数 $f$ 在 $D$ 上的上确界为 $\sup_{x \in D} f(x)$，类似的有 $\inf_{x \in D} f(x)$。

**定义 1.6**

设 $f$ 为定义在 $D$ 上的函数，若对任何 $x_1, x_2 \in D$，当 $x_1 < x_2$ 时：

（1）总有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$，则称 $f$ 为 $D$ 上的增函数，若成立严格不等式 $f(x_1) < f(x_2)$ 时，称 $f$ 为 $D$ 上的严格增函数。

（2）总有 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$，则称 $f$ 为 $D$ 上的减函数，若成立严格不等式 $f(x_1) > f(x_2)$ 时，称 $f$ 为 $D$ 上的严格减函数。♣

增函数和减函数统称为单调函数，严格增函数和严格减函数统称为严格单调函数。

严格单调函数必有反函数，其也为严格单调函数。

**定义 1.7**

设 $D$ 为对称于原点的数集，函数 $f$ 为定义在 $D$ 上的函数。若对每一个 $x \in D$：

（1）有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f$ 为 $D$ 上的奇函数。

（2）有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f$ 为 $D$ 上的偶函数。♣

## 1.3 实数系的构造

**定义 1.8【Dedekind 分割】**

设 $A$ 为 $Q$ 的子集，若满足以下三个条件

（1）$A \neq \varnothing, A \neq \mathbb{Q}$；

（2）当 $p \in A, p \in A^c$ 时，$p < q$；

（3）任给 $p \in A$，存在 $q \in A$，使得 $p < q$；

则称 $A$ 为 $\mathbb{Q}$ 的一个分割，分割的全体组成集合为 $\mathbb{R}$。♣

# 第 2 章 数列极限

## 2.1 数列极限的概念

**定义 2.1 【数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义】**

设 $\{a_n\}$ 为数列，$A$ 为定数。若对任给的正数 $\varepsilon$，总存在正整数 $N = N(\varepsilon)$，使得当 $n > N$ 时有

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 $A$，或称 $A$ 为数列 $\{a_n\}$ 的极限，记作

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A，或 \ a_n \to a(n \to \infty)$$

♣

等价定义：任给 $\varepsilon > 0$，若在 $U(A;\varepsilon)$ 之外数列 $\{a_n\}$ 中的项至多只有有限个，则称 $\{a_n\}$ 收敛于极限 $A$。

若对于数列 $\{a_n\}$，不存在 $A$ 使得 $a_n \to A$，则称数列 $\{a_n\}$ 发散。

特殊地，若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，则称 $\{a_n\}$ 为无穷小数列。

**定义 2.2 【无穷大数列】**

若数列 $\{a_n\}$ 满足：对任意正数 $M > 0$，存在正整数 $N$，使得当 $n > N$ 时，

（1）$a_n > M$，则称数列 $\{a_n\}$ 发散于正无穷大，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$，或 $a_n \to +\infty$。

（2）有 $a_n < M$，则称数列 $\{a_n\}$ 发散于负无穷大，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$，或 $a_n \to -\infty$。

♣

## 2.2 收敛数列的性质

**定理 2.1 【唯一性】**

若数列 $\{a_n\}$ 收敛，则它只有一个极限。

♡

**证明** 如果数列 $\{a_n\}$ 同时以 $A, B$ 为极限，即任给 $\varepsilon > 0$，总存在 $N_1, N_2$，使得

$$|a_n - A| < \varepsilon, n > N_1; \quad |a_n - B| < \varepsilon, n > N_2$$

那么当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时需要恒成立

$$2\varepsilon > |a_n - A| + |a_n - B| \geqslant |A - B|$$

当 $A \neq B$ 时，对于 $2\varepsilon < |A - B|$ 不恒成立，因此只能 $A = B$。 □

**定理 2.2 【有界性】**

若数列 $\{a_n\}$ 收敛，则 $\{a_n\}$ 有界。

♡

**证明** 不妨设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$。令 $\varepsilon = 1$，那么存在 $n > N$ 使得

$$|a_n - A| \leqslant 1$$

令

$$M = \{|a_1|, \cdots, |a_N|, |A-1|, |A+1|\}$$

那么对任意正整数 $n$，总有 $|a_n| \leqslant M$。 □

**定理 2.3 【保不等式性，保序性】**

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$，则有

（1）如果存在 $n > N$ 使得 $a_n \geqslant b_n$ 恒成立，则 $A \geqslant B$。

（2）反之，如果 $A > B$，则存在 $n > N_1$ 使得 $a_n > b_n$ 恒成立。 ♡

**证明** （1）如果设 $B - A = 2\delta > 0$，那么存在 $N_2, N_3 > N$

$$|a_n - A| < \delta, n > N_2; \qquad |b_n - B| < \delta, n > N_3$$

于是当 $n > \max\{N_2, N_3\}$ 时有

$$a_n < A + \delta = B - \delta < b_n$$

因此矛盾，故 $A \geqslant B$。

（2）设 $A - B = 2\delta > 0$，那么存在 $N_2, N_3$

$$|a_n - A| < \delta, n > N_2; \qquad |b_n - B| < \delta, n > N_3$$

于是存在 $N_1 = \max\{N_2, N_3\}$，当 $n > N_1$ 时有

$$a_n > A - \delta = B + \delta > b_n$$

□

若 $b_n$ 是常数列，$A \neq 0$，我们还可得到推论：存在 $N$，使得当 $n > N$ 时，有

$$\frac{1}{2}|A| < |a_n| < \frac{3}{2}|A|$$

**定理 2.4 【迫敛性，夹逼定理】**

设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 满足当 $n > N_0$ 有 $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$。若

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A = \lim_{n\to\infty} c_n$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$。 ♡

**证明** 即对于任给的 $\varepsilon > 0$，存在 $N_1, N_2$，使得当 $n > N_1$ 有

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$$

当 $n > N_2$ 有

$$A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon$$

因此当 $n > \max\{N_0, N_1, N_2\}$ 时，有

$$A - \varepsilon < a_n \leqslant b_n \leqslant c_n < A + \varepsilon$$

□

**定理 2.5【四则运算】**

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$，则有

（1）$\{\alpha a_n + \beta b_n\}$ 收敛到 $\alpha A + \beta B$，其中 $\alpha, \beta$ 为常数。

（2）$\{a_n b_n\}$ 收敛到 $AB$。

（3）当 $B \neq 0$ 时，$\{a_n/b_n\}$ 收敛到 $A/B$。

♡

**证明** （1）任给 $\varepsilon > 0$，存在 $N_1, N_2$ 使得

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2|\alpha|+1}, n > N_1; \qquad |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2|\beta|+1}, n > N_2$$

则当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时有

$$\begin{aligned}|(\alpha a_n + \beta b_n) - (\alpha A + \beta B)| &\leqslant |\alpha||a_n - A| + |\beta||b_n - B| \\ &< \frac{\varepsilon|\alpha|}{2|\alpha|+1} + \frac{\varepsilon|\beta|}{2|\beta|+1} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

（2）由收敛数列的有界性，存在 $M$ 使得 $|a_n| \leqslant M$，那么

$$0 \leqslant |a_n b_n - AB| = |(a_n - A)b_n + A(b_n - B)| \leqslant M|a_n - A| + |A||b_n - B|$$

由迫敛性知 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n b_n - AB| = 0$。

（3）由保号性的推论，存在 $N$ 使得当 $n > N$ 时有 $|b_n| > \dfrac{|B|}{2}$，那么

$$0 \leqslant \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right| = \frac{|b_n - B|}{|b_n||B|} \leqslant \frac{2}{|B|^2}|b_n - B|$$

由迫敛性知 $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{1}{b_n} - \dfrac{1}{B}\right| = 0$。 □

**定义 2.3【数列的子列】**

设 $\{a_n\}$ 为数列，如果 $\{n_k\}$ 是一列严格递增的正整数，则数列 $\{a_{n_k}\}$ 称为数列 $\{a_n\}$ 的一个子列。

♣

特殊的子列 $\{a_{2k}, a_{2k-1}\}$ 分别称为偶子列与奇子列。

**定理 2.6**

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件：$\{a_n\}$ 的任何子列都收敛。

♡

## 2.3 数列极限存在的条件

**定义 2.4**

若数列 $\{a_n\}$ 各项满足关系式 $a_n \leqslant a_{n+1} (a_n \geqslant a_{n+1})$，则称 $\{a_n\}$ 为递增（递减）数列，统称为单调数列。

♣

**定理 2.7 【单调有界定理】**

单调有界数列必有极限。♡

**定理 2.8 【致密性定理】**

任何有界数列必定有收敛的子列。♡

## 2.4 柯西 Cauchy 准则

**定义 2.5**

设 $\{a_n\}$ 为数列，如果任给 $\varepsilon > 0$，均存在 $N(\varepsilon)$ 使当 $m, n > N(\varepsilon)$ 时有

$$|a_m - a_n| < \varepsilon$$

则称 $\{a_n\}$ 为 Cauchy 数列或基本列。♣

**定理 2.9**

Cauchy 数列必定时有界数列。♡

**证明** 取 $\varepsilon = 1$，则存在 $N$ 使得当 $m, n > N$ 时有

$$|a_m - a_n| < 1$$

令 $M = \max\{|a_k| + 1 \mid 1 \leqslant k \leqslant N + 1\}$，则当 $n \leqslant N$ 时显然有 $|a_n| \leqslant M$，而当 $n > N$ 时有

$$|a_n| \leqslant |a_n - a_{N+1}| + |a_{N+1} < 1 + |a_{N+1}| \leqslant M$$

这说明 $\{a_n\}$ 是有界数列。□

**定理 2.10 【Cauchy 收敛准则】**

$\{a_n\}$ 为 Cauchy 数列当且仅当它是收敛的。♡

**证明** （1）充分性：设 $\{a_n\}$ 收敛到 $A$，则任给 $\varepsilon > 0$ 存在 $N$，当 $n > N$ 时有

$$|a_n - A| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

因此当 $m, n > N$ 时有

$$|a_m - a_n| \leqslant |a_m - A| + |A - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

这说明 $a_n$ 为 Cauchy 数列。

（2）必要性：Todo ⋯⋯ □

柯西收敛准则的条件称为柯西条件。

## 2.5 Stolz 公式

**定理 2.11**

对于任意的 $1 \leqslant k \leqslant n$，设 $b_k > 0$ 且 $m \leqslant \frac{a_k}{b_k} \leqslant M$，则有

$$m \leqslant \frac{\sum a_n}{\sum b_n} \leqslant M$$

**定理 2.12【Stolz 公式一】**

设数列 $\{x_n\},\{y_n\}$，且 $\{y_n\}$ 严格单调地趋于 $+\infty$，如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = A$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = A$$

**证明** 分类讨论 Todo······ □

**定理 2.13【Stolz 公式二】**

设数列 $\{y_n\}$ 严格单调地趋于 0，且数列 $\{x_n\}$ 也收敛到 0，那么如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = A$$

则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = A$$

**证明** 分类讨论 Todo······ □

## 2.6 例题

**问题 2.1** 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，求证：$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum a_n}{n} = A$。

**解** 即对于任给的 $\varepsilon > 0$，存在 $n > N_1$ 使得

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

那么变形有

$$\left|\frac{\sum a_n}{n} - A\right| \leqslant \frac{\sum |a_n - A|}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{N_1} |a_k - A|}{n} + \frac{\sum_{k=N_1+1}^{n} |a_k - A|}{n}$$

注意到 $\sum_{k=1}^{N_1} |a_k - A|$ 已经为定值，从而存在 $n > N_2$ 使得

$$\frac{\sum_{k=1}^{N_1} |x_k - A|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

因此当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时有

$$LHS < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n - N_1}{n} \times \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

# 第 3 章 函数极限

## 3.1 函数极限的概念

**定义 3.1**

设 $f$ 为定义在 $[a,+\infty)$ 上的函数，$A$ 为定数。若对任给的 $\varepsilon>0$，存在正数 $M=M(\varepsilon)\geqslant a$，使得当 $x>M$ 时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称函数 $f$ 当 $x$ 趋于 $+\infty$ 时以 $A$ 为极限，记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to+\infty)$$

♣

类似的有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$。

不难证明

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f(x)=A$$

**定义 3.2**

设函数 $f$ 在 $U^{\circ}(x_0;\delta')$ 内有定义，$A$ 为定数。若对任给的 $\varepsilon>0$，存在正数 $\delta<\delta'$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称函数 $f$ 当 $x$ 趋于 $x_0$ 时以 $A$ 为极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0)$$

♣

**定义 3.3**

设函数 $f$ 在 $U^{\circ}_{+}(x_0;\delta')$ 内有定义，$A$ 为定数。若对任给的 $\varepsilon>0$，存在正数 $\delta<\delta'$，使得当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称函数 $f$ 当 $x$ 趋于 $x_0^+$ 时以 $A$ 为极限，记作

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0^+)$$

♣

类似的还有左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$，统称为单侧极限。又可记为

$$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0^+} f(x) \text{ 与 } f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)$$

同理还有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A$$

## 3.2 函数极限的性质

**定理 3.1 【唯一性】**

若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则此极限是唯一的。

**定理 3.2 【局部有界性】**

若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则 $f$ 在 $x_0$ 的某空心邻域 $U^\circ(x_0)$ 上有界。

**定理 3.3 【保不等式性】**

设 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 与 $\lim_{x\to x_0} g(x)$ 均存在。若存在正数 $N_0$，使得当 $n > N_0$ 时，有 $a_n \leqslant b_n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n$。

**定理 3.4 【迫敛性】**

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$，且在某 $U^\circ(x_0;\delta')$ 上有

$$f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$$

则 $\lim_{x\to x_0} h(x) = A$。

**定理 3.5 【四则运算法则】**

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 均存在，则

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$$
$$\lim_{x\to x_0} [f(x)g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$，则

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$$

## 3.3 函数极限存在的条件

**定理 3.6 【海涅（Heine）定理，归结原则】**

若 $f(x)$ 在 $U^\circ(x_0;\delta')$ 上有定义。$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充要条件是：任何含于 $U^\circ(x_0;\delta')$ 且以 $x_0$ 为极限的数列 $\{x_n\}$，极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x_n)$ 都存在且相等。

即若对任何 $x_n \to x_0 (n\to\infty)$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$。

**定理 3.7**

设 $f(x)$ 在点 $x_0$ 的某空心右邻域 $U_+^\circ(x_0)$ 有定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$ 的充要条件是：对任何以 $x_0$ 为极限的递减数列 $\{x_n\} \subset U_+^\circ(x_0)$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$。

**定理 3.8**

设 $f(x)$ 为定义在 $U_+^\circ(x_0)$ 上的单调有界函数，则右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$ 存在。

**定理 3.9【柯西准则】**

设 $f(x)$ 在 $U^\circ(x_0;\delta')$ 上有定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充要条件是：任给 $\varepsilon>0$，存在正数 $\delta(<\delta')$，使得对任何 $x',x''\in U^\circ(x_0,\delta)$，有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。

## 3.4 两个重要的极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$$

## 3.5 无穷小量与无穷大量

**定义 3.4【无穷小量】**

设函数 $f$ 在某 $U^\circ(x_0)$ 上有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，则称 $f$ 为当 $x\to x_0$ 时的无穷小量。

**定义 3.5【有界量】**

设函数 $f$ 在某 $U^\circ(x_0)$ 上有界，则称 $f$ 为当 $x\to x_0$ 时的有界量。

无穷小量收敛于 0 的速度有快有慢。设当 $x\to x_0$ 时，$f$ 与 $g$ 均为无穷小量。

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$，则称当 $x\to x_0$ 时 $f$ 为 $g$ 的高阶无穷小量，或称 $g$ 为 $f$ 的低阶无穷小量。记作

$$f(x)=o(g(x))(x\to x_0)$$

特别地，$f$ 为当 $x\to x_0$ 时的无穷小量记作

$$f(x)=o(1)(x\to x_0)$$

若存在正数 $K$ 和 $L$，使得在某 $U^\circ(x_0)$ 上有

$$K\leqslant\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|\leqslant L$$

则称 $f$ 与 $g$ 为当 $x\to x_0$ 时的同阶无穷小量。特别当

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=c\neq 0$$

时，$f$ 与 $g$ 必为同阶无穷小量。

若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$ 则称 $f$ 与 $g$ 是当 $x\to x_0$ 时的等价无穷小量。记作

$$f(x)\sim g(x)(x\to x_0)$$

注意并不是任何两个无穷小量都可以进行这种阶的比较。例如 $x \to 0$ 时，$x \sin \frac{1}{x}$ 和 $x^2$ 都是无穷小量，但它们的比都不是有界量。

**定理 3.10**

设函数 $f, g, h$ 在 $U^\circ(x_0)$ 上有定义，且有 $f(x) \sim g(x)(x \to x_0)$，则

1. 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)h(x) = A$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)h(x) = A$。
2. 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{h(x)}{f(x)} = B$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{h(x)}{g(x)} = B$

**定义 3.6【无穷大量】**

设函数 $f$ 在某 $U^\circ(x_0)$ 上有定义，若对任给的 $G > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $x \in U^\circ(x_0; \delta) \subset U^\circ(x_0)$ 时，有 $|f(x)| > G$，则称函数 $f$ 当 $x \to x_0$ 时有非正常极限 $\infty$，记作 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$。

## 3.6 常见等价无穷小

实际上这些等价无穷小就是泰勒展开。

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{1-x} &= x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 && +O(x^6) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} && +O(x^6) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} && +O(x^7) \\
1 - \cos x &= \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} && +O(x^6) \\
\mathrm{e}^x - 1 &= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} && +O(x^6) \\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} && +O(x^7) \\
\sqrt{x+1} - 1 &= \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \frac{7x^5}{256} && +O(x^6) \\
\arcsin x &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} && +O(x^7) \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} && +O(x^7)
\end{aligned}
$$

# 第 4 章　函数的连续性

## 4.1　连续性的概念

**定义 4.1 【连续性】**

设函数 $f$ 在某 $U(x_0)$ 上有定义。若

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

则称 $f$ 在点 $x_0$ 连续。

记 $\Delta x = x - x_0$，称为自变量 $x$ 在点 $x_0$ 的增量或改变量。设 $y_0 = f(x_0)$，相应的函数 $y$ 在点 $x_0$ 的增量记为

$$\Delta y = f(x) - f(x) = f(x+\Delta) - f(x_0) = y - y_0$$

连续性的 $\varepsilon - \delta$ 形式定义：若对任给的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$，则称函数 $f$ 在点 $x_0$ 连续。

或者进一步表示为

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right)$$

**定义 4.2**

设函数 $f$ 在某 $U_+(x_0)$ 上有定义。若

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

则称 $f$ 在点 $x_0$ 右连续。同理左连续。

因此函数 $f$ 在点 $x_0$ 连续的充要条件是：$f$ 在点 $x_0$ 既是左连续，又是右连续。

**定义 4.3 【间断点】**

设函数 $f$ 在某 $U^\circ(x_0)$ 上有定义。若 $f$ 在点 $x_0$ 无定义，或 $f$ 在点 $x_0$ 有定义而不连续，则称点 $x_0$ 为函数 $f$ 的间断点或不连续点。

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，而 $f$ 在点 $x_0$ 无定义，或有定义但 $f(x_0) \neq A$，则称点 $x_0$ 为 $f$ 的可去间断点。

若函数 $f$ 在点 $x_0$ 的左、右极限都存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$，则称点 $x_0$ 为函数 $f$ 的跳跃间断点。

可去间断点与跳跃间断点统称为第一类间断点，所有其他形式的间断点统称为第二类间断点。

若函数 $f$ 在区间 $I$ 上的每一点都连续，则称 $f$ 为 $I$ 上的连续函数。对于闭区间或半开区间的端点，函数在这些点上连续是指左连续或右连续。

## 4.2 连续函数的性质

**定理 4.1【局部有界性】**

若函数 $f$ 在点 $x_0$ 连续，则 $f$ 在某 $U(x_0)$ 上有界。

**定理 4.2【局部保号性】**

若函数 $f$ 在点 $x_0$ 连续，且 $f(x_0) > 0$，则对任何正数 $r < f(x_0)$，存在某 $U(x_0)$，使得对一切 $x \in U(x_0)$，有 $f(x) > r$。

**定理 4.3【四则运算】**

若函数 $f, g$ 在点 $x_0$ 连续，则 $f \pm g, f \cdot g, f/g$ 也都在点 $x_0$ 连续。

**定理 4.4**

若函数 $f$ 在点 $x_0$ 连续，$g$ 在点 $u_0$ 连续，$u_0 = f(x_0)$，则复合函数 $g \circ f$ 在 $x_0$ 连续。

**定义 4.4**

设 $f$ 为定义在数集 $D$ 上的函数。若存在 $x_0 \in D$，使得对一切 $x \in D$，有 $f(x_0) \geq f(x)$，则称 $f$ 在 $D$ 上有最大值，并称 $f(x_0)$ 为 $f$ 在 $D$ 上的最大值。

**定理 4.5【最大、最小值定理】**

若函数 $f$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，则 $f$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有最大值与最小值。

**定理 4.6【介值定理】**

若函数 $f$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a) \neq f(b)$。若 $\mu$ 为介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任何实数。则至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$ 使得 $f(x_0) = \mu$。

**定理 4.7**

若函数 $f$ 在 $[a, b]$ 上严格单调并连续，则反函数 $f^{-1}$ 在其定义域 $[\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}]$ 上连续。

**定义 4.5**

设 $f$ 是定义在区间 $I$ 上的函数。若对任给的 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ 使得对任何 $x', x'' \in I$，只要 $|x' - x''| < \delta$ 就有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

就称函数 $f$ 在区间 $I$ 上一致连续。

**定理 4.8【一致连续性】**

若函数 $f$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，则 $f$ 在 $[a, b]$ 上一致连续。

## 4.3 初等函数的连续性

**定理 4.9**

设 $p>0$，$a,b$ 为任意两个实数，则有

$$p^a\cdot p^b=p^{a+b},(p^a)^b=p^{ab}$$

♡

**定理 4.10**

指数函数 $a^x(a>0)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是连续的。

♡

# 第 5 章 导数和微分

## 5.1 导数的定义

**定义 5.1**

设函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 的某邻域有定义，若极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在，则称函数 $f$ 在点 $x_0$ 可导，并称该极限为函数 $f$ 在点 $x_0$ 的导数，记作 $f'(x_0)$。

**定理 5.1**

若函数 $f$ 在点 $x_0$ 可导，则 $f$ 在点 $x_0$ 连续。

**定义 5.2**

设函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 的某右邻域 $[x_0,x_0+\delta)$ 上有定义，若右极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},(0<\Delta x<\delta)$$

存在，则称该极限值为 $f$ 在点 $x_0$ 的右导数，记作 $f'_+(x)$。同理有左导数。

左导数和右导数统称为单侧导数。

**定理 5.2**

若函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 的某邻域上有定义，则 $f'(x_0)$ 存在的充要条件是 $f'_-(x)$ 与 $f'_+(x)$ 都存在且相等。

若函数 $f$ 在区间 $I$ 上每一点都可导（对区间端点，仅考虑相应的单侧导数），则称 $f$ 为 $I$ 上的可导函数。此时对每一个 $x\in I$，都有 $f$ 的一个导数 $f'(x)$（或单侧导数）与之对应。

这样就定义了一个在 $I$ 上的函数，称为导函数，简称为导数。记作 $f',y',\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，即

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta)-f(x)}{\Delta},x\in I$$

有时 $f'(x_0)$ 也可写作 $y'\,|_{x=x_0}$ 或 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,|_{x=x_0}$。

曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,y_0)$ 的切线方程是

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

**定义 5.3**

若函数 $f$ 在点 $x_0$ 的某邻域 $U(x_0)$ 上对一切 $x\in U(x_0)$ 有

$$f(x_0)\geqslant f(x)$$

则称 $f$ 在点 $x_0$ 取得极大值，称点 $x_0$ 为极大值点。同理有极小值点。

极大值、极小值统称为极值，极大值点、极小值点统称为极值点。

**定理 5.3 【费马定理】**

设函数 $f$ 在点 $x_0$ 的某邻域上有定义，且在点 $x_0$ 可导。若点 $x_0$ 为极值点，则必有 $f'(x_0)=0$。♡

## 5.2 求导法则

**定理 5.4**

若函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 在点 $x_0$ 可导，则函数 $f(x)=u(x)\pm v(x)$ 在点 $x_0$ 也可导，且

$$f'(x_0)=u'(x_0)\pm v'(x_0)$$

函数 $f(x)=u(x)v(x)$ 在点 $x_0$ 也可导，且

$$f'(x_0)=u'(x_0)v'(x_0)$$

若 $v(x)\neq 0$，则函数 $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$ 在点 $x_0$ 也可导，且

$$f'(x_0)=\frac{u'(x_0)v(x_0)-u(x_0)v'(x_0)}{v(x_0)^2}$$

♡

**定理 5.5**

设 $y=f(x)$ 为 $x=\phi(x)$ 的反函数，若 $\phi(y)$ 在点 $y_0$ 的某邻域上连续、严格单调且 $\phi'(y_0)\neq 0$，则 $f(x)$ 在点 $x_0=\phi(y_0)$ 可导，且

$$f'(x_0)=\frac{1}{\phi'(y_0)}$$

♡

**定理 5.6**

设 $u=\phi(x)$ 在点 $x_0$ 可导，$y=f(u)$ 在点 $u_0=\phi(x_0)$ 可导，则复合函数 $f\circ\phi$ 在点 $x_0$ 可导，且

$$(f\circ\phi)'(x_0)=f'(u_0)\phi'(x_0)=f'(\phi(x_0))\phi'(x_0)$$

♡

### 5.2.1 基本求导法则

1. $(u\pm v)'=u'\pm v'$
2. $(uv)'=u'v+uv'$
3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
4. $(u\pm v)'=u'\pm v'$

### 5.2.2 基本初等函数导数公式

1. $(c)'=0$（$c$ 为常数）
2. $(x^a)'=ax^{a-1}$（$a$ 为任意实数）
3. $(\sin x)'=\cos x,(\cos x)'=-\sin x,(\tan x)'=\sec^2 x$
4. $(\cot x)'=-\csc^2 x,(\sec x)'=\sec x\tan x,(\csc x)'=-\csc x\cot x$

5. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
6. $(a^x)' = a^x \ln a(a > 0\text{且}a \neq 1)$
7. $(\log_a |x|)' = \dfrac{1}{x \ln a}(a > 0\text{且}a \neq 1)$

## 5.3 单调性与导数

**定理 5.7**

设 $f$ 在区间 $I$ 上可导，则 $f(x)$ 在 $I$ 上递增（减）的充要条件时

$$f'(x) \geqslant 0(\leqslant 0)$$

♡

**定理 5.8 【介值定理】**

设 $f$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数，$\mu$ 时严格介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的数，则存在 $\xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi) = \mu$。

♡

# 第 6 章 微分中值定理

## 6.1 拉格朗日 Lagrange 定理

**定理 6.1 【罗尔 Rolle 中值定理】**

若函数 $f$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 中可微，且 $f(a)=f(b)$。则存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$。

**定理 6.2**

若函数 $f$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 中可微，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Lagrange 公式还有下面几种等价形式

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),a<\xi<b$$

$$f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a),0<\theta<1$$

$$f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h,0<\theta<1$$

## 6.2 柯西 Cauchy 中值定理

**定理 6.3**

设 $f,g$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 中可微，且 $g'(x)\neq 0$，则存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

## 6.3 凹凸性

**定义 6.1**

设 $f$ 为定义在区间 $I$ 上的函数，若对 $I$ 上当任意两点 $x_1,x_2$ 和任意实数 $\lambda\in(0,1)$ 总有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

则称 $f$ 为 $I$ 上的凸函数。反之，如果总有

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

则称 $f$ 为 $I$ 上的凹函数。

# 第 7 章 积分的方法与技巧

这部分我的参考书是《积分的方法与技巧》(金玉明等)。

## 7.1 积分的存在性

先放这，稍后做整理。

**定义 7.1**

设函数 $f$ 与 $F$ 在区间 $I$ 上都有定义。若

$$F'(x) = f(x), x \in I$$

则称 $F$ 为 $f$ 在区间 $I$ 上的一个原函数。♣

**定理 7.1**

设 $F$ 是 $f$ 在区间 $I$ 上的一个原函数，则（1）$F + C$ 也是 $f$ 在 $I$ 上的原函数，其中 $C$ 为任意常量函数（2）$f$ 在 $I$ 上的任意两个原函数之间，只可能相差一个常数。♡

**证明** （1）显然

$$[F(x) + C]' = F'(x) = f(x), x \in I$$

（2）设 $F$ 和 $G$ 是 $f$ 在 $I$ 上的任意两个原函数，则有

$$[F(x) - G(x)]' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0, x \in I$$

根据 Lagrange 中值定理，有

$$F(x) - G(x) \equiv C, x \in I$$

□

**定义 7.2**

函数 $f$ 在区间 $I$ 上的全体原函数称为 $f$ 在 $I$ 上的不定积分，记作

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$$

♣

其中 $\int$ 称为积分号，$f(x)$ 为被积函数，$f(x)\mathrm{d}x$ 为被积表达式，$x$ 称为积分变量。

### 7.1.1 定积分

设闭区间 $[a, b]$ 上有 $n - 1$ 个点，依次为

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

它们把 $[a,b]$ 分为 $n$ 个小区间 $\Delta_i=[x_{i-1},x_i], i=1,\cdots,n$。这些分点或这些闭子区间构成对 $[a,b]$ 的一个分割，记为

$$T=\{x_0,\cdots,x_n\} \text{ 或 } \{\Delta_1,\cdots,\Delta_n\}$$

小区间 $\Delta_i$ 的长度为 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，并记

$$\|T\|=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$$

称为分割的模。

**定义 7.3**

设 $f$ 是定义在 $[a,b]$ 上的一个函数。对于 $[a,b]$ 的一个分割 $T=\{\Delta_1,\cdots,\Delta_n\}$，任取点 $\xi\in\Delta_i, i=1,\cdots,n$，并作和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

称此和式为函数 $f$ 在 $[a,b]$ 上的一个积分和，也称黎曼和。♣

显然，积分既与分割 $T$ 与有关，又与所选取的点集 $\{\xi_i\}$ 有关。

**定义 7.4**

设 $f$ 是定义在 $[a,b]$ 上的一个函数，$J$ 是一个确定的实数。若对任给的正数 $\epsilon$，总存在某一正数 $\delta$，使得对 $[a,b]$ 的任何分割 $T$，以及在其上任意选取的点集 $\{\xi_i\}$，只要 $\|T\|<\delta$，就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i-J\right|<\varepsilon$$

则称函数 $f$ 在区间 $[a,b]$ 上可积或黎曼可积；数 $J$ 称为 $f$ 在 $[a,b]$ 上的定积分或黎曼积分，记作

$$J=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

♣

其中 $f$ 称为被积函数，$x$ 称为积分变量，$[a,b]$ 称为积分区间，$a,b$ 分别称为这个定积分的下限和上限。

**定理 7.2 【Newton - Leibniz 公式】**

若函数 $f$ 在 $[a,b]$ 上连续，且存在原函数 $F$，即 $F'(x)=f(x), x\in[a,b]$，则 $f$ 在 $[a,b]$ 上可积，且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

♡

**证明** 即证对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得当 $\|T\|<\delta$ 时有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i-[F(b)-F(a)]\right|<\varepsilon$$

对于任意分割 $T$，在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上对 $F(x)$ 使用 Lagrange 中值定理，则分别存在 $\eta_i\in(x_{i-1},x_i), i=1,\cdots,n$，使得

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{n} F'(\eta_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)\Delta x_i$$

又因为 $f$ 在 $[a,b]$ 上一致连续，因此存在 $\delta>0$ 当 $x_1,x_2\in[a,b]$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，有

$$f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

由 $\Delta x_i\leqslant\|T\|<\delta$ 时，任取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，便有 $|\xi_i-\eta_i|<\delta$，于是

$$LHS=\left|\sum_{i=1}^{n}[f(\xi_i)-f(\eta_i)]\Delta x_i\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\varepsilon$$

于是 $f$ 在 $[a,b]$ 上可积。 □

### 7.1.2 可积条件

**定理 7.3**

若函数 $f$ 在 $[a,b]$ 上可积，则 $f$ 在 $[a,b]$ 上必定有界。

**证明** 反证，若 $f$ 在 $[a,b]$ 上无界，则对于即对于 $[a,b]$ 的任意分割 $T$，必存在属于 $T$ 的某区间 $\Delta_k$，使 $f$ 在其上无界。在 $i\neq k$ 的各个区间 $\Delta_i$ 上取定 $\xi_i$，记

$$G=\left|\sum_{i\neq k}f(\xi)\Delta x_i\right|$$

任意大的正数 $M$，存在 $\xi_k\in\Delta_k$，使得

$$|f(\xi_k)|>\frac{M+G}{\Delta x_k}$$

于是有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi)\Delta x_i\right|\geqslant|f(\xi_k)\Delta x_k|-\left|\sum_{i\neq k}f(\xi)\Delta x_i\right|>\frac{M+G}{\Delta x_k}\cdot\Delta x_k-G=M$$

□

有界函数不一定黎曼可积，比如 Dirichlet 函数。

设 $T$ 为对 $[a,b]$ 的任意分割。由 $f$ 在 $[a,b]$ 上有界，它在每个 $\Delta_i$ 上存在上、下确界：

$$M_i=\sup_{x\in\Delta_i}f(x),m_i=\inf_{x=\Delta_i}f(x),i=1,\cdots,n$$

作和

$$S(T)=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i,s(T)=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i$$

分别称为 $f$ 关于分割 $T$ 的上和与下和（或称达布上和与达布下和，统称达布和）。任给 $\xi_i=\Delta_i,i=1,\cdots,n$，显然有

$$m(b-a)\leqslant s(T)\leqslant\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\leqslant S(T)\leqslant M(b-a)$$

与积分和相比较，达布和只与分割 $T$ 有关，而与点集 $\{\xi_i\}$ 无关。

**命题 7.1**

给定分割 $T$，对于任何点集 $\{\xi_i\}$ 而言，上和时所有积分和的上确界，下和是所有积分和的下确界。

**证明** 设 $\Delta_i$ 中 $M_i$ 是 $f(x)$ 的上确界，故可选取点 $\xi=\Delta_i$，使 $f(\xi_i)>M_i-\frac{\varepsilon}{b-a}$，于是有

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i > \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i - \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = S(T)-\varepsilon$$

即 $S(T)$ 是全体积分和的上确界。类似可证 $s(T)$ 是全体积分和的下确界。 □

**命题 7.2**

设 $T'$ 为分割 $T$ 添加 $p$ 个新分点后所得到的分割，则有

**定理 7.4**

函数 $f$ 在 $[a,b]$ 上可积的充要条件是：人格 $\varepsilon>0$，总存在相应的一个分割 $T$ 使得

$$S(T)-s(T)<\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\varepsilon$$

其中 $\omega$ 称为 $f$ 在 $\Delta_i$ 上的振幅。

由充要条件，我们可以得到一系列的可积函数类。

**定理 7.5**

若 $f$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数，则 $f$ 在 $[a,b]$ 上可积。

**证明** 由于 $f$ 在闭区间 $[a,b]$ 上一致连续，即任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对 $[a,b]$ 中任意两点 $x_1,x_2$，只要 $|x_1-x_2|<\delta$，便有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$$

所以对于在 $[a,b]$ 的分割 $T$ 满足 $\|T\|<\delta$，在 $T$ 所属的任一小区间 $\Delta_i$ 上，都有

$$\omega_i=M_i-m_i=\sup_{x_1,x_2\in\Delta_i}|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\frac{\varepsilon}{b-a}$$

从而

$$\sum_T\omega_i\Delta x_i\leqslant\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_T\Delta x_i=\varepsilon$$

□

## 7.2 分项积分法

若干微分式的和或差的不定积分，等于每个微分式的各自积分的和或差。

$$\int (f(x)+g(x)-h(x))\,\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x+\int g(x)\mathrm{d}x-\int h(x)\mathrm{d}x$$

因此多项式的积分可以简单的通过积分各个单项式得到。

如果一个分式的分母为多项式，则可把它化成最简单的分式再积分。如

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)$$

这里可以通过通分后待定系数得到。于是其积分为

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$$

对于更复杂的真分式的情况，若要计算的是

$$\int \frac{mx+n}{x^2+px+q}\mathrm{d}x$$

分母不一定能直接分解，但总能进行配方

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}=t^2\pm a^2$$

再令 $A=m, B=n-\frac{1}{2}mp$，可得

$$\int \frac{mx+n}{x^2+px+q}\mathrm{d}x=\int \frac{At+B}{t^2\pm a^2}\mathrm{d}t=A\int \frac{t\mathrm{d}t}{t^2\pm a^2}+B\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2\pm a^2}$$

其中

$$\begin{aligned}
A\int \frac{t\mathrm{d}t}{t^2\pm a^2}&=\frac{A}{2}\int \frac{\mathrm{d}(t^2\pm a^2)}{t^2\pm a^2}=\frac{A}{2}\ln|t^2\pm a^2|+C\\
B\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2}&=\frac{B}{a}\arctan\frac{t}{a}+C\\
B\int \frac{t\mathrm{d}t}{t^2-a^2}&=\frac{B}{2a}\ln\left|\frac{t-a}{t+a}\right|+C
\end{aligned}$$

因此当 $p^2<4q$ 时，可以得到

$$\begin{aligned}
\int \frac{mx+n}{x^2+px+q}&=\frac{A}{2}\ln|t^2+a^2|+\frac{B}{a}\arctan\frac{t}{a}+C\\
&=\frac{m}{2}\ln|x^2+px+q|+\frac{2n-mp}{\sqrt{4q-p^2}}\arctan\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C
\end{aligned}$$

当 $p^2>4q$ 时，可以得到

$$\begin{aligned}
\int \frac{mx+n}{x^2+px+q}&=\frac{A}{2}\ln|t^2-a^2|+\frac{B}{2a}\ln\left|\frac{t-a}{t+a}\right|\\
&=\frac{m}{2}\ln|x^2+px+q|+\frac{2n-mp}{2\sqrt{4q-p^2}}\ln\left|\frac{2x+p-\sqrt{p^2-4q}}{2x+p+\sqrt{p^2-4q}}\right|+C
\end{aligned}$$