Maestría en Ciencia y Análisis de Datos- Universidad Mayor de San Andrés

Modelos lineales y modelos lineales generalizados

Rolando Gonzales Martinez, PhD

Fellow postdoctoral Marie Skłodowska-Curie

Universidad de Groningen (Países Bajos)

Investigador (researcher)

Iniciativa de Pobreza y Desarrollo Humano de la Universidad de Oxford (UK)

Contenido del curso

(3) Modelos Lineales Generalizados (MLG)

- Concepto de MLG.

- Funciones de enlace.

- Modelos estadísticos con distribuciones usualmente aplicadas en MLG: normal, binomial, Possion.

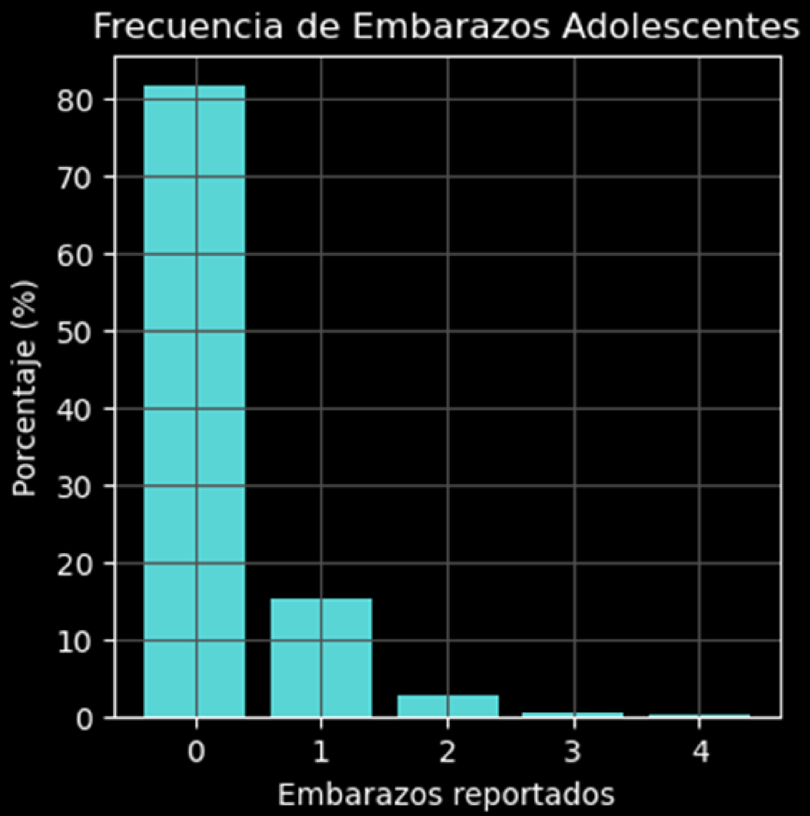
- Otros modelos: modelos de regresión espacial y modelo SIR

- Laboratorio: Implementación de MLG en problemas de regresión y clasificación.

Modelos lineales generalizados: motivación

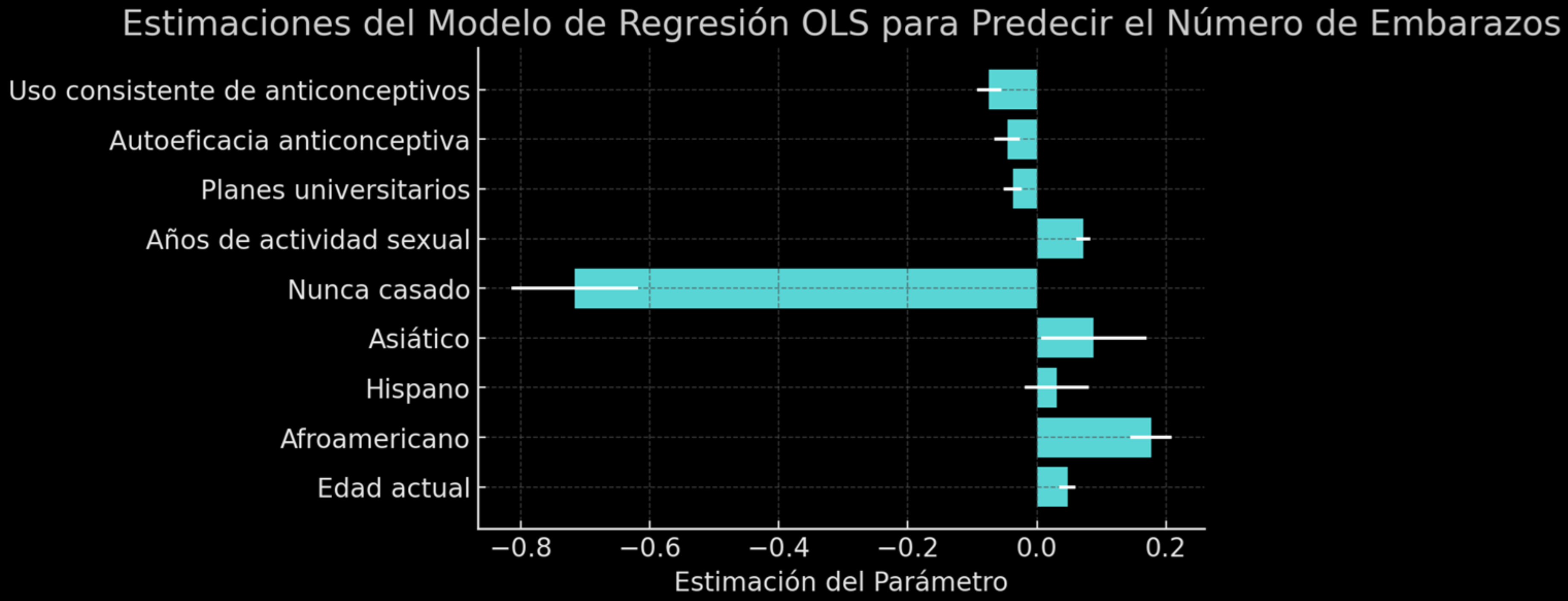
Embarazos reportados	n	%
0	1,011	81.5
1	190	15.3
2	32	2.6
3	6	0.5
4	2	0.2

Hutchinson, M. K., & Holtman, M. C. (2005). Analysis of count data using poisson regression. *Research in nursing & health*, *28*(5), 408-418.



Modelos lineales generalizados: motivación

Estimación MCO:



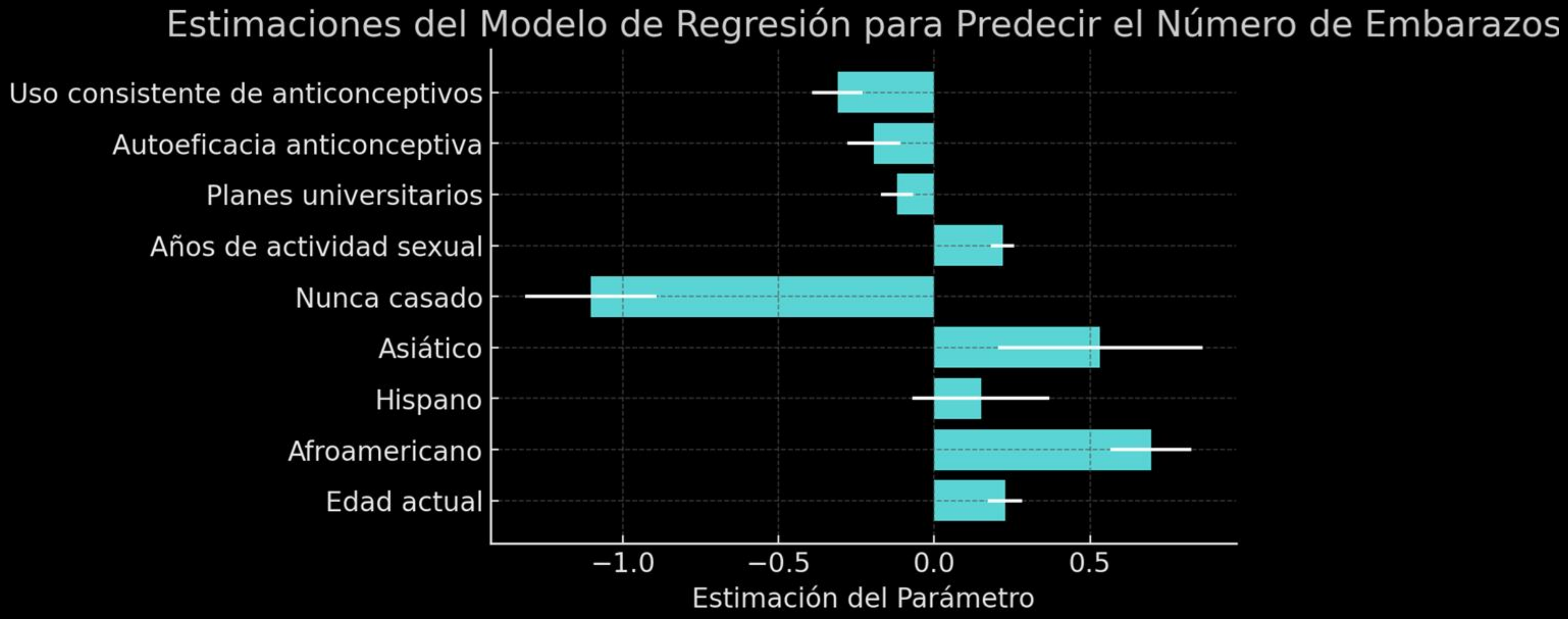
Modelos lineales generalizados: motivación

Estimación MCO:

Variable	Parametro estimado	Error Estandar	Valor t	p-value
Intercepto	0.3741	0.22441	1.67	0.0958
Edad actual	0.04718	0.01223	3.86	0.0001
Afroamericana	0.17686	0.03219	5.49	0.0001
Hispana	0.03127	0.04971	0.63	0.5295
Asiática	0.08816	0.08171	1.08	0.2808
Nunca casada	-0.71671	0.09796	-7.32	0.0001
Años de actividad sexual	0.07221	0.01092	6.61	0.0001
Planes universitarios	-0.03711	0.01402	-2.65	0.0082
Auto eficacia anticonceptiva	-0.04573	0.02005	-2.28	0.0227
Uso consistente de anticonceptivos	-0.07412	0.01879	-3.94	0.0001

Modelos lineales generalizados: motivación

Estimación de MV de un modelo de Poisson:



Modelos lineales generalizados: motivación

Estimación de MV de un modelo de Poisson:

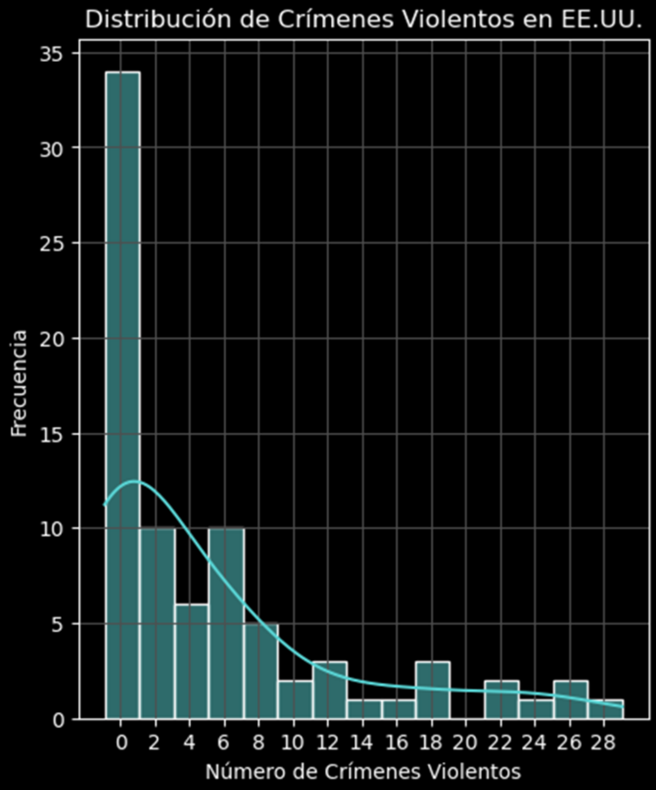
	Parámetro estimado	Error estándar	χ^2	p-value
Intercepto	-3.5182	0.9551	13.57	0.0002
Edad actual	0.2278	0.0556	16.78	<0.0001
Afroamericana	0.6958	0.1297	28.78	<0.0001
Hispana	0.1498	0.2195	0.47	0.4949
Asiática	0.5333	0.329	2.63	0.1051
Nunca casada	-1.1035	0.2122	27.04	<0.0001
Años de actividad sexual	0.2195	0.0381	33.13	<0.0001
Planes universitarios	-0.1198	0.0515	5.41	0.0201
Auto eficacia anticonceptiva	-0.1939	0.0852	5.17	0.023
Uso consistente de anticonceptivos	-0.3106	0.0812	14.62	<0.000

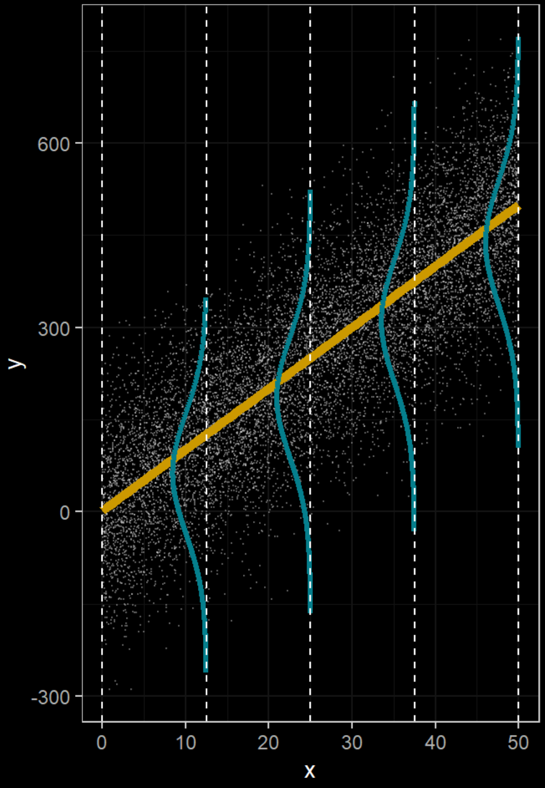
Modelos lineales generalizados: motivación

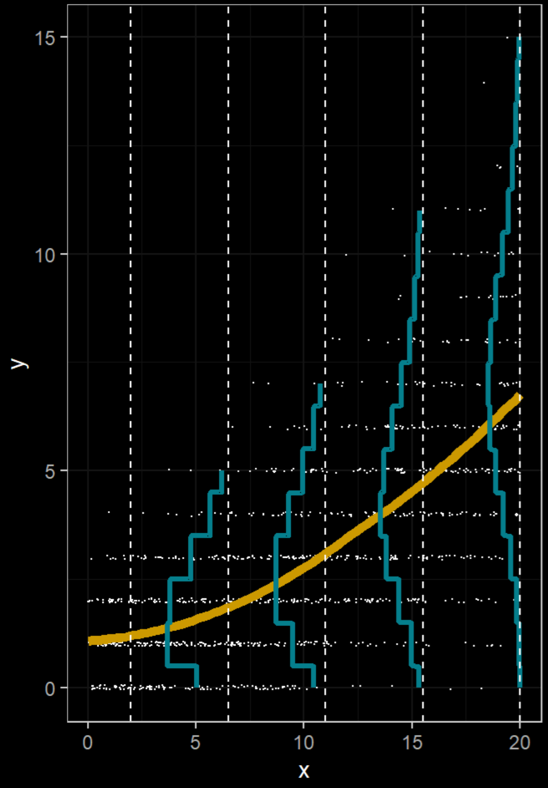
Estimación de MV de un modelo de Poisson:

	Parámetro estimado	$\exp(\beta)$	ΔY (%)
Edad actual	0.2278	1.26	25.6
Afroamericana	0.6958	2.01	100.5
Hispana	0.1498	1.16	16.2
Asiática	0.5333	1.70	70.5
Nunca casada	-1.1035	0.33	-66.8
Años de actividad sexual	0.2195	1.25	24.5
Planes universitarios	-0.1198	0.89	-11.3
Auto eficacia anticonceptiva	-0.1939	0.82	-17.6
Uso consistente de anticonceptivos	-0.3106	0.73	-26.7

Modelos lineales generalizados: motivación







Modelos lineales generalizados: definición

$$g(\mu_i) = \eta_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \cdots + \beta_p X_{ip}$$

μ_i es la media de la variable de respuesta Y_i.

g es la función de enlace.

η_i es el predictor lineal.

$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ son los coeficientes del modelo.

$X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{ip}$ son las variables predictoras.

Modelos lineales generalizados: definición

Variable de respuesta (Y):

- Puede seguir diferentes distribuciones de probabilidad (binomial, Poisson, normal, gamma, etc.).
- No se limita a ser continua y normalmente distribuida como en los modelos lineales tradicionales.

Función de enlace g(·):

- Relaciona la media de la variable de respuesta con la combinación lineal de las variables explicativas en X.

$$\mu_i = \mathbb{E}[Y_i]$$

$$g(\mathbb{E}[Y_i]) = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}$$

Modelos lineales generalizados: ejemplos

Regresión Lineal (Distribución Normal, Función de Enlace Identidad):

- Variable de respuesta: continua.
- Modelo: $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \epsilon$
- ϵ es el término de error normalmente distribuido.

Regresión Logística (Distribución Binomial, Función de Enlace Logit):

- Variable de respuesta: binaria.
- Modelo: $\mathrm{logit}(\pi) = \log\left(\frac{\pi}{1-\pi}\right) = \beta_0 + \beta_1 X$
- π es la probabilidad de éxito.

Modelos lineales generalizados: ejemplos

Regresión de Poisson (Distribución de Poisson, Función de Enlace Log):

- Variable de respuesta: conteos.
- Modelo: $\log(\lambda) = \beta_0 + \beta_1 X$
- λ es la tasa de conteo.

Regresión Binomial Negativa (Distribución Binomial Negativa, Función de Enlace Log)

- Variable de respuesta: conteos con sobredispersión.
- Modelo: $\log(\lambda) = \beta_0 + \beta_1 X$

Funciones de enlace

Función de enlace identidad

- **Modelo:** $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \epsilon$
- **Función de Enlace:** $g(\mu) = \mu$
- **Inversa:** $g^{-1}(\eta) = \eta$
- **Tipo de Variable:** Continua (normalmente distribuida)

$$\mu = \beta_0 + \beta_1 X$$

Funciones de enlace

Función de enlace inversa

- **Modelo:** $\mu^{-1} = \beta_0 + \beta_1 X$
- **Función de Enlace:** $g(\mu) = \frac{1}{\mu}$
- **Inversa:** $g^{-1}(\eta) = \frac{1}{\eta}$
- **Tipo de Variable:** Continua y positiva

$$\mu = \frac{1}{\beta_0 + \beta_1 X}$$

Funciones de enlace

Función de enlace potencia

- **Modelo:** $\mu^k = \beta_0 + \beta_1 X$, donde k es una constante
- **Función de Enlace:** $g(\mu) = \mu^k$
- **Inversa:** $g^{-1}(\eta) = \eta^{1/k}$
- **Tipo de Variable:** Continua y positiva

$$\mu = (\beta_0 + \beta_1 X)^{1/k}$$

Funciones de enlace

Función de enlace logit

- **Modelo:** $\text{logit}(\pi) = \log\left(\frac{\pi}{1-\pi}\right) = \beta_0 + \beta_1 X$
- **Función de Enlace:** $g(\pi) = \log\left(\frac{\pi}{1-\pi}\right)$
- **Inversa:** $g^{-1}(\eta) = \frac{e^\eta}{1+e^\eta}$
- **Tipo de Variable:** Binaria (0 o 1)

$$\pi = \frac{e^{\beta_0+\beta_1 X}}{1+e^{\beta_0+\beta_1 X}}$$

Funciones de enlace

Función de enlace gompit

- **Modelo:** $\log(-\log(\pi)) = \beta_0 + \beta_1 X$
- **Función de Enlace:** $g(\pi) = \log(-\log(\pi))$
- **Inversa:** $g^{-1}(\eta) = e^{-e^{\eta}}$
- **Tipo de Variable:** Binaria (0 o 1)

$$\pi = e^{-e^{\beta_0+\beta_1 X}}$$

Funciones de enlace

Función de enlace probit

- **Modelo:** $\Phi^{-1}(\pi) = \beta_0 + \beta_1 X$
- **Función de Enlace:** $g(\pi) = \Phi^{-1}(\pi)$, donde Φ^{-1} es la inversa de la función de distribución normal acumulativa.
- **Inversa:** $g^{-1}(\eta) = \Phi(\eta)$, donde Φ es la función de distribución normal acumulativa.
- **Tipo de Variable:** Binaria (0 o 1)

$$\pi = \Phi(\beta_0 + \beta_1 X)$$

Funciones de enlace

Función de enlace log

- **Modelo:** $\log(\lambda) = \beta_0 + \beta_1 X$
- **Función de Enlace:** $g(\lambda) = \log(\lambda)$
- **Inversa:** $g^{-1}(\eta) = e^{\eta}$
- **Tipo de Variable:** Conteos (números enteros no negativos)

$$\lambda = e^{\beta_0 + \beta_1 X}$$

Funciones de enlace

Función de enlace log-log (doble logaritmica)

- **Modelo**: $\log(\log(\mu)) = \beta_0 + \beta_1 X$
- **Función de Enlace:** $g(\mu) = \log(\log(\mu))$
- **Inversa:** $g^{-1}(\eta) = e^{e^{\eta}}$
- **Tipo de Variable:** Continua y positiva

$$\mu = e^{e^{\beta_0 + \beta_1 X}}$$

Funciones de enlace

Función de enlace arcseno de raíz cuadrática

- **Modelo:** $\arcsin(\sqrt{\mu}) = \beta_0 + \beta_1 X$
- **Función de Enlace:** $g(\mu) = \arcsin(\sqrt{\mu})$
- **Inversa:** $g^{-1}(\eta) = (\sin(\eta))^2$
- **Tipo de Variable:** Proporciones (valores entre 0 y 1)

$$\mu = (\sin(\beta_0 + \beta_1 X))^2$$

Funciones de enlace

Función de enlace Box-Cox

- **Modelo:** $\frac{\mu^{\lambda}-1}{\lambda} = \beta_0 + \beta_1 X$, donde λ es un parámetro de transformación
- **Función de Enlace:** $g(\mu) = \frac{\mu^{\lambda}-1}{\lambda}$
- **Inversa:** $g^{-1}(\eta) = (\lambda\eta + 1)^{1/\lambda}$
- **Tipo de Variable:** Continua y positiva

$$\mu = (\lambda(\beta_0 + \beta_1 X) + 1)^{1/\lambda}$$

Métodos de estimación: máxima verosimilitud

Los modelos lineales generalizados se estiman usualmente con máxima verosimilitud:

$$\{(y_i, \mathbf{x}_i)\}_{i=1}^{n}$$

$$L(\boldsymbol{\beta}) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i \mid \mathbf{x}_i; \boldsymbol{\beta})$$

$$\ell(\boldsymbol{\beta}) = \log L(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} \log f(y_i \mid \mathbf{x}_i; \boldsymbol{\beta})$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \arg\max_{\boldsymbol{\beta}} \ell(\boldsymbol{\beta})$$

Métodos de estimación: máxima verosimilitud

Los estimadores máximo verosímiles son consistentes, asintoticamente eficientes, tienen un distribución asintótica normal e insesgadez asintótica:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{MLE} \xrightarrow{P} \boldsymbol{\beta} \qquad \lim_{n\to\infty} P(|\hat{\boldsymbol{\beta}}_{MLE} - \boldsymbol{\beta}| \geq \epsilon) = 0$$

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{MLE} - \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, I(\boldsymbol{\beta})^{-1})$$

$$\mathbb{E}[\hat{\boldsymbol{\beta}}_{MLE}] \approx \boldsymbol{\beta} \qquad I(\boldsymbol{\beta}) = \mathbb{E}\left[-\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}^\top}\right]$$

$$\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{MLE}) \approx \tfrac{1}{n} I(\boldsymbol{\beta})^{-1}$$

Métodos de estimación: Quasi-máxima verosimilitud

Quasi-máxima verosimilitud:

$$Q(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(y_i - \mu_i)^2}{2V(\mu_i)} + \int_{\mu_i}^{y_i} \frac{y-t}{V(t)}\, dt \right)$$

$$\frac{\partial Q(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - \mu_i)\frac{\partial \mu_i}{\partial \beta_j}}{V(\mu_i)}$$

- No se basa en una función de verosimilitud con una distribución específica
- La derivada se utiliza para encontrar los estimadores, con métodos numéricos
- Los estimadores son consistentes y asintóticamente eficientes.

Métodos de estimación: Quasi-máxima verosimilitud

Las iteraciones del scoring the Fisher se utilizan para encontrar estimadores de quasi-máxima verosimilitud en algunos modelos estadísticos:

$$\boldsymbol{\beta}^{(0)}$$

$$\boldsymbol{\beta}^{(t+1)} = \boldsymbol{\beta}^{(t)} + I(\boldsymbol{\beta}^{(t)})^{-1} U(\boldsymbol{\beta}^{(t)})$$

$$U(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i - \mu_i}{\mu_i} \mathbf{x}_i$$

$$I(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^\top}{\mu_i}$$

$$I(\boldsymbol{\beta}) = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}^\top}\right] \qquad U(\boldsymbol{\beta}) = \frac{\partial \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta}}$$

$$\mu_i = f(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta})$$

Métodos de estimación: Método de los momentos

Método de los momentos:

$$\mathbb{E}[Y] = \mu(\beta)$$
$$\mathbb{E}[(Y - \mu(\beta))^2] = \sigma^2(\beta)$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\mu})^2$$

$$\hat{\mu} = \mu(\beta)$$
$$\hat{\sigma}^2 = \sigma^2(\beta)$$

Métodos de estimación: Método de los momentos

Método de los momentos: ejemplos.

Modelo lineal:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \epsilon$$

$$\mathbb{E}[Y] = \beta_0 + \beta_1 \mathbb{E}[X]$$

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(\epsilon)$$

Regresión de Poisson:

$$\log(\lambda_i) = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}$$

$$\mathbb{E}[Y_i] = \lambda_i$$

$$\mathrm{Var}(Y_i) = \lambda_i$$

Métodos de estimación: propiedades de los estimadores

Los estimadores del método de los momentos son consistentes, asintoticamente insesgados, y tienen un distribución asintótica normal, pero en muestras pequeñas la varianza es mayor que la de los estimadores máximo verosímiles:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{MME} \xrightarrow{P} \boldsymbol{\beta}$$

$$\mathbb{E}[\hat{\boldsymbol{\beta}}_{MME}] \approx \boldsymbol{\beta}$$

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{MME} - \boldsymbol{\beta}) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, V)$$

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_{MME}) \approx \frac{1}{n} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \beta} \right)^{-1} \Sigma \left(\frac{\partial \mu}{\partial \beta} \right)^{-1}$$

Laboratorio: Simulaciones de Monte Carlo

- **MLMLG_0301.R:** Métodos de estimación de MLGs.
- **MLMLG_0302.R:** Simulación de consistencia de los estimadores en un modelo de regresión de Poisson
- **MLMLG_0303.R:** Simulación de insesgamiento de los estimadores en un modelo de regresión de Poisson
- **MLMLG_0304.R:** Simulación de insesgamiento asintótico de los estimadores en un modelo de regresión de Poisson
- **MLMLG_0305.R:** Simulación de la distribución asintótica normal de los estimadores en un modelo de regresión de Poisson

¿A qué software estadístico le daremos más énfasis en el resto del módulo?

- R (Posit)
- R (AnalyticFlow)
- Python

enketo.one/join

9SC7ZX