Machine learning y deep learning: Ética y Consideraciones Futuras en Al

Rolando Gonzales Martinez, PhD

Fellow postdoctoral Marie Skłodowska-Curie

Universidad de Groningen (Países Bajos)

Investigador (researcher)

Iniciativa de Pobreza y Desarrollo Humano de la Universidad de Oxford (UK)

La **ética** estudia principios y valores que guían el comportamiento humano, distinguiendo entre lo que es correcto e incorrecto, bueno o malo, justo o injusto.

Principios:

- Moralidad: lo que es correcto en un contexto dado.
- Responsabilidad: rendir cuentas por las acciones y asumir las consecuencias de las mismas
- Justicia: equidad en el trato entre los individuos y en la distribución de los recursos, oportunidades y beneficios
- Autonomía: Se refiere al respeto por la capacidad de las personas para tomar decisiones por sí mismas
- Beneficencia y No Maleficencia: Estos principios promueven hacer el bien a los demás (beneficencia) y evitar causar daño innecesario (no maleficencia). En contextos como la medicina, estos principios son fundamentales para guiar la práctica profesional.

Por ejemplo, responsabilidad (rendir cuentas por las acciones y asumir las consecuencias de las mismas)

Gedankenexperiment 1: una empresa paga a un científico de datos para construir un clasificador basado en machine learning (deep learning) para predecir si una persona tendrá o no tendrá cáncer. Cuando se aplica el algoritmo clasificador, una persona no recibe tratamiento temprano (porque tuvo un falso negativo) y llega a Stage 3.

¿Quién es responsable?

- ¿El científico de datos que diseñó y entreno el modelo?
- ¿La empresa que contrató al científico de datos?
- ¿El médico especialista que usó el clasificador MLDL para dar un diagnóstico?
- ¿El hospital que implementó el algoritmo clasificador para asistir las decisiones médicas?
- ¿El algoritmo clasificador MLDL?

Justicia: equidad en el trato entre los individuos y en la distribución de los recursos, oportunidades y beneficios

Gedankenexperiment 2: un clasificador basado en machine learning (deep learning) creado para colocacion de creditos, asigna menos creditos a personas debido a caractersiticas como su genero (sexo) o etnicidad.

¿Debería ser el deontologismo la teoría ética a aplicar en estos algoritmos? (i.e. las acciones son moralmente correctas o incorrectas basadas en el cumplimiento de normas o deberes, incluso si eso resulta en un modelo menos eficiente o más costoso de implementar)



Ethical biases of Artificial Intelligence in Algorithmic Lending:

- Bank D-Miro: micro-financial institution from Ecuador
- Ethnicity was approached with a measure of the regional location of the Montubios in Ecuador.

Table 1: Frequency of loan defaults by sex

	Loan default						
sex	no	yes	total				
ny region	42038	24069	66107				
male	(27)	(16)	(43)				
female	59267	28289	87556				
	(39)	(18)	(57)				
total	101305	52358	153663				
	(66)	(34)	(100)				

Note: percentages in brackets below each frequency

Table 2: Descriptive statistics of the potential explanatory variables of loan default

Variable	Mean	Std. dev.	Min	Max
age	42.76	11.47	21	82
dependants	1.48	1.42	0	9
equity (thousands)	12.81	10.53	0	232.51
education	0.96	0.19	1	1
marital status $(1 = single)$	0.56	0.5	1	1
occupation	0.91	0.29	0	1
housing	0.64	0.48	0	1
wife contributes to paying the loan (=1)	0.07	0.26	0	1
balance	0.01	1.99	-1.75	57.90
flow	-0.14	1.56	-2.36	30.19

Lending algorithms (machine learning models)		Equa	Equality		lusion	Lending algorithms	Overall	Equality		Inclusion	
	Overall results	Women	Men	Ethnic women	& poor	(machine learning models)	results	Women	Men	Ethnic women	& poo
Area under the curve (AUC)	-0.0	-0.4				Area under the curve (AUC)	55.0	5/ 2	75.0		(17
Passive-aggressive algorithm	50.9	50.6	51.3	51.4	51.0	Passive-aggressive algorithm	55.8	56.2	55.8	64.4	64.7
Stochastic vector machine	54.1	53.9	54.7	52.9	53.5	Elastic net	58.9	58.4	59.0	64.6	65.0
Logistic classification	55.6	55.5	55.7	63.2	64.7	Stochastic gradient classifier	59.2	58.7	59.2	69.8	71.3
Elastic net	58.4	57.8	59.1	63.0	62.6	Logistic classification	59.9	59.9	59.9	70.6	72.7
Neural network	59.5	59.5	59.4	68.6	69.9	Stochastic vector machine	61.5	62.1	61.5	69.0	69.7
Stochastic gradient classifier	60.6	58.6	63.3	60.5	61.5	Neural network	63.9	60.9	64.4	65.7	66.8
Random forest	92.6	92.6	92.6	91.5	91.8	Random forest	91.5	82.0	92.5	88.9	90.0
Gradient boosting (XGBoost)	92.9	93.0	92.7	91.7	92.2	Gradient boosting (XGBoost)	91.8	82.1	92.9	87.4	89.1
Exclusion errors						Exclusion errors					
Logistic classification	85.9	86.5	85.2	69.5	67.3	Passive-aggressive algorithm	83.7	82.5	83.8	64.5	64.5
Neural network	74.7	75.0	74.2	54.5	52.5	Stochastic gradient classifier	73.8	74.5	73.8	49.7	46.1
Stochastic gradient classifier	39.0	41.2	36.4	37.1	35.5	Logistic classification	71.3	72.2	71.2	49.7	45.4
Elastic net	39.0	38.4	39.6	20.8	20.5	Stochastic vector machine	58.3	53.0	59.0	29.7	27.0
Stochastic vector machine	8.5	6.4	11.1	6.0	5.0	Neural network	43.9	45.3	43.7	29.7	25.5
Random forest	7.4	7.9	6.7	6.6	6.4	Elastic net	38.6	37.5	38.8	18.7	17.0
Gradient boosting (XGBoost)	6.9	7.3	6.4	5.9	5.6	Random forest	9.1	29.7	6.7	18.1	14.9
Passive-aggressive algorithm	2.2	2.5	1.9	1.5	1.6	Gradient boosting (XGBoost)	8.4	29.9	6.0	19.4	15.

^(*) Balanced sample: percentage of men is equal to the percentage of women. Ethnic and poor women are women living in poor regions.

Imbalanced sample: percentage of men is higher than the percentage of women. Ethnic and poor women are women living in poor regions.

- Métricas de desempeño: paridad demográfica (tasa de resultados positivos igual entre diferentes grupos)
- Algoritmos realizan ajustes durante el preprocesamiento, durante el entrenamiento, o durante el post-procesamiento: imbalanced-learning, AIF360, Fairlean.

AIF360 (AI Fairness 360):

- Desarrollada por IBM, es una de las bibliotecas más completas para abordar la discriminación en machine learning. Incluye herramientas para preprocesamiento, inprocesamiento y posprocesamiento.
- Incluye algoritmos para reducir el sesgo y métricas para evaluar la equidad.

Fairlearn

- Fairlearn es una biblioteca de Microsoft que proporciona herramientas para evaluar y mitigar el sesgo en modelos de machine learning.
- Incluye técnicas para ajustar los modelos y garantizar que cumplan con criterios de equidad.

FAHT (Fairness-Aware Hyperplane Tree: árbol hiperplano consciente de la equidad) clasificador de árbol de decisión diseñado para abordar cuestiones de equidad en tareas de clasificación y regresión.

- Restricciones de imparcialidad en el árbol de decisión: reduce el potencial de resultados sesgados y promueve decisiones más equitativas entre los grupos sensibles.
- Incluye métricas de equidad: paridad demográfica, las probabilidades igualadas u otros criterios de equidad.
- División basada en hiperplanos para permitir límites de decisión más flexibles y complejos

$$egin{aligned} P(\hat{Y} = 1 | S = 1) &= P(\hat{Y} = 1 | S = 0) \ &\min_{ heta} \mathcal{L}(heta, X, Y) + \lambda \mathcal{F}(heta, S) \ h(X) &= w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_d x_d \ &X = (x_1, x_2, \dots, x_d) \ &\min_{w} \left[\mathcal{I}(w) + \lambda \mathcal{F}(w, S)
ight] \ w_t \leftarrow w_{t-1} - \eta
abla_w \left[\mathcal{L}(w_{t-1}, X_t, Y_t) + \lambda \mathcal{F}(w_{t-1}, S_t)
ight] \end{aligned}$$

Indonesian socioeconomic survey data - the Social Surveys National Economy (SUSENAS)

Que hogares deben recibir transferencias para reducir la pobreza?

$$EE = \frac{fn}{tp + fn}$$

$$IE = \frac{fp}{tp + fp}$$

Figure 4: Results of the Principal Component Analysis (PCA) applied to the SUSENAS data 2016 to 2020

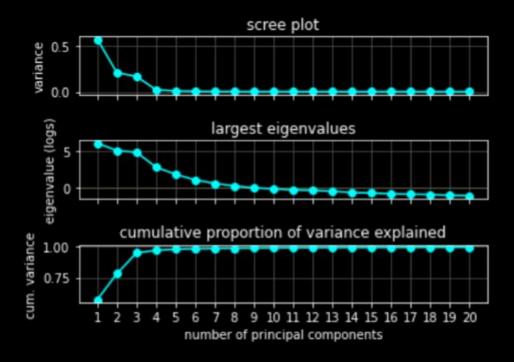


Figure 5: Spatial contiguity by region (kabupaten)



Figure 13: Spatial hierarchical clustering and dendogram: 12 clusters



	fn
EE =	tp + fr
IE =	fp

	Benchmark ML models*	Spatial machine learning models							
		Without pri	incipal comp	onent analysis	With principal component analysis				
		4 clusters	6 custers	12 clusters	4 clusters	6 custers	12 clusters		
Exclusion error									
Elastic net	28.50	28.42	28.39	28.28	28.47	28.46	28.38		
Gradient boosting	31.48	28.79	28.74	28.53	30.99	30.97	30.93		
Linear regression	28.20	28.20	28.22	28.15	28.22	28.25	28.19		
Logistic classification	33.25	27.53	27.44	30.49	33.25	33.15	33.93		
Naive Bayes	28.77	20.44	20.40	20.14	22.90	23.17	23.05		
Neural network	30.60	34.19	35.23	35.69	32.08	29.66	31.77		
Random forest	57.19	45.72	45.86	45.36	53.65	54.01	54.06		
Stochastic gradient	35.02	58.53	58.97	57.86	56.49	56.02	56.28		
Inclusion error									
Elastic net	28.49	32.39	32.57	32.26	32.43	32.59	32.34		
Gradient boosting	31.47	32.59	32.77	32.41	34.56	34.75	34.54		
Linear regression	28.20	32.18	32.35	32.13	32.21	32.38	32.17		
Logistic classification	27.36	46.28	46.40	45.56	37.35	36.72	35.05		
Naive Bayes	43.54	43.28	43.60	43.54	43.90	43.89	43.89		
Neural network	28.85	57.17	57.41	57.80	46.06	44.53	41.66		
Random forest	33.52	28.97	29.63	29.36	32.29	32.89	32.20		
Stochastic gradient	41.10	52.53	53.18	52.39	45.92	44.31	43.87		
Minimum values									
Exclusion error (EE)	28.20	20.44	20.40	20.14	22.90	23.17	23.05		
Inclusion error (IE)	27.36	28.97	29.63	29.36	32.21	32.38	32.17		

Inteligencia artificial bionica

No es equivalente a la ingeniería biónica, pero está relacionada:

- Algoritmos genéticos
- Inteligencia artificial bio-inspirada:
 - Redes neuronales líquidas
 - Ant Colony Optimization (ACO)
 - Redes Neuronales de Espigas (Spiking Neural Networks, SNN)
 - ...

Redes Neuronales Liquidas

- RNL fueron inspiradas por el nematodo microscópico, Caenorhabditis elegans, que tiene 302 neuronas en su sistema nervioso
- Hasani codificó su red neuronal prestando especial atención a cómo las neuronas de C. elegans se activan y se comunican entre sí mediante impulsos eléctricos. En las ecuaciones que utilizó para estructurar su red neuronal, permitió que los parámetros cambien con el tiempo según los resultados de un conjunto anidado de ecuaciones diferenciales.



Redes Neuronales Liquidas

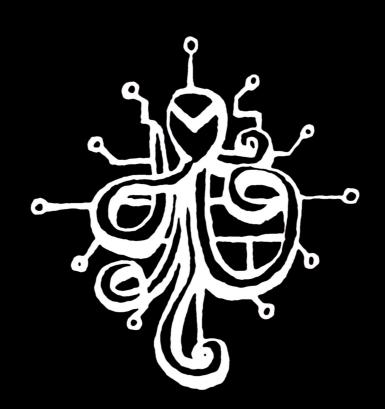


Algorithm 1 LTC update by fused ODE Solver

return $\mathbf{x}_{t+\Delta t}$

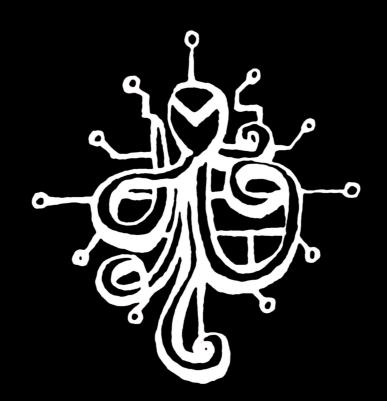
Inteligencia artificial tentacular

- Sistemas de IA distribuidos y multi-agente, capaces de actuar a través de Internet de las Cosas (IoT) y el edge computing.
- Funcionan de manera autónoma, colaborando entre agentes para resolver problemas complejos, con capacidad de tomar decisiones éticas y legales.
- Acciones Distribuidas: La IA puede delegar tareas a otros agentes o sistemas, extendiendo su "tentáculos" a través de redes globales, IoT, y ciberespacios.



Inteligencia artificial tentacular

- Justificación y Transparencia: Cada decisión tomada por un agente TAI debe ser acompañada de una explicación y prueba de que es ética y segura.
- Cálculo de Eventos Cognitivos Deónticos (DCEC): Permite representar obligaciones, permisos y prohibiciones en la toma de decisiones de los agentes (e.g., "el agente debe encender la luz si detecta movimiento").



Spiking Neural Networks (SNN)

Spiking Neural Networks: redes neuronales que intentan imitar más de cerca el comportamiento biológico de las neuronas.

SNN funcionan con pulsos discretos llamados spikes o impulsos.

Tercera generación de modelos de redes neuronales:

- Primera generacion: perceptron, perceptron multicapa
- 2. Segunda generación: funciones de activación no-lineales y deep learning
- 3. Tercera generacion: SNN y computación neuromórfica

RNA y deep learning no son modelos del cerebro humano

- RNA y DL están inspirados en el funcionamiento del cerebro, pero no buscan replicarlo o emularlo.
- Proyectos que buscan emular el cerebro humano: El proyecto de neurociencia EBRAINS de la Comisión Europea.

Un proyecto de
EBRAINS: Virtual Brain
Twin para el tratamiento
personalizado de
Trastornos Psiquiátricos



Europe spent €600 million to recreate the human brain in a computer. How did it go?

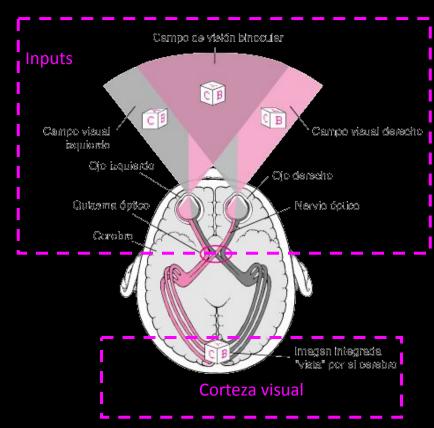
Nature, 22 de Agosto

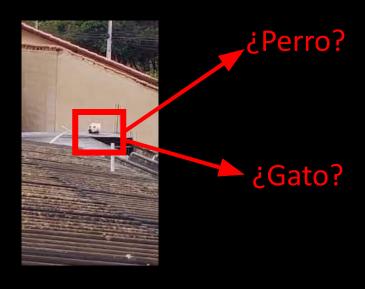
https://www.nature.com/articles/d41586-023-02600-x



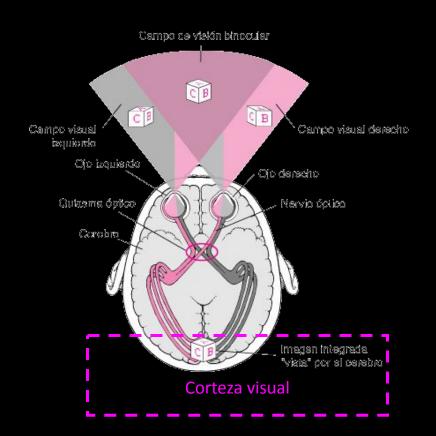
Reconstrucción digital de un circuito de neuronas del lóbulo temporal de un cerebro humano

Sistema visual de los seres humanos





Sistema visual de los seres humanos

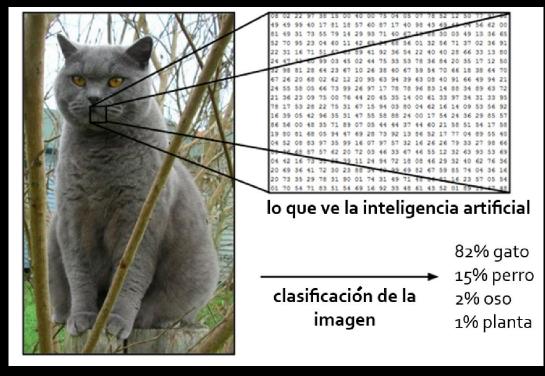




https://www.ndtv.com/offbeat/hilarious-video -shows-cat-that-looks-like-a-dog-until-it-sudde nly-moves-2690289

Sistema visual de la inteligencia artificial

- Para enseñar a un algoritmo cómo reconocer objetos en imágenes, se entrena un algoritmo con millones de imágenes
- Se utiliza un tipo específico de red neuronal artificial: una red neuronal convolucional profunda.
- Su nombre proviene de una de las operaciones más importantes de la red: la **convolución**.



Computación en GPU

La computación en GPU (Unidad de Procesamiento Gráfico, por sus siglas en inglés) se refiere al uso de las unidades de procesamiento gráfico que normalmente se encuentran en tarjetas gráficas para realiza cálculos y tareas de procesamiento más allá o la representación y renderización de gráficos.

Las GPUs están diseñadas originalmente para manejar cálculos relacionados con gráficos er videojuegos, visualización 3D y otras aplicaciones gráficas intensivas. Sin embargo debido a su arquitectura altamente paralela, también son capaces de realizar cálculos numéricos y científicos de manera muy eficiente.

La computación en GPU ha ganado popularidad en áreas que involucran cálculos intensivos, como la simulación científica, el aprendizaje profundo (deep learning), la minería de criptomonedas, la investigación biomédica, la ingeniería y más. Aquí hay algunos puntos clave sobre la computación en GPU

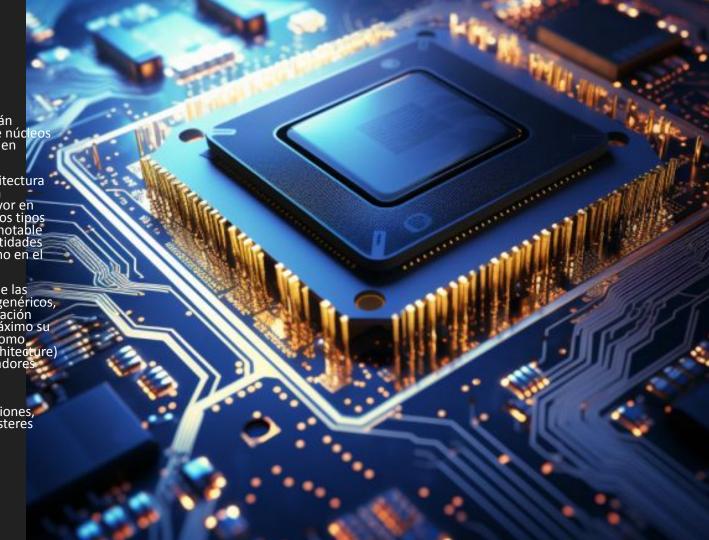
Computación en GPU

Arquitectura paralela: Las GPUs están compuestas por un gran número de núcleos pequeños y eficientes que trabajan en paralelo.

Alto rendimiento: Debido a su arquitectura paralela, las GPUs pueden lograr un rendimiento significativamente mayor en comparación con las CPU para ciertos tipos de cálculos. Esto es especialmente notable en tareas que implican grandes cantidades de datos o cálculos matriciales, como en el aprendizaje profundo.

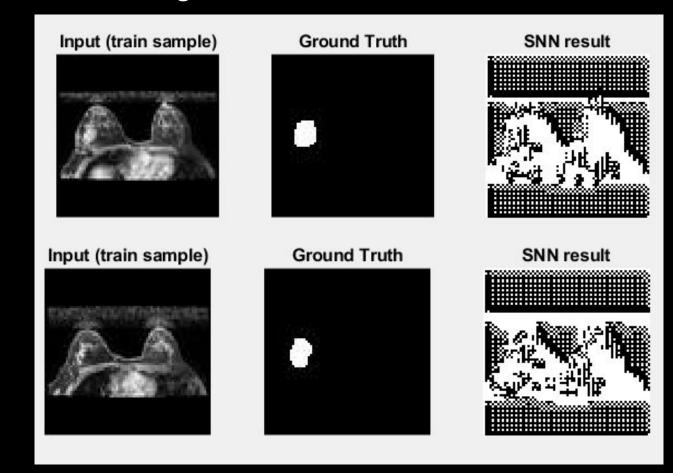
Programación especializada: Aunque las GPUs pueden usarse para cálculos genéricos, a menudo se requiere una programación especializada para aprovechar al máximo su potencial. Lenguajes y bibliotecas como CUDA (Compute Unified Device Architecture) de NVIDIA permiten a los desarrolladores escribir códigos que se ejecuten directamente en la GPU.

Clusters de GPU: En algunas aplicaciones, múltiples GPUs se combinan en clústeres para crear supercomputadoras especializadas.



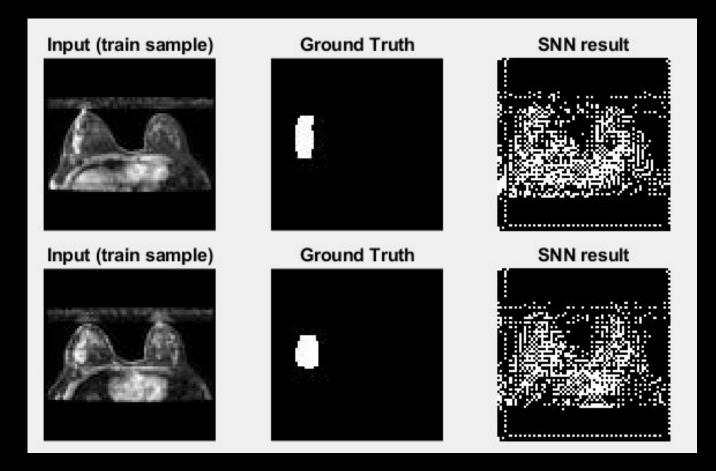
SNN para clasificar imagenes de cáncer de mama

Low accuracy (~53%), low detection



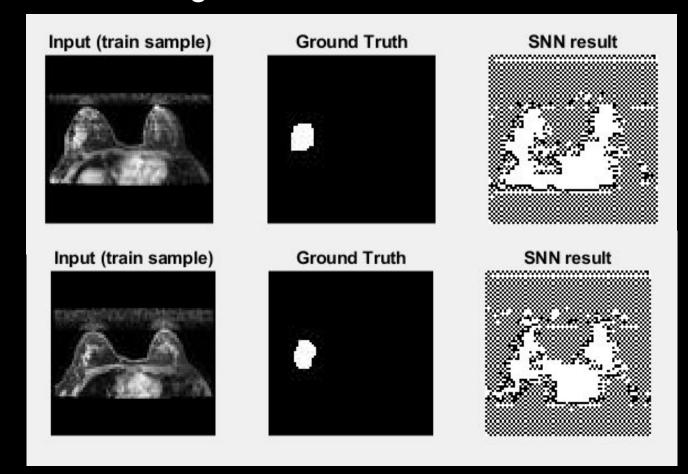
SNN para clasificar imagenes de cáncer de mama

High accuracy (~79%), low detection



SNN para clasificar imagenes de cáncer de mama

Low accuracy (~43%), better detection



Computación neuromórfica

SNN se puede implementar como software, pero tambien como hardware:

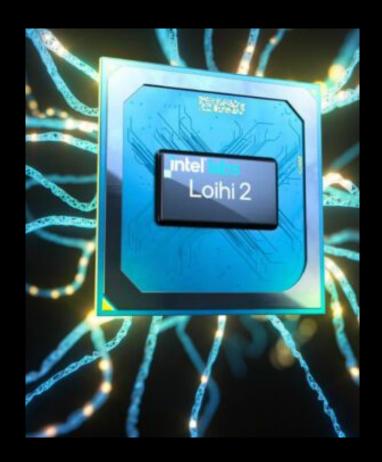
- En el hardware neuromórfico, los cálculos son realizados por muchas unidades pequeñas que se comunican entre sí a través de ráfagas de actividad(picos, spikes) y ajustan su comportamiento en función de los picos que reciben de otros.
- Modelizado a partir de los sistemas del cerebro y el sistema nervioso humanos.



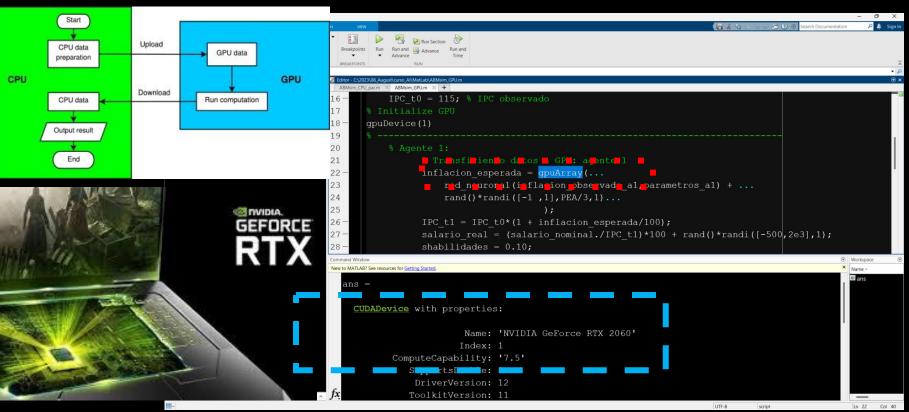
Computación neuromórfica

SNN se puede implementar como software, pero tambien como hardware:

 Pueden formar una computadora cognitiva que conecta inteligencia artificial y algoritmos de aprendizaje automático en un circuito integrado que reproduce fielmente el comportamiento del cerebro humano.



GPU computing en MatLab



Inflación es un "impuesto" a los pobres por sus efectos asimétricos, aumentando la desigualdad

The current issue and full text archive of this journal is available on Emerald Insight at: www.emeraldinsight.com/2040-0705.htm

AJEMS 10,2

226

Received 8 October 2018

Revised 22 January 2019

Accepted 4 February 2019

Inflation shocks and income inequality

An analysis with genetic algorithms and Bayesian quantile regressions

Rolando Gonzales Universitetet i Agder, Kristiansand, Norway, and Andrea Rojas-Hosse University College London, London, UK

Abstract

Purpose – The purpose of this paper is to analyze the effects of inflationary shocks on inequality, using data of selected countries of the Middle East and North Africa (MENA).

Design/methodology/approach – Inflationary shocks were measured as deviations from core inflation, based on a genetic algorithm. Bayesian quantile regression was used to estimate the impact of inflationary shocks in different levels of inequality.

Findings – The results showed that inflationary shocks substantially affect countries with higher levels of inequality, thus suggesting that the detrimental impact of inflation is exacerbated by the high division of classes in a country.

Originality/value – The study contributes to the literature about the relationship between inflation and inequality by proposing that not only the sustained increase in prices but also the inflationary shocks – the deviations from core inflation – contribute to the generation of inequality. Also, to the best of the authors knowledge, the relationship between inflation shocks and inequality in the MENA region has never been analyzed before, thus creating a research gap to provide additional empirical evidence about the sources of inequality. Additionally, the authors contribute with a methodological approach to measure inflationary shocks, based on a semelparous genetic algorithm.

Keywords Bayesian methods, MENA region, Inflation and inequality

Paper type Research paper

- Una especie es considerada semélpara si se caracteriza por tener un único episodio reproductivo antes de morir
- Algoritmos genéticos semélparos se utilizan para estimar los parámetros óptimos de un filtro de reducción de ruido (estimación de la inflación núcleo).

Box 1. Semelparous genetic algorithm based on the behavior of the Octupus Mimus.

Genesis:

- 1. In g=0, a population i=1,2,...,p is created, with $\lambda_{g,i}^a \sim \mathcal{U}(\cdot)$, $\lambda_{g,i}^b \sim \mathcal{U}(\cdot)$ 2. $\mathbf{x}_i^c = \pi \pi_\omega \mathbf{t}_\omega [(\mathbf{t}_\omega' \mathbf{t}_\omega)^{-1} \mathbf{t}_\omega' \pi_\omega]$ is estimated,
- 3. ð_v; is calculated.

Natural selection:

4. $\delta_{\pi,i}$ is sorted $(\delta_{\pi,(1)} \leqslant \delta_{\pi,(2)} \leqslant \cdots \leqslant \delta_{\pi,(p)})$. Then, (1-d)p (0 < d < 1) individuals are selected, with $\lambda_{g,(j)}^{a}$ and $\lambda_{g,(j)}^{b}$ (j = 1, 2, ..., (1-d)p) of $p, \delta_{\pi,(1)} \leq \delta_{\pi,(2)} \leq \cdots \leq \delta_{\pi,(1-d)p}$

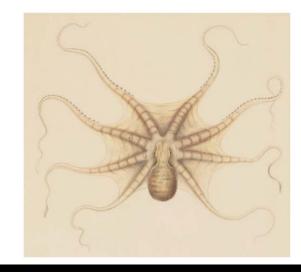
Evolution (mutation):

- 5. Given $\theta \sim \mathcal{B}(\cdot, \cdot)$, $\varpi \in [0, 1]$ and $m_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$,
- $\lambda_{g+1,i}^a = \theta \lambda_{g,i}^a + (1-\theta)\lambda_{g,i}^b + \varpi m_i,$
- $\lambda_{g+1,i}^{\bar{b}} = \theta \lambda_{g,i}^{\bar{b}} + (1-\theta)\lambda_{g,i}^a + \varpi m_i.$ 6. Steps 2 to 5 are repeated during g=0,1...,j-generations.

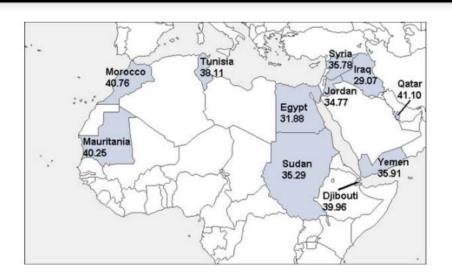
AJEMS 10.2

232

Plate 1. Octupus mimus illustration from the book Molluscs and Shells (1852–1856) of Augustus Addison



Datos de inflación y desigualdad medida por el coeficiente de Gini



Inflation shocks and income inequality

233

Figure 1. Gini coefficient in selected MENA countries

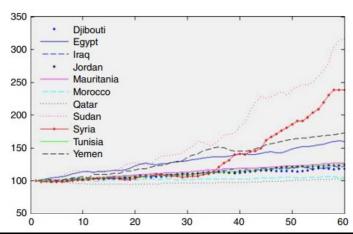
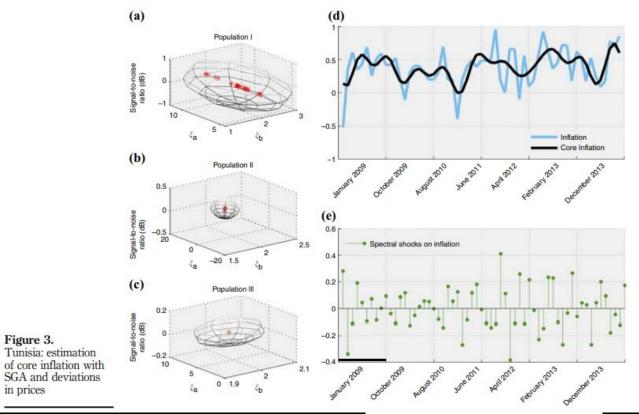


Figure 2. Consumer price index in selected MENA countries

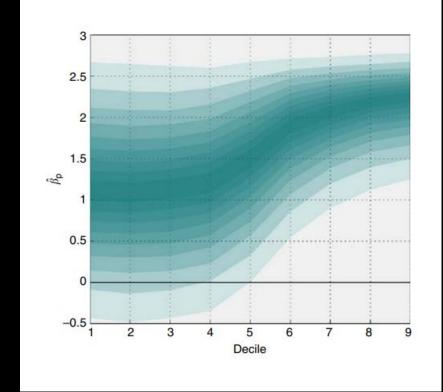


shocks in prices $(\sigma_{\hat{\pi}})$

$$\min_{(u,v,\beta) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{2n}_+} \{ p 1'_n u + (1-p) 1'_n v | \mathbf{X}'_i \beta_p + u - v = y \},$$

$$f(y|\beta_p,z) \propto \left(\prod_{i=1}^n z_i^{-1/2}\right) \exp\left\{-\sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \mathbf{X}_i'\beta_p - \theta z_i)^2}{2\tau^2 z_i}\right\} \quad \hat{\beta}_p = \hat{\mathbf{B}}_p \left\{\sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{X}_i(y_i - \theta z_i)}{\tau^2 z_i} + \mathbf{B}_{p0}^{-1} \beta_{p0}\right\},$$

Debajo del decil 5 los intervalos de credibilidad Bayesiana empiezan a cruzar cero: paises con una desigualdad menor a 0.36 (paises con mayor igualdad), tienen menos efectos de inequidad causados por la inflación



Optimización con algoritmos basados en colonias de hormigas

Balancing Input-Output tables with Bayesian slave-raiding ants

Rolando Gonzales Martínez

Bayesian Institute for Research & Development, La Paz, Bolivia

E-mail: rgonzales@bayesgroup.org

Abstract. Input-Output (I-O) tables are produced by statistical offices to estimate the relationships between the sectors of an economy. I-O tables can be unbalanced if the sum of its columns (total input destination) does not equal the sum of its rows (total output). An artificial Ant Colony (ACO) algorithm based on Bayesian slave-making polymorphus ants is proposed for balancing an I-O matrix. The approach is inspired on the behavior of *Rossomyrmex minuchae*, a parasite ant that enslaves other species of ants (*Proformica*) which in turn choose an optimal path between their colony and the source of food by leaving a trace of pheromones. In the algorithm, an improvement in the balance of I-O accounts increase the pheromones, thus raising the probability of ants moving towards the equilibrium of the matrix. An application to a real I-O matrix and Monte Carlo experiments were performed to evaluate the proposed ACO algorithm. The results showed that slave-raiding ACO can be used by statistical offices as an automated algorithm to produce more timely and reliable I-O tables.

Keywords: Input-Output models, artificial Ant Colony optimization, Bayesian analysis

JEL codes: C67, C61, C11

Optimización con algoritmos basados en colonias de hormigas



Fig. 2. Proformica ferreri (top) and Rossomyrmex minuchae (bot-

R. Gonzales Martínez / Balancing Input-Output tables with Bayesian slave-raiding ants Nest Food Nest Food

Optimización con algoritmos basados en colonias de hormigas

Box 1: Slave-raiding ACO algorithm

Step 1 (Slave-raiding)

1.1. Optimal number of ants

while
$$p_{s,s+1} = 1$$

$$\delta \leftarrow \delta_0 + 1$$

$$s \leftarrow s_0 \exp(\delta)$$

$$f(\phi_0, s)$$

$$\{d_k\}_{k=1}^s = f(\phi_0, s)$$

$$p_{s,s+1}\left(\left\{d_{k}\right\}_{k=1}^{s_{0}}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\left(\frac{s-1}{2}\right)^{r/2}}{\sqrt{\pi}\left(\frac{s-1}{2}\right)^{r/2} + \left(\frac{1+F}{2}\right)^{(s/2-1)}},$$

while
$$p_{s,s+1} \geqslant \text{epsilon}$$

$$\sigma \leftarrow \sigma_0 + 1$$

$$-\sigma_0 + 1$$

$$\phi \leftarrow \phi_0 \exp(\sigma)$$

$$\{d_k\}_{k=1}^s = f\left(\phi, s\right)$$

$$p_{s,s+1}\left(\{d_k\}_{k=1}^{s}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\left(\frac{s-1}{2}\right)^{r/2}}{\sqrt{\pi}\left(\frac{s-1}{2}\right)^{r/2} + \left(\frac{1+F}{2}\right)^{(s/2-1)}},$$

Step 2

For an optimal ϕ and optimal $1, 2, \ldots, s$ -iterations:

i. If
$$\theta^{(s+1)} \leq \theta^{(s)}$$
, then,

$$\mathbf{M}^{(s+1)} \leftarrow \mathbf{M}^{(s)}$$
 and $\theta^{(s+1)} \leftarrow \theta^{(s)}$

ii. If
$$\theta^{(s+1)} > \theta^{(s)}$$
, but $p(x|\alpha,\beta) > \omega, \omega \sim U(0,1)$

$$\mathbf{M}^{(s+1)} \leftarrow \{\lambda \mathbf{M}^{(s)} + (1-\lambda) \mathbf{M}^{(s)}\}, <\lambda < 1,$$

 $\phi^{(s+1)} \leftarrow (1+\varrho) \phi^{(s)} 0 \leq \varrho < 1$

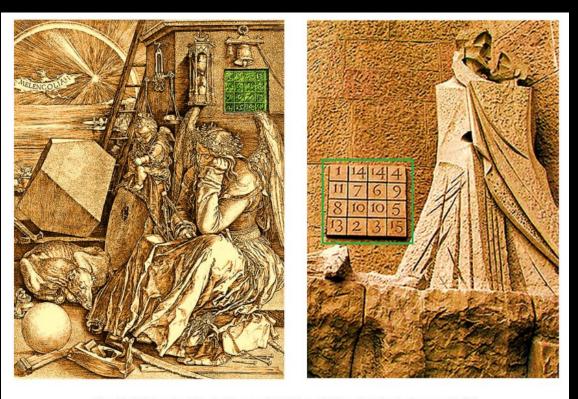


Fig. 3. Subirachs Magic Square (right) and Dürer's Magic Square (left).

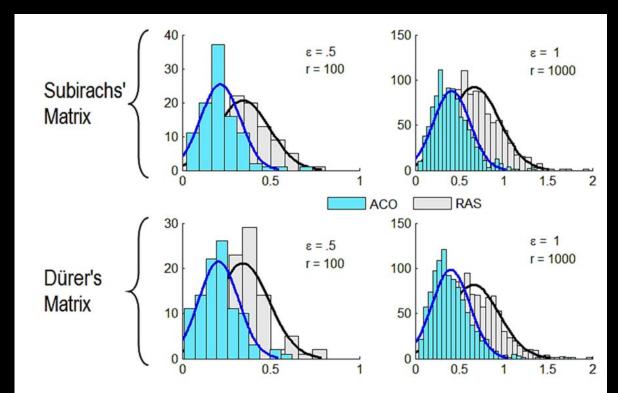


Fig. 4. Results of the Monte Carlos simulation experiments.

Links a tesis de maestría en ciencia de datos

https://openresearch.amsterdam/en/page/88292/master-theses---data-science-artificial-intelligence