

Modelos lineales y modelos lineales generalizados

Rolando Gonzales Martinez, PhD

Fellow postdoctoral Marie
Skłodowska-Curie

Universidad de Groningen
(Países Bajos)

Investigador (researcher)

Iniciativa de Pobreza y Desarrollo
Humano de la Universidad de
Oxford (UK)

Contenido del curso

(2) Evaluación y Diagnóstico de Modelos Lineales

- Métricas de evaluación de ajuste.
- Diagnóstico de residuos.
- Multicolinealidad.
- Otras patologías que pueden surgir en los modelos lineales.
- Laboratorio: Evaluación y Diagnóstico de modelos lineales

Métricas de evaluación de ajuste

- Distancia Euclidiana (MCO) y distancia de Manhattan (regresión robusta LAR/LAD)
- Coeficiente de determinación y coeficiente de determinación ajustado
- Criterios de información:
 - **AIC:** adecuado cuando se prefiere un modelo con mejor ajuste y se puede tolerar una mayor complejidad (modelos predictivos)
 - **BIC:** adecuado cuando se busca simplicidad del modelo y se desea evitar el sobreajuste; contextos donde la interpretación del modelo es importante (modelos explicativos)
 - **HQ:** compromiso intermedio entre ajuste y penalización por complejidad en grandes conjuntos de datos

$$\text{RSS} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}$$

$$\text{SAE} = \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|$$

$$\min_{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p} \sum_{i=1}^n |y_i - (\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_p x_{ip})|$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

$$R_{\text{ajustado}}^2 = 1 - \left(\frac{(1-R^2)(n-1)}{n-k-1} \right)$$

$$\text{AIC} = 2k - 2 \ln(L) \qquad \text{AIC} = n \ln \left(\frac{\text{RSS}}{n} \right) + 2k$$

$$\text{BIC} = \ln(n)k - 2 \ln(L) \qquad \text{BIC} = n \ln \left(\frac{\text{RSS}}{n} \right) + k \ln(n)$$

$$\text{HQ} = 2k \ln(\ln(n)) - 2 \ln(L) \qquad \text{HQ} = n \ln \left(\frac{\text{RSS}}{n} \right) + 2k \ln(\ln(n))$$

$$\ln(L) = -\frac{n}{2} \ln \left(2\pi \frac{\text{RSS}}{n} \right) - \frac{n}{2}$$

Teorema Gauss-Markov

En un modelo lineal de regresión múltiple (MLRM), si se cumplen las siguientes condiciones:

- | | |
|-----------------------------------|--|
| $y = X\beta + \epsilon$ | 1. Linealidad: El modelo es lineal en los parámetros |
| $E(\epsilon) = 0$ | 2. Los errores tienen media cero |
| $Var(\epsilon) = \sigma^2 I$ | 3. Homocedasticidad: Los errores tienen varianza constante |
| $Cov(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0$ | 4. No autocorrelación: Los errores no están correlacionados entre sí |
| $Cov(X, \epsilon) = 0$ | 5. Independencia entre X y ϵ: Los errores no están correlacionados con las variables explicativas |

Entonces, el estimador de mínimos cuadrados ordinarios es el mejor estimador lineal insesgado (MELI, BLUE). Esto significa que:

- **Insesgado:** $E(\hat{\beta}) = \beta$
- **Varianza mínima:** Entre todos los estimadores lineales insesgados, el estimador MCO tiene la varianza más baja.

Normalidad de los residuos

- La normalidad de los residuos no es parte del Teorema Gauss-Markov, por lo que no es necesaria para que los estimadores MCO/OLS sean MELI/BBLUE.
- Sin embargo la normalidad de residuos es relevante para la docimasia de hipótesis y para la construcción de intervalos de confianza precisos.
- Si los residuos son normales los estimadores MCO coinciden con los estimadores máximo verosímiles y son eficientes en el sentido de tener varianza mínima.

Diagnóstico de residuos

Diferentes pruebas estadísticas pueden aplicarse a los residuos para testear normalidad y los supuestos del teorema Gauss-Markov respecto a los residuos de la regresión:

	Test	Hipótesis nula
Linealidad	Harvey-Collier	Linealidad
Normalidad	Jarque-Bera	Normalidad
	D'Agostino-Pearson	Normalidad
Homocedasticidad (heteroscedasticidad)	Breusch-Pagan	Homocedasticidad
	Goldfeld-Quandt	Homocedasticidad
	White	Homocedasticidad
	Engle	Homocedasticidad

Diagnóstico de residuos

	Test	Hipótesis nula
Correlación en los residuos (autocorrelación, correlación serial de primer orden y de órdenes superiores)	Durbin-Watson	No correlación (+/-) de primer orden
	Breusch-Godfrey	No (auto)correlación (+/-) de primer orden y órdenes superiores
	Ljung-Box	No (auto)correlación (+/-) de primer orden y órdenes superiores
Independencia entre X y ϵ (exogeneidad)	Hausman	Los errores no están correlacionados con los regresores

Test Jarque-Bera de normalidad

- El estadígrafo de Jarque-Bera se distribuye asintóticamente como una distribución chi-cuadrado con dos grados de libertad
- La hipótesis nula es una hipótesis conjunta de que la asimetría y el exceso de curtosis son nulos (asimetría = 0 y curtosis = 3).

$$JB = \frac{n}{6} \left(S^2 + \frac{1}{4}(K - 3)^2 \right)$$

$$S = \frac{\hat{\mu}_3}{\hat{\sigma}^3} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^{3/2}}$$

$$K = \frac{\hat{\mu}_4}{\hat{\sigma}^4} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^2}$$

Test omnibus D'Agostino-Pearson de normalidad

$$z_1 = \sqrt{\frac{(n+1)(n+3)}{6(n-2)}} \cdot S$$

$$z_2 = \frac{(n-2)}{24} \cdot \left(\frac{(n+3)(n+5)}{(n-1)(n+1)} \right) \cdot (K-3)$$

$$DP = z_1^2 + z_2^2$$

$$DP \sim \chi^2_{(2)}$$

Linealidad: test Harvey-Collier

$$y_j = x_j' \beta + u_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$\tilde{u}_j = \frac{y_j - x_j' b_{j-1}}{(1 + x_j' (X_{j-1}' X_{j-1})^{-1} x_j)^{1/2}}, \quad j = k+1, \dots, n,$$

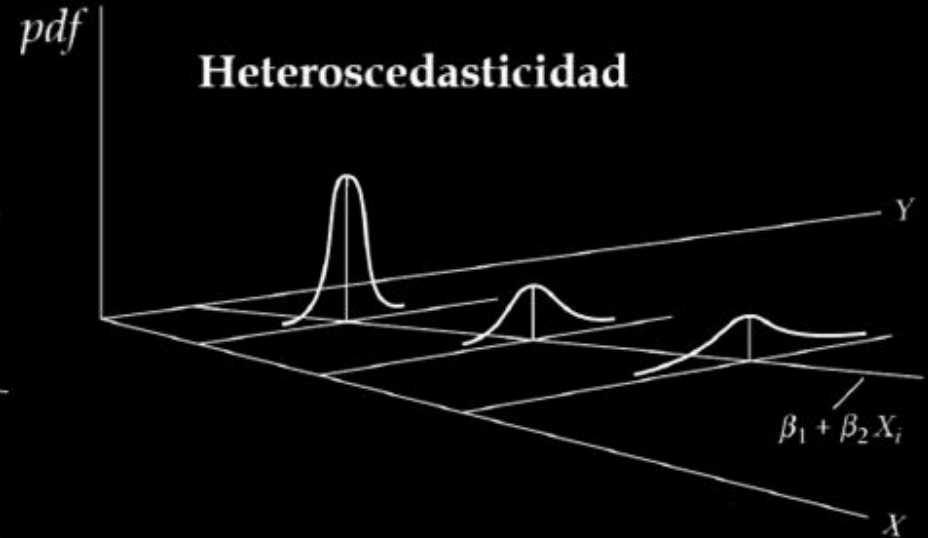
$$\psi = \left[(n-k-1)^{-1} \sum_{j=k+1}^n (\tilde{u}_j - \bar{\tilde{u}})^2 \right]^{-1/2} (n-k)^{-1/2} \sum_{j=k+1}^n \tilde{u}_j$$

$$\psi \sim t(n-k-1)$$

Harvey, A. C., & Collier, P. (1977). Testing for functional misspecification in regression analysis. *Journal of Econometrics*, 6(1), 103-119.

Homocedasticidad y Heterocedasticidad

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i$$



Afecta eficiencia y validez de la inferencia

Homocedasticidad: Test Breusch–Pagan

$$y_i = X_i\beta + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$$g_i = \hat{\varepsilon}_i^2 / \hat{\sigma}^2, \quad \hat{\sigma}^2 = \sum \hat{\varepsilon}_i^2 / n$$

$$g_i = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_k X_k + v$$

$$LM = \frac{n \cdot R^2}{2}$$

$$F = \frac{(SSR_{\text{reducido}} - SSR_{\text{completo}}) / k}{SSR_{\text{completo}} / (n - k - 1)}$$

Homocedasticidad: Test Goldfeld-Quandt

Ordenar los datos y dividir en 2 grupos:

Para el primer grupo:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \dots + \beta_k X_{ki} + \epsilon_i$$

Para el segundo grupo:

$$y_j = \beta_0 + \beta_1 X_{1j} + \beta_2 X_{2j} + \dots + \beta_k X_{kj} + \epsilon_j$$

$$RSS_1 = \sum_{i \in \text{Grupo 1}} \hat{\epsilon}_i^2$$

$$RSS_2 = \sum_{j \in \text{Grupo 2}} \hat{\epsilon}_j^2$$

$$F = \frac{\frac{RSS_2}{df_2}}{\frac{RSS_1}{df_1}}$$

Homocedasticidad: Test de White

$$y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k + \epsilon$$

$$\hat{\epsilon}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_k X_k + \alpha_{k+1} X_1^2 + \alpha_{k+2} X_2^2 + \dots + \alpha_{2k} X_k^2 + \alpha_{2k+1} X_1 X_2 + \dots + v$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \epsilon$$

$$\hat{\epsilon}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_1^2 + \alpha_4 X_2^2 + \alpha_5 X_1 X_2 + v$$

$$LM = n \cdot R^2 \sim \chi^2_{(d)}$$

Homocedasticidad: Test ARCH de Engle

$$Y_t = X_t' b_0 + \varepsilon_t \quad t = 1, \dots, T$$

$$\varepsilon_t = \xi_t h_t^{1/2}$$
$$h_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j \varepsilon_{t-j}^2$$
$$e_t^2 = \alpha_0 + \sum_{j=1}^q \alpha_j e_{t-j}^2 + v_t$$

$$H_0: \alpha_j = 0 \text{ for } j = 1, \dots, q$$

$$H_A: \alpha_j \geq 0, j = 1, \dots, q$$

Heterocedasticidad: soluciones

- Transformaciones de variables, WLS
- En el contexto de series de tiempo: modelizar la heteroscedasticidad dinámica
- Matriz varianza-covarianza robusta:
 - HC0: Matriz varianza-covarianza robusta clásica Huber-White. No ajusta los grados de libertad. Adecuada para muestras grandes.
 - HC1: Ajuste de MacKinnon y White (1985) para muestras pequeñas.
 - HC2, HC3: Ajustes alternativos para muestras más pequeñas.

Heterocedasticidad: WLS

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$$

$$\min_{\beta_0, \beta_1} \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 = \min_{\beta_0, \beta_1} \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$$

$$\min_{\beta_0, \beta_1} \sum_{i=1}^n w_i \epsilon_i^2 = \min_{\beta_0, \beta_1} \sum_{i=1}^n w_i (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2$$

$$W = \begin{pmatrix} w_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & w_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & w_n \end{pmatrix}$$

$$y = X\beta + \epsilon$$

$$S(\beta) = (y - X\beta)^T W (y - X\beta)$$

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} = -2X^T W (y - X\beta) = 0$$

$$\beta = (X^T W X)^{-1} X^T W y$$

Heterocedasticidad: matrices robustas

$$\text{HC0} = X'X^{-1}X'\text{diag}(u_i^2)XX'X^{-1}$$

$$\text{HC1} = \left(\frac{n}{n-k} \right) \text{HC0}$$

$$\text{HC2} = X'X^{-1}X'\text{diag}\left(\frac{u_i^2}{1-h_i}\right)XX'X^{-1}$$

$$H = X(X'X)^{-1}X'$$

$$\text{HC3} = X'X^{-1}X'\text{diag}\left(\frac{u_i^2}{(1-h_i)^2}\right)XX'X^{-1}$$

Ejemplo: matriz Huber-White (estimador sandwich)

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} \\ 1 & x_{21} \\ 1 & x_{31} \end{pmatrix} \quad \hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{D} = \text{diag}(\hat{\epsilon}_1^2, \hat{\epsilon}_2^2, \hat{\epsilon}_3^2) = \text{diag}(4, 1, 1)$$

$$X^T X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_{11} & x_{21} & x_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_{11} \\ 1 & x_{21} \\ 1 & x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \sum x_{i1} \\ \sum x_{i1} & \sum x_{i1}^2 \end{pmatrix}$$

$$X^T \hat{D} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_{11} & x_{21} & x_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_{11} \\ 1 & x_{21} \\ 1 & x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4x_{11} \\ 1 & x_{21} \\ 1 & x_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_{11} \\ 1 & x_{21} \\ 1 & x_{31} \end{pmatrix}$$

$$\hat{\Sigma}_{\text{robusta}} = (X^T X)^{-1} (X^T \hat{D} X) (X^T X)^{-1}$$

Heterocedasticidad: modelos de la familia (G)ARCH

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \cdots + \phi_p X_{t-p} + \epsilon_t$$

$$Y_t = \nabla^d X_t$$

$$X_t = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \epsilon_{t-q}$$

$$\begin{aligned} \nabla^d X_t = & \phi_1 \nabla^d X_{t-1} + \phi_2 \nabla^d X_{t-2} + \cdots + \\ & \phi_p \nabla^d X_{t-p} + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \epsilon_{t-q} \end{aligned}$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \epsilon_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_q \epsilon_{t-q}^2$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

Correlación de los residuos: Estadígrafo Durbin-Watson

DW varía entre 0 y 4:

$$e_t = \rho e_{t-1} + \nu_t$$

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^n (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n e_t^2}$$

- DW = 2 indica que no hay autocorrelación en los residuos.
- DW < 2 sugiere autocorrelación positiva.
- DW > 2 sugiere autocorrelación negativa.

Valores Críticos dL y dU:

- Si DW < dL: hay evidencia de autocorrelación positiva.
- Si dL ≤ DW ≤ dU: la prueba es inconclusa.
- Si DW > dU: no hay evidencia de autocorrelación positiva.
- Para la autocorrelación negativa, se compara DW con 4 - dU y 4 - dL.

Correlación de los residuos: Estadígrafo Durbin-Watson

- El estadígrafo DW es sesgado (subestima autocorrelacion) en el contexto de modelos AR(I)MA
- El estadígrafo H se distribuye asintóticamente como una distribución gaussiana estándar

$$e_t = \rho e_{t-1} + \nu_t$$

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^n (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n e_t^2}$$

$$H = \left(1 - \frac{DW}{2}\right) \sqrt{\frac{n}{1 - n\rho^2}}$$

Correlación de los residuos: test Breusch-Godfrey

Correlación de primer orden ($p=1$) y de ordenes superiores ($p > 1$):

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \cdots + \beta_k x_{kt} + \epsilon_t$$

$$\hat{e}_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_{1t} + \alpha_2 x_{2t} + \cdots + \alpha_k x_{kt} + \rho_1 \hat{e}_{t-1} + \cdots + \rho_p \hat{e}_{t-p}$$

$$LM = n R^2$$

$$nR^2 \sim \chi_p^2$$

Correlación de los residuos: test Ljung-Box

Correlación de primer orden ($p=1$) y de ordenes superiores ($p > 1$) hasta el rezago m :

$$\hat{\rho}_l = \frac{\sum_{t=l+1}^n (e_t - \bar{e})(e_{t-l} - \bar{e})}{\sum_{t=1}^n (e_t - \bar{e})^2}$$

$$Q = n(n+2) \sum_{l=1}^m \frac{\hat{\rho}_l^2}{n-l}$$

$$Q \sim \chi^2_{(m)}$$

Correlación de los residuos: consecuencias y soluciones

- Si existe correlación serial los estimadores MCO aún son insesgados pero ya no son eficientes.

Soluciones:

- Existen “correcciones” al problema de autocorrelación, como la técnica Cochrane-Orcutt.
- En el contexto de series de tiempo: modelizar la autocorrelación con un modelo ARDL o un modelo (S)AR(I)MA(X).
- Utilizar una matriz robusta a la autocorrelación (y la heterocedasticidad), como la matriz Newey-West.

Técnica Cochrane-Orcutt

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \dots + \beta_k x_{kt} + \epsilon_t$$

$$\epsilon_t = \rho \epsilon_{t-1} + v_t$$

$$y'_t = y_t - \rho y_{t-1}$$

$$x'_{it} = x_{it} - \rho x_{it-1}$$

$$y'_t = \beta_0(1 - \rho) + \beta_1 x'_{1t} + \beta_2 x'_{2t} + \dots + \beta_k x'_{kt} + v_t$$

Repetir la transformación y estimación hasta que los valores de los estimadores y ρ converjan.

Modelos de series de tiempo: ARDL

- Un modelo autorregresivo de rezagos distribuidos (autoregressive distributed lag, ARDL) es una combinación de modelos AR y de rezagos distribuidos (DL).
- Los modelos ARDL permiten analizar cómo las variables dependientes están relacionadas tanto con sus propios rezagos como con los rezagos de una o más variables explicativas:

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \beta_2 x_{t-2} + \dots + \beta_q x_{t-q} + \epsilon_t$$

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \beta_0 x_t + \beta_1 x_{t-1} + \epsilon_t$$

Modelos de series de tiempo: ARIMA

- Los modelos ARIMA (Autoregressive Integrated Moving Average) son una clase de modelos estadísticos utilizados para analizar y predecir series temporales. Tres componentes: AR (autorregresivo), I (integrado) y MA (media móvil). El modelo ARIMA(p, d, q) combina estos tres componentes.

$$y_t = c + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \epsilon_t$$

$$\nabla^d y_t = (1 - L)^d y_t$$

$$y_t = \mu + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \epsilon_{t-q}$$

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) \nabla^d y_t = c + (1 + \theta_1 L + \theta_2 L^2 + \dots + \theta_q L^q) \epsilon_t$$

Matriz Newey-West robusta a autocorrelación y heteroscedasticidad

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \beta_2 x_{2t} + \cdots + \beta_k x_{kt} + \epsilon_t$$

$$\hat{\epsilon}_t = y_t - \hat{\beta}_0 - \sum_{i=1}^k \hat{\beta}_i x_{it}$$

$$\mathbf{V}_{NW} = \mathbf{X}'\mathbf{X}^{-1}\mathbf{S}_{NW}\mathbf{X}'\mathbf{X}^{-1}$$

$$\mathbf{S}_{NW} = \sum_{t=1}^T \hat{\epsilon}_t^2 \mathbf{x}_t \mathbf{x}_t' + \sum_{h=1}^L w_h \sum_{t=h+1}^T \hat{\epsilon}_t \hat{\epsilon}_{t-h} (\mathbf{x}_t \mathbf{x}_{t-h}' + \mathbf{x}_{t-h} \mathbf{x}_t')$$

$$w_h = 1 - \frac{h}{L+1}$$

$$\text{SE}(\hat{\beta}) = \sqrt{\text{diag}(\mathbf{V}_{NW})}$$

Exogeneidad: Test de Hausman

$$y = X\beta + \epsilon$$

$$\hat{\beta}_{OLS} = (X'X)^{-1}X'y \quad \text{Var}(\hat{\beta}_{OLS}) = \sigma^2(X'X)^{-1}$$

$$\hat{\beta}_{IV} = (Z'X)^{-1}Z'y \quad \text{Var}(\hat{\beta}_{IV}) = \sigma^2(X'P_ZX)^{-1}$$

$$H = (\hat{\beta}_{IV} - \hat{\beta}_{OLS})' \left[\text{Var}(\hat{\beta}_{IV}) - \text{Var}(\hat{\beta}_{OLS}) \right]^{-1} (\hat{\beta}_{IV} - \hat{\beta}_{OLS})$$

$$H \sim \chi^2_{(k)}$$

- Nula: el estimador OLS (consistente) es preferible al estimador IV (porque se cumple el supuesto de exogeneidad)
- Alternativa: el estimador IV es preferible porque el estimador OLS es inconsistente (porque no existe exogeneidad)

Multicolinealidad

- La multicolinealidad se refiere a la situación en la que dos o más variables explicativas en un modelo de regresión están altamente correlacionadas entre sí.
- El determinante de la matriz $X'X$ proporciona información sobre la dependencia lineal entre las variables explicativas: si $\det(X'X)$ tiende a cero, existe evidencia de multicolinealidad, y si $\det(X'X) = 0$ la multicolinealidad es perfecta.
- El número de condición de Belsley (B), el cociente entre el mayor y el menor valor singular de X, también ofrece información sobre el grado de multicolinealidad, siendo ésta severa cuando $B > 30$. Los valores singulares son las raíces cuadradas no negativas de los autovalores de la matriz $X'X$.

Multicolinealidad y VIFs

Una manera práctica de evaluar y lidiar con la multicolinealidad es emplear los factores de inflación de varianza (variance inflation factors, VIF):

$$\text{VIF}_i = \frac{1}{1 - R_i^2}$$

$$X_1 = \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \cdots + \alpha_k X_k + c_0 + e$$

- $\text{VIF} \geq 10$: multicolinealidad severa
- $\text{VIF} \geq 5$: multicolinealidad elevada
- $\text{VIF} < 5$: multicolinealidad débil a moderada

Multicolinealidad y PCA

$$X_{\text{est}} = \frac{X - \bar{X}}{\sigma_X}$$

$$C = \frac{1}{n-1} X_{\text{est}}^T X_{\text{est}}$$

$$Z = X_{\text{est}} V$$

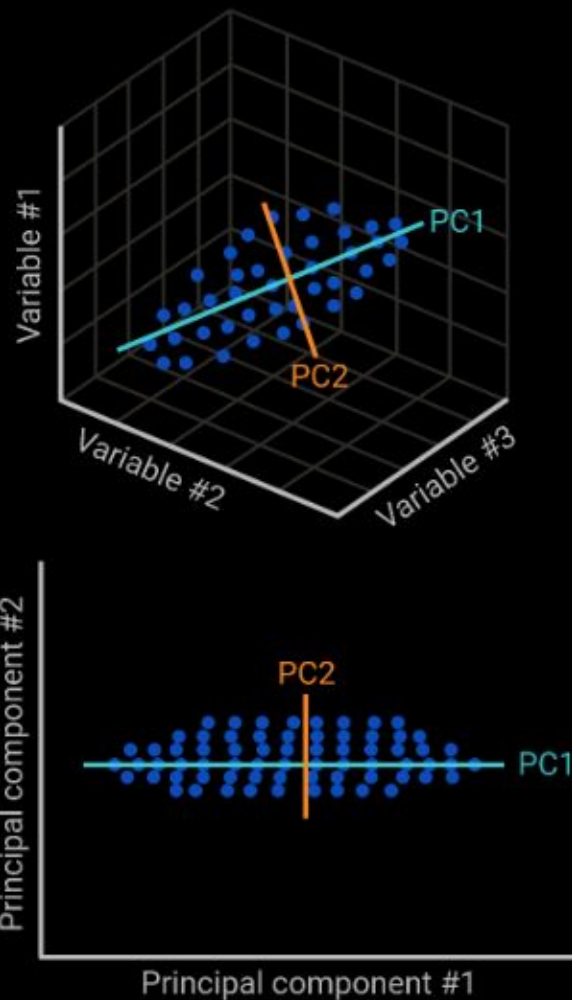
$$Cv = \lambda v \quad \det(C - \lambda I) = 0$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \frac{1}{3-1} X^T X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 13 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.5 & 1.5 \\ 1.5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 6.5 - \lambda & 1.5 \\ 1.5 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \lambda_1 = 7.08 \text{ y } \lambda_2 = 0.42$$



Otras patologías que pueden surgir en los modelos lineales

La heteroscedasticidad y la correlación serial en los residuos (aka autocorrelación) reducen la eficiencia de los estimadores MCO del modelo lineal, pero estos estimadores aún son insesgados.

Sin embargo otras patologías pueden surgir en los modelos lineales:

- Sesgo de variable(s) omitida
- Inclusión de variables redundantes
- Inestabilidad de los parámetros
- Outliers (observaciones extremas/influyentes)

Inestabilidad de parámetros

$$B^{(T)}(z) = \frac{1}{\hat{\sigma}\sqrt{T}} \sum_{t=1}^{Tz} \hat{u}_t^{(T)}$$

$$\sup_{0 \leq z \leq 1} |B^{(T)}(z)|$$

$$B^{(T)}(z) \xrightarrow{d} B(z) \quad as \quad T \rightarrow \infty$$

$$CUSUM_t = \frac{1}{\hat{\sigma}\sqrt{T}} \sum_{i=1}^t \hat{e}_i$$

$$CUSUM_t^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^T \hat{e}_i^2} \sum_{i=1}^t \hat{e}_i^2$$

Ploberger, Werner, and Walter Kramer. "The Cusum Test with OLS Residuals." *Econometrica* 60, no. 2 (March 1992): 271-285.

Observaciones influyentes: Apalancamiento y distancia de Cook

- El apalancamiento (h , leverage) para la i -ésima observación es el i -ésimo valor diagonal de la matriz H . Un valor de apalancamiento alto indica que la observación tiene una mayor influencia en la estimación.
- Distancia de Cook (D): Combina el apalancamiento y los residuos estandarizados, Un valor alto indica una observación influyente.

$$H = X(X^T X)^{-1} X^T$$

$$D_i = \frac{(e_i^2/p) \cdot h_{ii}}{(1-h_{ii})^2}$$

Laboratorio

- Ejercicios en Python
- Ejercicios en R
- Ejemplo en R AnalyticFlow

