

# Modelos lineales y modelos lineales generalizados

Rolando Gonzales Martinez, PhD

Fellow postdoctoral Marie  
Skłodowska-Curie

Universidad de Groningen  
(Países Bajos)

Investigador (researcher)

Iniciativa de Pobreza y Desarrollo  
Humano de la Universidad de  
Oxford (UK)

# Contenido del curso

## **(3) Modelos Lineales Generalizados (MLG)**

- Concepto de MLG.
- Funciones de enlace.
- Modelos estadísticos con distribuciones usualmente aplicadas en MLG: normal, binomial, Poisson.
- Otros modelos: modelo SIR, modelos de regresión espacial y modelo logit para datos con variable dependiente desbalanceada
- Laboratorio: Implementación de MLG en problemas de regresión y clasificación.

# Modelos lineales generalizados: motivación

Embarazos reportados	n	%
0	1,011	81.5
1	190	15.3
2	32	2.6
3	6	0.5
4	2	0.2

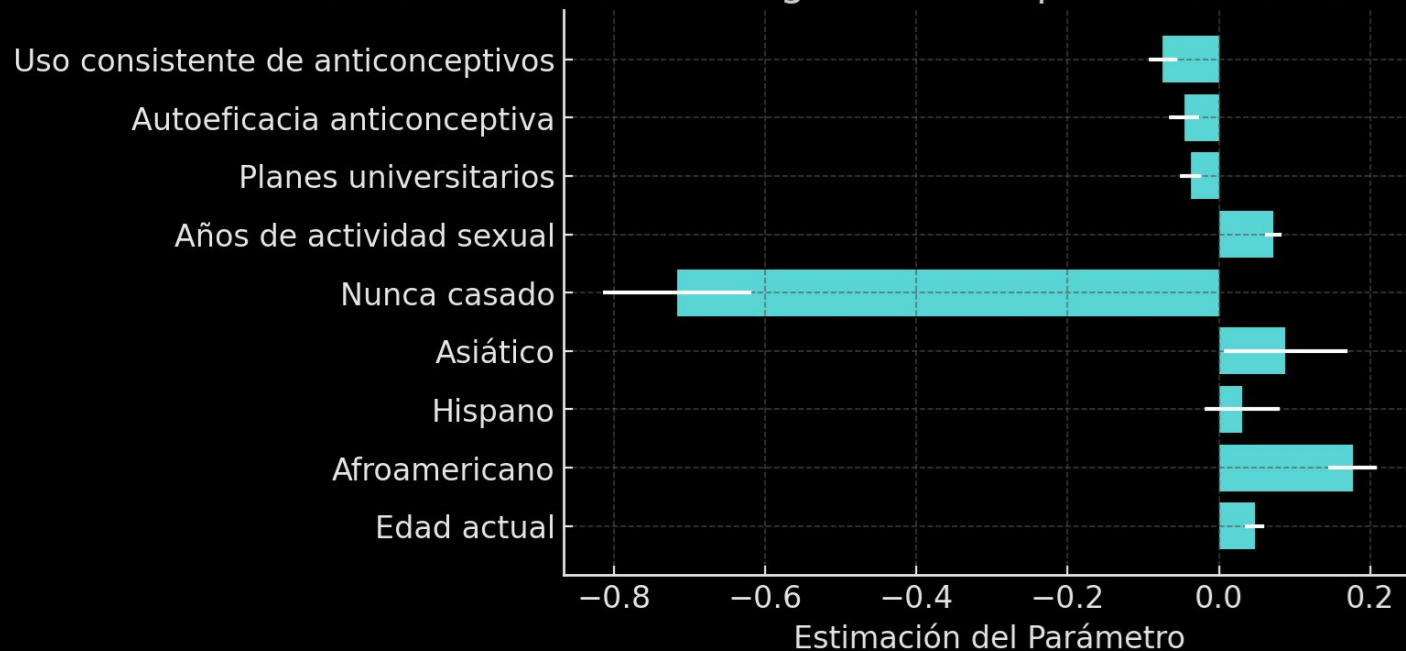
Hutchinson, M. K., & Holtman, M. C. (2005).  
Analysis of count data using poisson regression.  
*Research in nursing & health*, 28(5), 408-418.



# Modelos lineales generalizados: motivación

Estimación MCO:

Estimaciones del Modelo de Regresión OLS para Predecir el Número de Embarazos



# Modelos lineales generalizados: motivación

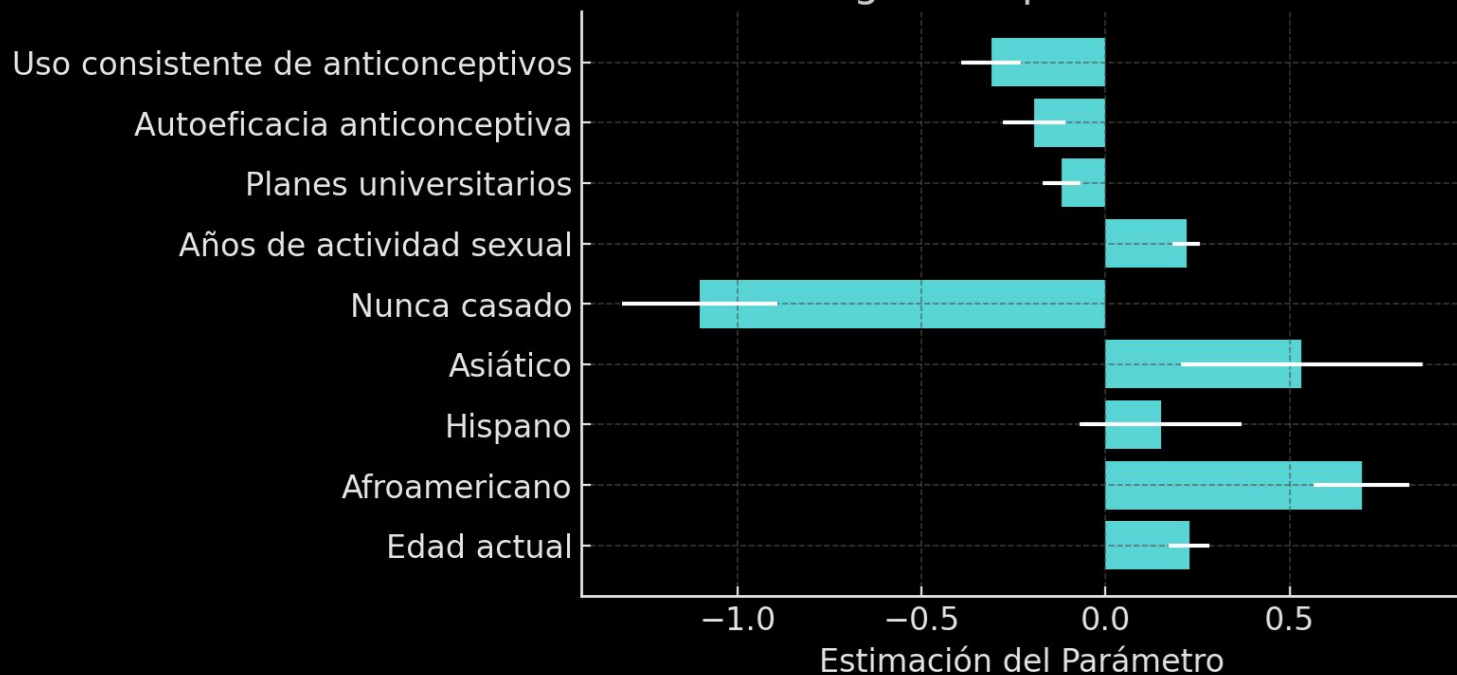
Estimación MCO:

Variable	Parametro estimado	Error Estandar	Valor t	p-value
Intercepto	0.3741	0.22441	1.67	0.0958
Edad actual	0.04718	0.01223	3.86	0.0001
Afroamericana	0.17686	0.03219	5.49	0.0001
Hispana	0.03127	0.04971	0.63	0.5295
Asiática	0.08816	0.08171	1.08	0.2808
Nunca casada	-0.71671	0.09796	-7.32	0.0001
Años de actividad sexual	0.07221	0.01092	6.61	0.0001
Planes universitarios	-0.03711	0.01402	-2.65	0.0082
Auto eficacia anticonceptiva	-0.04573	0.02005	-2.28	0.0227
Uso consistente de anticonceptivos	-0.07412	0.01879	-3.94	0.0001

# Modelos lineales generalizados: motivación

Estimación de MV de un modelo de Poisson:

Estimaciones del Modelo de Regresión para Predecir el Número de Embarazos



# Modelos lineales generalizados: motivación

Estimación de MV de un modelo de Poisson:

	Parámetro estimado	Error estándar	$\chi^2$	p-value
Intercepto	-3.5182	0.9551	13.57	0.0002
Edad actual	0.2278	0.0556	16.78	<0.0001
Afroamericana	0.6958	0.1297	28.78	<0.0001
Hispana	0.1498	0.2195	0.47	0.4949
Asiática	0.5333	0.329	2.63	0.1051
Nunca casada	-1.1035	0.2122	27.04	<0.0001
Años de actividad sexual	0.2195	0.0381	33.13	<0.0001
Planes universitarios	-0.1198	0.0515	5.41	0.0201
Auto eficacia anticonceptiva	-0.1939	0.0852	5.17	0.023
Uso consistente de anticonceptivos	-0.3106	0.0812	14.62	<0.000

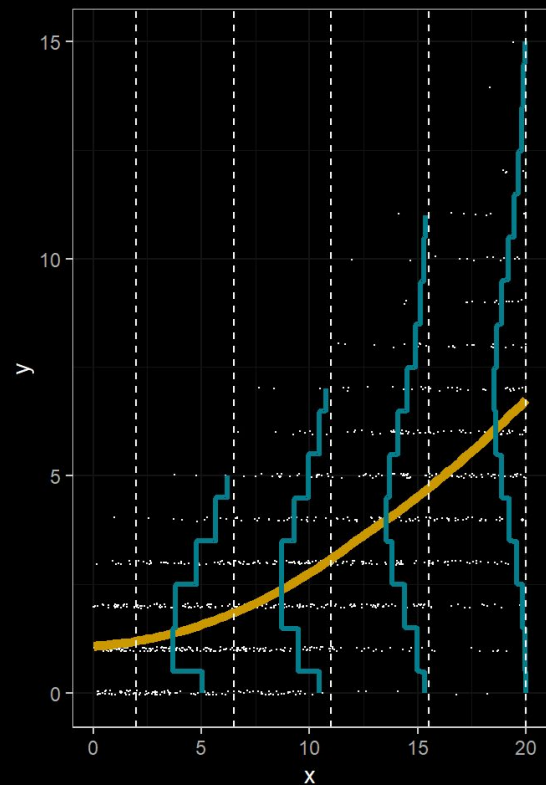
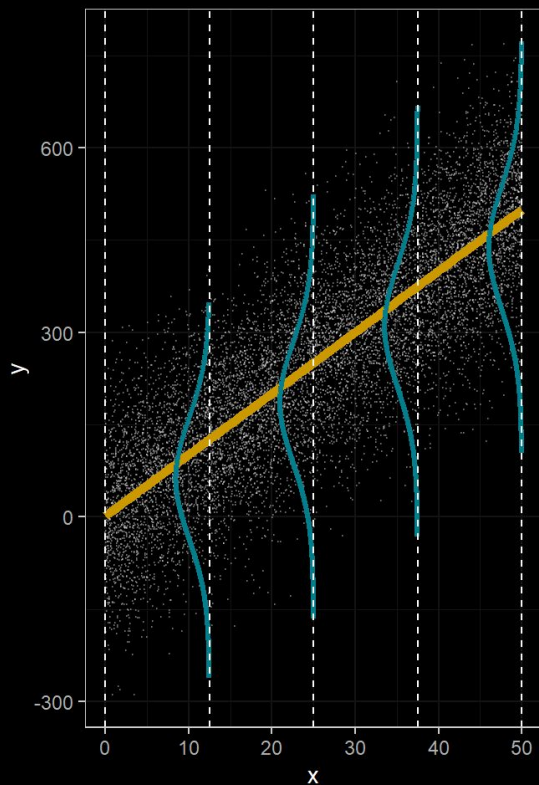
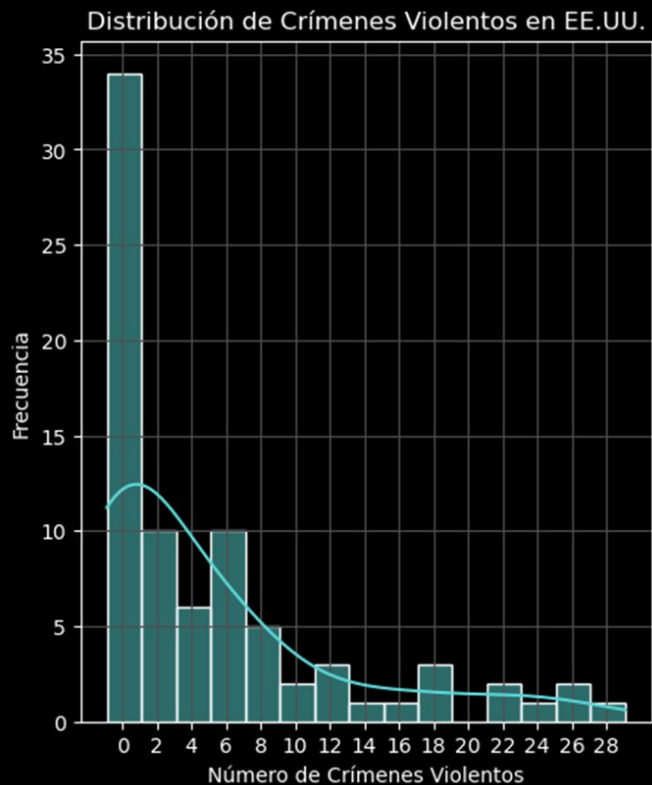
# Modelos lineales generalizados: motivación

Estimación de MV de un modelo de Poisson:

	Parámetro estimado	$\exp(\beta)$	$\Delta Y$ (%)
Edad actual	0.2278	1.26	25.6
Afroamericana	0.6958	2.01	100.5
Hispana	0.1498	1.16	16.2
Asiática	0.5333	1.70	70.5
Nunca casada	-1.1035	0.33	-66.8
Años de actividad sexual	0.2195	1.25	24.5
Planes universitarios	-0.1198	0.89	-11.3
Auto eficacia anticonceptiva	-0.1939	0.82	-17.6
Uso consistente de anticonceptivos	-0.3106	0.73	-26.7



# Modelos lineales generalizados: motivación



## Modelos lineales generalizados: definición

$$g(\mu_i) = \eta_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \cdots + \beta_p X_{ip}$$

$\mu_i$  es la media de la variable de respuesta  $Y_i$ .

$g$  es la función de enlace.

$\eta_i$  es el predictor lineal.

$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$  son los coeficientes del modelo.

$X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{ip}$  son las variables predictoras.

# Modelos lineales generalizados: definición

Variable de respuesta (Y):

- Puede seguir diferentes distribuciones de probabilidad (binomial, Poisson, normal, gamma, etc.).
- No se limita a ser continua y normalmente distribuida como en los modelos lineales tradicionales.

Función de enlace  $g(\cdot)$ :

- Relaciona la media de la variable de respuesta con la combinación lineal de las variables explicativas en X.

$$\mu_i = \mathbb{E}[Y_i]$$
$$g(\mathbb{E}[Y_i]) = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}$$

# Modelos lineales generalizados: ejemplos

## Regresión Lineal (Distribución Normal, Función de Enlace Identidad):

- Variable de respuesta: continua.
- Modelo:  $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \epsilon$
- $\epsilon$  es el término de error normalmente distribuido.

## Regresión Logística (Distribución Binomial, Función de Enlace Logit):

- Variable de respuesta: binaria.
- Modelo:  $\text{logit}(\pi) = \log\left(\frac{\pi}{1-\pi}\right) = \beta_0 + \beta_1 X$
- $\pi$  es la probabilidad de éxito.

# Modelos lineales generalizados: ejemplos

## Regresión de Poisson (Distribución de Poisson, Función de Enlace Log):

- Variable de respuesta: conteos.
- Modelo:  $\log(\lambda) = \beta_0 + \beta_1 X$
- $\lambda$  es la tasa de conteo.

## Regresión Binomial Negativa (Distribución Binomial Negativa, Función de Enlace Log)

- Variable de respuesta: conteos con sobredispersión.
- Modelo:  $\log(\lambda) = \beta_0 + \beta_1 X$

# Funciones de enlace

## Función de enlace identidad

- **Modelo:**  $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \epsilon$
- **Función de Enlace:**  $g(\mu) = \mu$
- **Inversa:**  $g^{-1}(\eta) = \eta$
- **Tipo de Variable:** Continua (normalmente distribuida)

$$\mu = \beta_0 + \beta_1 X$$

# Funciones de enlace

## Función de enlace inversa

- **Modelo:**  $\mu^{-1} = \beta_0 + \beta_1 X$
- **Función de Enlace:**  $g(\mu) = \frac{1}{\mu}$
- **Inversa:**  $g^{-1}(\eta) = \frac{1}{\eta}$
- **Tipo de Variable:** Continua y positiva

$$\mu = \frac{1}{\beta_0 + \beta_1 X}$$

# Funciones de enlace

## Función de enlace potencia

- **Modelo:**  $\mu^k = \beta_0 + \beta_1 X$ , donde  $k$  es una constante
- **Función de Enlace:**  $g(\mu) = \mu^k$
- **Inversa:**  $g^{-1}(\eta) = \eta^{1/k}$
- **Tipo de Variable:** Continua y positiva

$$\mu = (\beta_0 + \beta_1 X)^{1/k}$$



# Funciones de enlace

## Función de enlace logit

- **Modelo:**  $\text{logit}(\pi) = \log\left(\frac{\pi}{1-\pi}\right) = \beta_0 + \beta_1 X$
- **Función de Enlace:**  $g(\pi) = \log\left(\frac{\pi}{1-\pi}\right)$
- **Inversa:**  $g^{-1}(\eta) = \frac{e^\eta}{1+e^\eta}$
- **Tipo de Variable:** Binaria (0 o 1)

$$\pi = \frac{e^{\beta_0 + \beta_1 X}}{1 + e^{\beta_0 + \beta_1 X}}$$

# Funciones de enlace

## Función de enlace gompit

- **Modelo:**  $\log(-\log(\pi)) = \beta_0 + \beta_1 X$
- **Función de Enlace:**  $g(\pi) = \log(-\log(\pi))$
- **Inversa:**  $g^{-1}(\eta) = e^{-e^\eta}$
- **Tipo de Variable:** Binaria (0 o 1)

$$\pi = e^{-e^{\beta_0 + \beta_1 X}}$$

# Funciones de enlace

## Función de enlace probit

- **Modelo:**  $\Phi^{-1}(\pi) = \beta_0 + \beta_1 X$
- **Función de Enlace:**  $g(\pi) = \Phi^{-1}(\pi)$ , donde  $\Phi^{-1}$  es la inversa de la función de distribución normal acumulativa.
- **Inversa:**  $g^{-1}(\eta) = \Phi(\eta)$ , donde  $\Phi$  es la función de distribución normal acumulativa.
- **Tipo de Variable:** Binaria (0 o 1)

$$\pi = \Phi(\beta_0 + \beta_1 X)$$

# Funciones de enlace

## Función de enlace log

- **Modelo:**  $\log(\lambda) = \beta_0 + \beta_1 X$
- **Función de Enlace:**  $g(\lambda) = \log(\lambda)$
- **Inversa:**  $g^{-1}(\eta) = e^\eta$
- **Tipo de Variable:** Conteos (números enteros no negativos)

$$\lambda = e^{\beta_0 + \beta_1 X}$$

# Funciones de enlace

## Función de enlace log-log (doble logaritmica)

- **Modelo:**  $\log(\log(\mu)) = \beta_0 + \beta_1 X$
- **Función de Enlace:**  $g(\mu) = \log(\log(\mu))$
- **Inversa:**  $g^{-1}(\eta) = e^{e^\eta}$
- **Tipo de Variable:** Continua y positiva

$$\mu = e^{e^{\beta_0 + \beta_1 X}}$$

# Funciones de enlace

## Función de enlace arcseno de raíz cuadrática

- **Modelo:**  $\arcsin(\sqrt{\mu}) = \beta_0 + \beta_1 X$
- **Función de Enlace:**  $g(\mu) = \arcsin(\sqrt{\mu})$
- **Inversa:**  $g^{-1}(\eta) = (\sin(\eta))^2$
- **Tipo de Variable:** Proporciones (valores entre 0 y 1)

$$\mu = (\sin(\beta_0 + \beta_1 X))^2$$

# Funciones de enlace

## Función de enlace Box-Cox

- **Modelo:**  $\frac{\mu^\lambda - 1}{\lambda} = \beta_0 + \beta_1 X$ , donde  $\lambda$  es un parámetro de transformación
- **Función de Enlace:**  $g(\mu) = \frac{\mu^\lambda - 1}{\lambda}$
- **Inversa:**  $g^{-1}(\eta) = (\lambda\eta + 1)^{1/\lambda}$
- **Tipo de Variable:** Continua y positiva

$$\mu = (\lambda(\beta_0 + \beta_1 X) + 1)^{1/\lambda}$$

# Métodos de estimación: máxima verosimilitud

Los modelos lineales generalizados se estiman usualmente con máxima verosimilitud:

$$\{(y_i, \mathbf{x}_i)\}_{i=1}^n$$

$$L(\boldsymbol{\beta}) = \prod_{i=1}^n f(y_i \mid \mathbf{x}_i; \boldsymbol{\beta})$$

$$\ell(\boldsymbol{\beta}) = \log L(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^n \log f(y_i \mid \mathbf{x}_i; \boldsymbol{\beta})$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \arg \max_{\boldsymbol{\beta}} \ell(\boldsymbol{\beta})$$



# Métodos de estimación: máxima verosimilitud

Los estimadores máximo verosímiles son consistentes, asintóticamente eficientes, tienen una distribución asintótica normal e insesgadez asintótica:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{MLE} &\xrightarrow{P} \boldsymbol{\beta} & \lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\boldsymbol{\beta}}_{MLE} - \boldsymbol{\beta}| \geq \epsilon) &= 0 \\ \sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{MLE} - \boldsymbol{\beta}) &\xrightarrow{d} \mathcal{N}(\mathbf{0}, I(\boldsymbol{\beta})^{-1}) \\ \mathbb{E}[\hat{\boldsymbol{\beta}}_{MLE}] &\approx \boldsymbol{\beta} & I(\boldsymbol{\beta}) &= \mathbb{E} \left[ -\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\beta})}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}^\top} \right] \\ \text{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{MLE}) &\approx \frac{1}{n} I(\boldsymbol{\beta})^{-1}\end{aligned}$$

# Métodos de estimación: Quasi-máxima verosimilitud

Quasi-máxima verosimilitud:

$$Q(\beta) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{(y_i - \mu_i)^2}{2V(\mu_i)} + \int_{\mu_i}^{y_i} \frac{y-t}{V(t)} dt \right)$$
$$\frac{\partial Q(\beta)}{\partial \beta_j} = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \mu_i) \frac{\partial \mu_i}{\partial \beta_j}}{V(\mu_i)}$$

- No se basa en una función de verosimilitud con una distribución específica
- La derivada se utiliza para encontrar los estimadores, con métodos numéricos
- Los estimadores son consistentes y asintóticamente eficientes.

# Métodos de estimación: Quasi-máxima verosimilitud

Las iteraciones del scoring the Fisher se utilizan para encontrar estimadores de quasi-máxima verosimilitud en algunos modelos estadísticos:

$$\begin{aligned}\beta^{(0)} \\ \beta^{(t+1)} &= \beta^{(t)} + I(\beta^{(t)})^{-1} U(\beta^{(t)}) \\ U(\beta) &= \sum_{i=1}^n \frac{y_i - \mu_i}{\mu_i} \mathbf{x}_i \\ I(\beta) &= \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^\top}{\mu_i} \\ I(\beta) &= -\mathbb{E} \left[ \frac{\partial^2 \ell(\beta)}{\partial \beta \partial \beta^\top} \right] & U(\beta) &= \frac{\partial \ell(\beta)}{\partial \beta} \\ & & \mu_i &= f(\mathbf{x}_i^\top \beta)\end{aligned}$$

# Métodos de estimación: Método de los momentos

Método de los momentos:

$$\mathbb{E}[Y] = \mu(\beta)$$

$$\mathbb{E}[(Y - \mu(\beta))^2] = \sigma^2(\beta)$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\mu})^2$$

$$\hat{\mu} = \mu(\beta)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \sigma^2(\beta)$$

# Métodos de estimación: Método de los momentos

Método de los momentos: ejemplos.

Modelo lineal:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \epsilon$$

$$\mathbb{E}[Y] = \beta_0 + \beta_1 \mathbb{E}[X]$$

$$\text{Var}(Y) = \text{Var}(\epsilon)$$

Regresión de Poisson:

$$\log(\lambda_i) = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}$$

$$\mathbb{E}[Y_i] = \lambda_i$$

$$\text{Var}(Y_i) = \lambda_i$$

# Métodos de estimación: propiedades de los estimadores

Los estimadores del método de los momentos son consistentes, asintóticamente insesgados, y tienen una distribución asintótica normal, pero en muestras pequeñas la varianza es mayor que la de los estimadores máximo verosímiles:

$$\hat{\beta}_{MME} \xrightarrow{P} \beta$$

$$\mathbb{E}[\hat{\beta}_{MME}] \approx \beta$$

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_{MME} - \beta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, V)$$

$$\text{Var}(\hat{\beta}_{MME}) \approx \frac{1}{n} \left( \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \right)^{-1} \Sigma \left( \frac{\partial \mu}{\partial \beta} \right)^{-1}$$

# Laboratorio: Simulaciones de Monte Carlo

- **MLMLG\_0301.R:** Métodos de estimación de MLGs.
- **MLMLG\_0302.R:** Simulación de consistencia de los estimadores en un modelo de regresión de Poisson
- **MLMLG\_0303.R:** Simulación de insesgamiento de los estimadores en un modelo de regresión de Poisson
- **MLMLG\_0304.R:** Simulación de insesgamiento asintótico de los estimadores en un modelo de regresión de Poisson
- **MLMLG\_0305.R:** Simulación de la distribución asintótica normal de los estimadores en un modelo de regresión de Poisson



¿A qué software estadístico le daremos más énfasis en el resto del módulo?

R (Posit)

52%

R (AnalyticFlow)

0%

Python

48%



# Interpretación de los estimadores en MLG

La interpretación de los estimadores de  $\beta$  en los MLGs depende de la función de enlace y de la distribución de la variable de respuesta:

Modelo	Distribución y función de enlace	Interpretación de los estimadores $\beta$
Regresión normal (gaussiana)	Distribución normal, función de enlace identidad	Cambio unitario de X está relacionado con un cambio $\beta$ en Y
Regresión logística (logit)	Distribución binomial, función de enlace logit	Cambio unitario de X está relacionado con un cambio $\exp(\beta)$ en el odds ratio de Y
Regresión de Poisson	Distribución de Poisson, función de enlace logarítmica	Cambio unitario de X está relacionado con un cambio logarítmico en la tasa de conteo de Y

# Medidas de ajuste en MLGs: Devianza y pseudo-R<sup>2</sup>

- La devianza mide la bondad del ajuste de un modelo comparando el modelo ajustado con un modelo saturado. Cuanto menor sea la devianza, mejor es el ajuste del modelo a los datos observados.
- El pseudo-R<sup>2</sup> basado en la devianza indica mejoras en el ajuste respecto al modelo nulo.

$$D(y, \hat{\mu}) = 2 \left[ \sum_{i=1}^n y_i \log \left( \frac{y_i}{\hat{\mu}_i} \right) - (y_i - \hat{\mu}_i) \right]$$

$$D(y, \bar{y}) = 2 \left[ \sum_{i=1}^n y_i \log \left( \frac{y_i}{\bar{y}} \right) - (y_i - \bar{y}) \right]$$

$$D_{\text{residual},i} = 2 \left[ y_i \log \left( \frac{y_i}{\hat{\mu}_i} \right) - (y_i - \hat{\mu}_i) \right]$$

$$R^2 = 1 - \frac{D(y, \hat{\mu})}{D(y, \bar{y})}$$

# Medidas de ajuste en MLGs: Devianza

Devianza para un modelo de regresión lineal gaussiano, una regresión logística y una regresión de Poisson:

$$D(y, \hat{\mu}) = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\mu}_i)^2$$

$$D(y, \hat{\mu}) = 2 \sum_{i=1}^n \left[ y_i \log \left( \frac{y_i}{\hat{\mu}_i} \right) + (1 - y_i) \log \left( \frac{1 - y_i}{1 - \hat{\mu}_i} \right) \right]$$

$$D(y, \hat{\mu}) = 2 \sum_{i=1}^n \left[ y_i \log \left( \frac{y_i}{\hat{\mu}_i} \right) - (y_i - \hat{\mu}_i) \right]$$

# Medidas de ajuste en MLGs: Pseudo-R<sup>2</sup>

Existen diferentes medidas de bondad de ajuste basadas en pseudo-R<sup>2</sup>s: Cox y Snell, Nagelkerke, McFadden, Tjur, y de Efron. Los pseudo-R<sup>2</sup> de Cox y Snell, MacFadden y el pseudo-R<sup>2</sup> basado en la devianza pueden ser negativos.

$$R_{CS}^2 = 1 - \left( \frac{L_0}{L_1} \right)^{2/n}$$

$$R_N^2 = \frac{R_{CS}^2}{1 - L_0^{2/n}}$$

$$R_{McF}^2 = 1 - \frac{\ln(L_1)}{\ln(L_0)}$$

$$R_{Tjur}^2 = \text{Promedio}(\hat{y}_1) - \text{Promedio}(\hat{y}_0)$$

$$R_{Efron}^2 = 1 - \frac{\sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_i (y_i - \bar{y})^2}$$

# Regresión Gaussiana

Distribución normal, función de enlace identidad:

**Modelo:**  $Y_i = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta} + \epsilon_i$ , donde  $\epsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

**Variable de Respuesta:**  $Y_i$  es continua.

**Función de Enlace:** Identidad,  $g(\mu_i) = \mu_i$

**Interpretación de los Coeficientes:**

- Cada coeficiente  $\beta_j$  representa el cambio esperado en  $Y_i$  por un cambio unitario en la variable predictora  $x_j$ , manteniendo las demás variables constantes.

# Regresión de Poisson

Distribución de Poisson, función de enlace logarítmica:

**Modelo:**  $\log(\lambda_i) = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}$

**Variable de Respuesta:**  $Y_i$  es un conteo (número de eventos).

**Interpretación de los Coeficientes:**

- Cada coeficiente  $\beta_j$  representa el cambio en el logaritmo de la tasa de conteo ( $\log \lambda_i$ ) por un cambio unitario en  $x_j$ .
- $\exp(\beta_j)$  es el factor multiplicativo por el cual se incrementa la tasa de conteo  $\lambda_i$  por un cambio unitario en  $x_j$ .

# Regresión de Poisson

## Distribución de Poisson:

- Describe el número de eventos en un intervalo fijo de tiempo o espacio.
- Función de probabilidad:  $P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$
- Esperanza:  $\mathbb{E}[X] = \lambda$
- Varianza:  $\text{Var}(X) = \lambda$

# Regresión de Poisson

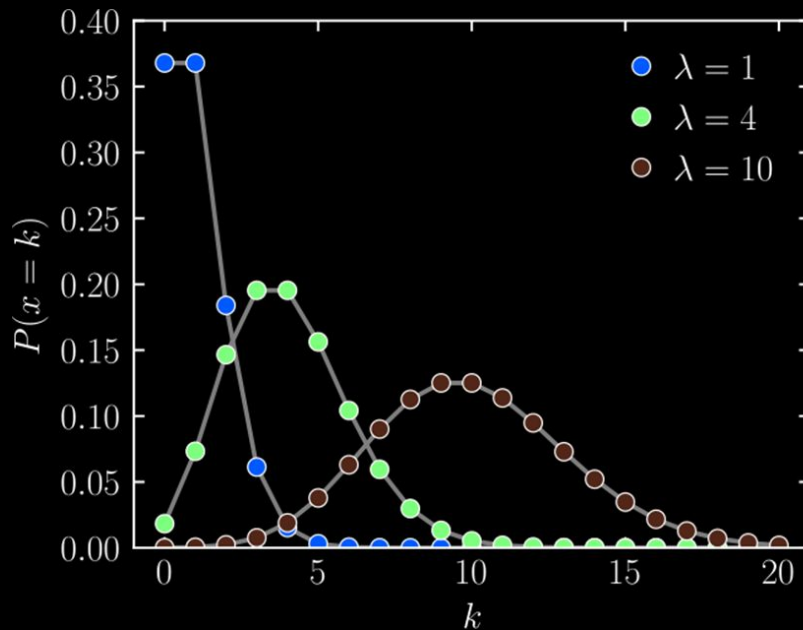
Formalmente:

$$Y_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$$

$$\log(\lambda_i) = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}$$

$$\lambda_i = \exp(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta})$$

$$g(\lambda_i) = \log(\lambda_i)$$





# Regresión de Poisson: Devianza

Devianza y devianza nula:

$$D = 2 (\log L_{\text{sat}} - \log L) =$$
$$2 \sum_{i=1}^n \left[ y_i \log \left( \frac{y_i}{p_i} \right) + (1 - y_i) \log \left( \frac{1-y_i}{1-p_i} \right) \right]$$
$$d_i = 2 \left[ y_i \log \left( \frac{y_i}{p_i} \right) + (1 - y_i) \log \left( \frac{1-y_i}{1-p_i} \right) \right]$$

# Regresión de Poisson: Interpretación de coeficientes

La fórmula general para un modelo Poisson es:

$$\log(\lambda_i) = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_p x_{pi}$$

donde:

- $\lambda_i$  es la tasa esperada de eventos para la observación  $i$ .
- $\beta_0$  es el intercepto del modelo.
- $\beta_j$  son los coeficientes asociados a las variables explicativas  $x_{ji}$ .

# Regresión de Poisson: Interpretación de coeficientes

Los coeficientes en un modelo Poisson se interpretan en términos de la tasa de ocurrencia del evento:

- **Coeficiente positivo** ( $\beta_j > 0$ ): Un aumento en  $x_j$  está asociado con un incremento en la tasa de ocurrencia del evento.
- **Coeficiente negativo** ( $\beta_j < 0$ ): Un aumento en  $x_j$  está asociado con una disminución en la tasa de ocurrencia del evento.
- **Coeficiente cero** ( $\beta_j = 0$ ): No hay asociación entre  $x_j$  y la tasa de ocurrencia del evento.

# Regresión de Poisson: Interpretación de coeficientes

- Para interpretar el impacto en la tasa esperada ( $\lambda$ ), se utiliza la exponencial de los coeficientes para obtener el cambio en la tasa esperada de eventos por unidad de cambio en  $x$ .  
$$e^{\beta_j}$$
$$100 \times (e^{\beta} - 1)$$
- El cambio porcentual en la tasa esperada de eventos por unidad de cambio en la variable explicativa puede obtenerse con una fórmula adicional que resta 1 y multiplica por cien el exponencial del coeficiente estimado.
- El intercepto representa la tasa de ocurrencia esperada del evento cuando todas las variables explicativas son cero.

# Regresión de Poisson: Interpretación de coeficientes

Intervalo de confianza para los estimadores:

$$Y_i \sim \text{Poisson}(\lambda_i)$$

$$\log(\lambda_i) = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta}$$

$$\hat{\beta}_j \pm Z_{1-\alpha/2} \cdot \text{SE}(\hat{\beta}_j)$$

$$\exp(\hat{\beta}_j - Z_{1-\alpha/2} \cdot \text{SE}(\hat{\beta}_j)), \exp(\hat{\beta}_j + Z_{1-\alpha/2} \cdot \text{SE}(\hat{\beta}_j))$$

$$100 \times (\exp(\hat{\beta}_j - Z_{1-\alpha/2} \cdot \text{SE}(\hat{\beta}_j)) - 1)$$

$$100 \times (\exp(\hat{\beta}_j + Z_{1-\alpha/2} \cdot \text{SE}(\hat{\beta}_j)) - 1)$$

# Regresión de Poisson: Sobredispersión

La sobredispersión ocurre cuando la variabilidad en los datos es mayor que la esperada según el modelo de Poisson:

- Supuesto de un modelo de Poisson: la varianza es igual a la media.
- Si la varianza es significativamente mayor que la media, esto sugiere sobredispersión.

La sobredispersión puede afectar la validez de los resultados del modelo (intervalos de confianza y las pruebas de hipótesis):

- Los estimadores siguen siendo insesgados y consistentes
- Los estimadores ya no son eficientes

# Regresión de Poisson: Sobredispersión

Estadígrafos y test LM de sobredispersión:

- El estadígrafo basado en los residuos de Pearson debe ser igual a 1 si no existe sobredispersión o subdispersión.
- La hipótesis nula del estadígrafo Chi2 es que no existe sobredispersión.

$$\hat{\phi} = \frac{\sum (\text{Pearson residuals})^2}{n-p}$$

$$\chi^2 = \frac{\left( \sum_{i=1}^n \mu_i^2 - n\bar{y}_i \right)^2}{2 \sum_{i=1}^n \mu_i^2}$$

# Regresión de Poisson: Soluciones a la sobredispersión

- Modificar el modelo: Agregar variables explicativas, interacciones, transformar las variables, ajustarla presencia de valores atípicos
- Errores Estándar Robustos (estimadores sandwich)
- Modelo Quasi-Poisson: El modelo quasi-Poisson ajusta la varianza permitiendo que sea una función lineal de la media,  $\text{Var}(Y) = \phi\mu$ , siendo  $\phi$  el parámetro de sobredispersión.
- Modelo binomial negativo: Modeliza explícitamente la sobredispersión mediante un parámetro adicional  $\theta$



# Regresión de Poisson con offset

**Offset:** término de ajuste independiente de los predictores, como el tiempo de exposición o el tamaño de la población.

$$\log(\lambda_i) = \mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta} + \log(\text{offset}_i)$$

$$\lambda_i = \text{offset}_i \cdot e^{\mathbf{X}_i\boldsymbol{\beta}}$$

$$\log(\lambda_i) = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \log(\text{población}_i)$$

$$\lambda_i = \text{población}_i \cdot e^{\beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2}}$$

# MLG Binomial Negativo

Modeliza explícitamente la sobredispersión mediante un parámetro adicional  $\theta$  que captura la variabilidad extra:

$$\mathbb{E}(Y) = \mu$$

$$\text{Var}(Y) = \mu + \frac{\mu^2}{\theta}$$

$$L(\beta, \theta | y) = \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma(y_i + \theta^{-1})}{\Gamma(\theta^{-1}) y_i!} \left( \frac{\theta^{-1}}{\theta^{-1} + \mu_i} \right)^{\theta^{-1}} \left( \frac{\mu_i}{\theta^{-1} + \mu_i} \right)^{y_i}$$

$$\mu_i = \exp(X_i \beta)$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^n X_i \left( y_i - \mu_i \frac{\theta^{-1} + y_i}{\theta^{-1} + \mu_i} \right) = 0$$

## Alternativas: Modelos con inflación de ceros

$\pi$  es la probabilidad de inflación de ceros (proporción de ceros "inflados"),  $\lambda$  es el parámetro de la distribución de Poisson (tasa de ocurrencia de eventos),  $r$  y  $p$  son los parámetros de la distribución binomial negativa,  $\Gamma$  es la función gamma:

$$P(Y = y) = \begin{cases} \pi + (1 - \pi) \cdot e^{-\lambda} & \text{si } y = 0 \\ (1 - \pi) \cdot \frac{e^{-\lambda} \lambda^y}{y!} & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

$$P(Y = y) = \begin{cases} \pi + (1 - \pi) \cdot \left( \frac{\Gamma(r+y)}{\Gamma(r) \cdot y!} \right) \left( \frac{p^r (1-p)^y}{(1+(r-1)p)} \right) & \text{si } y = 0 \\ (1 - \pi) \cdot \left( \frac{\Gamma(r+y)}{\Gamma(r) \cdot y!} \right) p^r (1-p)^y & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

# Test de Vuong para comparar modelos no anidados

Hipotesis nula: los modelos tienen el mismo poder explicativo

$$d_i = \ell_{1i} - \ell_{2i}$$

$$\bar{d} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i$$

$$s_d^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (d_i - \bar{d})^2$$

$$V_n = \frac{\sqrt{n}\bar{d}}{s_d} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$H_0 : E[\log L_1(y_i)] = E[\log L_2(y_i)]$$

# Laboratorio: Ajuste de un modelo de regresión de Poisson y Binomial Negativo en R, Python, y con AI (Gemini Advanced)

**PROMPT:** estima un modelo de regresión de Poisson para predecir el número de crímenes (nv) con los matriculados y la región, interpreta el ajuste del modelo y los coeficientes del modelo

Gemini Advanced ▼



haz un modelo de regresion de Poisson para predecir el numero de crimenes (nv) con los matriculados y la region, interpreta el ajuste del modelo y los coeficientes

crimenes



CSV



# Regresión logística (logit)

Distribución binomial, función de enlace logit:

**Modelo:**  $\text{logit}(\pi_i) = \log\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right) = \mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}$

**Variable de Respuesta:**  $Y_i$  es binaria (0 o 1).

**Función de Enlace:** Logit,  $g(\pi_i) = \log\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right)$

**Interpretación de los Coeficientes:**

- Cada coeficiente  $\beta_j$  representa el cambio en el log-odds de la respuesta por un cambio unitario en la variable predictora  $x_j$ , manteniendo las demás variables constantes.
- $\exp(\beta_j)$  es el multiplicador del odds ratio asociado con un cambio unitario en  $x_j$ .

# Regresión logística (logit)

$$Y \sim \text{Binomial}(n, p)$$

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^n k \cdot \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

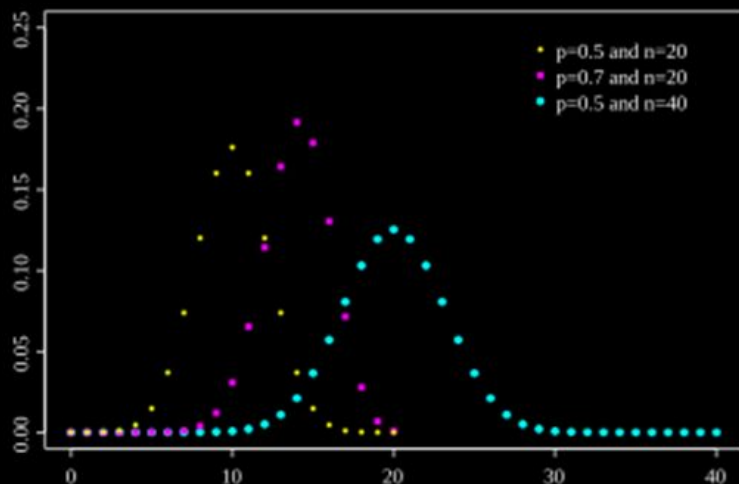
$$\mathbb{E}[X] = np$$

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

$$\mathbb{E}[X^2] = np + n(n-1)p^2$$

$$\text{Var}(X) = (np + n(n-1)p^2) - (np)^2 = np(1-p)$$

$$\text{Var}(X) = np(1-p)$$



## Regresión logística (logit)

$$Y \sim \text{Binomial}(n, p)$$

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

$$L(\boldsymbol{\beta} \mid y_i, \mathbf{x}_i) = p_i^{y_i} (1 - p_i)^{1-y_i}$$

$$p_i = \sigma(\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta})$$

$$L(\boldsymbol{\beta} \mid \mathbf{y}, \mathbf{X}) = \prod_{i=1}^n p_i^{y_i} (1 - p_i)^{1-y_i}$$

$$\ell(\boldsymbol{\beta} \mid \mathbf{y}, \mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n [y_i \log(p_i) + (1 - y_i) \log(1 - p_i)]$$

$$\ell(\boldsymbol{\beta} \mid \mathbf{y}, \mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n \left[ y_i \log \left( \frac{1}{1 + e^{-\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}}} \right) + (1 - y_i) \log \left( \frac{e^{-\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}}}{1 + e^{-\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}}} \right) \right]$$

$$\ell(\boldsymbol{\beta} \mid \mathbf{y}, \mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n \left[ y_i (\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}) - \log(1 + e^{\mathbf{x}_i^\top \boldsymbol{\beta}}) \right]$$



# Regresión logística (logit)

$$\text{logit}(\pi(\mathbf{x})) = \log \left( \frac{\pi(\mathbf{x})}{1-\pi(\mathbf{x})} \right) = \mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta}$$

$$\pi(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{1+e^{-\mathbf{x}^\top \boldsymbol{\beta}}}$$

Función Logística:

$$\sigma(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}$$

$$\sigma(z) \in (0, 1) \quad z \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \sigma(z) = 1$$

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \sigma(z) = 0$$

$$\sigma(0) = \frac{1}{1+e^0} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Función Logit (inversa de la logística):

$$\text{logit}(p) = \log \left( \frac{p}{1-p} \right)$$

$$\text{logit}(p) \in \mathbb{R} \quad p \in (0, 1)$$

$$\lim_{p \rightarrow 1} \text{logit}(p) = \infty$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \text{logit}(p) = -\infty$$

$$\text{logit}(0.5) = \log \left( \frac{0.5}{1-0.5} \right) = \log(1) = 0$$

# Regresión logística: Interpretación de coeficientes

Los odds ratios (razones de momios) son una medida de la asociación entre una exposición (o predictor) y un resultado binario. Miden el número de veces en el que se produce un cambio de la variable dependiente:

$$\log \left( \frac{p}{1-p} \right) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k$$

$$OR = e^{\beta_i}$$
$$Odds = \frac{p}{1-p} \quad 100 \times (e^{\beta_i} - 1)$$

$$OR = \frac{\text{Odds del evento en el grupo expuesto}}{\text{Odds del evento en el grupo no expuesto}}$$

$$OR = \frac{\frac{p_1}{1-p_1}}{\frac{p_2}{1-p_2}} = \frac{p_1(1-p_2)}{p_2(1-p_1)}$$

# Regresión logística: Interpretación de coeficientes

- **OR = 1:** Los odds del evento son los mismos en ambos grupos, lo que sugiere que no hay asociación entre la exposición y el resultado.
- **OR > 1:** Los odds del evento son mayores en el grupo expuesto que en el grupo no expuesto, sugiriendo una asociación positiva entre la exposición y el resultado.
- **OR < 1:** Los odds del evento son menores en el grupo expuesto que en el grupo no expuesto, sugiriendo una asociación negativa entre la exposición y el resultado.

# Regresión logística (logit) vs Probit and Gompit

Se utilizan para modelizar variables de respuesta binaria, pero difieren en la elección de la función de enlace que relaciona la probabilidad del evento con la combinación lineal de variables predictoras.

La elección entre estos modelos depende del contexto del problema, la naturaleza de los datos y los supuestos sobre la distribución del error:

- **Regresión Logit:** Función logit como enlace, fácil de interpretar en términos de odds ratios.
- **Regresión Probit:** Función probit como enlace, adecuada para supuestos de error normal.
- **Regresión Gompit:** Función gompit como enlace, útil en análisis de supervivencia y modelado de eventos extremos.

# Regresión logística (logit) vs Probit and Gompit

## Transición de Probabilidades:

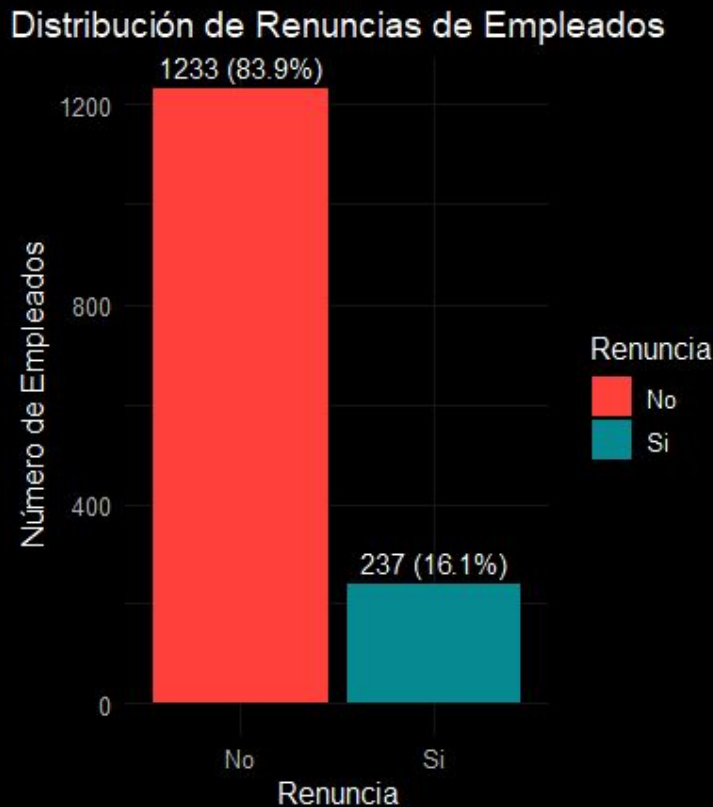
- Logit y Probit: Ambas tienen transiciones suaves y sigmoides, pero la probit es más gradual debido a la normalidad asumida en la distribución de los errores.
- Gompit: La transición es más rápida desde valores bajos y se estabiliza más lentamente en valores altos, lo que refleja un comportamiento de eventos extremos.

## Forma de la Curva sigmoideal::

- Logit y Probit: Simétrica alrededor del punto medio con una pendiente balanceada.
- Gompit: Asimétrica, rápida en los valores bajos y más gradual en los altos.

# Regresión logística (logit): datos desbalanceados

- Para datos desproporcionados, la regresión logística se puede modificar para incluir ponderaciones de clase, que asignan una penalización mayor a las clasificaciones erróneas de la clase minoritaria. Normalmente, esto se hace modificando la función de pérdida para tener en cuenta las ponderaciones de clase.
- Adicionalmente, puede emplearse sobre-muestreo y submuestreo y otras técnicas como SMOTE (Synthetic Minority Over-sampling Technique) ensamblaje, y cost-sensitive Learning



# Regresión espacial

Se aplica para datos con una distribución espacial de fenómenos que se agrupan geográficamente como la pobreza, la delincuencia, enfermedades infecciosas, distribución de especies , biodiversidad, etc.

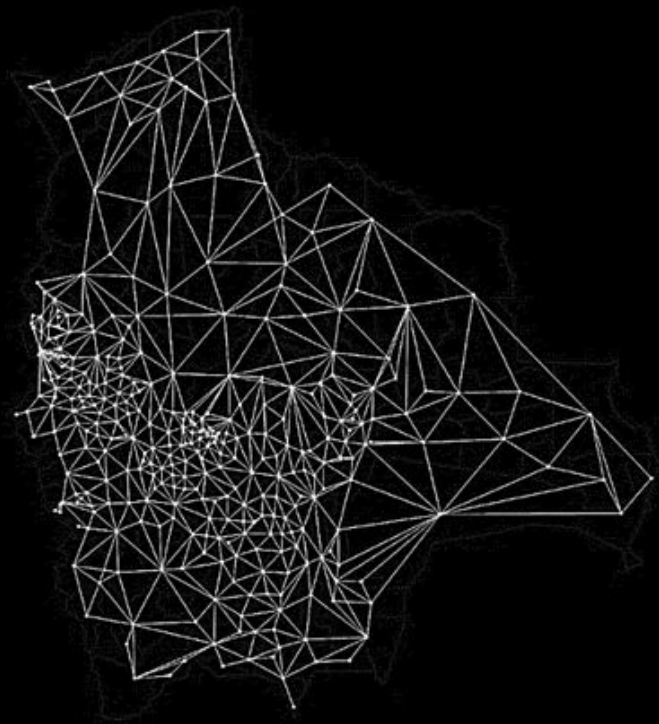
$$y = \rho W y + X\beta + \epsilon$$

$$y = X\beta + \epsilon$$

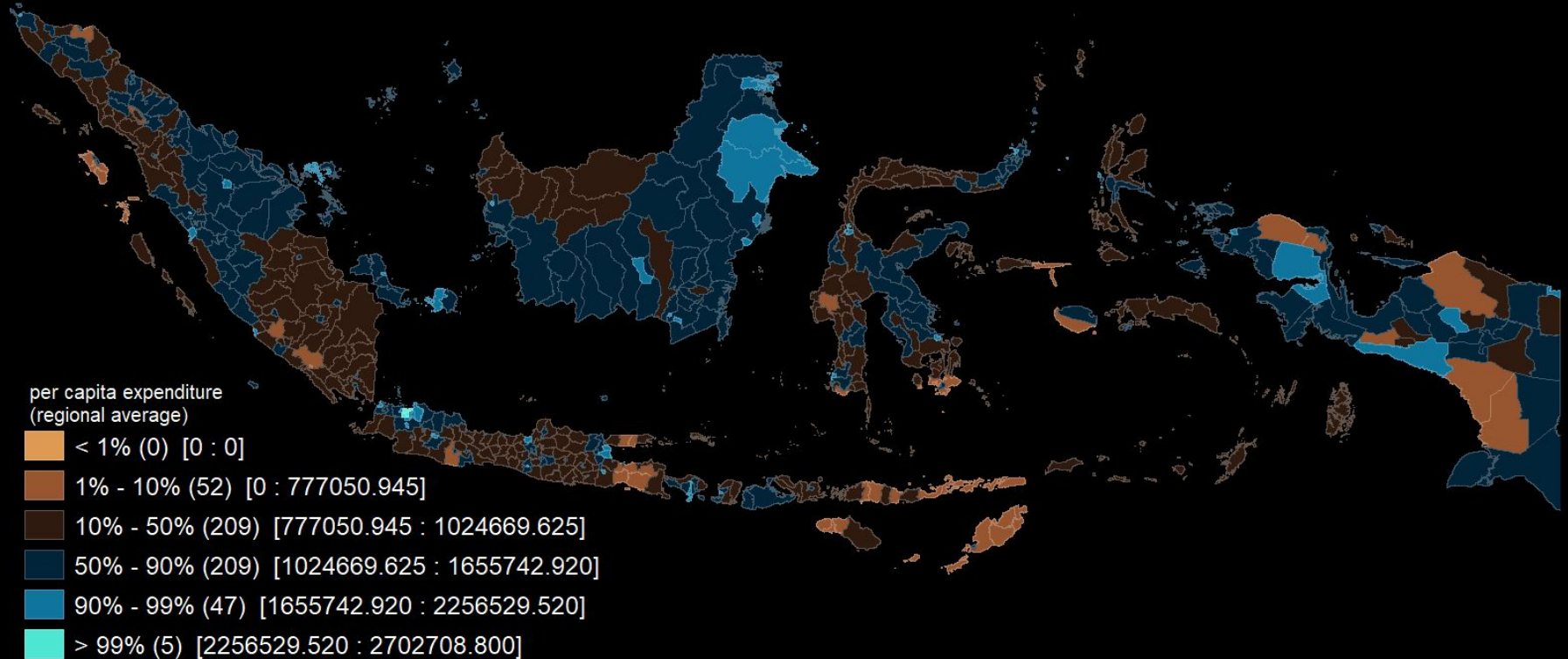
$$\epsilon = \lambda W \epsilon + u$$

$$y = \rho W y + X\beta + W X \theta + \epsilon$$

$$W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n1} & w_{n2} & \cdots & w_{nn} \end{pmatrix}$$



# Regresión espacial: gasto per capita en Indonesia (proxy de pobreza)



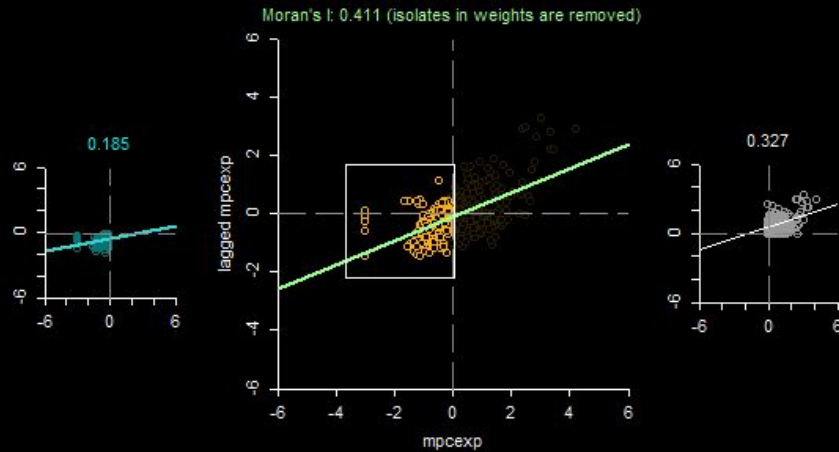


# Regresión espacial: matriz de contigüidad en base a la triangulación de Delauney



# Regresión espacial

El estadígrafo I de Moran mide la autocorrelación espacial global (datos que se agrupan o dispersan en el espacio)



# Otros modelos no-lineales: modelo epidemiológico SIR

El modelo SIR (Susceptibles-Infectados-Recuperados) de Kermack-McKendrick es un modelo para hacer proyecciones de epidemias y analizar rebrotes.

- $R_0$ : (cociente entre la tasa de contagio  $\beta$  y la tasa de recuperación  $\alpha$ ): velocidad inicial de propagación de la infección en una población sin inmunización, e.g.  $R_0 = 6$  significa que el primer individuo que desarrolló la infección la transmitió a 6 individuos más.
- $R_e$ : número efectivo de reproducción (promedio de individuos que pueden llegar a ser infectados por un en un determinado instante de tiempo después de iniciado el brote)

$$\frac{dS_t}{dt} = -\frac{\beta}{N} S_t I_t$$

$$\frac{dI_t}{dt} = \frac{\beta}{N} S_t I_t - \alpha I_t$$

$$\frac{dR_t}{dt} = \alpha I_t$$

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \mathcal{R}_e = \frac{\beta S_0}{\alpha N}$$

# Otros modelos no-lineales

El modelo SIR  
(Susceptibles-Infectados-Recuperados) de Kermack-McKendrick es un modelo compartimental donde la población bajo estudio se divide en clases epidemiológicas y se describe un flujo entre ellas.

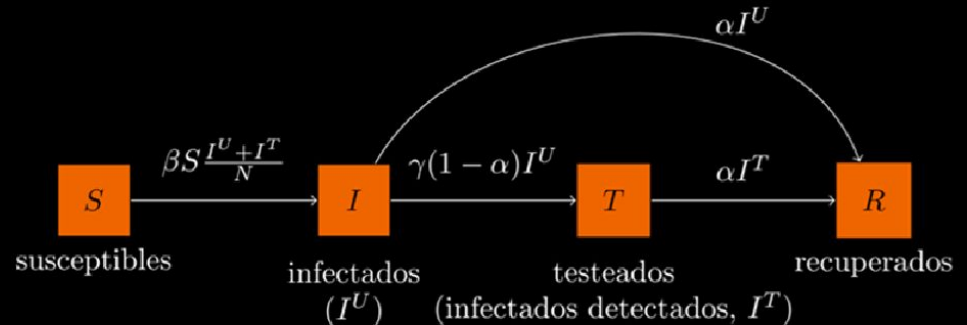
$$S_t = S_{t-1} - \beta_{t-1} \frac{S_{t-1}(I_{t-1}^T + I_{t-1}^U)}{N}$$

$$I_t^U = (1 - \alpha)I_{t-1}^U + \beta_{t-1} \frac{S_{t-1}(I_{t-1}^T + I_{t-1}^U)}{N} - B_{t-1}$$

$$I_{t-1}^T = (1 - \alpha)I_{t-1}^T + B_{t-1}$$

$$R_t = R_{t-1} + \alpha(I_{t-1}^T + I_{t-1}^U)$$

$$\mathcal{R}_e(t) = \frac{\beta_t S_t}{\alpha N}$$



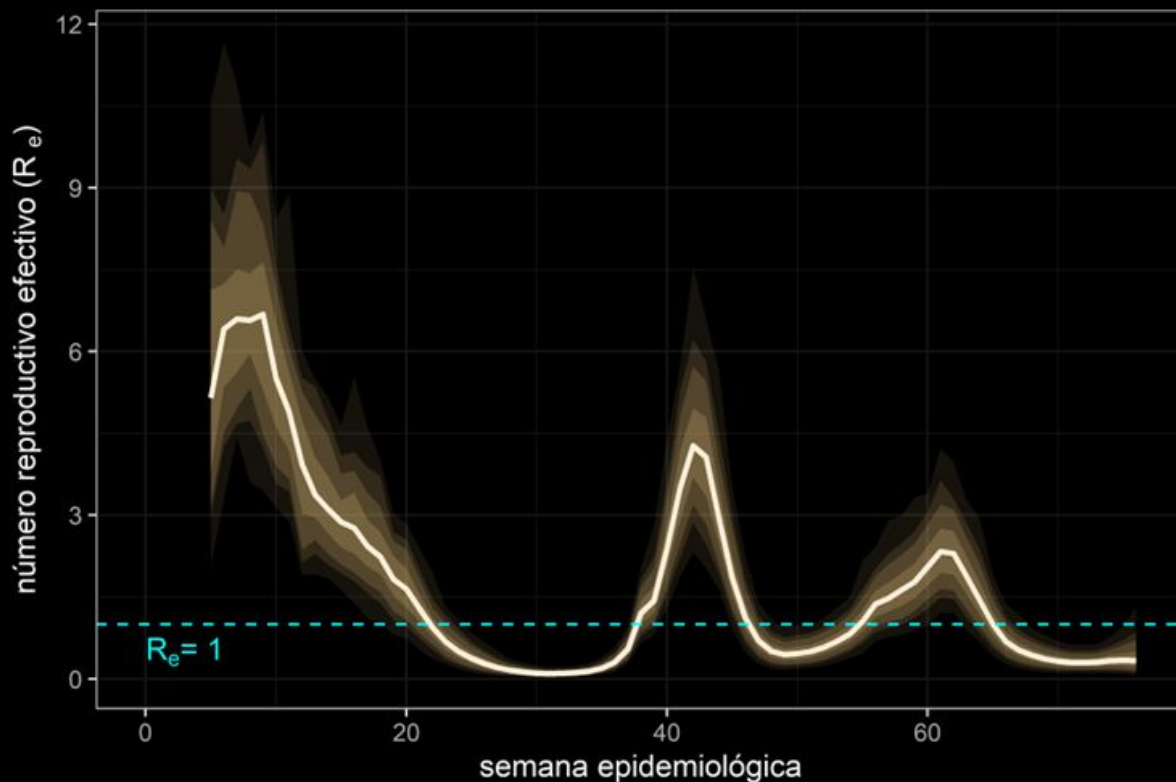
# Otros modelos no-lineales

Semana epidemiológica 1:  
semana al 15 de marzo de  
2020

Semana epidemiológica 20:  
semana al 26 de julio de 2020

Semana epidemiológica 40:  
semana al 13 de diciembre de  
2020

Semana epidemiológica 60:  
semana al 2 de mayo de 2021



# Otros modelos no-lineales

Semana epidemiológica 1:  
semana al 15 de marzo de  
2020

Semana epidemiológica 20:  
semana al 26 de julio de 2020

Semana epidemiológica 40:  
semana al 13 de diciembre de  
2020

Semana epidemiológica 60:  
semana al 2 de mayo de 2021

