Modelos lineales y modelos lineales generalizados

Rolando Gonzales Martinez, PhD

Fellow postdoctoral Marie Skłodowska-Curie

Universidad de Groningen (Países Bajos)

Investigador (researcher)

Iniciativa de Pobreza y Desarrollo Humano de la Universidad de Oxford (UK)

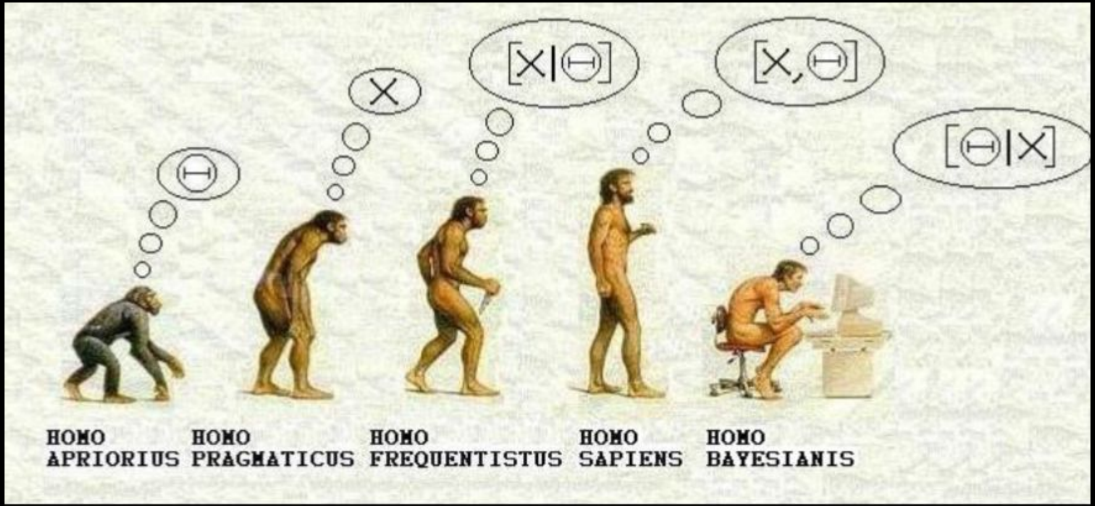
Contenido del curso

(4) Estimación Bayesiana

- Fundamentos de la inferencia Bayesiana.
- Teorema de Bayes.
- Métodos de MCMC (Markov Chain Monte Carlo) para estimación Bayesiana.
- Laboratorio: Estimación Bayesiana de modelos lineales y modelos lineales generalizados

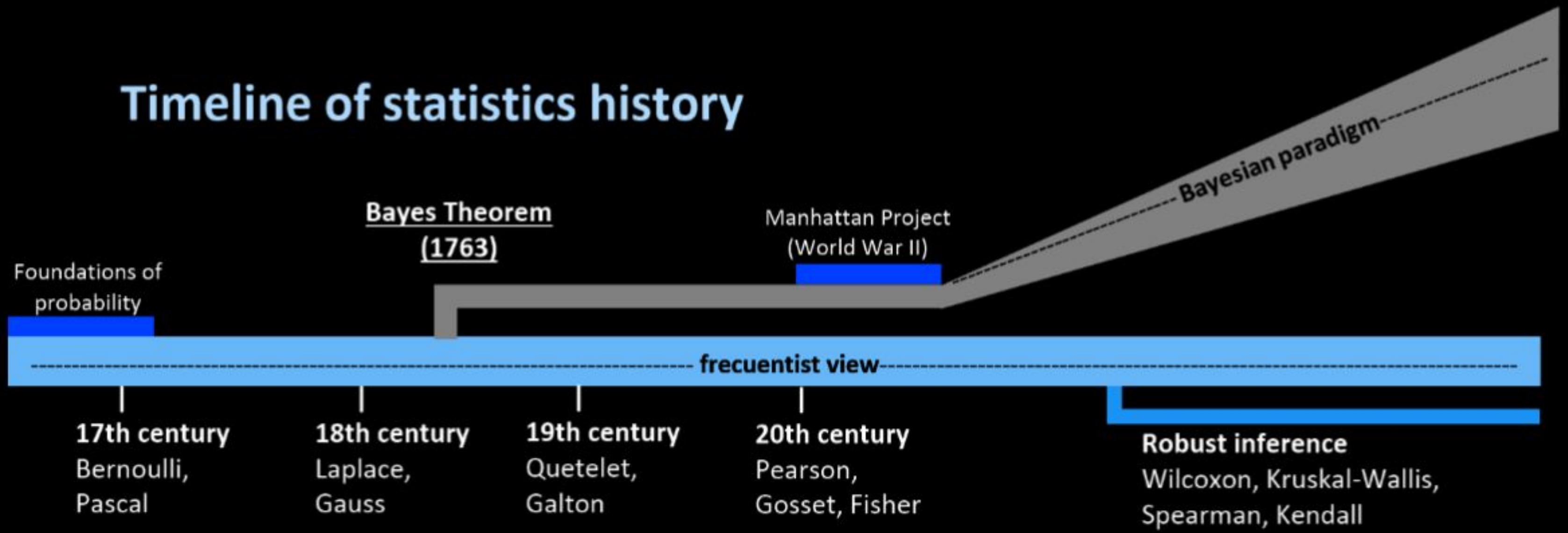
Estimación Bayesiana de modelos lineales

- La estimación Bayesiana no es simplemente un “método adicional o diferente” de estimación:
- El enfoque Bayesiano es un paradigma estadístico diferente.
- Epistemológicamente, un paradigma científico diferente.



Enfoque Bayesiano

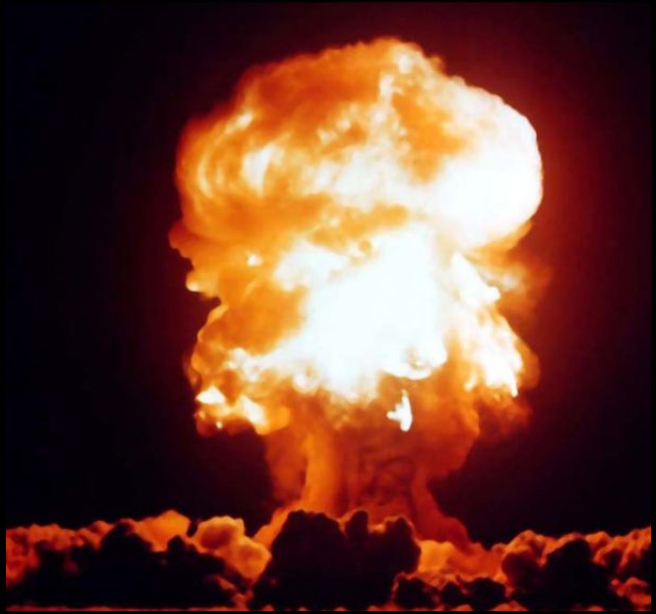
Antes de la segunda guerra mundial se utilizaban conjugados naturales



Enfoque Bayesiano

Antes de la segunda guerra mundial se utilizaban conjugados naturales

- Métodos de Monte Carlo —desarrollados durante el El Proyecto Manhattan— permitieron aproximar la integrales multidimensionales del análisis Bayesiano.
- El crecimiento exponencial del software y hardware computacional han hecho el uso de los métodos de integración de Monte Carlo más accesible.



Enfoque Bayesiano

La regla de Bayes surge de los axiomas de probabilidad y no es una materia de controversia.

La división trata sobre la interpretación filosófica de probabilidad P(A):

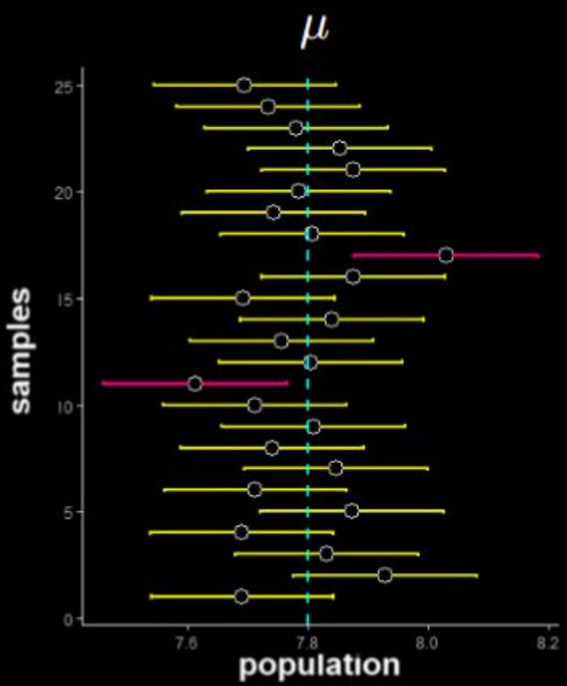
- Para un frecuentista, P(A) es una frecuencia de largo plazo:

$$\mathbb{P}(A) := \text{lím}_{n \to \infty_+} \frac{n_A}{n}$$

- Para un Bayesiano, P(A) es cualquier conocimiento/información sobre el evento A, además del contenido en los datos, incluyendo la incertidumbre sobre A.

Enfoque frecuentista:

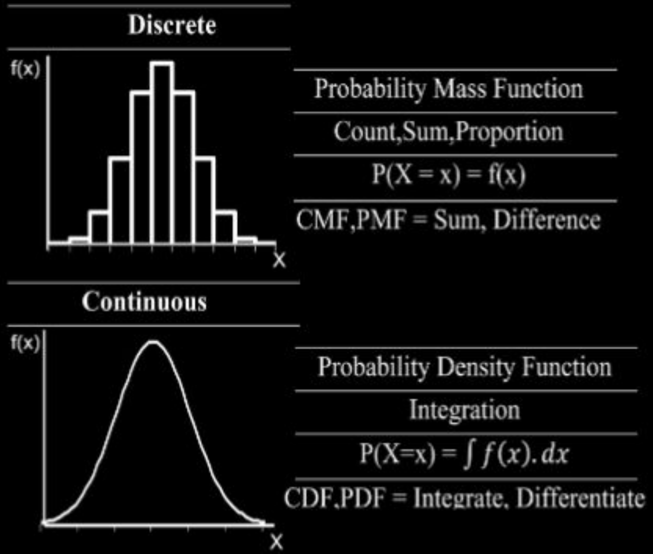
- Los datos son aleatorios
- Los parámetros son (puntos) fijos



Enfoque Bayesiano:

- Los datos son fijos
- Los parámetros son aleatorios

$$\mu \sim \mathcal{D}(\theta_1, \theta_2, ...\theta_d), \text{ e.g.}$$
$$\mu \sim \mathcal{N}(\theta_\mu, \sigma_\mu^2),\ \theta_\mu \sim \mathcal{E}(\lambda_{\theta_\mu})$$



Estimación Bayesiana de modelos lineales y modelos lineales no generalizados

- Basada en el teorema de Bayes
- Estimación con conjugados naturales
- Estimación con MCMC (Markov Chain Monte Carlo: Monte Carlo con Cadenas de Markov)
- Estimación MCMCMC (MC3)

Función de verosimilitud y teorema de Bayes

$$L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X}) = \prod_{i=1}^{n} p(\mathbf{X}|\boldsymbol{\theta})$$

$$\ell(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X}) = \log(L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X}))$$

$$\dot{\ell}(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X}) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}}\ell(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X})$$

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathcal{N}(\mathbf{0}, \Sigma_{\boldsymbol{\theta}})$$

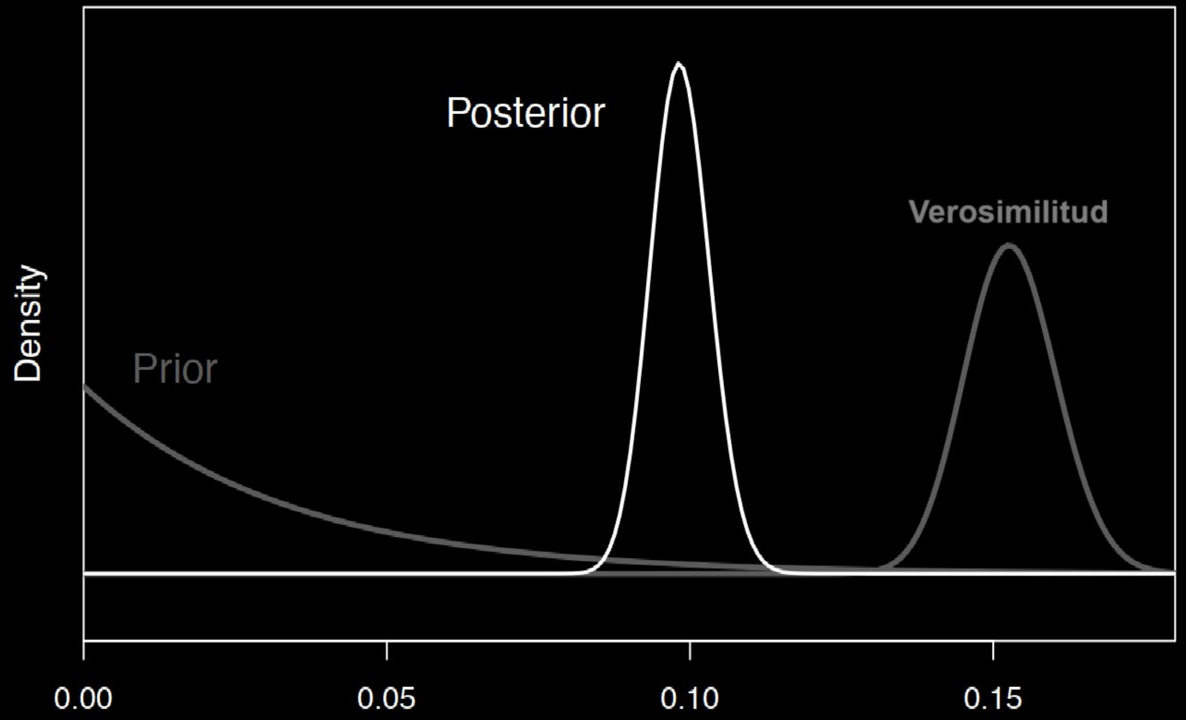
$$p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X}) = p(\mathbf{X}|\boldsymbol{\theta})\frac{p(\boldsymbol{\theta})}{p(\mathbf{X})}$$

$$\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X}) = \frac{p(\boldsymbol{\theta})L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X})}{p(\mathbf{X})}$$

$$\pi(\theta|\mathbf{X}) \propto p(\theta)L(\theta|\mathbf{X})$$

Probabilidad posterior ∝ Probabilidad prior × función de verosimilitud

Función de verosimilitud y teorema de Bayes



Probabilidad posterior $\propto$ Probabilidad prior $\times$ función de verosimilitud

Equivalencia asintótica entre los estimadores puntuales Bayesianos y los estimadores máximo verosímiles

Los estimadores bayesianos son asintóticamente equivalente a estimadores máximo verosímiles, si se emplean priors difusos (con varianza muy grande varianza) o uniformes (no informativos)

$$\sqrt{n}(\tilde{\theta} - \hat{\theta}) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

$$M(\theta) = \underset{\theta}{\operatorname{argmax}}\, \pi(\theta|\mathbf{D})$$

Sintetizando la distribución posterior

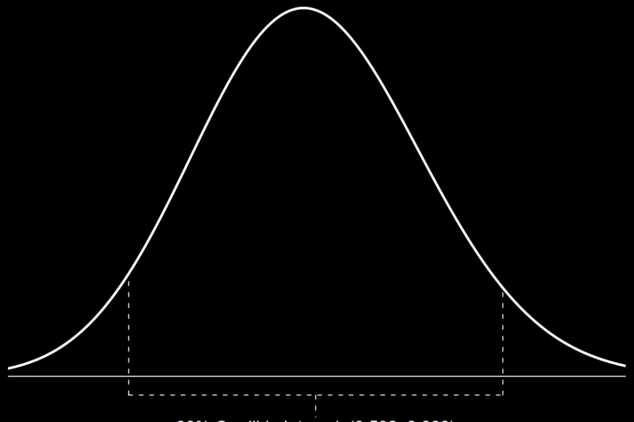
La media de la distribución posterior, intervalos de credibilidad y regiones de mayor densidad posterior (highest posterior density regions, HPD):

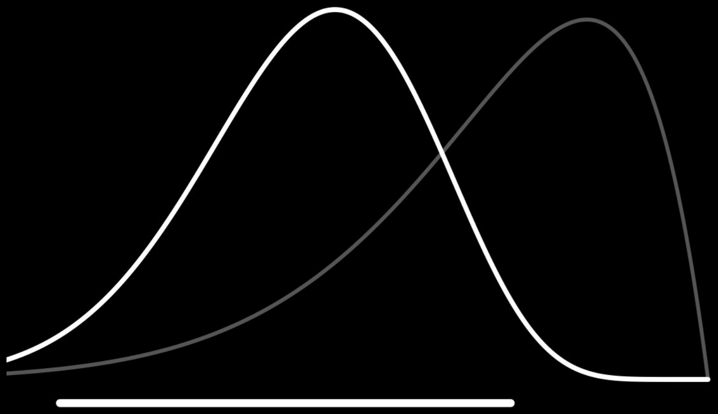
$$E[\theta|\mathbf{X}] = \int_{-\infty}^{\infty} \theta p(\theta|\mathbf{X}) d\theta$$

$$1 - \alpha = \int_C p(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X}) d\theta$$

$$1 - \alpha = \int_{\theta:\pi(\theta|\mathbf{x})>k} \pi(\theta|\mathbf{x}) d\theta$$

$$C = \{\theta : \pi(\theta|\mathbf{x}) \geq k\}$$





Ejemplo para una distribución exponencial

$$
\begin{aligned}
p(X|\theta) &= \theta e^{-\theta X} \\
p(\theta) &= 1/\theta \\
\pi(\theta|\mathbf{X}) \propto p(\theta)L(\theta|\mathbf{X}) &= \left(\frac{1}{\theta}\right)\theta^n \exp\left[-\theta\sum_{i=1}^{n} x_i\right] \\
&= \theta^{n-1}\exp\left[-\theta\sum_{i=1}^{n} x_i\right]
\end{aligned}
$$

$$\pi(\theta|\mathbf{X}) = \frac{\left(\sum x_i\right)^n}{\Gamma(n)}\theta^{n-1}\exp\left[-\theta\sum x_i\right]$$

$$\frac{\alpha}{2} = \int_0^L \pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X})d\theta \qquad \frac{\alpha}{2} = \int_H^\infty \pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X})d\theta$$

Ejemplo de estimación conjugada Beta-Binomial

$$\theta \sim \text{Beta}(\alpha, \beta) \qquad x \mid \theta \sim \text{Binomial}(n, \theta)$$

$$p(\theta \mid \sum_{i=1}^{n} x_i) \propto p(\sum_{i=1}^{n} x_i \mid \theta) \cdot p(\theta)$$

$$p(\theta \mid \sum_{i=1}^{n} x_i) \propto \theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i + \alpha - 1}(1-\theta)^{n - \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta - 1}$$

$$\theta \mid \sum_{i=1}^{n} x_i \sim \text{Beta}(\alpha + \sum_{i=1}^{n} x_i, \beta + n - \sum_{i=1}^{n} x_i)$$

Algoritmos Markov Chain Monte Carlo

Los algoritmos MCMC son métodos para generar una cadena de muestras de un espacio de parámetros que, después de un tiempo suficiente (conocido como el período de "quemado" o burn-in), se pueden considerar como muestras de la distribución de interés:

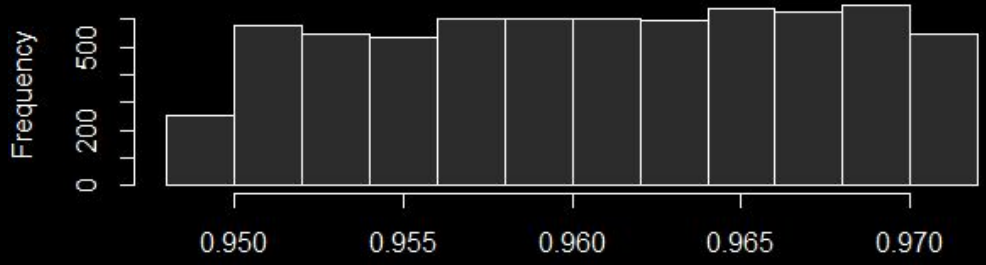
- Los algoritmos MCMC se basan en una cadena de Markov en la que la probabilidad de moverse a un nuevo estado depende solamente del estado actual y no de los estados anteriores
- La cadena de Markov se diseña de tal manera converge a una distribución de equilibrio o estacionaria.
- La cadena debe ser ergódica, lo que significa que debe ser posible alcanzar cualquier estado desde cualquier otro estado en un número finito de pasos, garantizando que las muestras eventualmente representen la distribución objetivo.

Algoritmos Markov Chain Monte Carlo

Integración de Monte Carlo:

$$I[e,\pi] = \int_e^{\pi} \arctan(\theta^{\frac{1}{3}})\mathcal{C}(\theta|\mu=3,\sigma=2))d\theta$$

$$\mathcal{C}(\theta|\mu,\sigma) = \frac{1}{\pi\sigma}\frac{1}{1+\left(\frac{\theta-\mu}{\sigma}\right)^2},\; -\infty < \theta,\mu < \infty, 0 < \sigma$$



Algoritmos Markov Chain Monte Carlo: Gibbs sampling

Gibbs Sampling es un algoritmo de MCMC (Markov Chain Monte Carlo) que se utiliza para generar muestras de una distribución conjunta cuando las distribuciones condicionales son conocidas y pueden ser muestreadas fácilmente

1. Inicializar $X_1^{(0)}, X_2^{(0)}, \ldots, X_n^{(0)}$ con algún valor.
2. Iterar para $t = 1, 2, \ldots, T$:
   - Muestrear $X_1^{(t)} \sim P(X_1 | X_2^{(t-1)}, X_3^{(t-1)}, \ldots, X_n^{(t-1)})$
   - Muestrear $X_2^{(t)} \sim P(X_2 | X_1^{(t)}, X_3^{(t-1)}, \ldots, X_n^{(t-1)})$
   - ...
   - Muestrear $X_n^{(t)} \sim P(X_n | X_1^{(t)}, X_2^{(t)}, \ldots, X_{n-1}^{(t)})$

Algoritmos Markov Chain Monte Carlo: Gibbs sampling

Con priors no informativos:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_p x_{ip} + \epsilon_i$$
$$\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$$

1. **Distribución condicional de β dado σ^2 y y, X:**

$$\beta|\sigma^2, y, X \sim N\left((X'X)^{-1}X'y, \sigma^2(X'X)^{-1}\right)$$

2. **Distribución condicional de σ^2 dado β y y, X:**

$$\sigma^2|\beta, y, X \sim \text{Inv-Gamma}\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}(y - X\beta)'(y - X\beta)\right)$$

Algoritmos Markov Chain Monte Carlo: Gibbs sampling

1. **Priors Informativos:**
   - Prior para β: $\beta \sim N(\mu_\beta, \Sigma_\beta)$
   - Prior para σ^2: $\sigma^2 \sim \text{Inv-Gamma}(\alpha_0, \beta_0)$

2. **Distribuciones Condicionales:**
   - **Condicional de β dado σ^2, y, y X:**

$$\beta|\sigma^2, y, X \sim N(\mu_{\beta|y}, \Sigma_{\beta|y})$$

$$\mu_{\beta|y} = \Sigma_{\beta|y} \left(\frac{1}{\sigma^2} X^T y + \Sigma_\beta^{-1} \mu_\beta \right)$$

$$\Sigma_{\beta|y} = \left(\frac{1}{\sigma^2} X^T X + \Sigma_\beta^{-1} \right)^{-1}$$

   - **Condicional de σ^2 dado β, y, y X:**

$$\sigma^2|\beta, y, X \sim \text{Inv-Gamma}\left(\alpha_n, \beta_n\right)$$

$$\alpha_n = \alpha_0 + \frac{n}{2}$$

$$\beta_n = \beta_0 + \frac{1}{2}(y - X\beta)^T (y - X\beta)$$

Algoritmos Markov Chain Monte Carlo: Metropolis

1. **Inicialización:** Escoger un valor inicial para θ, $\theta^{(0)}$.
2. **Propuesta:** Generar un valor propuesto θ^* desde una distribución de propuesta simétrica $q(\theta^*|\theta^{(t)})$, donde $\theta^{(t)}$ es el valor actual de la cadena. En el caso del algoritmo de Metropolis, se suele utilizar una distribución normal centrada en el valor actual: $\theta^* \sim N(\theta^{(t)}, \sigma^2)$
3. **Cálculo de la Probabilidad de Aceptación:** $\alpha = \min\left(1, \frac{\pi(\theta^*)}{\pi(\theta^{(t)})}\right)$

   Dado que la propuesta es simétrica, $q(\theta^*|\theta^{(t)}) = q(\theta^{(t)}|\theta^*)$, y estos términos se cancelan en la razón de aceptación.
4. **Aceptación o Rechazo:** Aceptar θ^* con probabilidad α:

$$\theta^{(t+1)} = \begin{cases} \theta^* & \text{con probabilidad } \alpha \\ \theta^{(t)} & \text{con probabilidad } 1-\alpha \end{cases}$$

5. **Iteración:** Repetir los pasos 2-4 por el número de iteraciones deseado.

Algoritmos Markov Chain Monte Carlo: Metropolis-Hastings

1. **Inicialización:** Escoger un valor inicial para θ, $\theta^{(0)}$.
2. **Propuesta:** Generar un valor propuesto θ^* desde una distribución de propuesta $q(\theta^*|\theta^{(t)})$, donde $\theta^{(t)}$ es el valor actual de la cadena.
3. **Cálculo de la Probabilidad de Aceptación:**

$$\alpha = \min\left(1, \frac{\pi(\theta^*)q(\theta^{(t)}|\theta^*)}{\pi(\theta^{(t)})q(\theta^*|\theta^{(t)})}\right)$$

$\pi(\theta)$ es la distribución objetivo.

$q(\theta^*|\theta^{(t)})$ es la distribución de propuesta

4. **Aceptación o Rechazo:** Aceptar θ^* con probabilidad α:

$$\theta^{(t+1)} = \begin{cases} \theta^* & \text{con probabilidad } \alpha \\ \theta^{(t)} & \text{con probabilidad } 1-\alpha \end{cases}$$

5. **Iteración:** Repetir los pasos 2-4 por el número de iteraciones deseado.

Estimación Bayesiana del MLRM

Con priors no informativos los estimadores Bayesianos coinciden con los estimadores máximo verosímiles:

$$\mathbb{P}(\beta) \propto c \text{ y } \mathbb{P}(\sigma^2) \propto \sigma^{-1}$$

$$\mathbb{P}(\beta, \sigma^2) \propto \mathcal{L}\left(\beta, \sigma^2 \middle| \mathbf{X}, \mathbf{y}\right) \mathbb{P}(\beta) \mathbb{P}(\sigma^2)$$

$$\propto \sigma^{-n-1} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\hat{\sigma}^2(n-k) + (\beta - \hat{\beta})' \mathbf{X}' \mathbf{X} (\beta - \hat{\beta})\right)\right]$$

Estimación Bayesiana del MLRM

Con priors informativos:

$$\beta \sim \mathcal{N}_k(\beta_0, B_0), \quad \sigma^2 \sim \mathcal{IG}(\alpha_0/2, \delta_0/2),$$

$$\beta|\sigma^2, y \sim \mathcal{N}(\overline{\beta}, B_1), \qquad \sigma^2|\beta, y \sim \mathcal{IG}(\alpha_1/2, \delta_1/2)$$

$$\begin{aligned} B_1 &= [s^{-2}X'X + B_0^{-1}]^{-1}, \\ \overline{\beta} &= B_1[\sigma^{-2}X'y + B_0^{-1}\beta_0], \\ \alpha_1 &= \alpha_0 + n, \\ \delta_1 &= \delta_0 + (y - X\beta)'(y - X\beta) \end{aligned}$$

Algoritmos Markov Chain Monte Carlo: Metropolis-Hastings para el modelo logit

1. **Inicialización**: Escoger un valor inicial para β.
2. **Propuesta**: Generar un valor propuesto β^* a partir de una distribución propuesta $q(\beta^*|\beta)$.
3. **Cálculo de la Probabilidad de Aceptación**:
   $\alpha = \min\left(1, \frac{L(\beta^*|X,y)\pi(\beta^*)q(\beta|\beta^*)}{L(\beta|X,y)\pi(\beta)q(\beta^*|\beta)}\right)$
   donde $\pi(\beta)$ es la distribución a priori de β (puede ser no informativa).
4. **Aceptación o Rechazo**: Aceptar β^* con probabilidad α, de lo contrario, mantener el valor actual de β.
5. **Iteración**: Repetir los pasos 2-4 por el número de iteraciones deseado.

$$P(y_i = 1|X_i, \beta) = \frac{1}{1+\exp(-X_i\beta)}$$

$$\text{logit}(P(y_i = 1|X_i, \beta)) = X_i\beta$$

$$L(\beta|X, y) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{1+\exp(-X_i\beta)}\right)^{y_i} \left(1 - \frac{1}{1+\exp(-X_i\beta)}\right)^{1-y_i}$$

El modelo logit en el contexto de credit scoring

En el contexto de credit scoring, es usual estimar los modelos logit transformando las variables explicativas a WOE:

$$WoE_{x=i} = \ln\left(\frac{\%\ of\ y = 0\ where\ x = i}{\%\ of\ y = 1\ where\ x = i}\right)$$

Los valores de WOE proporcionan una escala logarítmica que ayuda a interpretar la fuerza y la dirección de la relación entre las categorías de la variable predictora y la probabilidad del evento objetivo.

- **Valores Positivos de WOE**: la categoría tiene una mayor proporción de no defaults que defaults (menos riesgo).
- **Valores Negativos de WOE**: la categoría tiene una mayor proporción de defaults que no defaults (más riesgo).

Modelo logistico aplicado a credit scoring

data

modelling

scorecard

Data available for all years (2018-2020):

- Default status
- Payment behavior/ranking
- Type of business
- Business address
- Amount requested/approved
- Loan count
- Daily fix/loan duration
- Dates (start/end/completed)
- Phone number

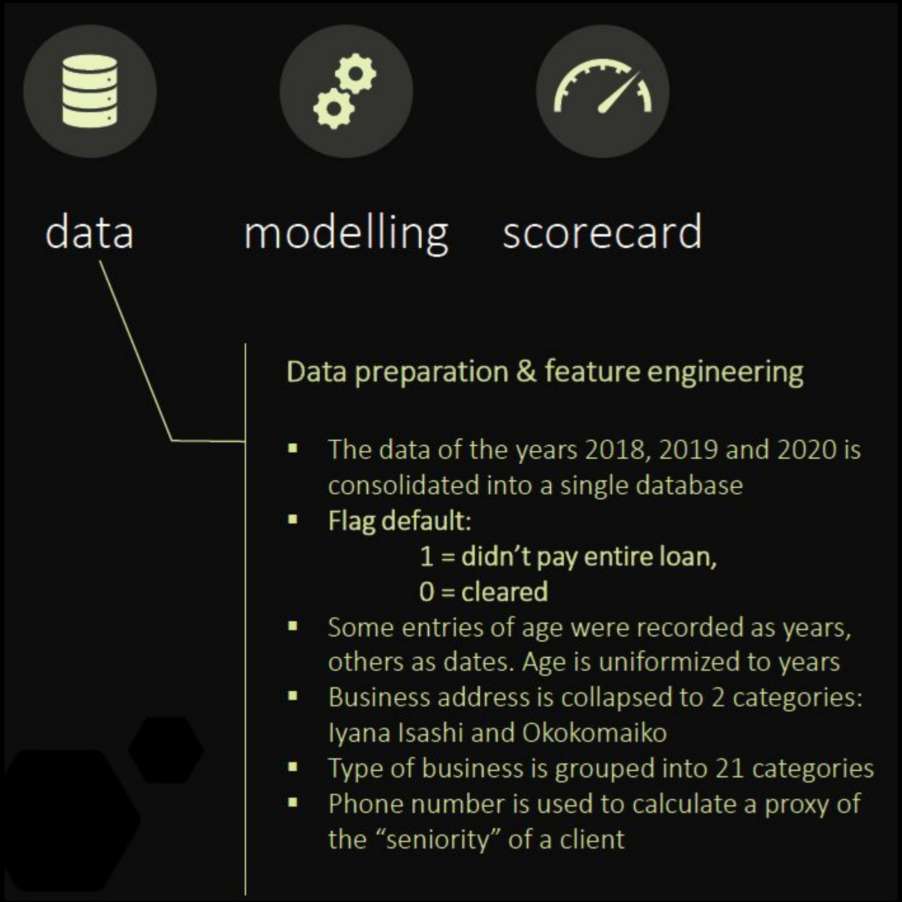
Data not available for all years (2018-2020):

- Age
- Due diligence
- Agent fee
- Number of years in business
- House address
- Preferred ID
- Bank name
- Guarantor address
- Guarantor type of business

Age: 39% missing records

Number of years in business: 87% missing records

Modelo logistico aplicado a credit scoring



Modelo logistico aplicado a credit scoring

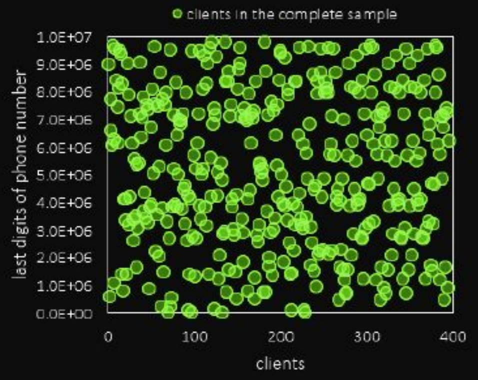
data

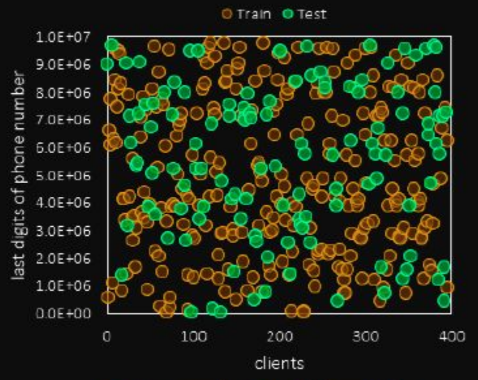
modelling

scorecard

Stratified sampling is used to split the data in train and test samples

- Tentative models are estimated in the train sample
- The best models of the train sample are evaluated in the test sample





Train sample: 70% of records

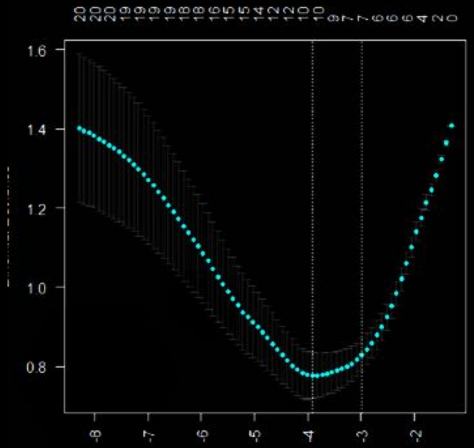
Test sample: 30% of records

Modelo logistico aplicado a credit scoring

data

modelling

scorecard



Feature selection in the train sample is performed with AUC and machine-learning

Variable	Description	AUC rank	Tree-based (Random Forests)			Elastic nets			Average
			Boruta	XtraTrees	XGBoost	Ridge	Elastic	Lasso	
tbuss_ant	Business group x seniority	1	2	2	2	20	10	10	3.86
tbus_busad	Business group x business address	5	1	1	1	10	1	1	3.93
age_tbuss	Age x business group	2	3	5	7	19	9	9	4.86
age	Age	3	4	17	4	14	6	4	5.21
bussgroup	Business group	4	9	4	8	16	7	7	5.93
gender_age	Gender x age	6	7	9	15	9	2	2	6.57
duration	Loan duration	7	11	6	10	17	8	8	8.29
age_busad	Age x business address	8	5	12	9	12	3	11	8.29
dailyfix	Daily fix	9	10	8	5	15	5	5	8.57
gender_tbuss	Gender x business group	10	6	7	3	4	11	11	8.71
age_ant	Age x seniority	11	8	10	14	3	11	11	10.36
gender_ant	Gender x seniority	12	18	15	6	8	11	11	11.79
month	Month	13	16	18	11	13	4	3	12.07
amountapp	Loan amount	14	13	14	13	2	11	11	12.57
antproxph	Seniority	15	14	13	16	7	11	11	13.71
gender	Gender	17	20	11	18	1	11	6	14.50
gender_busad	Gender x business address	16	19	19	18	11	11	11	15.50
loancount	Loan count	20	17	3	12	5	11	11	15.64
busad_ant	Business address x seniority	19	15	16	17	6	11	11	16.29
bussaddress	Business address	18	12	20	18	18	11	11	16.71

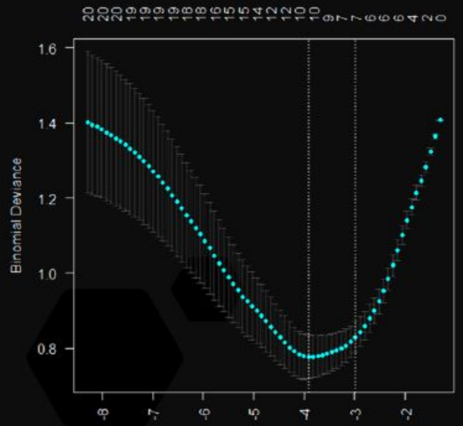
Modelo logistico aplicado a credit scoring

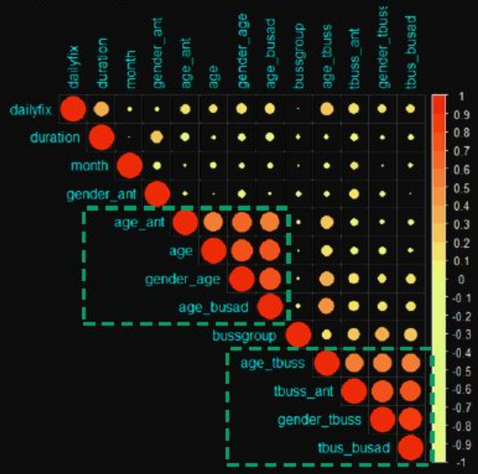
data

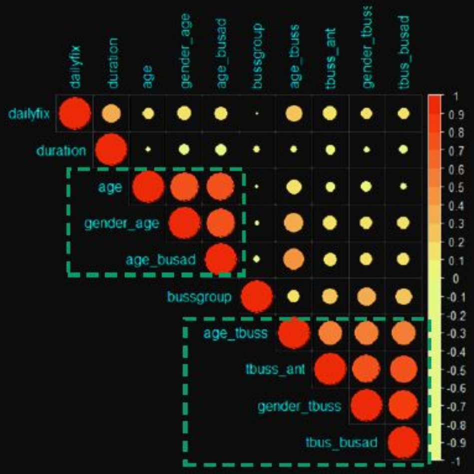
modelling

scorecard

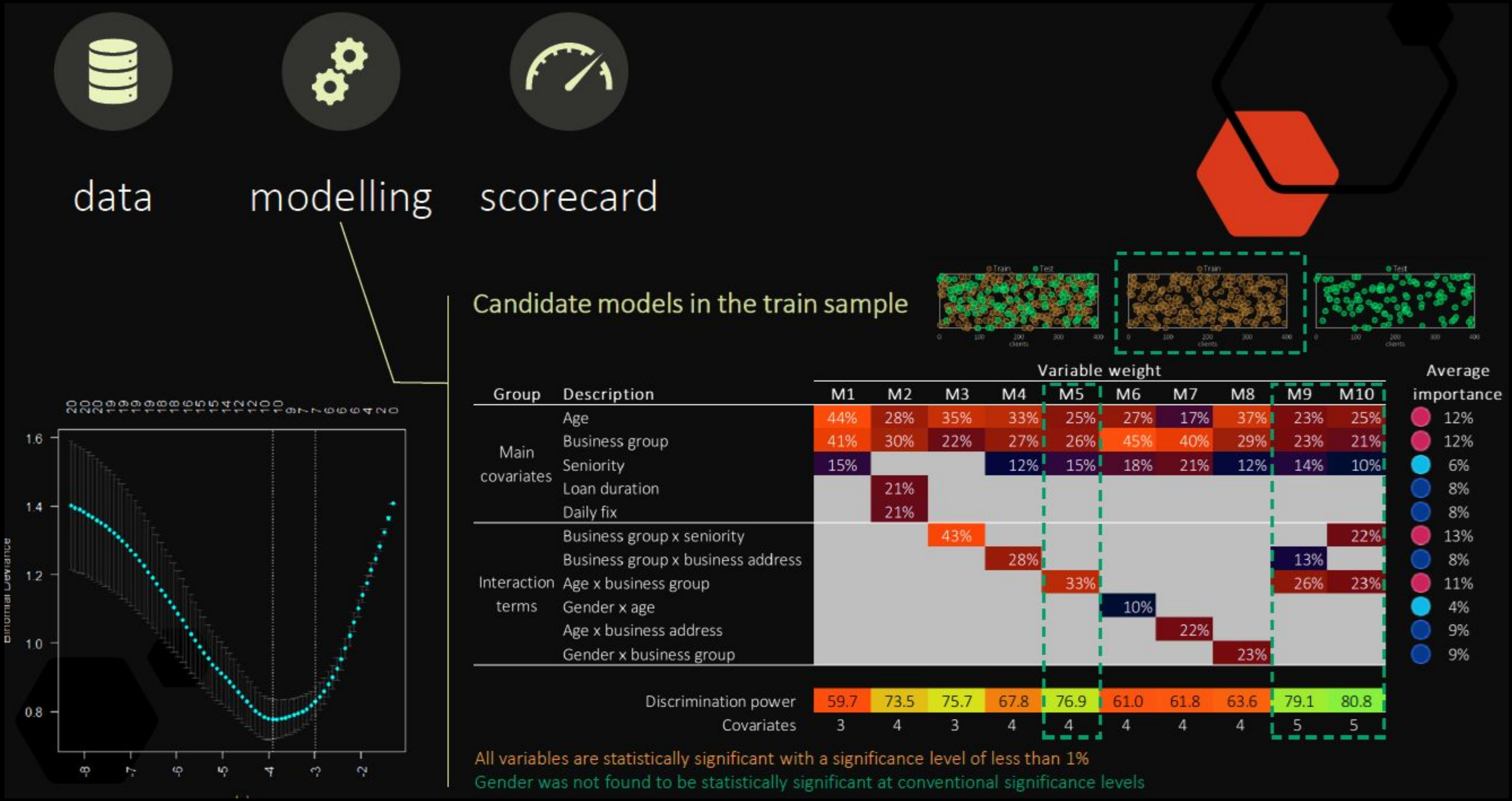
Candidate models in the train sample are estimated with the (quasi-)orthogonal sub-set of best variables







Modelo logistico aplicado a credit scoring



Group	Description	M1	M2	M3	M4	M5	M6	M7	M8	M9	M10	Average importance
Main covariates	Age	44%	28%	35%	33%	25%	27%	17%	37%	23%	25%	12%
	Business group	41%	30%	22%	27%	26%	45%	40%	29%	23%	21%	12%
	Seniority	15%			12%	15%	18%	21%	12%	14%	10%	6%
	Loan duration		21%									8%
	Daily fix		21%									8%
Interaction terms	Business group x seniority			43%							22%	13%
	Business group x business address				28%					13%		8%
	Age x business group					33%				26%	23%	11%
	Gender x age						10%					4%
	Age x business address							22%				9%
	Gender x business group								23%			9%
	Discrimination power	59.7	73.5	75.7	67.8	76.9	61.0	61.8	63.6	79.1	80.8	
	Covariates	3	4	3	4	4	4	4	4	5	5	

All variables are statistically significant with a significance level of less than 1%

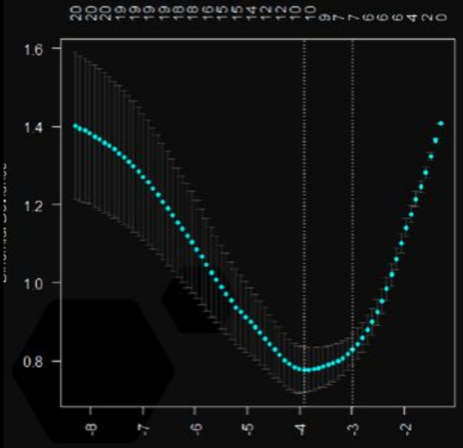
Gender was not found to be statistically significant at conventional significance levels

Modelo logistico aplicado a credit scoring

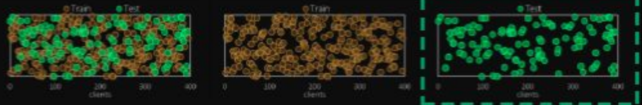
data

modelling

scorecard



Candidate models in the test sample



The model chosen wit the team of Ajo card were evaluated with the test sample:

- Models M5 and M9 lost their discrimination power
- The interaction term age x type of business is not statistically significant

The results suggest to choose model M10 without the interaction term of age x type of business:

Group	Description	Variable weight M5	Variable weight M9	Variable weight M10	Average importance
Main covariates	Age	21%	21%	14%	13%
	Business group	25%	18%	13%	13%
	Seniority	43%	42%	35%	28%
Interaction terms	Business group x seniority			38%	28%
	Business group x business address		17%		12%
	Age x business group	12%	2%		5%
	Discrimination power	52.0	53.9	64.2	
	Covariates	4	5	4	

Conversión de resultados del modelo logit a scores crediticios

El resultado de la estimación $X\beta$ del modelo logit se transforma a scores crediticios con la fórmula:

$$\text{Scores} = \text{offset} + \text{factor} \times (-X\beta)$$

Con odds (momios) de 50:1 es decir, 50 créditos de no default por un default, y se doblan dichos momios cada 20 puntos del score, el offset y el factor son iguales a 600 y 20, respectivamente.

Vease: Siddiqi, N. (2017). Intelligent credit scoring: Building and implementing better credit risk scorecards. John Wiley & Sons.

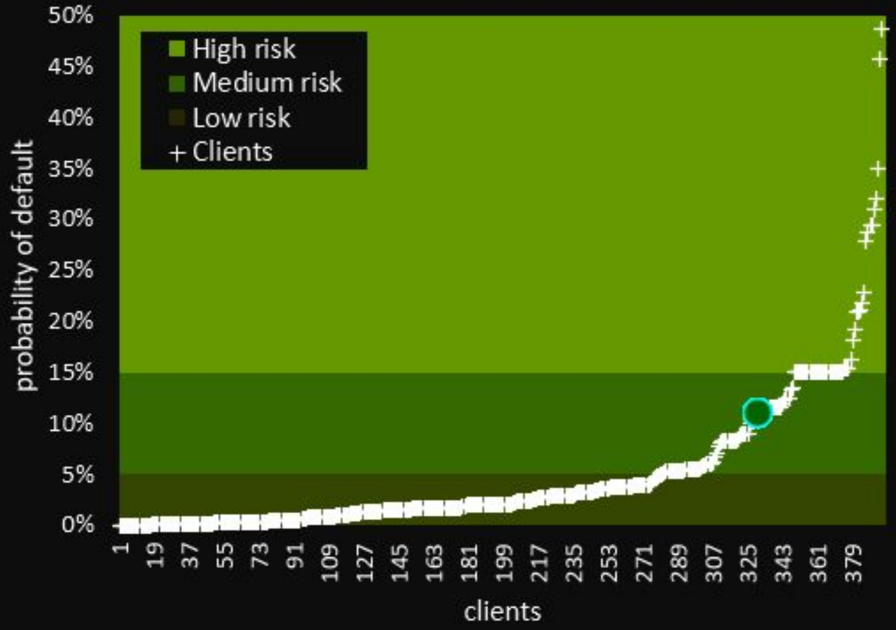
Conversión de resultados del modelo logit a scores crediticios

Score AjoCard

	Variable	Categories
1	Age (years)	53
2	Type of business	tailoring
3	Seniority	2

Score	147
Risk	High risk

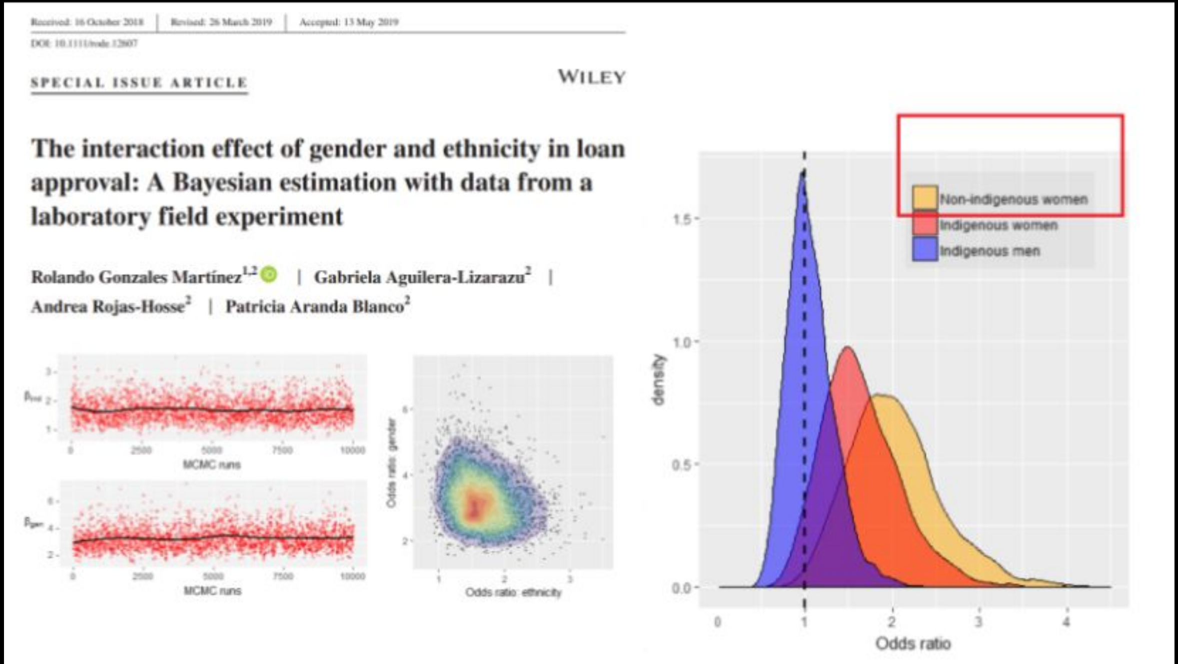
Score	
171 and higher	Low risk
138 to 170	Medium risk
137 or lower	High risk



Laboratorio

- **MLMLG_400:** Estimación con conjugados naturales Beta-Binomial e intervalos de credibilidad
- **MLMLG_401:** Integración de Monte Carlo de una distribución Cauchy
- **MLMLG_402:** Estimación MCMC con Gibbs Sampling del modelo lineal
- **MLMLG_403:** Estimación MCMC con el algoritmo de Metropolis de modelos lineales generalizados: modelo logit
- **MLMLG_404:** Estimación MCMC con el algoritmo Metropolis-Hastings de modelos lineales generalizados: modelo logit
- **MLMLG_405:** Estimación MCMC de un modelo logit aplicado a credit scoring

Ejemplo adicional de aplicación de métodos Bayesianos en MLG



https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/rode.12607

Experimento de laboratorio-campo y modelo Bayesiano logit mixto

Discriminacion estadistica o discriminacion basada en preferencias (taste-based discrimination).

$$y_{i(h)} \left| \mathbf{x}_{i(h)} \sim (y_{i(h)} \left| \mathbf{x}_{i(h)} \right.), \right. \quad y \in \{0,1\}; \quad i = 1, \ldots, n_h$$

$$(y_{i(h)} \left| \mathbf{x}_{i(h)} \right.) = F\left(\mathbf{x}_{i(h)}^{\mathrm{T}} \beta_{N_h}\right)^{y} \left[1 - F\left(\mathbf{x}_{i(h)}^{\mathrm{T}} \beta_{N_h}\right)\right]^{y-1}$$

$$F\left|\left(\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \beta\right) = P\left(Y = 1 \left| \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \beta \right. \right) = \frac{\exp(\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \beta)}{1 + \exp(\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \beta)}\right.$$

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \beta_{N_h} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \beta + u_{0h}$$

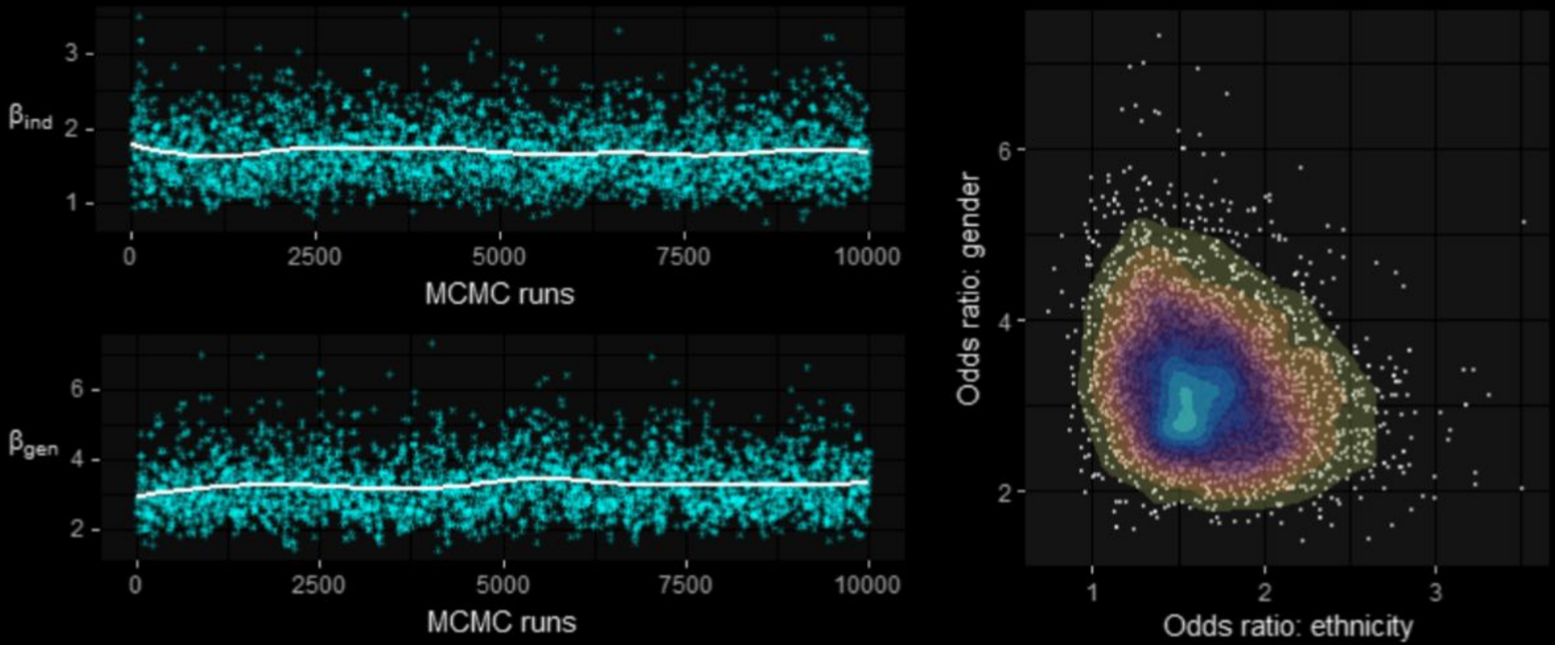
$$\beta_k \sim N\left(0, \upsilon_{\beta_k}\right), \quad k = 1, \ldots, p$$

$$u_{0h} \left| \tau_0 \sim N\left(0, \tau_0\right), \right. \quad h = 1, \ldots, N_h$$

$$\tau_0 \sim IG\left(\nu_0, \nu 1\right)$$

Experimento de laboratorio-campo y modelo Bayesiano logit mixto

Estimadores para sexo y etnicidad



Experimento de laboratorio-campo y modelo Bayesiano logit mixto

Diferencias entre mujeres no indígenas y mujeres indígenas