



Politechnika Wrocławska

Wydział Matematyki

Kierunek studiów: Matematyka Stosowana

Specjalność: –

Praca dyplomowa – inżynierska

ANALIZA STATYSTYCZNA CZASÓW NA WYKONYWANIE RUCHÓW W SZACHACH

Piotr Rogula

słowa kluczowe:
analiza statystyczna, szachy, korelacja, sta-
tystyka, probabilistyka, błędy szachowe

krótkie streszczenie:

W pracy przedstawiona zostanie analiza zależności między czasami wykonania poszczególnych posunięć w szachach, ich numerem oraz jakością, biorąc jako miarę zgodność z silnikiem szachowym. Analiza statystyczna zostanie wykonana ze szczególnym uwzględnieniem różnic wynikających z poziomu rankingowego graczy oraz formatu czasowego poszczególnych partii.

Opiekun pracy dyplomowej	Prof. dr hab. inż. Marcin Magdziarz
	Tytuł/stopień naukowy/imię i nazwisko	ocena	podpis

*Do celów archiwalnych pracę dyplomową zakwalifikowano do:**

a) kategorii A (akta wieczyste)

b) kategorii BE 50 (po 50 latach podlegające ekspertyzie)

** niepotrzebne skreślić*

pieczęćka wydziałowa

Wrocław, rok 2021



Wrocław University
of Science and Technology

Faculty of Pure and Applied Mathematics

Field of study: Applied Mathematics

Specialty: –

Engineering Thesis

STATISTICAL ANALYSIS OF TIMES FOR MAKING MOVES IN CHESS

Piotr Rogula

keywords:

statistical analysis, chess, correlation, statistics, probabilistics, chess blunder

short summary:

The paper presents an analysis of the relationship between the times of taking individual chess moves, their number and quality, taking as a measure compliance with the chess engine. Statistical analysis will be performed with particular emphasis on the differences resulting from the rankin level of players and the time format of individual games.

Supervisor	Prof. dr hab. inż. Marcin Magdziarz
	Title/degree/name and surname	grade	signature

*For the purposes of archival thesis qualified to:**

a) category A (perpetual files)

b) category BE 50 (subject to expertise after 50 years)

** delete as appropriate*

stamp of the faculty

Wrocław, 2021

Spis treści

Wstęp	3
1 Zagadnienia teoretyczne dotyczące gry w szachy	5
1.1 Zasady gry w szachy	5
1.2 OPISAĆ NOTACJĘ szachową???? - nie będę w sumie nic z nią robić, ale jest	6
1.3 System rankingowy Glicko-2	6
1.4 Funkcja oceny	6
1.4.1 Stockfish	6
1.4.2 Ewaluacja	7
1.4.3 rodzaje błędów szachowych	7
2 Zagadnienia teoretyczne dotyczące analizy statystycznej	9
2.1 rozkład lognormalny	9
2.2 metoda najmniejszych kwadratów	9
2.3 metoda momentów	9
2.4 prosta regresji??	9
3 sformułowanie i rozwiązanie problemów analitycznych	11
3.1 sformułowanie problemów	11
3.2 Dane	11
3.2.1 Odfiltrowanie danych	13
3.3 Analiza problemu	14
3.3.1 Wstępny przegląd danych	14
3.3.2 Zależność między indeksem ruchu, a poświęconym czasem	15
3.3.3 zależność między czasem poświęconym na ruch, a jego oceną	21
4 wnioski, podsumowanie	27
5 Definicje, lematy, twierdzenia, przykłady i wnioski	29

Wstęp

We wstępie zapowiadamy, o czym będzie praca. Próbujemy zachęcić czytelnika do dalszej lektury, np. krótko informując, dlaczego wybraliśmy właśnie ten temat i co nas w nim zainteresowało.

Wraz z rozwojem technologii komputerowej, rozpoczęła się nowa era szachów. Technologia korzystając z dużej mocy obliczeniowej, bezpowrotnie wyprzedziła człowieka w grach deterministycznych, do których zaliczają się szachy. Profesjonalni szachiści zaczęli wykorzystywać nowe strategie korzystając z coraz lepszych silników szachowych. Silniki te oceniają wprowadzoną pozycję pod kątem przewagi jednej ze stron.

W dobie internetu gra w szachy stała się dużo wygodniejsza i znacznie przystępniejsza niż przed laty. Ludzie grają w różnych miejscach i praktycznie o każdej porze. W związku z tym większą popularnością zaczęły cieszyć się szachy szybkie, czyli takie, w których każdy z zawodników ma relatywnie mało czasu na wykonanie wszystkich ruchów. Wiąże się to ze znacznie większym znaczeniem zarządzania czasem w trakcie gry. Za każdym razem zawodnik musi ustalić równowagę pomiędzy dokładnością posunięcia, a czasem, który jest w stanie na nie poświęcić.

Przedmiotem badań tej pracy jest analiza zależności między dokładnością posunięcia, czasem na niego poświęconym oraz jego numerem. Rozważania zostaną podzielone ze względu na poziom umiejętności zawodników w danej partii oraz jej format czasowy. Dodatkowo przedstawiona będzie konfrontacja wyników statystycznych poszczególnych grup, by móc ustalić wiodące trendy wynikające ze wzrostu punktów rankingowych zawodnika oraz wydłużania, bądź skracania formatu czasowego.

W PIERWSZEJ CZĘŚCI - ZAGADNIENIA TEORETYCZNE DOTYCZĄCE SZACHÓW

W pierwszej części pracy przedstawione i dość obszernie wyjaśnione zostaną podstawowe zagadnienia teoretyczne związane z grą w szachy, systemami rankingowymi i silnikami szachowymi. Przedstawione zostaną zasady gry w szachy ze szczególnym uwzględnieniem konkretnych elementów, których niewiedza nie pozwoliłaby na pełne przyswojenie przedstawionej w tej pracy analizy.

W następnym kroku opisany zostanie system *Elo*, a także wzorujący się na nim system *Glicko-2*, który używany jest do przypisania rankingu każdemu z graczy znajdujących się w bazie danych używanej do analiz. Ostatnim elementem będzie przedstawienie silnika szachowego *Stockfish* i jego wkładu w - kluczową dla analizy statystycznej - funkcję oceny posunięcia.

W DRUGIEJ CZĘŚCI ZAGADNIENIA TEORETYCZNE ZE STATYSTYKI I METODOLOGII

Kolejna część pracy opowiada o zagadnieniach teoretycznych z dziedziny statystyki, zastosowanych w analizie przedstawionych problemów.

PÓŹNIEJ DOKŁADNE SFORMUOWANIE PROBLEMU

Główna część pracy składać się będzie z trzech części. W pierwszej z nich odnaleźć będzie

można dokładne sformułowanie problemów, które są przedmiotem badań niniejszej pracy. Następnie uwidocznione zostaną dane, na których bazuje późniejsza analiza. **COŚ O**

DANYCH JESZCZE

DOKŁADNE ROZWIĄZANIE PROBLEMU

a później rozwiązanie...

WNIOSKI, PODSUMOWANIE

W końcowej części pracy [...] podsumowanie, wnioski...

Rozdział 1

Zagadnienia teoretyczne dotyczące gry w szachy

Niniejszy rozdział poświęcony zostanie zagadnieniom teoretycznym dotyczącym szachów, używanych systemów rankingowych oraz działaniu silników szachowych.

1.1 Zasady gry w szachy

Początki szachów nie są znane, jednak ich historia trwa już ok. 1500 lat i zaczyna się w Indiach. Na przestrzeni wieków zasady gry w szachy były wielokrotnie zmieniane. Powszechnie stosowane przepisy pochodzą z roku 1851.

krótko na czym polegają szachy i cite gdzie można znaleźć pełne przepisy, isbn:002028540X

Gra odbywa się na kwadratowej planszy o wymiarach 8 na 8 pól. Każdy gracz posiada 16 figur, ustawionych w pozycji startowej i stojących po przeciwnych stronach szachownicy. Zawodnicy wykonują na przemian ruchy dowolną ze swoich figur, zgodnie z jej zasadami poruszania się. W trakcie tury zawodnikowi upływa czas ustalony przed grą. W niektórych wariantach gracz otrzymuje też niewielką ilość czasu za wykonanie każdego ruchu.

Wygrana następuje, gdy król jednego z graczy jest atakowany i nie można w legalny sposób nim ruszyć, ani zasłonić jedną ze swoich figur przed atakiem. Pozycję taką nazywa się „matem”. Drugim sposobem na wygraną jest skończenie się czasu jednego z graczy, niezależnie od sytuacji na szachownicy. Gra może też zakończyć się remisem. Następuje on, gdy żaden z graczy nie ma na planszy figur, które mogą pozwolić na „zamatowanie” przeciwnika. Inną możliwością jest trzykrotne powtórzenie się na planszy tej samej pozycji. Do remisu doprowadza też sytuacja, w której jednemu z graczy zakończył się czas, a jego przeciwnik nie ma figur pozwalających na wygraną lub gdy jeden z graczy nie ma możliwości wykonania żadnego legalnego ruchu, a jego król nie jest atakowany.

W związku z możliwością przegranej poprzez upływanie czasu na zegarze, zawodnicy muszą indywidualnie określić podczas gry, ile czasu są w stanie poświęcić danemu ruchowi, tak by nie stracić na niego zbyt wiele czasu, ale też, żeby ruch był jak najlepszy, co jest przedmiotem badań niniejszej pracy.

1.2 OPISAĆ NOTACJĘ szachową????? - nie będę w sumie nic z nią robić, ale jest

1.3 System rankingowy Glicko-2

opisać ogólnie trochę historii o systemach rankingowych? System rankingowy ELO - pierwowzór systemu Glicko-2, został zaprezentowany w latach pięćdziesiątych dwudziestego wieku przez Węgierskiego fizyka i szachistę Arpada Elo (1903-1992) [5, **rozdział 1**]. Początkowo był używany jedynie w szachach, jednak wraz ze wzrostem jego popularności zaczął być stosowany również w innych rozgrywkach z możliwością pomiaru poziomu zawodników. System ten jest pierwszym systemem mającym podłoże probabilistyczne i jest oparty na rozkładzie normalnym z ustaloną średnią. Przyznaje odpowiednią liczbę punktów zwycięzcy rozgrywki i odbiera przegranemu bazując na różnicy między ich aktualnym rankingiem.

System Glicko-2 używany przez stronę **Lichess.com**, na danych której oparta jest niniejsza praca, opracowany został przez Marka Glickmana jako ulepszenie systemu ELO. Podstawową zmianą jest uwzględnienie historycznych wyników każdego z zawodników w celu ustalenia wariancji aktualnego rankingu. Glickman w swojej pracy z roku 1999 [6] przedstawia problem dwóch graczy o takim samym rankingu, z których jeden gra regularnie, a drugi wrócił do gry po długiej przerwie. System Glicko-2 przyznając punkt za grę bierze pod uwagę wiarygodność każdego z rankingów. Zawodnikowi grającemu regularnie zostanie przyznane bądź odebrane mniej punktów ze względu na duże potencjalne odchylenie rankingu przeciwnika od zadeklarowanej wartości. Innymi słowy, w miarę zwiększania się liczby partii gracza, przedział ufności dla jego realnego rankingu zawęża się i przypisany mu ranking zbiega do realnego poziomu i wiarygodność przypisanego rankingu jest uwzględniana w przyznawaniu i odbieraniu punktów zawodnikom po zakończeniu partii.

WRZUCIĆ MATEMATYKĘ STOJĄCĄ ZA GLICKO-2???? x

Tutaj jakiś wykresik może jak wygląda rozkład rankingu zawodników na platformie Lichess ???

1.4 Funkcja oceny

Przed przystąpieniem do opisanie funkcji, należy wytłumaczyć działanie silnika szachowego, który dokonuje oceny pozycji.

1.4.1 Stockfish

Stockfish [3] jest jednym z najlepszych i najpopularniejszym obecnie używanym silnikiem szachowym, którego zaprojektowali Joost VandeVondele, Joon Kiiski, Marco Costalb, Tord Romstad, Gary Linscott, Stefan Geschwentner i Stéphane Nicolet i stale ulepszany jako oprogramowanie typu open-source. Strona **Lichess.com**, tak jak większość stron internetowych poświęconych szachom on-line, wykorzystuje go [1] do analizy i oceny aktualnej pozycji.

Stockfish poprzez przeszukiwanie według strategii mini-max [cite: E. Vilkas, *Axiomatic definition of the value of a matrix game*"Theory Probabl. Appl. , 8 (1963) pp. 304–307 Teor. Veroyatnost. i Primenen. , 8 : 3 (1963) pp. 324–327

MR0154750 Zbl 0279.90044] z odcięciem, za pomocą algorytmu alfa-beta [cite], analizuje legalne (czyli następujące po ruchu zgodnym z zasadami gry) pozycje, które mogą wyniknąć z aktualnej sytuacji na szachownicy. Dobierają na podstawie najlepszego możliwego zestawu ruchów (zakłada się, że każdy z graczy wykona najlepszy w ocenie silnika ruch) pozycje, które wystąpią dla określonej głębokości (głębokość 18 oznacza 18 ruchów białych i 18 czarnych wykonanych zaczynając z analizowanej pozycji) i na ich podstawie ocenia aktualną pozycję, określając przewagę jednego z graczy

1.4.2 Ewaluacja

Wspomniana wcześniej ewaluacja, wyliczana przez silnik szachowy jest wynikiem liniowej funkcji ważonej sumy cech, na którą składają się między innymi:

f_b, f_c oznaczających wartość figur odpowiednio białych i czarnych

k_b, k_c oznaczających bezpieczeństwo króla odpowiednio białych i czarnych

m_b, m_c oznaczających mobilność figur odpowiednio białych i czarnych

z_b, z_c oznaczających potencjalne zagrożenia wykonane odpowiednio białych i czarnych

Funkcję można dla zapewnienia intuicji zapisać w uproszeniu:

$$f(f_b, f_c, k_b, k_c, m_b, m_c, \dots) = c_1(f_b - f_c) + c_2(k_b - k_c) + c_3(m_b - m_c) + \dots \quad (1.1)$$

gdzie: c_i są stałymi określającymi wagę danej pary zmiennych.

Wraz ze wzrostem wartości funkcji zwiększa się przewaga białych, natomiast wraz z jej spadkiem, przewaga czarnych. Wartość wynosząca 0 oznacza stan równowagi, czyli sytuacji, w której żadna ze stron nie ma przewagi lub gracz z gorszą sytuacją na szachownicy jest w stanie przy odpowiedniej kombinacji ruchów doprowadzić do remisu. Dodatkowo, w przypadku nieuniknionego zwycięstwa jednej ze stron w n ruchach, wynikiem funkcji zamiast odpowiedniej wartości liczbowej jest tekst $\#-n$ w przypadku wygranej czarnych lub $\#n$ w przypadku wygranej białych, oznaczający nieuchronną wygraną jednego z graczy po wykonaniu n ruchów, przy najlepszej obronie przeciwnika.

1.4.3 rodzaje błędów szachowych

W notacji szachowej obok zapisanego ruchu mogą pojawić się symbole określające jakość danego ruchu. Dla analizowanych danych, ruch oceniany jest przez silnik szachowy za pomocą skomplikowanych algorytmów, których głównym składnikiem jest zmiana oceny pozycji na szachownicy przez silnik. Przykładowo, gdy przed ruchem czarnych ocena pozycji wynosiła -2, a po ruchu 3, silnik oceni ruch jako błąd, jednakże jeśli wcześniejsza ocena wynosiła -18, a po ruchu -13, silnik nie oznaczy ruchu jako błędny, ponieważ przewaga czarnych i tak jest bardzo znacząca.

Wśród licznych oznaczeń silnika, w pracy analizowane będą następujące oznaczenia[4]:

- ?? – błąd (ang. *blunder*)
- ? – pomyłka (ang. *mistake*), posunięcie błędne w mniejszym stopniu niż „błąd”
- ?! – niedokładność (ang. *innacuracy*), posunięcie, które można zastąpić zdecydowanie lepszym.

W części pracy na wykresach pojawiać się będzie oznaczenie „duży błąd”. Ma ono służyć lepszemu rozróżnieniu ruchów oznaczonych jako „błąd” i „pomyłka”

Rozdział 2

Zagadnienia teoretyczne dotyczące analizy statystycznej

Niniejszy rozdział poświęcony zostanie zagadnieniom teoretycznym z dziedziny statystyki, zastosowanych w analizie przedstawionych problemów.

2.1 rozkład lognormalny

x

2.2 metoda najmniejszych kwadratów

x

2.3 metoda momentów

x

2.4 prosta regresji???

W szczególności: wyznaczenie paramentów rozkładu log-normalnego za pomocą metody momentów: (podać same wyniki) [7] [cite Weisstein, Eric W. Łog Normal Distribution". mathworld.wolfram.com. Retrieved 2020-09-13 (<https://mathworld.wolfram.com/Log>

Rozdział 3

sformułowanie i rozwiązanie problemów analitycznych

3.1 sformułowanie problemów

Podstawowym problemem podjętym w pracy jest analiza zależności pomiędzy czasem poświęconym na wykonanie ruchu, a jego dokładnością. Główny nacisk kładziony zostanie na ruchy oznaczone przez silnik jako błąd, co można uargumentować tym, że właśnie te ruchy mają największy wpływ na grę, szczególnie biorąc pod uwagę szachy szybkie, gdzie czasu na ruch jest zdecydowanie mniej, czego wynikiem jest to, że błędne ruchy pojawiają się znacznie częściej. Dodatkową osią ujętą w rozważaniach będzie ranking zawodników i jego wpływ na rozkłady danych. Sprawdzona i wzięta pod uwagę zostanie również zależność między numerem ruchu, a czasem na wykonanie oraz jego dokładnością. **ZMIENIĆ!** Zwieńczeniem pracy będzie podjęcie próby wyznaczenia optymalnego czasu na wykonanie ruchu, tak, by zminimalizować ryzyko popełnienia błędu.

3.2 Dane

Dane potrzebne do analizy zostały pobrane z platformy Lichess [2], która zapisuje i udostępnia wszystkie rozgrywane gry. Brane pod uwagę będą wszystkie gry (ponad 35 milionów) rozegrane na platformie w maju 2019 roku.

W pracy analizowane będą dwa najpopularniejsze formaty czasowe grane na platformie Lichess. Są one przedstawione w tabeli 3.1. Pierwszy z nich - „600+0” oznacza grę, w której każdy z graczy posiada 600 sekund na wykonanie wszystkich swoich ruchów, bez inkrementu (dodawanego czasu po zagranie posunięcia). Analogicznie wygląda format 300+0, z tym, że czas zmniejszony jest o połowę - do pięciu minut.

Tabela 3.1: baza gier na portalu Lichess z maja 2019, 6 najpopularniejszych formatów

Format czasowy sekundy+sekundy przyznawane po wykonaniu ruchu	procent gier w bazie
600+0	18,63%
300+0	14,48%
60+0	12,85%
900+15	11,34%
180+0	10,86%
300+3	9,67%

Po zakończeniu gry na platformie, każdy gracz ma możliwość zbadać swoją grę przy użyciu silnika szachowego Stockfish. Około 7% gier z bazy zawiera taką analizę. Posiadają one dane punktowe o nazwie *Eval*, określające unormowaną przewagę jednego z graczy w danym momencie gry. Dodatkowo silnik określa jakość wykonanego ruchu według własnych kryteriów (opisane w sekcji 1.4.3 na stronie 7). Przykładowy zapis jednej takiej gry z pliku został zaprezentowany na rysunku 3.1. Informacje potrzebne do analizy to:

- WhiteElo – ranking białych
- BlackElo – ranking czarnych
- TimeControl – czas na wykonanie ruchów każdego z graczy w formacie „sekundy + sekundy dodane za wykonanie ruchu”
- % eval – aktualna przewaga jednej ze stron
- zapis partii ze wskazaniem błędnych ruchów w ocenie silnika
- % clk – pozostały czas w formacie „godziny : minuty : sekundy”
- result – wynik partii

```

[Event "Rated Bullet game"]
[Site "https://lichess.org/oxdyeh038"]
[Date "2019.04.30"]
[Round "-"]
[White "dametiro59"]
[Black "r-c"]
[Result "0-1"]
[UTCDate "2019.04.30"]
[UTCTime "22:00:31"]
[WhiteElo "1899"]
[BlackElo "1871"]
[WhiteRatingDiff "-30"]
[BlackRatingDiff "+10"]
[ECO "B00"]
[Opening "Queen Defense"]
[TimeControl "0+1"]
[Termination "Time forfeit"]

1. e4 { [Eval 0.12] [Clk 0:01:00] } 1... b6? { [Eval 0.62] [Clk 0:01:00] } 2. d4 { [Eval 0.64] [Clk 0:00:57] } 2... Bb7 { [Eval 0.62] [Clk 0:01:00] } 3. Bd3 { [Eval 0.47] [Clk 0:00:57] } 3... g6 { [Eval 0.54] [Clk 0:01:00] }
4. c3 { [Eval 0.27] [Clk 0:00:55] } 4... Bg7 { [Eval 0.68] [Clk 0:00:57] } 5. h3 { [Eval 0.62] [Clk 0:00:51] } 5... e6 { [Eval 0.8] [Clk 0:00:55] } 6. f4? { [Eval -0.15] [Clk 0:00:48] } 6... Nc7 { [Eval 0.27] [Clk 0:00:54] }
7. Bc3 { [Eval 0.46] [Clk 0:00:46] } 7... d5 { [Eval 0.58] [Clk 0:00:53] } 8. Qc2 { [Eval -5.28] [Clk 0:00:45] } 8... Qe6 { [Eval -5.27] [Clk 0:00:52] } 9. Bxe6 { [Eval -5.78] [Clk 0:00:41] } 9... Bxe6 { [Eval -5.78] [Clk 0:00:51] }
10. Ng5? { [Eval -6.27] [Clk 0:00:40] } 10... Bb7 { [Eval -6.42] [Clk 0:00:47] } 11. Nxf7? { [Eval -8.64] [Clk 0:00:38] } 11... Kxf7 { [Eval -8.5] [Clk 0:00:45] } 12. Qd6 { [Eval -8.82] [Clk 0:00:42] } 12... Bf2 { [Eval -8.84] [Clk 0:00:29] } 13... Qc5 { [Eval -8.39] [Clk 0:00:40] } 14. Bf2 { [Eval -8.62] [Clk 0:00:24] } 14... e5 { [Eval -8.43] [Clk 0:00:37] } 15. Qd5 { [Eval -8.77] [Clk 0:00:22] }
16... Nf5 { [Eval -8.75] [Clk 0:00:38] } 16. Qd3 { [Eval -8.8] [Clk 0:00:18] } 16... Nf7 { [Eval -8.73] [Clk 0:00:27] } 17. Nc4? { [Eval -14.19] [Clk 0:00:14] } 17... Nf6? { [Eval -8.87] [Clk 0:00:14] } 18. Nc5 { [Eval -8.88] [Clk 0:00:12] } 18... Kf7? { [Eval -9.12] [Clk 0:00:20] } 19. Bc2? { [Eval -8.99] [Clk 0:00:08] } 19... Rad8? { [Eval -8.3] [Clk 0:00:15] } 20. Re1 { [Eval -8.23] [Clk 0:00:06] } 20... Kf8? { [Eval -7.32] [Clk 0:00:12] } 21. Nc6 { [Eval -7.3] [Clk 0:00:04] } 21... Kf7 { [Eval -6.58] [Clk 0:00:10] } 22. Nc5+ { [Eval -7.87] [Clk 0:00:02] } 22... Nc6 { [Eval -7.81] [Clk 0:00:08] } 0-1

```

Rysunek 3.1: Przykładowy zapis jednej partii zawierającej ocenę silnika Stockfish

Istotnym problemem związanym z danymi jest dokładność pozostałego czasu jedynie do sekund, co zaburza lekko ich istotę, szczególnie podczas analizy gier w krótszym formacie czasowym (jak np. „60+0”), gdzie ułamki sekundy są znaczące. Dodatkowo ruch, który oznaczony został jako n sekund w rzeczywistości jest ruchem z przedziału obustronnie otwartego $(n-1, n+1)$ sekund. Przy dużej liczbie danych nie ma to jednak większego znaczenia, ponieważ zgodnie z Prawem Wielkich Liczb można takie dane uśrednić do n **cite???**. Jedynym problemem, który może się pojawić jest późniejsze sprawdzenie zgodności danych z rozkładem.

3.2.1 Odfiltrowanie danych

Pierwszym krokiem potrzebnym do wykonania analizy jest odfiltrowanie danych. Po rozdzieleniu pliku tekstowego na kolejne gry, pozostawione zostały jedynie te, które zostały wcześniej ocenione przez silnik oraz grane były w formacie „300+0” lub „600+0”. Następnie przygotowany wcześniej program zbadał każdy ruch każdej gry i przypisał do niego następujące atrybuty:

- game_ID – numer gry
- score – ocena ruchu według silnika Stockfish
- delta_time – czas na wykonanie danego ruchu
- WhiteElo – ranking białych
- BlackElo – ranking czarnych
- TimeControl – czas na wykonanie ruchów każdego z graczy w formacie „sekundy + sekundy dodane za wykonanie ruchu”
- color – gracz, wykonujący dany ruch
- move – numer ruchu w danej partii
- result - wynik partii

Stworzona baza zawiera 17 524 012 posunięć ze 275 994 gier, co daje średnią 31,75 ruchu na grę (jeden ruch oznacza posunięcie białych i czarnych). Fragment bazy przedstawiony został na rysunku 3.2.

	game_ID	score	delta_time	WhiteElo	BlackElo	TimeControl	color	move	Result
510	9	0	0	1192	1204	300+0	w	23	0-1
511	9	0	9	1192	1204	300+0	b	23	0-1
512	9	0	2	1192	1204	300+0	w	24	0-1
513	9	0	18	1192	1204	300+0	b	24	0-1
514	9	0	7	1192	1204	300+0	w	25	0-1
515	9	0	10	1192	1204	300+0	b	25	0-1
516	9	blunder	8	1192	1204	300+0	w	26	0-1
517	9	blunder	8	1192	1204	300+0	b	26	0-1
518	9	mistake	4	1192	1204	300+0	w	27	0-1
519	9	0	2	1192	1204	300+0	b	27	0-1
520	9	0	29	1192	1204	300+0	w	28	0-1

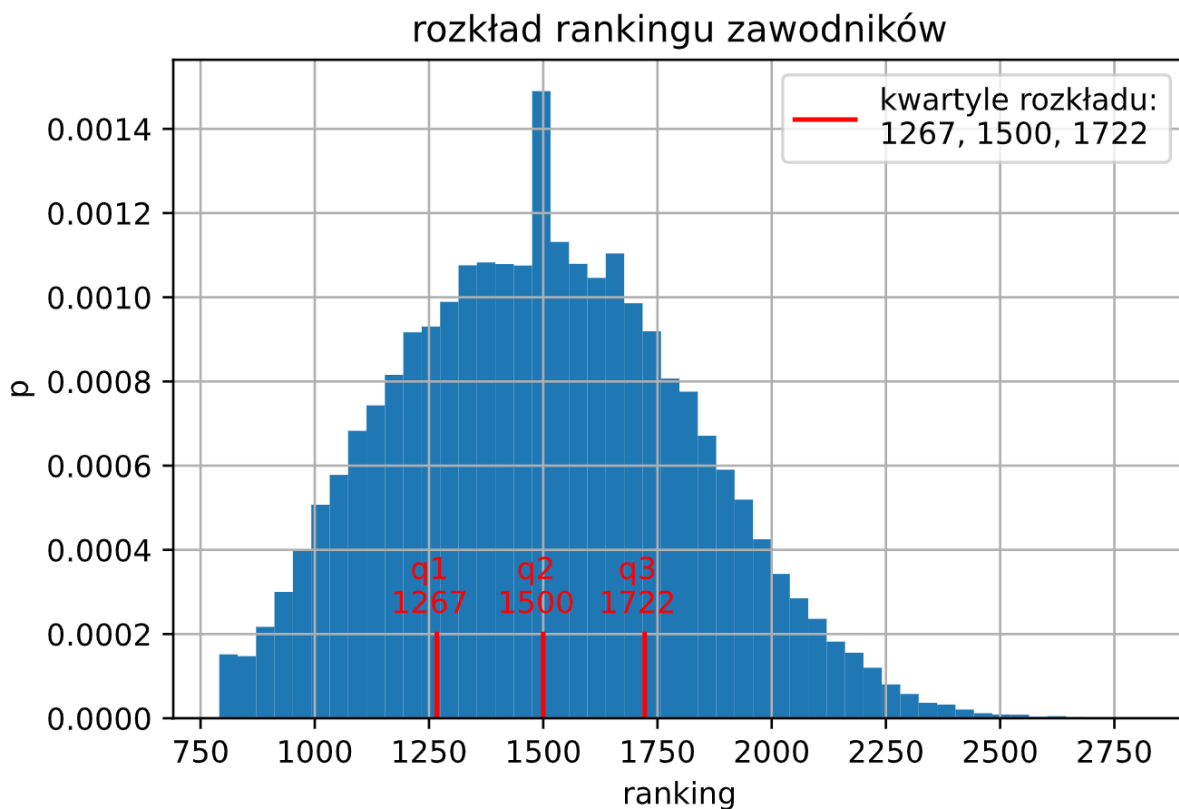
Rysunek 3.2: Fragment bazy zawierającej ruchy z gier o formatach czasowych „300+0” i „600+0”.

3.3 Analiza problemu

3.3.1 Wstępny przegląd danych

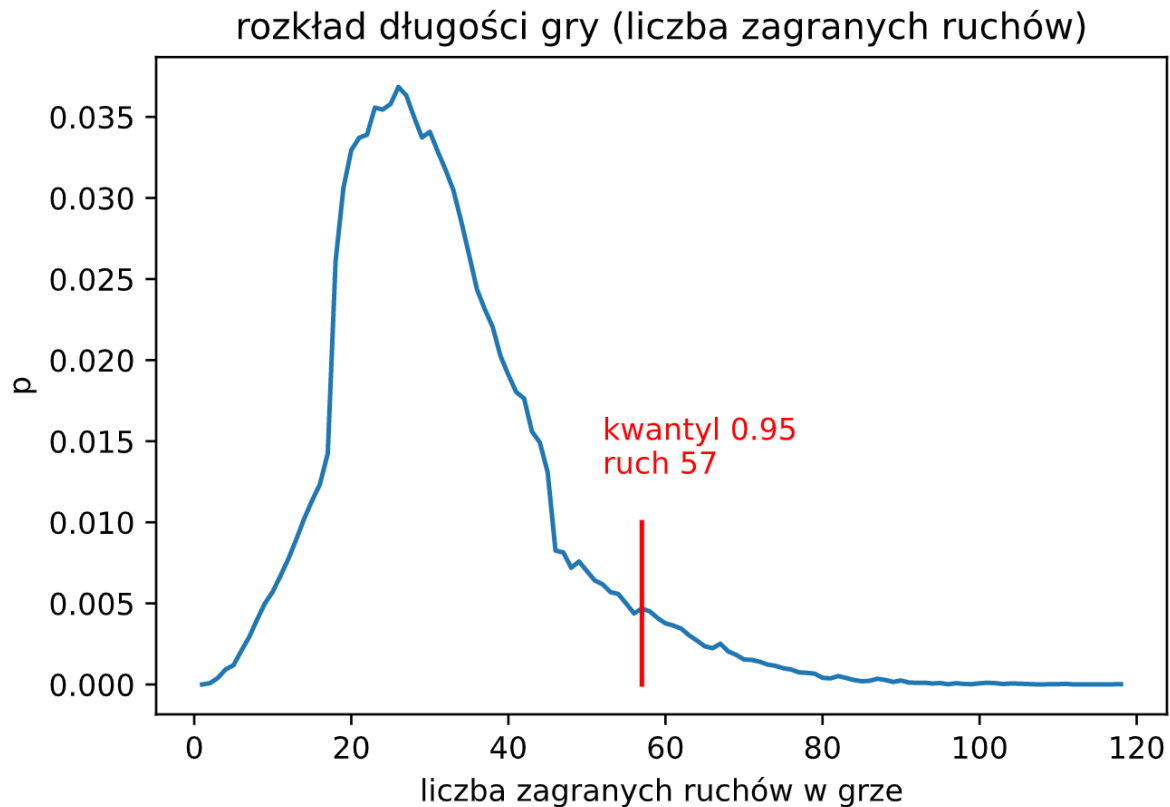
Pierwszym problemem, który zostanie poruszony jest zbadanie statystycznej zależności jakości wykonanego ruchu według oceny silnika Stockfish od czasu potrzebnego na jego wykonanie. W celu uzyskania bardziej precyzyjnych wyników pierwsze 4 ruchy (po 4 posunięcia białych i czarnych) nie będą brane pod uwagę. Są one elementem teorii otwarc szachowych [CITE??? ref ISBN 0-19-280049-3], w związku z czym wykonywane są zazwyczaj bardzo szybko i ze znikomą szansą popełnienia błędu, co może powodować zaburzenie danych. Dodatkowo na stronie Lichess.com pierwszy ruch obydwu zawodników zawsze zabiera 0 sekund.

Przy analizie z uwzględnieniem rankingu graczy, zastosowane będą podziały kwartylowe. Rozkład rankingu wraz z zaznaczonymi kwartylami pokazany jest na rysunku 3.3. Jak widać zbiega on do rozkładu normalnego. Anomalia dla rankingu 1500 związana jest z tym, że jest to ranking przyznawany każdemu graczowi przy jego pierwszej rozgrywce na platformie.



Rysunek 3.3: rozkład rankingu zawodników wraz z zaznaczonymi kwartylami

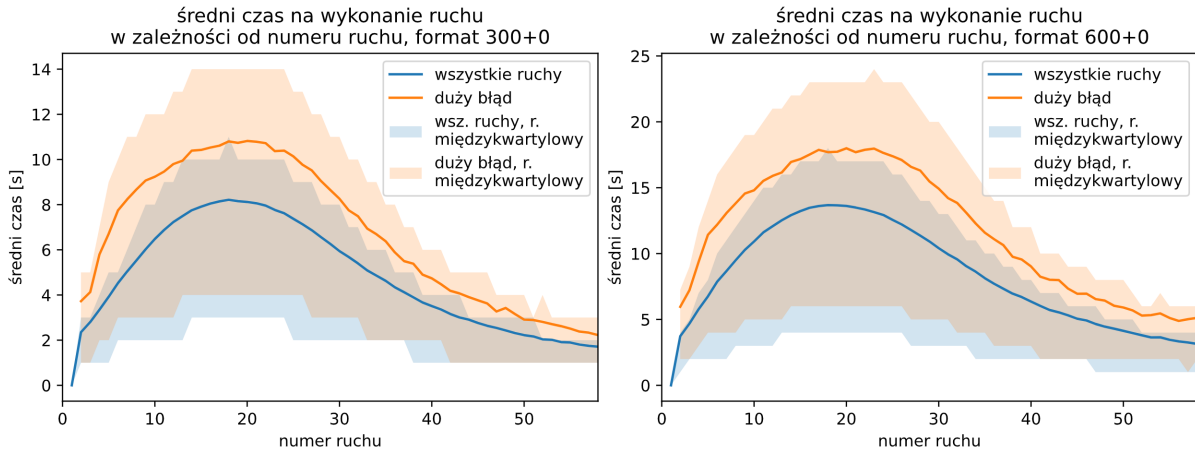
W późniejszej części pracy pojawiają się wykresy i analizy, w których dziedziną będzie numer wykonywanego ruchu. W związku z bardzo małą liczbą danych dla późniejszych ruchów, ich analiza jest zaburzona i niewiarygodna. Dlatego analizowane będą jedynie ruchy z indeksem poniżej 59, jako, że wynik 95% gier pojawia się maksymalnie w 58 ruchach. Rozkład długości gier z bazy danych, który obrazuje przedstawioną sytuację zamieszczony jest na rysunku 3.4.



Rysunek 3.4: rozkład długości gier wraz z zaznaczonym kwantylem rzędu 0.95, dla gier z formatu 300+0 oraz 600+0.

3.3.2 Zależność między indeksem ruchu, a poświęconym czasem

Na początku tej części trzeba ustalić pewne założenia dotyczące zestawu danych. W pojedynczej grze szachowej często występuje sytuacja, w której gracz długo myśli nad konkretnym posunięciem, rozpatrując możliwe następujące po nim sekwencje. W określonych okolicznościach, takich sekwencji jest na tyle mało, że każdy z graczy ma przez kilka kolejnych ruchów tylko jedno nieprzegrywające, łatwe do znalezienia posunięcie. Czas na wykonanie takich ruchów jest więc od siebie w pewien sposób zależny, jednakże sytuacje takie pojawiają się na bardzo nieoczekiwanie i przez mnogość zmiennych są trudne do znalezienia i uwzględnienia. Dlatego w celu ułatwienia analizy, w dalszych rozważaniach następujące po sobie ruchy będą uznawane za niezależne względem siebie.



Rysunek 3.5: Średni czas na wykonanie ruchu dla analizowanych formatów czasowych wraz z zaznaczonym rozstępem międzykwartylowym. Osobno wszystkie ruchy i ruchy oznaczone przez silnik jako błąd.

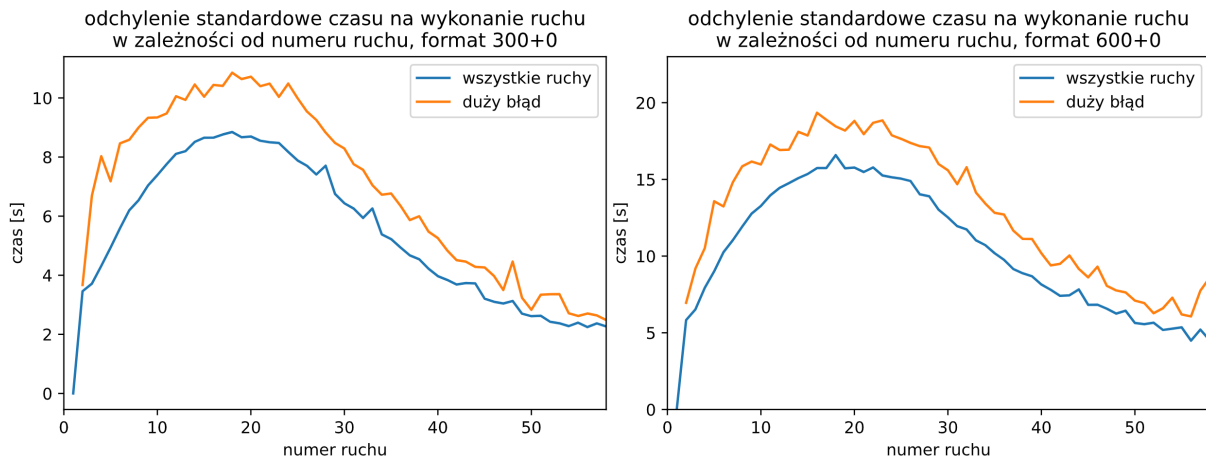
Pierwszym elementem analizy, który pozwoli na określenie wstępnej różnicy między ruchami oznaczonymi jako błąd, a zbiorem wszystkich ruchów jest sprawdzenie zależności między indeksem ruchu, a średnim czasem na jego wykonanie dla obydwu zbiorów. Intuicja wskazuje, że błąd popełniamy poświęcając mniej czasu na ruch. Jak widać na rysunku 3.5, dla każdego analizowanego ruchu, ruch oznaczony jako błędny zajął statystycznie więcej czasu - zarówno dla formatu 300+0 jak i 600+0, co przeczy intuicji. Przyczyną tego może być zaliczanie do zbioru wszystkich ruchów posunięć oczywistych, zajmujących niewielką ilość czasu, następujących dla pozycji, w której gracze na każdym poziomie zaawansowania rzadko kiedy popełniają błędy. Kolejną przyczyną takiego stanu rzeczy może być oczywista zależność skomplikowania pozycji od szansy na popełnienie błędu. W trudnych sytuacjach na szachownicy błędów pojawia się po prostu więcej, a trudnych sytuacji najwięcej jest w środkowej części partii, przez mnogość figur i możliwych legalnych ruchów. Trudno też znaleźć takie pozycje, ponieważ zależą one od przyjętej miary, o czym pisze D. H. Holding w swojej pracy zatytułowanej „*Evaluation of Chess Positions*” CITE Holding, D. H. (1979). *The Evaluation of Chess Positions. Simulation & Games*, 10(2), 207–221. doi:10.1177/104687817901000205 Dlatego też, co widoczne jest na wykresie, w środkowej części gry, posunięcia zajmują najwięcej czasu.

Po oznaczeniu D jako zmienną określającą skomplikowanie pozycji, T - zmienną określającą czas na wykonanie ruchu w danej pozycji, B - zdarzenie polegające na tym, że posunięcie jest błędne i przy założeniu, że T jest silnie dodatnio skorelowane z D , według prawdopodobieństwa otrzymujemy **SPRAWDZIĆ TO JESZCZE!**:

$$P(B|D > d_0) > P(B|D \leq d_0) \rightarrow P(B|T > t_0) > P(B|T \leq t_0) \quad (3.1)$$

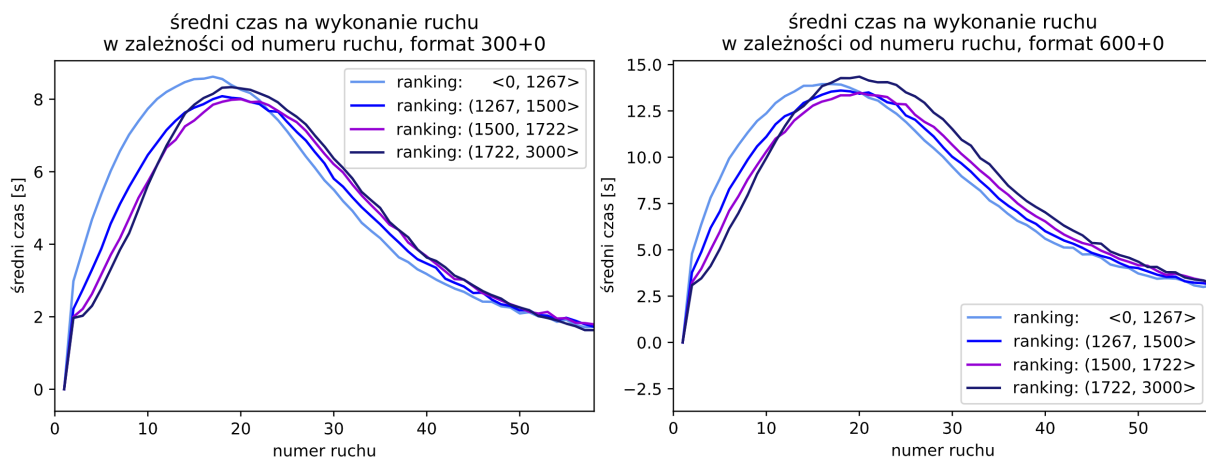
gdzie d_0 i t_0 określają punkty, od których według wybranej miary można określić, że pozycja jest skomplikowana ($D > d_0$) i czas na wykonanie posunięcia jest długi ($T > t_0$).

Może to tłumaczyć wyższą średnią czasu na wykonanie błędnego posunięcia w porównaniu do zbioru wszystkich posunięć.



Rysunek 3.6: Odchylenie standardowe czasu na wykonanie ruchu dla analizowanych formatów czasowych. Osobno wszystkie ruchy i ruchy oznaczone przez silnik jako błąd.

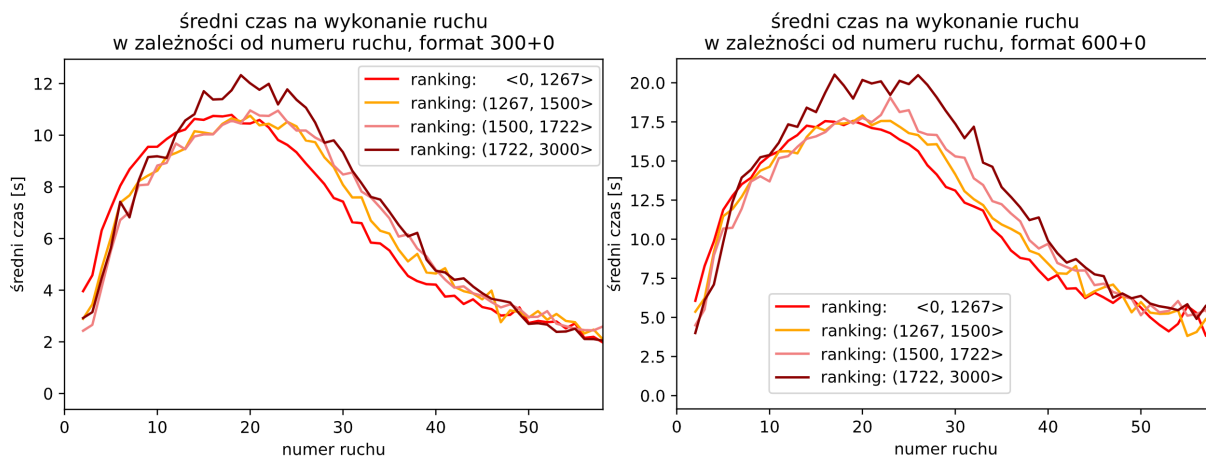
Badając w dalszym ciągu wykresy na rysunku 3.5 można zauważyć, że dla obydwu zbiorów posunięć początkowo niska średnia osiąga swój szczyt w okolicach dwudziestego ruchu, by później stopniowo się zmniejszać. Ma to związek z tym, że początkowe posunięcia są elementem teorii szachowej. Spora część graczy nauczyła się kilku, kilkunastu, bądź w przypadku gry na najwyższym poziomie - nawet ponad dwudziestu pierwszych ruchów niektórych otwarć. W związku z tym początkowe ruchy grane są relatywnie szybko. Końcowe posunięcia natomiast nie mogą zająć wiele czasu, ponieważ jest go zazwyczaj zbyt mało na zegarze, by gracz mógł sobie na to pozwolić. Dlatego też od pewnego momentu, wraz ze wzrostem indeksu średni czas poświęcony na ruch zbiega do zera. Zaznaczone na rysunku rozstępy międzykwartylowe dla każdego ruchu wskazują na znacznie większą wariancję czasu na wykonanie błędnego ruchu porównując do zbioru wszystkich ruchów. Potwierdza to rysunek 3.6 pokazujący odchylenie standardowe dla kolejnych ruchów.



Rysunek 3.7: Średni czas na wykonanie ruchu dla graczy z różnych przedziałów rankingowych. Wszystkie posunięcia.

Rysunki 3.7 i 3.8 wprowadzają do rozważań różnicę między średnim czasem na wykonanie ruchu dla graczy z poszczególnych przedziałów rankingowych. Można zauważyć, że zarówno w przypadku zbioru wszystkich ruchów (rysunek 3.7) jak i podzbioru ruchów błędnych (rysunek 3.8), słabsi gracze mają tendencję do dłuższych rozważań nad początkowymi

ruchami. Wraz ze wzrostem rankingu wydłuża się średni czas na wykonanie ruchu dla ruchów z indeksem od 20 do 30 - czyli tych, gdzie średnia jest najwyższa. Przy końcowych posunięciach, posunięcia zajmują podobną ilość czasu dla wszystkich rankingów. Warto zwrócić uwagę, że odsetek 25% najniżej notowanych graczy przez zbyt długie początkowe ruchy zmuszona jest ruszać się szybciej w późniejszych posunięciach. Szczególnie widoczne jest to na pierwszym wykresie rysunku 3.8.



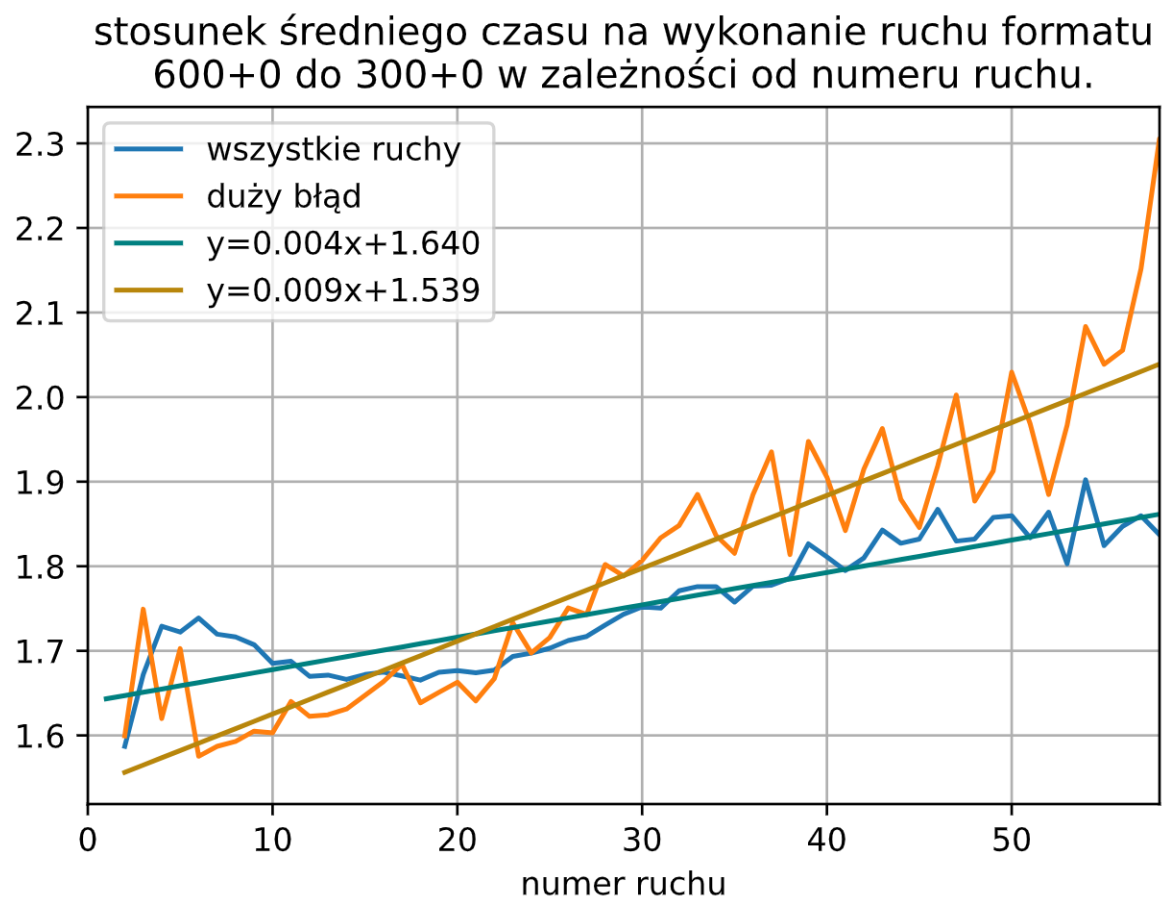
Rysunek 3.8: Średni czas na wykonanie ruchu dla graczy z różnych przedziałów rankingowych. Posunięcia oznaczone przez silnik jako błąd.

Niezależnie od rankingu, średnia poświęconego czasu dla posunięć oznaczonych przez silnik jako błąd jest w każdym momencie wyższa niż dla zbioru wszystkich ruchów. Warto również zauważyć, że wykresy dla obydwu formatów czasowych wyglądają podobnie.

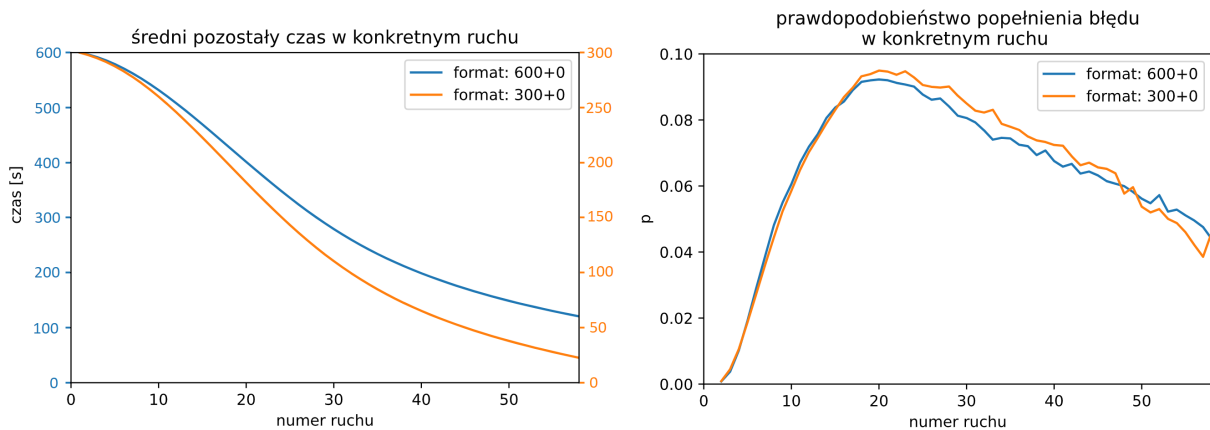
By móc przeanalizować zależność między rozgrywanym formatem, a wzrostem średniego czasu poświęconego na ruch, powstał wykres umieszczony na rysunku 3.9. Dopasowane metodą najmniejszych kwadratów **OPISANĄ W ROZDZIALE TEORIA2???** proste regresji **DODAC COŚ O RESIDUACH I ODCHYLENIACH?**, można zrobić też proste ze wszystkich danych, a nie ze średniej obrazują różnice w zachowanych trendach. Czas w formacie 600+0 jest dokładnie 2 razy dłuższy niż w formacie 300+0, jednak średni czas na wykonanie ruchu jest w pierwszym przypadku około 1,7 raza wyższy. Wartość stosunku jednak nie jest stała i wzrasta wraz z indeksem ruchu. Dla zbioru wszystkich posunięć dopasowana prosta regresji wskazuje na stosunek około 1,65 dla tych początkowych, do 1,85 przy końcowych. Znacznie większa rozpiętość w stosunku widoczna jest dla posunięć oznaczonych jako błąd. Stosunek wynosi około 1,55 dla początkowych wartości i powyżej 2 dla ruchów z indeksem powyżej 55. Warto zauważyć, że dla obu zbiorów w formacie 600+0 gracze nie są zmuszeni do podejmowania decyzji pod dużą presją czasu. Szczególnie różnicę tę da się zauważyć dla ruchów błędnych, nad którymi gracz musi się statystycznie dłużej zastanowić (rysunek 3.5 na stronie 16). Gracz posiadając 2 razy więcej czasu w tym formacie i myśląc nad każdym ruchem średnio od 1.55 do 1.95 raza dłużej, ma w każdym momencie gry do dyspozycji statystycznie większy ułamek początkowego czasu niż w przypadku gry w formacie 300+0. Zestawienie pozostałego czasu pokazane jest na pierwszym wykresie na rysunku rysunku 3.10. Widać dość sporą różnicę w średnim pozostałym czasie narastającą podczas przebiegu gry. Drugi wykres zamieszczony na rysunku ukazuje różnicę w prawdopodobieństwie popełnienia błędu w konkretnym ruchu dla obu formatów. Warto zauważyć, że mimo znacznie większego czasu do dyspozycji w przypadku formatu „600+0”, do 20 ruchu szansa na błąd jest niemalże

identyczna jak w przypadku formatu „300+0” – Krzywe odbiegają od siebie nieznacznie. W okolicach od 20 do 40 ruchu, szansa na popełnienie błędu w formacie „300+0” jest około 5-10% większa. Dobrze jest w tym miejscu dodać, że jest to przedział, w którym błędów występuje najwięcej.

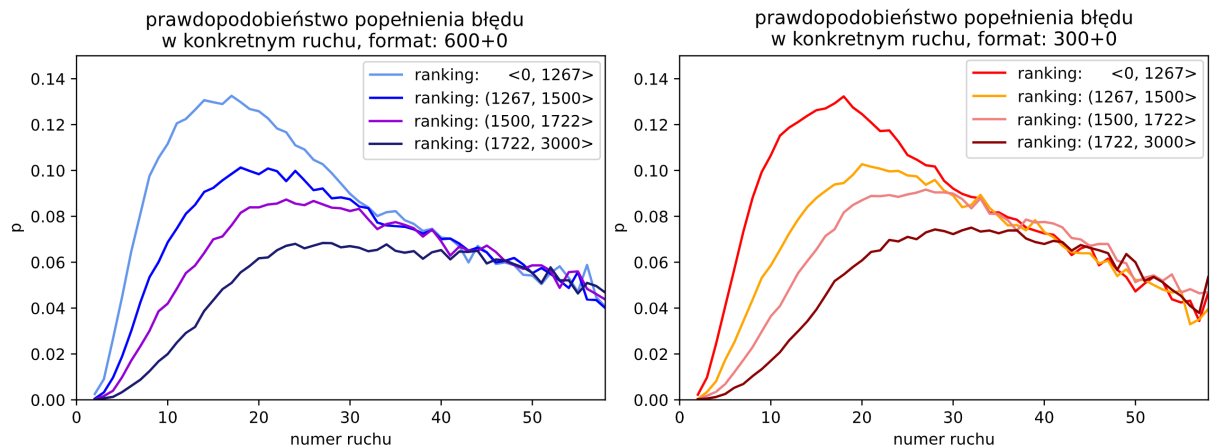
jakiś bayes później?



Rysunek 3.9: Stosunek średniego czasu na wykonanie ruchu w formacie 600+0 do czasu w formacie 300+0. Zaznaczone proste regresji obrazujące trend.



Rysunek 3.10: Pierwszy wykres – zestawienie średniego pozostałego czasu w formatach 600+0 oraz 300+0. W celu lepszego porównania zastosowane osobne osie dla każdego formatu. Drugi wykres – empiryczne prawdopodobieństwo popełnienia błędu w konkretnym ruchu.



Rysunek 3.11: Prawdopodobieństwo popełnienia błędu w konkretnym ruchu dla różnych przedziałów rankingowych.

Różnica w prawdopodobieństwie popełnienia błędu pomiędzy poszczególnymi formatami nie jest tak duża jak ta pomiędzy rankingiem graczy. Na rysunku 3.11 można zauważyć, że dla zarówno dla formatu „600+0” jak i „300+0” słabsi gracze mają tendencję do popełniania większej liczby błędów w początkowej fazie gry, niż ich wyżej notowani koledzy. Statystycznie, będąc w grupie 25% najniżej notowanych graczy ma się około 6 razy większe prawdopodobieństwo na popełnienie błędu w 10 posunięciu, niż osoba z grupy 25% najwyżej notowanych graczy. Format gry ma na to niewielki wpływ. Można wysunąć wniosek, że w przypadku gry pomiędzy dwoma takimi zawodnikami, dwukrotnie zwiększenie czasu niżej notowanego gracza z 5 do 10 minut będzie miało minimalny wpływ na finalny wynik gry (przy założeniu, że liczba błędów jest mocno skorelowana z wynikiem gry). krzywe zaczynają do siebie zbiegać od okolic 20 ruchu, by stać się praktycznie nierozróżnialne w okolicach 40 ruchu.

Wykres zależności prawdopodobieństwa od ruchu jest tym bardziej „spłaszczony” im wyższa jest notacja elo zawodników. Brak szybkiego wzrostu dla początkowych posunięć sprawia, że statystyczne prawdopodobieństwo popełnienia błędu w pierwszych 10 ruchach

niesamowicie różni się dla poszczególnych grup rankingowych. Po oznaczeniu przez X_i zmienną losową określającą popełnienie błędu w i -tym posunięciu:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{gdy w } i\text{-tym ruchu został popełniony błąd} \\ 0, & \text{gdy w } i\text{-tym ruchu nie został popełniony błąd} \end{cases}$$

oraz założeniu, że X_i oraz X_j są niezależne dla $i \neq j$ (drugie przejście w równaniu poniżej **cite Jacek Jakubowski, Rafał Sztencel: Wstęp do teorii prawdopodobieństwa. Warszawa: Script, 2001. str 43 ISBN 83-904564-5-1**) możemy zbadać empiryczne prawdopodobieństwo popełnienia choć jednego błędu w n pierwszych ruchach.

$$\begin{aligned} P(X_1 = 1 \vee X_2 = 1 \vee \dots \vee X_n = 1) &= 1 - P(X_1 = 0, X_2 = 0, \dots, X_n = 0) = \\ &= P(X_1 = 0)P(X_2 = 0) \dots P(X_n = 0) = \prod_{i=1}^n P(X_i = 0) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Przy czym $P(X_i = 0)$ można wyznaczyć empirycznie na podstawie danych.

Tabela 3.2 przedstawia różnicę w szansie na popełnienie przynajmniej jednego błędu w pierwszych 10, 20 i 30 ruchach dla graczy z określonych przedziałów rankingowych i gier w określonym formacie. Przykładowo, dla osoby z grupy 25% najniżej notowanych graczy grającej w formacie „600+0”, szansa na popełnienie błędu w 10 pierwszych ruchach wynosi aż 43,46%, natomiast dla grupy 25% najlepszych graczy jest to jedynie 6,76%. Różnica ta zmniejsza się znacząco, gdy weźmie się pod uwagę większą liczbę pierwszych ruchów. Dla 20, jest to kolejno 85,50% i 40,78%, a dla 30 – 95,32% i 70,27%. Wartości te wyglądają podobnie dla formatu 300+0.

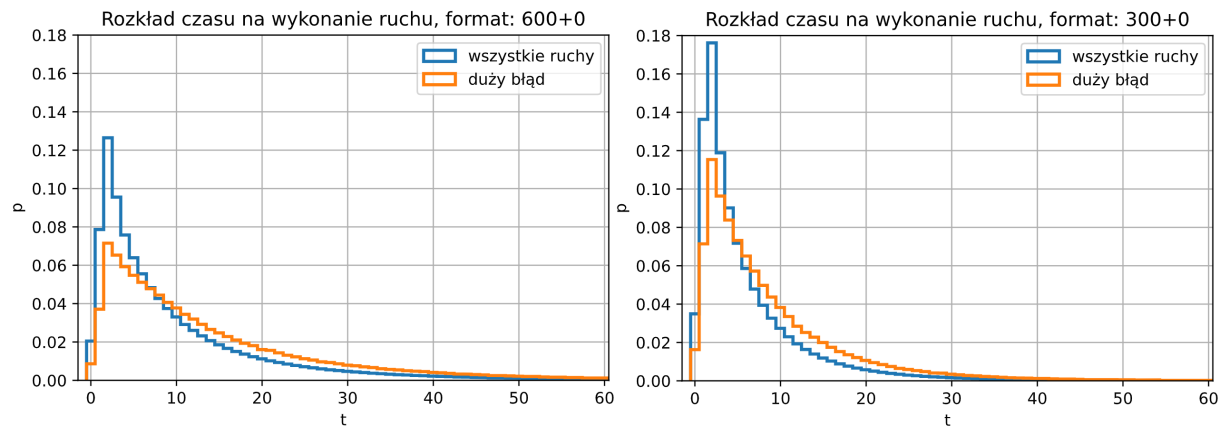
Tabela 3.2: Szansa na popełnienie błędu w pierwszych n ruchach dla gracza z określonego przedziału rankingowego z rozdzieleniem na formaty „600+0” i „300+0”

n pierwszych ruchów	$n = 10$		$n = 20$		$n = 30$	
centyl \ format	600+0	300+0	600+0	300+0	600+0	300+0
0-25%	43,36%	40,72%	85,50%	84,33%	95,32%	94,96%
25%-50%	25,52%	22,09%	71,56%	68,63%	89,38%	88,66%
50%-75%	15,58%	12,42%	58,86%	56,27%	83,08%	82,93%
75%-100%	6,76%	5,63%	40,78%	38,66%	70,27%	70,40%

W pierwszej części tabeli, dla 10 pierwszych ruchów, co ciekawe, prawdopodobieństwo popełnienia błędu w dłuższym formacie czasowym jest znacznie wyższe niż w krótszym, niezależnie od rankingu zawodnika. Dla większej liczby pierwszych ruchów ta różnica się zmniejsza, jednak cały czas dłuższy format oznacza statystycznie większą szansę na choć 1 popełniony błąd, co wydaje się być sprzeczne z intuicją, ponieważ gracze mają 2 razy więcej czasu na wszystkie posunięcia. **coś tu dodać jeszcze????**

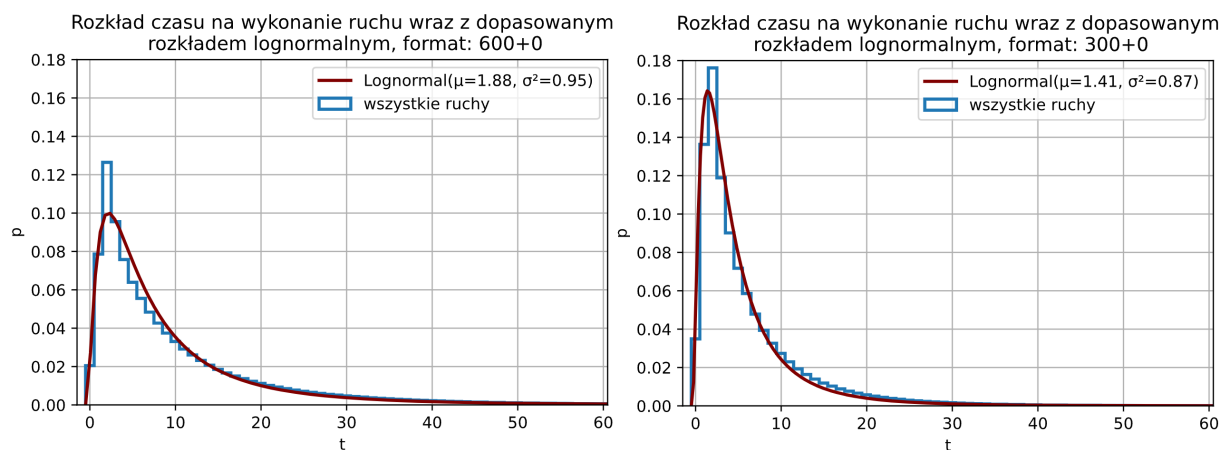
3.3.3 zależność między czasem poświęconym na ruch, a jego oceną

Kolejny problemem, który zostanie zbadany jest zależność pomiędzy czasem poświęconym na ruch, a jego oceną. Tak jak i we wcześniejszych częściach wartość oceny silnika rozróżniana będzie jedynie na ruchy oznaczone jako błąd i te bez takiego oznaczenia.

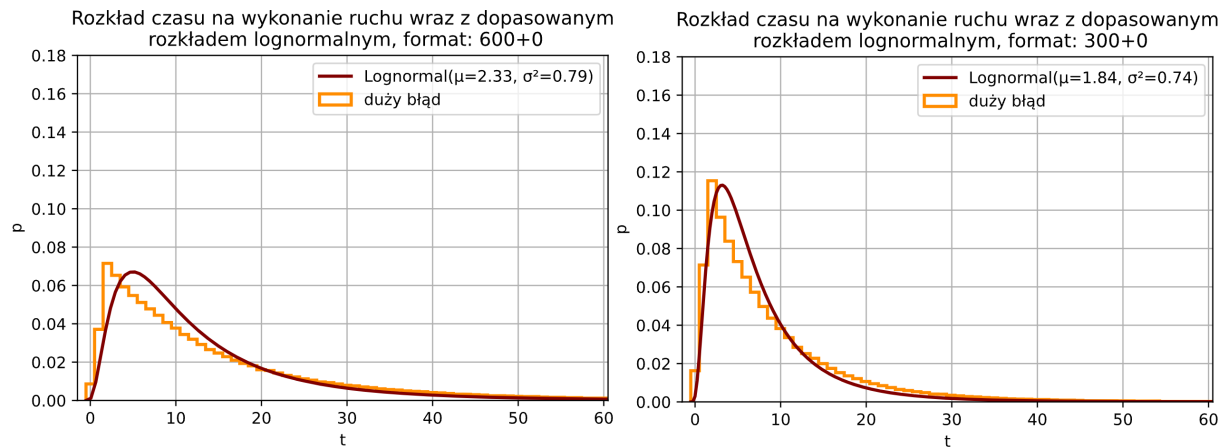


Rysunek 3.12: Rozkład czasu poświęconego na wykonanie posunięcia dla formatów „600+0” i „300+0”. Osobno wszystkie posunięcia i posunięcia błędne

Pierwszym spojrzeniem na wymienioną wyżej zależność będzie przeanalizowanie rozkładu czasu na wykonanie ruchu osobno dla zbioru wszystkich ruchów i dla tych błędnych. Jak można zauważyć na rysunku 3.12, w każdym rozważanym formacie czasowym różnica w rozkładzie dla zbioru wszystkich ruchów i zbioru ruchów błędnych jest zauważalna. Oba zbiory mają zachowane podobne tendencje – najwięcej posunięć zagrywana jest w ciągu dwóch do czterech sekund. W każdym ze zbiorów wraz ze wzrostem czasu na wykonanie posunięcia, empiryczna gęstość rozkładu się zmniejsza. Ruchów błędnych jest widocznie mniej w porównaniu do zbioru wszystkich ruchów w przedziale od 0 do ok. 8 sekund. Natomiast w przedziale od ok. 8 do 30 sekund, posunięcia błędne są spotykane częściej. Po przyjrzeniu się danym można zauważyć, że pochodzą one z rozkładu logarytmicznie-normalnego, co można uwarunkować tym, że w zdecydowanej większości pozycji zawodnik potrzebuje chwili na odpowiedź na posunięcie przeciwnika, ponieważ samo zarejestrowanie zmiany na planszy i fizyczne wykonanie posunięcia (przesunięcie figury na konkretne pole za pomocą myszki dla komputerów lub przeciągnięcie palcem dla smartfonów) zajmuje pewien czas, wykluczając sytuacje, w których zawodnik dokonuje tzw. „premove”, czyli podejmuje decyzję o wykonaniu konkretnego posunięcia zajmującego 0 sekund jeszcze przed zagranie przeciwnika. Dla formatów „300+0” i „600+0” jest to jednak rzadkością – szczególnie podczas środkowej części gry.



Rysunek 3.13: Rozkład czasu poświęconego na wykonanie posunięcia dla formatów „600+0” i „300+0” z dopasowanym rozkładem log-normalnym.



Rysunek 3.14: Rozkład czasu poświęconego na wykonanie posunięcia dla formatów „600+0” i „300+0” z dopasowanym rozkładem log-normalnym. Zestaw ruchów błędnych.

Za pomocą metody momentów [cite] opisaną w rozdziale **NR ROZDZIAŁU**, opisać ją jako? do każdego zbioru danych został dopasowany rozkład log-normalny. Na rysunku 3.13 ... Na rysunku 3.14 ...

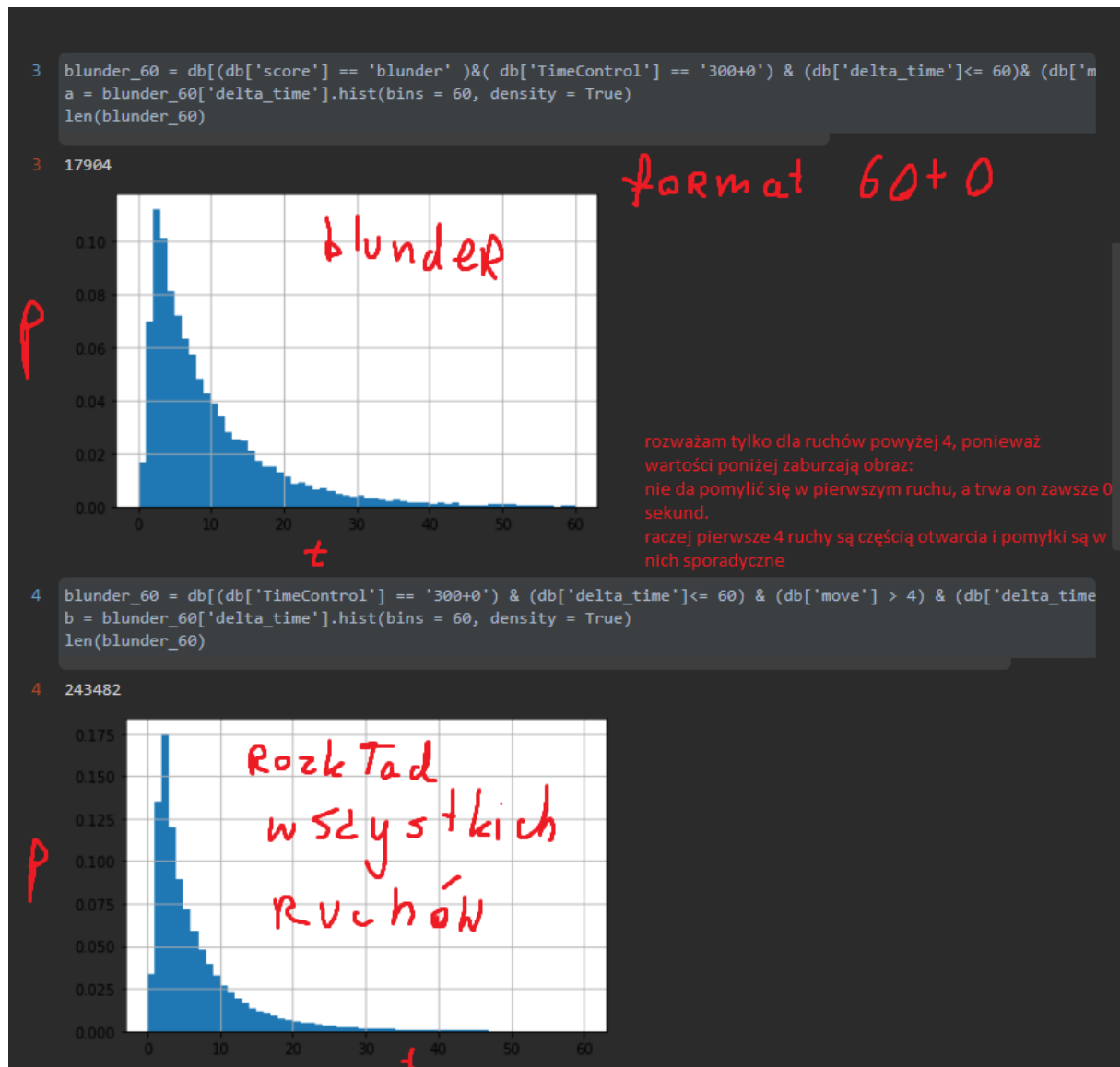
PLAN:

porównanie rozkładu czasu wykonania wszystkich ruchów oraz dla ruchów blunder (histogram gęstości)
wskazanie różnicy
osobno rankingi przeanalizować

POMYSŁ! WZĘCIE LOSOWE RUCHY Z ROZKŁADU TAKIEGO JAK ROZKŁAD RUCHÓW BLUNDER I SPRAWDZENIE RÓŻNICY MIĘDZY BLUNDER A LOSOWYMI RUCHAMI

TUTAJ rozkłady,

np dla formatu 60+0 (60 sekund, brak dodawanego czasu po wykonaniu ruchu)



Rysunek 3.15: xxx

oś x -> czas

oś y -> nieznormalizowana liczba ruchów typu 'blunder' (te najcięższe pomyłki)

rozkład gamma... (?)

TO DO:

sprawdzenie zmian dla rankingu graczy, różnicy rankingu graczy

porównanie z czasem na wykonanie każdego ruchu

TO DO:

czy różnica pomiędzy formatem z dodawanym czasem po ruchu, a bez dodawanego czasu jest widoczna?

tutaj statystyczne prawdopodobieństwo wykonania złego ruchu pod warunkiem poświęcenia mu konkretnego czasu,

np, w formacie czasowym 60+0 na ruch zostały poświęcone 4 sekundy, jaka jest szansa, że został popełniony błąd

CEL: ile powinno się poświęcić czasu na ruch by obniżyć prawdopodobieństwo wykonania błędu?

Tego jeszcze nie analizowałem

w którym ruchu jest największa szansa na popełnienie błędu? dla wszystkich rang



Rysunek 3.16: aaa

Rozdział 4

wnioski, podsumowanie

- 95% gier kończy się w 57 ruchach
- błąd dla każdego elo dla każdego posunięcia zajmuje średnio dłużej, ma też zawsze większą wariancję
- wszystkie ruchy: lepsi gracze szybciej wykonują ruchy początkowe, dłużej te z największą szansą na błąd (ok 20)
- największa szansa na błąd – okolice 20 ruchu
- odnośnie dwóch poprzednich, lepsi gracze najmniej popełniają błędów w okolicach 20 ruchu
- największa szansa na błąd – różnice dla elo (dużo błędów na początku dla słabych graczy później się stabilizuje)
- lepsi gracze DŁUŻEJ wykonują ruchy BŁĘDNE
- różnice między formatami - w 600+0 ruchy zajmują nieliniowo więcej czasu, w 300+0 gracze są zmuszeni szybko wykonywać ruchy późniejsze.
- 10 pierwszych ruchów, istotna różnica w popełnieniu rażącego błędu między graczami słabymi a dobrymi

Rozdział 5

Definicje, lematy, twierdzenia, przykłady i wnioski

Definicje, lematy, twierdzenia, przykłady i wnioski piszemy w pracy tak:

Definicja 5.1 (Martyngał). Tu piszemy treść definicji martyngału.

Lemat 5.2. *Tu piszemy treść lematu.*

Bibliografia

- [1] Lichess computer engine used from 2014. <https://lichess.org/blog/U4mtoEQAAEEAgZRL/strongest-chess-player-ever>. Dostęp: 30/05/2021.
- [2] Lichess database. <https://database.lichess.org/>. Accessed: 30/05/2021.
- [3] Repozytorium zawierające kod źródłowy silnika Stockfish. <https://github.com/official-stockfish/Stockfishr>. Dostęp: 11/10/2021.
- [4] *chesscenter.net*. C&O Family Chess Center. Chess analysis symbols. <https://web.archive.org/web/20180116135828/http://www.shatranj.us/files/AnalysisSymbols.pdf>, 2014. Dostęp: 17/10/2021.
- [5] Arpad E. Elo. *The rating of chessplayers, Past & Present (second edition)*. FIDE, New York, United States, 1986.
- [6] Mark Glickman. The glicko system. *Boston University*, 1999.
- [7] *mathworld.wolfram.com*. Weisstein, Eric W. Log normal distribution. <https://mathworld.wolfram.com/LogNormalDistribution.html>, 2020. Dostęp: 17/10/2021.