

Politechnika Wrocławska

Wydział Matematyki

Kierunek studiów: Matematyka Stosowana

Specjalność: –

Praca dyplomowa – inżynierska

ANALIZA STATYSTYCZNA CZASÓW NA WYKONYWANIE RUCHÓW W SZACHACH

Piotr Rogula

słowa kluczowe: ROBOCZE: analiza statystyczna, szachy, korelacja (max 150 znaków).

krótkie streszczenie:

ROBOCZE: W pracy przeanalizowana zostanie zależność między czasami wykonania poszczególnych ruchów w szachach, a ich zgodnością z silnikiem szachowym. Zbadany zostanie rozkład tych czasów w zależności od poziomu graczy, na tej podstawie obliczone zostanie prawdopodobieństwo wykonania błędnego ruchu (max 530 znaków).

Opiekun pracy	Prof. dr hab. inż. Marcin Magdziarz		
dyplomowej	Tytuł/stopień naukowy/imię i nazwisko	ocena	podpis

Do celów archiwalnych pracę dyplomową zakwalifikowano do:*

- a) kategorii A (akta wieczyste)
- $b)\ kategorii\ BE\ 50\ (po\ 50\ latach\ podlegające\ ekspertyzie)$

pieczątka wydziałowa

^{*} niepotrzebne skreślić

Faculty of Pure and Applied Mathematics

Field of study: Applied Mathematics

Specialty: -

Engineering Thesis

STATISTICAL ANALYSIS OF TIMES FOR MAKING MOVES IN CHESS

Piotr Rogula

keywords:

tutaj podajemy najważniejsze słowa kluczowe w języku angielskim (łącznie nie powinny być dłuższe niż 150 znaków)

short summary:

Tutaj piszemy krótkie streszczenie pracy w języku angielskim (max 530 znaków).

Supervisor	Prof. dr hab. inż. Marcin Magdziarz		
	Title/degree/name and surname	grade	signature

For the purposes of archival thesis qualified to: *

- a) category A (perpetual files)
- b) category BE 50 (subject to expertise after 50 years)

stamp of the faculty

 $^{^{*}}$ delete as appropriate

Spis treści

W	$I_{ m step}$	3
1	ZAGADNIENIE TEORETYCZNE I - DOTYCZĄCE SZACHÓW 1.1 ZASADY GRY W SZACHY 1.2 OPISAĆ NOTACJĘ szachową????? - nie będę w sumie nic z nią robić, ale jest 1.3 System rankingowy Glicko-2 1.4 Funkcja oceny 1.4.1 Stockfish 1.4.2 Ewaluacja 1.4.3 rodzaje błędów szachowych	5 5 6 6 6 7 7
2	ZAGADNIENIE TEORETYCZNE II - użyte metody, teoria stojąca za rozwiązaniami problemów 2.1 zagadnienie 1	9
3	sformułowanie i rozwiązanie problemów analitycznych 3.1 sformułowanie problemów	11 11 12 13 16 18
4	wnioski, podsumowanie	19
5	tabelka	21
6	rysunek	23
7	Definicje, lematy, twierdzenia, przykłady i wnioski	25
8	cytowanie	27
D	odatek	29

Wstęp

We wstępie zapowiadamy, o czym będzie praca. Próbujemy zachęcić czytelnika do dalszej lektury, np. krótko informując, dlaczego wybraliśmy właśnie ten temat i co nas w nim zainteresowało.

Wraz z rozwojem technologii komputerowej, rozpoczęła się nowa era szachów. Technologia korzystając z dużej mocy obliczeniowej, bezpowrotnie wyprzedziła człowieka w grach deterministycznych, do których zaliczają się szachy. Profesjonalni szachiści zaczęli wykorzystywać nowe strategie korzystając z coraz lepszych silników szachowych. Silniki te oceniają wprowadzoną pozycję pod kątem przewagi jednej ze stron.

W dobie internetu gra w szachy stała się dużo wygodniejsza niż przed laty. Ludzie grają w różnych miejscach i praktycznie o każdej porze. W związku z tym dużo większą popularnością zaczęły cieszyć się szachy szybkie, czyli takie, w których każdy z zawodników ma relatywnie mało czasu na wykonanie wszystkich ruchów. Wiąże się to z dużo większym znaczeniem dysponowania czasem w trakcie gry. W każdym ruchu zawodnik musi ustalić równowagę pomiędzy dokładnością ruchu, a czasem, który jest w stanie na ten ruch poświecić.

Przedmiotem badań tej pracy jest analiza zależności między dokładnością ruchu, a czasem, który został na niego poświęcony dla zawodników prezentujących różny poziom umiejętności i dla różnych formatów czasowych. Zbadanie takiej zależności może pozwolić na określenie optymalnego czasu na wykonanie ruchu dla odpowiedniej fazy gry i formatu czasowego.

DODAĆ TUTAJ TROCHE I OGÓLNY CEL

W PIERWSZEJ CZĘŚCI - ZAGADNIENIA TEORETYCZNE DOTY-CZĄCE SZACHÓW

W pierwszej części pracy przedstawione i dość obszernie wyjaśnione zostaną podstawowe zagadnienia teoretyczne związane z szachami, systemami rankingowymi i silnikami szachowymi.

W DRUGIEJ CZĘŚCI ZAGADNIENIA TEORETYCZNE ZE STATY-STYKI I METODOLOGII

Kolejna część pracy opowiada o zagadnieniach teoretycznych z dziedziny statystyki, zastosowanych w analizie przedstawionych problemów.

PÓŻNIEJ DOKŁADNE SFORMUOWANIE PROBLEMU

Główna część pracy zawiera przedstawienie zależności...

DOKŁADNE ROZWIĄZANIE PROBLEMU

a póżniej rozwiązanie...

PODSUMOWANIE

W końcowej części pracy [...] podsumowanie, wnioski...

ZAGADNIENIE TEORETYCZNE I -DOTYCZĄCE SZACHÓW

Niniejszy rozdział poświęcony zostanie zagadnieniom teoretycznym dotyczącym szachów, używanych systemów rankingowych oraz działaniu silników szachowych.

1.1 ZASADY GRY W SZACHY

Początki szachów nie są znane, jednak ich historia trwa już ok. 1500 lat i zaczyna się w Indiach. Na przestrzeni wieków zasady gry w szachy były wielokrotnie zmieniane. Powszechnie stosowane przepisy pochodzą z roku 1851.

krótko na czym polegają szachy i cite gdzie można znaleźć pełne przepisy,
isbn: $002028540\mathrm{X}$

Gra odbywa się na kwadratowej planszy o wymiarach 8 na 8 pól. Każdy gracz posiada 16 figur, ustawionych w pozycji startowej i stojących po przeciwnych stronach szachownicy. Zawodnicy wykonują na przemian ruchy dowolną ze swoich figur, zgodnie z jej zasadami poruszania się. W trakcie tury zawodnikowi upływa czas ustalony przed grą. W niektórych wariantach gracz otrzymuje też niewielką ilość czasu za wykonanie każdego ruchu.

Wygrana następuje, gdy król jednego z graczy jest atakowany i nie można w legalny sposób nim ruszyć, ani zasłonić jedną ze swoich figur przed atakiem. Pozycję taką nazywa się "matem" Drugim sposobem na wygranie jest skończenie się czasu jednego z graczy, niezależnie od sytuacji na szachownicy. Gra może też zakończyć się remisem. Następuje on, gdy żaden z graczy nie ma na planszy figur, które mogą pozwolić na "zamatowanie" przeciwnika. Inną możliwością jest trzykrotne powtórzenie się na planszy tej samej pozycji. Do remisu doprowadza też sytuacja, w której jednemu z graczy zakończył się czas, a jego przeciwnik nie ma figur pozwalających na wygraną lub gdy jeden z graczy nie ma możliwości wykonania żadnego legalnego ruchu, a jego król nie jest atakowany.

W związku z możliwością przegranej poprzez upłynięcie czasu na zegarze, zawodnicy muszą indywidualnie określić podczas gry, ile czasu są w stanie poświęcić danemu ruchowi, tak by nie stracić na niego zbyt wiele czasu, ale też, żeby ruch był jak najlepszy, co jest przedmiotem badań niniejszej pracy.

1.2 OPISAĆ NOTACJĘ szachową????? - nie będę w sumie nic z nią robić, ale jest

1.3 System rankingowy Glicko-2

opisać ogólnie troche historii o systemach rankingowych? System rankingowy ELO - pierwowzór systemu Glicko-2, został zaprezentowany w latach pięćdziesiątych dwudziestego wieku przez Węgierskiego fizyka i szachistę Arpada Elo (1903-1992) [CITE]. Początkowo był używany jedynie w szachach, jednak wraz ze wzrostem jego popularności zaczął być stosowany również w innych rozgrywkach z możliwością pomiaru poziomu zawodników. System ten jest pierwszym systemem mającym podłoże probabilistyczne i jest oparty na rozkładzie normalnym z ustaloną średnią. Przyznaje odpowiednią liczbę punktów zwycięzcy rozgrywki i odbiera przegranemu bazując na różnicy między ich aktualnym rankingiem.

System Glicko-2 używany przez stronę **Lichess.com**, na danych której oparta jest niniejsza praca, opracowany został przez Marka Glickmana jako ulepszenie systemu ELO. Podstawową zmianą jest uwzględnienie historycznych wyników każdego z zawodników w celu ustalenia wariancji aktualnego rankingu. Glickman w swojej pracy z roku 1998 [cite] przedstawia problem dwóch graczy o takim samym rankingu, z których jeden gra regularnie, a drugi wrócił do gry po długiej przerwie. System Glicko-2 przyznając punkt za grę bierze pod uwagę wiarygodność każdego z rankingów. Zawodnikowi grającemu regularnie zostanie przyznane bądź odebrane mniej punktów ze względu na duże potencjalne odchylenie rankingu przeciwnika od zadeklarowanej wartości. Innymi słowy, w miarę zwiększania się liczby partii gracza, przedział ufności dla jego realnego rankingu zawęża się i przypisany mu ranking zbiega do realnego poziomu i wiarygodność przypisanego rankingu jest uwzględniaan w przyznawaniu i odbieraniu punktów zawodnikom po zakończeniu partii.

WRZUCIĆ MATEMATYKĘ STOJĄCĄ ZA GLICKO-2??? x

Tutaj jakiś wykresik może jak wygląda rozkład rankingu zawodników na platformie Lichess ???

1.4 Funkcja oceny

Przed przystąpieniem do opisania funkcji, należy wytłumaczyć działanie silnika szachowego, który dokonuje oceny pozycji.

1.4.1 Stockfish

Stockfish jest jednym z najlepszych i najpopularniejszym obecnie używanym silnikiem szachowym, którego zaprojektowali Joost VandeVondele, Joon Kiiski, Marco Costalb, Tord Romstad, Gary Linscott, Stefan Geschwentner i Stéphane Nicolet i stale ulepszany jako oprogramowanie typu open-source. Strona **Lichess.com**[1] tak jak większość stron internetowych poświęconych szachom on-line, wykorzystuje go do analizy i oceny aktualnej pozycji.

Stockfish poprzez przeszukiwanie wg strategii mini-max z odcięciem, za pomocą algorytmu alfa-beta, analizuje legalne (czyli następujące po ruchu zgodnym z zasadami gry) pozycje, które mogą wyniknąć z aktualnej sytuacji na szachownicy. Dobierają na podstawie

Funkcja oceny 7

najlepszego możliwego zestawu ruchów (zakłada się, że każdy z graczy wykona najlepszy w ocenie silnika ruch) pozycje, które wystąpią dla określonej głębokości (głębokość 18 oznacza 18 ruchów białych i 18 czarnych wykonanych zaczynając z analizowanej pozycji) i na ich podstawie ocenia aktualną pozycję, określając przewagę jednego z graczy

1.4.2 Ewaluacja

Wspomniana wcześniej ewaluacja, wyliczana przez silnik szachowy jest wynikiem liniowej funkcji ważonej sumy cech, na którą składają się między innymi:

 f_b, f_c oznaczających wartość figur odpowiednio białych i czarnych

 k_b, k_c oznaczających bezpieczeństwo króla odpowiednio białych i czarnych

 m_b, m_c oznaczających mobilność figur odpowiednio białych i czarnych

 z_b, z_c oznaczających potencjalne zagrożenia wykonane odpowiednio białych i czarnych

Funkcje można dla zapewnienia intuicji zapisać w uproszeniu:

$$f(f_b, f_c, k_b, k_c, m_b, m_c, \dots) = c_1(f_b - f_c) + c_2(k_b - k_c) + c_3(m_b - m_c) + \dots$$
 (1.1)

gdzie: c_i są stałymi określającymi wagę danej pary zmiennych.

Wraz ze wzrostem wartości funkcji zwiększa się przewaga białych, natomiast wraz z jej spadkiem, przewaga czarnych. Wartość wynosząca 0 oznacza stan równowagi, czyli sytuacji, w której żadna ze stron nie ma przewagi lub gracz z gorszą sytuacją na szachownicy jest w stanie przy odpowiedniej kombinacji ruchów doprowadzić do remisu. Dodatkowo, w przypadku nieuniknionego zwycięstwa jednej ze stron w n ruchach, wynikiem funkcji zamiast odpowiedniej wartości liczbowej jest tekst #-n w przypadku wygranej czarnych lub #n w przypadku wygranej białych, oznaczający nieuchronną wygraną jednego z graczy po wykonaniu n ruchów, przy najlepszej obronie przeciwnika.

1.4.3 rodzaje błędów szachowych

W notacji szachowej obok zapisanego ruchu mogą pojawić się symbole określające jakość danego ruchu. Dla analizowanych danych, ruch oceniany jest przez silnik szachowy za pomocą skomplikowanych algorytmów, których głównym składnikiem jest zmiana oceny pozycji na szachownicy przez silnik. Przykładowo, gdy przed ruchem czarnych ocena pozycji wynosiła -2, a po ruchu 3, silnik oceni ruch jako duży błąd, jednakże jeśli wcześniejsza ocena wynosiła -18, a po ruchu -13, silnik nie oznaczy ruchu jako błędny, ponieważ przewaga czarnych i tak jest bardzo duża.

Wśród licznych oznaczeń silnika, w pracy analizowane będą następujące oznaczenia[cite: Corpus ID: 53767853 Secrets of Rook Endings J. Nunn Published 1992 Computer Science]:

- ?? duży błąd (ang. blunder)
- ? pomyłka (ang. *mistake*)
- ?! niedokładność (ang. *innacuracy*)

ZAGADNIENIE TEORETYCZNE II

użyte metody, teoria stojąca za rozwiązaniami problemów

Niniejszy rozdział poświęcony zostanie zagadnieniom teoretycznym z dziedziny statystyki, zastosowanych w analizie przedstawionych problemów.

2.1 zagadnienie 1...

sformułowanie i rozwiązanie problemów analitycznych

3.1 sformułowanie problemów

Podstawowym problemem podjętym w pracy jest analiza zależności pomiędzy czasem na wykonanie ruchu, a jego dokładnością. Główny nacisk kładziony zostanie na ruchy oznaczone przez silnik jako "duży błąd", co można uargumentować tym, że właśnie te ruchy mają największy wpływ na grę, szczególnie biorąc pod uwagę szachy szybkie, gdzie czasu na ruch jest zdecydowanie mniej, czego wynikiem jest to, że takie ruchy pojawiają się znacznie częściej. Dodatkową osią ujętą w rozważaniach będzie ranking zawodników i jego wpływ na rozkłady danych. Sprawdzona i wzięta pod uwagę zostanie również zależność między numerem ruchu, a czasem na wykonanie oraz jego dokładnością. Zwieńczeniem pracy będzie podjęcie próby wyznaczenia optymalnego czasu na wykonanie ruchu, tak, by zminimalizować ryzyko popełnienia dużego błędu.

3.2 Dane

Dane potrzebne do analizy zostały pobrane z platformy Lichess [2]. Są one przechowywane w pliku o rozmiarze ponad 72 Gb. Zawiera on wszystkie gry (ponad 35 milionów) rozegrane na platformie w maju 2019 roku. Ponadto, ok. 7% gier zostało wcześniej przeanalizowane przez silnik szachowy Stockfish i posiadają dane punktowe o nazwie Eval, określające unormowaną przewagę jednego z graczy oraz określenie części ruchów przez silnik jako błędne. Dodatkowo silnik określa jakość wykonanego ruchu wg własnych kryteriów (opisane w sekcji 1.4.3 na stronie 7). Przykładowy zapis jednej takiej gry z pliku został zaprezentowany na rysunku 3.1. Informacje potrzebne do analizy to:

- WhiteElo ranking białych
- BlackElo ranking czarnych
- TimeControl czas na wykonanie ruchów każdego z graczy w formacie "sekundy + sekundy dodane za wykonanie ruchu"
- % eval aktualna przewaga jednej ze stron
- zapis partii ze wskazaniem błędnych ruchów w ocenie silnika

- % clk pozostały czas w formacie "godziny: minuty: sekundy"
- result wynik partii



Rysunek 3.1: Przykładowy zapis jednej partii zawierającej ocenę silnika Stockfish

Istotnym problemem związanym z danymi jest dokładność pozostałego czasu jedynie do sekund, co zaburza lekko ich istotę, szczególnie podczas analizy gier w krótszym formacie czasowym, gdzie części sekundy są bardziej znaczące. Dodatkowo ruch, który oznaczony został jako n sekund w rzeczywistości jest ruchem z przedziału obustronnie otwartego (n-1,n+1) sekund. Przy większej liczbie danych nie ma to jednak większego znaczenia, ponieważ zgodnie z Prawem Wielkich Liczb można takie dane uśrednić do n. Jedynym problemem, który może się pojawić jest późniejsze sprawdzenie zgodności danych z rozkładem.

3.2.1 Odfiltrowanie danych

Pierwszym krokiem potrzebnym do wykonania analizy jest odfiltrowanie danych. Po rozdzieleniu pliku tekstowego na kolejne gry, pozostawione zostały jedynie te, które zostały wcześniej ocenione przez silnik. Następnie dla każdej z nich przeanalizowany został każdy ruch, do którego zostały przypisane następujące atrybuty:

- score ocena ruchu wg silnika Stockfish
- WhiteElo ranking białych
- BlackElo ranking czarnych
- TimeControl czas na wykonanie ruchów każdego z graczy w formacie "sekundy + sekundy dodane za wykonanie ruchu"
- color gracz, wykonujący dany ruch
- move numer ruchu w danej partii
- result wynik partii

Stworzona baza zawiera 9 737 663 posunięć ze 154 981 gier, co daje średnią 31.41 ruchu na grę (jeden ruch oznacza posunięcie białych i czarnych). Fragment bazy przedstawiony został na rysunku 3.2.

	score	delta_time	WhiteElo	BlackElo	TimeControl	color	move	Result
83	0	8.0	1888.0	1796.0	300+0	b	20.0	0-1
84	mistake	22.0	1888.0	1796.0	300+0	W	21.0	0-1
85	0	2.0	1888.0	1796.0	300+0	b	21.0	0-1
86	0	0.0	1888.0	1796.0	300+0	W	22.0	0-1
87	0	13.0	1888.0	1796.0	300+0	b	22.0	0-1
88	0	13.0	1888.0	1796.0	300+0	W	23.0	0-1
89	0	17.0	1888.0	1796.0	300+0	b	23.0	0-1
90	mistake	7.0	1888.0	1796.0	300+0	W	24.0	0-1
91	0	7.0	1888.0	1796.0	300+0	b	24.0	0-1
92	blunder	7.0	1888.0	1796.0	300+0	w	25.0	0-1
93	0	16.0	1888.0	1796.0	300+0	b	25.0	0-1

Rysunek 3.2: fragment bazy ruchów wraz z oceną silnika

3.3 Analiza pierwszego problemu

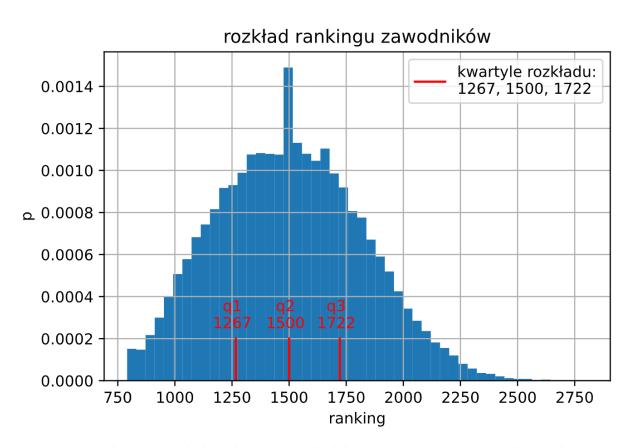
Pierwszym problemem, który zostanie poruszony jest zbadanie statystycznej zależności jakości wykonanego ruchu wg oceny silnika Stockfish od czasu potrzebnego na jego wykonanie. W celu uzyskania bardziej precyzyjnych wyników pierwsze 4 ruchy (zarówno białych jak i czarnych) nie będą brane pod uwagę. Są one elementem teorii otwarć szachowych [ref ISBN 0-19-280049-3], w związku z czym wykonywane są zazwyczaj bardzo szybko i ze znikomą szansą popełnienia błędu, co może spowodować zaburzenie danych. Dodatkowo na stronie Lichess.com pierwszy ruch obydwu zawodników zawsze zabiera 0 sekund.

Tabela 3.1: baza ruchów z gier na portalu Lichess z maja 2019, 6 najpopularniejszych formatów

Format czasowy	liczba ruchów
sekundy+sekundy przyznawane po wykonaniu ruchu	w bazie
600+0	1 813 841
300+0	1 409 904
60+0	1 251 388
900+15	1 104 458
180+0	1 057 292
300+3	941 262

W pracy, analizowane będzie sześć najpopularniejszych formatów czasowych granych na platformie Lichess. Są one przedstawione w tabeli 3.1. Przy analizie z uwzględnieniem rankingu graczy, zastosowane będą podziały kwartylowe wg rankingu białych, rozkład

rankingu wraz z zaznaczonymi kwartylami pokazany jest na rysunku 3.3. Jak widać zbiega on do rozkładu normalnego. Anomalia dla rankingu 1500 związana jest z tym, że jest to ranking przyznawany każdemu graczowi przy jego pierwszej rozgrywce na platformie.

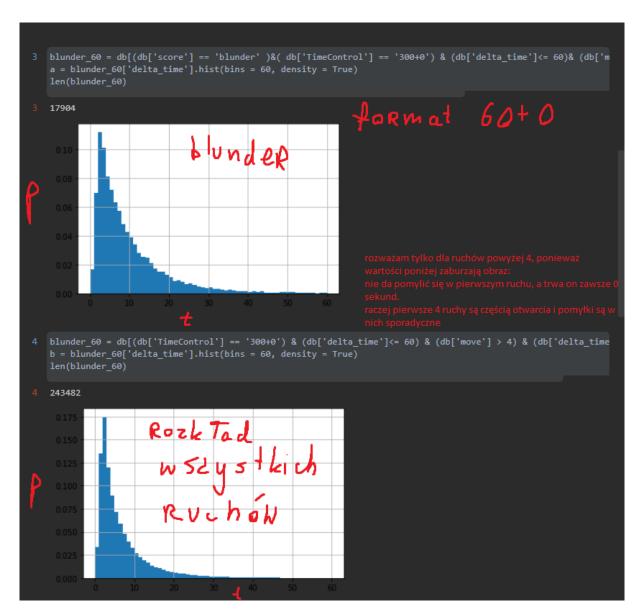


Rysunek 3.3: rozkład rankingu zawodników wraz z zaznaczonymi kwartylami

Po przyjrzeniu się danym można zauważyć, że pochodzą one z rozkładu logarytmicznienormalnego, co można uwarunkować tym, że w zdecydowanej większości pozycji zawodnik potrzebuje chwili na odpowiedź na ruch przeciwnika, tj

TUTAJ rozkłady,

np dla formatu 60+0 (60 sekund, brak dodawanego czasu po wykonaniu ruchu)



Rysunek 3.4: xxx

oś x \rightarrow czas

oś y -> nieznormalizowana liczba ruchów typu 'blunder' (te najcięższe pomyłki)

rozkład gamma... (?)

TO DO:

sprawdzenie zmian dla rankingu graczy, różnicy rankingu graczy porównanie z czasem na wykonanie każdego ruchu

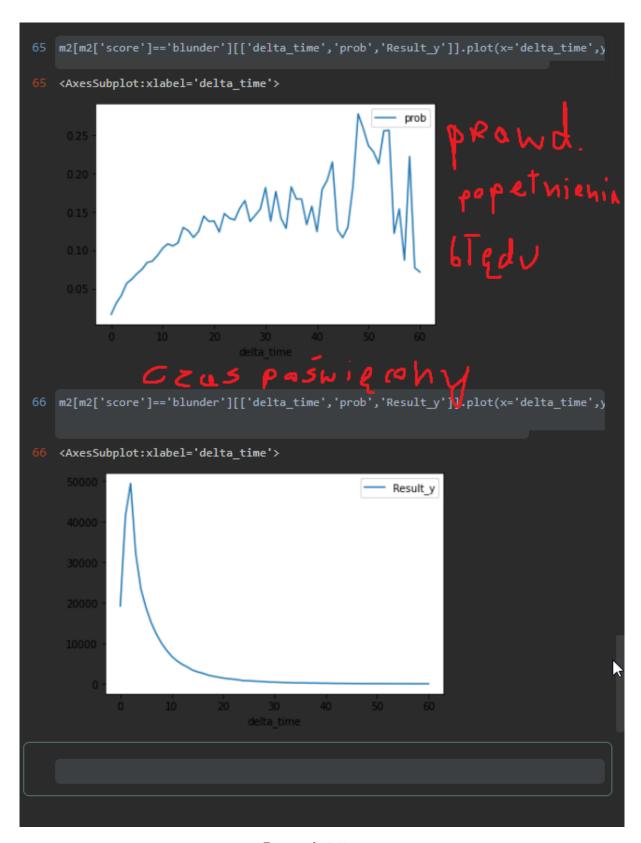
TO DO:

czy różnica pomiędzy formatem z dodawanym czasem po ruchu, a bez dodawanego czasu jest widoczna?

3.4 analiza drugiego problemu...

tutaj statystyczne prawdopodobieństwo wykonania złego ruchu pod warunkiem poświęceniu mu konkretnego czasu,

np, w formacie czasowym 60+0 na ruch zostały poświęcone 4 sekundy, jaka jest szansa, że został popełniony błąd



Rysunek 3.5: aaa

 $\operatorname{CEL}:$ ile powinno się poświęcić czasu na ruch by obniżyć prawdopodobieństwo wykonania błędu?

Tego jeszcze nie analizowałem

3.5 analiza trzeciego problemu... and so on...

w którym ruchu jest największa szansa na popełnienie błędu? dla wszystkich rang



Rysunek 3.6: aaa

Rozdział 4 wnioski, podsumowanie

tabelka

Tabela ??

Tabela 5.1: Podstawowa Tabela

Państwo	PKB (w milionach USD)	Stopa bezrobocia
Stany Zjednoczone	75 278 049	4,60%
Chiny	11 218 281	$4{,}10\%$
Japonia	$4\ 938\ 644$	$3{,}10\%$
Niemcy	3 466 639	$6{,}00\%$
Wielka Brytania	2 629 188	4,60%

Źródło: opracowanie własne

rysunek

Rysunki do pracy dyplomowej należy wstawiać w sposób podobny do wstawiania tabel, z zasadniczą różnicą polegającą na tym, że podpis powinno umieszczać się centralnie pod rysunkiem, a nie powyżej niego. Numeracja i sposób cytowania pozostają bez zmian, przy czym tabele i rysunki nie mają numeracji wspólnej, np. po Tabeli 5.1 występuje Rysunek 6.1 (o ile jest to pierwszy rysunek rozdziału pierwszego), a nie Rysunek 1.3.



Rysunek 6.1: Podstawowy Rysunek

Definicje, lematy, twierdzenia, przykłady i wnioski

Definicje, lematy, twierdzenia, przykłady i wnioski piszemy w pracy tak:

Definicja 7.1 (Martyngał). Tu piszemy treść definicji martyngału.

Lemat 7.2. Tu piszemy treść lematu.

cytowanie

Do cytowania używamy komendy cite. W nawiasie klamrowym podajemy klucz, którego użyliśmy w pliku bibliografia.bib. Przykład: [3] lub [4, chap. 2].

Dodatek

Dodatek w pracach matematycznych również nie jest wymagany. Można w nim przedstawić np. jakiś dłuższy dowód, który z pewnych przyczyn pominęliśmy we właściwej części pracy lub (np. w przypadku prac statystycznych) umieścić dane, które analizowaliśmy.

Bibliografia

- [1] Lichess computer engine used from 2014. https://lichess.org/blog/U4mtoEQAAEEAgZRL/strongest-chess-player-ever. Accessed: 2010-09-30.
- [2] Lichess database. https://database.lichess.org/. Accessed: 2010-09-30.
- [3] Albert Einstein. Zur Elektrodynamik bewegter Körper. (German) [On the electrodynamics of moving bodies]. *Annalen der Physik*, 322(10):891–921, 1905.
- [4] Michel Goossens, Frank Mittelbach, and Alexander Samarin. *The LaTeX Companion*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1993.