



# Cuestionario de Analogías y Conexiones de la Física

## Cap. 8, 10

Rodrigo Vega Vilchis  
Dinámica de Medios Deformables

25 Octubre 2021

1. Describe los dos tipos de onda que pueden propagarse en un medio elástico y escribe la forma de la función que representa el desplazamiento de una partícula para cada una de ellas. Explica el significado de todos los parámetros físicos involucrados.

Los tipos de onda son: **ondas longitudinales**, que son aquellas que se desplazan en la misma dirección del medio de propagación y las **ondas transversales** que son aquellas que se desplazan en dirección ortogonal a la dirección de propagación de la onda. Las funciones que representan el desplazamiento de partículas para ambos casos se puede escribir de manera general como sigue:

$$f(x, t) = f(x \pm vt) \quad (1)$$

donde el signo negativo representa su propagación hacia la derecha y el signo positivo representa su propagación hacia la izquierda. Un ejemplo 1-Dimensional puede representar una onda longitudinal mientras que ejemplos de dos dimensiones en adelante pueden representar ondas transversales. Para el primer caso tenemos

$$f(x, t) = A \sin(kx - \omega t + \phi)$$

donde  $A$  representa la Amplitud, el  $\sin$  cumple con la ecuación 1,  $k$  es el número de onda,  $\omega$  es la frecuencia angular de la onda y  $\phi$  representa a fase de la onda<sup>1</sup>. Para poder representar una onda transversal, podemos hacer uso de ondas en dos dimensiones, sino es que hasta tres

$$\psi(\vec{r}, t) = A e^{(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t + \phi)}$$

en este caso, tenemos una función de onda que cumple 1 pero además es vectorial, aquí lo único que cambia con respecto de la onda longitudinal es el vector de propagación  $\vec{k}$  (n-dimensional)<sup>2</sup> que nos indica la dirección de propagación de la onda. Ambas ecuaciones deben cumplir 1 pero además también deben cumplir la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} \quad (2)$$

2. ¿Cuántas velocidades puedes definir en una onda? Explica brevemente el significado físico de cada una.

Que yo sepa, existe la velocidad de fase y la velocidad de grupo en una onda. La velocidad de fase hace referencia a la velocidad de propagación de la onda, es decir, la tasa a la cual la fase de la onda se propaga en el medio. La podemos definir por medio de

$$v = \frac{\omega}{k}$$

es decir, la frecuencia angular entre el número de onda. Por otro lado, la velocidad de grupo hace referencia la velocidad de un “grupo” de ondas, si tenemos al menos dos ondas que se

---

<sup>1</sup>es decir desde “donde” comienza

<sup>2</sup>para términos físicos  $n = 2, 3$

superponen para producir un tren de ondas, decimos que la velocidad de grupo es la velocidad con la que las variaciones en la forma de la amplitud de la onda (envolvente) se propagan en el espacio, la podemos expresar por medio de

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

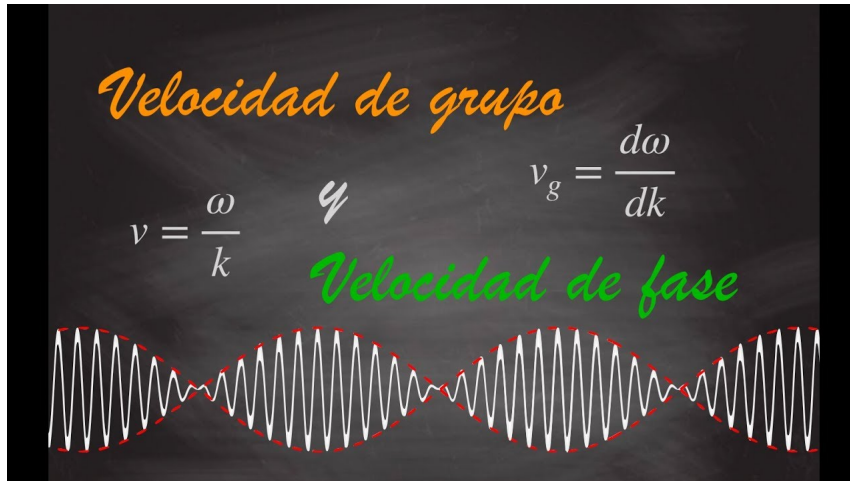


Figura 1: Velocidades de fase y grupo, muestra de una envolvente.

3. La interferencia entre ondas es un proceso lineal. ¿Qué es la interferencia? ¿Qué quiere decir que sea un proceso lineal?

La interferencia es el resultado de la superposición de  $n$  ondas (para  $n \geq 2$ ), formando una onda resultante de mayor, menor o igual magnitud que cada una de las ondas. En ecuaciones diferenciales, un “proceso lineal” refiere a que sus soluciones se pueden obtener mediante combinaciones lineales de otras soluciones (de la misma ecuación diferencial); por tanto, si tenemos dos o más soluciones, cualquier superposición lineal de ellas también será solución. Por ejemplo, si  $\psi_1$  y  $\psi_2$  son soluciones de la Ec. 2, entonces

$$\Psi = a\psi_1 + b\psi_2$$

también es solución de 2, donde  $a$  y  $b$  son constantes arbitrarias.

4. ¿Qué es una onda estacionaria y cómo se forma? ¿Qué es un nodo? ¿Qué frecuencias pueden tener las ondas estacionarias que se forman en una cuerda de longitud  $L$  cuando ambos extremos tienen un nodo?

Una onda estacionaria es aquella que está confinada a un espacio limitado, tal como un tubo o una cámara de vacío etc. Es formada debido a la interferencia entre dos ondas viajeras que se desplazan en sentidos contrarios (una hacia la izquierda y otra hacia la derecha). Tienen la particularidad de que sus nodos siempre quedan inmóviles, y son aquellos puntos donde la perturbación del medio es mínima (igual a 0).

Las ondas estacionarias tienen la forma general de la siguiente función

$$\Psi(x, t) = 2A \cos(\omega t) \sin(kx) \quad (3)$$

el número de nodos admitidos en una onda estacionaria confinada a un medio de longitud  $L$  está dada por

$$\Psi(x = L, t) = 2A \cos(\omega t) \sin(kL) = 0$$

eso quiere decir que se debe cumplir que  $\sin(kL) = 0$ , si y solo si los valores son

$$kL = \frac{2\pi}{\lambda}L = n\pi, \quad \Rightarrow \quad \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

solo las ondas cuya longitud de onda satisface esta condición pueden subsistir como ondas estacionarias en la cuerda de longitud  $L$ , y se conocen como modos normales. Las frecuencias asociadas a dichas longitudes de onda para poder producir modos normales son:

$$v = \lambda_n \nu, \quad \text{considerando la velocidad de fase de la onda}$$

donde  $\nu$  es la frecuencia de la onda, entonces

$$\begin{aligned} v &= \frac{2L}{n} \nu \\ \Leftrightarrow \\ \nu_n &= \frac{vn}{2L} \end{aligned}$$

$\nu_n$  son las frecuencias admitidas para producir ondas estacionarias en una cuerda de longitud  $L$ .

5. ¿Por qué cambias la frecuencia de la onda estacionaria cuando “pisas una cuerda” de guitarra? Porque se reduce el “espacio” (en este caso la longitud) al que queda confinada la onda estacionaria, lo que provoca que se reduzca el número de longitudes de onda permitidas en la cuerda (pues  $\lambda_n \propto L$ ), y en cambio aumenta el número de frecuencias de la cuerda, pues  $\nu_n$  varía de manera inversamente proporcional a  $L$ .
6. ¿Qué es la resonancia? ¿Encuentra la amplitud de una onda sujeta a una fuerza periódica  $F_0 \cos(\omega t)$  cuando la frecuencia natural de oscilación del sistema es  $\omega_0$ . ¿Cómo está relacionada esta expresión con la resonancia?

La resonancia es un fenómeno que se da cuando un incremento de amplitud producida por una fuerza periódica iguala la frecuencia natural de un ente físico. En dicho caso, el ente entra en resonancia produciendo un estado de excitación que puede llevar a romper una copa, alinear dipolos magnéticos/eléctricos etc. Para encontrar la amplitud de la fuerza periódica mencionada aplicamos la siguiente ecuación diferencial

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t)$$

que es la representación del oscilador armónico con oscilaciones forzadas, pues al oscilador le estamos aplicando la fuerza:  $F_0 \cos(\omega t)$ . Resolvemos

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{k}{m}x &= \frac{F_0}{m} \cos(\omega t), & \text{hacemos } \omega_0^2 &= \frac{k}{m} \\ \ddot{x} + \omega_0^2 x &= \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \end{aligned}$$

resolviendo la ecuación Homogénea (la de la izquierda) para cualquier frecuencia  $\omega$  tenemos:

$$x(t) = A \cos(\omega t)$$

sustituyendo en la ecuación diferencial tenemos

$$\begin{aligned} -A\omega^2 \cos(\omega t) + A\omega_0^2 \cos(\omega t) &= \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \\ A\cancel{\cos(\omega t)}[\omega_0^2 - \omega^2] &= \frac{F_0}{m}\cancel{\cos(\omega t)} \\ A &= \frac{F_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \end{aligned}$$

notemos que si  $\omega = \omega_0$  ocurre  $A \rightarrow \infty$  lo que se traduce en que el ente entra en resonancia, y pueden ocurrir diversas cosas, desde la ruptura de materiales sólidos, como copas y puentes, hasta la alineación de dipolos magnéticos/eléctricos.

7. Menciona algunos ejemplos de resonancias.

Los ejemplos claros e interesantes que se muestran en el capítulo 8 es principalmente resonancia de tipo magnética, como las ya mencionadas rupturas de vidrios, copas, puentes e inclusive en edificios que entran en resonancia con las ondas de un sismo. Otro ejemplo es la resonancia magnética nuclear, que consiste en que algunos núcleos en campos magnéticos intensos, absorben y emiten energía de radiofrecuencia que puede ser analizada por una antena. Otro ejemplo que a mi me gusta mucho es el **Esparcimiento de Rayleigh**<sup>3</sup> que consiste en un sistema en donde hay luz incidente a un medio con partículas del orden igual o menor a la longitud de onda de la luz incidente; el campo eléctrico incidente actúa sobre las cargas de las partículas del medio provocando que oscilen en su misma frecuencia, el resultado es que se forman pequeños dipolos radiantes de luz azul. Esta es la razón por la que vemos el cielo azul, las partículas de la atmosfera son lo suficientemente pequeñas para realizar dispersión de Rayleigh en forma de luz azul, por el contrario las nubes tienen partículas más grandes y no producen este tipo de dispersión.

8. Calcula la frecuencia natural para un estado estacionario de una masa puntual sujeta a un resorte de constante elástica  $k$ .

Es necesario para ello plantear la ley de Hooke en su ecuación diferencial

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

donde  $m$  es la masa de la partícula, y  $k$  es la constante elástica. Resolvemos como en el ejercicio anterior

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \frac{k}{m}x &= 0, & \text{definimos } \omega_0^2 &= \frac{k}{m} \\ \ddot{x} + \omega_0^2 x &= 0 & \text{resolviendo el polinomio característico} \\ r^2 + \omega_0^2 &= 0 \\ r &= \pm i\omega_0\end{aligned}$$

Por tanto la solución de la ecuación diferencial es

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t)$$

donde  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

9. ¿Qué es la amplitud modulada? ¿Por qué es útil este concepto para las transmisiones de radio?

Cuando tenemos al menos dos ondas que tienen misma amplitud pero diferente frecuencia, existe un fenómeno de superposición, podemos representarla por medio de

$$\Psi(x, t) = 2A \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \omega}{2}t\right) \cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t)$$

donde  $\Delta k, \Delta \omega \ll 1$ , por lo que la amplitud varía lentamente, mientras que el factor  $\cos(\bar{k}x - \bar{\omega}t)$  representa la **onda portadora**, tiene una longitud de onda y una frecuencia semejantes a la de las ondas que se superponen, que son mucho mayores que las de modulación, identificamos las cantidades correspondientes como

$$\begin{aligned}\bar{k} &\rightarrow \text{número de onda promedio} \\ \bar{\omega} &\rightarrow \text{frecuencia angular promedio} \\ k_m = \frac{\Delta k}{2} &\rightarrow \text{número de onda de modulación} \\ \omega_m = \frac{\Delta \omega}{2} &\rightarrow \text{frecuencia angular de modulación}\end{aligned}$$

(para este caso tiene sentido poder definir la velocidad de grupo de la pregunta 2)

---

<sup>3</sup>O dispersión de Rayleigh

10. ¿Qué es una guía de onda y qué es un resonador?

Las guías de ondas son aquellas sorprendentes estructuras en las que las ondas son transmitidas siguiendo una trayectoria definida en lugar de propagarse libremente en un medio. En palabras llanas es como un caminito que tiene cierta estructura y sirve para “guiar” el camino de propagación de las ondas (tal y como dice el nombre). Si el confinamiento es en tres dimensiones decimos que se trata de un resonador. Es decir, un resonador es una extensión de una guía de ondas en tres dimensiones, es un arreglo que confina y almacena ondas de ciertas frecuencias. Un ejemplo es un sistema óptico en el que la luz se refleja múltiples veces en las paredes sin posibilidad de escape.

11. ¿Qué es la reflexión de una onda?, ¿y la reflexión interna total? ¿qué es el ángulo crítico? Explica cómo es que ‘vivimos’ en una guía de ondas de bajas frecuencias’ y cómo es que esto se usa para comunicarse (reflexión de ondas EM)?

La reflexión de una onda (hablando de ondas electromagnéticas<sup>4</sup>, no estoy seguro si se extiende a otro tipo de ondas) es aquella propiedad en donde un rayo incide a una superficie con cierto ángulo y se trasmite otro rayo con el mismo ángulo de incidencia, esto está demostrado por la ley de Snell

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (4)$$

donde  $n_1$  y  $n_2$  son los índices de refracción del medio incidente y el medio de trasmisión. La reflexión total interna es un tipo de reflexión para cuando existe un ángulo crítico  $\theta_c$  tal que  $\sin \theta_2 = 1$ , es decir  $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ . Podemos conocer dicho ángulo crítico si de la ecuación 4 hacemos

$$\theta_1 = \theta_c = \arcsin \left( \frac{n_2}{n_1} \right)$$

Nosotros vivimos “dentro” de una guía de ondas de baja frecuencia cuyas fronteras conductoras son la superficie de la Tierra y la ionósfera. Esta guía confina ondas electromagnéticas cuya frecuencia se encuentra aproximadamente en el rango de 3–30 kHz, que se usan para comunicaciones de largo alcance y sistemas de navegación terrestre.

La ionósfera es la capa de la atmósfera que yace entre 75–400 km sobre la superficie terrestre, constituida por una mezcla de partículas neutras (moléculas como  $O_2$ ,  $N_2$ ,  $NO$  y átomos como O, Ar, H), partículas ionizadas ( $O_2^+$ ,  $N_2^+$ ,  $NO^+$ ) y electrones libres, que juntas forman un plasma. Tal ionización es producida principalmente por la radiación solar en el extremo UV y por rayos cósmicos.

La ionósfera, como todo plasma, interactúa con las ondas electromagnéticas de un modo distinto que un gas. Cuando una onda EM se propaga en un plasma, los electrones libres empiezan a oscilar tratando de seguir la frecuencia de la onda. Si la frecuencia es baja, los electrones en la ionósfera oscilan en resonancia con la frecuencia de la onda incidente y reemiten la señal de regreso a la superficie de la Tierra, haciendo un efecto de reflexión. El efecto de reflexión depende del ángulo de incidencia de la onda y la densidad electrónica del plasma. Esta última varía con la altura en la ionósfera, misma que a su vez depende de la hora del día (pues por la noche no recibe radiación solar), estación de año, fase solar, etc.

---

<sup>4</sup>específicamente las de la luz

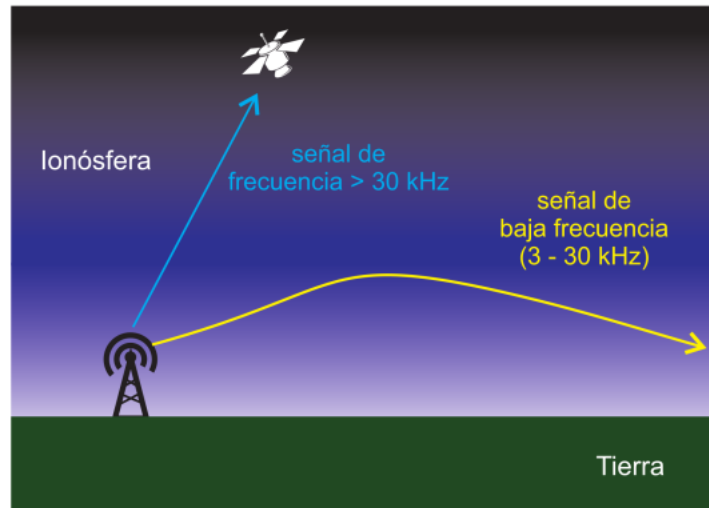


Figura 2: La ionosfera de la Tierra actúa como reflector de ondas EM de baja frecuencia (aprox. 3 – 30 kHz)

12. ¿Cómo es que fenómenos aparentemente inconexos y de tan diferentes escalas (e.g. el oscilador armónico, el MAS, el MCU, el péndulo, la cuerda, la luz, los circuitos eléctricos, etc.) tienen el mismo origen físico fundamental?

Todos estos fenómenos están regidos por la segunda Ley de Newton de manera directa o indirecta, (más que nada directa) solo que con sus debidas sutilezas tal y como un amortiguamiento, una fuerza externa, un campo eléctrico externo etc. La segunda ley de Newton se puede modelar con ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden y sus soluciones son similares. Además, todos estos fenómenos son ondulatorios, y en todos ellos hay propagación de energía, momento lineal o alguna otra cantidad física, y cada una de esas cantidades se conservan en el tiempo, es decir, obedecen las leyes de conservación.