Tarea 1

Rodrigo Vega Vilchis
Dinámica de Medios Deformables

8 Octubre 2021

1. Demostrar las siguientes identidades en notación de índices para $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y $\vec{r}$

   a) $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\times(\vec{c}\times\vec{a})=\left(\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right)^2$ Pasando a notación de índices tenemos

$$(a_i\vec{e}_i\times b_j\vec{e}_j)\cdot(b_j\vec{e}_j\times c_m\vec{e}_m)\times(c_m\vec{e}_m\times a_i\vec{e}_i)=(a_i\vec{e}_i\cdot(b_j\vec{e}_j\times c_m\vec{e}_m))^2$$

   Primero veamos que nos da el lado izquierdo de la igualdad:

$$\begin{aligned}
&=(a_ib_j\ \varepsilon_{ijk}\vec{e}_k)\cdot(b_jc_m\ \varepsilon_{jmh}\vec{e}_h)\times(c_ma_i\ \varepsilon_{mir}\vec{e}_r)\\
&=(a_ib_j\ \varepsilon_{ijk}\vec{e}_k)\cdot(b_jc_mc_ma_i\ \varepsilon_{jmh}\varepsilon_{mir})\ \varepsilon_{hrn}\vec{e}_n\\
&=(a_ib_j\ \varepsilon_{ijk})(b_jc_mc_ma_i\ \varepsilon_{jmh}\varepsilon_{mir})\ \varepsilon_{hrn}\ \vec{e}_k\cdot\vec{e}_n,\qquad \vec{e}_k\cdot\vec{e}_n=\delta_{kn}\\
&=(a_ib_jb_jc_mc_ma_i)[\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jmh}\varepsilon_{mir}\varepsilon_{hrk}]\\
&=(a_ib_jb_jc_mc_ma_i)[\delta_{im}\delta_{kh}-\delta_{ih}\delta_{km}][\delta_{mh}\delta_{ik}-\delta_{mk}\delta_{ih}]\\
&=(a_ib_jb_jc_mc_ma_i)[\delta_{im}\delta_{kh}\delta_{mh}\delta_{ik}-\delta_{im}\delta_{kh}\delta_{mk}\delta_{ih}-\delta_{ih}\delta_{km}\delta_{mh}\delta_{ik}+\delta_{ih}\delta_{km}\delta_{mk}\delta_{ih}]\\
&=(a_ib_jb_jc_mc_ma_i)[\delta_{ih}\delta_{hi}-\delta_{ik}\delta_{ki}-\delta_{hk}\delta_{kh}+\delta_{hh}\delta_{kk}]\\
&=(a_ib_jb_jc_mc_ma_i)[\cancel{\delta_{ii}}-\cancel{\delta_{ii}}-\delta_{hh}+\delta_{hh}\delta_{kk}]\\
&=(a_ib_jb_jc_mc_ma_i)[-3+9]\\
&=6(a_ia_ib_jb_jc_mc_m)
\end{aligned}$$

   ahora veamos que sucede del lado derecho de nuestra igualdad

$$\begin{aligned}
(a_i\vec{e}_i\cdot(b_j\vec{e}_j\times c_m\vec{e}_m))^2&=(a_i\vec{e}_i\cdot(b_jc_m\ \varepsilon_{jmh}\vec{e}_h))^2\\
&=(a_ib_jc_m\ \varepsilon_{jmh}\vec{e}_h\cdot\vec{e}_i)^2\\
&=(a_ib_jc_m\ \varepsilon_{jmh}\delta_{hi})^2\\
&=(a_ib_jc_m\ \varepsilon_{jmi})^2\\
&=(a_ib_jc_m\ \varepsilon_{jmi})(a_ib_jc_m\ \varepsilon_{jmi})\\
&=(a_ia_ib_jb_jc_mc_m)\ \varepsilon_{jmi}\varepsilon_{jmi}\\
&=(a_ia_ib_jb_jc_mc_m)[\delta_{jj}\delta_{mm}-\delta_{jm}\delta_{mj}],\qquad \delta_{jm}\delta_{mj}=\delta_{jj}\\
&=(a_ia_ib_jb_jc_mc_m)[9-3]\\
&=6(a_ia_ib_jb_jc_mc_m)
\end{aligned}$$

   b) $\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}-(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}$

   Comencemos por el lado izquierdo de la igualdad

$$\begin{aligned}
a_i\vec{e}_i\times(b_j\vec{e}_j\times c_m\vec{e}_m)&=a_i\vec{e}_i\times(b_jc_m\ \varepsilon_{jmh}\vec{e}_h)\\
&=(a_ib_jc_m\ \varepsilon_{jmh})\vec{e}_i\times\vec{e}_h\\
&=(a_ib_jc_m\ \varepsilon_{jmh}\varepsilon_{ihr})\vec{e}_r\\
&=(a_ib_jc_m[\delta_{ji}\delta_{mr}-\delta_{jr}\delta_{mi}])\,\vec{e}_r\\
&=(a_ib_jc_m\delta_{ij}\delta_{mr}-a_ib_jc_m\delta_{jr}\delta_{mi})\,\vec{e}_r\\
&=a_ib_ic_r\vec{e}_r-a_ic_ib_r\vec{e}_r
\end{aligned}$$

analicemos el lado derecho de la igualdad

$$
\begin{aligned}
\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}-(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} &= (a_i\vec{e}_i\cdot b_j\vec{e}_j)c_m\vec{e}_m-(a_i\vec{e}_i\cdot c_m\vec{e}_m)b_j\vec{e}_j\\
&=(a_ib_j\delta_{ij})c_m\vec{e}_m-(a_ic_m\delta_{im})b_j\vec{e}_j\\
&=a_ib_ic_m\vec{e}_m-a_ic_ib_j\vec{e}_j, \qquad m \text{ y } j \text{ son índices mudos por lo que)}\\
&=a_ib_ic_r\vec{e}_r-a_ic_ib_r\vec{e}_r
\end{aligned}
$$

c) $\nabla\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\vec{a}\times\left(\nabla\times\vec{b}\right)+\vec{b}\times(\nabla\times\vec{a})+(\vec{a}\cdot\nabla)\vec{b}+\left(\vec{b}\cdot\nabla\right)\vec{a}$

Para este ejercicio y posteriores voy a denotar las parciales de la siguiente forma:

$$
\frac{\partial}{\partial x_i}=\partial_i
$$

nuevamente, comenzando por la parte izquierda de la igualdad tenemos:

$$
\begin{aligned}
\nabla\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) &= \vec{e}_k\partial_k(a_i\vec{e}_i\cdot b_j\vec{e}_j)\\
&=\vec{e}_k\partial_k(a_ib_j\delta_{ij})\\
&=\vec{e}_k\partial_k(a_ib_i)\\
&=(a_i\partial_kb_i+b_i\partial_ka_i)\vec{e}_k
\end{aligned}
$$

analizando la parte derecha de la igualdad tenemos

$$
a_i\vec{e}_i\times(\vec{e}_k\partial_k\times b_j\vec{e}_j)+b_j\vec{e}_j\times(\vec{e}_k\partial_k\times a_i\vec{e}_i)+(a_i\vec{e}_i\cdot\vec{e}_k\partial_k)b_j\vec{e}_j+(b_j\vec{e}_j\cdot\vec{e}_k\partial_k)a_i\vec{e}_i=
$$

$$
\begin{aligned}
&=a_i\vec{e}_i\times(\partial_kb_j\ \varepsilon_{kjh}\vec{e}_h)+b_j\vec{e}_j\times(\partial_ka_i\ \varepsilon_{kir}\vec{e}_r)+(\partial_ka_i\delta_{ik})b_j\vec{e}_j+(\partial_kb_j\delta_{jk})a_i\vec{e}_i\\
&=(a_i\partial_kb_j\ \varepsilon_{kjh}\varepsilon_{inh})\vec{e}_n+(b_j\partial_ka_i\ \varepsilon_{kir}\varepsilon_{jmr})\vec{e}_m+(a_i\partial_ib_j)\vec{e}_j+(b_j\partial_ja_i)\vec{e}_i\\
&\qquad \varepsilon_{kjh}\varepsilon_{inh}=[\delta_{kn}\delta_{ji}-\delta_{ki}\delta_{jn}], \qquad \varepsilon_{kir}\varepsilon_{jmr}=[\delta_{km}\delta_{ij}-\delta_{kj}\delta_{im}]\\
&=(a_i\partial_kb_j[\delta_{kn}\delta_{ji}-\delta_{ki}\delta_{jn}])\vec{e}_n+(b_j\partial_ka_i[\delta_{km}\delta_{ij}-\delta_{kj}\delta_{im}])\vec{e}_m+(a_i\partial_ib_j)\vec{e}_j+(b_j\partial_ja_i)\vec{e}_i\\
&=(a_i\partial_nb_i-a_i\partial_ib_n)\vec{e}_n+(b_j\partial_ma_j-b_j\partial_ja_m)\vec{e}_m+(a_i\partial_ib_j)\vec{e}_j+(b_j\partial_ja_i)\vec{e}_i
\end{aligned}
$$

cambiando n por j y m por i tenemos

$$
=(a_i\partial_nb_i)\vec{e}_n-\cancel{(a_i\partial_ib_j)\vec{e}_j}+(b_j\partial_ma_j)\vec{e}_m-\cancel{(b_j\partial_ja_i)\vec{e}_i}+\cancel{(a_i\partial_ib_j)\vec{e}_j}+\cancel{(b_j\partial_ja_i)\vec{e}_i}
$$

cambiando n y m por k tenemos

$$
=(a_i\partial_kb_i+b_j\partial_ka_j)\vec{e}_k
$$

cambiando j por i tenemos

$$
=(a_i\partial_kb_i+b_i\partial_ka_i)\vec{e}_k
$$

vale la pena aclarar que en el producto de epsilons, se hizo una permutación para que nos diera -1, y con ello poder realizar la cancelación subsecuente, ya que en caso contrario, no se hubiera podido reducir el resultado.

d) $\nabla(r^n)=nr^{n-1}\vec{r}$

Resolviendo de una vez todo tenemos

$$
\begin{aligned}
\nabla(r^n)&=\vec{e}_k\partial_k(r^n)\\
&=\vec{e}_k(\partial_kr^n)\\
&=\vec{e}_k(nr^{n-1}r_k)\\
&=nr^{n-1}\vec{r}
\end{aligned}
$$

e) $\nabla\cdot(\nabla F\times\nabla G)=0$

Tenemos

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot(\nabla F\times\nabla G)&=\vec{e}_k\partial_k\cdot(\vec{e}_k\partial_kF\times\vec{e}_k\partial_kG)\\
&=\vec{e}_k\partial_k\cdot(\partial_kF\partial_kG\ \cancelto{0}{\varepsilon_{kkr}})\ \vec{e}_r\\
&=0
\end{aligned}
$$

2. Encuentra los valores y vectores propios de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Recordemos que el problema de valores propios está dado por

$$\mathbb{A}\vec{v} = \lambda\vec{v} \tag{1}$$

y el primer paso es calcular los valores propios mediante el polinomio característico, tenemos que ver que

$$\det(\mathbb{A} - \lambda I) = 0$$

entonces

$$\det \begin{pmatrix} 11-\lambda & 4 & 0 \\ 4 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 7-\lambda \end{pmatrix} = (7-\lambda)[(11-\lambda)(5-\lambda) - 16] = 0$$

$$\begin{aligned} (7-\lambda)(55 - 16\lambda + \lambda^2 - 16) &= (7-\lambda)(\lambda^2 - 16\lambda + 39) \\ &= (7-\lambda)(\lambda - 13)(\lambda - 3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Las raices de este polinomio están dadas por: $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = 13$, $\lambda_3 = 3$. Ahora encontremos los vectores propios mediante la ecuación (1), notemos que podemos despejar dicha ecuación de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \mathbb{A}\vec{v} - \lambda\vec{v} = 0 \\ \Rightarrow \quad & (\mathbb{A} - \lambda I)\vec{v} = 0 \end{aligned}$$

Con ello podemos hacer un sistema de ecuaciones para encontrar los vectores propios del sistema. Veamos quien es el vector propio asociado a $\lambda_1 = 7$

$$\begin{pmatrix} 11-7 & 4 & 0 \\ 4 & 5-7 & 0 \\ 0 & 0 & 7-7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} 4x + 4y &= 0 \\ 4x - 2y &= 0 \\ -0z &= 0 \end{cases}$$

en este caso podemos ver que las primeras dos ecuaciones solo se cumplen para cuando $x = y = 0$, también podemos observar que z puede tomar cualquier valor en $\mathbb{R}$, por lo tanto tenemos el vector propio asociado a $\lambda_1 = 7$, $\vec{v}_{\lambda_1} = (0, 0, 1)$

Para $\lambda_2 = 13$ tenemos

$$\begin{pmatrix} 11-13 & 4 & 0 \\ 4 & 5-13 & 0 \\ 0 & 0 & 7-13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} -2x + 4y &= 0 \\ 4x - 8y &= 0 \\ -6z &= 0, \qquad z = 0 \end{cases}$$

$$4y = 2x, \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2}x$$
$$4x - \frac{8}{2}x = 0$$

Entonces el vector propio asociado a $\lambda_2 = 13$ es $\vec{v}_{\lambda_2} = (1, \frac{1}{2}, 0)$. Vemos ahora el vector propio asociado a $\lambda_3 = 3$, nuevamente ocupando el sistema anterior tenemos

$$\begin{pmatrix} 11-3 & 4 & 0 \\ 4 & 5-3 & 0 \\ 0 & 0 & 7-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} 8x + 4y & = 0 \\ 4x + 2y & = 0 \\ 4z & = 0, \qquad z = 0 \end{cases}$$

$$4x = -2y, \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2}y$$
$$-\frac{4}{2}y + 2y = 0$$

entonces el vector propio asociado a $\lambda_3 = 3$ es $\vec{v}_{\lambda_3} = (-\frac{1}{2}, 1, 0)$

Ahora veamos que sucede con los vectores propios de la matriz B. Tenemos que sacar primero los valores propios mediante el polinomio característico:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 7-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} &= (5-\lambda)[(7-\lambda)(4-\lambda) - 4] \\ &= (5-\lambda)(28 - 11\lambda + \lambda^2 - 4) \\ &= (5-\lambda)(\lambda^2 - 11\lambda + 24) \\ &= (5-\lambda)(\lambda - 8)(\lambda - 3) \\ &= 0 \end{aligned}$$

los valores propios son $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 8$, $\lambda_3 = 3$, determinemos los vectores propios asociados a cada valor propio. Comencemos por $\lambda_1 = 5$

$$\begin{pmatrix} 7-5 & 0 & -2 \\ 0 & 5-5 & 0 \\ -2 & 0 & 4-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} 2x - 2z & = 0 \\ 0y & = 0 \\ -2x - z & = 0 \end{cases}$$

podemos apreciar como en el caso anterior que la primera ecuación y la tercera solo se cumplen para $x = z = 0$, por otro lado y puede tomar cualquier valor asi que le asignamos $y = 1$. Entonces, el vector propio asociado a $\lambda_1 = 7$ es $\vec{v}_{\lambda_1} = (0, 1, 0)$

Veamos ahora el vector propio asociado a $\lambda_2 = 8$

$$\begin{pmatrix} 7-8 & 0 & -2 \\ 0 & 5-8 & 0 \\ -2 & 0 & 4-8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} -x - 2z & = 0 \\ -3y & = 0, \qquad y = 0 \\ -2x - 4z & = 0 \end{cases}$$

$$x = -2z$$
$$4z - 4z = 0$$

por lo tanto tenemos el vector propio asociado a $\lambda_2 = 8$, $\vec{v}_{\lambda_2} = (-2, 0, 1)$. Veamos ahora el vector propio asociado a $\lambda_3 = 3$

$$\begin{pmatrix} 7-3 & 0 & -2 \\ 0 & 5-3 & 0 \\ -2 & 0 & 4-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} 4x - 2z & = 0 \\ 2y & = 0, \qquad y = 0 \\ -2x + z & = 0 \end{cases}$$

$$z = 2x$$
$$4x - 4x = 0$$

por lo tanto, el vector propio asociado a $\lambda_3 = 3$ es $\vec{v}_{\lambda_3} = (1, 0, 2)$

3. Calcula la matriz inversa utilizando la matriz adjunta

Recordemos que para calcular la matríz inversa de una matríz cuadrada debemos hacer

$$\mathbb{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbb{A}} \mathrm{Adj}\mathbb{A}$$

donde la matríz adjunta se define como la matriz de cofactores transpuesta

$$\mathrm{Adj}(\mathbb{A}) = (\mathrm{cof}_{ij}(\mathbb{A}))^T$$

primero calculemos el determinante de la matriz B

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} &= 7(20) - 0 \cdot (28-4) - 2(0+10) \\ &= 140 - 20 \\ \Rightarrow \quad \det B &= 120 \end{aligned}$$

Ahora calculemos la matriz adjunta

$$\begin{aligned} \mathrm{Adj}B &= \begin{pmatrix} 20 & 0 & 10 \\ 0 & 28-4 & 0 \\ 10 & 0 & 35 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 20 & 0 & 10 \\ 0 & 24 & 0 \\ 10 & 0 & 35 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notemos que la transpuesta de B es ella misma. Por lo tanto, la matriz inversa de B es

$$\begin{aligned} B^{-1} &= \frac{1}{120} \begin{pmatrix} 20 & 0 & 10 \\ 0 & 24 & 0 \\ 10 & 0 & 35 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{12} & 0 & \frac{7}{24} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ahora calculemos la matriz inversa de

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

comenzamos por sacar el determinante de C

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & 8 & 4 \end{pmatrix} &= 3(24-40) - 2(16-15) + (32-18) \\ &= 3(-16) - 2 + 14 \\ \det C &= -36 \end{aligned}$$

ahora calculemos la matriz adjunta de C

$$\begin{aligned} \mathrm{Adj}C &= \begin{pmatrix} 24-40 & -(16-15) & 32-18 \\ -(8-8) & 12-3 & -(24-6) \\ 10-6 & -(15-4) & 18-8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -16 & -1 & 14 \\ 0 & 9 & -18 \\ 4 & -11 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz inversa de C es

$$\begin{aligned} C^{-1} &= -\frac{1}{36} \begin{pmatrix} -16 & -1 & 14 \\ 0 & 9 & -18 \\ 4 & -11 & 10 \end{pmatrix}^T \\ &= -\frac{1}{36} \begin{pmatrix} -16 & 0 & 4 \\ -1 & 9 & -11 \\ 14 & -18 & 10 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & 0 & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{36} & -\frac{1}{4} & \frac{11}{36} \\ -\frac{7}{18} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{18} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Determine la matriz de transformación que relaciona a las siguientes bases ortonormales $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ y $\vec{\bar{e}}_1$, $\vec{\bar{e}}_2$ y $\vec{\bar{e}}_3$, donde $\vec{\bar{e}}_1$ esta en dirección de $\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ y $\vec{e}_2$ esta en la dirección ortogonal al plano $2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5 = 0$

Sabemos en principio que el vector $\vec{e}_2$ está en la dirección $(2, 3, 1)$, ya que este vector es ortogonal al plano $2x_1+3x_2+x_3+5 = 0$, podemos construir los vectores $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_3$ con vase en $\vec{e}_2$, normalicemos a $(2, 3, 1)$

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{14}}(2, 3, 1)$$

y los vectores ortogonales $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_3$ respectivos son

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(0, 1, -3), \qquad \vec{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{35}}(-5, 3, 1)$$

ahora, sabemos que $\vec{\bar{e}}_1$ está en dirección de $\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, entonces hagamos la suma

$$\begin{aligned} \vec{\bar{e}}_1 &= (2, 3, 1) - (0, 1, -3) + (-5, 3, 1) \\ &= (-3, 5, 5) \\ &= \frac{1}{\sqrt{59}}(-3, 5, 5) \end{aligned}$$

ahora encontremos vectores ortogonales $\vec{\vec{e}}_2$ y $\vec{\vec{e}}_3$ a $\vec{\vec{e}}_1$

$$\vec{\vec{e}}_2 = \frac{1}{\sqrt{34}}(5,0,3), \qquad \vec{\vec{e}}_3 = \frac{1}{44{,}79}(15,34,-25)$$

ahora si, veamos las transformaciones de coordenadas para obtener la matriz de transformación. Los elementos de dicha matriz de transformación estan dadlos por

$$\ell_{ij} = \vec{e_i}\,' \cdot \vec{e}_j$$

donde la i representa el nuevo sistema de referencia y la j el sistema de referencia original. Entonces pongamos esto a prueba

$$\begin{aligned}
\ell_{11} &= \vec{\vec{e}}_1 \cdot \vec{e}_1 = -\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}} \\
\ell_{12} &= \vec{\vec{e}}_1 \cdot \vec{e}_2 = \frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{3}} \\
\ell_{13} &= \vec{\vec{e}}_1 \cdot \vec{e}_3 = \frac{\sqrt{35}}{3\sqrt{6}} \\
\ell_{21} &= \vec{\vec{e}}_2 \cdot \vec{e}_1 = -\frac{9}{2\sqrt{85}} \\
\ell_{22} &= \vec{\vec{e}}_2 \cdot \vec{e}_2 = \frac{13}{2\sqrt{119}} \\
\ell_{23} &= \vec{\vec{e}}_2 \cdot \vec{e}_3 = -\frac{11\sqrt{2}}{\sqrt{595}} \\
\ell_{31} &= \vec{\vec{e}}_3 \cdot \vec{e}_1 = 0{,}77 \\
\ell_{32} &= \vec{\vec{e}}_3 \cdot \vec{e}_2 = 0{,}64 \\
\ell_{33} &= \vec{\vec{e}}_3 \cdot \vec{e}_3 = 0{,}0076
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz de transformación es igual a

$$L = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{35}}{3\sqrt{6}} \\ -\frac{9}{2\sqrt{85}} & \frac{13}{2\sqrt{119}} & -\frac{11\sqrt{2}}{\sqrt{595}} \\ 0{,}77 & 0{,}64 & 0{,}0076 \end{pmatrix}$$