



# Difracción de Electrones

Alexis Rubén Páez Amador

Rodrigo Vega Vilchis

Laboratorio de Física Contemporánea I

10 Noviembre, 2021



## Resumen

Aquí va el resumen

## 1. Marco Teórico

La naturaleza ondulatoria es una de las manifestaciones físicas que podemos encontrar en cualquier contexto físico que se nos ocurra, especialmente cuando hablamos de ondas electromagnéticas; además el gran espectro de ondas EM nos permite conocer distintos tipos de manifestaciones físicas tales como polarización, magnetización etc. Pero si nos enfocamos únicamente al espectro de luz visible podemos encontrar varios tipos de interacciones: dadas entre ondas, ondas y materia etc. Por ejemplo, sabemos que el producto de una superposición de  $N$  ondas nos puede resultar en un fenómeno especial al cual conocemos como **interferencia**, que es el resultado de una suma de  $N$  ondas formando una onda resultante de mayor, menor o igual magnitud que sus componentes. Sin embargo, el resultado de la interferencia entre dichas ondas bien puede formar patrones de interferencia tales como los que se muestran en el experimento de Young Fig. 1, en donde se pueden apreciar máximos y mínimos de amplitud correspondientes a la superposición de ondas.

Existe un fenómeno de interferencia similar al cual conocemos como **Difracción**, es un fenómeno que se produce cuando un frente de onda queda cortado por un obstáculo o una abertura que se interpone en su camino. La difracción también consiste en que una onda puede rodear un obstáculo o propagarse a través de una pequeña abertura. Aunque este fenómeno es general, su magnitud depende de la relación que existe entre la longitud de onda y el tamaño del obstáculo o abertura. En el mismo experimento de Young también se puede apreciar este fenómeno, en la abertura S1 inciden frentes de onda planos que se deforman según la

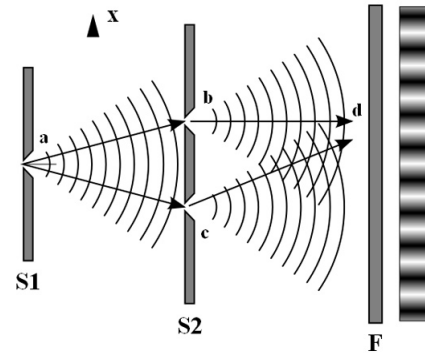


Figura 1: Experimento de Young. La interferencia entre dos fuentes de luz genera un patrón de interferencia en una pantalla en donde se aprecian máximos y mínimos de amplitud de onda. Este experimento demostró la naturaleza ondulatoria de la luz

abertura de la rendija. Ambos fenómenos producen patrones de interferencia pero se originan de diferente manera, una por superposición de ondas y la otra por la interacción de la luz con los bordes de un objeto (en este caso: una rendija).

Una rejilla de difracción es solamente una pantalla que difracta la luz por medio de una gran cantidad de rendijas paralelas equidistantes. La rejilla de difracción, es un elemento difractivo útil para analizar fuentes luminosas. Las mejores rejillas tienen una gran cantidad de líneas o ranuras finas, sobre superficies de vidrio o metal. Sin embargo, existen dos tipos de rejillas: las de reflexión, que son aquellas que por efecto de la reflexión, quedan dispersados los rayos incidentes a la rejilla; y de transmisión que como se mencionó anteriormente, pueden estar compuestas por rendijas paralelas equidistantes, o simplemente ser un material que al incidir rayos sobre él, trasmite rayos dispersados. Especialmente existe un tipo de rendija compuesta de **grafito policristalino** el cual nos va a servir ampliamente para poder apreciar patrones de interferencia (difractivos) para emisiones

de haces de electrones, este material cristalino tiene distancias interplanares del orden del Amstrong [Å] y por lo tanto, los fotones (o en este caso rayos catódicos) incidentes a esta rejilla podrán ser dispersados formando un patrón de interferencia difractivo.

A inicios del siglo XX, Max Planck determinó la naturaleza discreta de transmisión de energía de radiación electromagnéticas en paquetes llamados *cuantos* y Albert Einstein continuó dicho desarrollo proponiendo el efecto fotoeléctrico, que a grandes rasgos nos dice que un fotón de radiación EM puede desprender electrones de un átomo, dependiendo de la energía del fotón claro. Algo característico del efecto fotoeléctrico es el carácter corpuscular que tiene la radiación EM, pues los fotones (paquetes de energía discretos) son los que desprenden los electrones del átomo. Más adelante, Louis De Broglie se preguntaba si no podía existir un efecto inverso en donde se determinara el carácter ondulatorio de la materia. Su propuesta queda dada por la expresión

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (1)$$

donde  $h$  es la constante de Planck y  $p$  el momento asociado a la partícula de interés. Específicamente los experimentos para demostrar su conjetura, se hicieron con electrones y es precisamente lo que se verá en el contenido de esta práctica. Es importante aclarar que para que tenga sentido la Ec. 1, debemos considerar velocidades no relativistas, de modo contrario habríamos de incluir el factor de Lorentz  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ .

Antes de conocer el proceso experimental del carácter ondulatorio de la materia (específicamente de los electrones), necesitamos entender qué son los **rayos catódicos**. Supongamos que tenemos un tubo que contiene un gas enrarecido o simplemente vacío, que están equipados con un cátodo y un ánodo. El cátodo está conectado a una fuente de baja tensión que cuando se activa hace que caliente emitiendo una cierta radiación que viaja hacia el ánodo, si le hacemos un pequeño orificio al ánodo se puede observar un brillo de color verde que va hacia la pared descargada del tubo.

Es posible colocar en las paredes del tubo un material fluorescente tal como el Sulfuro de Zinc para poder iluminar más el brillo verde que se forma ya que es sensible ante interacciones eléctricas. Con el paso del tiempo, se fue estudiando y concluyendo que la carga de dichos rayos es de negativa, por lo que prácticamente son electrones los que

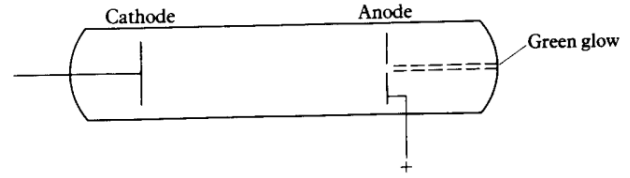


Figura 2: Formación de Rayos Catódicos

se están dispersando para la formación de rayos catódicos.

Es por ello que con el uso de rayos catódicos vamos a poder demostrar y comprobar la relación de De Broglie 1, y el carácter ondulatorio de la materia. Pero ¿cuál sería el método para poder determinar la longitud de onda de un haz de electrones? Podemos recurrir a la información que guarda el fenómeno de interferencia tal como la longitud de onda de radiación incidente, solo que en este caso vamos a recurrir a patrones de interferencia difractivos. En la abertura que le hemos hecho al ánodo de la Fig. 2, podemos colocar una rendija de grafito policristalino, para poder generar un patrón de interferencia que nos permita medir la longitud de los rayos catódicos (electrones)

Utilizaremos la **Ley de Bragg**<sup>1</sup> que originalmente (e históricamente) se utilizaron Rayos X incidentes a un cristal para poder observar interferencias constructivas debido a la difracción provocada por un material con estructura atómica periódica (de tipo cristalino), tal como lo es la estructura del grafito policristalino. La interferencia es constructiva cuando la diferencia de fase entre la radiación emitida por diferentes átomos es proporcional a  $2\pi$ , esta condición es evidente en la siguiente expresión

$$n\lambda = 2d \sin \phi \quad (2)$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda del haz incidente,  $d$  es la distancia interplanar entre planos de Bragg y  $\phi$  es el ángulo formado por el haz incidente y la placa cristalina.

El experimento realizado en 1927 dado por **Davisson y Gremer**, fue la confirmación experimental de la propuesta de De Broglie (Ec. 1). Dispersaron haces de electrones mono energéticos de 54 eV incidentes a una placa de níquel cristalina; lo que encontraron es que a pesar de que el haz de electrones incidentes al cristal quedaban dispersados en todas direcciones, notaron que la intensidad

<sup>1</sup>para mas información, consultar la referencia [1] Sección 1.3 "Wave Aspect of Particle"

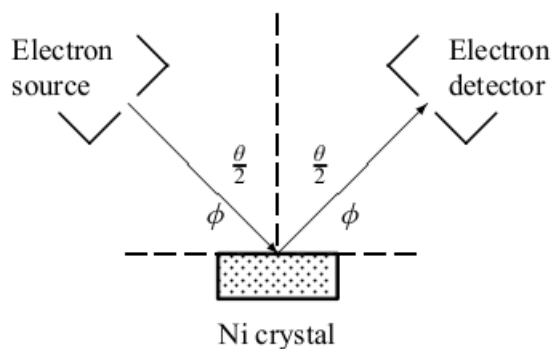


Figura 3: Dispersión de Bragg para un cristal de Ni

era mínima cuando  $\theta = 35^\circ$ <sup>2</sup> y máxima para cuando  $\theta = 50^\circ$ . Y los patrones persistían a pesar de la intensidad del haz de electrones, lo que resulta en un patrón de interferencia constructivo de electrones dispersados. Es por ello que mediante la Ec. 2 podemos identificar los máximos de intensidad descritos por el experimento y al mismo tiempo determinar la longitud de onda del haz de electrones.

## 2. Objetivos

1. Observar patrones de difracción de un haz de electrones
2. Determinar la longitud de onda de un haz de electrones para varios voltajes
3. Comprobar el carácter ondulatorio de la materia y la propuesta de De Broglie (Ec. 1)

## 3. Procedimiento

Antes de mostrar el procedimiento de lo realizado, es importante mencionar algunos preliminares que nos ayudarán a comprender mejor las interpretaciones de los datos experimentales.

Se ocuparán diferencias de potencial de entre 1 y 10 kV y con ello determinaremos el momento lineal del haz de electrones para poder conocer su longitud de onda (Ec. 1). Estas energías están asociadas a las de los Rayos X<sup>3</sup>, por lo que se espera que podamos encontrar patrones de interferencia similares a los Rayos X incidentes a un material

<sup>2</sup>Este ángulo es tomado entre el haz incidente y la normal al plano incidente, tal y como se muestra en la Figura 3

<sup>3</sup>Dispersión de Bragg para Rayos X incidentes a un cristal (níquel por ejemplo)

cristalino. El tipo de interferencia que observaremos con el haz de electrones y la rendija de grafito policristalino, es de anillos concéntricos de interferencia constructiva; debido a los planos paralelos del material cristalino. el conjunto de microcristales orientado simétricamente alrededor del eje determinado por la dirección del haz inicial dará lugar a la formación del anillo. Por lo tanto, cada serie de planos paralelos del material cristalino, tendrá asociado un conjunto de anillos, cada anillo por cada orden de interferencia. Además, se debe mencionar que las distancias interplanares del grafito policristalino son del orden del Armstrong [Å].

En un laboratorio real, se espera ocupar los siguientes materiales para apreciar la difracción de electrones. Se ocupará un tubo de rayos catódicos tal y como el se mencionó en el marco teórico, dicho tubo tiene en la abertura del ánodo la rendija de grafito policristalino.<sup>4</sup> Dos fuentes de alimentación, una de alta voltaje que va desde los 0 a los 12 kV y se ocupa para acelerar los electrones; la otra fuente de alimentación es de baja tensión, se ocupa para calentar cátodo del tubo de rayos catódicos, y para controlar el haz de electrones. Por último se hará uso de un multímetro para la medida de los potenciales de aceleración de los electrones y un vernier para medir la distancia entre máximos del patrón de interferencia de electrones.

Al ánodo del tubo de rayos catódicos se le conecta la fuente de alto voltaje, mientras que el cátodo se le conecta la fuente de baja tensión. La fuente de alta tensión nos dará la intensidad del rayo catódico proyectado mientras que la fuente de baja tensión calentará el filamento del cátodo para producir electrones que vayan hacia el ánodo, además la fuente de baja tensión nos permitirá controlar el “tamaño” de la mancha proyectada en la pared del tubo con el material fluorescente (sulfuro de zinc). En la parte intermedia entre el cátodo y el ánodo existen unas placas que sirven para focalizar la mancha verde mediante la aplicación de un campo eléctrico adecuado.

En principio, la mancha verde (rayos catódicos) aparece si suministramos un voltaje de entre 1 kV y 4 kV. Sin embargo, si aumentamos el voltaje desde 5 kV a 10 kV se podrá apreciar el patrón de interferencia de anillos concéntricos, donde los máximos están representados por las zonas más brillantes mientras que los mínimos por las zonas de nula luminosidad. En este caso, la distancia entre máximos (o mínimos) corresponde a la longi-

<sup>4</sup>Recordemos que los rayos catódicos en realidad son haces de electrones.

tud de onda del electrón y variarán dichas distancias conforme aumentemos o disminuyamos el voltaje (dentro del rango especificado).

Si aumentamos el voltaje, se observará como los anillos se van acercando entre sí, esto se interpreta como que estamos aumentando la energía cinética de los electrones y por tanto, hacemos que disminuya la longitud de onda del electrón, pues estas cantidades varían de manera inversamente proporcional. Por lo tanto, si disminuimos el voltaje, aumentamos la longitud de onda del haz de electrones.

Para la primera parte de la simulación se selecciono un voltaje el cual está asociado a un anillo cuyo diámetro depende del potencial de aceleración aplicado. Se registro la medida del radio de este anillo, para 5 voltajes diferentes. A partir de estos valores se puede conocer  $\lambda$  y  $\sin\theta$ . Se procede a graficar estos valores y hacer un ajuste lineal por el método de mínimos cuadrados. Con la pendiente obtenida y la ecuación de Bragg 2 se puede obtener la distancia interplanar. Para los apartados siguientes se realizo un procedimiento análogo.

En el apartado 5 del desarrollo de la práctica, se pretende ver una simulación del experimento más arraigada al experimento real, para un conjunto de voltajes se generarán tres anillos por cada voltaje, cada anillo representa un nivel de la dispersión de Bragg. Estos anillos a su vez representan como tal la difracción de electrones, y se puede determinar la longitud de onda y las distancias interplanares por medio del diámetro de cada uno de los anillos. Como se dijo anteriormente, cada anillo representa un nivel de Bragg dado por cada  $n$  de la ecuación 2, además la distancia entre anillos puede representar la longitud de onda de los electrones, sin embargo dicha actividad no se va a corroborar en esta práctica.

## 4. Datos Experimentales

V(kV)	r(mm)	$\lambda$ [Å]	$\sin(\theta)$	Error
0.2	47.58	0.8671	0.2038	0.0027
2.2	15.73	0.2614	0.061	0.0019
4.2	11.31	0.1892	0.0437	0.0019
6.2	9.49	0.1557	0.0366	0.0019
8.2	8.19	0.1354	0.0315	0.0019

Cuadro 1: Relación voltaje (KV) y radio para una distancia interplanar  $d_1$

V(kV)	r(mm)	$\lambda$ [Å]	$\sin(\theta)$	Error
0.5	50.70	0.5484	0.2218	0.0029
2.5	25.22	0.2452	0.0994	0.002
4.5	19.11	0.1828	0.0745	0.002
6.5	15.73	0.1521	0.0610	0.0019
8.5	13.91	0.1330	0.0538	0.0019

Cuadro 2: Relación voltaje (KV) y radio para una distancia interplanar  $d_2$

V(kV)	r(mm)	$\lambda$ [Å]	$\sin(\theta)$	Error
1	53.43	0.3878	0.2388	0.0032
3	34.19	0.2238	0.1380	0.0022
5	27.04	0.1734	0.1070	0.0021
7	23.27	0.1465	0.0914	0.0020
9	20.54	0.1292	0.0802	0.0020

Cuadro 3: Relación voltaje (KV) y radio para una distancia interplanar  $d_3$

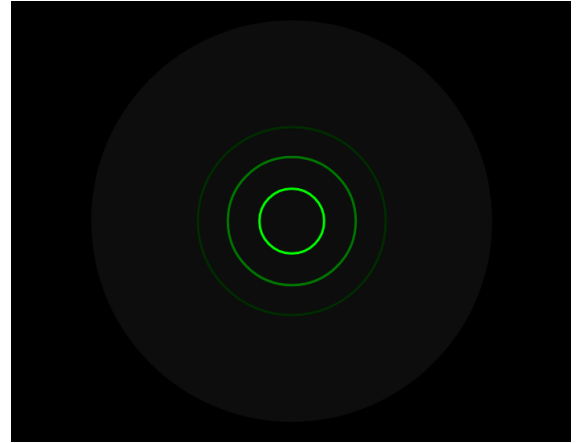


Figura 4: Difracción de electrones para la distancia interplanar  $\tilde{A} = 0,07$

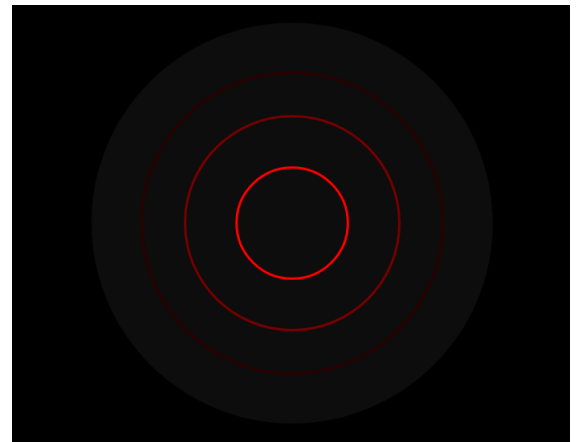


Figura 5: Difracción de electrones para la distancia interplanar  $\tilde{A} = 0,04$

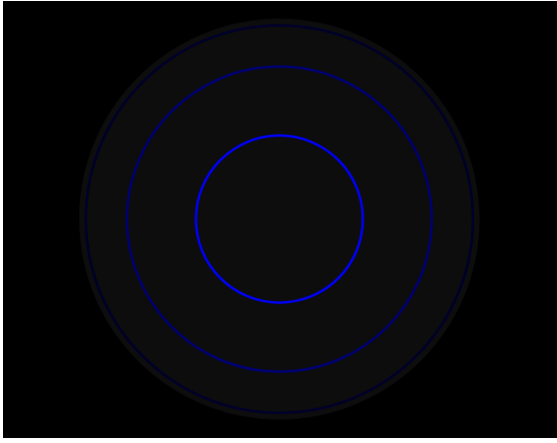


Figura 6: Difracción de electrones para la distancia interplanar  $\text{\AA} = 0,03$

## 5. Análisis de Datos

Se procede a plasmar los valores de las tablas anterior en una gráfica, cuyo eje X son los valores de  $\lambda$  y cuyo eje Y son los valores de  $\sin\theta$ . Se realiza el ajuste de una recta a los puntos obtenidos por el procedimiento de mínimos cuadrados.

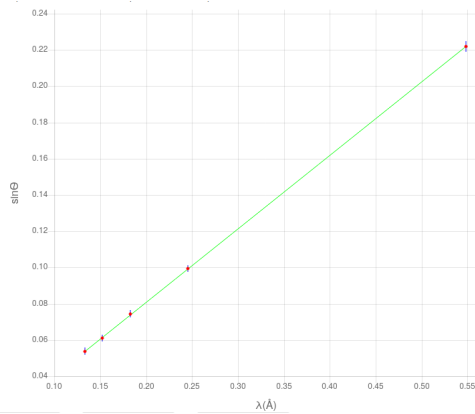


Figura 7: Ajuste lineal para una distancia interplanar  $d_1$

Utilizando la condición de Bragg 2 para  $n=1$  llegamos a que las distancias interplanares son:

Distancia interplanar	Valor $\text{\AA}$
$d_1$	2.12
$d_2$	1.23
$d_3$	0.811

Cuadro 4: Valor de las distancias interplanares

Haciendo una comparación entre la distancia interplanar  $d_1$  y el valor de la literatura ( $2,13\text{nm}$ ) podemos observar que tiene una discrepancia del 0,004 % lo cual lo convierte en una buena

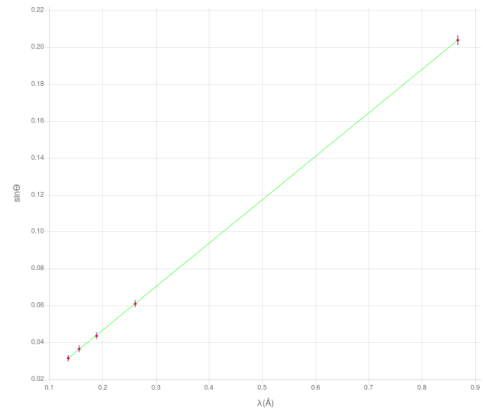


Figura 8: Ajuste lineal para una distancia interplanar  $d_2$

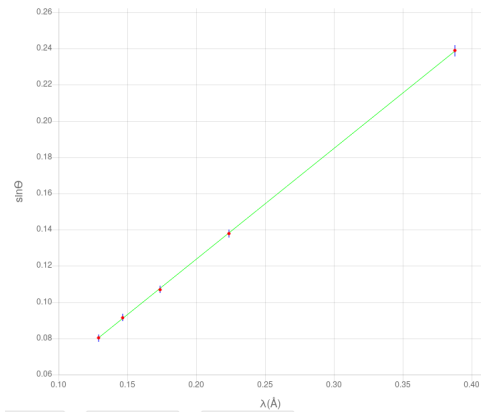


Figura 9: Ajuste lineal para una distancia interplanar  $d_3$

aproximación.

De forma análoga para la distancia interplanar  $d_2$  se tiene una discrepancia en comparación con la literatura ( $0,23\text{nm}$ ) de aproximadamente 0,002 %.

Para el apartado 5, se escogieron los voltajes y

V [kV]
2500
5000
7500
10,000

Cuadro 5: Voltajes ocupados para el análisis de anillos en la dispersión de electrones

de acuerdo a los diámetros de los anillos tomados para cada uno de los voltajes y distancias interplanares se tuvo el siguiente ajuste de rectas con su respectivo error las 3 distancias interplanares calculadas fueron las siguientes

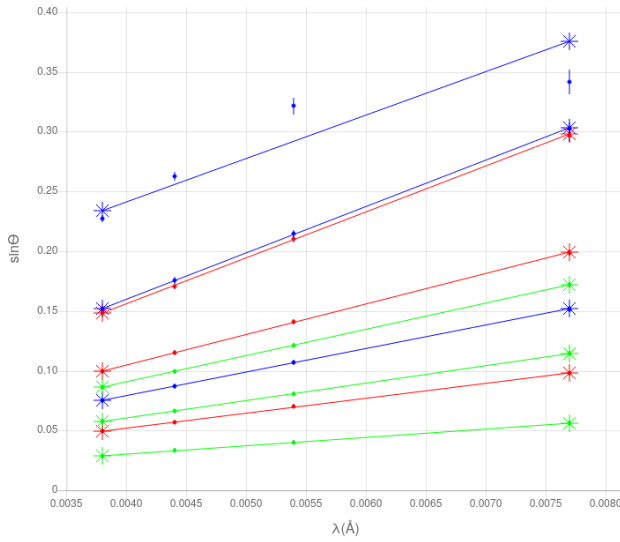


Figura 10: Ajuste de rectas para los distintos anillos y distancias interplanares

color	Å
verde	0.07
rojo	0.04
azul	0.03

Cuadro 6: Voltajes ocupados para el análisis de anillos en la dispersión de electrones

### 5.1. Relación de De Broglie

Todos estos resultados apreciados en las gráficas giran en función de la longitud de onda de los rayos catódicos, se vio principalmente que conforme aumenta la longitud de onda, el ángulo de dispersión también aumenta. Eso nos dice que la relación de Bragg 2 es lineal conforme  $\lambda$  aumenta.

En este apartado veremos como es que la longitud de onda depende tanto de la energía cinética de los electrones disparados hacia la pantalla fluorescente, así como con de las distancias interplanares, el radio de curvatura de la pantalla ( $R = 0,066$  m) y la longitud del tubo de rayos catódicos que como norma de fabricación, tiene una longitud de  $L = 0,130$  m

Sabemos que la energía cinética de los electrones es igual al potencial considerado (kV) por la carga del electrón, dicho esto, podemos considerar

$$e \cdot U = \frac{p^2}{2m} \quad (3)$$

despejando y sustituyendo el momento lineal  $p$  de 3 y sustituyendo en 1 tenemos

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU}} \quad (4)$$

donde  $m$  es la masa del electrón y  $e$  su carga, en el apéndice se mostrarán unos cálculos breves para el límite relativista. Por otro lado, como se dijo anteriormente, se puede determinar la longitud de onda con base en  $d$ , el radio de curvatura de la pantalla  $R$  y la mencionada  $L$ , Suponiendo que

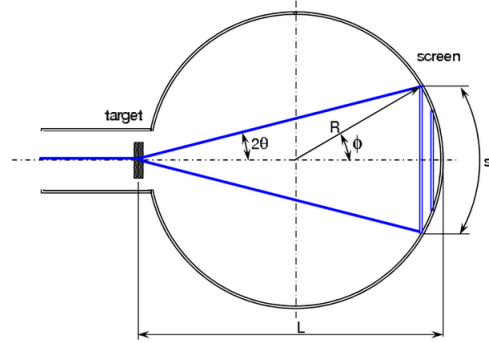


Figura 11: Diagrama de formación de anillos

determinamos la tangente de  $\theta$  tenemos

$$\tan \theta = \frac{R}{L}$$

aproximando el  $\sin \theta \approx \tan \theta$  y combinando con la relación de Bragg 2 tenemos.

$$\lambda = d \cdot \frac{R}{L} \quad (5)$$

Haciendo los cálculos correspondientes tenemos los siguientes resultados para las distancias interplanares trabajadas en la sección de Datos Experimentales

Voltaje [V]	$\lambda [\times 10^{-11} \text{ m}]$
200	8.6771
2200	2.614
4200	1.893
6200	1.558
8200	1.355

Cuadro 7: Longitud de onda en términos de la relación de De Broglie en términos del potencial ocupado, para la primera distancia interplanar  $d_1 = 2,12$

Comparando con la tabla 1 tenemos que si corresponden a los datos obtenidos por la simulación. Haremos lo mismo para las tablas 2 y 3

De este modo podemos ver como si se ajustan los voltajes y más aún, apreciamos la relación inversa entre el voltaje (con el momento lineal) y la longitud de onda de los rayos catódicos.



Voltaje [V]	$\lambda [\times 10^{-11} \text{ m}]$
500	5.01
2500	2.454
4500	1.829
6500	1.522
8500	1.331

Cuadro 8: Longitud de onda en términos de la relación de De Broglie en términos del potencial ocupado, para la segunda distancia interplanar  $d_1 = 1,23$

Voltaje [V]	$\lambda [\times 10^{-11} \text{ m}]$
1000	3.88
3000	2.24
5000	1.735
7000	1.466
9000	1.293

Cuadro 9: Longitud de onda en términos de la relación de De Broglie en términos del potencial ocupado, para la tercera distancia interplanar  $d_1 = 0,811$

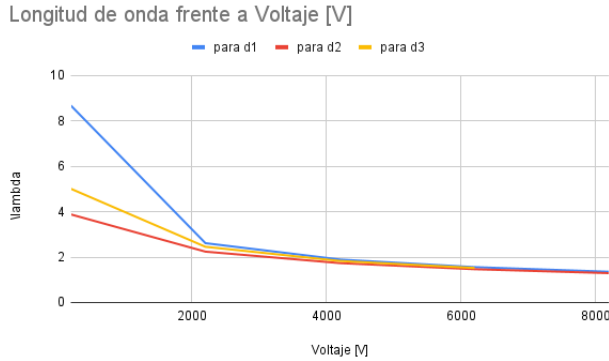


Figura 12: Relación inversa entre el voltaje y la longitud de onda

Ahora revisando la relación 5 esperamos tener los mismos resultados que anteriormente. Hagamos los cálculos para las distintas distancias interplanares

Podemos apreciar como la relación entre longitudes de onda y distancias interplanares es lineal, de manera que son proporcionales.

## 6. Conclusiones

Se ha determinado el valor de 3 distancias interplanares de la red de grafito además de se ha comprobado cómo varía el radio de los anillos de

Distancias interplanares [Å]	$\lambda$ [Å]
2.12	1.07
1.23	.624
0.811	.411

Cuadro 10: Longitud de onda en términos de las distancias interplanares, el radio de curvatura  $R = 0,066 \text{ m}$  y la longitud del tubo  $L = 0,13 \text{ m}$

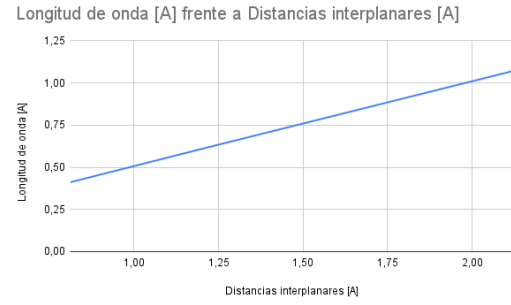


Figura 13: Relación entre la longitud de onda y las distancias interplanares

difracción con la energía, con la distancia interplanar y con el orden de difracción. El valor de las distancias interplanares concuerda con la literatura.

Por otro lado, se ha comprobado la relación de De Broglie por medio de ciertos cálculos dados por la ecuación 4, se ha visto la relación inversa entre la energía cinética de los electrones y la longitud de onda que éstos producen. Eso a su vez se ve reflejado en el diámetro del anillo, de modo que para bajas tensiones tenemos diámetros grandes y por lo tanto longitudes de onda grandes.

## 7. Apéndice

Cabe preguntarnos, ¿Cuál es el límite clásico para esta interpretación? y ¿a partir de que energías comenzamos a ver efectos relativistas? Para ello habremos de analizar al Ec. 3 y ver a partir de que voltaje, el factor de Lorentz  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$  comienza

a tener relevancia en las ecuaciones. Notemos que si nos posicionamos en el orden de Mega Volts, es decir  $1 \times 10^6 \text{ V}$  tenemos lo siguiente

$$v = \frac{\sqrt{2me \cdot 1MV}}{m} = 592,673,897 \text{ m/s}$$

sin embargo, esta energía excede la velocidad de la luz, por lo que un Mega Volt aún es mucho. Si

optamos por 10 kV tenemos la relación

$$\frac{v}{c} \approx 0,19$$

asi que podríamos decir que a partir de aquí, el factor de Lorentz comienza a tener relevancia. Para 100 kV tenemos

$$\frac{v}{c} \approx 0,62$$

lo cual significa que para esta energía ya los efectos relativistas son completamente visibles. Entonces podemos afirmar que a partir de 10 kV comienzan a sentirse los efectos relativistas, ya que el factor de Lorentz es

$$\gamma \approx 1,111$$

y para 100 kV

$$\gamma \approx 1,622$$

## Referencias

- [1] Zettili, Mecánica Cuántica, *Wiley* 2a edición, 2009, UK.
- [2] Bransen Joachin Física Atómica, *Longman Scientific Technical*, 1a edición, 1983, Hong Kong