Tarea
Deformación de una viga por efecto de la gravedad

Rodrigo Vega Vilchis
Dinámica de Medios Deformables

18 octubre 2021

Viga: material incompresible al que conocemos su módulo de Young Y y su ecuación de Poisson ν, consideramos que $\rho = cte$. La fuerza de cuerpo que actúa contra la viga es la fuerza de la gravedad

$$\vec{g} = -g\hat{k}$$

¿Cuál será la forma de la viga cuando lleguemos a su estado de equilibrio? Vamos a considerar las ecuaciones de conservación para resolver el problema

- Ecuación de conservación de masa para un medio incompresible

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \tag{1}$$

- Ecuación de conservación de momento en condiciones de equilibrio

$$\nabla \cdot T + \rho\vec{g} = 0 \tag{2}$$

  donde T es el tensor de esfuerzos.

Queremos resolver la ec. de Cauchy. Consideramos que la viga[1] es corta en la dirección $\hat{\imath}$, es decir, $a < h \ll L$. Por tanto vamos a despreciar los términos del tensor de esfuerzos T_{xy} y T_{xz}[2]

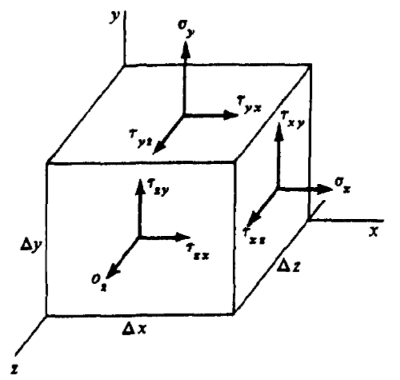

Figura 1: Consideremos esta figura como referencia a la viga considerada, donde $a < h \ll L$

Entonces el tensor de esfuerzos nos queda

$$T = \begin{pmatrix} T_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & T_{yy} & T_{yz} \\ 0 & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix} \tag{3}$$

[1]Figura 1, representa la viga considerada del problema
[2]Pues al ser muy pequeña la “anchura”, las contribuciones transversales las despreciamos.

Recordemos que es un tensor simétrico, y por tanto estamos aplicando $T_{xy} = T_{yx} = 0$ y $T_{xz} = T_{zx} = 0$. Aplicamos la conservación de momento 2 a 3:

$$\frac{\partial T_{xx}}{\partial x} = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\partial T_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} - \rho g = 0 \tag{6}$$

ρg **va en dirección** $\hat{\imath}$. Además consideramos que T_{xx} es un esfuerzo de compresión, es decir, consideramos que la viga no se deforma en la componente $\hat{\imath}$. Podemos considerar que $T_{xx} = -k = cte$. De la Ec. 1 tenemos que la suma de los esfuerzos normales son a las superficies es igual a cero, es decir

$$T_{xx} + T_{yy} + T_{zz} = 0 \tag{7}$$

$$T_{yy} + T_{zz} = k, \qquad \text{sustituyendo } T_{xx} \tag{8}$$

derivando con respecto de y la anterior expresión tenemos

$$\frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial y} = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{\partial T_{yy}}{\partial y} = -\frac{\partial T_{zz}}{\partial y}$$

Sustituyendo en la Ec. 5 tenemos

$$\frac{\partial T_{zz}}{\partial y} - \frac{\partial T_{yz}}{\partial z} = 0 \tag{9}$$

para poder resolver esta ecuación, vamos a definir una función potencial $\phi = \phi(y, z)$ tal que

$$T_{zz} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \tag{10}$$

$$T_{yz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \tag{11}$$

estos resultados los podemos sustituir en la Ec. 9 de modo que

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} = 0$$

Las ecuaciones 10 y 11 las sustituimos en la ecuación 6 de modo que nos quede una ecuación de Poisson

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \rho g \tag{12}$$

se puede encontrar una solución particular de la Ec. 12 de la siguiente manera

$$\phi(y, z) = \frac{1}{2}\rho g z^2 \tag{13}$$

La sustituimos en la Ec. 13 en la Ec. 10 para poder obtener un valor para T_{zz}, entonces

$$T_{zz} = \rho g z \tag{14}$$

sin embargo, la solución 13 solo es función de z, por lo que las parciales con respecto de y serán cero

$$T_{yz} = T_{zy} = 0$$ [3]

[3] podemos afirmar esto ya que nuestro tensor de esfuerzos es simétrico.

Hasta aquí tenemos todo lo necesario para resolver la ec. de Cauchy, lo que sigue será aplicar la ley de Hooke...

$$E_{ij} = -\frac{\nu}{Y} T_{rr}\delta_{ij} + \frac{1+\nu}{Y} T_{ij} \tag{15}$$

ahora solo falta encontrar las componentes del tensor de forma 15

$$E_{xx} = -\frac{\nu}{Y}[T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}] + \frac{1+\nu}{Y} T_{xx}$$

recordemos que la traza $T_{rr}\delta_{ij}$ es igual a cero para un material incompresible, entonces

$$E_{xx} = -\frac{(1+\nu)}{Y} k, \qquad T_{xx} = -k \tag{16}$$

Aplicamos la misma lógica para obtener los términos E_{yy} y E_{zz} de la ley de Hooke.

$$\begin{aligned}
E_{yy} &= \frac{1+\nu}{Y} T_{yy} \\
&= \frac{1+\nu}{Y}[k - \rho g], \qquad \text{sustituyendo } T_{yy} \text{ de la Ec. 8} \\
E_{zz} &= \frac{1+\nu}{Y} T_{zz} \\
&= \frac{1+\nu}{Y} \cdot \rho g z \qquad \text{de la Ec. 14}
\end{aligned}$$

Como ya hemos determinado anteriormente que las componentes del tensor de esfuerzos $T_{xy} = T_{yz} = T_{zx} = 0$ entonces

$$E_{xy} = E_{yz} = E_{zx} = 0 \tag{17}$$

Ahora podremos todo en función de los desplazamientos, es decir el tensor de deformación lo pondremos en términos de los desplazamientos, es decir:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{18}$$

Vamos a sustituir los valores que encontramos del tensor de Hooke en términos de 18, es decir

$$E_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -k \cdot \frac{1+\nu}{Y} \tag{19}$$

$$E_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = \frac{1+\nu}{Y}[k - \rho g] \tag{20}$$

$$E_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{1+\nu}{Y} \cdot \rho g z \tag{21}$$

si integramos las ecuaciones 19, 20 y 21 tendremos

$$\begin{aligned}
u_x &= -\frac{1+\nu}{Y} kx + \alpha(y,z) \\
u_y &= \frac{1+\nu}{Y}[k - \rho g z]y + \beta(x,z) \\
u_z &= \frac{1+\nu}{2Y} \rho g z^2 + \gamma(y,x)
\end{aligned}$$

queremos ahora encontrar las constantes de cada una de las ecuaciones anteriores para poder obtener las soluciones completas de 18. Para ello vamos a ocupar la condición 17 para poder encontrarlas, vamos a aplicarles la el tensor de deformación 18 como hicimos para las componentes E_{xx}, E_{yy} y E_{zz}. Entonces tenemos

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0 \tag{22}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0 \tag{23}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0 \tag{24}$$

como estamos considerando que la deformación de la viga en dirección $\hat{\imath}$ es despreciable, podemos asumir que las constantes $\beta = \beta(z)$ y $\gamma = \gamma(y)$, además observemos que si derivamos u_x con respecto de y y u_y con respecto de x nos da cero, por lo que $\alpha(y,z) = \ell = cte$. Vamos a desarrollar primero la Ec. 23

$$-\frac{1+\nu}{Y}\rho g y + \frac{d\beta(z)}{dz} + \frac{d\gamma(y)}{dy} = 0 \tag{25}$$

consideremos que $\frac{d\beta}{dz} = -m$ entonces

$$\beta(z) = -mz + n$$

de la ecuación 25, despejamos $\frac{d\beta}{dz}$ para determinar $\gamma(y)$

$$\begin{aligned} -\frac{1+\nu}{Y}\rho g y + \frac{d\gamma}{dy} &= m \\ \frac{d\gamma}{dy} &= m + \frac{1+\nu}{Y}\rho g y \qquad \text{integrando} \\ \gamma(y) &= my + \frac{\rho g y^2}{2Y}(1+\nu) + r \end{aligned}$$

Entonces obtenemos los desplazamientos ahora si de manera más completa:

$$u_x = -\frac{1+\nu}{Y}kx + \ell \tag{26}$$

$$u_y = \frac{1+\nu}{Y}[k - \rho g z]y - mz + n \tag{27}$$

$$u_z = \frac{1+\nu}{2Y}\rho g(z^2 + y^2) + my + r \tag{28}$$

para poder determinar las constantes ℓ, m, n y r tenemos que aplicar una serie de condiciones de frontera:

1. $\vec{u}(x,0,0) = \vec{0}$

   entonces

   $$\begin{aligned} u_x(x,0,0) &= 0 \\ u_y(x,0,0) &= 0 \\ u_z(x,0,0) &= 0 \end{aligned}$$

   de aqui podemos conculir que

   $$\begin{aligned} u_x(x,0,0) &= -\frac{1+\nu}{Y}kx + \ell \\ u_y(x,0,0) &= \frac{1+\nu}{Y}[k - \rho g 0]0 - m0 + n \\ u_z(x,0,0) &= \frac{1+\nu}{2Y}\rho g(0^2 + 0^2) + m0 + r \end{aligned}$$

   por lo tanto $k = \ell = n = r = 0$. Aplicando la segunda condición de frontera tenemos

2. $\vec{u}(x,L,0)$ entonces

   $$\begin{aligned} u_x(x,L,0) &= 0 \\ u_y(x,L,0) &= 0 \\ u_z(x,L,0) &= 0 \end{aligned}$$

desarrollando

$$
\begin{aligned}
u_x(x, L, 0) &= 0 \\
u_y(x, L, 0) &= -\frac{1+\nu}{Y}[\rho g 0]L - m0 = 0 \\
u_z(x, L, 0) &= \frac{1+\nu}{2Y}\rho g(0^2 + L^2) + mL = 0 \\
mL &= -\frac{1+\nu}{2Y}\rho g L^2 \\
m &= -\frac{1+\nu}{2Y}\rho g L
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la forma final de la viga esta dado por las ecuaciones

$$
\begin{aligned}
u_x &= 0 \\
u_y &= \frac{1+\nu}{Y}\left(\frac{1}{2}\rho g L z - \rho g z y\right) \\
u_z &= \frac{1+\nu}{2Y}\rho\left(g(z^2 + y^2) + \rho g L y\right)
\end{aligned}
$$

y tal como supusimos al principio, no tenemos deformación en x.