



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TRANSICIONES DINÁMICAS DE ESTABILIDAD EN EL MODELO
DE LOTKA-VOLTERRA GENERALIZADO.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

RODRIGO VEGA VILCHIS

TUTOR

DR. SERGIO ANTONIO ALCALÁ CORONA



CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, 2024

A mis padres...

A mi hermano...

Agradecimientos

Resumen

Índice general

| | |
|--|------------|
| Agradecimientos | III |
| Resumen | v |
| 1. Estabilidad del sistema de Lotka-Volterra generalizado | 1 |
| 1.1. Consideraciones generales sobre estabilidad | 2 |
| 1.2. Implementación numérica y metodología | 10 |
| 1.2.1. Series de tiempo | 11 |
| 1.2.2. Puntos fijos | 13 |
| 1.2.3. Matriz Jacobiana | 16 |
| 1.3. Espectro del LV generalizado | 18 |
| 1.3.1. Leyes Circulares | 18 |
| 1.3.1.1. Análisis para $N = 50$ | 20 |
| 1.4. Transiciones de estabilidad del LV generalizado | 25 |
| 1.4.1. Para $N = 100$ | 27 |
| 1.4.2. Para $N = 50$ | 34 |
| 1.4.3. Para $N = 25$ | 35 |
| 1.5. Indicador espectral de transición de estabilidad | 37 |
| 1.6. Discusión | 40 |
| 1.6.1. Interpretación ecológica | 42 |
| 1.6.2. Cono convexo | 43 |

Índice de figuras

| | | |
|-------|--|----|
| 1.1. | Distribución de valores propios en sistemas de May con soporte simétrico y puramente aleatorios. En ambos casos se consideró $N = 100$, magnitud típica $\sigma = 0.2$, para una conectancia $C = \frac{1}{\sigma^2 N} - 0.03$ | 3 |
| 1.2. | Distribución de valores propios en sistemas de May con soporte simétrico y puramente aleatorios. En ambos casos se consideró $N = 100$, magnitud típica $\sigma = 0.4$, para una conectancia $C = \frac{1}{\sigma^2 N} - 0.03$ | 4 |
| 1.3. | Transición dinámica en sistemas de May aleatorios en función de C . Para cada configuración se generan 3000 simulaciones independientes. | 5 |
| 1.4. | Transición dinámica en sistemas de May aleatorios en función de C en escala \log_{10} . . . | 5 |
| 1.5. | Transición de May puramente aleatoria vs estructuralmente simétrica. (A) Se considera para $\sigma = 0.2$ (B) Se considera para $\sigma = 0.6$ | 6 |
| 1.6. | Transición dinámica en función de σ (A) Se consideran sistemas de May aleatorios con 3000 simulaciones por cada configuración. (B) Caso particular para $C = 0.1$; se consideran las diferencias entre sistemas de soporte simétrico y puramente aleatorios. . | 7 |
| 1.7. | Variación de la transición entre sistemas estructuralmente simétricas y puramente aleatorios. Se considera el valor de la conectancia $C = 0.6$ | 7 |
| 1.8. | Re-escalamiento del eje x para visualizar las transiciones de la conectancia C y magnitud típica de las interacciones σ . Para este caso particular se escogió $\sigma = C = 0.2$ | 9 |
| 1.9. | Re-escalamiento del eje x para visualizar las transiciones de la conectancia C y la fuerza promedio de las interacciones σ . Para este caso particular se escogió $\sigma = C = 0.6$. Se consideran matrices de puramente aleatorias y estructuralmente simétricas. | 10 |
| 1.10. | Series de tiempo para el sistema de competencia de especies. Se emplea una matriz de incidencias con $N = 100$ cuyas entradas vienen de una distribución uniforme del intervalo $[0, 1]$. Se considera a la totalmente conexa, es decir, con $p = 1.0$. En este caso la dinámica no sobrepasa la capacidad de carga puesto que las 100 especies se encuentran compitiendo y obedeciendo el comportamiento logístico que se muestra en (??) | 11 |

| | |
|---|----|
| 1.11. (A) Series de tiempo del sistema LV generalizado asociada a una matriz de incidencias de $N = 100$, con $\sigma = 0.2$ y $p = 0.35$. (B) Series de tiempo para el sistema LV generalizado asociada a una matriz de incidencias de $N = 100$, con $\sigma = 0.2$ y $p = 0.5$. | 12 |
| 1.12. Distribución de punto fijo para caso particular del sistema de competencia de especies, escogiendo $p = 0.5$ y considerando una distribución uniforme en los pesos de las interacciones. | 13 |
| 1.13. Distribución del punto fijo para un sistema LV generalizado con $p = 0.5$ y $\sigma = 0.003$. En este caso se cumple $\sigma \ll p$ y por lo tanto la distribución coincide con $X^* = \Lambda^{-1}K$ | 14 |
| 1.14. Distribución del punto fijo para un sistema LV generalizado con $p = 0.003$ y $\sigma = 0.5$. En este caso se cumple $p \ll \sigma$ y por lo tanto la distribución coincide con $X^* = \Lambda^{-1}K$ | 14 |
| 1.15. Distribución del punto fijo para un sistema LV generalizado con $p = 0.5$ y $\sigma = 0.2$ | 15 |
| 1.16. Distribuciones de diagonales de las matrices Jacobianas del ejemplo, considerando los parámetros: $N = 100$, $\sigma = 0.2$ y $p \in \{0.3, 0.4, 0.5, 0.6\}$ | 17 |
| 1.17. Distribución de valores propios de las matrices Jacobianas del ejemplo, considerando los parámetros $N = 100$, $\sigma = 0.2$ y $p \in \{0.3, 0.4, 0.5, 0.6\}$ | 18 |
| 1.18. Distribución de valores propios del sistema generalizado para $N = 100$, $\sigma = 0.2$ y $p = 0.6$. Se consideran N discos cuyo centro y radio es cada valor de la diagonal de la matriz Jacobiana asociada. | 19 |
| 1.19. Caso particular de la Figura (1.18) para el valor de la diagonal $\alpha_{ii} = 32.46 \in \mathcal{J}_\Lambda$ | 19 |
| 1.20. (A) Distribución de valores propios de 100 jacobianos para el caso $\sigma = 0.6$, $p = 0.7$. Se agrega una ley circular correspondiente al valor medio de la distribución de diagonales. (B) Relación entre la parte real de los valores propios con las diagonales de los Jacobianos considerados. | 21 |
| 1.21. Relación entre centros y radios de Gershgorin de las Jacobianas asociadas a la Figura (1.20). | 22 |
| 1.22. (A) Ajuste lineal de la relación entre las medias de las $Re(\bar{\lambda})$ con las medias de las $d(\sigma_i, p_j)$ de las Jacobianas del sistema. (B) Ajuste lineal de la relación entre las medianas $Re(\bar{\lambda})$ con las medianas de las $d(\sigma_i, p_j)$ de las Jacobianas del sistema. (C) Ajuste lineal de la relación entre las modas de $Re(\bar{\lambda})$ con las modas de las $d(\sigma_i, p_j)$ de los Jacobianas del sistema. | 22 |
| 1.23. Coeficientes de correlación entre valores de la diagonal y partes reales de eigenvalores de las matrices Jacobianas en función de σ y p . Cada uno de los 78 coeficientes corresponde para un conjunto σ_i y p_j de simulaciones según la Tabla (1.1). | 23 |
| 1.24. Relación entre cantidades de la simulación 11, caso con $\sigma = 0.2$ y $p = 0.1$ | 24 |
| 1.25. Transiciones de estabilidad en el Sistema de Lotka-Votlerra generalizado estructuralmente simétrico en función de la probabilidad de conectividad para $N = 100$ | 27 |

| | |
|--|----|
| 1.26. Transiciones de estabilidad en el Sistema de Lotka-Votlerra generalizado estructuralmente simétrico en función de la probabilidad con escala logarítmica para $N = 100$ | 28 |
| 1.27. Sistema inestable que no cumple con la relación (1.4) | 28 |
| 1.28. Sistema estable que cumple al límite con la relación (1.4) | 29 |
| 1.29. Comparación de la estabilidad entre sistemas de Lotka-Volterra generalizados con Λ aleatoria y estructuralmente simétrica. | 29 |
| 1.30. Comparación de la estabilidad entre sistemas de Lotka-Volterra y May en función de p con matrices aleatorias. | 30 |
| 1.31. Comparación de la estabilidad entre sistemas de Lotka-Volterra y May en función de p con matrices estructuralmente simétricas. | 31 |
| 1.32. Transiciones de estabilidad en el Sistema de Lotka-Volterra generalizado estructuralmente simétrico en función de la fuerza de interacción promedio para $N = 100$ | 32 |
| 1.33. Comparación de la estabilidad entre sistemas de Lotka-Volterra generalizados en función de σ con Λ aleatoria y estructuralmente simétrica. | 33 |
| 1.34. Comparación de la estabilidad entre sistemas de Lotka-Volterra y May en función de σ con matrices aleatorias y estructuralmente simétricas. | 33 |
| 1.35. Transiciones de estabilidad en el Sistema de Lotka-Volterra generalizado estructuralmente simétrico en función de la probabilidad de conectividad para $N = 50$ | 34 |
| 1.36. Transiciones de estabilidad en el Sistema de Lotka-Volterra generalizado estructuralmente simétrico en función de la fuerza de interacción para $N = 50$ | 35 |
| 1.37. Transiciones de estabilidad en el Sistema de Lotka-Volterra generalizado en función de la probabilidad de conectividad para $N = 25$ | 36 |
| 1.38. Transiciones de estabilidad en el Sistema de Lotka-Votlerra generalizado en función de la fuerza de interacción para $N = 25$ | 36 |
| 1.39. Transición de estabilidad para $\sigma = 0.2$ considerando $\kappa = 0.9$ como parámetro de control emergente para definir la probabilidad crítica de transición. (A) Escala lineal. (B) Escala logarítmica. | 47 |
| 1.40. Transición de estabilidad para el caso $\sigma = 1.0$ considerando $\kappa = 0.9$ como parámetro de control emergente para definir la probabilidad crítica de transición. (A) Escala lineal. (B) Escala logarítmica. | 48 |
| 1.41. Transiciones de estabilidad en función de σ considerando $\kappa = 0.9$ como parámetro de control emergente para definir la fuerza de interacción promedio crítica de transición. (A) Caso particular para $p = 0.1$. (B) Caso particular para $p = 1.0$ | 49 |

Índice de tablas

| | |
|---|----|
| 1.1. Cantidad de archivos generados para el banco de Diagonales y Jacobianos considerando $N = 50$. A partir de $\sigma = 0.6$ en adelante, los tiempos de compilación fueron muy prolongados por lo que no se obtuvieron los 10 archivos respectivos a diferencia de los valores promedio anteriores. | 20 |
| 1.2. Cantidad de simulaciones realizadas por cada N y para cada elemento de la partición definida. | 26 |

List of Algorithms

Capítulo 1

Estabilidad del sistema de Lotka-Volterra generalizado

Anteriormente, en el Capítulo 1 se estableció que la estabilidad en sistemas complejos de gran dimensión puede caracterizarse mediante propiedades espectrales de la matriz Jacobiana. En el presente capítulo se retoman dichos resultados con el objetivo de aplicarlos al Jacobiano del modelo estudiado. Para ello se parte del marco clásico propuesto por Robert May con el fin de establecer el marco teórico que sustentará el análisis del modelo de Lotka-Volterra generalizado.

Los sistemas linealizados considerados en el marco clásico de Robert May se modelan estadísticamente como matrices aleatorias que representan la Jacobiana evaluada en un equilibrio genérico, sin derivarlo explícitamente de la dinámica subyacente. En este esquema las entradas fuera de la diagonal se toman independientes, con media cero, varianza σ^2 y conectancia C , mientras que la diagonal se fija en un valor constante $-d < 0$.

De acuerdo con la ley circular, el espectro de la parte aleatoria se distribuye asintóticamente en un disco centrado en el origen y de radio $\sigma\sqrt{NC}$. La presencia de la diagonal fija desplaza dicho disco al punto $-d$ sobre el eje real. La estabilidad lineal se garantiza entonces cuando el soporte espectral permanece completamente en el semiplano negativo, lo que conduce al criterio

$$\sigma\sqrt{NC} < d$$

Este umbral controla la posición del espectro y permite distinguir entre estabilidad e inestabilidad dinámica. En particular, el término $\sigma\sqrt{NC}$ representa la escala típica del radio espectral asociado a la parte aleatoria de la matriz de interacciones. Con el fin de precisar esta interpretación, se enuncia a continuación una proposición que formaliza la relación entre la varianza de las entradas y el crecimiento asintótico del radio espectral.

Proposición 1. Sea $A = -dI + B \in M_N(\mathbb{R})$, donde $d > 0$ y B es una matriz aleatoria cuyas entradas fuera de la diagonal son independientes, con media cero, varianza σ^2 y probabilidad de conexión C . Entonces, cuando $N \rightarrow \infty$, el radio espectral de B satisface

$$\rho(B) = \sigma\sqrt{NC} + \mathcal{O}(1)$$

con alta probabilidad. En consecuencia, el sistema lineal $\dot{x} = Ax$ es estable con alta probabilidad si

$$\sigma\sqrt{NC} < d.$$

Demostración. El resultado se obtiene como consecuencia del *Teorema Circular de Girko* [6], aplicado a la matriz reescalada $\frac{1}{\sqrt{N}}B$, cuyo espectro converge al disco de radio $\sigma\sqrt{C}$. Al deshacer el reescalamiento se obtiene la escala $\sigma\sqrt{NC}$ para el radio espectral de B . Si $A = -dI + B$ entonces el espectro se traslada $\rho(A) = -d + \rho(B)$, por lo tanto la estabilidad requiere $-d + \sigma\sqrt{NC} < 0$ si y solo si $\sigma\sqrt{NC} < d$. \square

A diferencia de los radios de Gershgorin y del *criterio suficiente de estabilidad* de la Proposición ?? (ver ??), el radio espectral controla directamente la posición de los valores propios del sistema. No obstante, este control se ejerce bajo el supuesto de una diagonal fija. En contraste, la matriz Jacobiana del sistema de Lotka-Volterra generalizado no es homogénea: los elementos diagonales dependen de las abundancias del punto de equilibrio X^* . Por ello, su espectro de valores propios no necesariamente se distribuye de manera circular, sino que se dispersa según la variabilidad de las entradas diagonales.

Considerar una diagonal fija resulta conveniente para vincular la estabilidad con el radio espectral. No obstante, desde una perspectiva ecológica, esta suposición es poco realista: implica que no existe variabilidad en las abundancias de cada especie, lo cual contradice la naturaleza fluctuante de los ecosistemas. En conclusión, la diagonal fija es útil como herramienta matemática, pero su interpretación biológica es limitada. Esta reflexión prepara terreno para analizar, en la siguiente sección, como se manifiestan las transiciones dinámicas en sistemas de May.

1.1. Consideraciones generales sobre estabilidad

Las matrices de interacción de May, cuyas entradas fuera de la diagonal se consideran independientes, reflejan un escenario sin estructura subyacente en las interacciones: las especies interactúan de manera aleatoria, sin patrones específicos. Por ello, la distribución de valores propios resulta isotrópica, formando un disco circular según Girko. Si se introdujeren correlaciones entre pares de especies, la distribución espectral podría deformarse, dando lugar a un comportamiento distinto. Stefano Allesina ha estudiado este fenómeno y ha determinado que, bajo ciertas correlaciones estructurales, los valores propios se distribuyen siguiendo una ley elíptica [1].

Introducir correlaciones de forma explícita, induce a un espectro que transita entre extremos totalmente simétrico y antisimétrico. Aunque en nuestros sistemas las entradas de la matriz Λ se consideran independientes, el hecho de que tengan un soporte simétrico genera pequeñas correlaciones implícitas, sin embargo, nuestro análisis solo se consideran de manera superficial para interpretar la geometría del espectro.

Al considerar matrices de interacción de May con soporte simétrico y entradas aleatorias independientes, bajo iguales condiciones de conectividad, magnitud típica y tamaño del sistema, no se esperan diferencias sustanciales en la geometría espectral cuando σ es pequeña. En este régimen, la distribución de valores propios permanece concentrada en su respectiva vecindad, y el soporte estructuralmente simétrico no introduce deformaciones apreciables respecto al caso puramente dirigido. En consecuencia, en la Figura (1.1) no se observa variabilidad significativa en ambos escenarios.

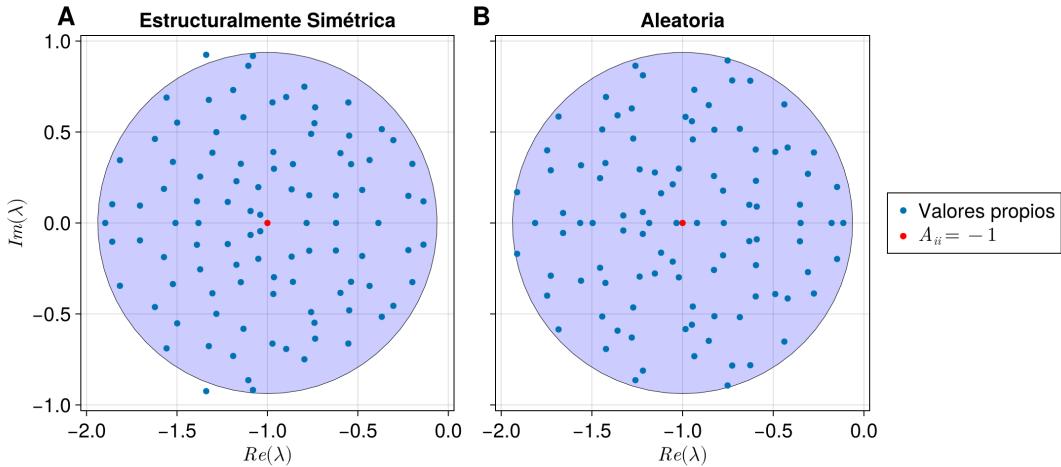


Figura 1.1: Distribución de valores propios en sistemas de May con soporte simétrico y puramente aleatorios. En ambos casos se consideró $N = 100$, magnitud típica $\sigma = 0.2$, para una conectancia $C = \frac{1}{\sigma^2 N} - 0.03$.

Conforme σ aumenta, la magnitud típica de las interacciones crece y el espectro se expande en el plano complejo. En el caso de soporte estructuralmente simétrico, esta expansión puede acompañarse de una deformación visible del conjunto de valores propios, como se muestra en la Figura (1.2). Aunque las entradas permanecen independientes, la simetría del soporte induce una organización preferencial de los valores propios hacia los ejes de \mathbb{C} , por lo que el disco circular deja de describir con precisión la distribución observada.

Retomando la discusión sobre el estado coexistente de la Sección ??, en la Tabla (??) se observa que cuando el radio espectral satisface $\sigma\sqrt{Np} \approx 1$, la matriz Λ^{-1} tiende a mal condicionarse, reduciendo la probabilidad de factibilidad positiva del estado coexistente.

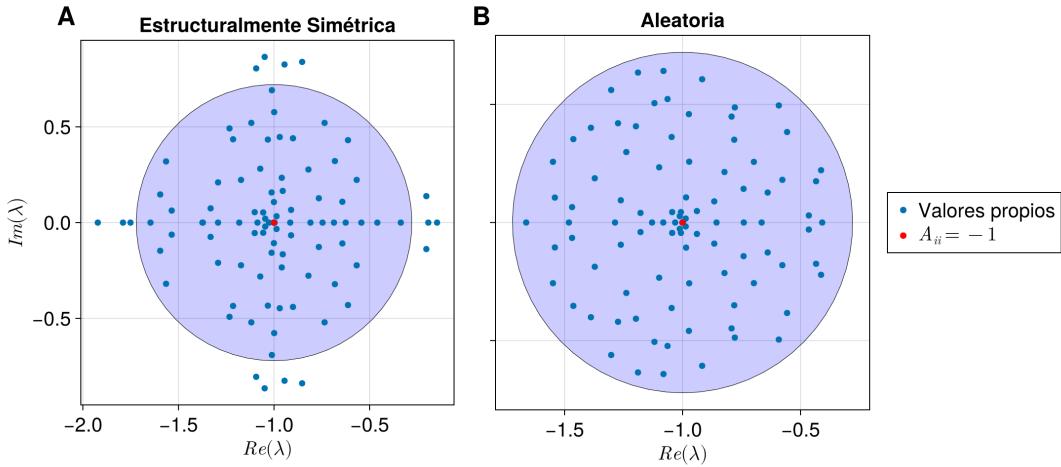


Figura 1.2: Distribución de valores propios en sistemas de May con soporte simétrico y puramente aleatorios. En ambos casos se consideró $N = 100$, magnitud típica $\sigma = 0.4$, para una conectancia $C = \frac{1}{\sigma^2 N} - 0.03$.

No obstante, en matrices Λ con soporte simétrico, la distribución espectral no se ajusta estrictamente al disco circular idealizado. En consecuencia el radio espectral deja de ser un descriptor suficiente para capturar el comportamiento global del sistema, pues la geometría completa del espectro —y no solo su borde— influye en el condicionamiento y, por ende, en la factibilidad positiva. Si estas dificultades aparecen ya en el estado plenamente coexistente, por transitividad es razonable esperar que los escenarios con especies extintas presenten una dinámica aún más compleja, lo que vuelve más sutil la caracterización de sus transiciones.

Transiciones dinámicas de May

Antes de presentar los resultados propios del modelo de Lotka-Volterra generalizado, conviene analizar las transiciones dinámicas en el sistema clásico de May, con el fin de establecer un marco de referencia. Este análisis permitirá contextualizar los resultados posteriores, haciendo especial énfasis en las diferencias entre sistemas con soporte simétrico y aquellos puramente dirigidos, a la luz de las observaciones derivadas de la Figura (1.2).

Para analizar las transiciones dinámicas se visualizará el comportamiento del sistema en función de la conectancia C y de la magnitud típica σ . En cada caso se realiza un barrido sobre cien valores equiespaciados en el intervalo $[0, 1]$, manteniendo fijo el parámetro complementario. Específicamente, al variar C se consideran valores de $\sigma \in \{0.1, 0.2, \dots, 1, 0\}$, y de forma análoga, al variar σ se fijan distintos valores de C . Para cada combinación se generan 3000 realizaciones independientes, con el fin de estimar de manera estable la probabilidad de estabilidad del sistema.

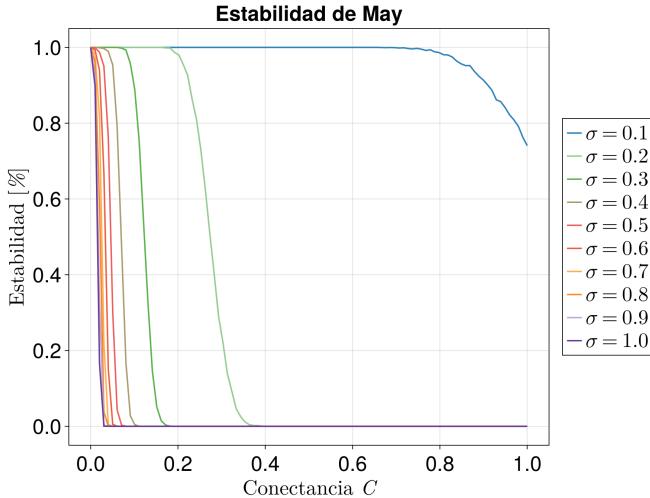


Figura 1.3: Transición dinámica en sistemas de May aleatorios en función de C . Para cada configuración se generan 3000 simulaciones independientes. Espectral disminuyen, lo que estrecha la región de transición y produce un cambio cada vez más pronunciado en la probabilidad de estabilidad.

Para visualizar con mayor detalle el orden de magnitud en que ocurren las transiciones cuando σ toma valores grandes, resulta conveniente reescalar la conectancia en escala logarítmica \log_{10} . Este cambio permite ampliar la región de conectividades pequeñas, donde el umbral crítico $\sigma\sqrt{NC} \approx d$ puede alcanzarse incluso para valores reducidos de C . En esta representación, la transición deja de observarse únicamente como un cambio abrupto y se aprecia con mayor claridad la anchura de la región crítica. En la representación de la Figura (1.4), se observa que las transiciones correspondientes a valores grandes de σ tienden a concentrarse. En particular, los casos $\sigma = 0.9$ y $\sigma = 1.0$ presentan umbrales muy próximos entre sí. Este comportamiento se explica directamente a partir del criterio $\sigma\sqrt{NC}$, del cual se obtiene $C_c = d^2/(\sigma^2 N)$. La dependencia inversa cuadrática implica que, para valores grandes de σ , las variaciones en el umbral crítico de conectancia se comprimen progresivamente, produciendo una acumulación aparente de las curvas de transición.

La Figura (1.3) muestra distintas dinámicas en sistemas de tamaño $N = 100$ para valores fijos de σ . En todas las representaciones se observa la aparición de un umbral crítico de estabilidad conforme la conectancia C aumenta, consistente con la condición espectral $\sigma\sqrt{NC} \approx d$. No obstante, la forma de la transición depende de la magnitud típica σ : para valores mayores, el cambio entre el régimen estable e inestable se vuelve más abrupto. Este comportamiento puede entenderse a partir de la concentración del radio espectral alrededor de su valor esperado $\sigma\sqrt{NC}$. A medida que N crece, las fluctuaciones relativas del radio

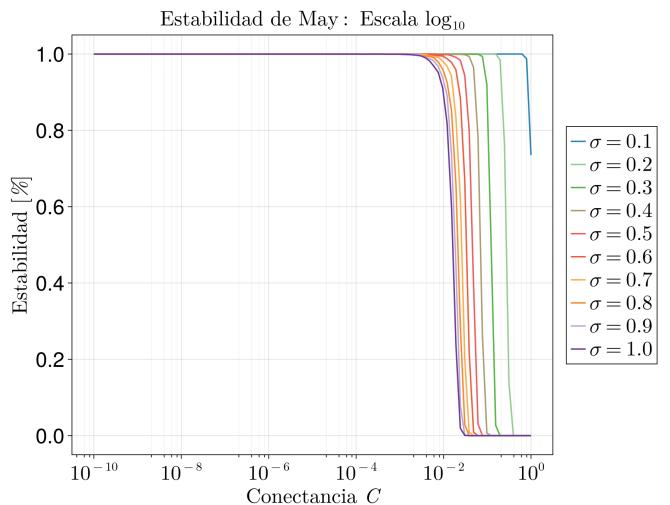


Figura 1.4: Transición dinámica en sistemas de May aleatorios en función de C en escala \log_{10} .

Al considerar sistemas de May con soporte simétrico, el criterio basado únicamente en el radio espectral deja de describir completamente la transición observada en la probabilidad de estabilidad. En consecuencia, las transiciones pueden desarrollarse de manera distinta en comparación con sistemas puramente dirigidos. En la Figura (1.5) se presenta una comparación entre ambos escenarios para magnitudes típicas $\sigma \in \{0.2, 0.6\}$.

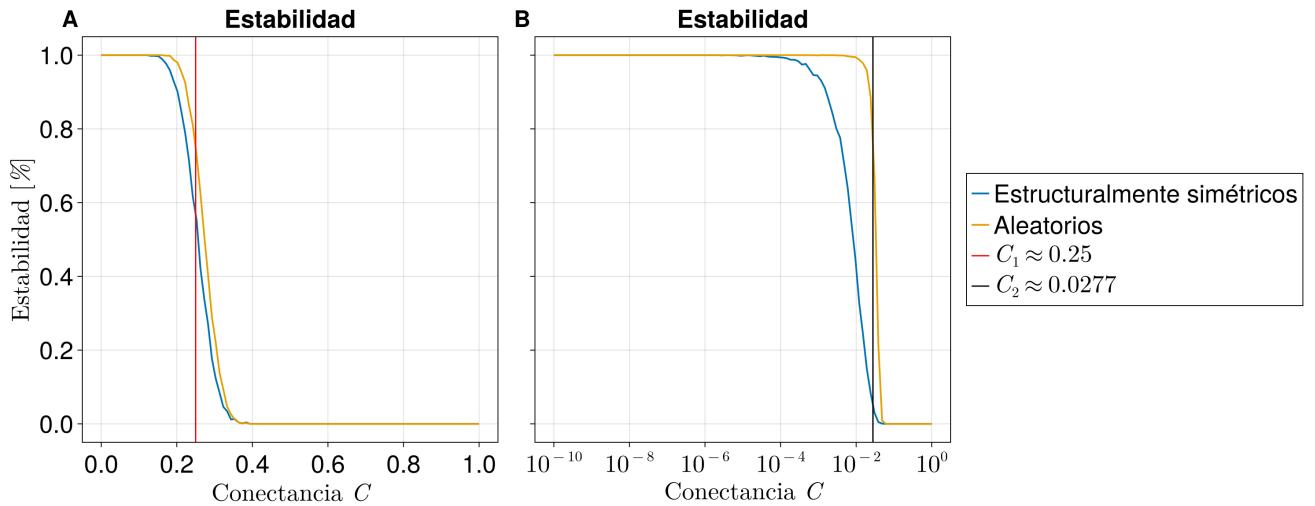


Figura 1.5: Transición de May puramente aleatoria vs estructuralmente simétrica. (A) Se considera para $\sigma = 0.2$ (B) Se considera para $\sigma = 0.6$.

Para $\sigma = 0.2$ se observa únicamente una desviación sutil del sistema estructuralmente simétrico respecto del caso dirigido, y la conectividad C_c predicha por el radio espectral, coincide aproximadamente en ambos casos. En contraste, para $\sigma = 0.6$ la transición del sistema con soporte simétrico se relaja de manera notable: la probabilidad de estabilidad decrece gradualmente en una región más amplia de conectividades, en lugar de presentar un cambio abrupto. Este ensanchamiento del régimen crítico sugiere que la geometría espectral inducida por la estructura del soporte introduce una mayor variabilidad en la parte real de los valores propios, modificando así el comportamiento colectivo del sistema.

Al analizar las transiciones dinámicas en función de σ se obtiene un comportamiento análogo, aunque con matrices importantes. En este caso se muestran las transiciones para distintos valores fijos de la conectividad C . El umbral de estabilidad continúa estando controlado por el radio espectral, ahora dado por el valor crítico $\sigma_c = d/\sqrt{NC}$. A diferencia de las transiciones en función de C , las mostradas en la Figura (1.6 A) no presentan una separación tan marcada entre distintos valores de conectividad. En particular para conectividades grandes las curvas tienden a concentrarse y sus diferencias se vuelven menos perceptibles.

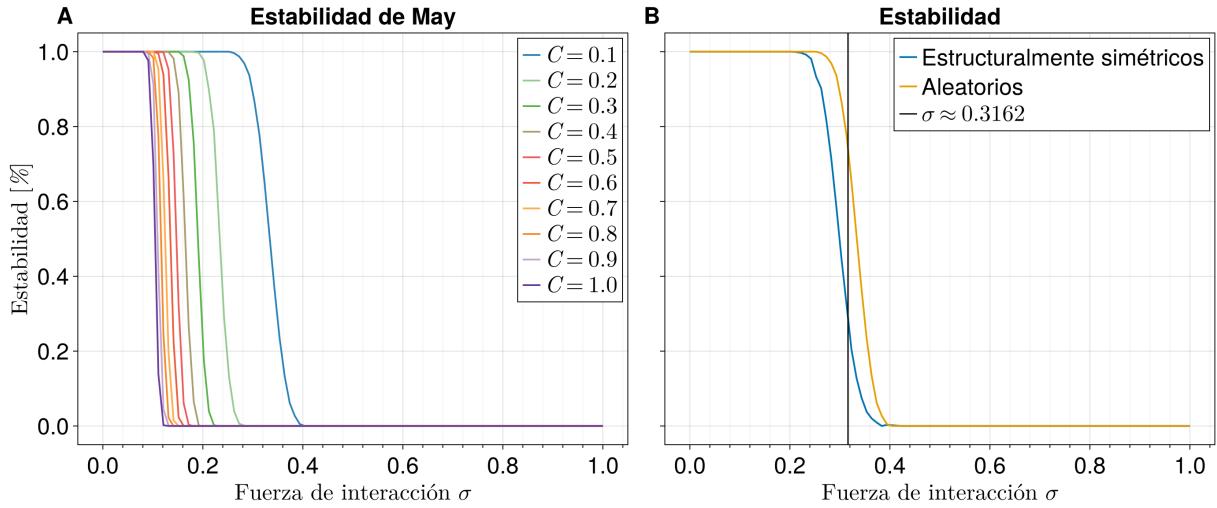


Figura 1.6: Transición dinámica en función de σ (**A**) Se consideran sistemas de May aleatorios con 3000 simulaciones por cada configuración. (**B**) Caso particular para $C = 0.1$; se consideran las diferencias entre sistemas de soporte simétrico y puramente aleatorios.

Este comportamiento se explica por la dependencia $\sigma_c \propto 1/\sqrt{C}$: al aumentar C , las variaciones relativas en el umbral crítico disminuyen, produciendo una compresión progresiva de las interacciones en el eje horizontal. En contraste con el caso C , su dependencia es $C \propto 1/\sigma^2$, y por esa razón se observa una separación mayor. En la Figura (1.6 B) se presenta la comparación entre sistemas con soporte

estructuralmente simétrico y puramente dirigido para una conectividad $C = 0.1$. En este régimen de baja conectividad se observa una desviación sutil entre ambos escenarios, lo que sugiere que la estructura del soporte aún influye en la transición. En la Figura (1.7), correspondiente a $C = 0.6$, la discrepancia se vuelve prácticamente imperceptible. Esto indica que, para un tamaño N fijo y conectividades elevadas, el comportamiento crítico de ambos sistemas converge. En otras palabras, al aumentar la densidad de la red, la influencia de la simetría estructural sobre la transición dinámica se atenúa progresivamente, hasta volverse marginal en el régimen casi completamente conexo.

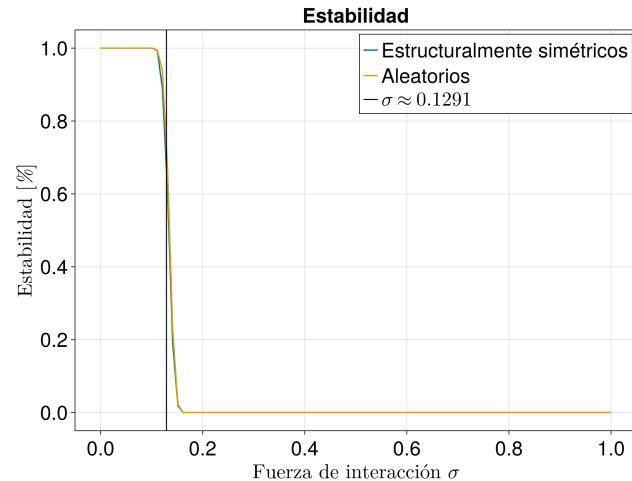


Figura 1.7: Variación de la transición entre sistemas estructuralmente simétricas y puramente aleatorios. Se considera el valor de la conectancia $C = 0.6$.
 Para finalizar esta sección se analizan las diferencias conceptuales entre las transiciones en función de C y de σ . En ambos casos el radio espectral $R = \sigma\sqrt{NC}$ constituye el parámetro efectivo que controla el umbral de estabilidad.

Para finalizar esta sección se analizan las diferencias conceptuales entre las transiciones en función de C y de σ . En ambos casos el radio espectral $R = \sigma\sqrt{NC}$ constituye el parámetro efectivo que controla el umbral de estabilidad.

No obstante, variar C o σ implica recorrer el espacio paramétrico desde perspectivas distintas. Cuando se fija σ y se varía la conectividad C , se interpreta que la magnitud típica de las interacciones permanece constante mientras se agregan enlace en la red ponderada, transitando desde un régimen disperso hasta un densamente conectado. La sensibilidad del radio espectral frente a variaciones en C esta dada por

$$\frac{\partial R}{\partial C} = \frac{\sigma\sqrt{N}}{2\sqrt{C}}$$

lo que muestra que el sistema es particularmente sensible en el régimen de baja conectividad. Dado que el barrido de conectividades se realiza con incrementos uniformes $\Delta C = 0.01$, el cambio inducido en el radio espectral puede aproximarse por

$$\Delta R \approx \frac{\partial R}{\partial C} \cdot \Delta C$$

Esto muestra que, para valores pequeños de C , incrementos discretos iguales producen variaciones relativamente grandes en R , mientras que en el régimen de alta conectividad el efecto es considerablemente menor. En consecuencia, cuando el umbral crítico se localiza en regiones de baja conectividad, la transición observada puede concentrarse en pocos puntos del barrido paramétrico, reforzando su carácter abrupto. Al fijar la conectividad C y variar σ , el tamaño efectivo del sistema permanece constante mientras que la magnitud típica de las interacciones recorre el intervalo $[0, 1]$. La sensibilidad del radio con respecto de σ ahora viene dada por

$$\frac{\partial R}{\partial \sigma} = \sqrt{NC}$$

A diferencia del caso en función de C , esta derivada es constante para valores fijos de N y C , lo que implica que incrementos discretos uniformes $\Delta\sigma$ producen variaciones uniformes en el radio espectral

$$\Delta R \approx \sqrt{NC} \cdot \Delta\sigma$$

En consecuencia, el crecimiento de R es proporcional a σ y el cruce del umbral crítico ocurre de manera más regular, sin la amplificación observada en el régimen de baja conectividad. Esto explica porque las transiciones en función de σ se perciben más suaves en comparación con aquellas obtenidas al variar C . Si se considera además la dependencia respecto del tamaño del sistema,

$$\frac{\partial R}{\partial N} = \frac{\sigma\sqrt{C}}{2\sqrt{N}}$$

se observa que la sensibilidad absoluta del radio espectral frente a variaciones N decrece como $N^{-1/2}$. En el límite asintótico, las variaciones relativas inducidas por cambios en el tamaño del sistema se atenúan progresivamente, las fluctuaciones disminuyen y se va reforzando la concentración del umbral crítico. El marco anterior describe de manera consistente el comportamiento de sistemas puramente dirigidos, donde el radio espectral actúa como parámetro efectivo que organiza la transición de estabilidad. Sin embargo, en presencia de soporte simétrico, la geometría del espectro altera esta correspondencia.

Aunque el radio espectral continúa delimitando el cruce del eje real, la forma de la transición observada ya no queda completamente caracterizada por $R = \sigma\sqrt{NC}$. En este escenario, las sensibilidades paramétricas derivadas anteriormente resultan insuficientes para explicar el ensanchamiento del régimen crítico, evidenciando que intervienen propiedades espectrales adicionales más allá del borde del espectro.

Con el fin de verificar si el radio espectral constituye un parámetro de control universal, se reescalan las transiciones en términos de $R = \sigma\sqrt{NC}$. En particular, en la Figura (1.8) se presentan las transiciones dinámicas al variar C fijando $\sigma = 0.2$, así como al variar σ con $C = 0.2$. En ambos escenarios, el caso puramente dirigido colapsa consistentemente alrededor del valor crítico del radio espectral, mostrando que la estabilidad depende esencialmente de R . En contraste, el sistema estructuralmente simétrico exhibe desviaciones residuales respecto de este colapso: aunque el umbral se mantiene próximo al valor crítico, la forma de la transición no coincide completamente bajo el reescalamiento.

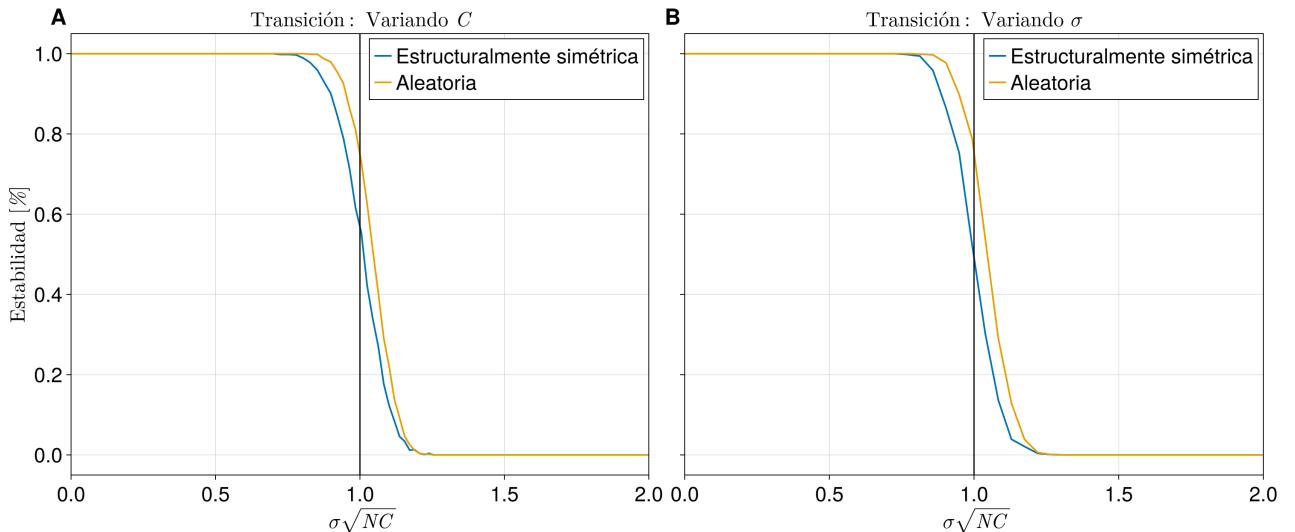


Figura 1.8: Re-escalamiento del eje x para visualizar las transiciones de la conectancia C y magnitud típica de las interacciones σ . Para este caso particular se escogió $\sigma = C = 0.2$.

En contraste, en la Figura (1.9) se presentan las mismas transiciones al fijar σ y C en el valor 0.6. En el caso (A), el caso estructuralmente simétrico exhibe una desviación notable respecto del colapso observado en el sistema puramente dirigido. Esto indica que, si bien R continúa siendo un descriptor relevante, no captura por completo los efectos geométricos inducidos por la estructura del soporte.

Por lo tanto se confirma que, en sistemas estructuralmente simétricos, el radio espectral no constituye un parámetro de control universal en el mismo sentido que en el caso dirigido. La transición no está determinada únicamente por el borde del espectro, sino que también de la distribución interna de los valores propios, cuya geometría modifica el régimen crítico.

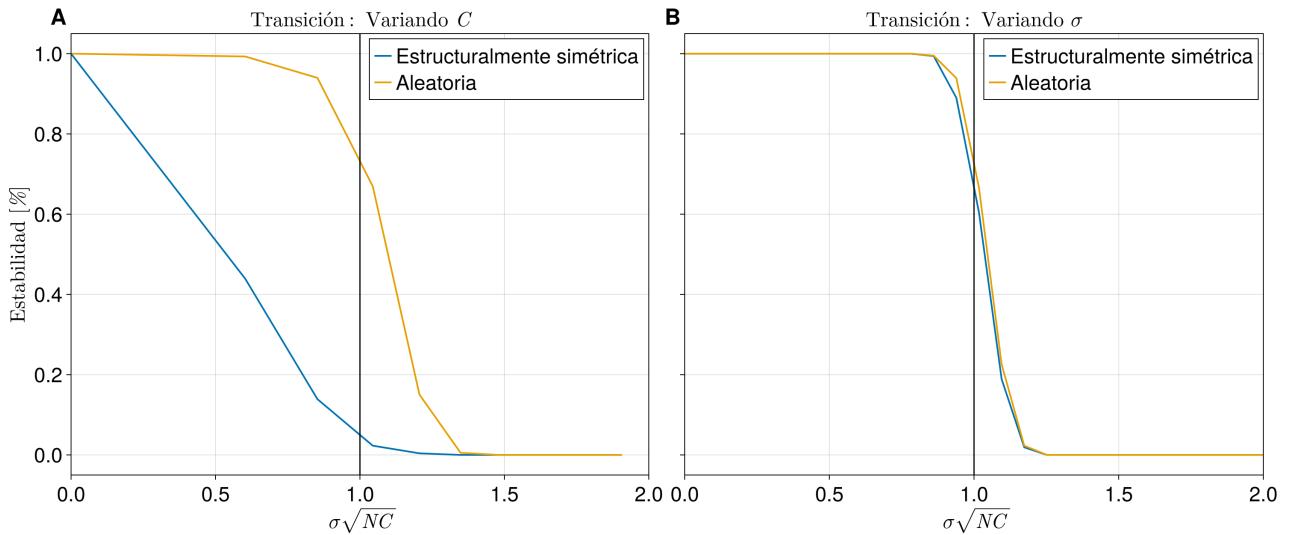


Figura 1.9: Re-escalamiento del eje x para visualizar las transiciones de la conectancia C y la fuerza promedio de las interacciones σ . Para este caso particular se escogió $\sigma = C = 0.6$. Se consideran matrices de puramente aleatorias y estructuralmente simétricas.

1.2. Implementación numérica y metodología

El capítulo anterior motiva al actual para presentar los resultados de la dinámica que produce el sistema de Lotka-Volterra generalizado (??) bajo los coeficientes de interacción de la matriz de incidencias (??) para posteriormente linearizarlo mediante la Matriz Jacobiana del sistema (??). En este capítulo se presentarán los resultados que produce cada etapa del proceso, así como sus características. El objetivo será dar respuesta a cada una de las hipótesis del planteamiento del problema, sobre todo indagar las condiciones de estabilidad del sistema en términos de Λ y reforzar la idea consecuente de la proposición 1 en la que se detallaba que el radio espectral (??) no necesariamente se ajusta a la estabilidad del sistema de Lotka-Volterra.

Se consideraron 3 conjuntos diferentes de simulaciones: sistemas para 25, 50 y 100 especies. Para explorar los resultados se dejaron fijos la mayor cantidad de parámetros que hay en (??) con el fin de observar cambios significativos con la menor cantidad de fluctuaciones posibles; únicamente se han variado las matrices de incidencias Λ que dependen de p y σ , y al igual que en las transiciones de May y semi Allesina se varió una de estas cantidades mientras que la otra permaneció fija. En todas las simulaciones la tasa de crecimiento se dejó fija en $r_i = 2$ y la capacidad de carga en $K_i = 5$ para cada especie del sistema. Al integrar numéricamente las ecuaciones con RK4 se escogió un intervalo de tiempo entre 0 y 50 con un paso de integración de $h = 0.01$.

Además de estos parámetros, siempre se inicializó cada simulación con la condición inicial $\vec{x}_0 = \vec{1}$ y se consideraron dos escenarios: Matrices de incidencias estructuralmente simétricas y puramente

aleatorias¹, tal y como se visualizó al final del capítulo anterior. En el apéndice (??), el lector puede darse una idea de como se realizó el proceso de las simulaciones. En cada escenario se presentó cierta cantidad de ruido en las gráficas de estabilidad, por lo que el número de simulaciones fue establecido en función de la disminución de dicho ruido, siguiendo la ley de los grandes números.

1.2.1. Series de tiempo

Anteriormente se ha comentado que las interacciones de la matriz de incidencias Λ están volteadas con respecto de la matriz de Jacobiana del sistema (??); por ejemplo, la cooperación en \mathcal{J}_Λ se da para las interacciones (++) mientras que para Λ es (–). Si se tuviera un sistema puramente de competencia, es decir para toda $\alpha_{ij} \in \Lambda$ mayor o igual que cero, entonces no hay forma de que ninguna de las poblaciones participantes sobrepasen la capacidad de carga establecida, tal y como se indica en la ecuación (??) y en el Ejemplo ???. Por lo tanto se obtendrían series de tiempo caóticas para cada una de las especies por debajo de $K = 5$.

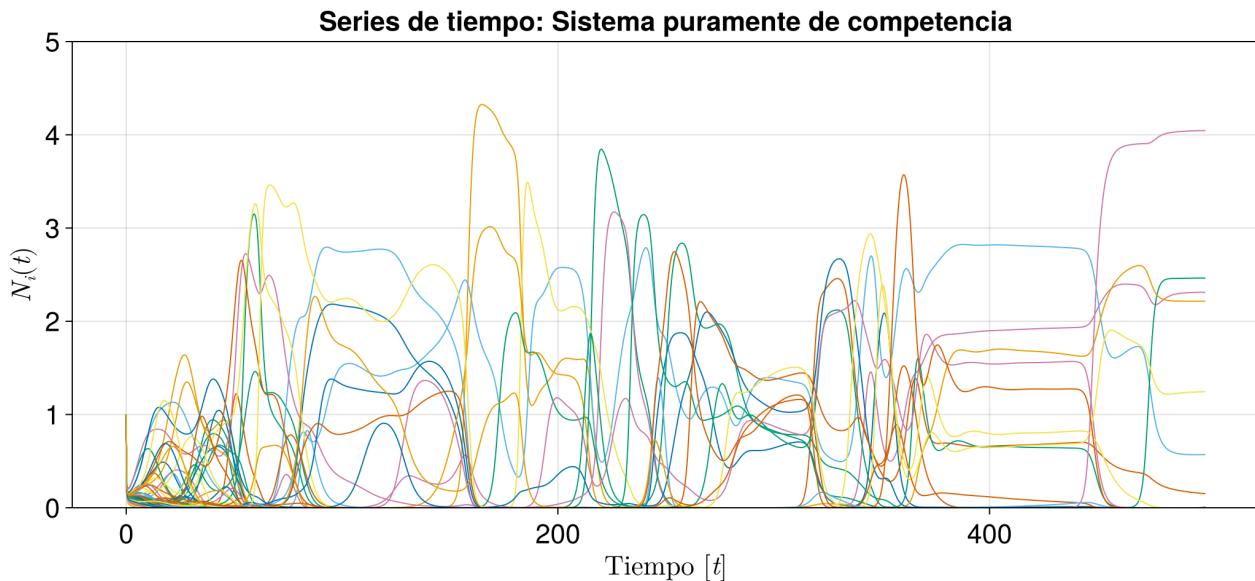


Figura 1.10: Series de tiempo para el sistema de competencia de especies. Se emplea una matriz de incidencias con $N = 100$ cuyas entradas vienen de una distribución uniforme del intervalo $[0, 1]$. Se considera a la totalmente conexa, es decir, con $p = 1.0$. En este caso la dinámica no sobrepasa la capacidad de carga puesto que las 100 especies se encuentran compitiendo y obedeciendo el comportamiento logístico que se muestra en (??).

Una de las características que se encontró en los sistemas de competencia, es el tiempo que tarda en estabilizarse es considerablemente mayor que en sistemas donde se considerarán todas las interacciones que puede ofrecer una distribución normal de media cero y varianza finita (cooperación, presa-depredador, etc.). Las poblaciones en este caso se encuentran limitadas por la capacidad de

¹Solo aplica para $N = 100$, el resto de casos se consideraron Λ estructuralmente simétricas.

carga y serán incapaces de superarla ya que el término de la derecha en (??) es siempre positivo y por tanto resta al término logístico de la izquierda.

En contraste con el sistema generalizado, éste sí excede la capacidad de carga ya que el término de la derecha en (??) puede sumar al de la izquierda y permite que pueda superar el límite que la capacidad de carga impone, lo que se traduce en especies dominantes que regulan el sistema y provocan que llegue al atractor en un tiempo menor. Otro aspecto de la red de competencias es que cuando es más conectada el tiempo en estabilizarse también es mayor. La cantidad de fluctuaciones posibles es cada vez mayor, y el sistema no lineal es sensible en presencia de estas fluctuaciones, por lo tanto es esperable que el tiempo en llegar al equilibrio sea prolongado. Por el contrario, si la red de competencias tiene pocas conexiones ($p \leq 0.5$) entonces el sistema tarda menos en estabilizarse.

En el Ejemplo ?? del capítulo anterior, se observaba como las interacciones de cooperación (--) en la matriz de incidencias Λ genera la aparición de un atractor que se posiciona por arriba de la magnitud de la capacidad de carga (Figura (??)). En el caso extendido a $N \gg 1$ especies ocurrirá algo semejante considerando un atractor N -dimensional. En este caso pueden haber especies que sobrepasen por mucho o poco la capacidad de carga, pero también cabe la posibilidad de que algunas no logren sobrepasarla y otras que lleguen a extinguirse. A continuación se muestran dos ejemplos diferentes

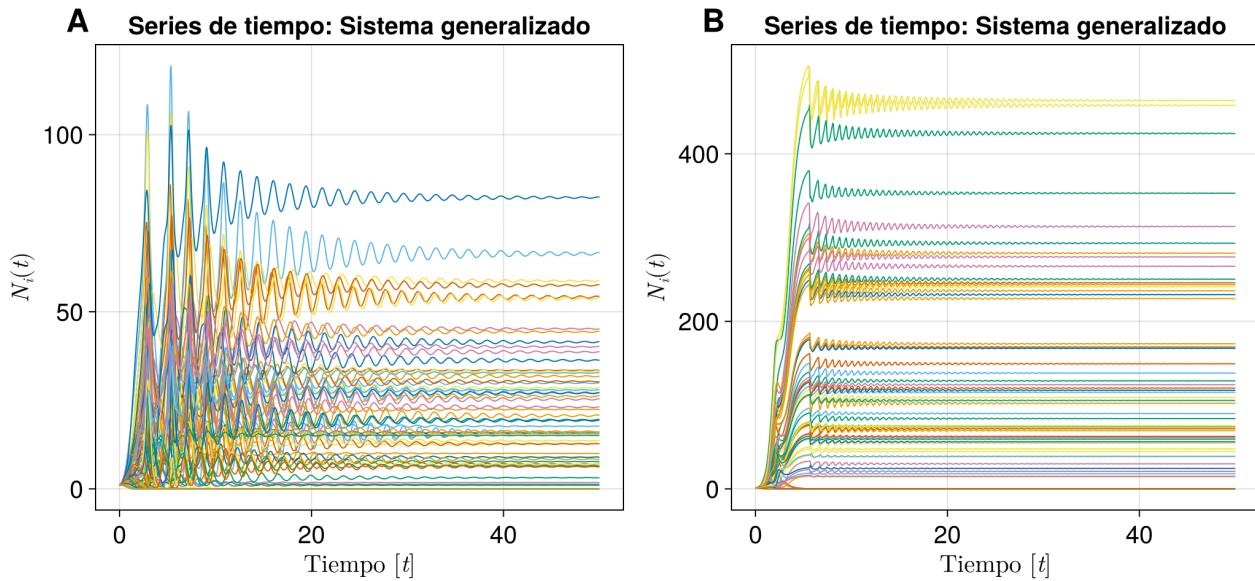


Figura 1.11: (A) Series de tiempo del sistema LV generalizado asociada a una matriz de incidencias de $N = 100$, con $\sigma = 0.2$ y $p = 0.35$. (B) Series de tiempo para el sistema LV generalizado asociada a una matriz de incidencias de $N = 100$, con $\sigma = 0.2$ y $p = 0.5$

La diferencia evidente entre estas gráficas es debido la matriz de incidencias, sus parámetros son $\sigma = 0.2$ con $p = 0.35$ y $p = 0.5$ respectivamente. El segundo caso corresponde con una red más conectada que el primero y eso se traduce en la oportunidad de tener más interacciones con signo negativo que propicien un mayor crecimiento. El tiempo en que llegaron a estabilizarse fue menor a $t = 50$, y a su vez considerablemente menor que el sistema de competencia de especies de la Figura (1.10).

1.2.2. Puntos fijos

Algo interesante de notar en los sistemas de competencia es la tendencia del punto fijo. En la sección ?? se propuso que una posible solución del punto fijo sería $X^* = \Lambda^{-1}K$, se había discutido que su distribución podría ser de cola pesada con posibilidad de tener entradas negativas. Si Λ tiene todos sus coeficientes positivos provenientes de la distribución uniforme en el intervalo $[0, 1]$ entonces la distribución de X^* podría ser diferente pero lo que se observa en la Figura (1.10) es que la mayoría de las especies tienden a cero (se extinguen) mientras que unas cuantas logran sobrevivir por debajo de la capacidad de carga, empatando con una distribución de cola pesada tal y como se observa en la Figura (1.12). Esta evidencia muestra un parteaguas en donde no necesariamente el punto fijo y su distribución estarán dados por $X^* = \Lambda^{-1}K$, sino que el punto fijo favorable puede ser alguno en donde una o varias especies del sistema se extinguieren, es decir, resolver las ecuaciones del sistema (??) cuando se asume que existe un subconjunto que son cero: $S = \{x_k = 0 \mid k \in \mathcal{I} \wedge \mathcal{I} \subset \{1, \dots, N\}\}$. Pero nuestro caso de mayor interés es lo que se logra observar en la Figura (1.11); se tienen dos sistemas estables que definitivamente muestran una distribución de cola pesada puesto que un número reducido de ellas se encuentran dispersas en valores mayores a la capacidad de carga pero es posible hallar a la mayoría concentradas en valores cercanos al cero (Ver Figura (1.15) A).

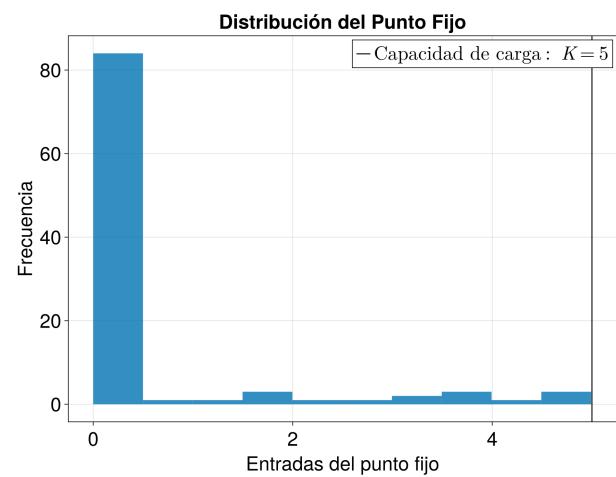


Figura 1.12: Distribución de punto fijo para caso particular del sistema de competencia de especies, escogiendo $p = 0.5$ y considerando una distribución uniforme en los pesos de las interacciones.

Anteriormente se ha discutido que mientras los valores de σ y p en la matriz de incidencias Λ sean pequeños con respecto del otro, es decir, $\sigma \ll p$ ó $p \ll \sigma$: se obtendría una distribución alrededor del valor fijo de la capacidad de carga, en este caso $K = 5$. Bajo esta premisa, se explorará para qué escenarios la configuración $X^* = \Lambda^{-1}K$ representa correctamente el punto fijo y su distribución. A

continuación se presentan una serie de histogramas que muestran gráficamente la comparación entre el resultado numérico y el teórico

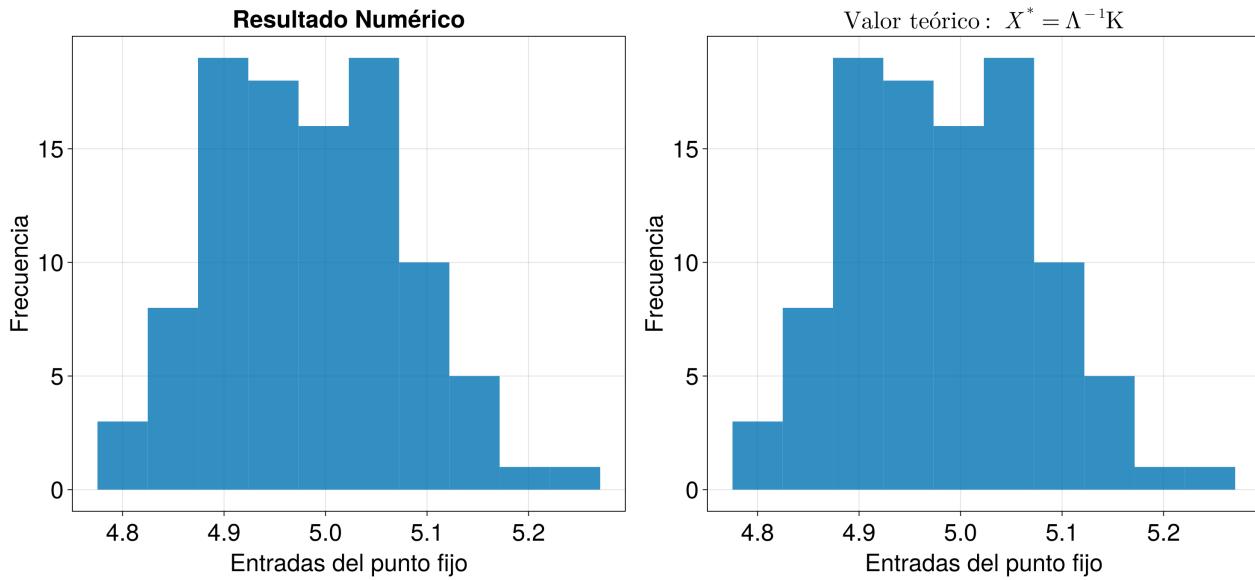


Figura 1.13: Distribución del punto fijo para un sistema LV generalizado con $p = 0.5$ y $\sigma = 0.003$. En este caso se cumple $\sigma \ll p$ y por lo tanto la distribución coincide con $X^* = \Lambda^{-1}K$.

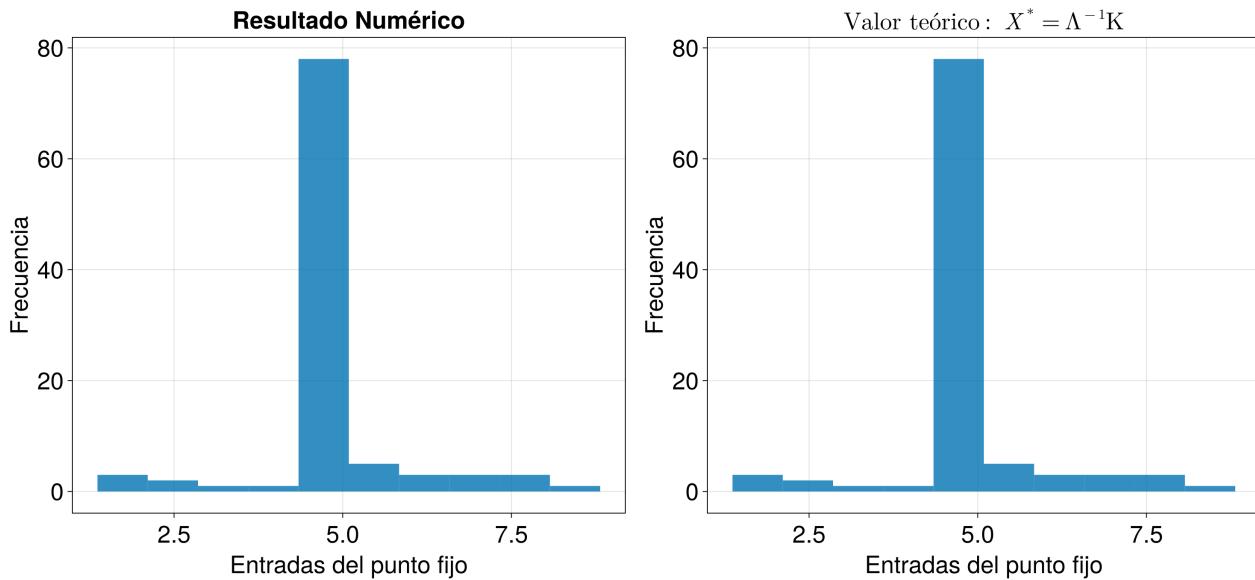


Figura 1.14: Distribución del punto fijo para un sistema LV generalizado con $p = 0.003$ y $\sigma = 0.5$. En este caso se cumple $p \ll \sigma$ y por lo tanto la distribución coincide con $X^* = \Lambda^{-1}K$.

En ambos escenarios se puede notar que la distribución del punto fijo se acumula alrededor de $K = 5$ y realmente coincide con $X^* = \Lambda^{-1}K$, se observará en los siguientes histogramas que cuando σ y p incrementen sus valores respectivamente, los puntos fijos ya no coincidirán con esta forma.

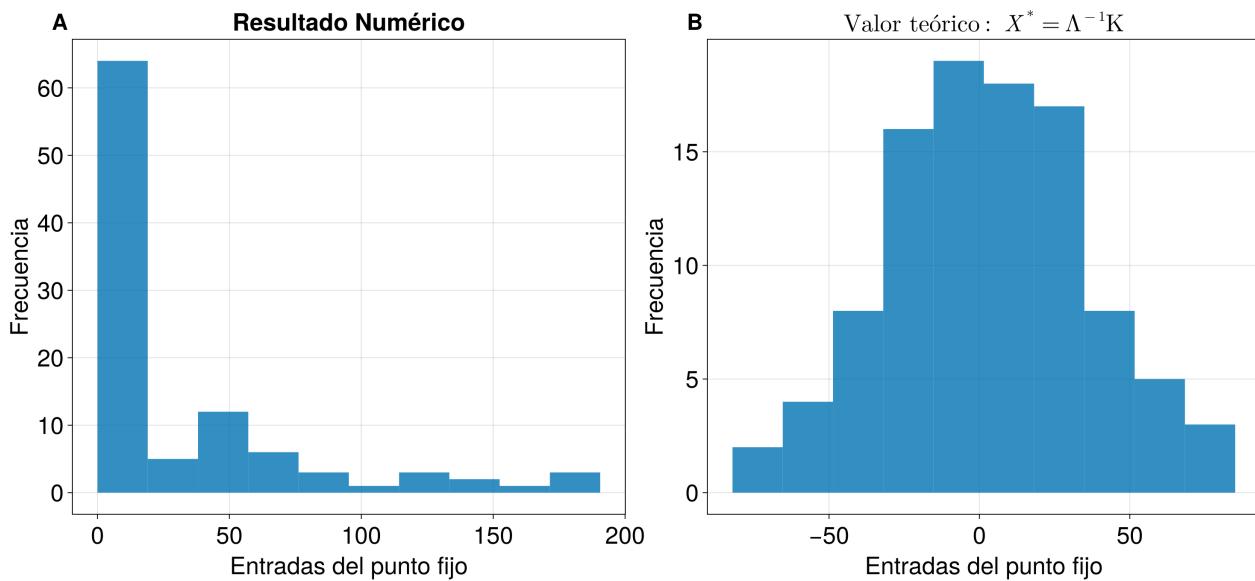


Figura 1.15: Distribución del punto fijo para un sistema LV generalizado con $p = 0.5$ y $\sigma = 0.2$.

Con base en estos resultados se complementa la sección ?? con el hecho de que para los casos $\sigma \ll p$ y $p \ll \sigma$, el punto fijo coincide con $X^* = \Lambda^{-1}K$. Sin embargo, cuando σ y p son del mismo orden de magnitud entonces la distribución de $\Lambda^{-1}K$ se ensancha hacia valores negativos mismos que no se pueden admitir en una dinámica estable (Figura (1.15 B)). Lo que se muestra en las simulaciones es que el punto fijo sigue una distribución de cola pesada con sesgo positivo alrededor del cero, la Figura (1.15 A) indica que al menos un 65 % de las especies se han extinguido ó están cerca de extinguirse, mientras que el resto se ha estabilizado desde valores relativos que van del 10 al 200.

Los puntos fijos con p y σ en el mismo orden de magnitud necesitan tener múltiples especies extintas para que pueda ser estable. Esta característica sigue dependiendo enteramente de las interacciones de Λ y más adelante se observará como decrece la estabilidad con base en el incremento de estos parámetros. Ya que la distribución del punto fijo es de cola pesada, tendrá un impacto directo en la distribución de valores propios de la matriz Jacobiana asociada a Λ . Cada valor de la diagonal será un tipo de atractor de valores propios en \mathbb{C} y al estar distribuidos de forma heterogénea y re-escalados según (??), la distribución de valores propios ya no será uniforme como en el caso de May o Allesina, sino que tendrá una forma más amorfa y/o dispersa. Por último se debe de aclarar que para obtener las diferentes distribuciones del punto fijo de los resultados numéricos, únicamente bastó con agarrar el último punto de la serie de tiempo y concentrarlo en un arreglo que representará al punto fijo.

1.2.3. Matriz Jacobiana

Una vez que se obtienen los puntos fijos a partir de las series de tiempo, se evalúan en la Jacobiana (??) y se valida su estabilidad con base en la parte real de sus valores propios asociados. En cambio, si la serie de tiempo diverge entonces se asume que el sistema es inestable. Un elemento importante a considerar de este proceso es que no es trivial determinar cuando se estabilizará el sistema. La serie de tiempo puede mostrar una referencia visual pero la información que entrega no es determinante. En general se ha observado que gran parte de las simulaciones realizadas corresponden a sistemas que se estabilizan en un tiempo menor o igual a $t = 50$, sin embargo, existen sistemas que se estabilizan en un tiempo superior a este lo que genera inconsistencias en los resultados. Para evitar que esto ocurra se incluye una restricción en los algoritmos para considerar sistemas que se estabilicen en un tiempo menor o igual a $t = 50$.

La forma de verificar la estabilidad recae en la parte real de los valores propios de la matriz \mathcal{J}_Λ , si por ejemplo la serie de tiempo aparenta estabilizarse pero los valores propios del sistema tienen parte real positiva, entonces quiere decir que el sistema no ha alcanzado a su punto fijo atractor. A continuación se presentan cuatro ejemplos arbitrarios de sistemas que resultaron estables para ir observando sus características. En este [enlace²](#) el lector tendrá acceso a 4 de estas matrices para los parámetros $N = 100$, $\sigma = 0.2$ y $p = \{0.3, 0.4, 0.5, 0.6\}$. A continuación se presenta el código en  para validar como son sus diagonales.

Entrada

```
using CSV, DataFrames
jacobianos = []
for i in 0.3:0.1:0.6
    ruta = "Datos/Ejemplo Jacobianos/Jacobiano100_p$i.s0.2.csv"
    df = CSV.read(ruta, DataFrame, header=false)
    push!(jacobianos, df)
end
jacobianos
```

Salida

4-element VectorAny:
100×100 DataFrame

²Consultar: <https://github.com/rogve98/Tesis/tree/master/Notebooks/Datos/Ejemplo%20Jacobianos>

Entrada

```
using LinearAlgebra

print(all(x -> x<=0,diag(Matrix(jacobianos[1]))),", ")
print(all(x -> x<=0,diag(Matrix(jacobianos[2]))),", ")
print(all(x -> x<=0,diag(Matrix(jacobianos[3]))),", ")
print(all(x -> x<=0,diag(Matrix(jacobianos[4]))))
```

Salida

true, true, true, true

Si las diagonales de estas matrices son todas negativas o cero quiere decir que el punto fijo asociado tiene entradas mayor o igual que cero ya que $\mathcal{J}_{ii} = -\frac{r_i}{K_i} x_i^* \leq 0$ con $x_i^* \in X^*$. Por lo tanto, la distribución de la diagonal de \mathcal{J}_Λ será de cola pesada pero ahora con sesgo negativo. Esta distribución se ensancha en función de los parámetros, en particular con este ejemplo se observará que cuando la red es más conectada: la distribución será más dispersa.

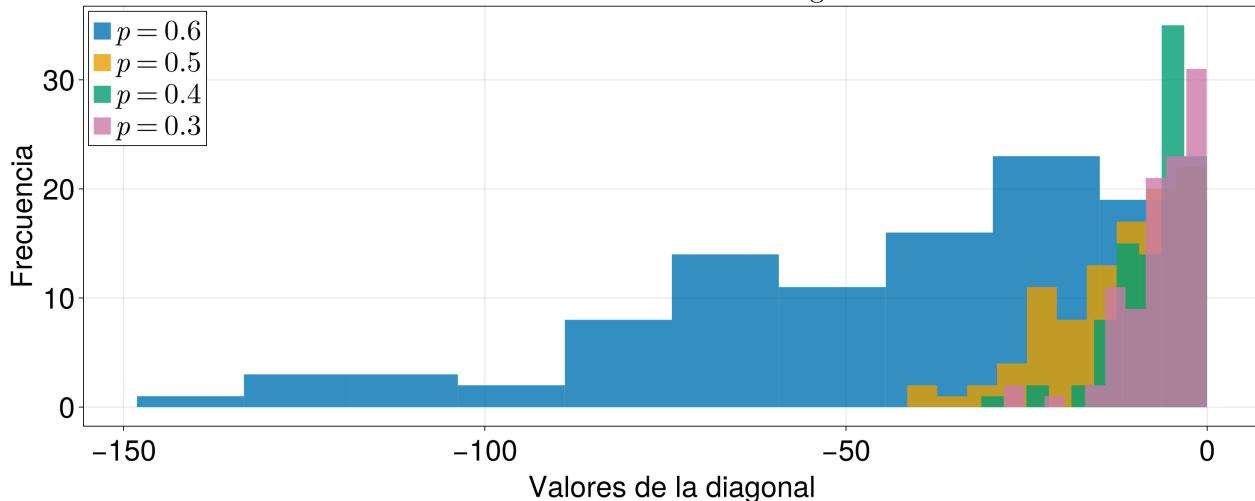
Distribución de valores de la diagonal de \mathcal{J} 

Figura 1.16: Distribuciones de diagonales de las matrices Jacobianas del ejemplo, considerando los parámetros: $N = 100$, $\sigma = 0.2$ y $p \in \{0.3, 0.4, 0.5, 0.6\}$.

La distribución de los valores propios en \mathbb{C} dependerá en gran medida de las entradas de la diagonal, entre más dispersa sea también lo serán los valores propios. En la proposición ?? se introdujo la importancia de la diagonal de las matrices Jacobianas con respecto de la posición general de sus valores propios. Los discos de Gershgorin están centrados en cada valor de esta diagonal, por lo tanto los valores propios quedarán dispersos sus alrededores. En la proposición 1 se mostró como surge el radio espectral (??) cuando el centro de los discos esta fijado a un solo valor $-d$. Actualmente la pregunta será ver si existe un tipo de radio espectral para delimitar la distribución de valores propios de las matrices \mathcal{J}_Λ .

1.3. Espectro del LV generalizado

1.3.1. Leyes Circulares

Si la distribución de la diagonal es dispersa y no necesariamente simétrica (ver Figura (1.16)) entonces no tiene sentido definir un radio espectral sino más bien concentrarse en el valor de la diagonal más cercano al cero y los valores propios de su alrededor para conocer las condiciones en Λ que llevan a que \mathcal{J}_Λ tenga valores propios positivos o negativos en esa región. Para ir desarrollando esta idea primero se revisarán las distribuciones de valores propios de las Jacobianas antes presentadas

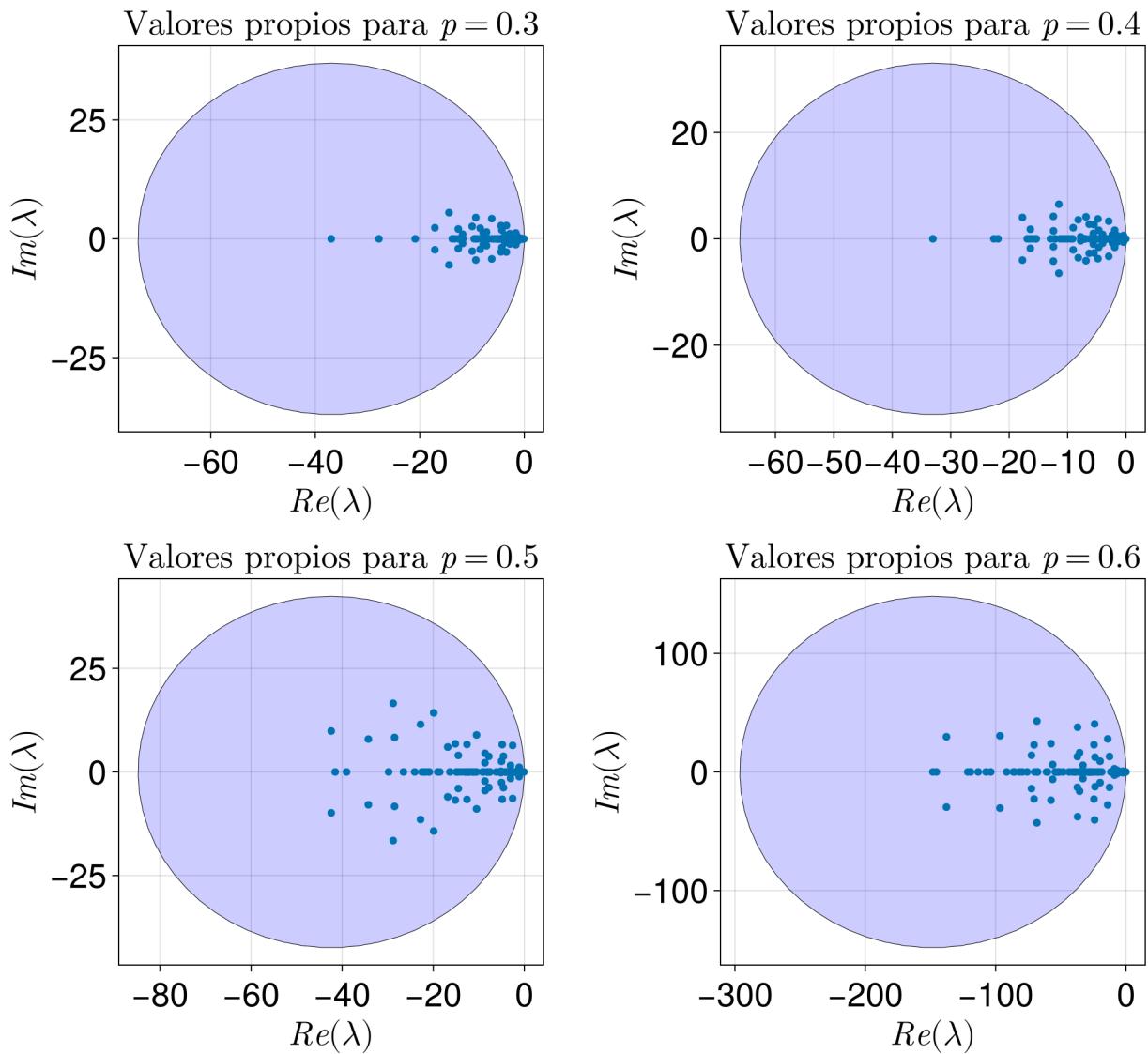


Figura 1.17: Distribución de valores propios de las matrices Jacobianas del ejemplo, considerando los parámetros $N = 100$, $\sigma = 0.2$ y $p \in \{0.3, 0.4, 0.5, 0.6\}$.

Se ha propuesto en cada distribución un disco con centro y radio con la parte real más negativa del conjunto de valores propios: en consecuencia se genera el disco con el radio más grande posible de cada sistema. Se puede observar que dichos discos si encierran a cada una de las distribuciones

pero no se ajustan al círculo en concreto, tal y como sucede en los sistemas de May/Allesina. Sin embargo aún así se observa que toda la distribución se encuentra contenida en el semiplano negativo de \mathbb{C} .

El ensanchamiento y/o dispersión de cada distribución de valores propios parece tener relación con la distribución de la diagonal (Figura (1.16)), y ésta a su vez tiene relación directa con los puntos fijos asociados. Por lo tanto el punto fijo determina la dispersión de las distribuciones del sistema. Una forma de poder ajustar esta distribución amorfa es proponiendo N discos cuyos centros y radios sean los valores de la diagonal de \mathcal{J}_Λ . Para dar un acercamiento a esta propuesta, se ocupará la distribución más ancha para $p = 0.6$:

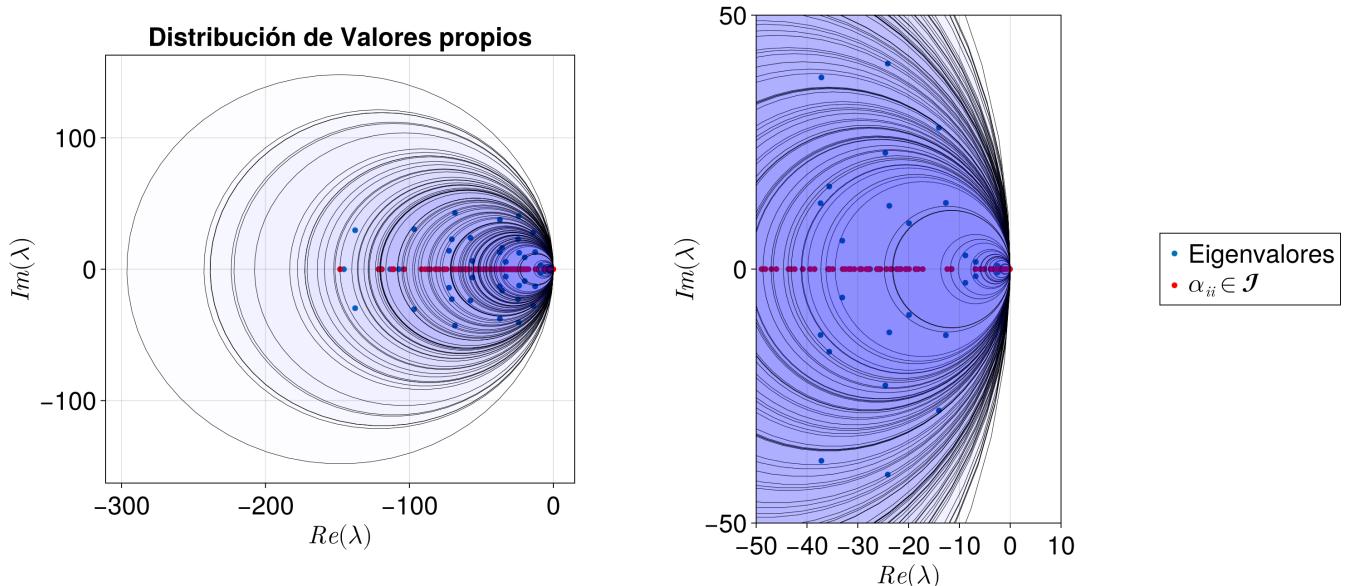


Figura 1.18: Distribución de valores propios del sistema generalizado para $N = 100$, $\sigma = 0.2$ y $p = 0.6$.

Se consideran N discos cuyo centro y radio es cada valor de la diagonal de la matriz Jacobiana asociada.

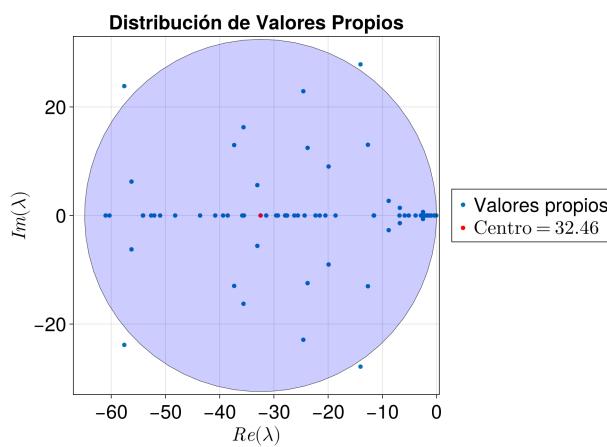


Figura 1.19: Caso particular de la Figura (1.18) para el valor de la diagonal $\alpha_{ii} = 32.46 \in \mathcal{J}_\Lambda$.
en general esto solo se cumple bajo condiciones específicas. Un caso particular de la Figura (1.18)

Esta propuesta se inspira de la Proposición ??, sin embargo, éstos discos no corresponden a los de Gershgorin debido a que los radios no necesariamente tienen la misma magnitud que el centro del disco, pueden ser mayores o menores. Se puede observar que esta elección de discos parece ajustarse a la distribución de valores propios, al menos de forma local para ciertos conjuntos. Si la varianza de los radios de Gershgorin (??) fuera menor o igual a 1, entonces esta propuesta sería más semejante a los discos de Gershgorin, pero

considerando $\mathcal{J}_{ii} = 32.46$ se puede observar en la Figura (1.19), cierto porcentaje de valores propios se distribuye por el círculo varios concentrados en el eje real, insinuando que al ser estructuralmente simétrica la matriz \mathcal{J}_Λ : tiene correlaciones positivas. Sin embargo existen algunos otros valores propios que se escapan del confinamiento particular y pasan al siguiente nivel o círculo. Para poder confirmar o refutar esta propuesta, se explorarán múltiples sistemas estables con sus respectivas distribuciones de diagonales y valores propios.

1.3.1.1. Análisis para $N = 50$

Se tienen a disposición dos conjuntos de datos, ambos son de simulaciones realizadas para diferentes valores de p y σ considerando matrices Λ estructuralmente simétricas. Cada conjunto esta conformado por 78 archivos .csv y son simulaciones de matrices [Jacobianas](#) y de distribuciones de [Diagonales](#)³. Así mismo, en cada archivo se encuentran 100 simulaciones que resultaron estables y de los cuales se realizará el análisis correspondiente a la relación entre la distribución de las diagonales y de las partes reales de los valores propios de las matrices Jacobianas. En la siguiente tabla se muestra el esquema de simulaciones para cada p y σ

| Fuerza promedio [σ] | Probabilidades [p] | Cantidad de archivos | Simulaciones realizadas |
|------------------------------|------------------------|----------------------|-------------------------|
| 0.1 – 0.5 | 0.1 – 1.0 | 50 | 5000 |
| 0.6 | 0.1 – 0.9 | 9 | 900 |
| 0.7 | 0.1 – 0.7 | 7 | 700 |
| 0.8 | 0.1 – 0.5 | 5 | 500 |
| 0.9 | 0.1 – 0.4 | 4 | 400 |
| 1.0 | 0.1 – 0.3 | 3 | 300 |
| Total: | | 78 | 7800 |

Tabla 1.1: Cantidad de archivos generados para el banco de Diagonales y Jacobianos considerando $N = 50$. A partir de $\sigma = 0.6$ en adelante, los tiempos de compilación fueron muy prolongados por lo que no se obtuvieron los 10 archivos respectivos a diferencia de los valores promedio anteriores.

La razón principal de escoger los sistemas para $N = 50$ es por el costo computacional. Ha resultado muy prolongado el tiempo de compilación de sistemas más grandes (como el de $N = 100$) y aún así para valores altos de la fuerza promedio ($\sigma \geq 0.6$) no se obtuvieron los 10 archivos por la misma razón. Con esta información se procede a continuar con el análisis de las N Leyes Circulares, observando primero como es la distribución de los valores propios de cada conjunto así como la relación que existe entre la parte real y los valores de la diagonal de las \mathcal{J}_Λ .

³Para los Jacobianos acceder a: <https://github.com/rogve98/Tesis/tree/master/Notebooks/Datos/Jacobianos>.

Para las Diagonales acceder a <https://github.com/rogve98/Tesis/tree/master/Notebooks/Datos/Diagonales>.

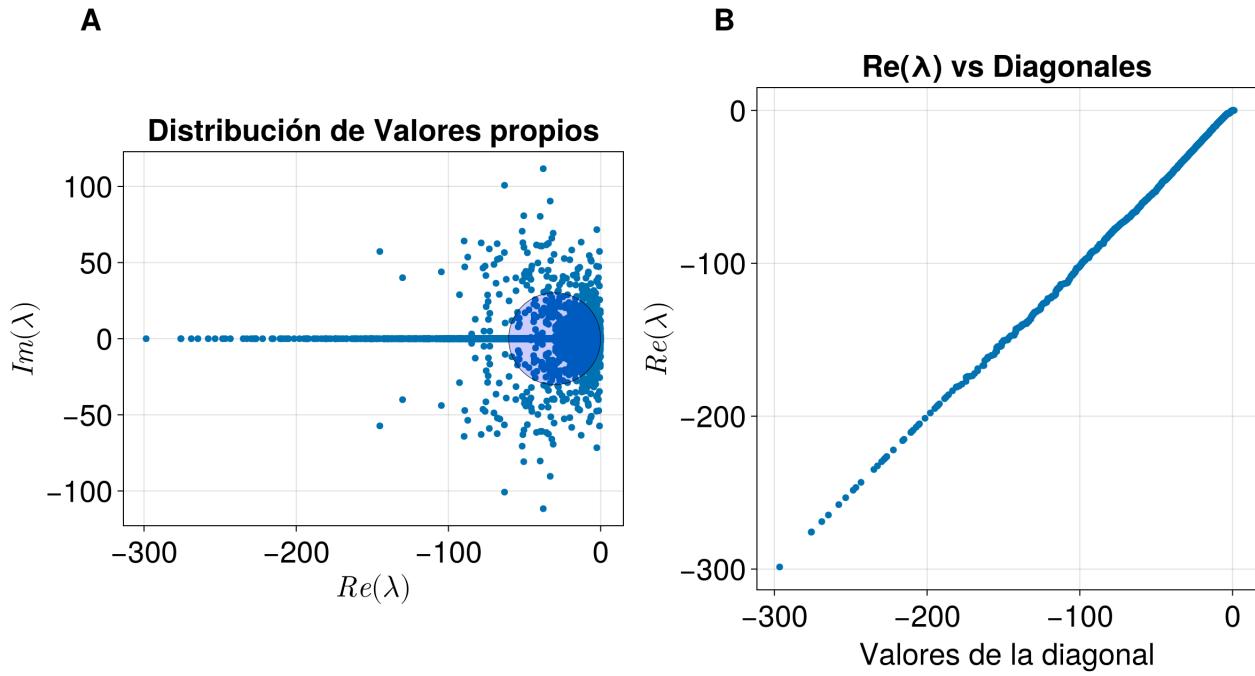


Figura 1.20: (A) Distribución de valores propios de 100 jacobianos para el caso $\sigma = 0.6$, $p = 0.7$. Se agrega una ley circular correspondiente al valor medio de la distribución de diagonales. (B) Relación entre la parte real de los valores propios con las diagonales de los Jacobianos considerados.

La distribución de los valores propios queda contenida por completo en el semiplano negativo de \mathbb{C} asegurando que todas las simulaciones realizadas para el conjunto correspondiente ($\sigma = 0.6$, $p = 0.7$) están asociadas a sistemas estables. Se puede observar en la Figura (1.20 A) que gran parte de los valores propios se quedan contenidos en el eje real; debido a que todas las simulaciones contempladas son para sistemas estructuralmente simétricos, esta observación refuerza estadísticamente el argumento de poseer correlaciones positivas en las interacciones de \mathcal{J}_Λ .

Por otro lado en la Figura (1.20 B) se observa una relación lineal prácticamente perfecta, insinuando que para este caso particular: hay una dependencia directa entre las entradas de la diagonal y la parte real de los valores propios de las Jacobianas \mathcal{J}_Λ . Sin embargo el ajuste parece ser mejor para los valores cercanos al cero y la razón puede ser la siguiente: Cada valor de la diagonal es un centro particular de una vecindad de Gershgorin y cada valor propio se encuentra en al menos una de estas vecindades; entonces cuando la magnitud de los centros es cada vez mayor, su radio también lo será y por lo tanto la vecindad es cada vez más amplia, haciendo que el valor propio pueda adoptar una posición considerablemente apartada de su centro y en consecuencia no tener una relación tan proporcional como en los casos donde el centro y radio de Gershgorin es cercano a cero.

En la Figura (1.21) se puede observar la relación entre cada centro y radio de Gershgorin de las Jacobianas asociadas a la Figura (1.20). En esta gráfica hay dos características a destacar: primero que efectivamente existe una relación creciente entre la magnitud del centro con su radio asociado: son proporcionales; por lo tanto existen valores propios capaces de alejarse del centro de su vecindad de Gershgorin volviendo no tan proporcional la relación entre los valores de la diagonal y autovalores de mayor magnitud. En segundo se puede observar que hay un gran número de centros con radio cero. De acuerdo con la definición de la matriz Jacobiana (??) las entradas del punto fijo afectan a cada fila entera de esta matriz, y como se ha visto en las series de tiempo (Figura (1.11)) y la distribución del punto fijo (Figura (1.15 A)) existen múltiples especies que decaen a cero. Por lo tanto es natural observar este fenómeno, pues son la representación de la cantidad de especies que resultaron extintas.

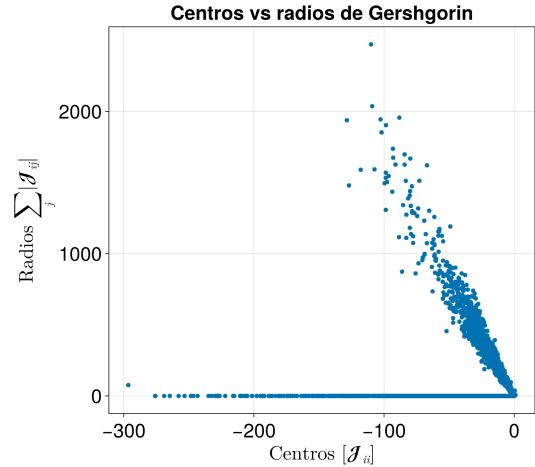


Figura 1.21: Relación entre centros y radios de Gershgorin de las Jacobianas asociadas a la Figura (1.20).

De acuerdo con la definición de la matriz Jacobiana (??) las entradas del punto fijo afectan a cada fila entera de esta matriz, y como se ha visto en las series de tiempo (Figura (1.11)) y la distribución del punto fijo (Figura (1.15 A)) existen múltiples especies que decaen a cero. Por lo tanto es natural observar este fenómeno, pues son la representación de la cantidad de especies que resultaron extintas.

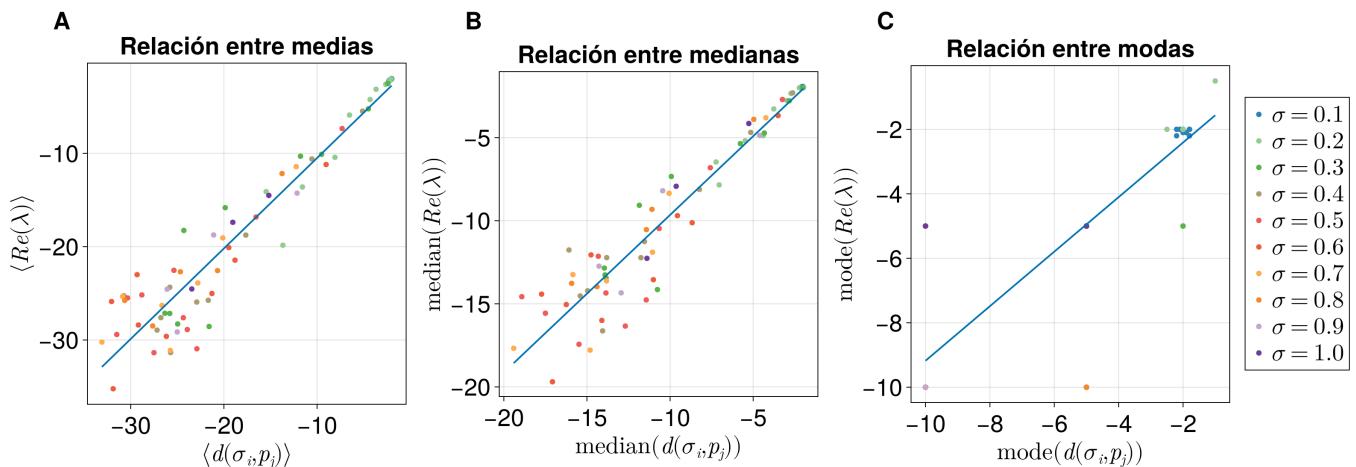


Figura 1.22: (A) Ajuste lineal de la relación entre las medias de las $Re(\bar{\lambda})$ con las medias de las $d(\sigma_i, p_j)$ de las Jacobianas del sistema. (B) Ajuste lineal de la relación entre las medianas $Re(\bar{\lambda})$ con las medianas de las $d(\sigma_i, p_j)$ de las Jacobianas del sistema. (C) Ajuste lineal de la relación entre las modas de $Re(\bar{\lambda})$ con las modas de las $d(\sigma_i, p_j)$ de los Jacobianas del sistema.

Para seguir explorando si la relación lineal existe también para el resto de las simulaciones de la Tabla (1.1) se tomará la media, mediana y moda como cantidades representativas de cada una de las distribuciones de diagonales $d(\sigma_i, p_j)$ y partes reales de los conjuntos de valores propios $\bar{\lambda}$ para compararlos y realizando un ajuste lineal.

Cada color se encuentra asociado a los valores de la fuerza promedio σ y la cantidad de puntos del mismo color corresponde a cada una de las probabilidades de conectividad del sistema. Se ha visto en la Figuras (1.16, 1.17) que cuando esta probabilidad es cada vez mayor entonces las distribuciones son más dispersas en función de la cantidad de interacciones posibles, y a su vez de la dependencia que hay con los valores del punto fijo del sistema. Por lo tanto hacia la izquierda estarán las probabilidades más grandes e irán decreciendo hacia la derecha.

En cada gráfica de la figura se contemplan los 78 conjuntos de simulaciones realizadas y se percibe una correspondencia entre los valores de la diagonal con las partes reales de los valores propios. Al igual que en la Figura (1.20), cada ajuste es mejor para valores cercanos al cero que para aquellos de magnitud máxima, esto debido al argumento antes mencionado sobre la amplitud del radio de Gershgorin que implica que los valores propios tengan la posibilidad de alojarse lejos del correspondiente centro \mathcal{J}_{ii} .

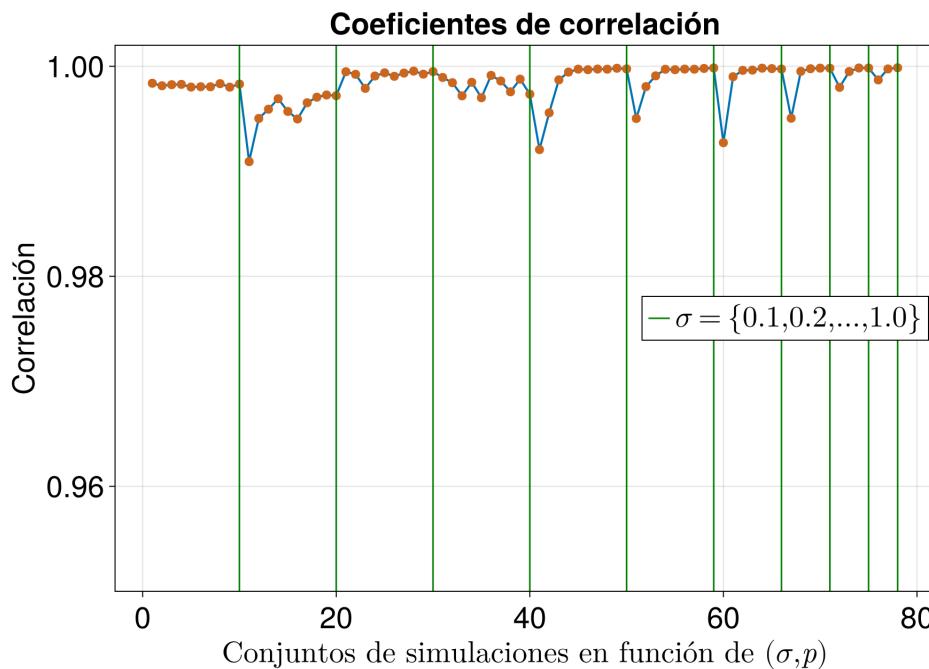


Figura 1.23: Coeficientes de correlación entre valores de la diagonal y partes reales de eigenvalores de las matrices Jacobianas en función de σ y p . Cada uno de los 78 coeficientes corresponde para un conjunto σ_i y p_j de simulaciones según la Tabla (1.1).

Para tener una confirmación estadística más robusta sobre la relación entre las $d(\sigma, p)$ y $\text{Re}(\lambda)$ se construye un diagrama de correlaciones de cada uno de los 78 conjuntos de simulaciones. El diagrama contiene un coeficiente de correlación entre las distribuciones mencionadas para cada caso. Las líneas verdes delimitan los conjuntos de simulaciones por cada σ de acuerdo con la Tabla (1.1). En general se puede

apreciar una correlación muy alta en entre ambas distribuciones, implicando que la propuesta de las Leyes Circulares funciona en un primer nivel: caracterizando al menos los centros de las vecindades que encierran los valores propios. Lo que faltaría sería definir una regla para cada radio de estas vecindades. Este diagrama puede servir para tener un mapa general de como es la relación entre cada una de las distribuciones. Se puede observar un caso excepcional para los valores $\sigma = 0.2$ y $p = 0.1$, en este caso aunque la correlación sigue siendo muy alta, es la menor de todo el conjunto de simulaciones. Corroborando con la Figura (1.24) se puede apreciar un desfase en la linealidad justamente par aquellos valores de mayor magnitud, donde es posible que los radios de sus vecindades sean tan grandes que puedan alojarse lejos del centro de la misma.

Breve discusión sobre el radio

El radio que se propuso al principio de la sección no posee un sustento matemático sólido para poder considerarlo, es únicamente una propuesta heurística para darle forma a la distribución de los valores propios. Una propuesta plausible serían los radios de Gershgorin, dados como la suma de los valores absolutos de los renglones sin considerar al elemento de la diagonal, sin embargo, esta opción contempla solo una cota superior de la distribución de los valores propios, es decir, las vecindades de Gershgorin no controlan la posición de los valores propios: únicamente determinan el área en donde podrían estar posicionados (ver Proposición ?? y 1).

Precisamente en la Proposición 1 se ha mostrado que la norma euclíadiana define el desplazamiento y confinamiento de los valores propios en el plano complejo. Entonces parece que la filosofía empleada en dicha proposición nos puede dar una respuesta concreta sobre los radios espectrales locales de los valores propios de esta distribución. El límite de esta opción es que actualmente no se posee información sobre la distribución de los valores fuera de la diagonal. La matriz (??) indica que hay un producto entre una variable normal ($\alpha_{ij} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$) y el elemento del punto fijo $x_i^* \in X^*$ que viene de una distribución de cola pesada (Figura (1.15 A)). Incluso obteniendo dicha información es posible que no sea tan útil, pues no tendrá relación directa con lo que verdaderamente define la estabilidad del sistema: las configuraciones de Λ (en función de σ y p) que generan puntos fijos estables. Por lo tanto, la caracterización de estas distribuciones de valores propios queda solamente al nivel de los centros de las vecindades.

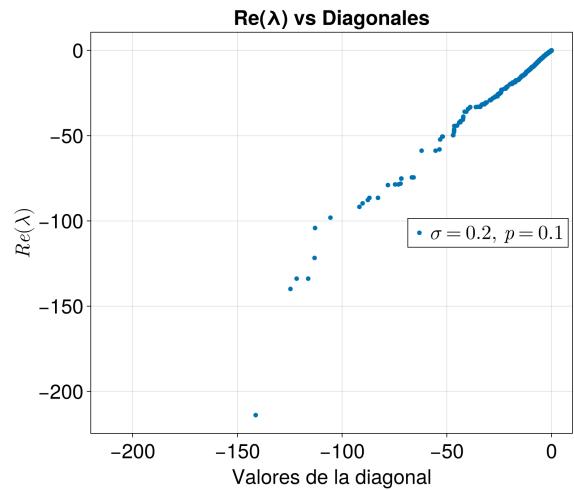


Figura 1.24: Relación entre cantidades de la simulación 11, caso con $\sigma = 0.2$ y $p = 0.1$.

1.4. Transiciones de estabilidad del LV generalizado

Para darle seguimiento a los resultados de esta tesis, esta sección se va a centrar en explorar de forma cuantitativa las condiciones de estabilidad de los sistemas de Lotka-Volterra generalizado en función de σ y p . Posteriormente se presentará un análisis sobre las condiciones de la matriz de incidencias para que exista o no estabilidad en los sistemas relacionados, con miras en presentar un primer esbozo del parámetro crítico de transición. Para el caso más robusto ($N = 100$) se va a presentar la diferencia entre usar matrices estructuralmente simétricas y puramente aleatorias (como el caso de May), en miras de observar cambios de la dinámica como los que se reportaron al final del capítulo anterior.

Se van a considerar tres tipos de sistemas, para $N = \{100, 50, 25\}$. Se pretende ver como cambia la estabilidad con diferentes tamaños del sistema (??). El proceso para llevar a cabo la construcción de los diagramas de transición es semejante al que se presentó en la sección de las Transiciones de May, se va a integrar el sistema fijando la fuerza de interacción en los siguientes valores $\Sigma = \{0.1, 0.2, \dots, 1.0\}$ mientras que para las probabilidades de conectividad se va a considerar la siguiente partición del intervalo $[0, 1]$ para cada N :

$$p = \{x_i \mid x_i = i \cdot \Delta x, i = 0, 1, 2, \dots, 100\}, \quad \text{con } \Delta x = 0.01 \quad (1.1)$$

Con esta configuración de valores se permitirá generar diagramas de estabilidad para cada N en función de p considerando que es una partición equidistante. Hay otros dos diagramas de estabilidad que son de interés; siguiendo en función de la probabilidad de conectividad se define la siguiente partición sobre el intervalo $[0, 1]$

$$p_{\log} = \left\{x_i \mid x_i = 10^{-(10 - \frac{10i}{99})}, i = 0, 1, \dots, 99\right\} \quad (1.2)$$

Se ha considerado particularmente este conjunto de probabilidades ya que para ciertas $\sigma \in \Sigma$ y para $N = 100$ particularmente, la transición ocurre de manera abrupta para valores muy pequeños de p de modo que no se aprecia con claridad cuando ocurre; la partición p_{\log} resuelve este detalle. Por último pero no menos importante, se van a considerar diagramas en donde se deja fija la p para cada N y se define una partición equidistante en el intervalo $[0, 1]$ en función de la fuerza de interacción, es decir:

$$\sigma = \{x_i \mid x_i = i \cdot \Delta x, i = 0, 1, 2, \dots, 100\}, \quad \text{con } \Delta x = 0.01 \quad (1.3)$$

Para esta configuración de valores se obtendrán los diagramas de transición en función de σ y se podrá tener otra óptica de la dinámica enfocándose en la fuerza de las interacciones del sistema, tal y como se observó en los sistemas de May. Este enfoque considerará 10 tamaños diferentes y definidos de los sistemas (para cada p fija) y se observará su cambio de estabilidad cuando dicha fuerza de interacción aumente. Por otro lado, los sistemas en función de p consideran 10 fuerzas diferentes (para cada σ fija) y se observará el cambio de la estabilidad cuando se le aumenten enlaces/interacciones al sistema, partiendo de los nodos aislados ($p = 0$) hasta la red completamente conexa ($p = 1$).

Teniendo las particiones y los ajustes de parámetros necesarios para generar los diagramas de transición, solamente falta ver cómo y de qué manera se van a generar estos diagramas: se integrará el sistema cierto número de veces para cada configuración (N, σ, p) con sus correspondientes particiones; cada elemento de la partición contempla una configuración particular la cual será integrada el siguiente número de veces con base en N :

| Tamaño del sistema N | Cantidad de simulaciones por cada elemento de la partición |
|------------------------|--|
| 100 | 3000 |
| 50 | 6000 |
| 25 | 12000 |

Tabla 1.2: Cantidad de simulaciones realizadas por cada N y para cada elemento de la partición definida.

De esta manera se va a contabilizar el número de simulaciones estables por cada configuración para posteriormente guardar la información y visualizarla en los diagramas de transición. En el diagrama se podrá interpretar un porcentaje de estabilidad por cada configuración efectuada, viendo como cambia con el avance de los valores de la partición. El número de simulaciones efectuadas por configuración, para cada uno de los sistemas contemplados $N = \{25, 50, 100\}$, responde a la intención de suavizar las curvas siguiendo la ley de los grandes números. Se ha observado que entre más chico sea el tamaño del sistema se requieren mas simulaciones para poder suavizar dicha curva.

Ya que el parámetro de May no se ajusta a la forma de la distribución heterogénea de los valores propios de los sistemas LV, éste no será un parámetro crítico que determine la transición de estabilidad de dichos sistemas. Además, la propuesta sobre las N leyes circulares solamente contempla los centros de las vecindades argumentando que para obtener los radios hay que caracterizar la distribución de los elementos fuera de la diagonal, mismos que se conforman del producto de una variable normal (α_{ij}) y la entrada i -ésima del punto fijo que para ciertas configuraciones (N, σ, p) resulta ser de cola pesada con sesgo positivo hacia el cero. Por lo tanto el parámetro de transición deberá obtenerse de otros medios: principalmente enfocándose en el punto fijo que se deriva de la ecuación $\Lambda X^* = K$.

En un primer nivel, nos concentraremos en el punto fijo y sus configuraciones (N, σ, p) , ya que se necesita delimitar los escenarios en donde $X^* \geq 0$ es decir que no posea entradas negativas. Los escenarios en donde existe alguna $x_k \in X^*$ negativa normalmente devienen en dinámicas inestables, incluso si no fuera así: no hay interpretación física para poblaciones negativas. Se dice que este es un primer nivel ya que actualmente no se sabe si existirán puntos fijos $X \geq 0$ que resulten inestables.

1.4.1. Para $N = 100$

En función de p

Este escenario es el más robusto de los 3 tamaños a analizar, por ende se le pondrá más atención que a los otros dos tamaños. Como bien se mencionó anteriormente, se necesitó una cantidad de simulaciones considerablemente inferior en comparación con los sistemas $N = 50, 25$ (Tabla (1.2)), lo que por sí mismo demuestra que la cantidad de interacciones está relacionada con la ley de los grandes números, entre más grande sea el sistema: mayor será su capacidad de “promediar” el ruido estocástico interno y por lo tanto sus fluctuaciones irán disminuyendo permitiendo que el promedio converja cada vez mejor al valor esperado.

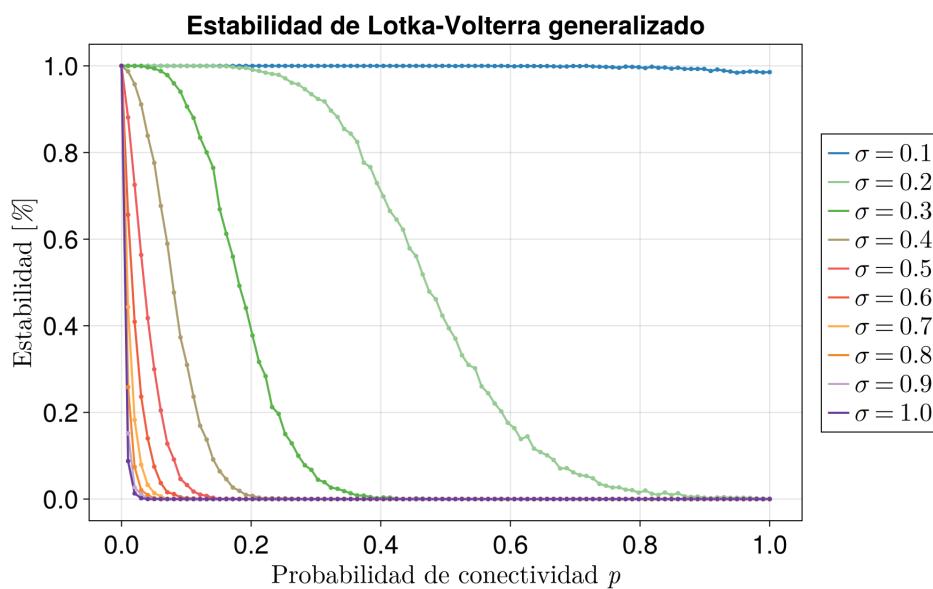


Figura 1.25: Transiciones de estabilidad en el Sistema de Lotka-Votlerra generalizado estructuralmente simétrico en función de la probabilidad de conectividad para $N = 100$.

En este diagrama al igual que en el May (Fig. 1.3) también se observa una transición temprana para los casos $\sigma > 0.3$. La diferencia con respecto de los sistemas de May radica en la forma suave de la transición; especialmente para $\sigma = 0.2$ no se observa un cambio de fase abrupto delimitado por una probabilidad crítica, sino que la estabilidad va bajando gradualmente conforme el número de enlaces va aumentando. Esta suavidad es semejante a las transiciones de los sistemas semi Allesina del capítulo anterior; más adelante se realizará una comparación entre los escenarios contemplados hasta ahora. En las Figuras (1.25, 1.26) se muestran los cambios de estabilidad considerando matrices Λ estructuralmente simétricas.

Se ajusta el eje x en escala logarítmica para lograr visualizar las transiciones con $\sigma > 0.3$. Se puede observar que en casos se sigue presentando una notoria suavidad en la transición con respecto de los sistemas de May (Fig. 1.4), y son sustancialmente similares a los sistemas de semi Allesina, por lo tanto la simetría estructural incide significativamente en la forma de las transiciones.

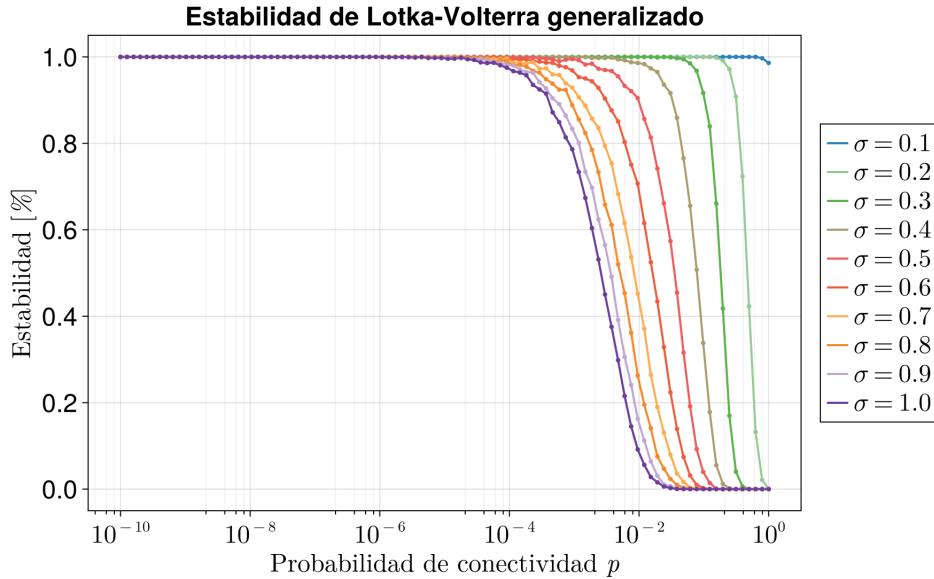


Figura 1.26: Transiciones de estabilidad en el Sistema de Lotka-Votlerra generalizado estructuralmente simétrico en función de la probabilidad con escala logarítmica para $N = 100$.

Sin embargo, se ha dado un hallazgo que puede aportar información a la estabilidad de los sistemas estructuralmente simétricos. Exclusivamente se da para interacciones de cooperación en la matriz Λ , es decir: $(--)$. El hallazgo se da para el caso $N = 2$ dando apertura a que se pueda generalizar a dimensiones mayores. La relación heurística hallada (considerando $\alpha_{ij}, \alpha_{ji} < 0$) es la siguiente:

$$\alpha_{ij} > \frac{1}{\alpha_{ji}}, \quad \text{con } i \neq j \quad (1.4)$$

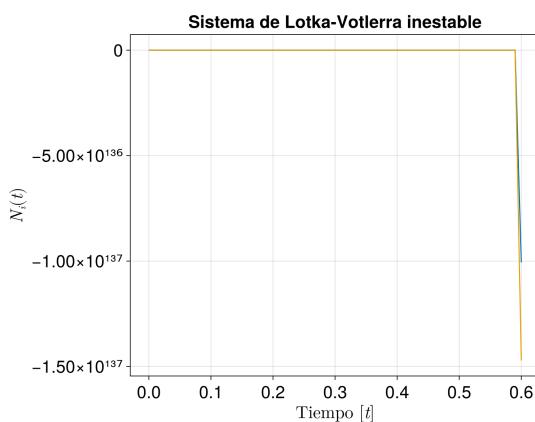


Figura 1.27: Sistema inestable que no cumple con la relación (1.4)

si esta condición se cumple, entonces el sistema (??) tiene posibilidades de ser estable (más no garantiza estabilidad para sistemas $N \gg 1$); en cambio si no se cumple esta relación entonces el sistema será inestable tal y como se muestra en la Figura (1.27): se ha integrado un sistema que no cumple esta condición considerando un intervalo

de tiempo que va de 0 a 10, se observa que en apenas 0.6 unidades de tiempo el sistema se disparó a $-\infty$. En la Figura (1.28) se presenta otro sistema que cumple al límite con la condición (1.4), por lo tanto el sistema si se estabiliza aunque lo hace en valores sumamente elevados, mostrando incluso una

fase metaestable en la que oscila hasta llegar a su atractor. En los siguientes diagramas se realizarán una serie de comparaciones entre sistemas LV generalizados con Λ estructuralmente simétrica y puramente aleatoria, también se realizarán comparaciones con respecto de los sistemas de May antes mencionados. En la primer comparación se busca observar la desviación entre la elección del tipo de Λ ; en la segunda comparación se busca observar la desviación con respecto de sistemas que consideran la diagonal fija. El tipo de Λ utilizada para observar la transición de estabilidad influye mucho en como se comporta, en principio se observa en la Figura (1.29) un comportamiento semejante al caso de May con respecto de los semi Allesina. El argumento para este caso mencionado eran las posibles correlaciones que emergen por tener simetría estructural, esto orillaba a que los sistemas semi Allesina tuvieran una distribución achataada de valores propios en el eje real que orillaba a sus partes reales a convertirse en positivas primero que en los sistemas de May. En nuestro caso con Λ , hay que hallar otras posibles explicaciones: ya que el eje de la estabilidad en sistemas LV son los puntos fijos asociados. ¿De que forma la simetría estructural impacta en la definición de los puntos fijos? La desigualdad (1.4) nos puede dar pistas al respecto, ya que las desviaciones son más marcadas conforme $\sigma \geq 3$, escenarios donde es más probable que se cumpla dicha desigualdad.

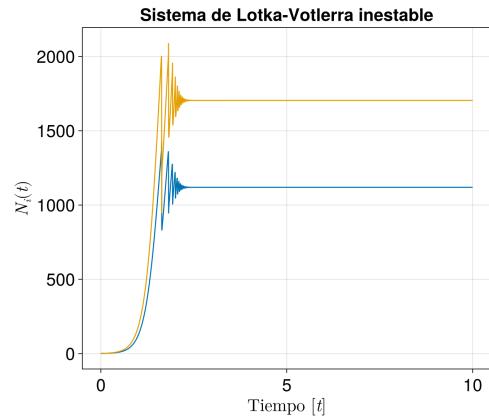


Figura 1.28: Sistema estable que cumple al límite con la relación (1.4)

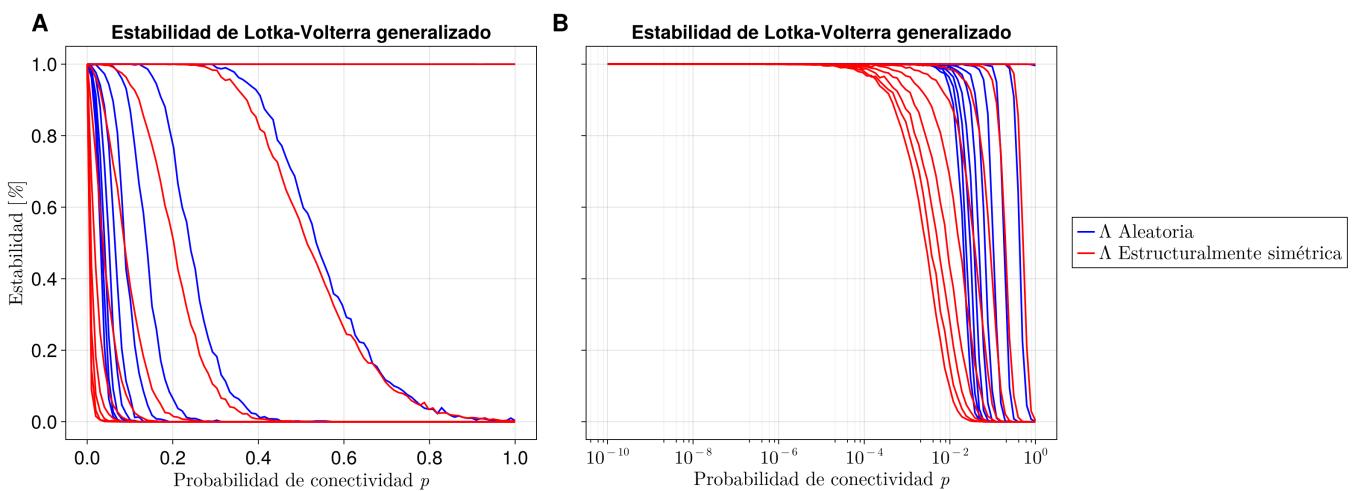


Figura 1.29: Comparación de la estabilidad entre sistemas de Lotka-Volterra generalizados con Λ aleatoria y estructuralmente simétrica.

Para notar que distribuciones comienzan a no cumplir la desigualdad, se realiza una simulación (Ver apéndice⁴) que utiliza matrices cuadradas similares a Λ solo con la diferencia de que todas sus entradas (incluso la diagonal) se mapean de una distribución normal que toma valores discretos de σ tal como en la partición (1.3). La simulación considera 10,000 matrices de tamaño $N = 100$, y por cada σ evalúa cuantos de ellos no cumple la desigualdad y devuelve el resultado en forma de porcentaje.

Entrada

```
for sigma in 0.1:0.01:1.0
    if simula_probabilidad_cumplimiento(sigma) != 1.0
        print(sigma, " ", simula_probabilidad_cumplimiento(sigma))
        break
    end
end
```

Salida

```
0.27 0.9999998383552714
```

El hallazgo es que a partir de $\sigma = 0.27$ se observa la primer distribución normal que no cumple la desigualdad (1.4) con menos de 10 casos. Cuando σ va aumentando, el número de casos no favorables también lo hace hasta tener 2,585,708 (79 %) de ellos. Y tal cual se nota en la Figura (1.29), a partir de $\sigma = 0.3$ en adelante se va observando una desviación cada vez más marcada hasta $\sigma = 1.0$. Por lo tanto, la relación heurística puede tener un peso significativo en la estabilidad de los sistemas LV. Ahora se mostrarán las diferencias que existen entre ambos sistemas LV con respecto de May y semi Allesina.

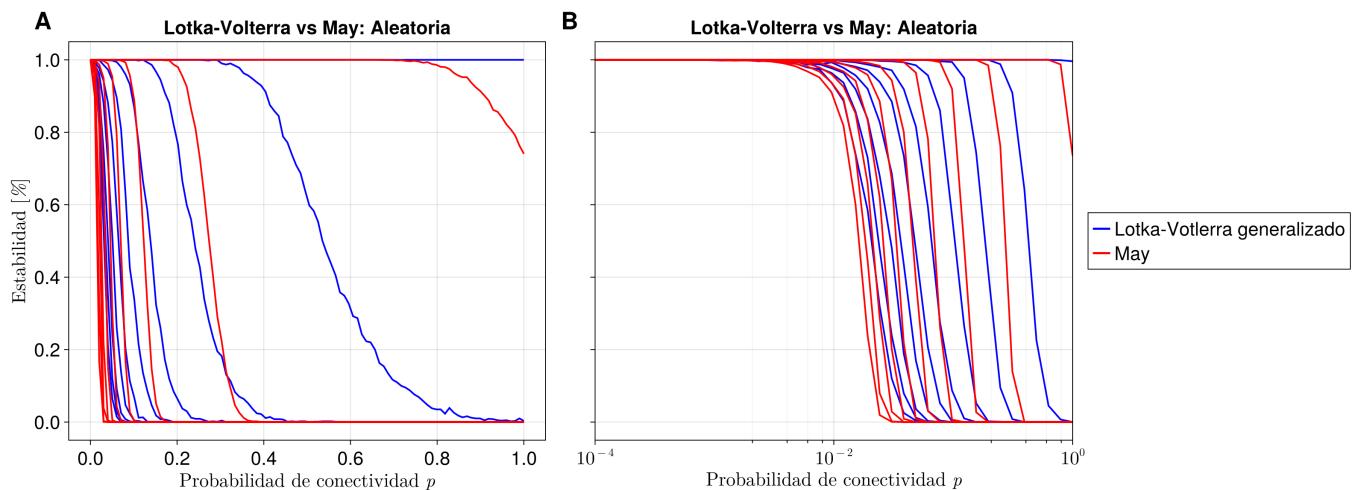


Figura 1.30: Comparación de la estabilidad entre sistemas de Lotka-Volterra y May en función de p con matrices aleatorias.

⁴Cita

En esta ocasión se percibe que la estabilidad de los sistemas de May y semi Allesina decaen primero que los LV, para ambos casos distinguiendo entre las matrices aleatorias y estructuralmente simétricas. En los diagramas con escala logarítmica se puede apreciar que cada decaimiento de estabilidad en sistemas LV es considerablemente similar su respectivo análogo, al menos de forma cualitativa. Por tanto, cada decaimiento muestra que existe una clara relación entre los sistemas LV y de May y/o semi Allesina.

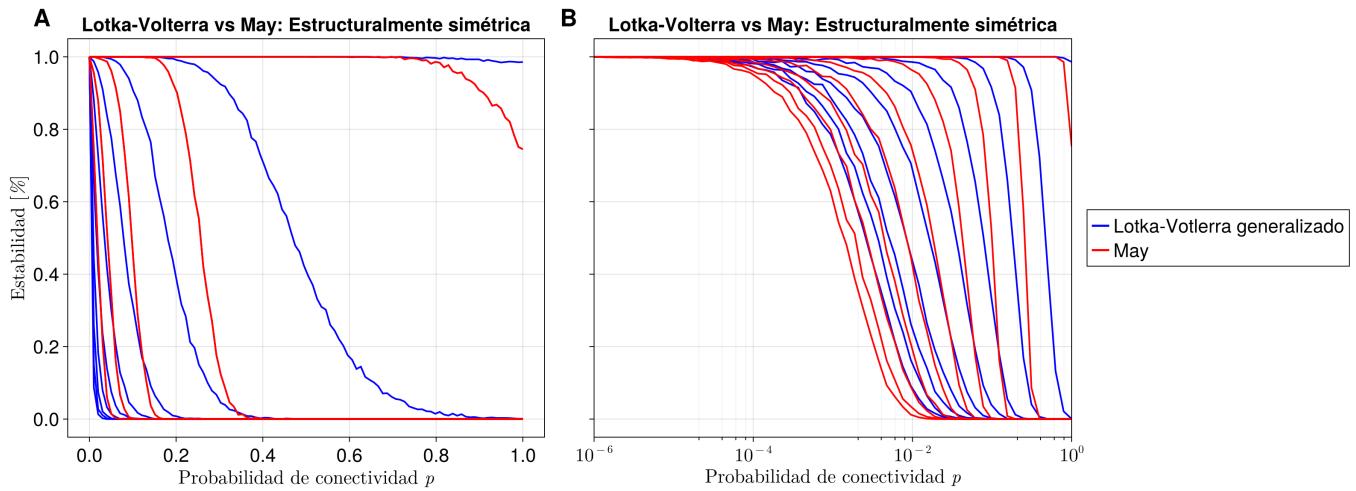


Figura 1.31: Comparación de la estabilidad entre sistemas de Lotka-Volterra y May en función de p con matrices estructuralmente simétricas.

En función de σ

Hasta ahora se ha visto como cambia la estabilidad en función de ir agregando enlaces a la red de incidencias considerando 10 diferentes fuerzas de interacción. Ahora el siguiente análisis será contemplar el cambio de estabilidad considerando 10 tamaños diferentes de red variando la fuerza de interacción promedio mediante la partición (1.3). En el capítulo anterior se ha observado que las desviaciones más notorias entre sistemas de May y semi Allesina se daban cuando el número de enlaces era escaso y menos notorio conforme dicha cantidad fuera aumentando. El argumento principal se centraba en los tamaños fijos de las redes y que el aumento gradual de la magnitud de sus interacciones volvía las matrices estructuralmente simétricas indistinguibles de las totalmente aleatorias.

En nuestro caso con Λ puede que ocurra algo semejante, pero se deberá centrar el análisis en los puntos fijos que se generan en cada configuración para desenvolver en el nivel de estabilidad correspondiente. Al igual que en la Figura (1.29), se va a mostrar como cambia la estabilidad cuando se consideran matrices de incidencias Λ aleatorias y estructuralmente simétricas. Así mismo se observarán las desviaciones con respecto de los escenarios de May y semi Allesina respectivamente, tal como en las Figuras (1.30, 1.31).

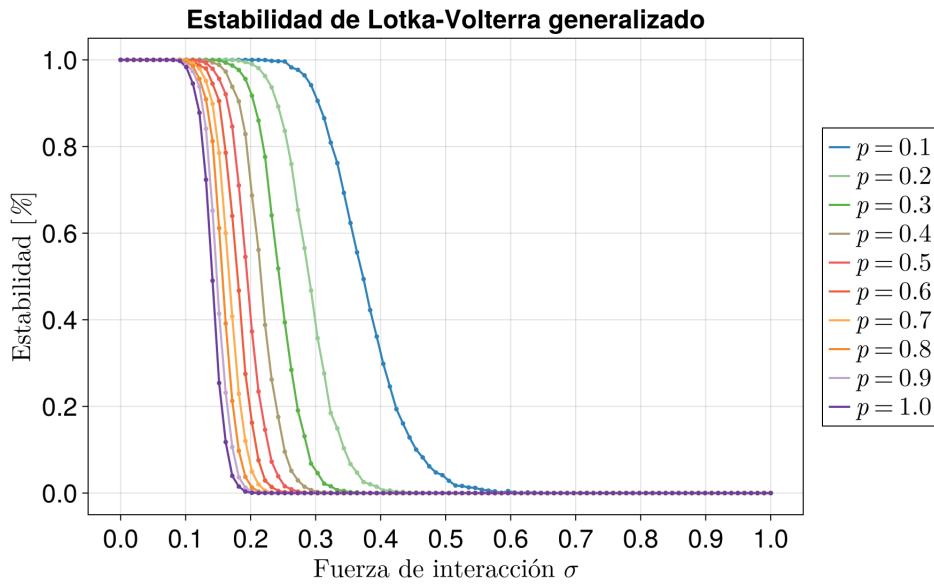


Figura 1.32: Transiciones de estabilidad en el Sistema de Lotka-Volterra generalizado estructuralmente simétrico en función de la fuerza de interacción promedio para $N = 100$.

Se observa que las transiciones en función de σ también se muestran más graduales tal y como en los sistemas de May y semi Allesina. El cambio gradual de la magnitud de las interacciones es proporcional al porcentaje de estabilidad, ya no es tan abrupto como en el caso anterior en función de p . Algo importante de destacar es que conforme el tamaño de la red aumenta: las transiciones se van estrechando cada vez más, de modo que casi no exista diferencia entre el caso $p = 0.9$ y $p = 1.0$.

Otro elemento que se hace evidente es lo que ocurre para $\sigma \geq 0.27$, para el caso $p = 0.1$ prácticamente marca la pauta de la estabilidad pero para el resto de las redes, el decaimiento de la estabilidad comienza desde antes de esta cota. Es por ello que la relación heurística (1.4) es un ingrediente más a considerar en la estabilidad de los sistemas estructuralmente simétricos más no es enteramente determinante.

Al comparar Λ estructuralmente simétricas y aleatorias se puede percibir que el decaimiento de las estructuralmente simétricas es primero con respecto de las Λ aleatorias, tal y como se observó entre sistemas de May y semi Allesina. En la Figura (1.33) también se muestra evidente que conforme la red es más grande: las desviaciones entre ambas Λ va disminuyendo hasta mostrar el mismo decaimiento. En términos de la matriz de incidencias, se puede argumentar lo mismo que en el caso de May y semi Allesina: conforme la magnitud de las interacciones aumente para cada sistema de tamaño fijo, la matriz Λ estructuralmente simétrica va siendo indistinguible de su homóloga aleatoria. Por lo tanto, es congruente que las desviaciones vayan siendo mínimas. Será de interés analizar cómo son sus puntos fijos y sus diferencias.

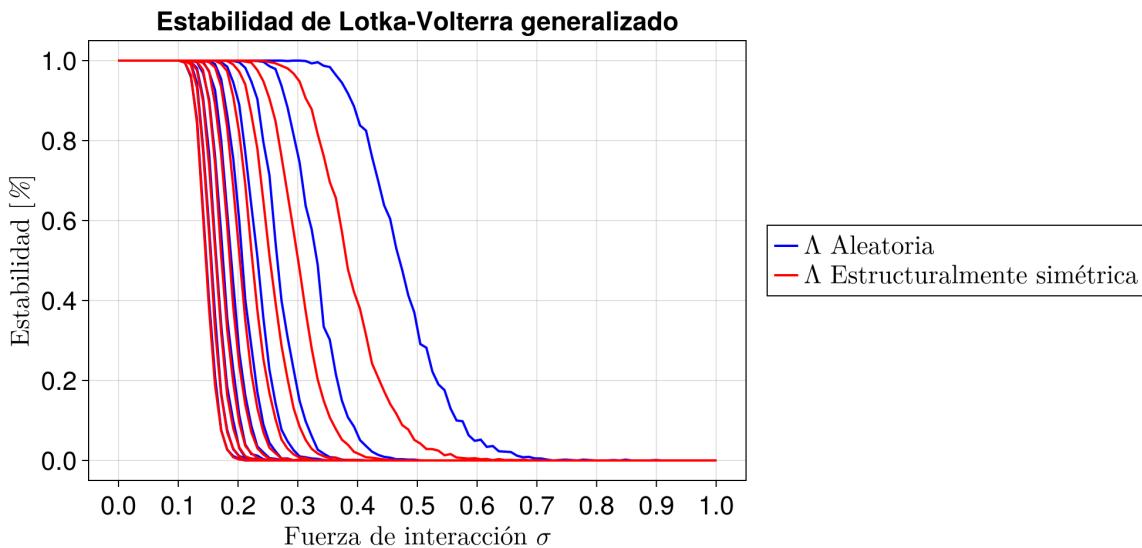


Figura 1.33: Comparación de la estabilidad entre sistemas de Lotka-Volterra generalizados en función de σ con Λ aleatoria y estructuralmente simétrica.

Al comparar la estabilidad de los sistemas LV con respecto de May y semi Allesina, las diferencias son similares a las Figuras (1.30, 1.31): las transiciones de May y semi Allesina se muestran hacia la izquierda con respecto de las transiciones LV. Sin embargo se puede observar que también siguen la tendencia de cambiar su estabilidad entorno a valores que se encuentran alrededor en el mismo orden de magnitud, lo que muestra una relación entre ambos sistemas. En realidad, la única diferencia entre las Jacobianas aleatorias y estructuralmente simétricas con respecto de May y semi Allesina es la injerencia que tiene el punto fijo sobre ellas (??).

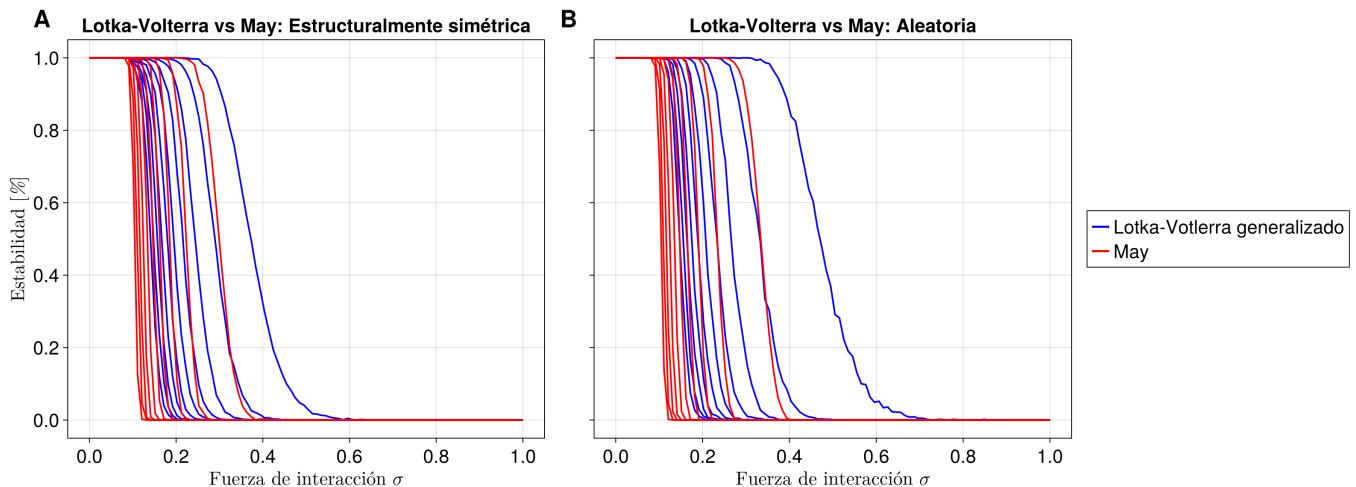


Figura 1.34: Comparación de la estabilidad entre sistemas de Lotka-Volterra y May en función de σ con matrices aleatorias y estructuralmente simétricas.

Para concluir el caso $N = 100$ se puntuiza a partir de las Figuras (1.25, 1.32) que genera más impacto en la estabilidad pequeños cambios en p que en σ , es decir, en términos de estabilidad es más agresivo agregar enlaces a una red de interacciones que aumentar la magnitud de las mismas para redes de tamaño fijo.

1.4.2. Para $N = 50$

En función de p

Se ha utilizado la misma metodología para generar los diagramas de transición para este caso y para $N = 25$. Las particiones y los parámetros del sistema (??) son los mismos. Lo único que ha cambiado es el número de simulaciones por punto (Tabla (1.2)), pues entre menos especies se contemplen se debe de compensar con el número de simulaciones para suavizar las curvas con base en la ley de los grandes números. Algo que se podrá observar en estas transiciones es que son cada vez más suaves y tienen mayor rango de estabilidad (ver caso $\sigma = 0.2$). Esto sugiere que es más probable hallar sistemas estables cuando su tamaño es cada vez menor.

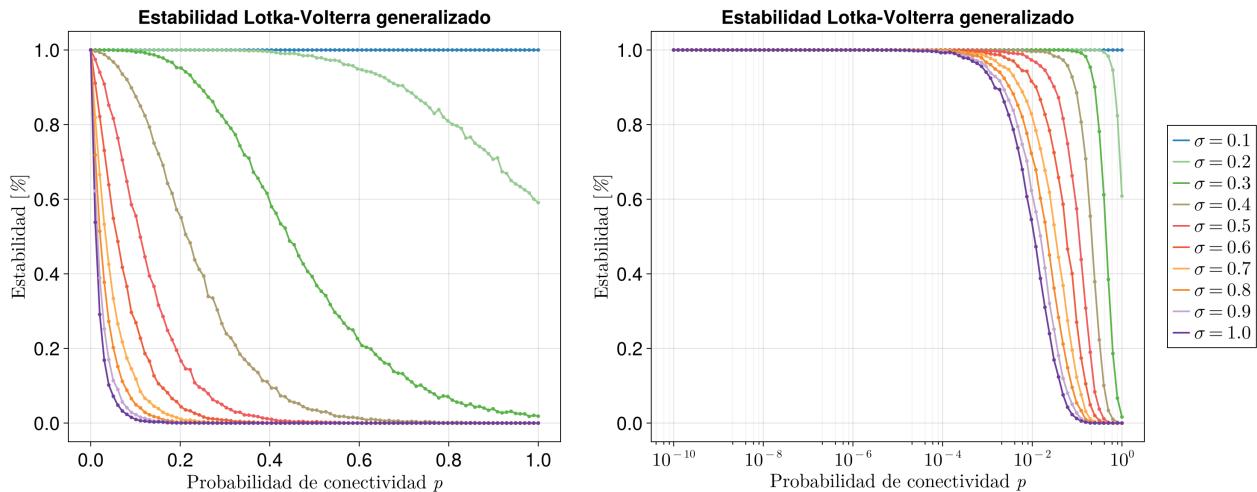


Figura 1.35: Transiciones de estabilidad en el Sistema de Lotka-Volterra generalizado estructuralmente simétrico en función de la probabilidad de conectividad para $N = 50$.

Se puede observar que el caso $\sigma = 0.2$ tiene hasta un 60 % de probabilidad de ser estable aún cuando la red es completamente conectada, hecho que contrasta con el caso $N = 100$. Sin embargo aún así se sigue observando que el cambio de estabilidad para σ cercano a 1.0 se da para valores de p del orden de 10^{-4} . Al realizar la simulación (Apéndice⁵) para observar el cumplimiento de la relación heurística (1.4) se encuentra que para $\sigma = 0.27$ comienzan aemerger casos que no cumplen dicha desigualdad. Sin embargo solos se toma en cuenta como elemento adicional a considerar para las transiciones de estabilidad.

⁵Cita

En función de σ

En las transiciones que dependen de σ también se aprecia que son más suaves y desplazadas un poco a la derecha con respecto del caso $N = 100$. Además se sigue observando que las diferencias entre los sistemas $p = 0.9$ y $p = 1.0$ son muy mínimas en comparación con las desviaciones entre los sistemas $p = 0.1$ y $p = 0.2$. En este sentido se logra ver que los cambios de estabilidad son más sustanciales cuando se tienen redes escasamente pobladas en comparación con redes densas y casi conexas.

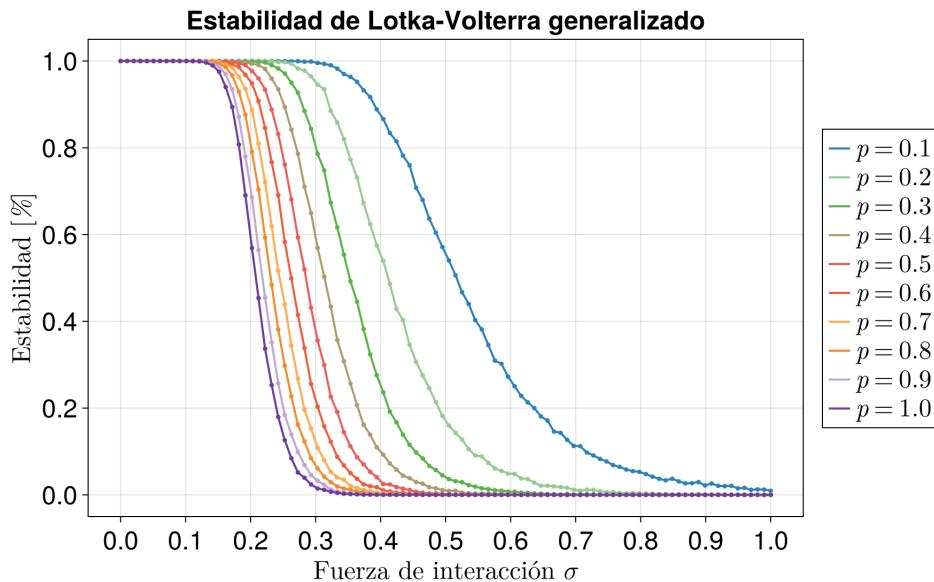


Figura 1.36: Transiciones de estabilidad en el Sistema de Lotka-Volterra generalizado estructuralmente simétrico en función de la fuerza de interacción para $N = 50$.

1.4.3. Para $N = 25$

En función de p

Finalmente para el último caso se encuentran transiciones de estabilidad todavía más suaves, a su vez con un rango de estabilidad mayor con respecto de los sistemas anteriores. Se contempla un número mayor de simulaciones por punto (Tabla 1.2) para poder suavizar las curvas. En este caso se puede observar que el sistema con $\sigma = 0.2$ es 99 % estable aún con la red totalmente conexa. Se observa que la cantidad de interacciones influye significativamente en el cambio de estabilidad de los sistemas: tienen mayor probabilidad de ser estables. En la proposición 1 se ha mencionado que el radio de Girko (??) tiene un valor esperado σ^6 con fluctuaciones de orden $1/\sqrt{N}$; eso implica que entre más grande sea el sistema: es más estrecha la incertidumbre de ser estable o no. Por esta razón los sistemas $N = 100$ se les observa una transición abrupta. Sin embargo si el sistema es de menor tamaño, entonces las fluctuaciones son más grandes y la probabilidad de ser estables es mayor.

⁶Considerando matrices de Ginibre, que se encuentran normalizadas por el factor $1/\sqrt{N}$.

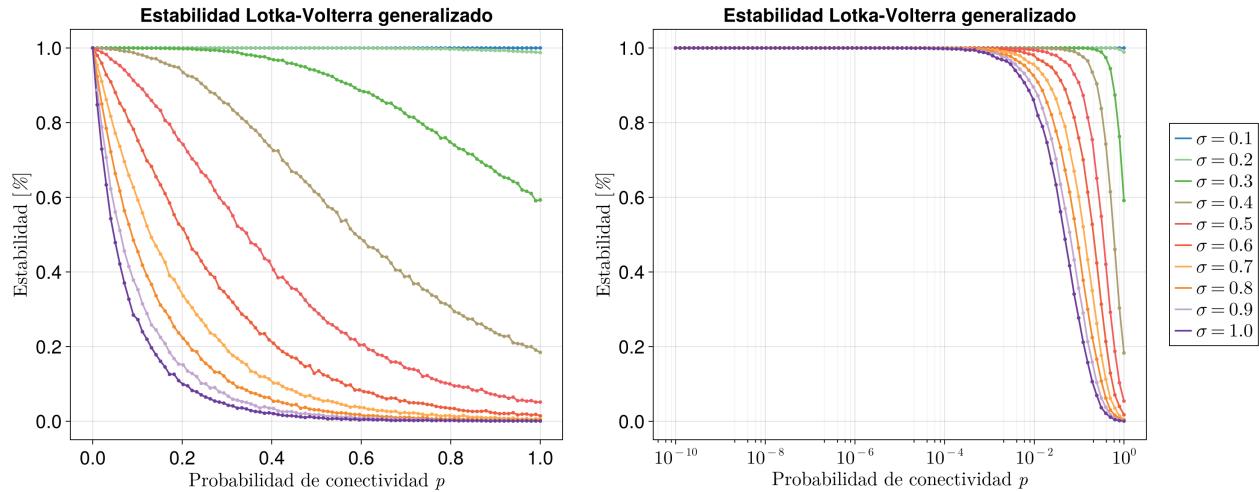


Figura 1.37: Transiciones de estabilidad en el Sistema de Lotka-Volterra generalizado en función de la probabilidad de conectividad para $N = 25$.

En el caso $N = 100$ se ha observado que existe una relación sutil entre los sistemas con diagonal fija y las Jacobianas de los LV. No se puede concluir directamente que los sistemas LV tienen fluctuaciones de orden $1/\sqrt{N}$, puesto que no los describe una ley circular por no tener una distribución uniforme de valores propios. Sin embargo se puede suponer que tienen fluctuaciones similares debido a la forma de las transiciones vistas hasta ahora, y para garantizarlo se deberá tener una estimación del parámetro crítico de transición.

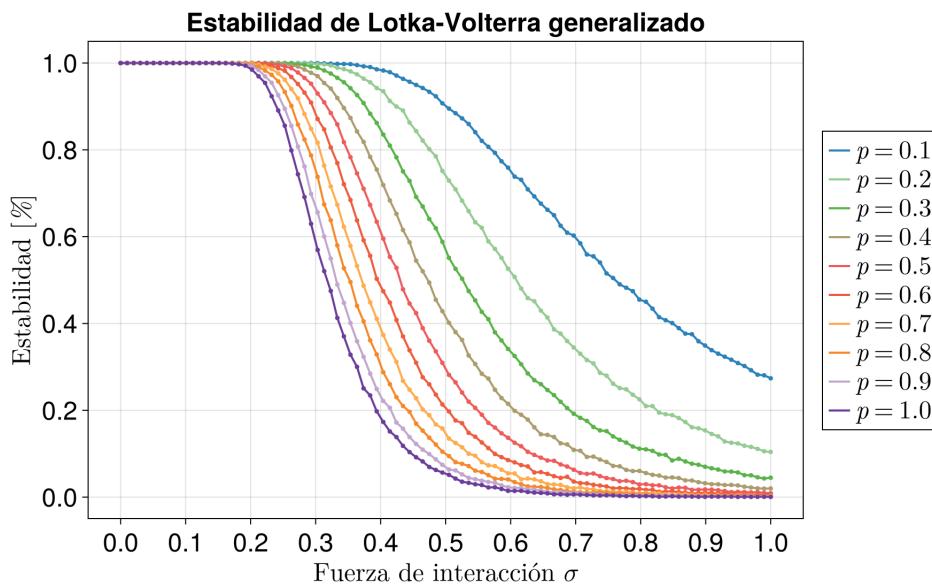


Figura 1.38: Transiciones de estabilidad en el Sistema de Lotka-Votlerra generalizado en función de la fuerza de interacción para $N = 25$.

Las transiciones en función de σ también se muestran más suaves con respecto de los sistemas anteriores incluso se logra observar que el sistema con la red totalmente conexa ($p = 1.0$) es estable con un 30 % de probabilidad para $\sigma = 0.1$, hecho que no se logró observar en los casos anteriores. El mapeo de este caso particular sugiere que se requerirían interacciones de mayor magnitud para poder observar el decaimiento de la estabilidad a cero, es decir, considerar valores $\sigma \geq 1.0$ para el caso $p = 0.1$. La simulación del apéndice⁽⁷⁾ para la relación heurística (1.4) indica que para $\sigma = 0.29$ se cumple la desigualdad y comienza a no cumplirlos para valores posteriores.

Con esto se concluye la presentación de los resultados más importantes de esta tesis, en este punto se tiene un mapa general de como se comporta la estabilidad de los sistemas LV para diversos configuraciones (p, σ, N). Hace falta reconocer si puede existir o no un parámetro crítico de transición además de revisar si la relación (1.4) tiene alguna relevancia en dicho parámetro de transición específicamente para los sistemas estructuralmente simétricos. En la siguiente y última sección de este trabajo se estará discutiendo las posibles implicaciones de esto.

1.5. Indicador espectral de transición de estabilidad

Existen algunos antecedentes que abordan el análisis de transiciones de fase en el modelo de Lotka-Volterra aterrizando al enfoque de la materia condensada y vidrios de spín [4, 3, 2]. En cada trabajo se construye el sistema de forma particular y se aplican diversos métodos y enfoques para concluir con sus resultados. En esta última sección se explorarán estos trabajos de forma breve para recopilar elementos clave que puedan servir para la descripción de nuestras transiciones de fase. Finalmente se buscará plantear una propuesta de parámetro crítico de transición que se adecúe a los sistemas LV revisados hasta ahora.

En el trabajo de Bunin (2017) [4] se analizó la dinámica de comunidades con base en las ecuaciones de Lotka-Volterra con interacciones aleatorias. Éstas pueden tener cierto nivel de correlación dado por $\gamma = \text{corr}(\alpha_{ij}, \alpha_{ji}) \in [-1, 1]$ donde $\gamma = 0$ considera al sistema totalmente asimétrico, $\gamma = -1$ es antisimétrico y $\gamma = 1$ es totalmente simétrico. El objetivo del trabajo fue caracterizar las propiedades macroscópicas que emergen de las matrices con diversos valores de γ y ver de que forma determinan la estructura y estabilidad de las comunidades resultantes.

El sistema que considera el autor es totalmente determinista, tal y como se está considerando en esta tesis. Las interacciones también se modelan a partir de una distribución normal de media y varianza controladas. Para estudiar el comportamiento estacionario del sistema, Bunin propone utilizar

⁷Cita

el *método de cavidad* [7], utilizado ampliamente en sistemas desordenados y en este caso permitirá derivar ecuaciones de autosuficiencia para la abundancia efectiva de una especie típica y su susceptibilidad ecológica. Del análisis realizado se identifican tres regímenes ecológicos bien definidos: Punto fijo único y estable, múltiples atractores y crecimiento no acotado (inestabilidad). El criterio que separa la fase del único punto fijo y la de múltiples atractores se obtiene analizando la susceptibilidad ecológica y la estabilidad de la matriz Jacobiana del sistema, revelando una transición análoga al límite de estabilidad encontrados en modelos de vidrios de spín. La ruptura de la unicidad del equilibrio ocurre cuando la respuesta promedio de la comunidad diverge, lo que indica la aparición de múltiples configuraciones ecológicas estables.

Este trabajo continúa y se extiende en 2018 [3] enfocándose en sistemas de Lotka-Volterra que se encuentran en el borde de la estabilidad, es decir, explorando las implicaciones de un equilibrio marginalmente estable. Las consecuencias de este estado del sistema es que se vuelve extremadamente sensible a perturbaciones, teniendo tiempos de relajación largos e implicando que el sistema no regrese a su punto de equilibrio sin que diverga del mismo, sino que más bien lo orbite. Las fluctuaciones pueden ser incluso ambientales (aunque eso recae a interpretación) y amplifican las correlaciones de largo alcance entre especies (en analogía con puntos críticos de transiciones de fase). Esto permite mantener alta diversidad sin perder estructura y refleja un equilibrio entre orden y caos.

La respuesta de oscilación del sistema responde a la emergencia de *modos blandos* a causa de la cantidad de valores propios de la matriz Jacobiana del sistema que son o se aproximan a cero. Estos modos blandos no contribuyen de forma decisiva a la estabilidad del sistema, pero si determinan la respuesta ante perturbaciones externas. El trabajo de Biroli *et al.* establece un puente conceptual entre la ecología teórica y la física estadística: muestra que los ecosistemas grandes pueden autoorganizarse de manera natural hacia un estado donde la estabilidad es apenas mantenida, y dominada por modos marginales que amplifican la variabilidad y la respuesta a perturbaciones, una zona de transición considerablemente semejante a la marginalidad vista en vídrios de spín y en el borde de transición de Gardner [5].

Más adelante en 2021 emerge el trabajo realizado por Altieri *et al.* [2] en donde resalta más la analogía con la fase Gardner en modelos de vidrios de spín. A diferencia de los trabajos anteriores, en donde el sistema era determinista, en este caso los autores consideran una versión del sistema de Lotka-Volterra estocástico, introduciendo ruido demográfico de carácter gaussiano que corresponderá con la cantidad de nacimientos y decesos que ocurren en las poblaciones. El objetivo del trabajo es investigar los escenarios en donde el tamaño del sistema es susceptible al ruido y de que manera impacta con las diversas fases del sistema las cuales contemplan: único punto fijo, fase metaestable y la fase Gardner.

En este caso las ecuaciones del sistema se definen de la siguiente manera:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i \left(1 - x_i - \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} x_j \right) + \eta_i(t) \quad (1.5)$$

Se considera una matriz aleatoria y **simétrica**, es decir, con interacciones $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ i.i.d. En este caso $\eta_i(t)$ es el ruido gaussiano con media diferente de cero y con covarianza: $\langle \eta_i(t) \eta'_i(t) \rangle = 2TN_i(t)\delta_{ij}\delta(t-t')$ con $T = \frac{1}{N}$ temperatura del sistema; mientras más grande sea la población, menor será el impacto del ruido demográfico sobre el sistema y viceversa. Si éste es débil entonces la solución converge a un único punto de equilibrio determinado por los coeficientes de la matriz aleatoria. Cuando el ruido es fuerte las trayectorias generadas no convergen a un punto en especial, sino que se vuelven erráticas y/o atrapadas en zonas metaestables del espacio de estados, lo que irá conllevando a la fase vítreo.

En este contexto la fase vítreo corresponde con una dinámica ecológica lenta, con tiempos de relajación extremadamente largos, atrapada en una jerarquía de valles y subvalles que imposibilita la exploración de todo el espacio posible (ruptura de ergodicidad). Además es altamente dependiente de las condiciones iniciales y del historial de las trayectorias, generando que cualquier perturbación conlleve a otro valle/subvalle; por lo tanto existe una proliferación de estados marginales. Este comportamiento emergirá de la alta heterogeneidad de la matriz aleatoria (dependiente de σ) o de la alta intensidad del ruido demográfico reflejado en el tamaño efectivo del sistema.

El punto central de las fases consideradas en este trabajo emerge del hecho de poder definir un Hamiltoniano⁸ que a su vez define una función de partición. Pensando en ello el sistema sigue una dinámica tipo gradiente descendiente, es decir:

$$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad (1.6)$$

Altieri *et al.* establecen que los mínimos locales de la energía del sistema corresponden con los puntos de equilibrio del mismo. Por lo tanto, serán los mínimos de la energía los que describan las fases del sistema de acuerdo con el impacto de σ y T : si es tal que solo genera un único mínimo, el sistema se organiza en torno al mismo. Al ir aumentando la intensidad de las condiciones mencionadas emergen múltiples puntos de equilibrio y hasta una cantidad exponencial de ellos (fase vítreo) con la cualidad de ser marginalmente estables.

⁸Gracias a que el sistema es conservativo debido a que las interacciones son simétricas. Por lo tanto se cumple $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{F_i}{x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{F_j}{x_j} \right)$, con F_i las ecuaciones del sistema (1.5).

1.6. Discusión

Estos trabajos se centran en la investigación y descripción de transiciones completamente diferentes a las que se contemplan en esta tesis, sin embargo, conceptualmente aportan elementos clave para poder entender nuestras transiciones. En esta discusión se rescatarán dichos elementos para poder caracterizar nuestras transiciones, definir que significan las diferentes fases del sistema, explorar si existe una fase metaestable y dar un acercamiento al parámetro crítico de transición, teniendo en cuenta que los sistemas son estructuralmente simétricos principalmente.

En el trabajo de Altieri *et al.* fue ingenioso haber restringido las interacciones del sistema LV de forma simétrica, es decir, $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ para toda entrada de su matriz aleatoria. Al ejecutar las derivadas parciales cruzadas del sistema, se puede observar que son iguales lo que origina un rotacional igual a cero propio de un sistema conservativo. En consecuencia tienen la capacidad de definir un campo escalar que toma forma de gradiente descendiente (1.6); dicho campo corresponde con el Hamiltoniano del sistema el cual relaciona los mínimos de energía con los atractores del sistema.

En el trabajo se describen distintas fases que no son sino la cantidad de mínimos de energía locales que puede haber en función de la heterogeneidad de las interacciones y el ruido demográfico. En este aspecto se define la matriz *Hessiana* del sistema como

$$\mathcal{H}_{ij} = \frac{\partial H}{\partial x_i \partial x_j} \quad (1.7)$$

misma que guardará información de la curvatura del Hamiltoniano y mediante sus valores propios se pueda determinar “que tan profundos” son sus mínimos de energía y que tan susceptibles son ante fluctuaciones. Si los valores propios de la matriz Hessiana son positivos, es decir, $\text{Re}(\lambda_{\min}(\mathcal{H})) > 0$ implica que existe un único mínimo de energía al cual tiende el sistema. Sin embargo, cuando el mínimo valor propio de esta matriz alcanza el cero entonces la curvatura del Hamiltoniano se aplana y emerge el conjunto de modos blandos que representa una estabilidad marginal. Si los valores propios de la Hessiana son negativos, entonces la curvatura del Hamiltoniano pasa a ser cóncava o máxima lo que desenvuelve en un sistema inestable⁹.

Esto es crucial ya que en este contexto, la matriz Hessiana es el inverso aditivo de la Jacobiana, es decir, $\mathcal{J} = -\mathcal{H}^{10}$ indicando que hay una conexión directa entre el soporte espectral de la matriz Jacobiana: que define si las perturbaciones crecen o se mitigan, y la forma de la curvatura del Hamiltoniano: definiendo si el sistema tiene un mínimo o varios mínimos de energía. En ese sentido el mínimo valor propio de la Hessiana equivale al máximo valor propio de la Jacobiana. En el segundo caso, se

⁹Todos aquellos puntos fijos estables o inestables se dan para $\nabla H = 0$.

¹⁰Solo es posible gracias a que el sistema es conservativo.

considera que mientras $\text{Re}(\lambda_{\max}(\mathcal{J})) < 0$, el sistema será estable; en cambio cuando es igual a cero se ingresa al terreno de la estabilidad marginal y cuando es positivo el sistema se vuelve inestable. Al intentar determinar las derivadas cruzadas del sistema (??) considerando que la matriz de incidencias Λ es únicamente estructuralmente simétrica se encuentra

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{f_i}{x_i} \right) = -\frac{r_i \alpha_{ij}}{K_i}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{f_j}{x_j} \right) = -\frac{r_j \alpha_{ji}}{K_j}$$

considerando que todas las capacidades de carga K_i y todas las tasas de crecimiento r_i son iguales (en esta tesis) aún así $\alpha_{ij} \neq \alpha_{ji}$ y por lo tanto no se puede definir un campo escalar que represente a la energía del sistema: esta configuración es *no conservativa* y tampoco puede definirse la Hessiana del sistema. Sin embargo, la matriz Jacobiana posee la información necesaria para determinar la estabilidad del sistema, distinguiendo una fase marginalmente estable en $\text{Re}(\lambda_{\max}(\mathcal{J})) = 0$.

Ya que el sistema de este trabajo es no conservativo, el tipo de transición que se estará por argumentar no sigue la clasificación de Ehrenfest puesto que no se encuentra definida la segunda derivada de la energía libre. Esto implica que se estará hablando de una *transición de fase fuera de equilibrio* ya que las cantidades macroscópicas del sistema, principalmente la energía, no se mantienen constantes en el tiempo sino que existe un flujo o intercambio de energía dentro del mismo.

Para esta y toda transición de fase, es necesario definir sus elementos: El parámetro de control será la probabilidad de conectividad p y la fuerza de las interacciones dada por σ . Lo ideal será construir un parámetro de control que considere los 3 parámetros del sistema en uno solo, tal como el radio espectral May/Girko (??). El parámetro crítico de transición será aquella configuración (σ, p, N) en donde el sistema alcance $\text{Re}(\lambda_{\max}(\mathcal{J})) = 0$ y para ello se necesita conseguir una expresión del parámetro de control. Por último el parámetro de orden: será el porcentaje de estabilidad del sistema que cambiará cualitativamente a medida que transite hacia el parámetro crítico, manteniendo una fase ordenada (estable) y otra desordenada (inestable).

En el contexto del sistema LV, es conservativo si el intercambio de energía se mantiene constante en el tiempo, cuestión que se garantiza gracias a la simetría de las interacciones: pues la magnitud de cada α_{ij} es la misma en dirección opuesta. Esto implica que no existen flujos netos de energía y se genera una tendencia hacia el equilibrio termodinámico. En cambio si el sistema es no conservativo entonces quiere decir que existen flujos netos de energía y por lo tanto ésta ya no se mantiene constante sino que podría **disiparse** [8]. Este fenómeno se da a causa de la asimetría de las interacciones y el desbalance de energía que ejercen unas especies sobre otras. En la depredación una de ellas pierde biomasa mientras que la otra la gana, en la competencia y en el mutualismo una de las especies puede poseer ventaja sobre la otra; y el flujo de energía que produce el amensalismo y el comensalismo es

tal que una de las especies se beneficia o perjudica mientras que la otra no incurre en algún impacto. Por lo tanto el sistema LV se encuentra *fuerza del equilibrio termodinámico* si sus interacciones son asimétricas.

1.6.1. Interpretación ecológica

Es realista considerar que el sistema LV es no conservativo, pues en la naturaleza compleja difícilmente se observarán sistemas cuyo intercambio neto de energía sea cero. El modelo matemático de Lotka-Volterra representa una simplificación de la realidad, no considera variables ambientales que necesariamente intervienen en la dinámica de las poblaciones, y todo ese conjunto de variables es lo que definiría a los ecosistemas como *estructuras disipativas* [8].

Hasta ahora se ha podido vislumbrar de forma matemática el significado de cada una de las fases del sistema, dependiente directamente del soporte espectral y más específicamente del $\text{Re}(\lambda_{\max}(\mathcal{J}))$. Pero físicamente ¿qué es representa cada fase? Para el caso de la estabilidad es simple: representa una cantidad específica para cada población en la que perdurará estable en el tiempo, siendo resistentes ante perturbaciones. En el caso de la inestabilidad, matemáticamente representa la sensibilidad que tiene el sistema a ser perturbado y diverger. Pero físicamente las poblaciones no crecen exponencialmente; pero la interpretación física es la incapacidad del sistema de ya nunca regresar a su punto de equilibrio. Si existe al menos una especie que es incapaz de regresar a su punto de equilibrio, las fluctuaciones que genere y a su vez las relaciones que tenga con otras especies perturbará el sistema hasta volverlo totalmente inestable. En ese aspecto el ecosistema no necesariamente colapse (aunque podría) sino que le será imposible estabilizarse hasta que las condiciones (p, σ, N) lo permitan.

La fase de estabilidad marginal es poco explorada en esta tesis pero aquel momento y/o configuración (σ, p, N) en donde el sistema alcance $\text{Re}(\lambda_{\max}(\mathcal{J})) = 0$. Los trabajos antes revisados nos sugieren que es una región en donde emergen modos blandos y múltiples estados de equilibrio. Sin embargo el comportamiento de cualquier sistema dinámico con parte real de valores propios igual a cero: oscila entorno al punto de equilibrio. En ese aspecto, uno de los elementos de continuidad para esta tesis será investigar que sucede en la fase de estabilidad marginal. Físicamente esta fase se puede interpretar como aquella en donde las poblaciones del sistema oscilan en el tiempo sin necesariamente estabilizarse, la diferencia con respecto de la inestabilidad es que la oscilación podría darse de forma periódica.

Pero para abrir el camino hacia la investigación de la estabilidad marginal es indispensable definir o tener una acercamiento al parámetro de control del sistema, para poder hallar la zona crítica de transición y partir de ahí. ¿Qué define la estabilidad en los sistemas LV? La respuesta es $\text{Re}(\lambda_{\max}(\mathcal{J}))$ ¿Cómo se puede controlar su posición? La respuesta se halla en las secciones del Punto Fijo 1.2.2 y

la de Leyes Circulares 1.3.1. Principalmente en esta última se destacó que existe una relación directa entre la posición de la parte real de los valores propios y la diagonal de la matriz Jacobiana. Así mismo estos elementos provienen directamente del punto fijo, por lo tanto: determinar cada fase de la estabilidad del sistema depende de los puntos fijos del mismo, y a su vez depende de las configuraciones (p, σ, N) de Λ que propicien puntos fijos con entradas positivas para la fase estable, con algunos elementos igual a cero para la fase metaestable y con entradas negativas para la fase inestable.

1.6.2. Cono convexo

La información de la estabilidad se guarda en las interacciones de Λ que permite diversas formas de puntos fijos. ¿Existe alguna forma de controlar la dirección del punto fijo? En la presente propuesta se plantearán algunas formas de controlar la apertura de los puntos fijos, este será el último eslabón de esta tesis mismo que podría servir como punto de partida para continuar extensiones de este trabajo. Sin embargo, las propuestas que se presentarán a continuación son consideradas aproximaciones heurísticas que delimitan desde diferentes ángulos la apertura del punto fijo; por esta razón carecen de robustez y no deben ser considerados como el parámetro de control definitivo.

Se partirá de las ecuaciones que originan los puntos fijos que devienen del sistema (??)

$$1 - \frac{\sum_{j=1}^N \alpha_{ij} x_j}{K_i} = 0, \quad \iff \quad \Lambda X^* = K$$

El objetivo será controlar la dirección del punto fijo X^* para garantizar que sus entradas sean positivas, cero en algunas de ellas o negativas. Sin pérdida de generalidad, se optará por considerar únicamente $X^* > 0$. Otro modo de expresar las ecuaciones del sistema es por medio de la siguiente ecuación:

$$\Lambda X^* = x_1^* \ell_1 + x_2^* \ell_2 + \cdots + x_n^* \ell_n \quad (1.8)$$

donde cada ℓ_i es un vector columna de la matriz Λ , entonces el producto ΛX^* es una suma ponderada de vectores columna de Λ . Cada vector columna tiene una abertura con respecto de los ejes de su espacio vectorial, si se juntan todos los vectores columna con sus diversas aberturas se podrá observar que se genera un área delimitada semejante a un cono el cual es un *subespacio vectorial* y se le conoce como *cono* generado por las columnas de Λ

$$\text{cone}(\Lambda) := \text{cone}\{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n\}$$

Este subespacio es cerrado bajo la multiplicación por escalar, si $V \in \text{cone}(\Lambda)$ entonces $\alpha V \in \text{cone}(\Lambda)$ para toda α positiva. Si se quisiera agregar la cerradura bajo la suma entonces el conjunto se le denomina *cono convexo* y son todas aquellas combinaciones lineales con coeficientes positivos que se encuentran contenidas en el cono

$$\text{Cvx}(\Lambda) := \left\{ \sum_{i=1}^N x_i^* \ell_i : x_i^* > 0 \right\}$$

Es decir que todo vector $K \in \text{Cvx}(\Lambda)$ si y solo si $X^* > 0$. Para visualizar esta idea piense en la base canónica de \mathbb{R}^2 , para cualquier combinación lineal con coeficientes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ estará contenido en el cono convexo de dicha base, lo cual corresponde con el primer cuadrante de \mathbb{R}^2 . Con base en esta idea se requiere encontrar las condiciones de Λ para garantizar que el vector K este contenido en su respectivo cono convexo. ¿Qué pasa si para alguna $x_i^* = 0$? quiere decir que el vector K estará contenido en alguna de las fronteras del cono convexo, y si existe alguna $x_i^* < 0$ entonces el vector K no estará contenido en el cono convexo de Λ .

Diagonal dominante

Para garantizar que $X^* > 0$ hay que asegurar $K \in \text{Cvx}(\Lambda)$. Una forma segura pero no necesaria de hacerlo es mediante la diagonal dominante sobre el resto de coeficientes de Λ es decir

$$|\alpha_{ii}| > \sum_{j \neq i} |\alpha_{ij}|$$

El lector recordará de la Proposición ?? que se parte de la misma premisa (??) para llegar al valor esperado y varianza del radio de los discos de Gershgorin para asegurar que se encuentren contenidos en el semiplano negativo de \mathbb{C} . Para términos del punto fijo y del cono convexo la diagonal dominante funciona como una forma segura de extender el cono lo más posible sobre el primer ortante de \mathbb{R}^n .

Cada columna es de la forma

$$\ell_i = \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{ii} = 1 \\ \vdots \\ \alpha_{Ni} \end{pmatrix}$$

este vector es una combinación lineal de perturbaciones abriendo en dirección dominante al eje coordenado \hat{e}_i , por lo tanto el cono convexo generado por los vectores columna de Λ tendrá una apertura comparable con el primer ortante de \mathbb{R}^n , es decir, en el subespacio vectorial en donde todas las entradas de sus vectores son positivas. De esta manera se puede garantizar con alta probabilidad que el vector K estará contenido en esta región y por lo tanto $X^* > 0$. Entonces el valor esperado (??) es una primer propuesta de parámetro crítico de transición el cual sigue la relación

$$(N - 1)p\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}} < 1 \quad (1.9)$$

para que los sistemas asociados puedan ser estables, este valor esperado tendrá cierto nivel de efectividad; su varianza (??) nos dicta que tanto puede fluctuar. Si esta condición se cumple entonces garantiza dos cosas: Los discos de Gershgorin serán menores a sus centros de modo que pueda tener a todos ellos en el semiplano negativo de \mathbb{C} e implica también que Λ tiene diagonal dominante lo cual genera una apertura segura en el cono convexo del primer ortante de \mathbb{R}^2 garantizando que el

vector K se encuentre contenido en esta región y por lo tanto $X^* > 0$. Esta propuesta es funcional y segura pues orienta la apertura del cono convexo en una zona segura. Sin embargo al igual que la conclusión de la Proposición ??, en donde se expuso que pueden haber contraejemplos de este parámetro debido a que los discos de Gershgorin no controlan la posición de los valores propios, en este caso se concluye algo semejante: cuando la diagonal no es dominante, aún pueden existir soluciones estables, pues aún existe gran variedad de conos convexos en los cuales pueda estar contenido el vector K la cuestión será hallar una forma más general de generar estos conos.

Relación Señal-Ruido

La Relación Señal-Ruido es una técnica empleada en teoría de la información y aplicada en diversas ramas de investigación. El propósito de esta técnica es medir cuanta información útil existe en presencia de ruido o perturbaciones que contamina la observación o medición. Se define como

$$\text{SNR} = \frac{P_{\text{señal}}}{P_{\text{ruido}}}$$

donde $P_{\text{señal}}$ y P_{ruido} son las potencias de la señal y ruido respectivamente. La señal, en nuestro contexto, serán los elementos α_{ii} de Λ . En principio e independientemente de los coeficientes $\alpha_{ij} \in \Lambda$, cada vector columna de Λ tiene una tendencia a orientarse en dirección del eje \hat{e}_i . Éstos podrán aproximarse o alejarse de dicho eje en función del ruido que generen los coeficientes α_{ij} . Por lo tanto, es deseable hallar una forma de poder controlar la abertura de los vectores para garantizar que se genere un cono convexo que contenga al vector K. Ya que la abertura depende del ruido propiciado por los elementos α_{ij} , entonces σ y p son los parámetros de control que pueden garantizar un cono convexo favorable. Considere el producto interior de algún ℓ_i^\top con K

$$\ell_i^\top \cdot K = \|\ell_i^\top\| \|K\| \cos \theta_i$$

para que el vector ℓ_i abra en dirección de K se requiere idealmente que $\cos \theta_i > 0$, es decir, que $|\theta_i| < \frac{\pi}{2}$. Es una condición difícil de obtener, sobre todo si se considera para todos los vectores columna de Λ . Si se encuentra la forma de obtener $\ell_i^\top \cdot K > 0$ con base en p y/o σ entonces se puede garantizar en gran medida la formación de un cono convexo favorable¹¹, entonces:

$$\ell_i^\top \cdot K = K \sum_{i=1}^N \alpha_{ij} = K \left(1 + \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} \right) \quad (1.10)$$

De esta ecuación ya se puede distinguir nuestra señal y el ruido que altera la señal, dicho de otra forma: la señal será aquel elemento de la diagonal correspondiente con \hat{e}_i y la suma serán las perturbaciones que desvén al vector ℓ_i de su eje correspondiente. Cada elemento α_{ij} tiene media cero y varianza $p\sigma^2$,

¹¹Note que si $\ell_i^\top \cdot K = 0$, los vectores son ortogonales. Entonces en el intervalo $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, el vector ℓ_i ya no abre en dirección de K.

entonces el valor esperado de la suma es cero mientras que la varianza es

$$\text{Var} \left(\sum_{j \neq i} \alpha_{ij} \right) = (N - 1)p\sigma^2$$

Utilizando el teorema central del límite nuevamente, la suma (1.10) genera una distribución normal $\mathcal{N}(1, (N - 1)p\sigma^2)$ cuyas variables aleatorias son de la forma $Y = \mu + \sigma_{\text{eff}}Z$ con $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Las fluctuaciones de esta distribución normal se encuentran en función de $\sigma_{\text{eff}} = \sigma\sqrt{(N - 1)p}$ y por lo tanto la Relación Señal-Ruido es

$$\text{SNR} = \frac{\mu}{\sigma_{\text{eff}}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{(N - 1)p}} \quad (1.11)$$

Se busca que (1.10) sea mayor que cero, es decir, $Y > 0$ para garantizar que el vector ℓ_i se encuentre en dirección de K^{12} . Sin embargo lo que realmente puede medirse es una probabilidad de que eso suceda con base en la SNR: mediante la función de probabilidad acumulada.

$$\begin{aligned} \Pr(Y > 0) &= \Pr \left(Z > -\frac{\mu}{\sigma_{\text{eff}}} \right) \\ &= 1 - \Phi \left(-\frac{\mu}{\sigma_{\text{eff}}} \right) \\ &= \Phi \left(\frac{\mu}{\sigma_{\text{eff}}} \right) \end{aligned}$$

Este resultado nos ayudará a rastrear configuraciones de la SNR que garantice sistemas LV estables. Así mismo, proporcionará valores de p y σ que produzcan sistemas estables con alta probabilidad. ¿Qué pasa en el caso extremo $\sigma = 1.0$, $p = 1.0$?

$$\text{SNR} \approx 0.1005, \quad \Phi(\text{SNR}) \approx 0.54$$

Este resultado puede ser confuso puesto que se podría pensar que existe un 54% de probabilidad de que el sistema LV sea estable, y no es así. Esta probabilidad únicamente indica que un vector columna arbitrario $\ell_i \in \Lambda$ tiene un 54% de probabilidad de estar alineado con K , pero habría que medir una probabilidad global para el resto de vectores columna de Λ , lo cual ya no se contempla en este análisis. Una posible interpretación de este resultado es que para sistemas $N = 100$, de los 100 vectores columna únicamente 54 se encuentran alineados en dirección de K , sin embargo, este hecho no necesariamente garantiza que el cono convexo vaya a abrir estrictamente en la dirección K .

Por lo tanto se necesitará que $\Phi(\text{SNR})$ posea una probabilidad alta para garantizar que el mayor número de vectores columna se orienten en la dirección de K y en consecuencia se forme un cono convexo en dicha dirección. Se propone $\Phi(\text{SNR}) \geq 0.9$ para garantizar este hecho y se irá corroborando con ayuda de los diagramas de transición que se mostraron en las secciones anteriores. Para ello se necesita

$$\text{SNR} \approx 0.9, \quad \Phi(\text{SNR}) \approx 0.8159 \quad (1.12)$$

¹²Formando un ángulo $|\theta| < \frac{\pi}{2}$).

Esta propuesta indica que es imprescindible que el 81.59 % de los vectores columna de Λ se encuentren alineados con K para que el sistema sea estable con alta probabilidad. De la ecuación (1.11) se renombra SNR por κ y se despeja p y σ respectivamente para determinar sus valores críticos respectivos. De esta manera se obtiene

$$\sigma_c = \frac{1}{\kappa\sqrt{Np}}, \quad p_c = \frac{1}{\kappa^2\sigma^2 N}$$

considerando que $N \approx N - 1$ cuando $N \gg 1$. De este modo se puede observar que κ es un parámetro de control emergente dependiente de los parámetros microscópicos y/o externos del sistema (p, σ, N). Por lo tanto el sistema inducirá un valor efectivo de κ y se tendrá que explorar como cambia cuando cruza dicho valor (1.12). En este punto se refuerza el argumento de no considerar este fenómeno como una transición termodinámica dura, puesto que no se está observando singularidades en una función libre, divergencia de cantidades observables ni una transición analítica. Más bien ahora se argumenta que se trata de una transición geométrica/probabilística asociadas con percolación finita por ejemplo. En este caso el parámetro crítico es probabilístico y se vuelve abrupto mientras $N \rightarrow \infty$, tal como en la transición de May/Allesina.

Al ajustar $\kappa = 0.9$ en sistemas dependientes de p se presentan observaciones interesantes dadas a continuación. Considerando los casos particulares $\sigma = 0.2$ y $\sigma = 1.0$: se observa que la probabilidad crítica de transición es aproximadamente $p_c \approx 0.3086$ y $p_c = 0.0123$ respectivamente. Se puede observar que para el primer caso el parámetro define un umbral que distingue sistemas puramente estables y del otro lado sistemas con cierto porcentaje/probabilidad de estabilidad. El caso $\sigma = 0.2$ es especial entre el resto de sistemas debido a la suavidad de su transición; es un caso que a criterio de este autor debe ser revisado con más detalle.

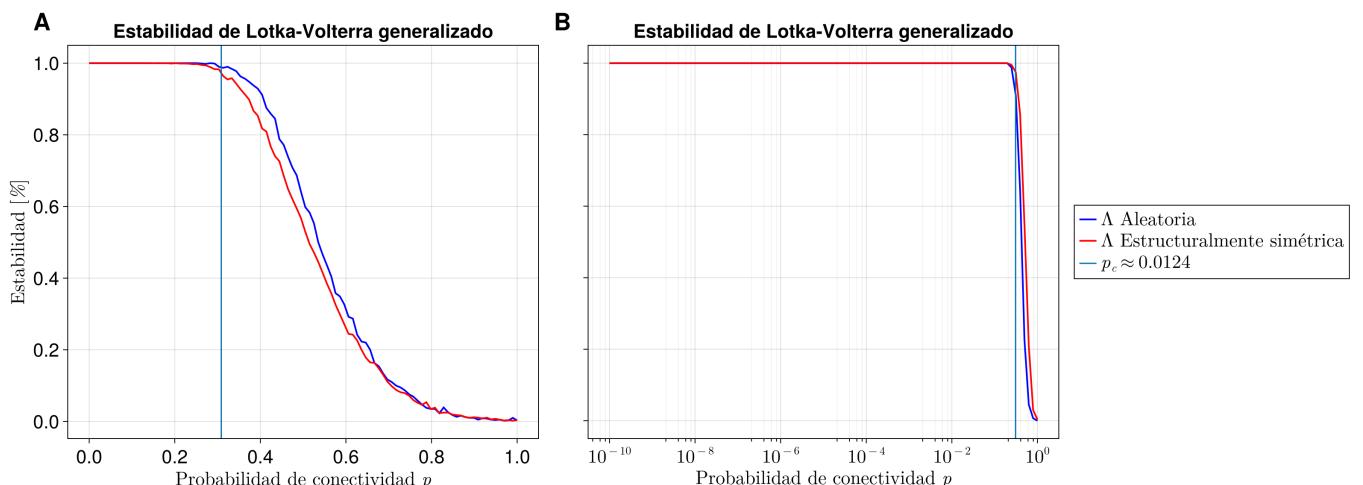


Figura 1.39: Transición de estabilidad para $\sigma = 0.2$ considerando $\kappa = 0.9$ como parámetro de control emergente para definir la probabilidad crítica de transición. (A) Escala lineal. (B) Escala logarítmica.

En contraste, el escenario $\sigma = 1.0$ muestra algo interesante: la probabilidad crítica parece ajustarse al caso Λ aleatorio y no hacerlo con Λ estructuralmente simétrica. Esto es algo que también se observa en la Figura (1.39) pero con en menor medida. Las transiciones en sistemas estructuralmente simétricos son más suaves y acaecen primero, de forma similar a como se veía entre los casos de May y semi Allesina. En este caso particular hay que voltear a analizar cómo son los conos convexos generados de Λ estructuralmente simétrica y realizar los ajustes de κ para obtener un resultado que se ajuste mejor a este caso.

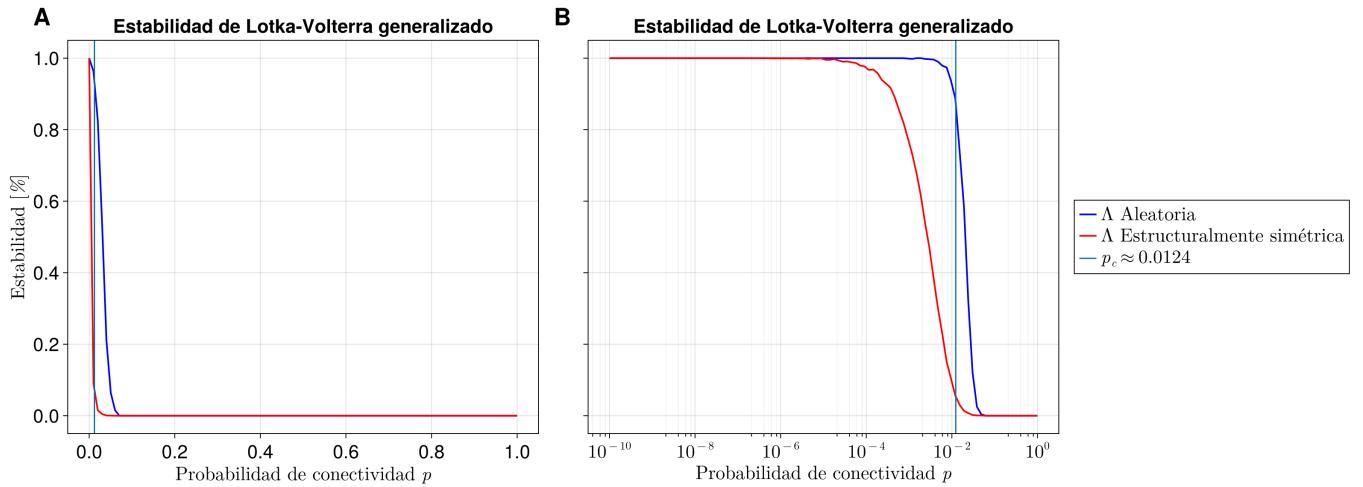


Figura 1.40: Transición de estabilidad para el caso $\sigma = 1.0$ considerando $\kappa = 0.9$ como parámetro de control emergente para definir la probabilidad crítica de transición. (A) Escala lineal. (B) Escala logarítmica.

Rescatando el argumento que se presentaba al final del capítulo pasado, agregar enlaces en una red teniendo fija la magnitud de las interacciones genera cambios más abruptos en la estabilidad del sistema que al realizar pequeños cambios en σ dejando los tamaños de red fijos. En sistemas estructuralmente simétricos es todavía más abrupto el cambio ya que la estabilidad se decrece de forma gradual, por tanto hay que seguir explorando las causas de este tipo de dinámica.

Volteando a ver a los sistemas dependientes de σ , se observarán las implicaciones de $\kappa = 0.9$ para sistemas de tamaño $p = 0.1$ y $p = 1.0$. Recuerde que las desviaciones entre sistemas Λ aleatorios y estructuralmente simétricos van decreciendo conforme el tamaño de la red aumenta, de modo que no se perciben diferencias relevantes en el caso $p = 1.0$. Las fuerzas de interacción críticas en estos casos son $\sigma_c \approx 0.3514$ y $\sigma_c \approx 0.1111$ respectivamente. Similar al caso de p_c , se observa el parámetro de transición se ajusta bien a Λ aleatorio y no lo hace tan bien en su homólogo. Aquí también habrá que revisar de que forma repercuten los conos convexos de los casos estructuralmente simétricos.

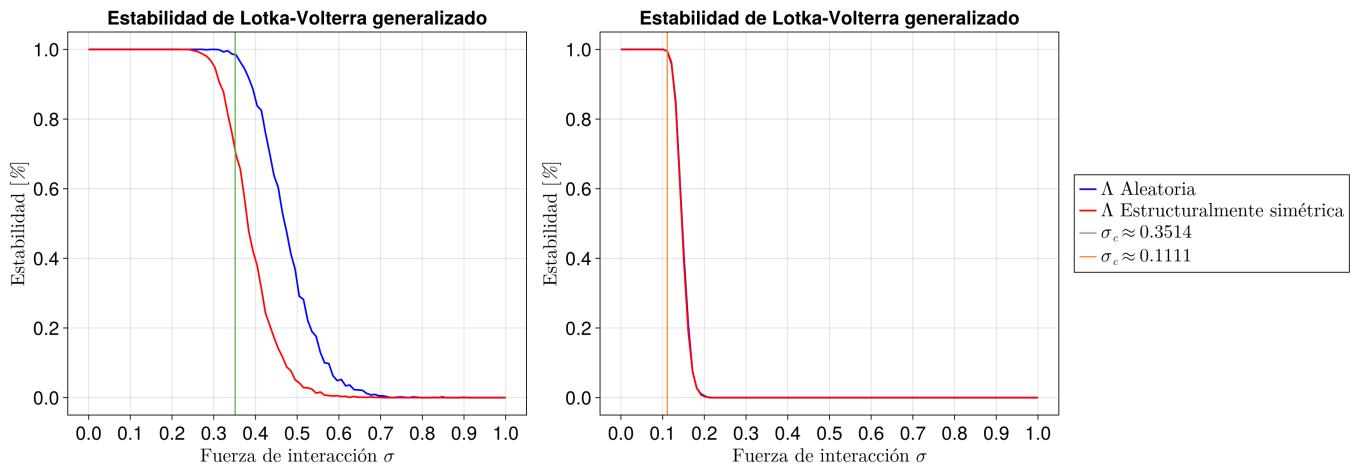


Figura 1.41: Transiciones de estabilidad en función de σ considerando $\kappa = 0.9$ como parámetro de control emergente para definir la fuerza de interacción promedio crítica de transición. **(A)** Caso particular para $p = 0.1$. **(B)** Caso particular para $p = 1.0$.

Sin embargo, el parámetro se ajusta perfectamente cuando los sistemas son completamente conexos, lo que quiere indicar que el ajuste será mejor conforme el tamaño de la red vaya aumentando. En este punto se puede observar que elegir $\kappa = 0.9$ es una buena opción para distinguir las transiciones de estabilidad en función de p y σ . En el caso Λ aleatorio implica que tener un 81.59 % de sus vectores columnas alineados con K es suficiente para garantizar su estabilidad. κ se ajusta bien a sistemas Λ aleatorios pero hace falta completar el análisis para Λ estructuralmente simétrico.

Bibliografía

- [1] Stefano Allesina y Si Tang. “Stability criteria for complex ecosystems”. En: *Nature* 483.7388 (2012), págs. 205-208.
- [2] Ada Altieri et al. “Properties of equilibria and glassy phases of the random Lotka-Volterra model with demographic noise”. En: *Physical Review Letters* 126.25 (2021), pág. 258301.
- [3] Giulio Biroli, Guy Bunin y Chiara Cammarota. “Marginally stable equilibria in critical ecosystems”. En: *New Journal of Physics* 20.8 (2018), pág. 083051.
- [4] Guy Bunin. “Ecological communities with Lotka-Volterra dynamics”. En: *Physical Review E* 95.4 (2017), pág. 042414.
- [5] Elisabeth Gardner. “Spin glasses with p-spin interactions”. En: *Nuclear Physics B* 257 (1985), págs. 747-765.
- [6] Vyacheslav L Girko. “Circular law”. En: *Theory of Probability & Its Applications* 29.4 (1985), págs. 694-706.
- [7] Marc Mézard, Giorgio Parisi y Miguel Angel Virasoro. *Spin glass theory and beyond: An Introduction to the Replica Method and Its Applications*. Vol. 9. World Scientific Publishing Company, 1987.
- [8] Ilya Prigogine y Pierre Van Rysselberghe. “Introduction to thermodynamics of irreversible processes”. En: *Journal of The Electrochemical Society* 110.4 (1963), pág. 97C.