Sistema de Lotka-Volterra generalizado

Se define el sistema:

$$\frac{dx_i}{dt} = r_i x_i \left(1 - \frac{\sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij} x_j}{K_i}\right) \tag{1}$$

- donde r_i es la tasa de crecimiento,
- K_i es la capacidad de carga del sistema,
- x_i es la población de una especie y su derivada marca la dinámica de su crecimiento,
- $\alpha_{ij} x_j$ con las especies que interaccionan con x_i con cierto valor α_{ij}.

Sistema de Lotka-Volterra generalizado

Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, se define su aspecto matricial de la siguiente forma

$$\mathbf{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_n(\vec{x}) \end{pmatrix}, \qquad \text{donde } \vec{x} = (x_1(t), ..., x_n(t))$$

y cada una de las $f_i(\vec{x})$ corresponde con las funciones del sistema (1). El sistema puede ser re-escrito de la siguiente forma

$$\dot{\vec{x}} = \mathbf{F}(\vec{x}(t))$$

Para conocer la estabilidad de este sistema, se propone Linearizarlo y determinar sus valores propios que dictarán este comportamiento. Se define entonces el Jacobiano del sistema

$$\mathbb{J}_{\mathbf{F}}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\vec{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(\vec{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} \tag{2}$$

y se necesita de un punto crítico $\vec{x}^*$ que cumple $\mathbf{F}(\vec{x}^*) = 0$ tal que al evaluarlo en el jacobiano nos de el sistema linearizado localmente alrededor de dicho punto crítico.

Matriz de incidencias

Para definir las interacciones α_{ij} del sistema (1) se va a construir a partir de una red de Erdös–Rényi que puede ser no dirigida o dirigida.

Para ello se define su matriz de adyacencia asociada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cuyos elementos son de la forma

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } r < p \\ 0, & \text{si } r \geq p \end{cases}, \qquad \text{para cada } i \neq j$$

donde r es un número aleatorio entre 0 y 1. Para el caso de la red aleatoria dirigida hay que repetir este proceso para los elementos α_{ji}.

Matriz de incidencias

Teniendo la red de Erdös–Rényi (no dirigida o dirigida), se define una matriz R cuyas entradas estarán mapeadas de una distribución Normal con $\mu = 0$ y $\sigma = \{0{,}1, 0{,}2, ..., 1{,}0\}$.

Con ello se define la **matriz de incidencias** asociada a una red de incidencias que guarda las interacciones del sistema (1)

$$\Lambda = (A \odot R) + I$$

Dependiendo de si A es dirigida o no, Λ será estructuralmente simétrica o puramente aleatoria.

Matriz de incidencias

¿Por qué sumar la identidad al producto $A \odot R$? Extendiendo la ecuación 1 se tiene

$$\frac{dx_i}{dt} = r_i x_i \left(1 - \frac{\alpha_{ii} x_i + \alpha_{i1} x_1 + \cdots + \alpha_{iN} x_N}{K_i}\right)$$

considerando que $\alpha_{ii} = 1$. Se factoriza la ecuación:

$$\frac{dx_i}{dt} = r_i x_i \left(1 - \frac{x_i}{K_i}\right) - r_i x_i \left(\frac{\alpha_{i1} x_1 + \cdots + \alpha_{iN} x_N}{K_i}\right)$$

Independientemente de los signos de α_{ij} con $i \neq j$, el carácter logístico del sistema se guarda en $\alpha_{ii} = 1$. La restricción no es tan fuerte, únicamente se pide $\alpha_{ii} > 0$.

Tipos de interacciones

Para la red de incidencias estructuralmente simétricas se tienen las siguientes interacciones (nodo $i \leftrightarrow j$)

1. Cooperación $(--)$
2. Competencia $(++)$
3. Presa-Depredador $(-+)$ ó $(+-)$

Tipos de interacciones

Para la red de incidencias puramente aleatoria se agregan a las anteriores las siguientes interacciones (nodo $i \to j$ y $j \to i$)

4. Comensalismo $(+0)$ (una de ellas obtiene un beneficio)
5. Amensalismo (-0) (una de ella sale perjudicada)

y vendrán determinadas a partir de como se de la combinación $A \odot R$.

Por lo tanto las interacciones $(--)$, $(++)$, $(-+)$, $(+0)$ y $(0-)$ pesan en la dinámica del sistema

$$\frac{dx_i}{dt} = r_i x_i \left(1 - \frac{x_i}{K_i}\right) - r_i x_i \left(\frac{\alpha_{i1} x_1 + \cdots + \alpha_{iN} x_N}{K_i}\right)$$

Jacobiano del sistema de Lotka-Volterra

Sea $\mathcal{I} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$. Se define el jacobiano del sistema de Lotka-Volterra generalizado de la siguiente forma:

$$\mathcal{I} = \begin{cases} \mathcal{I}_{ii} = r_i \left(1 - \frac{2x_i + \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} x_j}{K_i}\right), & \text{para } i \in \{1, ..., N\} \\ \mathcal{I}_{ij} = -\frac{r_i \alpha_{ik} x_i}{K_i}, & \text{para } i \neq j \end{cases}$$

Y se ha asumido $\alpha_{ii} = 1$. En este contexto ya se esta evaluando sobre el punto crítico del sistema, es decir, $\vec{x}^* = (x_1, ..., x_N)$ es el punto crítico a evaluar.

Jacobiano del sistema Lotka-Volterra

¿Qué signo tendrán los elementos de la diagonal del Jacobiano del sistema de Lotka-Volterra generalizado?

1. $r_i > 0$ siempre, por lo que descartamos.
2. Todas las entradas de $\vec{x}^* \geq 0$ y existen algunas $x_i \in \vec{x}^*$ tal que $x_i > K_i$ por el factor de la cooperación.
3. $2x_i \geq 0$ y la suma no necesariamente es mayor o igual que cero pero supongamos que es así.
4. Entonces se puede asumir

$$K_i < 2x_i + \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} x_j$$

5. Reacomodando se tiene

$$1 - \frac{2x_i + \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} x_j}{K_i} < 0$$

Resultados de May

Ley Circular

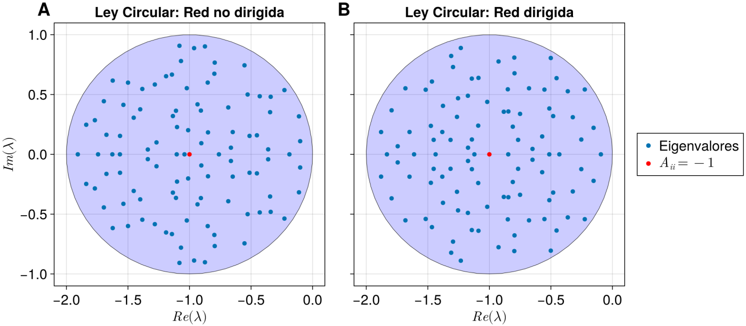

Figura: Distribución de eigenvalores que cumplen la Ley Circular de May. Para ambos sistemas se consideró $N = 100$, una FDP normal centrada en $\mu = 0$ y con $\sigma = 0{,}2$ para una conectancia $C = \frac{1}{\sigma^2 N} - 0{,}03$. (**A**) Considerando una matriz de interacciones estructuralmente simétrica. (**B**) Considerando una matriz de interacciones puramente aleatoria.

Resultado de Allesina

Ley Elíptica

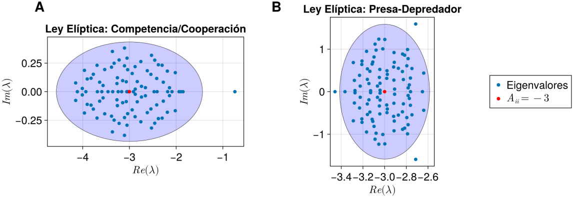

Figura: Distribución de eigenvalores que cumplen la Ley Elíptica de Allesina. Para ambos sistemas se consideró $N = 100$, dos FDP normal respectivamente, una conectancia $C = 0{,}12$ y en ambas se debe de considerar a la matriz de interacciones como estructuralmente simétrica. (**A**) Se considera una FDP normal para la parte triangular superior con $\mu_1 = 0{,}1$ y $\sigma_1 = 0{,}1$ y para la parte inferior se considera otra FDP normal con $\mu_2 = 0{,}3$ y $\sigma_2 = 0{,}2$. (**B**) Se considera una FDP normal para la parte triangular superior con $\mu_1 = -0{,}1$ y $\sigma_1 = 0{,}1$ y para la parte inferior se considera otra FDP normal con $\mu_2 = 0{,}3$ y $\sigma_2 = 0{,}2$.

Transiciones de May

Define un parámetro de transición como: $\sigma < (nC)^{-1/2}$

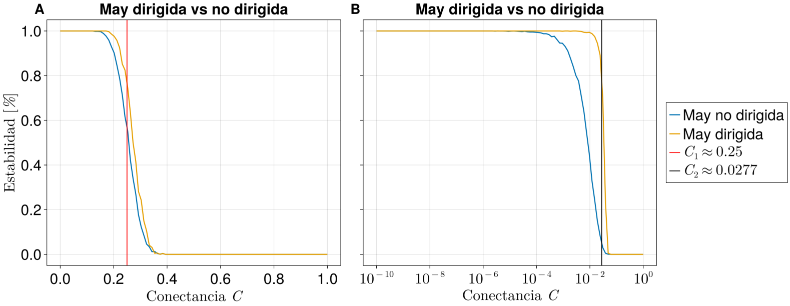

Figura: Transición entre redes de May dirigidas vs No dirigidas. (**A**) Se considera para $\sigma = 0{,}2$ (**B**) Se considera para $\sigma = 0{,}6$.

Transición en función de σ

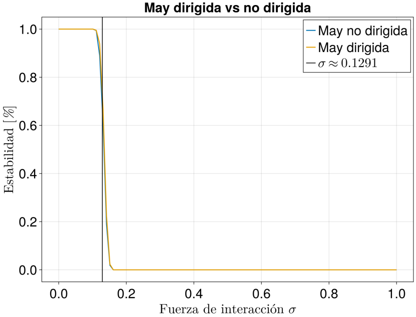

Figura: Variaciones en la transición para la matriz de May estructuralmente simétrica y para matriz puramente aleatoria. Se consideró el valor de la conectancia $C = 0{,}6$.

Test

Test

Test

Test

Test

Test

Test

Test

Test

Test

Test

Test

Test

Test

Test

Test

Test

Test

Test

Test

Test

Test

Test

Test

Test

Test

Test

Test

Test

Test