



Sobre los Métodos.

Proyecto de Tesis

Autor: Rodrigo Vega Vilchis.

Correo: rockdrigo6@ciencias.unam.mx

Fecha: 19 Agosto, 2024

Índice general

0.1. Explicaciones técnicas	6
0.1.1. Sistema de competencia de especies para $n = 2$	6
0.1.2. Sistema de competencia de especies generalizado para N especies.	10

Índice de figuras

1.	Campo vectorial de las soluciones del sistema propuesto de dos especies.	8
2.	Red de Karate.	10
3.	Red no dirigida de 10 nodos.	11
4.	Red no dirigida de 10 nodos.	13

0.1. Explicaciones técnicas

0.1.1. Sistema de competencia de especies para $n = 2$

El sistema de Lotka-Volterra es uno de los sistemas utilizados para poder comprender la naturaleza de la dinámica no lineal. En este caso particular, los términos no lineales son cuadráticos y representan la interacción entre la especie i y la especie j .

$$\frac{dx_i}{dt} = r_i x_i \left(1 - \frac{\sum_{j=1}^N \alpha_{ij} x_j}{K_i} \right) \quad (1)$$

Se considera una tasa de crecimiento r_i para la especie i , una capacidad de carga K_i que limita hasta cierto punto su crecimiento, y su respectiva interacción con la especie x_j cuya “fuerza” de interacción esta dada por los coeficientes α_{ij} . Al ser un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales, no es posible acceder a una solución analítica general¹; por ello se recurre a métodos de integración numérica capaces de aproximar las soluciones a un rango considerable y cercano a la solución real. El método empleado por excelencia en este trabajo es el integrador Runge-Kutta de orden 4².

De manera pedagógica, para aprender y analizar las virtudes y comportamientos del sistema 1 es recomendable comenzar explorando el sistema de 2×2 .

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= r_1 x_1 \left(1 - \frac{a_{11} x_1}{k_1} - \frac{a_{12} x_1 x_2}{k_1} \right) \\ \dot{x}_2 &= r_2 x_2 \left(1 - \frac{a_{21} x_1 x_2}{k_2} - \frac{a_{22} x_2}{k_2} \right) \end{cases}$$

En este caso particular, tenemos una tasa de crecimiento y una capacidad de carga personalizada para cada especie, lo que es razonable con el hecho de que cada especie crece a un ritmo determinado y también es limitada de manera determinada. En este caso los coeficientes α_{ij} forman parte de una matriz de *incidencias* entre especies definida de la siguiente manera

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Es apreciable que los términos de la diagonal se encuentran en $\alpha_{ii} = 1$ ³ respectivamente, más adelante se dará una explicación detallada de esta característica; por el momento solo nos enfocaremos en la dinámica que produce el sistema. Para ello se define el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x \left(1 - \frac{x}{2} \right) - xy \\ \frac{dy}{dt} &= 3y \left(1 - \frac{y}{3} \right) - 2xy \end{aligned}$$

¹debido a los términos no lineales... (me gustaría una explicación más completa: ver strogatz y tratados de ecuaciones diferenciales).

²poner una referencia de libro

³Argumentar más adelante.

De este sistema se pueden notar algunas características: se tiene para cada ecuación diferencial (especie) una tasa de crecimiento y una capacidad de carga específica o personalizada. Por ejemplo para la ecuación \dot{x} se tiene una tasa de crecimiento y capacidad de carga de 2 para la especie x y para la especie y estos valores son iguales a 1; para la ecuación \dot{y} se tiene una tasa de crecimiento y capacidad de carga de 3 para la especie x y para la especie y se tiene una tasa de crecimiento de 2 y una capacidad de carga de 1. Aunque este sistema tal cual no tiene una solución analítica per se, si es posible explorar acerca de su comportamiento; en principio se pueden hallar sus puntos fijos que nos hablan de la estabilidad del sistema. Para hallar puntos fijos es necesario encontrar las raíces de este sistema. La solución trivial siempre será $(0, 0)$, de ahí se tienen que igualar a cero las ecuaciones para hallar los otros puntos críticos.

$$\begin{aligned} 2x - x^2 - xy &= 0, & \text{suponiendo que } y = 0 \\ 2x &= x^2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

y para \dot{y} se tiene

$$\begin{aligned} 3y - y^2 - 2xy &= 0, & \text{suponiendo que } x = 0 \\ 3y &= y^2 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Por tanto tenemos para \dot{x} el punto fijo $(2, 0)$ mientras que para \dot{y} se tiene el punto fijo $(0, 3)$. Aún es posible hallar un último punto fijo que es para cuando ambas ecuaciones se hacen cero.

$$\begin{aligned} 2x - x^2 - xy &= 0, & \text{Se despeja } y \text{ de esta ecuación.} \\ xy &= x(2 - x) \\ y &= (2 - x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3(x - 2) - (x - 2)^2 - 2x(x - 2) &= 0 \\ 3x - 6 - (x^2 - 4x + 4) - 2x^2 + 4x &= 0, & \text{Reduciendo términos se tiene.} \\ x^2 - 3x + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Al resolver esta última ecuación se determina el último punto fijo que corresponde a $(1, 1)$. Los puntos fijos brindan información para explorar hacia donde pueden converger (atractores) o diverger (repulsores o puntos sillas) las soluciones del sistema dependiendo de las condiciones iniciales que se le impongan.⁴ Se establece que si las soluciones convergen entonces el sistema es considerado *estable* mientras que

⁴explicar brevemente de que se trata uno, quizás esto deba precisarse desde la introducción.

en caso contrario el sistema es considerado *inestable*. Es posible determinar mediante técnicas computacionales el campo vectorial de las soluciones de este sistema⁵, inclusive dos de las isoclinas⁶ del sistema resolviendo las ecuaciones igualando a cero y despejando y de cada una de ellas. Es notorio como dichas isoclinas inciden de alguna forma en tres de los puntos fijos. El gráfico nos muestra que las soluciones convergen hacia los puntos que se encuentran en los ejes; todo dependerá de las condiciones iniciales del sistema para ver hacia donde convergen. El punto fijo de en medio es conocido como punto silla y es inestable ya que aunque existan soluciones que convergen hacia él mismo, en la mínima perturbación que se le provoque la solución puede “desviarse” hacia los atractores. Por último se observa que del origen divergen todas las soluciones por lo que es considerado un punto fijo repulsor.

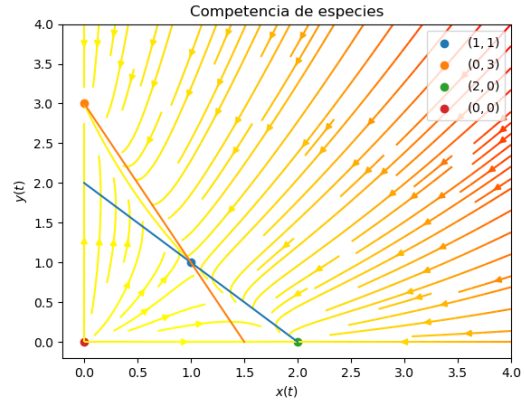


Figura 1: Campo vectorial de las soluciones del sistema propuesto de dos especies.

En esta ocasión por tratarse de un sistema de 2×2 , se tuvo la fortuna de poder obtener una representación visual del sistema y poder realizar un análisis cualitativo del mismo para sacar conclusiones. Pero ¿qué sucede cuando se tienen sistemas de N especies? En principio el espacio vectorial (fase) de las soluciones se vuelve N -dimensional y por lo tanto imposible de visualizar en un gráfico. Es por ello que se requieren de otras técnicas analíticas para seguir esbozando el comportamiento del sistema. Una herramienta útil a esta conjetura es la de *linealizar*⁷ el sistema para poder explorar el comportamiento de los puntos fijos a nivel local. Para realizar esta acción es necesario aplicar el *Jacobiano* al sistema para “bajar” el grado de las ecuaciones del sistema 1 y así obtener puras ecuaciones lineales.

Se define la función vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde n será el número de especies del sistema de Lotka-Volterra generalizado 1.

$$\mathbf{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) = \dot{x}_1 \\ \vdots \\ f_n(\vec{x}) = \dot{x}_n \end{pmatrix}, \quad \text{donde } \vec{x} = (x_1(t), \dots, x_n(t)). \quad (3)$$

Las componentes de $\mathbf{F}(\vec{x})$ corresponden con las funciones del sistema 1, y las componentes del vector \vec{x} corresponden con sus especies involucradas. Por tanto el Jacobiano del sistema quedaría de la siguiente

⁵Realizar referencia de la técnica empleada.

⁶si son isoclinas???

⁷Explicar brevemente en esta nota a que se refiere esto.

forma

$$\mathbb{J}_{\mathbf{F}}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\vec{x})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(\vec{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Esta resultante al ser evaluada en los puntos fijos del sistema genera la llamada matriz de *interacciones* que es aquella que nos brinda la información necesaria para determinar la estabilidad de ese punto fijo en particular. Por ello se establece que la matriz de interacciones brinda información solo a nivel local, pues no contiene información de otros puntos fijos ajenos. Para validar esta aseveración ocuparemos nuestro sistema de 2×2 y relacionaremos la matriz de interacciones con lo que se muestra en el gráfico.

El Jacobiano del sistema 1 para $n = 2$ es el siguiente

$$\mathbb{J}_{\mathbf{F}}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} r_1 - \frac{2r_1x_1+r_1a_{12}x_2}{K_1} & -\frac{r_1a_{12}x_1}{K_1} \\ -\frac{r_2a_{21}x_2}{K_2} & r_2 - \frac{2r_2x_2+r_2a_{21}x_1}{K_2} \end{pmatrix} \quad (5)$$

debido a la matriz de incidencias 2, se tiene que los valores $a_{ii} = 1$ que corresponden con las auto-interacciones. Evaluando los puntos fijos antes encontrados en el jacobiano 5 se tienen las siguientes matrices de interacciones:

$$\mathbb{J}_{(2,0)} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{J}_{(0,3)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{J}_{(1,1)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{J}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Como previamente se ha revisado⁸, los eigenvalores (más que los eigenvectores) determinan la estabilidad de un sistema lineal. Se establece que mientras ellos tengan parte real negativa se asegurará que el sistema será estable y que en otro caso el sistema será inestable. Por lo tanto los eigenvalores de las primeras dos matrices de interacciones deben ser negativos para que sustenten los atractores de la figura 1. Mientras que los eigenvalores de $\mathbb{J}_{(1,1)}$ deben ser uno negativo y otro positivo para sustentar al punto silla. Para la matriz $\mathbb{J}_{(0,0)}$ sus eigenvalores deben ser positivos para que sustenten el repulsor. Realizando el álgebra correspondiente se encuentra lo siguiente

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_{(2,0)} &\implies \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -1 \\ \mathbb{J}_{(0,3)} &\implies \lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = -1 \\ \mathbb{J}_{(1,1)} &\implies \lambda_1 = -1 + \sqrt{2}, \quad \lambda_2 = -1 - \sqrt{2} \\ \mathbb{J}_{(0,0)} &\implies \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3 \end{aligned}$$

Por tanto se termina de validar la consistencia del método de la linearización para esbozar la estabilidad de 1 por cada uno de sus puntos fijos. Esta forma analítica de reconocer la estabilidad del sistema será sumamente útil para cuando se tengan $N > 3$ especies. Habiendo conocido las técnicas a nivel

⁸Hay que referenciar este enunciado con algún sustento de la introducción en donde se maneje el tema de los eigenvalores y eigenvectores como solución de sistemas lineales.

particular frente al sistema para $n = 2$ toca generalizar las ideas hacia un sistema más robusto de N especies, a continuación se abordará esa discusión.

0.1.2. Sistema de competencia de especies generalizado para N especies.

En la sección anterior se ha introducido el sistema de competencia de especies 1 y su forma vectorial 3 generalizada; se mostró un ejemplo particular con $n = 2$ para observar su dinámica a través de su espacio fase (fig. 1) en donde se contempla la naturaleza de sus puntos fijos si se trata de atractores, repulsores o puntos silla. Se propone el método de la linearización para conseguir matrices de interacción que determinen de forma analítica la estabilidad de cada uno de los puntos fijos del sistema. En esta sección profundizaremos más acerca de lo mencionado comenzando con la matriz de incidencias 2 la cual ya se ha mencionado anteriormente.

Para este trabajo resultó conveniente utilizar el marco de las *redes complejas* para poder representar las interacciones entre las especies del sistema. Una red es considerada una colección de *nodos* que se encuentran unidos por *enlaces*⁹. Para definir redes siempre es necesario establecer que es lo que representan los nodos y que representan los enlaces, en nuestro caso por ejemplo si existe una interacción entre las especies x_i y x_j (nodos de la red) entonces hay un enlace que los une. Por tanto establecemos que los nodos de la red corresponden con las especies y los enlaces con las interacciones.

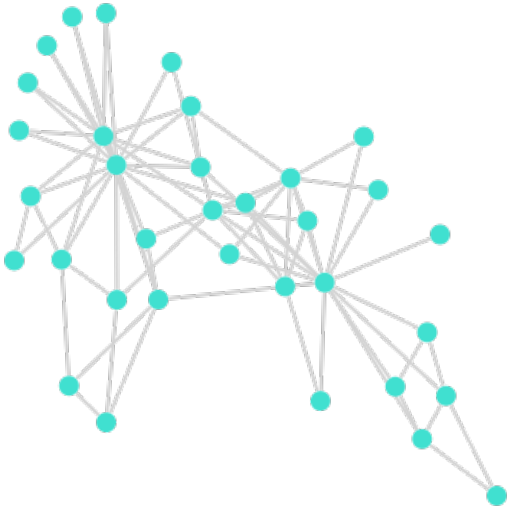


Figura 2: Red de Karate.

En el mundo es posible encontrar diferentes tipos de redes con cierto significado, tales como la red de energética de un país, redes de amistades en una universidad o redes de acciones que cotizan en la bolsa de valores. Para poder representar estas redes y cualquier otro tipo de red conviene introducir el concepto de *matriz de adyacencia*.

Definición 1. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Se define la matriz de adyacencia tal que sus entradas son de la siguiente forma

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } \exists \text{ un enlace entre el nodo } i \text{ y el nodo } j. \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La matriz de adyacencia será la herramienta para determinar la relación de interacción entre especies, pero solo hablará de su existencia más no tendrá información del peso de dicha interacción.

⁹definir más adelante el tipo de interacciones con base en el signo y si son dirigidas o no dirigidas. Además de agregar cita del Newman para esta definición.

Recordemos que en el sistema 1 tenemos coeficientes α_{ij} que representan dichos pesos de interacción entre especies, esto se retomará más adelante.

Ejemplo 1. Para poder apreciar la matriz de adyacencia definamos una red de 10 nodos y veamos su matriz de adyacencia que le corresponde. Es notorio que cada nodo se encuentra identificado con un número de nodo, esto nos va a servir para poderlo mapear en la matriz de adyacencia. La correspondencia es la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Los renglones y columnas de la matriz representan los nodos, siendo el primer renglón el primer nodo (número 1), el quinto renglón será el quinto

nodo (número 5); esto pasa de manera equivalente con las columnas, la cuarta columna corresponde con el cuarto nodo (número 4), la octava columna corresponde con el octavo nodo (número 8). Por tanto, mediante la matriz de adyacencia sabemos que el primer nodo (renglón 1) está enlazado con el cuarto nodo (columna 4) ya que existe un uno, mientras que el primer renglón y la quinta columna hay un cero lo que indica que no existe un enlace entre estos nodos.

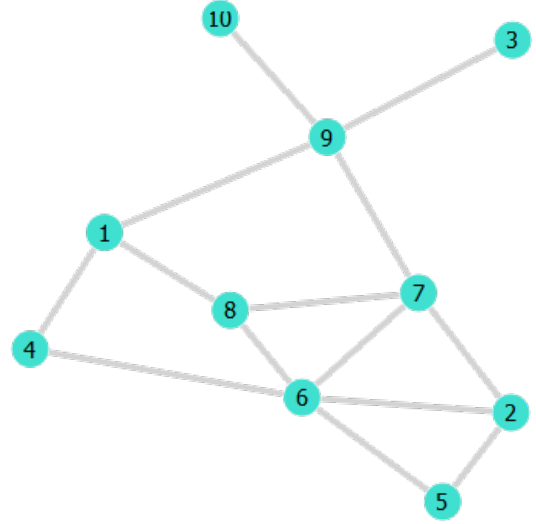


Figura 3: Red no dirigida de 10 nodos.

También hay que destacar qué la matriz es simétrica y que la diagonal es igual a cero: para el primer punto se debe notar que la relación de los enlaces entre nodos no tiene dirección, es decir, que exista un enlace entre nodos significa que el nodo i se conecta con j y viceversa, que el nodo j se conecta con el nodo i . Por tanto decimos que la red de la fig. 3 es *no dirigida* puesto que no hay una dirección preferencial en el enlace, esto implica que su matriz de adyacencia es simétrica. Para el segundo punto se debe notar que cada nodo es libre de relacionarse consigo mismo, en este ejemplo los nodos no lo hacen pero si es posible la existencia de *autoenlaces*; en nuestro sistema tendrá un alto significado porque se hablarán de las autointeracciones que son importantes para la construcción del sistema.¹⁰

¹⁰hay que completar esta idea, relacionada con la diagonal de unos. Autointeracción para la existencia del sistema, capacidad de carga. Argumentar bien.

Cuando se tiene el caso en que los enlaces tienen una dirección preferencial de nodo a nodo, decimos que corresponde a una *red dirigida*. En este caso el enlace podrá ir del nodo i al nodo j pero no necesariamente lo hará en sentido contrario, deberá definirse explícitamente. En el mundo también existe un gran conjunto de redes dirigidas como lo son las citaciones académicas, la propia WWW (World Wide Web), incluso redes tróficas de depredador-presa. Y para este caso también se tiene asociada una matriz de adyacencia con una ligera diferencia con respecto de la definición 1.

Definición 2. Sea $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, matriz de adyacencia de una red no dirigida. Se definen sus elementos de la siguiente manera:

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{Si existe un enlace del nodo } i \text{ al nodo } j \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Los enlaces de las redes dirigidas van a estar representados por flechas para que puedan mostrar adecuadamente las direcciones correspondientes entre los nodos.

