Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ciencias

Transiciones dinámicas de estabilidad en el modelo de Lotka-Volterra generalizado.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

Rodrigo Vega Vilchis

TUTOR

Dr. Sergio Antonio Alcalá Corona

Ciudad Universitaria, CDMX, 2024

A mis padres...

A mi hermano...

Agradecimientos

Resumen

Índice general

Índice de figuras

Índice de tablas

List of Algorithms

Introducción

La física clásica ha sido desarrollada históricamente a partir del estudio de sistemas simples, donde se considera la dinámica de uno o dos cuerpos. El marco de la mecánica newtoniana posee las herramientas necesarias para determinar la evolución temporal de estos sistemas, mismos que serán completamente dependientes de las condiciones iniciales y leyes de movimiento.

El planteamiento de sistemas cada vez más complicados de describir orilló a la creación de fomulaciones más generales y estructuradas. La mecánica lagrangiana y hamiltoniana permitieron realizar una síntesis de dicha descripción y extender a sistemas con un mayor número de grados de libertad. Sin embargo, en el límite de un gran número de componentes, la perspectiva conduce al estudio de la mecánica estadística donde el enfoque pasa de trayectorias individuales hacia la descripción de propiedades macroscópicas emergentes.

Al considerar sistemas con un número intermedio de grados de libertad, surge un escenario conceptualmente distinto. Las ecuaciones de movimiento que emergen de la perspectiva clásica muestran ser no lineales y no admiten soluciones analíticas cerradas en general. Al mismo tiempo, el número de componentes es insuficiente como para emplear el marco de la descripción estadística basada en promedios macroscópicos.

Escenarios ampliamente estudiados sobre este régimen son el problema de los 3 cuerpos y el sistema del péndulo doble. En ambos escenarios se pueden derivar sus ecuaciones de movimiento pero su dinámica exhibe una fuerte sensibilidad en sus condiciones iniciales, lo que limita la predictibilidad a largo plazo. Este comportamiento no señala una falla del marco teórico clásico, sino la aparición de fenómenos con dinámicas no triviales y asociadas al *caos* determinista.

Los sistemas que se estudian bajo el marco teórico de *sistemas complejos* no son una clase definida de manera unívoca, sino constituyen un conjunto amplio de modelos y fenómenos que comparten ciertas características estructurales y dinámicas. Resulta más apropiado brindar una definición con base en un conjunto de propiedades comunes que condicionen su comportamiento colectivo.

Una propiedad fundamental es la presencia de interacciones no lineales entre las componentes del sistema, implicando que la respuesta global no puede obtenerse como la suma de contribuciones independientes. La no linealidad es consecuencia del acoplamiento de los grados de libertad que dificultan la reducción del sistema a descripciones simples. Así mismo, los sistemas complejos suelen estar formados por una gran cantidad de componentes con interacciones acopladas, dando lugar a una estructura relacional que desempeña un papel central en la dinámica. La representación mediante redes resulta la forma natural para describir los patrones de interacción sin necesariamente tomar en cuenta la naturaleza física de las componentes [7, 6].

Como consecuencia de estas características, los sistemas complejos presentan propiedades macroscópicas emergentes que no pueden inferirse de manera directa a partir de la dinámica microscópica. Estas propiedades implican que su análisis requiera enfoques distintos tanto de la descripción dinámica de pocos grados de libertad como de los métodos estadísticos tradicionales, lo que motiva el desarrollo de herramientas específicas orientadas a capturar el comportamiento colectivo del sistema.

La amplia variedad de sistemas que exhiben las propiedades antes descritas motiva la adopción de un enfoque interdisciplinario que permita transferir marcos conceptuales entre contextos distintos. Fenómenos asociados a interacciones acopladas son recurrentes en sistemas físicos, ecológicos, biológicos y sociales, a pesar de las diferencias sustanciales entre la naturaleza de sus componentes [1].

Esta recurrencia sugiere la existencia de comportamientos colectivos universales que se manifiestan de forma consistente en diferentes escalas, desde lo microscópico hasta lo macroscópico [8, p. 97–103]. En consecuencia, la interdisciplinariedad se convierte en una necesidad para la búsqueda de descripciones generales para fenómenos colectivos emergentes. Así el estudio de los sistemas complejos articula distintos campos del conocimiento a partir del interés común en comprender cómo surgen patrones colectivos a partir de interacciones locales.

La dinámica de los sistemas complejos tiende a evolucionar alrededor de estados colectivos que actúan como configuraciones preferenciales. A este fenómeno se le conoce como *autoorganización* y es considerada una cualidad emergente de las interacciones locales entre las componentes del sistema, sin necesidad de la intervención de fuerzas externas [5]. Los estados autoorganizados se manifiestan como soluciones invariantes de las ecuaciones de movimiento; ejemplos de estos estados son los *puntos fijos* y *ciclos límite* del sistema. La relevancia de dichos estados no radica en su existencia sino en su *estabilidad dinámica*, la cual determina si el sistema permanece o no en su vecindad ante la presencia de ligeras perturbaciones del entorno.

En consecuencia, la estabilidad dinámica desempeña un papel central en la caracterización del comportamiento colectivo. En particular, es de gran interés cuando se varían los parámetros que controlan las interacciones, ya que pueden inducir a cambios cualitativos en la estabilidad de estos estados, dando lugar a reorganizaciones críticas de la dinámica global asociadas a la emergencia o desaparición de patrones colectivos. Tales cambios se interpretan como *transiciones dinámicas*, en analogía con las transiciones de fase de sistemas termodinámicos [9].

La estabilidad dinámica en sistemas complejos puede abordarse de forma sistemática a partir del estudio local de la dinámica en la vecindad de soluciones invariantes. En sistemas gobernados por ecuaciones diferenciales no lineales, el análisis conduce a la *linealización* del sistema alrededor de algún estado estacionario. Esto permite el estudio de su dinámica a través de la aproximación a un sistema lineal efectivo.

De este modo, la información esencial sobre la estabilidad dinámica queda codificada en el espectro de valores propios del operador linealizado, usualmente representado por la matriz Jacobiana evaluada en un punto crítico. Dicho espectro determina si pequeñas perturbaciones crecen o decaen en el tiempo y, por tanto, establece criterios precisos de estabilidad local. Al variar los parámetros que controlan las interacciones del sistema, el espectro puede experimentar cambios cualitativos, como el cruce de valores propios a través del eje imaginario, lo que impacta directamente en la estabilidad del estado y señala la ocurrencia de transiciones dinámicas.

En consecuencia, el análisis espectral de sistemas linealizados constituye el eje central para el estudio de la estabilidad y de las transiciones en la dinámica colectiva. En este sentido, el modelo de Lotka-Volterra generalizado constituye un ejemplo paradigmático de sistema complejo con interacciones acopladas. Este modelo ha sido utilizado principalmente para el estudio de dinámicas poblacionales en contextos ecológicos. El modelo es adecuado para observar y estudiar comportamientos colectivos percibidos por un gran número de componentes.

Las interacciones del modelo de Lotka–Volterra generalizado son inherentemente no lineales y, en combinación con su elevada dimensionalidad, dan lugar a una multiplicidad de estados estacionarios. Estos estados constituyen un objeto natural para el análisis de estabilidad dinámica, ya que su caracterización depende directamente de la estructura del Jacobiano asociado. La variación de los parámetros de interacción puede inducir cambios en la estabilidad de dichos estados, proporcionando un marco adecuado para el estudio de transiciones dinámicas entre distintos regímenes colectivos.

En función del marco conceptual elaborado y de la relevancia de la estabilidad dinámica en sistemas no lineales con alta dimensionalidad, el presente trabajo se propone estudiar la estabilidad del modelo de Lotka-Volterra generalizado desde un enfoque espectral. El análisis se restringe a regímenes en los cuales el sistema es claramente estable o inestable. El estudio detallado del régimen crítico, en donde el sistema es marginalmente estable, así como la caracterización de modos marginales y fenómenos críticos asociados, queda fuera del alcance de esta tesis. En particular se plantean los siguientes objetivos:

Objetivo principal: Investigar las transiciones dinámicas de estabilidad en el modelo de Lotka-Volterra generalizado mediante el análisis espectral de sistemas linealizados entorno a estados estacionarios.

Objetivos específicos:

1. Caracterizar numéricamente el soporte espectral de un ensamble de matrices Jacobianas asociadas a estados estacionarios del modelo de Lotka-Volterra generalizado.

2. Analizar la estabilidad dinámica del sistema a partir del comportamiento de la parte real máxima del espectro, identificando su dependencia con los parámetros de interacción y tamaño del sistema.

3. Estudiar como la variación de los parámetros de control induce a cambios continuos en la probabilidad de estabilidad del sistema, interpretados como transiciones dinámicas suaves entre regímenes distintos.

4. Proponer un parámetro de orden heurístico basado en una relación señal-ruido para caracterizar la cercanía a una transición de estabilidad.

La tesis se organiza de la siguiente manera. En el Capítulo 1 se presentan los antecedentes del problema, contextualizados en el trabajo de Robert May. En el Capítulo 2 se introduce el modelo de Lotka–Volterra generalizado, se establecen las ecuaciones que gobiernan su dinámica y se presenta la linealización del sistema alrededor de estados estacionarios. En el Capítulo 3 se discuten criterios generales de estabilidad inspirados en los trabajos de May y Allesina, los cuales se utilizan como marco de referencia para el análisis espectral. Posteriormente, se describe la metodología numérica empleada y se presentan los resultados sobre transiciones dinámicas de estabilidad, así como la propuesta de un indicador espectral asociado a dichas transiciones, cuya interpretación se discute en contraste con los enfoques clásicos. Finalmente, en el Capítulo 4 se presentan las conclusiones y perspectivas del trabajo.

Capítulo 1

Estabilidad en sistemas complejos de gran dimensión.

El análisis de la estabilidad dinámica constituye un problema central en el estudio de sistemas complejos de gran dimensión. Cuando el número de grados de libertad es elevado, la dinámica local alrededor de los estados estacionarios depende de la estructura global de las interacciones, lo que dificulta la aplicación directa de criterios clásicos de estabilidad. En este contexto, pequeñas variaciones pueden alterar drásticamente su comportamiento dinámico induciendo a posibles transiciones cualitativas del sistema. Este capítulo se enfoca en el análisis de sistemas modelados mediante matrices de interacción, sentando las bases para los resultados que se discutirán posteriormente.

1.1. Antecedentes

El estudio de la estabilidad de sistemas dinámicos con un gran número de grados de libertad plantea dificultades que no están presentes en sistemas de baja dimensión. En este contexto, Robert May en la década de 1970 introdujo un enfoque estadístico para analizar la estabilidad de sistemas complejos, marcando un punto de referencia en el área [4]. Considera el uso de redes ecológicas con $N \gg 1$ especies para investigar la posibilidad de que el sistema sea estable o no. La clave que brinda dicha posibilidad se encuentra en la estructura de las interacciones, y es preciso delimitar su condición para distinguir entre un régimen resistente y susceptible a perturbaciones. Para abordar el problema, May introduce un sistema dinámico que considera *a priori* interacciones acopladas

$$\frac{dX(t)}{dt} = \mathbf{F}(X(t))$$

Donde $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ contiene funciones no lineales que constituyen la dinámica de cada población del sistema y $X(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$ son las poblaciones en sí. Haciendo uso de teoría de perturbaciones [3, p. 19] se explora la dinámica alrededor de un punto estacionario $X^*(t)$, es decir, que cumple

$\mathbf{F}(X^*(t)) = \vec{0}$, entonces se considera la ecuación

$$X(t) = X^* + \mathbf{p}(t)$$

donde $\mathbf{p}(t)$ es en concreto el conjunto de perturbaciones alrededor de X^*. Realizando una expansión en series de Taylor se tiene

$$\frac{d}{dt}\left(X^*(t) + \mathbf{p}(t)\right) = \mathbf{F}(X^*) + \left.\frac{d\mathbf{F}}{dX}\right|_{X^*} \mathbf{p}(t) + \mathcal{O}(\mathbf{p}^2)$$

Considerando que $\mathbf{p}(t)$ son pequeñas perturbaciones, se pueden despreciar los términos no lineales y quedarnos únicamente con la primera derivada. Al reducir esta ecuación, finalmente se tiene

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = A\mathbf{p}(t)$$

donde A es una matriz cuadrada a la que May denomina como *community matrix*[1] y sus elementos son tal que $a_{ij} = \left.\frac{\partial f_i(X)}{\partial X_j}\right|_{X^*}$ con $f_i \in \mathbf{F}$. De esta manera, se podrá analizar la estabilidad del sistema de forma local alrededor de algún estado estacionario. Sin embargo, el punto de equilibrio en consideración es arbitrario y su determinación no forma parte del análisis, únicamente se asume la matriz de interacciones A con ciertas características. Este ejercicio permite explorar sistemas no lineales de forma local en un sistema que si es lineal. Por tanto, se pueden determinar sus valores propios e incluso su solución general que tiene la siguiente forma

$$\mathbf{p}(t) = \sum_{j=1}^{N} c_j e^{\lambda_j t} \vec{v}_j$$

En este caso los λ_j son el conjunto de valores propios de A y los $\vec{v}_j$ sus vectores propios asociados. De esta ecuación se puede percibir que el signo de los valores propios es sustancial para que el sistema sea estable o no. Si los valores propios tienen parte real negativa implica que el sistema no saldrá de su vecindad local ante perturbaciones suficientemente pequeñas, en caso contrario las posibles perturbaciones se irán amplificando hasta que el sistema sea incapaz de regresar a su vecindad local cuando $t \to \infty$.

Al centrarse en la matriz de interacciones, May modeló el sistema mediante matrices aleatorias con entradas independientes e idénticamente distribuidas de media cero y varianza finita, lo que permite caracterizar el espectro del sistema linealizado. En el límite de gran dimensión, los valores propios se distribuyen de acuerdo con la *Ley Circular*, dando lugar a un umbral crítico que separa regímenes estables e inestables [4]. No obstante, este enfoque asume la existencia de un estado estacionario que no surge como solución de ecuaciones no lineales específicas, sino como una condición abstracta del equilibrio.

[1] También conocida como matriz de interacciones. Es considerada una red ecológica en donde cada renglón corresponde con una especie y las columnas representa su respectiva interacción con otras especies.

1.2. Planteamiento del problema

Las matrices de interacción de May se construyen con base en varias características: primero se establece que los valores de la diagonal se mantienen fijos en un valor real $-d$, estos valores funcionan como auto reguladores de cada una de las especies y es muy importante que sea un real negativo ya que se verá directamente reflejado en el soporte espectral. El resto de las entradas provienen de una distribución con media cero y varianza finita, y la forma del muestreo será con base en una probabilidad de conectividad C, considerando que el elemento a_{ij} no necesariamente es igual a su transpuesto a_{ji}.

El parámetro σ de la distribución de las interacciones cuantifica la intensidad típica de los acoplamientos entre las componentes del sistema y puede interpretarse como la escala de los pesos de los enlaces en una red de interacciones. Junto con el número de entes interactuantes N y la conectividad C, estos parámetros determinan la complejidad del sistema desde el punto de vista de su estabilidad dinámica. En particular, existen combinaciones de C y σ para las cuales el estado estacionario es estable, así como regímenes en los que pequeñas perturbaciones se amplifican. La variación de estos parámetros de control permite analizar las transiciones dinámicas del sistema, condiciones que se encuentran en detalle en el marco del modelo de May [4].

En sistemas de alta dimensión, el soporte espectral del operador linealizado se distribuye aproximadamente sobre un disco centrado en el término disipativo de la diagonal $-d$. El radio espectral depende de los parámetros de control del sistema y determina si el espectro cruza el eje imaginario, es decir, si aparecen valores propios con parte real positiva, lo cual es clave para la estabilidad del sistema. En este sentido, May introduce un parámetro crítico que delimita el umbral entre regímenes estables e inestables

$$\sigma < (NC)^{-1/2} \tag{1.1}$$

Al considerar el caso $d = 1$, la condición de estabilidad se reduce a $\sigma\sqrt{NC}$. Para un sistema de tamaño fijo N, esta desigualdad define un umbral que puede analizarse variando la conectividad C a σ fija, o bien variando σ a conectividad fija. Sin embargo, al aumentar el tamaño del sistema, la condición de estabilidad se vuelve más restrictiva. En el régimen $N \gg 1$, mantener la estabilidad requiere que la conectividad escale como $C \propto N^{-1}$ si σ se mantiene fija, o bien que la intensidad de las interacciones escale como $\sigma \propto N^{-1/2}$ para conectividad fija. Cabe notar que, debido a los distintos escalamientos en N, las transiciones asociadas a variaciones en C tienden a ser más abruptas que aquellas controladas por la intensidad de las interacciones, un aspecto que se retomará más adelante.

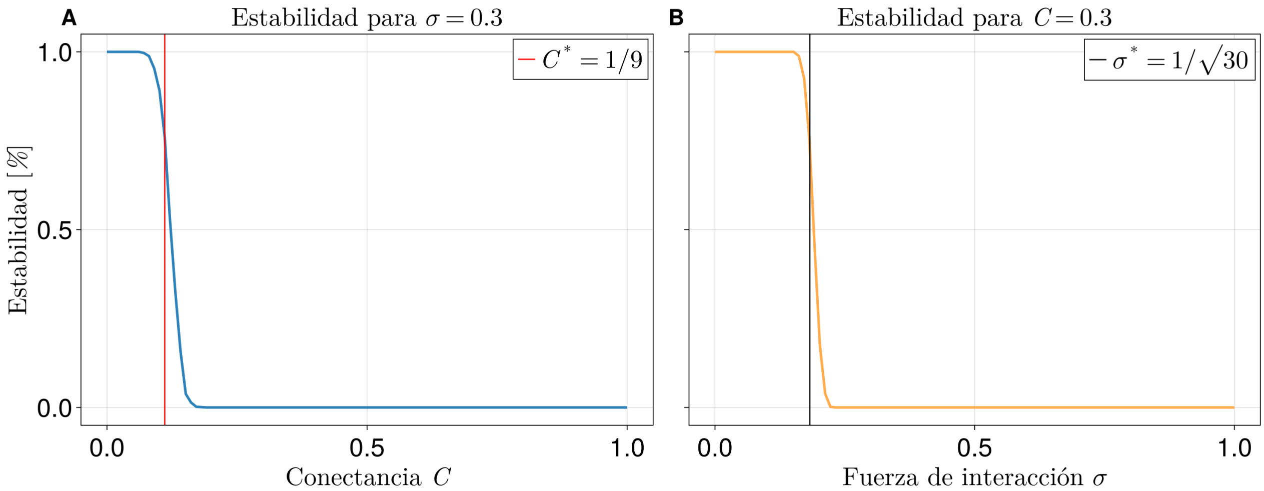

Figura 1.1: Transiciones de estabilidad con sistemas de May de tamaño $N = 100$. (**A**) Para la conectancia variable fijando $\sigma = 0.3$. (**B**) Para la intensidad de las interacciones variable fijando $C = 0.3$.

En términos cualitativos, el resultado central de May establece que la estabilidad de un sistema complejo emerge de un compromiso entre la conectividad de la red y la intensidad de las interacciones: sistemas con pocas conexiones pueden sostener interacciones fuertes sin perder estabilidad, mientras que redes densamente conectadas solo permanecen estables cuando las interacciones son suficientemente débiles.

Sin embargo, esta caracterización proviene de la construcción estadística del sistema linealizado, sin incorporar explícitamente la dinámica no lineal que conduce a los estados estacionarios sobre los cuales se evalúa la estabilidad. En contraste, esta tesis aborda esta limitación considerando explícitamente la dinámica no lineal de un sistema de Lotka–Volterra generalizado [2, p. 86], a partir del cual se identifica un estado estacionario bien definido y se analiza la estabilidad del sistema linealizado asociado.

El sistema de Lotka-Volterra generalizado considera un gran número de especies interactuantes $N \gg 1$. Este marco permite formular una dinámica no lineal bien definida y analizar como la estructura de las interacciones influye en la estabilidad de los estados estacionarios resultantes. Debido a la alta dimensionalidad del sistema, el estudio de su comportamiento dinámico y de las transiciones de estabilidad se apoya en herramientas computacionales.

En este contexto, se propone modelar la estructura de las interacciones a partir de redes aleatorias tipo Erdös–Rényi, con posibilidad de extender el análisis a otras topologías. Al incorporar pesos estadísticos a los enlaces, se obtiene una representación matricial de las interacciones caracterizada por una intensidad típica σ, una probabilidad de conectividad p y el tamaño del sistema N. Este enfoque permite estudiar como la estructura estadística de las interacciones influye en la estabilidad de los estados estacionarios del sistema dinámico y en la aparición de transiciones entre regímenes estables e inestables.

Finalmente, es importante señalar el alcance de este trabajo. El análisis desarrollado no pretende determinar un parámetro crítico en el sentido estricto del marco de May o de la mecánica estadística, sino proponer un criterio heurístico para identificar transiciones de estabilidad en sistemas de alta dimensión. Dicho criterio se construye a partir de una cantidad tipo *signal-to-noise ratio* (SNR), que permite caracterizar de manera efectiva la competencia entre la estructura promedio de las interacciones y sus fluctuaciones. En este sentido, los resultados presentados deben interpretarse como un primer acercamiento al estudio del parámetro de transición cuando la dinámica no lineal del sistema es considerada de forma explícita.

Bibliografía

[1] Elke Köppen, Ricardo Mansilla y Pedro Miramontes. “La interdisciplina desde la teoría de los sistemas complejos”. En: *Ciencias* 79 (jul. de 2005). Julio–septiembre. Disponible en línea, págs. 4-12.

[2] Robert May y Angela R McLean. *Theoretical ecology: principles and applications*. OUP Oxford, 2007.

[3] Robert M May. *Stability and complexity in model ecosystems*. Princeton university press, 2019.

[4] Robert M May. “Will a large complex system be stable?” En: *Nature* 238.5364 (1972), págs. 413-414.

[5] Octavio Miramontes. “Sistemas Complejos: entre el orden y el desorden”. En: *Revista Ciencia y Desarrollo* (2005).

[6] Mark Newman. *Networks*. Oxford university press, 2018.

[7] Márton Pósfai y Albert-László Barabási. *Network science*. Vol. 3. Citeseer, 2016.

[8] Santiago Ramírez. *Perspectivas en las teorías de sistemas*. Siglo XXI, 1999.

[9] Steven H Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering (studies in nonlinearity)*. Vol. 1. Westview press, 2001.