



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTABILIDAD Y TRANSICIONES DE FASE EN EL SISTEMA DE
LOTKA-VOLTERRA GENERALIZADO.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

RODRIGO VEGA VILCHIS

TUTOR

DR. SERGIO ANTONIO ALCALÁ CORONA



CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, 2024

A mis padres que siempre fueron insistentes en titularme.

A mi hermano, esperando ser siempre su buen ejemplo.

Agradecimientos

Resumen

Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	V
Introducción	XV
1. De lo simple a lo complejo	1
1.1. Revisión de sistemas lineales.	1
1.1.1. Puntos fijos y estabilidad del sistema.	3
1.1.2. Espacios fase	5
1.2. Sistemas no lineales	8
1.2.1. Modelo logístico	10
2. Apéndice	11
2.1. Demostraciones del texto	11
2.2. Códigos de gráficas	11

Índice de figuras

1.1. Espacios fase con eigenvalores reales. De izquierda a derecha se relacionan con las matrices del Ejemplo 2. La matriz R_1 corresponde con la gráfica de la izquierda, la matriz R_2 con la gráfica de en medio y la matriz R_3 con la gráfica de la derecha.	6
1.2. Espacios fase con eigenvalores complejos. De izquierda a derecha se relacionan con las matrices del Ejemplo 3. La matriz C_1 corresponde con la gráfica de la izquierda, la matriz C_2 con la gráfica de en medio y la matriz C_3 con la gráfica de la derecha. . . .	7

Índice de tablas

List of Algorithms

1. Generación de gráficas de espacios fase de 2×2 con eigenvalores reales. 12

Introducción

Capítulo 1

De lo simple a lo complejo

Dentro del marco de los sistemas complejos se manejan varias ramas muy interesantes que le dan su esencia, desde los sistemas dinámicos discretos, dinámica no lineal, teoría de redes complejas, termodinámica fuera de equilibrio, modelos basados en agentes, entre otras. Cada una de ellas aporta un valioso contenido al sistema complejo que se quiera estudiar y analizar dependiendo de sus componentes. Delimitar el área de los sistemas complejos aún resulta una labor complicada debido a su gran *diversidad*, sin embargo, se sabe de la existencia de ciertas características que todo sistema complejo comparte. Los sistemas complejos cuentan con entes: *conectados*, *interdependientes*, *dependientes del camino*, *emergentes* entre otros. El presente trabajo tiene como propósito mostrar al lector cada una de estas características con el objeto de estudio que se va a proponer como piedra angular.

Para llegar a conocer nuestra piedra angular primero será necesario delimitar las áreas que intervendrán en la discusión constante de este texto. Se ocupará un *sistema dinámico no-lineal* bajo el soporte de una *red compleja*. La Dinámica no lineal es la rama de los sistemas dinámicos continuos en donde el comportamiento del sistema no se rige por la suma de los comportamientos de sus descriptores. Por ejemplo, una neurona y la suma del comportamiento de las neuronas de un cerebro no puede explicar la emergencia de la consciencia. Por otro lado las redes complejas es la extensión de la *teoría de grafos* aplicada a escenarios comunes de la naturaleza y de la vida cotidiana, tales como redes ecológicas, redes sociales, redes comerciales etc. Su importancia radica en las propiedades que se le pueden extraer para interpretar información sobre la estructura de la red y de la red misma.

1.1. Revisión de sistemas lineales.

En los cursos de ecuaciones diferenciales de cuarto semestre¹ es obligado abordar el tema de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con el objetivo de explorar en un primer nivel el comportamiento de diversas cantidades que interactúan y evolucionan en el tiempo. Las ecuaciones

¹citar a Blanchard y Devaney

diferenciales son la herramienta para modelar fenómenos y su evolución en el tiempo; nos permite trazar soluciones que describen su trayectoria. Dicho de otra forma, son la herramienta para anticipar el comportamiento del fenómeno aunque en la vida real no es tan simple como suena.

Definición 1. Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales es una colección de n ecuaciones diferenciales interrelacionadas de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1(t), \dots, x_n(t))\end{aligned}\tag{1.1}$$

donde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lineal, continua y diferenciable. No está demás recordar que para que una función se considere lineal debe de cumplir para cualesquiera dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$ y para todo $k \in \mathbb{R}$ satisface:

1. $f(u + v) = f(u) + f(v)$
2. $f(ku) = kf(u)$

A este cumplimiento se le conoce como *principio de superposición* y el concepto se extiende cuando contamos con las soluciones del sistema lineal.

Al tratarse de un sistema lineal, resulta bastante oportuno expresarlo en términos de notación matricial, es decir, una multiplicación de una matriz cuadrada $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ por un vector columna que tiene a todas las funciones $x_i(t)$ lineales.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{11}x_1(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) \\ \vdots &\quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1(t) + \dots + a_{nn}x_n(t)\end{aligned} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}}_{\dot{X}(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_M \underbrace{\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}}_{X(t)}$$

en este caso las constantes de la matriz $a_{ij} \in M$ son parámetros que describen ciertas interacciones con respecto de las cantidades que intervienen en el sistema (1.1); estas interacciones son las responsables de la dinámica del sistema, es decir, de la manera en que evoluciona en el tiempo dependiendo de sus condiciones iniciales. Es conveniente poder contar con la matriz de coeficientes ya que por si sola nos servirá para darle solución al sistema lineal y para poder conocer la estabilidad del mismo, aún sin saber la solución general. Para ahondar en el tema de la estabilidad es necesario conocer los *puntos fijos* del sistema.

1.1.1. Puntos fijos y estabilidad del sistema.

También llamados puntos de equilibrio son aquellos en donde las soluciones de (1.1) permanecen constantes en el tiempo y dependiendo de su naturaleza² se establecerá si el punto y el sistema en cuestión es estable o inestable. Para poder hallarlos es necesario hacer cumplir el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1(t), \dots, x_n(t)) = 0 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1(t), \dots, x_n(t)) = 0 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1(t), \dots, x_n(t)) = 0 \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}}_{X_0} = 0$$

Para darle solución es necesario encontrar $X_0 \in \mathbb{R}^n$ que lo satisfaga; en dicho caso se establece que X_0 es el punto fijo del sistema. Los puntos fijos son clave para entender la estabilidad de (1.1), servirán de referencia para determinar si las soluciones tienden hacia el punto fijo o si divergen del mismo (o una combinación de ambas). Pero tan solo con determinarlo no es suficiente, para ello debemos manipular la matriz de coeficientes M para saber que tipo de punto fijo es. Para ello necesitamos hallar los *valores propios* de M , por tanto se necesita resolver

$$\det(M - \lambda I) = 0 \quad (1.2)$$

al encontrar las raíces del polinomio característico de grado n (dependiendo del tamaño del sistema), se obtendrá el conjunto de valores propios que por si mismos nos brindan demasiada información acerca de como se comportan las soluciones del sistema.

Proposición 1. *Un sistema lineal que tiene eigenvalores con parte real negativa siempre será estable, es decir, todas las soluciones tenderán hacia el punto fijo del sistema. Este punto de equilibrio del sistema con estas características es conocido como **Atractor**.*

Independientemente de la elección de las condiciones iniciales, las soluciones tenderán hacia el punto fijo cuando $t \rightarrow \infty$ y se mantendrá ahí siendo resistente ante perturbaciones. Notemos que en la ec. (1.2) es posible tener raíces reales como complejas, dependiendo de los coeficientes de M . Sin embargo aunque se tengan eigenvalores complejos, la dinámica seguirá siendo la misma: se tendrán soluciones que tienden o divergen (o combinación de ambas) del punto fijo, lo que cambia es la forma en que lo hacen. Cuando las soluciones del sistema lineal divergen del punto fijo, entonces se establece que el sistema es inestable y el punto fijo asociado se le conoce como **Repulsor**. Cualquier mínima perturbación que tenga la solución que esta ubicada en el punto fijo, hará que diverga. La combinación de los anteriores se les conoce como **Punto silla**; se dice que es combinación porque podría acercarse al punto silla pero al hacerlo en algún momento terminará divergiendo. Es considerado también como sistema inestable ya que para $t \rightarrow \infty$ cualquier solución no trivial se irá a ∞ .

²dictada por los elementos de la matriz de coeficientes M .

Ejemplo 1. Veamos un ejemplo sencillo para poder apreciar lo anterior, para ello se propone el siguiente sistema de 2×2 .

$$\dot{X}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{M_1} X(t)$$

Sacando su polinomio característico (1.2) tenemos los siguiente eigenvalores³

$$\begin{aligned} p_{M_1}(\lambda) &= \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \\ \lambda_1 &= 4 \quad \lambda_2 = 1 \end{aligned}$$

Según lo que establece la Proposición 1, este no es un sistema que sea estable ya que sus eigenvalores tienen parte real positiva. Para poder comprobarlo necesitamos determinar la solución general del sistema asociado a M_1 . Para ello es necesario encontrar los *eigenvectores* del sistema, es decir

$$\begin{aligned} M_1 \vec{v} &= \lambda \vec{v} \quad \Longleftrightarrow \quad (M_1 - \lambda I) \vec{v} = 0 \\ \vec{v}_{\lambda_1} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Teorema 1. Sea \vec{v}_0 un eigenvector de M una matriz asociada a un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con n eigenvalores $\Lambda = \{\lambda_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$. Entonces la función $X(t) = e^{\lambda t} \vec{v}_0$ es una solución del sistema $\vec{X}(t) = M X(t)$ ⁴.

Se dice que es una solución general porque podemos seleccionar cualquier $k \in \mathbb{R}$ de tal manera que sea un múltiplo del eigenvector asociado a λ_i . En ese caso obtenemos toda una familia de soluciones posibles. Por tanto para el sistema del Ejemplo 1 se tienen las siguientes soluciones

$$X_1(t) = k_1 e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_2(t) = k_2 e^t \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$$

Por tratarse de un sistema lineal, se cumple el principio de superposición lo cual significa que la solución general al sistema asociado a M_1 es

$$X(t) = k_1 e^{4t} \vec{v}_{\lambda_1} + k_2 e^t \vec{v}_{\lambda_2}$$

Se puede apreciar que para cualquiera de las soluciones del sistema asociado a M_1 , el límite de $X(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$ es infinito, por tanto las soluciones del Ejemplo 1 siempre van a diverger a infinito independientemente de la elección de condiciones iniciales. Cuando se trata de sistemas lineales, una solución y la suma de las soluciones siempre será solución del sistema, es decir, se pueden escribir como combinación lineal. Generalizando el concepto a un sistema de n ecuaciones lineales tenemos la siguiente solución general:

$$X(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_{\lambda_1} + k_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_{\lambda_2} + \dots + k_n e^{\lambda_n t} \vec{v}_{\lambda_n} \quad (1.3)$$

³para sistemas de 2×2 se tiene establecido un polinomio característico que se define como $p_M(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \text{Tr} A + \det A$

⁴ver demostración en el apéndice 2

Esta solución general también aplica perfectamente para el caso en donde se tienen eigenvalores complejos, solamente habría que descomponer las exponenciales con base en la relación de Euler, es decir, $e^{\lambda t}$ donde $\lambda = a \pm bi$ se descompone como $e^{at} (\cos bt + i \sin bt)$. Como solución se vería de la siguiente manera

$$X(t) = e^{at} (\cos bt + i \sin bt) \vec{v}_\lambda \quad (1.4)$$

la forma en que se comportarán las soluciones ya sea que convergan o divergan del punto fijo es mediante oscilaciones que crecen o decrecen en función de e^{at} . Llegando a este punto tenemos todos los elementos para darle soporte a nuestra Proposición 1; tanto la ecuación (1.3) como (1.4) se puede notar que si la parte real del eigenvalor del sistema es positivo, para $t \rightarrow \infty$ la exponencial también tiende a infinito y por lo tanto la solución lo hará. En contra parte, si la parte real del eigenvalor es negativa entonces la solución va a tender hacia donde los vectores propios se dirijan, particularmente hacia el punto fijo. Esto únicamente será válido si todos los eigenvalores del sistema tienen parte real negativa ya que si existe al menos uno que tenga parte real positiva eventualmente terminará divergiendo. Es lo que sucede con los puntos silla, quizás existan mayoría de eigenvalores con parte real negativa pero si existe al menos uno que tenga parte real positiva, eventualmente para tiempos largos la solución va a diverger. Para poder darnos una idea visual de lo que llamamos *atractores*, *repulsores* y *puntos silla* podemos acceder al espacio fase del sistema y ver de manera integral como se comportan las soluciones del sistema lineal.

1.1.2. Espacios fase

El espacio fase es considerado como la representación geométrica de las trayectorias posibles en un sistema dinámico, en el mismo se contemplan todas las condiciones iniciales posibles y todas las trayectorias posibles que emergen de las anteriores. Aquí mismo encontramos gráficamente los puntos fijos y podemos distinguirlos cualitativamente de que naturaleza son. Las técnicas analíticas descritas anteriormente nos sirven para conocer el comportamiento sin el uso del espacio fase, pero para sistemas de $n = 2, 3$ podemos acceder al espacio fase y ver como son sus trayectorias. En ese sentido para sistemas con $n > 3$ ecuaciones ya será imposible generar su visualización ya que cada uno de los ejes representa una de las cantidades del sistema.

En esta breve sección únicamente veremos diversos ejemplos de sistemas 2×2 con eigenvalores variados que nos muestren atractores, repulsores y puntos silla. Sin embargo se omitirán los cálculos de eigenvalores, eigenvectores y soluciones generales, únicamente se pretende mostrar al lector como podemos analizar los sistemas de manera cualitativa a través de sus espacios fase. Por último se dividirán entre espacios fase con eigenvalores reales y con eigenvalores complejos para tener una demarcación adecuada de ambos casos.

Ejemplo 2. Para la sección de espacios fase con eigenvalores reales vamos a considerar las siguientes matrices de coeficientes para $n = 2$

$$R_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad R_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Nótese que la R_3 es la misma que la M_1 del Ejemplo 1 la cual tiene ambos eigenvalores positivos y se había concluido que sus soluciones divergen del punto fijo con base en la solución general (1.3); además en la Figura (1.1) se puede observar la gráfica de la derecha que corresponde con R_1 como todas las soluciones divergen del punto fijo. Los eigenvalores de R_1 son respectivamente $\lambda_{1R_1} = -1$ y $\lambda_{2R_1} = -4$; ambos son negativos y cumplen con lo que estipula la Proposición 1 y se puede comprobar por medio de la solución general o el gráfico de la izquierda de la Figura (1.1) que las soluciones convergen al punto fijo. Para los eigenvalores de R_2 se tienen los siguientes eigenvalores $\lambda_{1R_2} = -3$ y $\lambda_{2R_2} = 2$; en este caso se tiene que una de las soluciones de la ec. (1.3) tratará de acercarse al punto fijo debido a la exponencial con $\lambda < 0$, sin embargo para $t \rightarrow \infty$ las soluciones divergerán a $\pm\infty$; a partir del gráfico de en medio de la Figura (1.1) se puede apreciar este comportamiento.

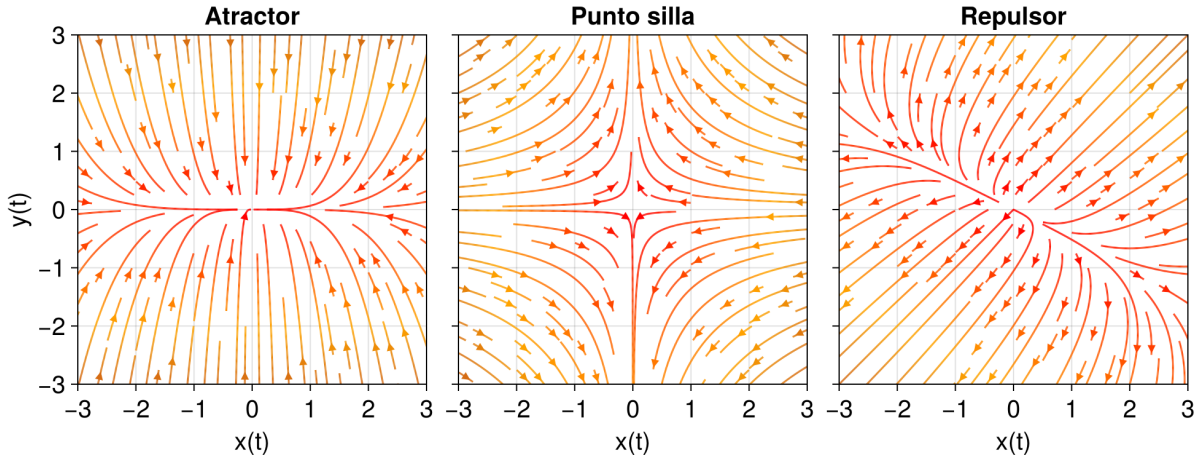


Figura 1.1: Espacios fase con eigenvalores reales. De izquierda a derecha se relacionan con las matrices del Ejemplo 2. La matriz R_1 corresponde con la gráfica de la izquierda, la matriz R_2 con la gráfica de en medio y la matriz R_3 con la gráfica de la derecha.

Ejemplo 3. Para el caso de los espacios fase con eigenvalores complejos se proponen las siguientes matrices de coeficientes para $n = 2$

$$C_1 = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Los eigenvalores para la matriz C_1 son $\lambda_{C_1} = -2 \pm 3i$, nuevamente notamos que la parte real de sus eigenvalores son negativas lo que significa que todas las soluciones tenderán hacia el punto de equilibrio independientemente de sus condiciones iniciales; en la gráfica de la izquierda de la Figura

(1.2) se puede apreciar este comportamiento. Los eigenvalores de C_2 son respectivamente $\lambda_{C_2} = \pm 2i$, en este caso la parte real es igual a cero lo que significa que las soluciones van a estar oscilando de un determinado valor a otro sin llegar a converger a ningún punto para $t \rightarrow \infty$. Únicamente puede cambiar la amplitud de las oscilaciones y esto dependerá de las condiciones iniciales que se impongan. Este es el comportamiento descrito por el *oscilador armónico simple* y sabemos que es considerado como ideal ya que en la naturaleza no se conocen cantidades que oscilen de manera perpetua y sin pérdida de energía. Por último los eigenvalores de C_3 son respectivamente $\lambda_{C_3} = 1 \pm 5i$, en este caso las soluciones divergen como se puede apreciar en la gráfica de la derecha de la Figura (1.2). La parte real de sus eigenvalores es positiva lo que indica dicho comportamiento para cualquier condición inicial en $t \rightarrow \infty$.

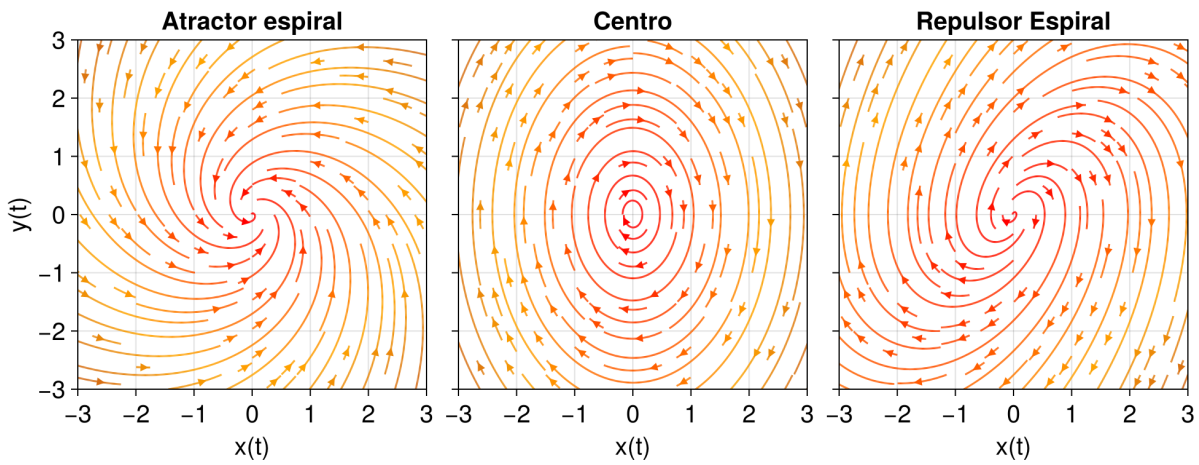


Figura 1.2: Espacios fase con eigenvalores complejos. De izquierda a derecha se relacionan con las matrices del Ejemplo 3. La matriz C_1 corresponde con la gráfica de la izquierda, la matriz C_2 con la gráfica de en medio y la matriz C_3 con la gráfica de la derecha.

Para terminar esta sección conviene remarcar el significado de la estabilidad e inestabilidad de los sistemas y sobre todo darle una interpretación física. Ya se ha visto que cuando un sistema es estable todas sus soluciones tienden hacia el punto fijo; la estabilidad radica en que para cualquier perturbación del sistema, este siempre regresará a su punto de equilibrio y permanecerá ahí para $t \rightarrow \infty$. A diferencia de los sistemas inestables, en donde si se encuentra en el punto de equilibrio cualquier mínima perturbación hará que nunca regrese a dicho estado y cambie totalmente su dinámica. En este sentido a los primeros sistemas se les denomina como *robustos* mientras que a los segundos se les denomina como *sensibles*. Para la dinámica de los centros, anteriormente nos referíamos a oscilaciones perpetuas que no tienden o divergen de ningún punto de equilibrio. El sistema que representa este comportamiento por excelencia es el péndulo simple considerado como sistema ideal cuya solución se encuentra en términos de senos y cosenos.

Para ejemplificar los puntos de equilibrio estables o inestables pensemos en un péndulo de una vara con una masa en uno de sus extremos; un punto fijo atractor es para cuando el péndulo apunta hacia abajo ya que cualquier perturbación sea pequeña o grande hará que regrese a su estado de equilibrio. En contraparte si conseguimos que el péndulo permanezca estable apuntando hacia arriba, cualquier mínima perturbación hará que nunca regrese a ese estado de equilibrio. Para este ejemplo en particular, si perturbamos el estado de equilibrio inestable terminará posicionándose en el estado de equilibrio estable para algún tiempo considerablemente.

1.2. Sistemas no lineales

El enfoque principal de este trabajo es en sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales; ha sido pertinente abordar el tema de los sistemas lineales para poder introducir conceptos importantes que serán de utilidad para poder analizar sistemas no lineales mediante técnicas que se abordarán más adelante. Tal y como el nombre lo dice, un sistema no lineal es aquel en el que el conjunto de ecuaciones de (1.1) es no lineal; significa que las ecuaciones que lo componen tienen términos no lineales tales como funciones trigonométricas, exponenciales, cuadradas, cúbicas etc. Esta característica quita la posibilidad de poder expresarlo en términos de una transformación lineal en su forma matricial y como consecuencia el principio de superposición ya no se cumple. Esto implica que para dados dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$ y para todo $k \in \mathbb{R}$ se tiene lo siguiente

$$f(k(u + v)) \neq k(f(u) + f(v))$$

Y se va a extender hasta las soluciones del mismo sistema: ahora la suma de sus soluciones no será solución del mismo. Yendo en esta dirección, aunque el *Teorema de existencia y unicidad* pueda extenderse hasta ciertas ecuaciones no lineales, éstas deben de cumplir sus hipótesis para que pueda aplicar⁵. En otras palabras, solo un determinado número de formas de ecuaciones podrán satisfacer la unicidad de la solución, en el resto de casos tendrán la posibilidad de tener múltiples soluciones y más aún si se trata de un sistema de ecuaciones como el que iremos a analizar más adelante.

En una ecuación no lineal se tiene la particularidad de que las variables dependientes y sus derivadas aparecen de forma no lineal, esto genera dependencias complejas que difícilmente se pueden simplificar lo que provoca que puedan existir las múltiples soluciones de la misma. En esta dirección, las ecuaciones no lineales producen comportamientos impredecibles al mismo tiempo que son sensibles ante condiciones iniciales lo que se resume en el amplio concepto conocido como *Caos*. Normalmente

⁵También conocido como Teorema de Picard-Lindelöf. Se deben cumplir las siguientes hipótesis para que se pueda aplicar el teorema: se considera $f : \Omega \subseteq (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde Ω es un conjunto abierto y f una función continua y localmente Lipschitz con respecto de x ; en caso contrario la ecuación no lineal o el conjunto de ecuaciones no lineales podrían tener soluciones múltiples. [Referenciar el teorema con demostración]

de las ecuaciones no lineales emergen comportamientos caóticos aún tratándose de sistemas deterministas. Explorar las propiedades caóticas de sistemas no lineales es una propuesta interesante para investigar.

Por lo visto, resolver ecuaciones no lineales o un sistema de ecuaciones no lineales puede ser hasta imposible si nos atrevemos a hacerlo de manera analítica. El famoso problema de los 3 cuerpos fue aquel que pudo paralizar a los científicos durante aproximadamente 200 años porque no se hallaba una solución concreta y aunque al final Henri Poincaré se le consideró como aquel que le dio respuesta⁶: dicha respuesta no fue una solución analítica que mostraba las posiciones de los planetas en función del tiempo, sino más bien estableció que mínimas variaciones en el sistema podrían desencadenar grandes y radicales cambios a largo plazo. Con esta conclusión se comienza a establecer la conocida *Teoría del Caos* que irá floreciendo durante el siguiente siglo hasta nuestros días.

Debido a que resulta imposible o muy complejo resolver ecuaciones no lineales de forma analítica se opta por recurrir a técnicas computacionales de integración numérica para poder obtener una aproximación de la solución del sistema no lineal y de esta manera conocer la dinámica que produce. La fidelidad de las aproximaciones numéricas depende de varios factores tales como: el método numérico empleado, el paso de integración, el tipo de ecuación o ecuaciones, condiciones iniciales etc.

Para ecuaciones diferenciales ordinarias se tienen dos métodos principales que se enseñan en los cursos de Física Computacional e inclusive en algunos cursos de Ecuaciones Diferenciales 1: el método de *Euler* y el método de *Runge-Kutta* de cuarto orden⁷. El primero suele ser fácil de implementar debido a su simpleza sin embargo no llega a ser muy preciso cuando se trata de ecuaciones no lineales ya que comete errores de truncamiento grandes. El método de Euler es considerado de primer orden e implica que el error local es proporcional al cuadrado del tamaño del paso de integración $O(h^2)$ mientras que para el caso de Runge-Kutta que es de cuarto orden, su error es proporcional a la quinta potencia del paso de integración $O(h^5)$.

Aunque RK4 es mucho más preciso que Euler también dependerá sustancialmente del paso de integración que se elija, entre más fino sea dicho paso será más precisa la solución. Sin embargo para el caso de sistemas no lineales es conveniente utilizar RK4 ya que al exhibir comportamientos caóticos es probable que la solución aproximada diverga de la solución real debido a las pequeñas variaciones que se pueden presentar. En diversas aproximaciones numéricas los errores se acumulan con el tiempo y especialmente llega a ser problemático si se está integrando algún sistema no lineal ya que los errores en

⁶citar dicha respuesta

⁷poner referencia directa del libro.

las primeras iteraciones pueden crecer rápidamente afectando la fidelidad de la solución aproximada. RK4 es un método que se considera *convergente* ya que a medida que el paso de integración $h \rightarrow 0$, la aproximación se asemeja más a la solución real y gracias a ello se ha escogido este método como integrador estrella del sistema que se irá a analizar.

Para fines prácticos se define a continuación la regla que deben de cumplir cada uno de los métodos propuestos. El método de Euler sigue la siguiente correspondencia

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_n, t_n) + O(h^2) \quad (1.5)$$

Mientras que el método de Runge-Kutta de orden 4 sigue la siguiente correspondencia.

$$\begin{aligned} Y_1 &= y_n \\ Y_2 &= y_n + \frac{h}{2}f(Y_1, t_n) \\ Y_3 &= y_n + \frac{h}{2}f\left(Y_2, t_n + \frac{h}{2}\right) \\ Y_4 &= y_n + hf\left(Y_3, t_n + \frac{h}{2}\right) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}\left[f(Y_1, t_n) + 2f\left(Y_2, t_n + \frac{h}{2}\right) + 2f\left(Y_3, t_n + \frac{h}{2}\right) + f(Y_4, t_n)\right] + O(h^5) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Se pueden consultar ambos métodos y sus deducciones en las siguientes bibliografías [Poner CITAS]. Más adelante se hablará sobre su implementación computacional.

1.2.1. Modelo logístico

Capítulo 2

Apéndice

2.1. Demostraciones del texto

Se anexa la demostración al **Teorema 1** [1]:

Demostración. Se propone la función general $X(t) = e^{\lambda t} \vec{v}_0$. Entonces derivamos la función con respecto del tiempo

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= \lambda e^{\lambda t} \vec{v}_0 \\ &= e^{\lambda t} (\lambda \vec{v}_0) \\ &= e^{\lambda t} (A \vec{v}_0) \\ &= A(e^{\lambda t} \vec{v}_0) \\ &= AX(t)\end{aligned}$$

□

2.2. Códigos de gráficas

El trabajo presente se ha realizado bajo algoritmos, funciones y sintaxis del lenguaje Julia. En esta sección como en otras se estará anexando código en referencia a elementos presentes en el cuerpo de la tesis. Se anexa código de las figuras de los espacios fase de la sección (1.1.2).

El bloque de código (1) funciona para generar la Figura (1.1); sin embargo se puede modificar convenientemente para poder generar las Figuras (1.2) y (??), únicamente hay que definir las respectivas funciones del sistema para que se pueda generar el campo de direcciones apropiado.

Algorithm 1: Generación de gráficas de espacios fase de 2×2 con eigenvalores reales.

Data: Matrices de coeficientes.

Result: Espacios fase.

1 Inicializar el proceso;

```
using CairoMakie
```

```
xlim = (-3,3)           #Se establecen los límites que abarcarán las gráficas
```

```
ylim = (-3,3)
```

```
fSilla(X) = Point2(-3X[1],2X[2]) #Se definen las matrices de coeficientes
```

```
fAtractor(X) = Point2(-X[1],-4X[2]) #de los sistemas lineales
```

```
fRepulsor(X) = Point2(2X[1]+2X[2],X[1]+3X[2])
```

```
titles = ["Atractor","Punto silla", "Repulsor"] #Títulos para cada gráfica
```

```
functions = [fAtractor,fSilla,fRepulsor] #Arreglo de funciones para poder iterarlas
```

```
n = length(functions) #más adelante
```

```
#Se definen los colores de las líneas de flujo del espacio fase
```

```
cmaps = [[:red,:orange,:brown],[[:red,:orange,:brown],[[:red,:orange,:brown]]
```

```
#1. Se define la figura en sus dimensiones y el tamaño de letra.
```

```
#2. Se definen los ejes y la información que llevará con ellos.
```

```
#3. Se definen las líneas de campo
```

```
#4. Escondemos las  $y(t)$  para la figura de en medio y la de la derecha
```

```
#5. Se establecen los límites de cada gráfico
```

```
fig = Figure(size = (1000, 400), fontsize = 20)
```

```
axs = [Axis(fig[1, i], xlabel = "x(t)", ylabel = "y(t)", title = titles[i],
```

```
aspect = 1, backgroundcolor = :white) for i in 1:n]
```

```
[streamplot!(axs[i], functions[i], -4 .. 4, -4 .. 4, colormap = cmaps[i],
```

```
gridsize = (32, 32), arrow_size = 9) for i in 1:n, density = 0.1]
```

```
[hideydecorations!(axs[i], grid = false, ticks = false) for i in 2:n]
```

```
[limits!(axs[i], xlim...,ylim...) for i in 1:n]
```

```
fig           #Se imprime la figura
```

Ejecutar el código y obtener el resultado;
