Capítulo 1

Demostración del criterio espectral de estabilidad.

En este apéndice se presenta la demostración completa de la Proposición 1.

Proposición 1. *Sea* $A = -dI + B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$*, donde* $d > 0$ *y* B *es una matriz aleatoria cuyas entradas fuera de la diagonal son independientes, con media cero, varianza* σ^2 *y probabilidad de conexión* C*. Entonces, cuando* $n \to \infty$*, el radio espectral de* B *satisface*

$$\rho(B) \approx \sigma\sqrt{NC}$$

En consecuencia, el sistema lineal $\dot{x} = Ax$ *es estable con alta probabilidad si*

$$\sigma\sqrt{NC} < d$$

Demostración. Otro modo de entender el enunciado de la proposición 1 es que el parámetro descrito define la posición del $\max(|\lambda_A|)$, que puede ser negativo, cero o positivo. Por lo tanto, éste será el elemento central de esta demostración. Ahora se utilizará el *Teorema Circular de Girko* [**girko1985circular**] el cual muestra la forma de obtener el radio espectral de matrices aleatorias como las de May. El teorema establece que para cualquier matriz $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ con entradas independientes e idénticamente distribuidas de media cero y varianza finita, y al considerar la siguiente matriz re-escalada[1]

$$\hat{B} = \frac{1}{\sqrt{n}}B$$

los valores propios quedan distribuidos en un disco centrado en el origen con radio σ: $D(0, \sigma)$. Dicho de otro modo el resultado dice que el radio espectral de la matriz $\hat{B}$ es

$$\rho(\hat{B}) = \max|\lambda_{\hat{B}}| = \sigma$$

[1]Conocida como matriz de Ginibre.

El hecho de realizar el re-escalamiento es para asegurar que este radio tenga un tamaño finito para cuando $n \to \infty$. Para llegar a este resultado se utilizan argumentos probabilísticos; primero se considera un renglón arbitrario de la matriz $\hat{B}$: $r = \frac{1}{\sqrt{n}}(b_{i1}, ..., b_{in})$ y se determina su norma cuadrada

$$\|r\|^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{N} b_{ij}^2$$

cada elemento b_{ij}^2 tiene valor esperado σ^2 implicando que la esperanza de la norma cuadrada es $\mathbb{E}[\|r\|^2] = \frac{n\sigma^2}{n} = \sigma^2$ y su varianza es $\mathrm{Var}(\|r\|^2) = \frac{n}{n^2}(3\sigma^4 - \sigma^4) = \frac{2\sigma^4}{n}$ teniendo en cuenta el cuarto momento la distribución normal[2]. De aquí sigue utilizar el *Teorema Central del Límite* para mostrar que existe una variable estandarizada que esta en función de $\|r\|^2$, $\mathbb{E}[\|r\|^2]$ y $\sqrt{\mathrm{Var}(\|r\|^2)}$, y converge a una distribución normal estándar $\mathcal{N}(0,1)$ cuando $n \to \infty$, la cual es equivalente a la siguiente aproximación

$$\|r\|^2 \approx \sigma^2 + \frac{\eta}{\sqrt{n}}$$

donde $\eta \sim \mathcal{N}(0, 2\sigma^4)$. Por tanto $\|r\|^2$ converge a una distribución normal con valor esperado σ^2 y fluctuaciones de orden $1/\sqrt{n}$. En este punto resta determinar la norma euclidiana del renglón arbitrario

$$\|r\| = \sqrt{\sigma^2 + \frac{\eta}{\sqrt{n}}} = \sigma\sqrt{1 + \frac{\eta}{\sigma^2\sqrt{n}}}$$

[2]Utilizando la siguiente fórmula para los momentos de orden n de $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$:

$$\mathbb{E}[X^n] = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es impar} \\ \sigma^n (n-1)!!, & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

realizando la expansión en Series de Taylor alrededor del cero de $\sqrt{1+\varepsilon} = 1 + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{8} + \cdots$ se tiene

$$\|r\| \approx \sigma + \frac{\eta}{2\sigma\sqrt{n}}$$

Por lo tanto se logra observar que el valor esperado de $\|r\|$ es σ y sus fluctuaciones son de orden $1/\sqrt{n}$ lo que implica que para cuando $n \to \infty$, la norma euclidiana será $\|r\| = \sigma$. Sin embargo cuando se considera la matriz B sin re-escalar, entonces existe un factor $\sqrt{n}$ en el valor esperado de $\|r\|$ con fluctuaciones de orden $1/\sqrt{n}$, entonces cuando $n \to \infty$ la norma será

$$\|r\| = \sigma\sqrt{n}$$

y en consecuencia el disco irá creciendo en función de n. Si además de lo anterior se considera que las entradas de la matriz B siguen a una probabilidad de existencia C tal como la variable aleatoria (**??**) de la proposición **??** entonces al aplicar el mismo procedimiento de antes se llega al siguiente resultado

$$\|r\| = \sigma\sqrt{nC} \tag{1.1}$$

¿Por qué se utiliza la norma euclidiana como referente para el radio espectral de las matrices aleatorias? Si se considera un vector unitario arbitrario $\mathbf{u}$, es de interés saber cual es el efecto que ejerce la matriz $\hat{B}$ sobre dicho vector. Para ello extendemos los procedimientos anteriores pero ahora enfocados a como será el vector $\hat{B}\mathbf{u}$ en términos de su magnitud, entonces hay que encontrar nuevamente el valor esperado de $\|\hat{B}\mathbf{u}\|$ y sus fluctuaciones. Se define el producto escalar del renglón arbitrario de $\hat{B}$ por $\mathbf{u}$

$$S_i = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} u_j \tag{1.2}$$

será conveniente conocer su valor esperado de $|S_i|^2$ para determinar los próximos cálculos, entonces:

$$\mathbb{E}[|S_i|^2] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}[b_{ij}^2]|u_j|^2 = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \|\mathbf{u}\|^2$$

Nuevamente se utiliza el *Teorema Central del Límite* para conocer cual es el valor esperado de $\|\hat{B}\mathbf{u}\|^2$ con sus fluctuaciones, para posteriormente conocer los de $\|\hat{B}\mathbf{u}\|$

$$\mathbb{E}[\|\hat{B}\mathbf{u}\|^2] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[|S_i|^2] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma^2}{n} \cdot \|\mathbf{u}\|^2 = \sigma^2$$

resultado equivalente al valor esperado de la norma cuadrada del renglón arbitrario $\mathbb{E}[\|r\|^2]$. Ahora se calcula el segundo momento de $|S_i|^2$ para poder armar el camino para determinar la varianza de $\|\hat{B}\mathbf{u}\|^2$

$$\mathbb{E}\left[|S_i|^4\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[b_{ij}^4\right] |u_j|^4 = \frac{3\sigma^4}{n^2} \cdot \left(\|\mathbf{u}\|^2\right)^2$$

esto indica que la varianza del producto escalar (1.2) al cuadrado es

$$\mathrm{Var}(|S_i|^2) = \frac{1}{n^2}(3\sigma^4 - \sigma^4) = \frac{2\sigma^4}{n^2}$$

Entonces la varianza de la norma cuadrada es

$$\mathrm{Var}(\|\hat{B}\mathbf{u}\|^2) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(|S_i|^2) = \frac{2\sigma^4}{n}$$

resultado que también es equivalente a la varianza de la norma cuadrada del renglón arbitrario $\mathrm{Var}(\|r\|^2)$. Con estos elementos y con base en los procedimientos mostrados anteriormente se concluye que la norma $\|\hat{B}\mathbf{u}\|$ tiene un valor esperado σ con fluctuaciones de orden $1/\sqrt{n}$. Por lo tanto el efecto que ejerce la matriz $\hat{B}$ sobre cualquier vector unitario es la de estirarlos en función de σ, ya sea que $\sigma > 1$, $\sigma < 1$ ó dejarlos invariantes en magnitud con $\sigma = 1$.

Considerando en particular la ecuación de valores propios $\hat{B}\vec{v} = \lambda\vec{v}$, si normalizamos al vector propio asociado entonces la norma euclidiana será

$$\|\hat{B}\mathbf{v}\| = |\hat{\lambda}| \leq \sigma + \mathcal{O}(1/\sqrt{n})$$

donde $|\hat{\lambda}| = \frac{|\lambda|}{\|\vec{v}\|}$ y nótese que es un vector propio arbitrario, esto implica que todos los vectores propios son estirados o contraídos en diversas direcciones pero restringidos al valor del radio espectral σ, es decir, que el máximo valor/vector propio solo podrá tener magnitud σ. Al considerar la matriz B sin re-escalar y tomando el resultado (1.1), se concluye finalmente que el radio espectral de esta matriz es

$$\rho(B) = \sigma\sqrt{nC}$$

y es más grande conforme $n \to \infty$. Ahora como último paso de esta prueba hay que considerar a las matrices de May, que son idénticas a la matriz B solo que con el valor $-d$ en la diagonal. Eso significa que A tendrá una distribución uniforme de valores propios alrededor de $-d$, entonces el radio espectral en este caso será

$$\rho(A) = -d + \sigma\sqrt{nC}$$

y de aquí se podrá definir la relación de May para delimitar la estabilidad de sus sistemas

$$\sigma\sqrt{nC} < d \tag{1.3}$$

mientras el radio espectral sea menor al valor absoluto de la diagonal, se podrá garantizar que el sistema es estable, y cuando $n \to \infty$ las fluctuaciones tienden a cero lo cual hace cada vez más estrecho el radio y abrupta la caída de estabilidad. $\square$