

Al analizar las transiciones dinámicas en función de σ se obtiene un comportamiento análogo, aunque con matices importantes. En este caso se muestran las transiciones para distintos valores fijos de la conectividad C . El umbral de estabilidad continúa estando controlado por el radio espectral, ahora dado por el valor crítico $\sigma_c = d/\sqrt{NC}$. A diferencia de las transiciones en función de C , las mostradas en la Figura (1 A) no presentan una separación tan marcada entre distintos valores de conectividad. En particular para conectividades grandes las curvas tienden a concentrarse y sus diferencias se vuelven menos perceptibles.

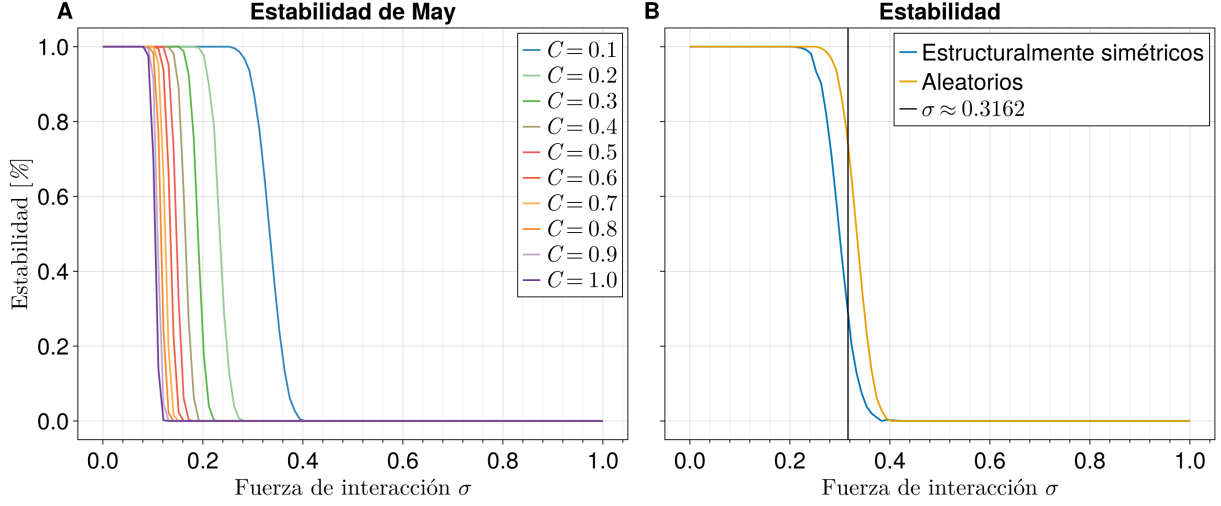


Figura 1: Transición dinámica en función de σ **(A)** Se consideran sistemas de May aleatorios con 3000 simulaciones por cada configuración. **(B)** Caso particular para $C = 0.1$; se consideran las diferencias entre sistemas de soporte simétrico y puramente aleatorios.

Este comportamiento se explica por la dependencia $\sigma_c \propto 1/\sqrt{C}$: al aumentar C , las variaciones relativas en el umbral crítico disminuyen, produciendo una compresión progresiva de las interacciones en el eje horizontal. En contraste con el caso C , su dependencia es $C \propto 1/\sigma^2$, y por esa razón se observa una separación mayor. En la Figura (1 B) se presenta la comparación entre sistemas con soporte

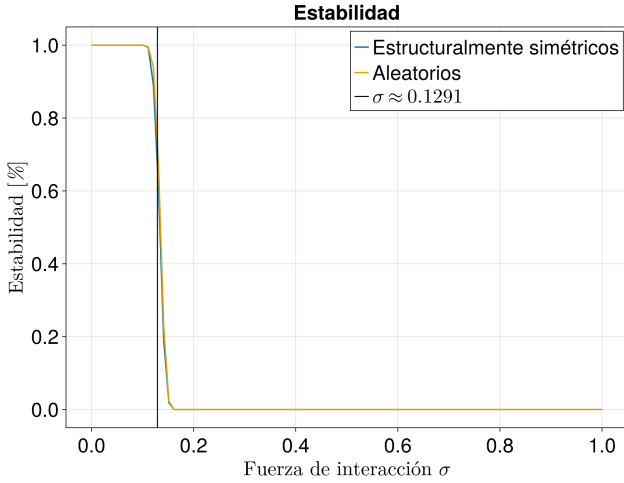


Figura 2: Variación de la transición entre sistemas estructuralmente simétricas y puramente aleatorios. Se considera el valor de la conectancia $C = 0.6$.

hasta volverse marginal en el régimen casi completamente conexo.

Para finalizar esta sección se analizan las diferencias conceptuales entre las transiciones en función de C y de σ . En ambos casos el radio espectral $R = \sigma\sqrt{NC}$ constituye el parámetro efectivo que controla el umbral de estabilidad.

estructuralmente simétrico y puramente dirigido para una conectividad $C = 0.1$. En este régimen de baja conectividad se observa una desviación sutil entre ambos escenarios, lo que sugiere que la estructura del soporte aún influye en la transición. En la Figura (2), correspondiente a $C = 0.6$, la discrepancia se vuelve prácticamente imperceptible. Esto indica que, para un tamaño N fijo y conectividades elevadas, el comportamiento crítico de ambos sistemas converge. En otras palabras, al aumentar la densidad de la red, la influencia de la simetría estructural sobre la transición dinámica se atenúa progresivamente.

No obstante, variar C o σ implica recorrer el espacio paramétrico desde perspectivas distintas. Cuando se fija σ y se varía la conectividad C , se interpreta que la magnitud típica de las interacciones permanece constante mientras se agregan enlace en la red ponderada, transitando desde un régimen disperso hasta un densamente conectado. La sensibilidad del radio espectral frente a variaciones en C esta dada por

$$\frac{\partial R}{\partial C} = \frac{\sigma\sqrt{N}}{2\sqrt{C}}$$

lo que muestra que el sistema es particularmente sensible en el régimen de baja conectividad. Dado que el barrido de conectividades se realiza con incrementos uniformes $\Delta C = 0.01$, el cambio inducido en el radio espectral puede aproximarse por

$$\Delta R \approx \frac{\partial R}{\partial C} \cdot \Delta C$$

Esto muestra que, para valores pequeños de C , incrementos discretos iguales producen variaciones relativamente grandes en R , mientras que en el régimen de alta conectividad el efecto es considerablemente menor. En consecuencia, cuando el umbral crítico se localiza en regiones de baja conectividad, la transición observada puede concentrarse en pocos puntos del barrido paramétrico, reforzando su carácter abrupto. Al fijar la conectividad C y variar σ , el tamaño efectivo del sistema permanece constante mientras que la magnitud típica de las interacciones recorre el intervalo $[0, 1]$. La sensibilidad del radio con respecto de σ ahora viene dada por

$$\frac{\partial R}{\partial \sigma} = \sqrt{NC}$$

A diferencia del caso en función de C , esta derivada es constante para valores fijos de N y C , lo que implica que incrementos discretos uniformes $\Delta\sigma$ producen variaciones uniformes en el radio espectral

$$\Delta R \approx \sqrt{NC} \cdot \Delta\sigma$$

En consecuencia, el crecimiento de R es proporcional a σ y el cruce del umbral crítico ocurre de manera más regular, sin la amplificación observada en el régimen de baja conectividad. Esto explica porque las transiciones en función de σ se perciben más suaves en comparación con aquellas obtenidas al variar C . Si se considera además la dependencia respecto del tamaño del sistema,

$$\frac{\partial R}{\partial N} = \frac{\sigma\sqrt{C}}{2\sqrt{N}}$$

se observa que la sensibilidad absoluta del radio espectral frente a variaciones N decrece como $N^{-1/2}$. En el límite asintótico, las variaciones relativas inducidas por cambios en el tamaño del sistema se atenúan progresivamente, las fluctuaciones disminuyen y se va reforzando la concentración del umbral crítico. El marco anterior describe de manera consistente el comportamiento de sistemas puramente dirigidos, donde el radio espectral actúa como parámetro efectivo que organiza la transición de

estabilidad. Sin embargo, en presencia de soporte simétrico, la geometría del espectro altera esta correspondencia.

Aunque el radio espectral continúa delimitando el cruce del eje real, la forma de la transición observada ya no queda completamente caracterizada por $R = \sigma\sqrt{NC}$. En este escenario, las sensibilidades paramétricas derivadas anteriormente resultan insuficientes para explicar el ensanchamiento del régimen crítico, evidenciando que intervienen propiedades espectrales adicionales más allá del borde del espectro.

Con el fin de verificar si el radio espectral constituye un parámetro de control universal, se reescalan las transiciones en términos de $R = \sigma\sqrt{NC}$. En particular, en la Figura (3) se presentan las transiciones dinámicas al variar C fijando $\sigma = 0.2$, así como al variar σ con $C = 0.2$. En ambos escenarios, el caso puramente dirigido colapsa consistentemente alrededor del valor crítico del radio espectral, mostrando que la estabilidad depende esencialmente de R . En contraste, el sistema estructuralmente simétrico exhibe desviaciones residuales respecto de este colapso: aunque el umbral se mantiene próximo al valor crítico, la forma de la transición no coincide completamente bajo el reescalamiento.

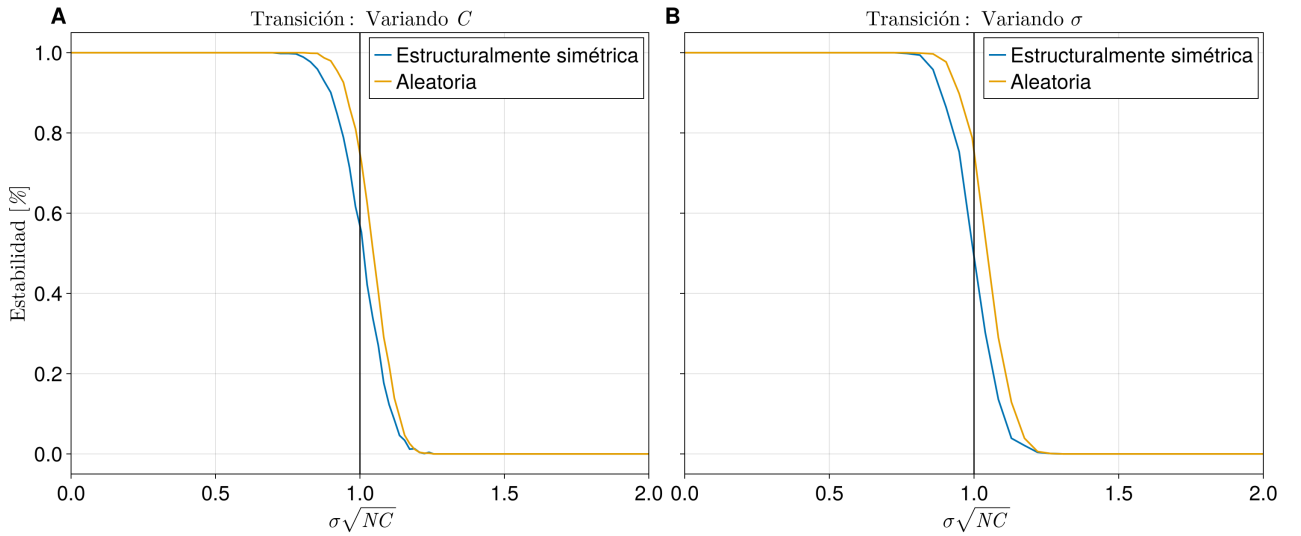


Figura 3: Re-escalamiento del eje x para visualizar las transiciones de la conectancia C y magnitud típica de las interacciones σ . Para este caso particular se escogió $\sigma = C = 0.2$.

En contraste, en la Figura (4) se presentan las mismas transiciones al fijar σ y C en el valor 0.6. En el caso (A), el caso estructuralmente simétrico exhibe una desviación notable respecto del colapso observado en el sistema puramente dirigido. Esto indica que, si bien R continúa siendo un descriptor relevante, no captura por completo los efectos geométricos inducidos por la estructura del soporte.

Por lo tanto se confirma que, en sistemas estructuralmente simétricos, el radio espectral no constituye un parámetro de control universal en el mismo sentido que en el caso dirigido. La transición no

está determinada únicamente por el borde del espectro, sino que también de la distribución interna de los valores propios, cuya geometría modifica el régimen crítico.

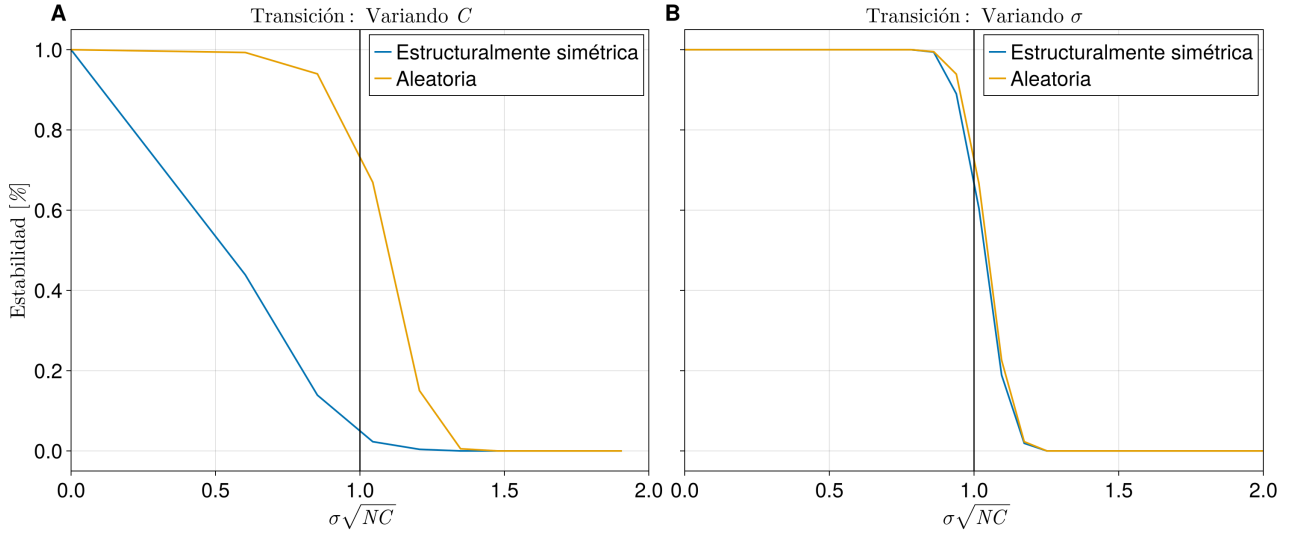


Figura 4: Re-escalamiento del eje x para visualizar las transiciones de la conectancia C y la fuerza promedio de las interacciones σ . Para este caso particular se escogió $\sigma = C = 0.6$. Se consideran matrices de puramente aleatorias y estructuralmente simétricas.

El capítulo anterior motiva al actual para presentar los resultados de la dinámica que produce el sistema de Lotka-Volterra generalizado (??) bajo los coeficientes de interacción de la matriz de incidencias (??) para posteriormente linearizarlo mediante la Matriz Jacobiana del sistema (??). En este capítulo se presentarán los resultados que produce cada etapa del proceso, así como sus características. El objetivo será dar respuesta a cada una de las hipótesis del planteamiento del problema, sobre todo indagar las condiciones de estabilidad del sistema en términos de Λ y reforzar la idea consecuente de la proposición ?? en la que se detallaba que el radio espectral (??) no necesariamente se ajusta a la estabilidad del sistema de Lotka-Volterra.

Se consideraron 3 conjuntos diferentes de simulaciones: sistemas para 25, 50 y 100 especies. Para explorar los resultados se dejaron fijos la mayor cantidad de parámetros que hay en (??) con el fin de observar cambios significativos con la menor cantidad de fluctuaciones posibles; únicamente se han variado las matrices de incidencias Λ que dependen de p y σ , y al igual que en las transiciones de May y semi Allesina se varió una de estas cantidades mientras que la otra permaneció fija. En todas las simulaciones la tasa de crecimiento se dejó fija en $r_i = 2$ y la capacidad de carga en $K_i = 5$ para cada especie del sistema. Al integrar numéricamente las ecuaciones con RK4 se escogió un intervalo de tiempo entre 0 y 50 con un paso de integración de $h = 0.01$.

Además de estos parámetros, siempre se inicializó cada simulación con la condición inicial $\vec{x}_0 = \vec{1}$ y se consideraron dos escenarios: Matrices de incidencias estructuralmente simétricas y puramente aleatorias¹, tal y como se visualizó al final del capítulo anterior. En el apéndice (??), el lector puede darse una idea de como se realizó el proceso de las simulaciones. En cada escenario se presentó cierta cantidad de ruido en las gráficas de estabilidad, por lo que el número de simulaciones fue establecido en función de la disminución de dicho ruido, siguiendo la ley de los grandes números.

¹Solo aplica para $N = 100$, el resto de casos se consideraron Λ estructuralmente simétricas.