



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ESTABILIDAD Y TRANSICIONES DE FASE EN EL SISTEMA DE
LOTKA-VOLTERRA GENERALIZADO.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

RODRIGO VEGA VILCHIS

TUTOR

DR. SERGIO ANTONIO ALCALÁ CORONA



CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, 2024

A mis padres que siempre fueron insistentes en titularme.

A mi hermano, esperando ser siempre su buen ejemplo.

Agradecimientos

Resumen

Índice general

| | |
|---|-----------|
| Agradecimientos | III |
| Resumen | V |
| Introducción | XIII |
| 1. De lo simple a lo complejo | 1 |
| 1.1. Revisión de sistemas lineales. | 1 |
| 1.1.1. Puntos fijos y estabilidad del sistema. | 3 |
| 1.1.2. Espacios fase | 5 |
| 1.2. Sistemas no lineales | 8 |
| 1.2.1. Modelo logístico | 10 |
| 1.2.2. Modelo presa-depredador | 12 |
| 2. ¿Será estable un gran sistema complejo? | 17 |
| 2.0.1. Sistema de competencia de especies generalizado para N especies. | 21 |
| 3. Apéndice | 25 |
| 3.1. Demostraciones del texto | 25 |
| 3.1.1. Solución de un sistema lineal | 25 |
| 3.1.2. Solución de la ecuación logística | 25 |
| 3.1.3. Solución del sistema presa-depredador | 27 |
| 3.2. Algoritmos y códigos | 28 |

Índice de tablas

List of Algorithms

1. Generación de gráficas de espacios fase de 2×2 con eigenvalores reales usando CairoMakie. 29

Introducción

Capítulo 1

De lo simple a lo complejo

Dentro del marco de los sistemas complejos se manejan varias ramas muy interesantes que le dan su esencia, desde los sistemas dinámicos discretos, dinámica no lineal, teoría de redes complejas, termodinámica fuera de equilibrio, modelos basados en agentes, entre otras. Cada una de ellas aporta un valioso contenido al sistema complejo que se quiera estudiar y analizar dependiendo de sus componentes. Delimitar el área de los sistemas complejos aún resulta una labor complicada debido a su gran *diversidad*, sin embargo, se sabe de la existencia de ciertas características que todo sistema complejo comparte. Los sistemas complejos cuentan con entes: *conectados*, *interdependientes*, *dependientes del camino*, *emergentes* entre otros. El presente trabajo tiene como propósito mostrar al lector cada una de estas características con el objeto de estudio que se va a proponer como piedra angular.

Para llegar a conocer nuestra piedra angular primero será necesario delimitar las áreas que intervendrán en la discusión constante de este texto. Se ocupará un *sistema dinámico no-lineal* bajo el soporte de una *red compleja*. La Dinámica no lineal es la rama de los sistemas dinámicos continuos en donde el comportamiento del sistema no se rige por la suma de los comportamientos de sus descriptores. Por ejemplo, una neurona y la suma del comportamiento de las neuronas de un cerebro no puede explicar la emergencia de la consciencia. Por otro lado las redes complejas es la extensión de la *teoría de grafos* aplicada a escenarios comunes de la naturaleza y de la vida cotidiana, tales como redes ecológicas, redes sociales, redes comerciales etc. Su importancia radica en las propiedades que se le pueden extraer para interpretar información sobre la estructura de la red y de la red misma.

1.1. Revisión de sistemas lineales.

En los cursos de ecuaciones diferenciales de cuarto semestre¹ es obligado abordar el tema de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con el objetivo de explorar en un primer nivel el comportamiento de diversas cantidades que interactúan y evolucionan en el tiempo. Las ecuaciones

¹citar a Blanchard y Devaney

diferenciales son la herramienta para modelar fenómenos y su evolución en el tiempo; nos permite trazar soluciones que describen su trayectoria. Dicho de otra forma, son la herramienta para anticipar el comportamiento del fenómeno aunque en la vida real no es tan simple como suena.

Definición 1. Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales es una colección de n ecuaciones diferenciales interrelacionadas de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1(t), \dots, x_n(t))\end{aligned}\tag{1.1}$$

donde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ lineal, continua y diferenciable. No está demás recordar que para que una función se considere lineal debe de cumplir para cualesquiera dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$ y para todo $k \in \mathbb{R}$ satisface:

1. $f(u + v) = f(u) + f(v)$
2. $f(ku) = kf(u)$

A este cumplimiento se le conoce como *principio de superposición* y el concepto se extiende cuando contamos con las soluciones del sistema lineal.

Al tratarse de un sistema lineal, resulta bastante oportuno expresarlo en términos de notación matricial, es decir, una multiplicación de una matriz cuadrada $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ por un vector columna que tiene a todas las funciones $x_i(t)$ lineales.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{11}x_1(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) \\ \vdots &\quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1(t) + \dots + a_{nn}x_n(t)\end{aligned} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix}}_{\dot{X}(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_M \underbrace{\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}}_{X(t)}$$

en este caso las constantes de la matriz $a_{ij} \in M$ son parámetros que describen ciertas interacciones con respecto de las cantidades que intervienen en el sistema (1.1); estas interacciones son las responsables de la dinámica del sistema, es decir, de la manera en que evoluciona en el tiempo dependiendo de sus condiciones iniciales. Es conveniente poder contar con la matriz de coeficientes ya que por si sola nos servirá para darle solución al sistema lineal y para poder conocer la estabilidad del mismo, aún sin saber la solución general. Para ahondar en el tema de la estabilidad es necesario conocer los *puntos fijos* del sistema.

1.1.1. Puntos fijos y estabilidad del sistema.

También llamados puntos de equilibrio son aquellos en donde las soluciones de (1.1) permanecen constantes en el tiempo y dependiendo de su naturaleza² se establecerá si el punto y el sistema en cuestión es estable o inestable. Para poder hallarlos es necesario hacer cumplir el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1(t), \dots, x_n(t)) = 0 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1(t), \dots, x_n(t)) = 0 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1(t), \dots, x_n(t)) = 0 \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}}_{X_0} = 0$$

Para darle solución es necesario encontrar $X_0 \in \mathbb{R}^n$ que lo satisfaga; en dicho caso se establece que X_0 es el punto fijo del sistema. Los puntos fijos son clave para entender la estabilidad de (1.1), servirán de referencia para determinar si las soluciones tienden hacia el punto fijo o si divergen del mismo (o una combinación de ambas). Pero tan solo con determinarlo no es suficiente, para ello debemos manipular la matriz de coeficientes M para saber que tipo de punto fijo es. Para ello necesitamos hallar los *valores propios* de M , por tanto se necesita resolver

$$\det(M - \lambda I) = 0 \quad (1.2)$$

al encontrar las raíces del polinomio característico de grado n (dependiendo del tamaño del sistema), se obtendrá el conjunto de valores propios que por si mismos nos brindan demasiada información acerca de como se comportan las soluciones del sistema.

Proposición 1. *Un sistema lineal que tiene eigenvalores con parte real negativa siempre será estable, es decir, todas las soluciones tenderán hacia el punto fijo del sistema. Este punto de equilibrio del sistema con estas características es conocido como **Atractor**.*

Independientemente de la elección de las condiciones iniciales, las soluciones tenderán hacia el punto fijo cuando $t \rightarrow \infty$ y se mantendrá ahí siendo resistente ante perturbaciones. Notemos que en la ec. (1.2) es posible tener raíces reales como complejas, dependiendo de los coeficientes de M . Sin embargo aunque se tengan eigenvalores complejos, la dinámica seguirá siendo la misma: se tendrán soluciones que tienden o divergen (o combinación de ambas) del punto fijo, lo que cambia es la forma en que lo hacen. Cuando las soluciones del sistema lineal divergen del punto fijo, entonces se establece que el sistema es inestable y el punto fijo asociado se le conoce como **Repulsor**. Cualquier mínima perturbación que tenga la solución que esta ubicada en el punto fijo, hará que diverga. La combinación de los anteriores se les conoce como **Punto silla**; se dice que es combinación porque podría acercarse al punto silla pero al hacerlo en algún momento terminará divergiendo. Es considerado también como sistema inestable ya que para $t \rightarrow \infty$ cualquier solución no trivial se irá a ∞ .

²dictada por los elementos de la matriz de coeficientes M .

Ejemplo 1. Veamos un ejemplo sencillo para poder apreciar lo anterior, para ello se propone el siguiente sistema de 2×2 .

$$\dot{X}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{M_1} X(t)$$

Sacando su polinomio característico (1.2) tenemos los siguiente eigenvalores³

$$\begin{aligned} p_{M_1}(\lambda) &= \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \\ \lambda_1 &= 4 \quad \lambda_2 = 1 \end{aligned}$$

Según lo que establece la Proposición 1, este no es un sistema que sea estable ya que sus eigenvalores tienen parte real positiva. Para poder comprobarlo necesitamos determinar la solución general del sistema asociado a M_1 . Para ello es necesario encontrar los *eigenvectores* del sistema, es decir

$$\begin{aligned} M_1 \vec{v} &= \lambda \vec{v} \quad \Longleftrightarrow \quad (M_1 - \lambda I) \vec{v} = 0 \\ \vec{v}_{\lambda_1} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_{\lambda_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Teorema 1. Sea \vec{v}_0 un eigenvector de M una matriz asociada a un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con n eigenvalores $\Lambda = \{\lambda_i \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$. Entonces la función $X(t) = e^{\lambda t} \vec{v}_0$ es una solución del sistema $\vec{X}(t) = MX(t)$ ⁴.

Se dice que es una solución general porque podemos seleccionar cualquier $k \in \mathbb{R}$ de tal manera que sea un múltiplo del eigenvector asociado a λ_i . En ese caso obtenemos toda una familia de soluciones posibles. Por tanto para el sistema del Ejemplo 1 se tienen las siguientes soluciones

$$X_1(t) = k_1 e^{4t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad X_2(t) = k_2 e^t \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}$$

Por tratarse de un sistema lineal, se cumple el principio de superposición lo cual significa que la solución general al sistema asociado a M_1 es

$$X(t) = k_1 e^{4t} \vec{v}_{\lambda_1} + k_2 e^t \vec{v}_{\lambda_2}$$

Se puede apreciar que para cualquiera de las soluciones del sistema asociado a M_1 , el límite de $X(t)$ cuando $t \rightarrow \infty$ es infinito, por tanto las soluciones del Ejemplo 1 siempre van a diverger a infinito independientemente de la elección de condiciones iniciales. Cuando se trata de sistemas lineales, una solución y la suma de las soluciones siempre será solución del sistema, es decir, se pueden escribir como combinación lineal. Generalizando el concepto a un sistema de n ecuaciones lineales tenemos la siguiente solución general:

$$X(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_{\lambda_1} + k_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_{\lambda_2} + \dots + k_n e^{\lambda_n t} \vec{v}_{\lambda_n} \quad (1.3)$$

³para sistemas de 2×2 se tiene establecido un polinomio característico que se define como $p_M(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \text{Tr} A + \det A$

⁴ver demostración en el apéndice 3

Esta solución general también aplica perfectamente para el caso en donde se tienen eigenvalores complejos, solamente habría que descomponer las exponenciales con base en la relación de Euler, es decir, $e^{\lambda t}$ donde $\lambda = a \pm bi$ se descompone como $e^{at} (\cos bt + i \sin bt)$. Como solución se vería de la siguiente manera

$$X(t) = e^{at} (\cos bt + i \sin bt) \vec{v}_\lambda \quad (1.4)$$

la forma en que se comportarán las soluciones ya sea que convergan o divergan del punto fijo es mediante oscilaciones que crecen o decrecen en función de e^{at} . Llegando a este punto tenemos todos los elementos para darle soporte a nuestra Proposición 1; tanto la ecuación (1.3) como (1.4) se puede notar que si la parte real del eigenvalor del sistema es positivo, para $t \rightarrow \infty$ la exponencial también tiende a infinito y por lo tanto la solución lo hará. En contra parte, si la parte real del eigenvalor es negativa entonces la solución va a tender hacia donde los vectores propios se dirijan, particularmente hacia el punto fijo. Esto únicamente será válido si todos los eigenvalores del sistema tienen parte real negativa ya que si existe al menos uno que tenga parte real positiva eventualmente terminará divergiendo. Es lo que sucede con los puntos silla, quizás existan mayoría de eigenvalores con parte real negativa pero si existe al menos uno que tenga parte real positiva, eventualmente para tiempos largos la solución va a diverger. Para poder darnos una idea visual de lo que llamamos *atractores*, *repulsores* y *puntos silla* podemos acceder al espacio fase del sistema y ver de manera integral como se comportan las soluciones del sistema lineal.

1.1.2. Espacios fase

El espacio fase es considerado como la representación geométrica de las trayectorias posibles en un sistema dinámico, en el mismo se contemplan todas las condiciones iniciales posibles y todas las trayectorias posibles que emergen de las anteriores. Aquí mismo encontramos gráficamente los puntos fijos y podemos distinguirlos cualitativamente de que naturaleza son. Las técnicas analíticas descritas anteriormente nos sirven para conocer el comportamiento sin el uso del espacio fase, pero para sistemas de $n = 2, 3$ podemos acceder al espacio fase y ver como son sus trayectorias. En ese sentido para sistemas con $n > 3$ ecuaciones ya será imposible generar su visualización ya que cada uno de los ejes representa una de las cantidades del sistema.

En esta breve sección únicamente veremos diversos ejemplos de sistemas 2×2 con eigenvalores variados que nos muestren atractores, repulsores y puntos silla. Sin embargo se omitirán los cálculos de eigenvalores, eigenvectores y soluciones generales, únicamente se pretende mostrar al lector como podemos analizar los sistemas de manera cualitativa a través de sus espacios fase. Por último se dividirán entre espacios fase con eigenvalores reales y con eigenvalores complejos para tener una demarcación adecuada de ambos casos.

Ejemplo 2. Para la sección de espacios fase con eigenvalores reales vamos a considerar las siguientes matrices de coeficientes para $n = 2$

$$R_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad R_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Nótese que la R_3 es la misma que la M_1 del Ejemplo 1 la cual tiene ambos eigenvalores positivos y se había concluido que sus soluciones divergen del punto fijo con base en la solución general (1.3); además en la Figura (1.1) se puede observar la gráfica de la derecha que corresponde con R_1 como todas las soluciones divergen del punto fijo. Los eigenvalores de R_1 son respectivamente $\lambda_{1R_1} = -1$ y $\lambda_{2R_1} = -4$; ambos son negativos y cumplen con lo que estipula la Proposición 1 y se puede comprobar por medio de la solución general o el gráfico de la izquierda de la Figura (1.1) que las soluciones convergen al punto fijo. Para los eigenvalores de R_2 se tienen los siguientes eigenvalores $\lambda_{1R_2} = -3$ y $\lambda_{2R_2} = 2$; en este caso se tiene que una de las soluciones de la ec. (1.3) tratará de acercarse al punto fijo debido a la exponencial con $\lambda < 0$, sin embargo para $t \rightarrow \infty$ las soluciones divergerán a $\pm\infty$; a partir del gráfico de en medio de la Figura (1.1) se puede apreciar este comportamiento.

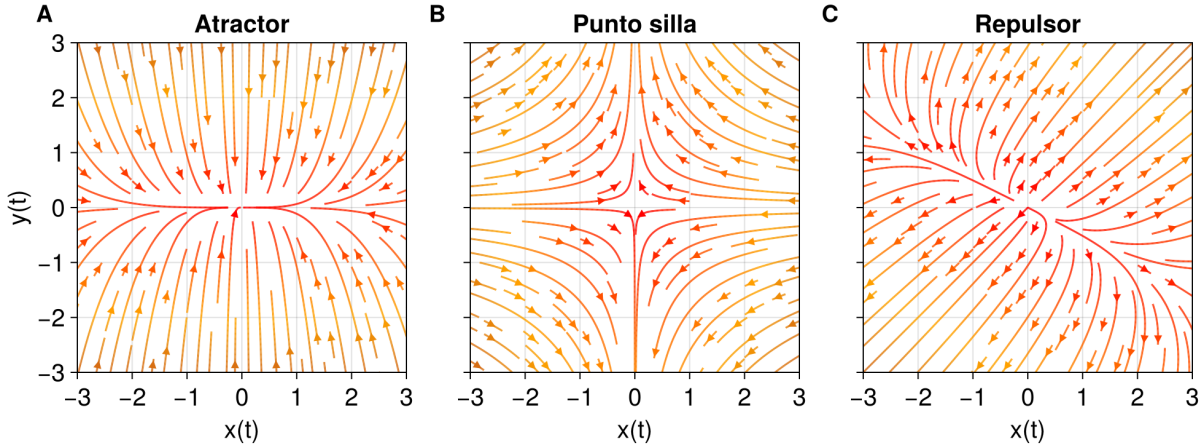


Figura 1.1: Espacios fase con eigenvalores reales. (A) Corresponde con la matriz R_1 ; (B) corresponde con la matriz R_2 ; (C) corresponde con la matriz R_3 del Ejemplo 2.

Ejemplo 3. Para el caso de los espacios fase con eigenvalores complejos se proponen las siguientes matrices de coeficientes para $n = 2$

$$C_1 = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Los eigenvalores para la matriz C_1 son $\lambda_{C_1} = -2 \pm 3i$, nuevamente notamos que la parte real de sus eigenvalores son negativas lo que significa que todas las soluciones tenderán hacia el punto de equilibrio independientemente de sus condiciones iniciales; en la gráfica de la izquierda de la Figura (1.2) se puede apreciar este comportamiento. Los eigenvalores de C_2 son respectivamente $\lambda_{C_2} = \pm 2i$,

en este caso la parte real es igual a cero lo que significa que las soluciones van a estar oscilando de un determinado valor a otro sin llegar a converger a ningún punto para $t \rightarrow \infty$. Únicamente puede cambiar la amplitud de las oscilaciones y esto dependerá de las condiciones iniciales que se impongan. Este es el comportamiento descrito por el *oscilador armónico simple* y sabemos que es considerado como ideal ya que en la naturaleza no se conocen cantidades que oscilen de manera perpetua y sin pérdida de energía. Por último los eigenvalores de C_3 son respectivamente $\lambda_{C_3} = 1 \pm 5i$, en este caso las soluciones divergen como se puede apreciar en la gráfica de la derecha de la Figura (1.2). La parte real de sus eigenvalores es positiva lo que indica dicho comportamiento para cualquier condición inicial en $t \rightarrow \infty$.

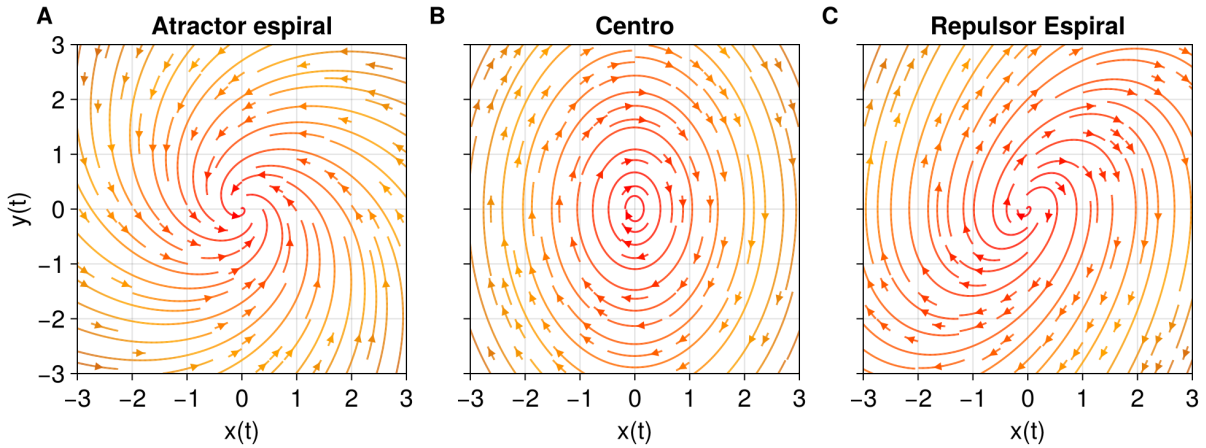


Figura 1.2: Espacios fase con eigenvalores complejos. (A) corresponde con la matriz C_1 ; (B) corresponde con la matriz C_2 ; (C) corresponde con la matriz C_3 del Ejemplo 3.

Para terminar esta sección conviene remarcar el significado de la estabilidad e inestabilidad de los sistemas y sobre todo darle una interpretación física. Ya se ha visto que cuando un sistema es estable todas sus soluciones tienden hacia el punto fijo; la estabilidad radica en que para cualquier perturbación del sistema, este siempre regresará a su punto de equilibrio y permanecerá ahí para $t \rightarrow \infty$. A diferencia de los sistemas inestables, en donde si se encuentra en el punto de equilibrio cualquier mínima perturbación hará que nunca regrese a dicho estado y cambie totalmente su dinámica. En este sentido a los primeros sistemas se les denomina como *robustos* mientras que a los segundos se les denomina como *sensibles*. Para la dinámica de los centros, anteriormente nos referíamos a oscilaciones perpetuas que no tienden o divergen de ningún punto de equilibrio. El sistema que representa este comportamiento por excelencia es el péndulo simple considerado como sistema ideal cuya solución se encuentra en términos de senos y cosenos.

Para ejemplificar los puntos de equilibrio estables o inestables pensemos en un péndulo de una vara con una masa en uno de sus extremos; un punto fijo atractor es para cuando el péndulo apunta hacia

abajo ya que cualquier perturbación sea pequeña o grande hará que regrese a su estado de equilibrio. En contraparte si conseguimos que el péndulo permanezca estable apuntando hacia arriba, cualquier mínima perturbación hará que nunca regrese a ese estado de equilibrio. Para este ejemplo en particular, si perturbamos el estado de equilibrio inestable terminará posicionándose en el estado de equilibrio estable para algún tiempo considerablemente.

1.2. Sistemas no lineales

El enfoque principal de este trabajo es en sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales; ha sido pertinente abordar el tema de los sistemas lineales para poder introducir conceptos importantes que serán de utilidad para poder analizar sistemas no lineales mediante técnicas que se abordarán más adelante. Tal y como el nombre lo dice, un sistema no lineal es aquel en el que el conjunto de ecuaciones de (1.1) es no lineal; significa que las ecuaciones que lo componen tienen términos no lineales tales como funciones trigonométricas, exponenciales, cuadradas, cúbicas etc. Esta característica quita la posibilidad de poder expresarlo en términos de una transformación lineal en su forma matricial y como consecuencia el principio de superposición ya no se cumple. Esto implica que para dados dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^n$ y para todo $k \in \mathbb{R}$ se tiene lo siguiente

$$f(k(u + v)) \neq k(f(u) + f(v))$$

Y se va a extender hasta las soluciones del mismo sistema: ahora la suma de sus soluciones no será solución del mismo. Yendo en esta dirección, aunque el *Teorema de existencia y unicidad* pueda extenderse hasta ciertas ecuaciones no lineales, éstas deben de cumplir sus hipótesis para que pueda aplicar⁵. En otras palabras, solo un determinado número de formas de ecuaciones podrán satisfacer la unicidad de la solución, en el resto de casos tendrán la posibilidad de tener múltiples soluciones y más aún si se trata de un sistema de ecuaciones como el que iremos a analizar más adelante.

En una ecuación no lineal se tiene la particularidad de que las variables dependientes y sus derivadas aparecen de forma no lineal, esto genera dependencias complejas que difícilmente se pueden simplificar lo que provoca que puedan existir las múltiples soluciones de la misma. En esta dirección, las ecuaciones no lineales producen comportamientos impredecibles al mismo tiempo que son sensibles ante condiciones iniciales lo que se resume en el amplio concepto conocido como *Caos*. Normalmente de las ecuaciones no lineales emergen comportamientos caóticos aún tratándose de sistemas deterministas. Explorar las propiedades caóticas de sistemas no lineales es una propuesta interesante para

⁵También conocido como Teorema de Picard-Lindelöf. Se deben cumplir las siguientes hipótesis para que se pueda aplicar el teorema: se considera $f : \Omega \subseteq (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde Ω es un conjunto abierto y f una función continua y localmente Lipschitz con respecto de x ; en caso contrario la ecuación no lineal o el conjunto de ecuaciones no lineales podrían tener soluciones múltiples. [Referenciar el teorema con demostración]

investigar.

Por lo visto, resolver ecuaciones no lineales o un sistema de ecuaciones no lineales puede ser hasta imposible si nos atrevemos a hacerlo de manera analítica. El famoso problema de los 3 cuerpos fue aquel que pudo paralizar a los científicos durante aproximadamente 200 años porque no se hallaba una solución concreta y aunque al final Henri Poincaré se le consideró como aquel que le dio respuesta⁶: dicha respuesta no fue una solución analítica que mostraba las posiciones de los planetas en función del tiempo, sino más bien estableció que mínimas variaciones en el sistema podrían desencadenar grandes y radicales cambios a largo plazo. Con esta conclusión se comienza a establecer la conocida *Teoría del Caos* que irá floreciendo durante el siguiente siglo hasta nuestros días.

Debido a que resulta imposible o muy complejo resolver ecuaciones no lineales de forma analítica se opta por recurrir a técnicas computacionales de integración numérica para poder obtener una aproximación de la solución del sistema no lineal y de esta manera conocer la dinámica que produce. La fidelidad de las aproximaciones numéricas depende de varios factores tales como: el método numérico empleado, el paso de integración, el tipo de ecuación o ecuaciones, condiciones iniciales etc.

Para ecuaciones diferenciales ordinarias se tienen dos métodos principales que se enseñan en los cursos de Física Computacional e inclusive en algunos cursos de Ecuaciones Diferenciales 1: el método de *Euler* y el método de *Runge-Kutta* de cuarto orden⁷. El primero suele ser fácil de implementar debido a su simpleza sin embargo no llega a ser muy preciso cuando se trata de ecuaciones no lineales ya que comete errores de truncamiento grandes. El método de Euler es considerado de primer orden e implica que el error local es proporcional al cuadrado del tamaño del paso de integración $O(h^2)$ mientras que para el caso de Runge-Kutta que es de cuarto orden, su error es proporcional a la quinta potencia del paso de integración $O(h^5)$.

Aunque RK4 es mucho más preciso que Euler también dependerá sustancialmente del paso de integración que se elija, entre más fino sea dicho paso será más precisa la solución. Sin embargo para el caso de sistemas no lineales es conveniente utilizar RK4 ya que al exhibir comportamientos caóticos es probable que la solución aproximada diverga de la solución real debido a las pequeñas variaciones que se pueden presentar. En diversas aproximaciones numéricas los errores se acumulan con el tiempo y especialmente llega a ser problemático si se está integrando algún sistema no lineal ya que los errores en las primeras iteraciones pueden crecer rápidamente afectando la fidelidad de la solución aproximada. RK4 es un método que se considera *convergente* ya que a medida que el paso de integración $h \rightarrow 0$,

⁶citar dicha respuesta

⁷poner referencia directa del libro.

la aproximación se asemeja más a la solución real y gracias a ello se ha escogido este método como integrador estrella del sistema que se irá a analizar.

Para fines prácticos se define a continuación la regla que deben de cumplir cada uno de los métodos propuestos. El método de Euler sigue la siguiente correspondencia

$$y_{n+1} = y_n + hf(y_n, t_n) + O(h^2) \quad (1.5)$$

Mientras que el método de Runge-Kutta de orden 4 sigue la siguiente correspondencia.

$$\begin{aligned} Y_1 &= y_n \\ Y_2 &= y_n + \frac{h}{2}f(Y_1, t_n) \\ Y_3 &= y_n + \frac{h}{2}f\left(Y_2, t_n + \frac{h}{2}\right) \\ Y_4 &= y_n + hf\left(Y_3, t_n + \frac{h}{2}\right) \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}\left[f(Y_1, t_n) + 2f\left(Y_2, t_n + \frac{h}{2}\right) + 2f\left(Y_3, t_n + \frac{h}{2}\right) + f(Y_4, t_n)\right] + O(h^5) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Se pueden consultar ambos métodos y sus deducciones en las siguientes bibliografías [Poner CITAS]⁸. Más adelante se hablará sobre su implementación computacional.

1.2.1. Modelo logístico

En los cursos de Ecuaciones Diferenciales I se suele iniciar con la introducción del tema del crecimiento de cantidades: ya sea poblaciones, tasas de interés, etc. Para ello se plantea una primera ecuación diferencial que retrata que la velocidad de crecimiento de dicha cantidad es proporcional al tamaño de la cantidad:

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \quad (1.7)$$

en este caso $r \in \mathbb{R}^+$ funge como la tasa de crecimiento de la cantidad en incremento. Mediante la técnica de separación de variables se deduce que la solución de esta ecuación diferencial es $N(t) = ke^{rt}$ con $k \in \mathbb{R}$. Como modelo de crecimiento poblacional es un buen punto de partida pero tiene un problema: la solución que produce para tiempos muy largos provoca que la población crezca sin límites y con certeza sabemos que eso no puede ocurrir. Al extender la idea de esta ecuación diferencial, se obtiene la alternativa conocida como *Modelo logístico*: ampliamente utilizado como base para el análisis de dinámica poblacional, propagación de enfermedades y en esencia sistemas que presenten crecimiento limitado por recursos. La ecuación logística se presenta de la siguiente forma

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (1.8)$$

⁸poner citas

considerando que $N(t)$ es una población y r es la misma tasa de crecimiento que en (1.7), K se denomina como la capacidad de carga de la población. A este concepto se le entiende como el límite hasta donde puede llegar el crecimiento de esta población aún cuando la condición inicial de (1.8) se encuentre por arriba o por debajo de K ⁹. La ecuación logística es no lineal ya que posee un término

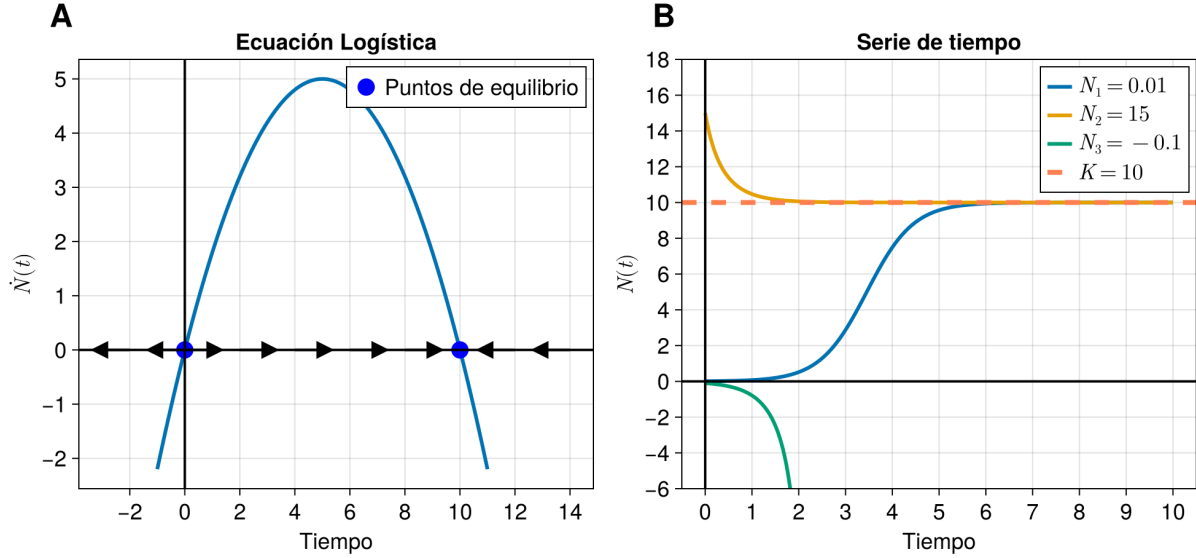


Figura 1.3: (A) Ecuación logística con una tasa de crecimiento $r = 2$ y una capacidad de carga $K = 10$; se muestra su línea fase con sus puntos de equilibrio y sus respectivas estabilidades. (B) Solución de la ecuación logística para las condiciones iniciales: $N_1 = 0.01$, $N_2 = 15$, y $N_3 = -0.1$.

cuadrático pero es de las pocas a las que se le puede hallar una solución analítica. Consta de un crecimiento exponencial que se ve frenado por el término que se encuentra entre paréntesis. Para cierto $t^* \in \mathbb{R}^+$ se tendrá que $N(t^*) = K$ y por lo tanto la ecuación se hace cero y la población deja de crecer estableciéndose sobre la capacidad de carga. Si se escoge una condición inicial tal que $N_0 < K$ entonces la población crecerá y se establecerá sobre la capacidad de carga, sin embargo, si $N_0 > K$ entonces la población decrecerá hasta estacionarse en la capacidad de carga (Figura 1.3). En el caso en donde se elige una condición inicial $N_0 < 0$ la población simplemente diverge, a esto normalmente se le interpreta como que no tienen sentido las poblaciones negativas y por eso normalmente nunca se toman en cuenta las condiciones iniciales negativas.

Con base en los elementos de la sección anterior, la ecuación logística posee dos puntos de equilibrio: $\mathcal{N} = \{0, K\}$. Por tratarse de una ecuación, la dinámica se estudia en una dimensión: es decir, el espacio fase corresponde con una línea fase. Para analizar la estabilidad de los puntos fijos se suele seguir las siguientes reglas: si $\dot{N} < 0$ entonces las soluciones decrecen y/o se mueven hacia la izquierda;

⁹En la sección (3.1.2) se muestra el proceso para hallar la solución de la ecuación logística y su comparación en series de tiempo entre la solución analítica y la solución numérica usando Runge-Kutta de orden 4.

en caso contrario $\dot{N} > 0$ las soluciones se mueven y/o crecen hacia la derecha. Con base en esas reglas se puede observar la dinámica de los puntos fijos concluyendo que el 0 es un punto fijo repulsor, mientras que el 10 es un punto fijo atractor. Esto tiene sentido ya que toda población en un principio comienza a crecer de manera exponencial tendiendo hacia su punto de equilibrio estable, incluso si la población comienza con una condición inicial $N_0 > K$ decrecerá hasta asentarse en el punto de equilibrio. Cualquier mínima población (“perturbación”) hace que la población diverga del 0 mientras que toda perturbación alrededor de K hará que regrese a su estado de equilibrio.

Es posible observar como existe un punto máximo en donde cambia la forma de crecimiento de la población e incluso se le puede observar como un punto de inflexión. Para $K/2$ se tiene un cambio de ritmo en el crecimiento, la población en un principio crece de manera exponencial hasta que llega a $K/2$ y a partir de aquí comienza a decrecer el ritmo de crecimiento hasta llegar a su punto de equilibrio. Esta dinámica viene del término que se encuentra entre paréntesis y que gracias a la capacidad de carga podemos obtener un modelo un poco más realista pero aún con algunas limitaciones.

El modelo es adecuado para tener un primer acercamiento a las dinámicas de poblaciones, sin embargo se queda corto para ajustarse a situaciones realistas ya que no toma factores ambientales que puedan afectar a la dinámica, la tasa de crecimiento únicamente depende del tamaño de la población y de no de otros factores que podrían ser más complejos, la capacidad de carga también se maneja constante cuando podría ser una función del tiempo siendo afectada por elementos del entorno etc. Por lo tanto existen más modelos que parten de la formulación de la ecuación logística y cada uno de ellos hace su intento por mostrar alguna característica del sistema de la que se quiera profundizar.

1.2.2. Modelo presa-depredador

Uno de los sistemas no lineales más importantes aplicado a más de una especie es el modelo de presa-depredador o también conocido como Lotka-Volterra, en particular se aplica a dos especies (por lo tanto son dos ecuaciones) y aunque también posee limitaciones como las que se comentaron al final de la sección anterior, sigue siendo un modelo base para entender dinámicas de poblaciones en este caso bajo un contexto de depredación. El modelo consta de dos especies: una que es presa (la cual es consumida por la depredadora) y la depredadora (que depende de la presa para su supervivencia) y sigue las reglas del siguiente sistema¹⁰

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha x - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} &= \delta xy - \gamma y\end{aligned}\tag{1.9}$$

¹⁰En la sección (3.1.3) se muestra la solución (implícita) del sistema presa de predador junto con la comparación de las curvas de nivel de la solución analítica contra las del espacio fase generadas por las ecuaciones de (1.9).

En este sistema $x(t)$ corresponde con la especie de presas y $y(t)$ es la especie depredadora; α corresponde con la tasa de crecimiento de la especie de presas en ausencia de la especie depredadora, β es la tasa de depredación y corresponde con la cantidad de presas cazadas, δ es la tasa de crecimiento de las presas a causa del consumo de las presas y γ es la tasa de mortalidad de la especie depredadora en ausencia de presas. La especie presa $x(t)$ crece a diferentes ritmos en el tiempo aún con su tasa de crecimiento constante, esto debido a que se ve frenada en función de como crecen los depredadores $y(t)$ y en consecuencia como disminuyen a la población de presas. Al mismo tiempo, los depredadores $y(t)$ irán creciendo conforme el número de presas disminuya pero en algún punto el número de presas disminuirá tanto que no satisfará la demanda de los depredadores, por lo tanto por insuficiencia los depredadores comenzarán a disminuir.

Los ritmos de crecimiento de ambas especies vendrá dictada por los coeficientes de interacción y ciertas combinaciones entre coeficientes hace la predominancia de una de las dos especies. En concreto β y γ ayudan a que las presas predominen en cantidad mientras que α y δ hacen el mismo papel pero con los depredadores. Para el primer caso $\beta > \alpha$ y $\gamma > \delta$, esto se traduce en que existirá una alta tasa

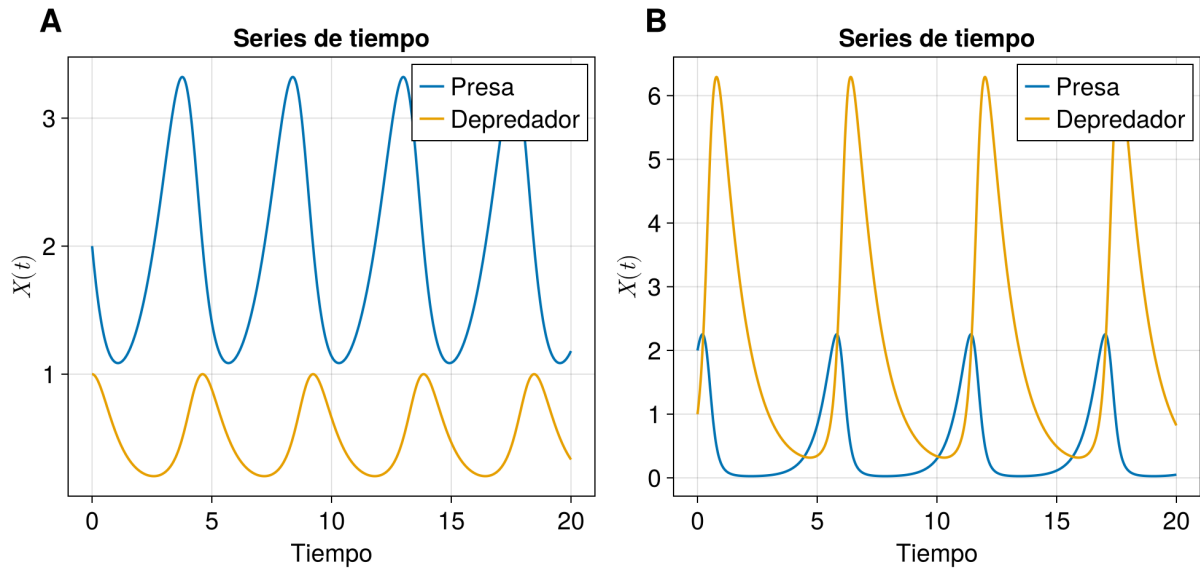


Figura 1.4: **(A)** Serie de tiempo del sistema presa-depredador con $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 2$ y $\delta = 1$. Bajo esta configuración la población de las presas se mantiene predominante sobre la población de depredadores. **(B)** Serie de tiempo del sistema presa-depredador con $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$ y $\delta = 2$. En este escenario la población de depredadores se mantiene predominante frente a la población de presas.

de depredación lo que provoca la baja de las presas pero al mismo tiempo la tasa de mortalidad de los depredadores es alta lo que hace que la escases de presas disminuya drásticamente el número de depredadores; mientras esto ocurre le da chance a las presas de reproducirse sin estar al asecho de los depredadores y cuando esto ocurre la población de depredadores se restablece y vuelven a consu-

mir con una alta tasa de depredación. Como se puede intuir esto forma parte de un ciclo que se va repitiendo en el tiempo aunque claro que es considerado una dinámica ideal pues como se ha mencionado repetidas veces, no se están tomando fluctuaciones importantes que devienen del ambiente. Para que los depredadores puedan predominar en su población solo hay que invertir las desigualdades propuestas y observar como con una alta natalidad de presas (abundancia) y un índice de depredación mayor a la mortalidad de los depredadores hace que se mantengan en mayor abundancia que las presas.

Para analizar más sobre la dinámica del sistema convendría conocer los puntos críticos del sistema y averiguar de que tipo de estabilidad se trata. El punto crítico trivial sabemos que es el $(0, 0)$ y siempre será un repulsor, pues las poblaciones tienden a crecer ya sea en mayor o en menor medida. Igualando las ecuaciones de (1.9) a cero y realizando las cuentas correspondientes se encuentra que el otro punto crítico es $(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta})$. Por ahora no podemos determinar el tipo de estabilidad de manera analítica puesto que no tenemos disponible una matriz de interacciones de un sistema lineal de la que podamos sacar eigenvalores para realizar el análisis de la sección anterior pero podemos guiarnos a partir de su espacio fase y ver que dinámica presenta.

Ejemplo 4. Se define el siguiente sistema de presa-depredador para analizar el tipo de dinámica que produce

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2x - 0.6xy \\ \dot{y} &= 0.5xy - 2y\end{aligned}\tag{1.10}$$

los puntos fijos del sistema son: $(0, 0)$ y $(\frac{10}{3}, 4)$ respectivamente. En la discusión realizada anteriormente

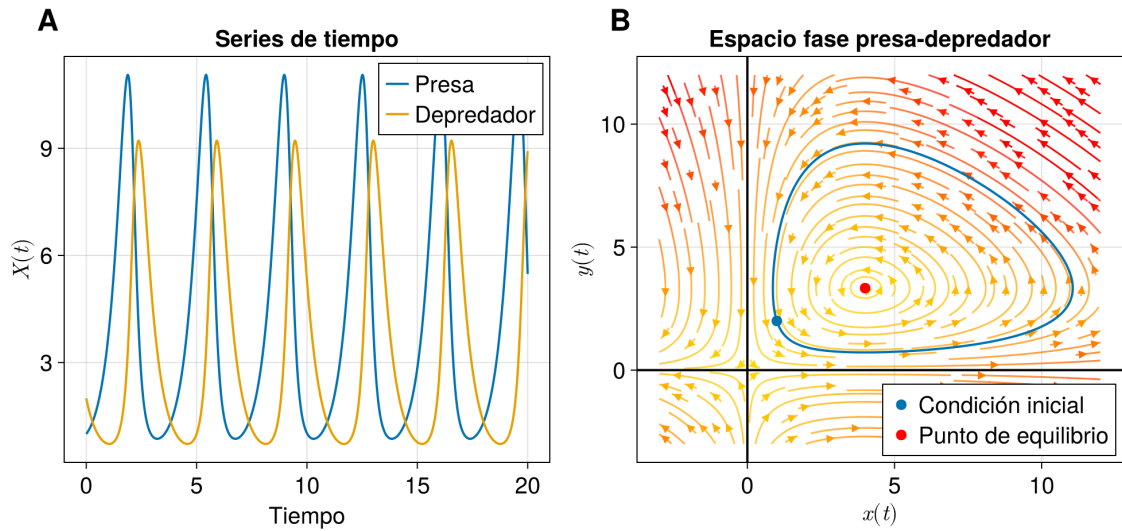


Figura 1.5: (A) Serie de tiempo del sistema (1.10) integrado con RK4 con un paso de integración $h = 0.01$ y con la condición inicial $(1, 2)$. (B) Espacio fase del sistema (1.10) junto con la solución numérica marcada en azul.

podemos anticipar que la población de presas predomina sobre la población de depredadores ya que $\alpha > \beta$, $\gamma > \delta$ pero contamos con que $\beta > \delta$ y se propuso que la tasa β ayuda al crecimiento de las presas por la alta demanda de depredación que en conjunto con el alto índice de mortalidad provoca que los depredadores tengan una etapa crítica de baja población. La Figura (1.5) muestra la evolución temporal de las presas y los depredadores así como el espacio fase que cuenta con todas las familias de soluciones posibles en particular se marca en azul la que corresponde con (4). La forma en que se obtuvo la solución fue por medio de integración numérica RK4¹¹ y constantemente se estará utilizando para la integración de los sistemas no lineales que se abordarán más adelante.

En el siguiente capítulo se abordará una técnica analítica para poder determinar la estabilidad de los puntos críticos de sistemas no lineales, se le conoce como *Linearización* y aunque es una herramienta limitada que funciona a nivel local, sirve de mucho para explorar la estabilidad de sistemas no lineales de más de tres ecuaciones en donde la implementación visual es imposible de generar. Las aplicaciones de este modelo pueden variar desde su inmediato que es en ecología, en dinámica de enfermedades tal como lo es el modelo SIR, inclusive hasta en mercadología para ver que empresas dominan sobre otras o que acciones dominan sobre otras.

Introducción al modelo de competencia de especies

El sistema de presa-depredador se puede extender al realizar una combinación sutil con la ecuación logística (1.8), es decir, es agregarle una capacidad de carga y la premisa de que ahora no hay especies que depredan y que son depredadas sino que ahora las especies compiten por los recursos disponibles y finitos de un ambiente/ecosistema. Este es el conocido *sistema de competencia de especies* o de Lotka-Volterra de competencia

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha x \left(1 - \frac{x}{K_1}\right) - \beta xy \\ \frac{dy}{dt} &= \gamma y \left(1 - \frac{y}{K_2}\right) - \delta xy\end{aligned}\tag{1.11}$$

Este sistema de ecuaciones aumenta el número de términos no lineales con respecto del presa depredador, teniendo x^2 y xy por lo que también aumenta la complejidad al quererlo resolver de forma analítica¹². Aunque en el apéndice se presenten las soluciones analíticas de la ecuación logística y del sistema presa-depredador, para este sistema únicamente nos estaremos guiando de la solución numérica y los espacios fase que podamos generar computacionalmente para sistemas de 2 o 3 ecuaciones.

El siguiente capítulo estará enteramente dedicado al sistema de competencia de especies, se abordarán desde lo particular con ejemplos de dos ecuaciones, se explorará su dinámica y se presentará

¹¹La implementación computacional sugiero que se aborde y se agregue en apéndice; dejar esta nota como referencia a dicha sección.

¹²Si es que tiene solución.

la técnica de la linearización para poder determinar la estabilidad de los puntos fijos del sistema a nivel local. Posteriormente se generalizará el sistema a N ecuaciones diferenciales y se hablará sobre las interacciones y su construcción. Se hablará sobre la implementación computacional para poder resolver el sistema generalizado de N especies y se hablará sobre las condiciones para que el sistema pueda ser estable o no. El objetivo final de este trabajo es validar para que condiciones un sistema de N ecuaciones diferenciales es estable y para cuales no lo es. Con base en ello se plantea la siguiente hipótesis

Proposición 2. *Un sistema de competencia de especies generalizado de N ecuaciones diferenciales presenta una transición de fase entre un régimen estable y otro inestable. Dicha transición esta determinada en función de los parámetros: N número de especies (ecuaciones diferenciales), p una probabilidad que determina la conectividad entre especies siendo que para valores de p cercanos a cero el número de conexiones entre especies es bajo y para valores de p cercanos a uno el número de conexiones entre especies es alto. Y por último σ un parámetro que determina que tan “fuertes” son las interacciones entre especies, es decir que tan altas o bajas son las tasas de interacción entre especies.*

Capítulo 2

¿Será estable un gran sistema complejo?

El sistema de Lotka-Volterra es uno de los sistemas utilizados para poder comprender la naturaleza de la dinámica no lineal. En este caso particular, los términos no lineales son cuadráticos y representan la interacción entre la especie i y la especie j .

$$\frac{dx_i}{dt} = r_i x_i \left(1 - \frac{\sum_{j=1}^N \alpha_{ij} x_j}{K_i} \right) \quad (2.1)$$

Se considera una tasa de crecimiento r_i para la especie i , una capacidad de carga K_i que limita hasta cierto punto su crecimiento, y su respectiva interacción con la especie x_j cuya “fuerza” de interacción esta dada por los coeficientes α_{ij} . Al ser un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales, no es posible acceder a una solución analítica general¹; por ello se recurre a métodos de integración numérica capaces de aproximar las soluciones a un rango considerable y cercano a la solución real. El método empleado por excelencia en este trabajo es el integrador Runge-Kutta de orden 4².

De manera pedagógica, para aprender y analizar las virtudes y comportamientos del sistema 2.1 es recomendable comenzar explorando el sistema de 2×2 .

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= r_1 x_1 \left(1 - \frac{a_{11} x_1}{k_1} - \frac{a_{12} x_1 x_2}{k_1} \right) \\ \dot{x}_2 &= r_2 x_2 \left(1 - \frac{a_{21} x_1 x_2}{k_2} - \frac{a_{22} x_2}{k_2} \right) \end{cases}$$

En este caso particular, tenemos una tasa de crecimiento y una capacidad de carga personalizada para cada especie, lo que es razonable con el hecho de que cada especie crece a un ritmo determinado y también es limitada de manera determinada. En este caso los coeficientes α_{ij} forman parte de una

¹debido a los términos no lineales... (me gustaría una explicación más completa: ver strogatz y tratados de ecuaciones diferenciales).

²poner una referencia de libro

matriz de *incidencias* entre especies definida de la siguiente manera

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Es apreciable que los términos de la diagonal se encuentran en $\alpha_{ii} = 1$ ³ respectivamente, más adelante se dará una explicación detallada de esta característica; por el momento solo nos enfocaremos en la dinámica que produce el sistema. Para ello se define el siguiente sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x \left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy \\ \frac{dy}{dt} &= 3y \left(1 - \frac{y}{3}\right) - 2xy \end{aligned}$$

De este sistema se pueden notar algunas características: se tiene para cada ecuación diferencial (especie) una tasa de crecimiento y una capacidad de carga específica o personalizada. Por ejemplo para la ecuación \dot{x} se tiene una tasa de crecimiento y capacidad de carga de 2 para la especie x y para la especie y estos valores son iguales a 1; para la ecuación \dot{y} se tiene una tasa de crecimiento y capacidad de carga de 3 para la especie x y para la especie y se tiene una tasa de crecimiento de 2 y una capacidad de carga de 1. Aunque este sistema tal cual no tiene una solución analítica per se, si es posible explorar acerca de su comportamiento; en principio se pueden hallar sus puntos fijos que nos hablan de la estabilidad del sistema. Para hallar puntos fijos es necesario encontrar las raíces de este sistema. La solución trivial siempre será $(0, 0)$, de ahí se tienen que igualar a cero las ecuaciones para hallar los otros puntos críticos.

$$\begin{aligned} 2x - x^2 - xy &= 0, & \text{suponiendo que } y &= 0 \\ 2x &= x^2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

y para \dot{y} se tiene

$$\begin{aligned} 3y - y^2 - 2xy &= 0, & \text{suponiendo que } x &= 0 \\ 3y &= y^2 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

³Argumentar más adelante.

Por tanto tenemos para \dot{x} el punto fijo $(2, 0)$ mientras que para \dot{y} se tiene el punto fijo $(0, 3)$. Aún es posible hallar un último punto fijo que es para cuando ambas ecuaciones se hacen cero.

$$2x - x^2 - xy = 0, \quad \text{Se despeja } y \text{ de esta ecuación.}$$

$$xy = x(2 - x)$$

$$y = (2 - x)$$

$$3(x - 2) - (x - 2)^2 - 2x(x - 2) = 0$$

$$3x - 6 - (x^2 - 4x + 4) - 2x^2 + 4x = 0, \quad \text{Reduciendo términos se tiene.}$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

Al resolver esta última ecuación se determina el último punto fijo que corresponde a $(1, 1)$. Los puntos fijos brindan información para explorar hacia donde pueden converger (atractores) o diverger (repulsores o puntos sillas) las soluciones del sistema dependiendo de las condiciones iniciales que se le impongan.⁴

Se establece que si las soluciones convergen entonces el sistema es considerado *estable* mientras que en caso contrario el sistema es considerado *inestable*.

Es posible determinar mediante técnicas computacionales el campo vectorial de las soluciones de este sistema⁵, inclusive dos de las isoclinas⁶ del sistema resolviendo las ecuaciones igualando a cero y despejando y de cada una de ellas. Es notorio como dichas isoclinas inciden de alguna forma en tres de los puntos fijos. El gráfico nos muestra que las soluciones convergen hacia los puntos que se encuentran en los ejes; todo dependerá de las condiciones iniciales del sistema para ver hacia donde convergen. El punto fijo de en medio es conocido como punto silla y es inestable ya que aunque existan soluciones que convergan hacia él mismo, en la mínima perturbación que se le provoque la solución puede “desviarse” hacia los atractores. Por último se observa que del origen divergen todas las soluciones por lo que es considerado un punto fijo repulsor.

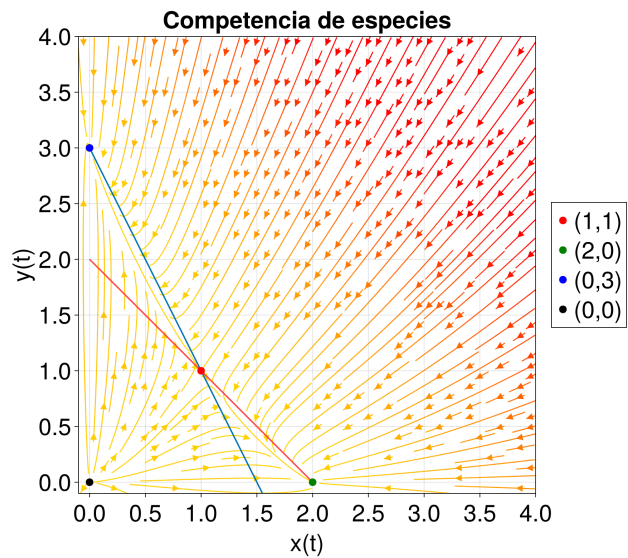


Figura 2.1: Campo vectorial de las soluciones del sistema propuesto de dos especies.

En esta ocasión por tratarse de un sistema de 2×2 , se tuvo la fortuna de poder obtener una representación visual del sistema y poder realizar un análisis cualitativo del mismo para sacar conclusiones.

⁴explicar brevemente de que se trata uno, quizás esto deba precisarse desde la introducción.

⁵Realizar referencia de la técnica empleada.

⁶si son isoclinas???

Pero ¿qué sucede cuando se tienen sistemas de N especies? En principio el espacio vectorial (fase) de las soluciones se vuelve N -dimensional y por lo tanto imposible de visualizar en un gráfico. Es por ello que se requieren de otras técnicas analíticas para seguir esbozando el comportamiento del sistema. Una herramienta útil a esta conjetura es la de *linealizar*⁷ el sistema para poder explorar el comportamiento de los puntos fijos a nivel local. Para realizar esta acción es necesario aplicar el *Jacobiano* al sistema para “bajar” el grado de las ecuaciones del sistema 2.1 y así obtener puras ecuaciones lineales.

Se define la función vectorial $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde n será el número de especies del sistema de Lotka-Volterra generalizado 2.1.

$$\mathbf{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 = f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(\vec{x}) \end{pmatrix}, \quad \text{donde } \vec{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n. \quad (2.3)$$

Las componentes de $\mathbf{F}(\vec{x})$ corresponden con las funciones del sistema 2.1, y las componentes del vector \vec{x} corresponden con sus especies involucradas. El sistema 2.1 puede ser re-escrito bajo la simplicidad de la siguiente ecuación

$$\dot{\vec{x}}(t) = \mathbf{F}(\vec{x}(t)), \quad \text{considerando } \dot{\vec{x}}(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt} \quad (2.4)$$

Por tanto el Jacobiano del sistema se definirá de la siguiente manera

$$\mathbb{J}_{\mathbf{F}}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\vec{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\vec{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Esta resultante al ser evaluada en los puntos fijos del sistema genera la llamada matriz de *interacciones* que es aquella que nos brinda la información necesaria para determinar la estabilidad de ese punto fijo en particular. Por ello se establece que la matriz de interacciones brinda información solo a nivel local, pues no contiene información de otros puntos fijos ajenos. Para validar esta aseveración ocuparemos nuestro sistema de 2×2 y relacionaremos la matriz de interacciones con lo que se muestra en el gráfico. El Jacobiano del sistema 2.1 para $n = 2$ es el siguiente

$$\mathbb{J}_{\mathbf{F}}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} r_1 - \frac{2r_1x_1+r_1a_{12}x_2}{K_1} & -\frac{r_1a_{12}x_1}{K_1} \\ -\frac{r_2a_{21}x_2}{K_2} & r_2 - \frac{2r_2x_2+r_2a_{21}x_1}{K_2} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

debido a la matriz de incidencias 2.2, se tiene que los valores $a_{ii} = 1$ que corresponden con las auto-interacciones. Evaluando los puntos fijos antes encontrados en el jacobiano 2.6 se tienen las siguientes matrices de interacciones:

$$\mathbb{J}_{(2,0)} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{J}_{(0,3)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{J}_{(1,1)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{J}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

⁷Explicar brevemente en esta nota a que se refiere esto.

Como previamente se ha revisado⁸, los eigenvalores (más que los eigenvectores) determinan la estabilidad de un sistema lineal. Se establece que mientras ellos tengan parte real negativa se asegurará que el sistema será estable y que en otro caso el sistema será inestable. Por lo tanto los eigenvalores de las primeras dos matrices de interacciones deben ser negativos para que sustenten los atractores de la figura 2.1. Mientras que los eigenvalores de $\mathbb{J}_{(1,1)}$ deben ser uno negativo y otro positivo para sustentar al punto silla. Para la matriz $\mathbb{J}_{(0,0)}$ sus eigenvalores deben ser positivos para que sustenten el repulsor. Realizando el álgebra correspondiente se encuentra lo siguiente

$$\begin{aligned}\mathbb{J}_{(2,0)} &\implies \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -1 \\ \mathbb{J}_{(0,3)} &\implies \lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = -1 \\ \mathbb{J}_{(1,1)} &\implies \lambda_1 = -1 + \sqrt{2}, \quad \lambda_2 = -1 - \sqrt{2} \\ \mathbb{J}_{(0,0)} &\implies \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3\end{aligned}$$

Por tanto se termina de validar la consistencia del método de la linearización para esbozar la estabilidad de 2.1 por cada uno de sus puntos fijos. Esta forma analítica de reconocer la estabilidad del sistema será sumamente útil para cuando se tengan $N > 3$ especies. Habiendo conocido las técnicas a nivel particular frente al sistema para $n = 2$ toca generalizar las ideas hacia un sistema más robusto de N especies, a continuación se abordará esa discusión.

2.0.1. Sistema de competencia de especies generalizado para N especies.

En la sección anterior se ha introducido el sistema de competencia de especies 2.1 y su forma vectorial 2.4 generalizada; se mostró un ejemplo particular con $n = 2$ para observar su dinámica a través de su espacio fase (fig. 2.1) en donde se contempla la naturaleza de sus puntos fijos si se trata de atractores, repulsores o puntos silla. Se propone el método de la linearización para conseguir matrices de interacción que determinen de forma analítica la estabilidad de cada uno de los puntos fijos del sistema. En esta sección profundizaremos más acerca de lo mencionado comenzando con la matriz de incidencias 2.2 la cual ya se ha mencionado anteriormente.

Para este trabajo resultó conveniente utilizar el marco de las *redes complejas* para poder representar las interacciones entre las especies del sistema. Una red es considerada una colección de *nodos* que se encuentran unidos por *enlaces*⁹. Para definir redes siempre es necesario establecer que es lo que representan los nodos y que representan los enlaces, en nuestro caso por ejemplo si existe una

⁸Hay que referenciar este enunciado con algún sustento de la introducción en donde se maneje el tema de los eigenvalores y eigenvectores como solución de sistemas lineales.

⁹definir más adelante el tipo de interacciones con base en el signo y si son dirigidas o no dirigidas. Además de agregar cita del Newman para esta definición.

interacción entre las especies x_i y x_j (nodos de la red) entonces hay un enlace que los une. Por tanto establecemos que los nodos de la red corresponden con las especies y los enlaces con las interacciones.

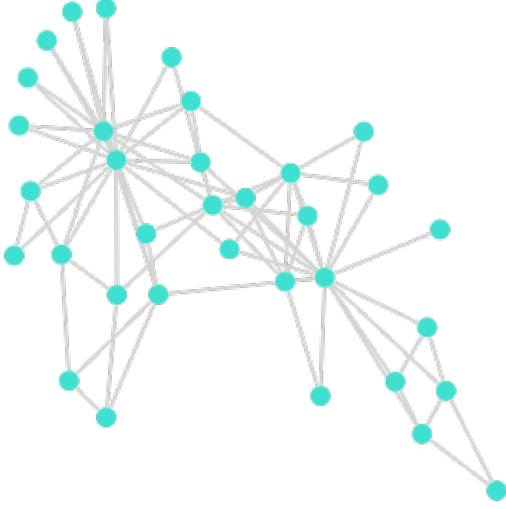


Figura 2.2: Red de Karate.

En el mundo es posible encontrar diferentes tipos de redes con cierto significado, tales como la red de energética de un país, redes de amistades en una universidad o redes de acciones que cotizan en la bolsa de valores. Para poder representar estas redes y cualquier otro tipo de red conviene introducir el concepto de *matriz de adyacencia*.

Definición 2. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Se define la matriz de adyacencia tal que sus entradas son de la siguiente forma

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } \exists \text{ un enlace entre el nodo } i \text{ y el nodo } j. \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La matriz de adyacencia será la herramienta para determinar la relación de interacción entre especies, pero solo hablará de su existencia más no tendrá información del peso de dicha interacción. Recordemos que en el sistema 2.1 tenemos coeficientes α_{ij} que representan dichos pesos de interacción entre especies, esto se retomará más adelante.

Ejemplo 5. Para poder apreciar la matriz de adyacencia definamos una red de 10 nodos y veamos su matriz de adyacencia que le corresponde. Es notorio que cada nodo se encuentra identificado con un número de nodo, esto nos va a servir para poderlo mapear en la matriz de adyacencia. La correspondencia es la siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

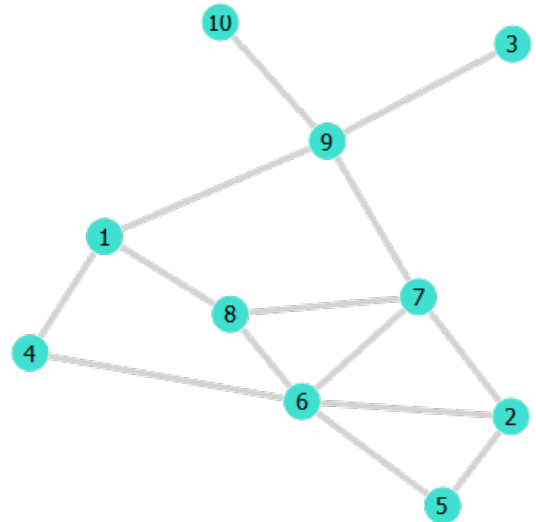


Figura 2.3: Red no dirigida de 10 nodos.

Los renglones y columnas de la matriz representan los nodos, siendo el primer renglón el primer nodo (número 1), el quinto renglón será el quinto nodo (número 5); esto pasa de manera equivalente con las columnas, la cuarta columna corresponde con el cuarto nodo (número 4), la octava columna corresponde con el octavo nodo (número 8). Por tanto, mediante la matriz de adyacencia sabemos que el primer nodo (renglón 1) está enlazado con el cuarto nodo (columna 4) ya que existe un uno, mientras que el primer renglón y la quinta columna hay un cero lo que indica que no existe un enlace entre estos nodos.

También hay que destacar qué la matriz es simétrica y que la diagonal es igual a cero: para el primer punto se debe notar que la relación de los enlaces entre nodos no tiene dirección, es decir, que exista un enlace entre nodos significa que el nodo i se conecta con j y viceversa, que el nodo j se conecta con el nodo i . Por tanto decimos que la red de la fig. 2.3 es *no dirigida* puesto que no hay una dirección preferencial en el enlace, esto implica que su matriz de adyacencia es simétrica. Para el segundo punto se debe notar que cada nodo es libre de relacionarse consigo mismo, en este ejemplo los nodos no lo hacen pero si es posible la existencia de *autoenlaces*; en nuestro sistema tendrá un alto significado porque se hablarán de las autointeracciones que son importantes para la construcción del sistema.¹⁰

Cuando se tiene el caso en que los enlaces tienen una dirección preferencial de nodo a nodo, decimos que corresponde a una *red dirigida*. En este caso el enlace podrá ir del nodo i al nodo j pero no necesariamente lo hará en sentido contrario, deberá definirse explícitamente. En el mundo también existe un gran conjunto de redes dirigidas como lo son las citas académicas, la propia WWW (World Wide Web), incluso redes tróficas de depredador-presa. Y para este caso también se tiene asociada una matriz de adyacencia con una ligera diferencia con respecto de la definición 2.

Definición 3. Sea $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, matriz de adyacencia de una red no dirigida. Se definen sus elementos de la siguiente manera:

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{Si existe un enlace del nodo } i \text{ al nodo } j \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Los enlaces de las redes dirigidas van a estar representados por flechas para que puedan mostrar adecuadamente las direcciones correspondientes entre los nodos.

¹⁰hay que completar esta idea, relacionada con la diagonal de unos. Autointeracción para la existencia del sistema, capacidad de carga. Argumentar bien.

Ejemplo 6. Se tiene la siguiente red dirigida de 10 nodos con exactamente 14 enlaces. La matriz de adyacencia asociada es la siguiente

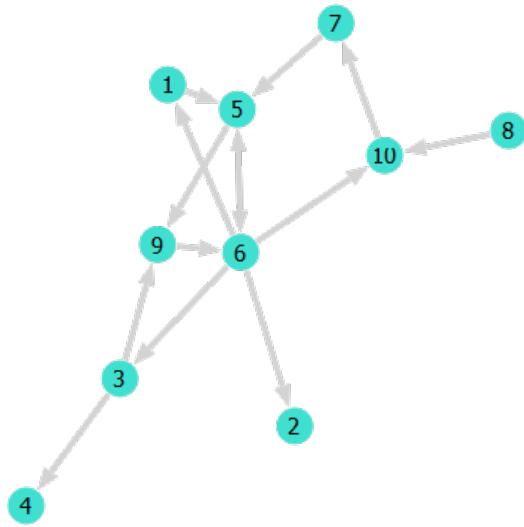


Figura 2.4: Red no dirigida de 10 nodos.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Capítulo 3

Apéndice

3.1. Demostraciones del texto

3.1.1. Solución de un sistema lineal

Se anexa la demostración al **Teorema 1** [1]:

Demostración. Se propone la función general $X(t) = e^{\lambda t} \vec{v}_0$. Entonces derivamos la función con respecto del tiempo

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= \lambda e^{\lambda t} \vec{v}_0 \\ &= e^{\lambda t} (\lambda \vec{v}_0) \\ &= e^{\lambda t} (A \vec{v}_0) \\ &= A(e^{\lambda t} \vec{v}_0) \\ &= AX(t)\end{aligned}$$

□

3.1.2. Solución de la ecuación logística

La ecuación logística (1.8) es de las pocas ecuaciones no lineales de las que podemos hallar una solución analítica única. A continuación nos adentraremos a hallar dicha solución. Reescribimos la ecuación de la siguiente manera

$$\frac{dN}{dt} = \frac{rN(K-N)}{K}$$

se utiliza la separación de variables para poder resolver la ecuación, re acomodando nos queda como

$$\frac{KdN}{N(K-N)} = rdt \quad \Longleftrightarrow \quad \int \frac{KdN}{N(K-N)} = \int rdt$$

El lado izquierdo lo resolvemos por fracciones parciales, se encomienda al lector comprobar que la siguiente igualdad es verdadera

$$\frac{K}{N(N-K)} = \frac{1}{N} + \frac{1}{K-N}$$

entonces las integrales ya resueltas nos quedan de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 \ln N - \ln(K - N) &= rt + c \\
 \ln \left(\frac{N}{K - N} \right) &= rt + c \\
 \frac{N}{K - N} &= e^{rt+c} \\
 N &= (K - N)Ce^{rt} \\
 N(1 + Ce^{rt}) &= KCe^{rt} \\
 N(t) &= \frac{KCe^{rt}}{1 + Ce^{rt}}
 \end{aligned}$$

Resolviendo el problema de condición inicial se establece que para $t = 0$ se tiene $N(0) = N_0$, por tanto la constante C nos queda como

$$C = \frac{N_0}{K - N_0}$$

Finalmente reajustando y acomodando términos, la solución de la ecuación logística es:

$$N(t) = \frac{KN_0e^{rt}}{(K - N_0) + N_0e^{rt}} \quad (3.1)$$

Comparado con la solución numérica se ve de la siguiente forma

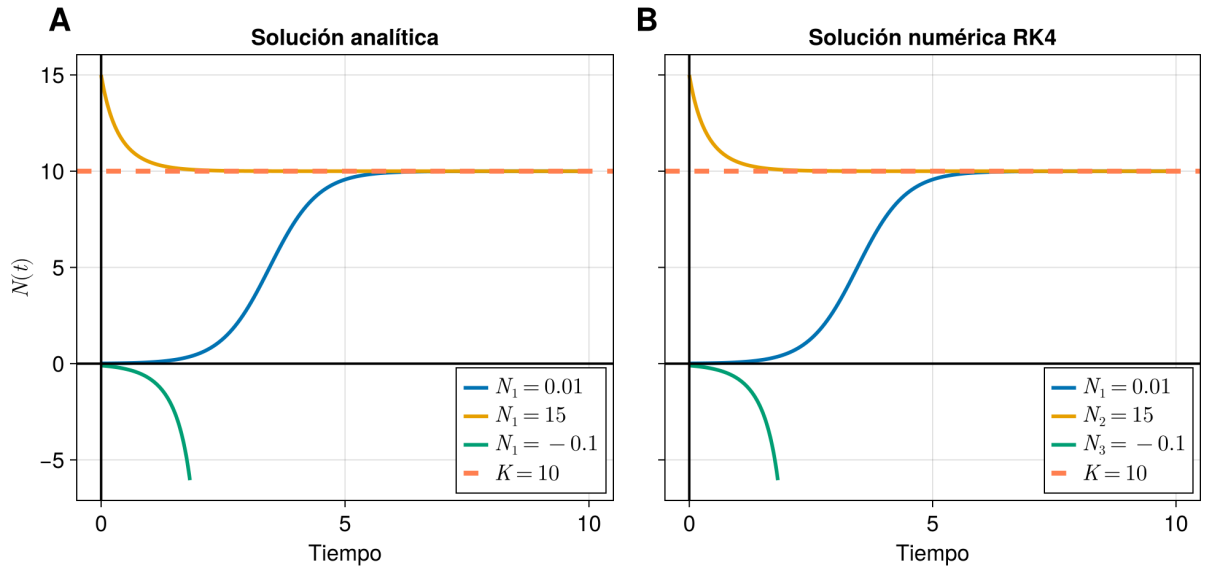


Figura 3.1: Ecuación logística con una tasa de crecimiento $r = 2$ y una capacidad de carga $K = 10$, se grafica para las mismas condiciones iniciales; (A) Solución analítica. (B) Solución numérica.

3.1.3. Solución del sistema presa-depredador

El sistema (1.9) tiene la dicha de poderse resolver de forma analítica al igual que la ecuación logística y se verá a continuación el procedimiento. Para ello definimos la siguiente regla de la cadena para $y(t)$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

sustituyendo las ecuaciones de (1.9) en $\frac{dy}{dx}$ se tiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\delta xy - \gamma y}{\alpha x - \beta xy}$$

Se factoriza lo necesario y se aplica separación de variables para poder integrar las ecuaciones y hallar las soluciones

$$\begin{aligned} x(\alpha - \beta y) dy &= y(\delta x - \gamma) dx \\ \int \frac{\alpha - \beta y}{y} dy &= \int \frac{\delta x - \gamma}{x} dx \end{aligned}$$

al integrar finalmente tenemos la solución implícita:

$$f(x, y) = \alpha \ln y + \gamma \ln x - \beta y - \delta x = c \quad (3.2)$$

Ahora veamos las curvas de nivel de la solución analítica en contraste con el espacio fase generado a través de las ecuaciones de (1.9):

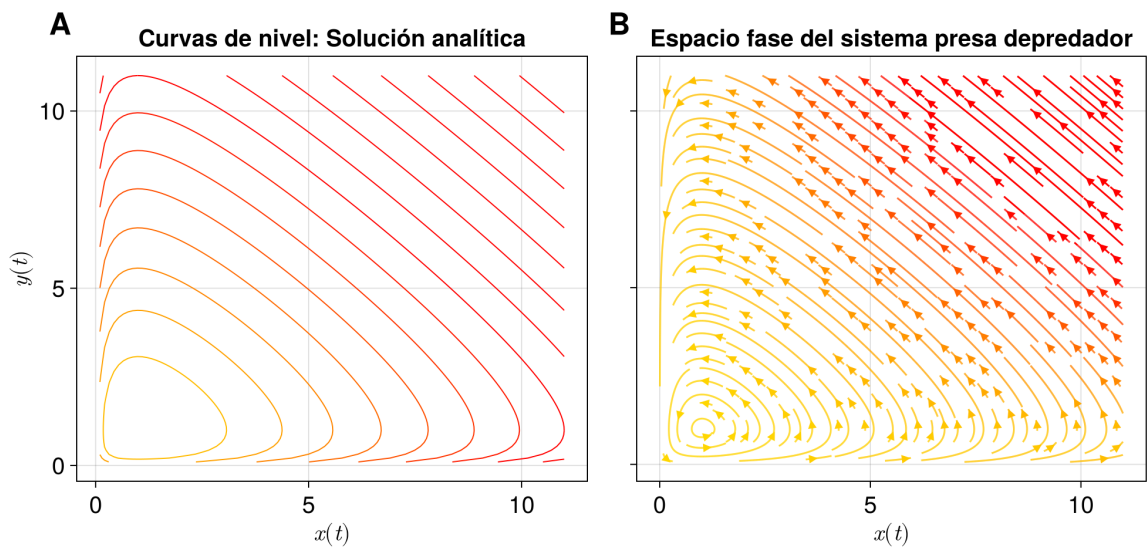


Figura 3.2: (A) Curvas de nivel utilizando la solución analítica (3.2). (B) Espacio fase generado a partir de las ecuaciones de (1.9).

3.2. Algoritmos y códigos

El trabajo presente se ha realizado bajo algoritmos, funciones y sintaxis del lenguaje Julia. En esta sección como en otras se estará anexando código en referencia a elementos presentes en el cuerpo de la tesis. Se anexa código de las figuras de los espacios fase de la sección (1.1.2).

El bloque de código (1) funciona para generar la Figura (1.1); sin embargo se puede modificar convenientemente para poder generar las Figuras (1.2) y (2.1), únicamente hay que definir las respectivas funciones del sistema para que se pueda generar el campo de direcciones apropiado.

Algorithm 1: Generación de gráficas de espacios fase de 2×2 con eigenvalores reales usando CairoMakie.

Data: Matrices de coeficientes.

Result: Espacios fase.

1 Inicializar el proceso;

```
using CairoMakie

xlim = (-3,3)          #Se establecen los límites que abarcarán las gráficas
ylim = (-3,3)

fSilla(X) = Point2(-3X[1],2X[2])  #Se definen las matrices de coeficientes
fAtractor(X) = Point2(-X[1],-4X[2]) #de los sistemas lineales
fRepulsor(X) = Point2(2X[1]+2X[2],X[1]+3X[2])

titles = ["Atractor","Punto silla", "Repulsor"] #Títulos para cada gráfica
functions = [fAtractor,fSilla,fRepulsor] #Arreglo de funciones para poder iterarlas
n = length(functions) #más adelante

#Se definen los colores de las líneas de flujo del espacio fase
cmaps = [[:red,:orange,:brown],[:red,:orange,:brown],[:red,:orange,:brown]]

#1. Se define la figura en sus dimensiones y el tamaño de letra.
#2. Se definen los ejes y la información que llevará con ellos.
#3. Se definen las líneas de campo
#4. Escondemos las y(t) para la figura de en medio y la de la derecha
#5. Se establecen los límites de cada gráfico
fig = Figure(size = (1000, 400), fontsize = 20)
axs = [Axis(fig[1, i], xlabel = "x(t)", ylabel = "y(t)", title = titles[i],
aspect = 1, backgroundcolor = :white) for i in 1:n]
[streamplot!(axs[i], functions[i], -4 .. 4, -4 .. 4, colormap = cmaps[i],
gridsize = (32, 32), arrow_size = 9) for i in 1:n, density = 0.1]
[hideydecorations!(axs[i], grid = false, ticks = false) for i in 2:n]
[limits!(axs[i], xlim...,ylim...) for i in 1:n]
fig          #Se imprime la figura
```

Ejecutar el código y obtener el resultado;
