



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

CONDICIONES DE ESTABILIDAD EN LOS SISTEMAS DE  
LOTKA-VOLTERRA GENERALIZADO.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A :

RODRIGO VEGA VILCHIS

TUTOR

DR. SERGIO ANTONIO ALCALÁ CORONA



CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, 2024

*A mis padres...*

*A mi hermano...*

# Agradecimientos



# Resumen



# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>Resumen</b>	<b>v</b>
<b>Introducción</b>	<b>xv</b>
<b>1. ¿Será estable un gran sistema complejo?</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes . . . . .	2
1.2. Planteamiento del problema . . . . .	4
<b>2. Generalizando al sistema de Lotka-Volterra</b>	<b>7</b>
2.1. Sistema de especies en competencia. . . . .	7
2.2. Caso particular para $N = 2$ . . . . .	8
2.3. Generalizando a N especies . . . . .	12
2.3.1. Red de incidencias . . . . .	15
2.3.2. Tipos de interacciones . . . . .	18
2.4. Jacobiano del sistema: Matriz de interacciones . . . . .	23
2.5. Estabilidad . . . . .	26
2.5.1. Distribución de eigenvalores . . . . .	27
2.5.2. Transición de May . . . . .	30
<b>3. Condiciones de estabilidad</b>	<b>35</b>
3.1. Series de tiempo . . . . .	36
3.2. Matriz de interacciones . . . . .	38
3.3. Leyes Circulares . . . . .	41
3.3.1. Análisis para $N = 50$ . . . . .	43



# Índice de figuras

2.1.	Campo vectorial de las soluciones del sistema propuesto de dos especies. . . . .	10
2.2.	Red de Karate de Zachary . . . . .	13
2.3.	Red no dirigida de 10 nodos. . . . .	14
2.4.	Red no dirigida de 10 nodos. . . . .	15
2.5.	Red de incidencias de 8 nodos bajo la topología de una red aleatoria dirigida con $p = 0.15$ y una matriz aleatoria con $\mu = 0$ y $\sigma = 0.2$ . . . . .	17
2.6.	Sistema de Lotka-Volterra con interacciones de cooperación dados por las ecuaciones (2.9). Capacidades de carga: $K_x = 2$ y $K_y = 3$ . <b>(A)</b> Series de tiempo del sistema para las especies $x(t)$ y $y(t)$ bajo la condición inicial $(1, 2)$ . <b>(B)</b> Espacio fase del sistema con sus puntos fijos asociados, se muestra solamente un único punto fijo estable. . . . .	21
2.7.	Series de tiempo para las interacciones comensalismo, amensalismo y depredación. <b>(A)</b> Para el comensalismo se definió $\alpha_{21} = 0$ y $\alpha_{12} = -\frac{1}{2}$ . <b>(B)</b> Para el amensalismo se consideró $\alpha_{21} = 0$ y $\alpha_{12} = \frac{1}{2}$ <b>(C)</b> Para la depredación se consideró $\alpha_{21} = -1$ y $\alpha_{12} = \frac{1}{2}$ . . . . .	22
2.8.	Distribución de eigenvalores que cumplen la Ley Circular de May. Para ambos sistemas se consideró $N = 100$ , una FDP normal centrada en $\mu = 0$ y con $\sigma = 0.2$ para una conectancia $C = \frac{1}{\sigma^2 N} - 0.03$ . <b>(A)</b> Considerando una matriz de interacciones estructuralmente simétrica. <b>(B)</b> Considerando una matriz de interacciones puramente aleatoria. . . . .	28
2.9.	Distribución de eigenvalores que cumplen la Ley Elíptica de Allesina. Para ambos sistemas se consideró $N = 100$ , dos FDP normal respectivamente, una conectancia $C = 0.12$ y en ambas se debe de considerar a la matriz de interacciones como estructuralmente simétrica. <b>(A)</b> Se considera una FDP normal para la parte triangular superior con $\mu_1 = 0.1$ y $\sigma_1 = 0.1$ y para la parte inferior se considera otra FDP normal con $\mu_2 = 0.3$ y $\sigma_2 = 0.2$ . <b>(B)</b> Se considera una FDP normal para la parte triangular superior con $\mu_1 = -0.1$ y $\sigma_1 = 0.1$ y para la parte inferior se considera otra FDP normal con $\mu_2 = 0.3$ y $\sigma_2 = 0.2$ . . . . .	29

2.10. Matrices de May estructuralmente simétricas. Se ha integrado el sistema para 100 conectancias equidistantes en el intervalo $[0, 1]$ . Se considera también el conjunto promedio de la fuerza de las interacciones $\tilde{\sigma} = \{0.1, 0.2, \dots, 1.0\}$ . Para cada valor de la conectancia se consideraron 1000 simulaciones rescatando por cada valor el número de simulaciones que resultaron estables. . . . .	30
2.11. Matrices de May estructuralmente simétricas. Se ha integrado el sistema para 100 conectancias en escala $\log_{10}$ en el intervalo $[0, 1]$ . Se considera también el conjunto promedio de la fuerza de las interacciones $\tilde{\sigma} = \{0.1, 0.2, \dots, 1.0\}$ . Para cada valor de la conectancia se consideraron 1000 simulaciones rescatando por cada valor el número de simulaciones que resultaron estables. . . . .	31
2.12. Transición entre redes de May dirigidas vs No dirigidas. <b>(A)</b> Se considera para $\sigma = 0.2$ <b>(B)</b> Se considera para $\sigma = 0.6$ . . . . .	31
2.13. Transiciones en función de la fuerza de interacción $\sigma$ <b>(A)</b> Se considera para un conjunto de conectancias $\tilde{C}$ . Por cada valor de $\sigma$ se consideran 1000 matrices de May estructuralmente simétricas; en cada simulación se contabilizan los sistemas estables mediante el cálculo de la parte real de sus respectivos eigenvalores. <b>(B)</b> Caso particular para $C = 0.1$ ; se consideran las diferencias entre la matriz de May estructuralmente simétrica y la matriz puramente aleatoria. . . . .	32
2.14. Variaciones en la transición para la matriz de May estructuralmente simétrica y para matriz puramente aleatoria. Se consideró el valor de la conectancia $C = 0.6$ . . . . .	33
2.15. Re-escalamiento del eje $x$ para visualizar las transiciones de la conectancia $C$ y la fuerza promedio de las interacciones $\sigma$ . Para este caso particular se escogió $C = \sigma = 0.2$ . En ambos casos se consideran las transiciones para las matrices de May estructuralmente simétricas y las puramente aleatorias. . . . .	34
2.16. Re-escalamiento del eje $x$ para visualizar las transiciones de la conectancia $C$ y la fuerza promedio de las interacciones $\sigma$ . Para este caso particular se escogió $C = \sigma = 0.6$ . En este caso a diferencia del anterior, se logra apreciar la desviación que ocurre en <b>(A)</b> cuando $\sigma$ se va acercando a 1.0. . . . .	34
3.1. Series de tiempo para el sistema de competencia de especies. Se emplea una matriz de incidencias de $100 \times 100$ cuyas entradas son de una distribución uniforme en el intervalo $[0, 1]$ . En este caso particular no se considera a $\sigma$ , solamente el tamaño de la red con $p = 1.0$ , es decir que es una red con el número máximo de enlaces posibles. En este caso la dinámica no sobrepasa la capacidad de carga puesto que las 100 especies se encuentran compitiendo y obedecen fielmente al comportamiento logístico. . . . .	36

3.2. (A) Series de tiempo para el sistema de especies en competencia asociada a una matriz de incidencias de $100 \times 100$ , con $\sigma = 0.2$ y $p = 0.35$ . (B) Series de tiempo para el sistema de especies en competencia asociada a una matriz de incidencias de $100 \times 100$ nodos con $\sigma = 0.2$ y $p = 0.5$ . . . . .	37
3.3. Distribución de la diagonal en matrices de interacción $\mathcal{I}$ del sistema generalizado para $N = 100$ , $\sigma = 0.2$ y $p \in \{0.3, 0.4, 0.5, 0.6\}$ . . . . .	40
3.4. Distribución de eigenvalores para el conjunto de jacobianos con los parámetros $N = 100$ , $\sigma = 0.2$ y $p \in \{0.3, 0.4, 0.5, 0.6\}$ . . . . .	41
3.5. Distribución de eigenvalores del sistema generalizado para $N = 100$ , $\sigma = 0.2$ y $p = 0.6$ . Se consideran $N$ Leyes Circulares cuyo radio y centro es cada valor de la diagonal de la matriz de interacciones $\mathcal{I}$ asociada. . . . .	42
3.6. Caso particular de la Figura (3.5) para el valor de la diagonal $\alpha_{ii} = 32.46 \in \mathcal{I}$ . . . . .	42
3.7. Distribución de 500 diagonales resultantes de 100 sistemas estables/cuasi-estables para $N = 50$ . Cuando $\sigma$ y $p$ tienden hacia 1, aumenta la tendencia hacia distribuciones de cola pesada. . . . .	44
3.8. Ajuste lineal entre los promedios y las desviaciones estándar de cada una de las 7800 simulaciones realizadas bajo los parámetros que dicta la Tabla (3.1). . . . .	45
3.9. Evolución del coeficiente de variación en función de $\sigma$ y $p$ . Cada coeficiente se muestra para cada distribución disponible según la Tabla (3.1). . . . .	47
3.10. Modas de las distribuciones de diagonales disponibles dadas por la Tabla (3.1). . . . .	49
3.11. Cada una de las cantidades se considera con base en las simulaciones disponibles. (A) Evolución de las trazas de los jacobianos del sistema. (B) Evolución de las medias de las diagonales de los jacobianos del sistema. (C) Evolución de la desviación estándar de las diagonales de los jacobianos del sistema. . . . .	51
3.12. (A) Distribución de valores propios de 100 jacobianos para el caso $\sigma = 0.5$ , $p = 0.4$ . Se agrega una ley circular correspondiente al valor medio de la distribución de diagonales. (B) Relación entre la parte real de los valores propios con las diagonales de los jacobianos considerados. . . . .	52
3.13. (A) Ajuste lineal de la relación entre las medias de las $Re(\bar{\lambda})$ con las medias de las $d_{kk}(\sigma_i, p_j)$ de los Jacobianos del sistema. (B) Ajuste lineal de la relación entre las medianas $Re(\bar{\lambda})$ con las medianas de las $d_{kk}(\sigma_i, p_j)$ de los Jacobianos del sistema. (C) Ajuste lineal de la relación entre las modas de $Re(\bar{\lambda})$ con las modas de las $d_{kk}(\sigma_i, p_j)$ de los Jacobianos del sistema. . . . .	53



# List of Algorithms



# **Introducción**



# Capítulo 1

## ¿Será estable un gran sistema complejo?

Dentro del marco de los sistemas complejos se manejan varias ramas muy interesantes que le dan su esencia, desde los sistemas dinámicos discretos, dinámica no lineal, teoría de redes complejas, termodinámica fuera de equilibrio, modelos basados en agentes, entre otras. Cada una de ellas aporta un valioso contenido al sistema complejo que se quiera estudiar y analizar dependiendo de sus componentes. Delimitar el área de los sistemas complejos aún resulta una labor complicada debido a su gran *diversidad*, sin embargo, se sabe de la existencia de ciertas características que todo sistema complejo comparte. Los sistemas complejos cuentan con entes: *conectados, interdependientes, dependientes del camino, emergentes* entre otros. El presente trabajo tiene como propósito mostrar al lector cada una de estas características con el objeto de estudio que se va a proponer como piedra angular.

Para llegar a conocer nuestra piedra angular primero será necesario delimitar las áreas que intervendrán en la discusión constante de este texto. Se ocupará un *sistema dinámico no-lineal* bajo el soporte de una *red compleja*. La Dinámica no lineal es la rama de los sistemas dinámicos continuos en donde el comportamiento del sistema no se rige por la suma de los comportamientos de sus descriptores. Por ejemplo, una neurona y la suma del comportamiento de las neuronas de un cerebro no puede explicar la emergencia de la conciencia. Por otro lado las redes complejas es la extensión de la *teoría de grafos* aplicada a escenarios comunes de la naturaleza y de la vida cotidiana, tales como redes ecológicas, redes sociales, redes comerciales etc. Su importancia radica en las propiedades que se le pueden extraer para interpretar información sobre la estructura de la red y de la red misma.

## 1.1. Antecedentes

Por primera vez en 1978, Robert May realizó un trabajo trascendente para los sistemas complejos en el ámbito de la estabilidad [cita<sup>1</sup>], si se considera una red ecológica en la que participan  $n \gg 1$  especies, la pregunta central es ¿de qué dependerá de que dicho sistema pueda ser estable o no? esta pregunta pretende indagar las condiciones que hacen que el sistema sea estable; en términos matemáticos se refiere a que exista una tendencia hacia un atractor global, donde convergen todas las soluciones. En otras palabras, cómo deben ser los parámetros que gobiernan al sistema y que hacen que las poblaciones que lo constituyen se estabilicen al cabo de cierto tiempo y que además sean resistentes ante fluctuaciones externas. Para definir estas redes ecológicas, primero May define un sistema no lineal de carácter

$$\frac{dX(t)}{dt} = \mathbf{F}(X(t))$$

Donde  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  son las ecuaciones que constituyen la dinámica de cada población del sistema y  $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  son las poblaciones en sí. Usando teoría de perturbaciones, se quiere explorar que sucede alrededor de un punto crítico que es aquel que cumple  $F(X^*(t)) = 0$ , para ello se tiene la ecuación

$$X(t) = X^* + \mathbf{p}(t)$$

donde  $\mathbf{p}(t)$  es en concreto el conjunto de perturbaciones alrededor de  $X^*$ . Realizando una expansión en series de Taylor se tiene

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = F(X^*) + \left. \frac{dF}{dX} \right|_{X^*} \mathbf{p}(t) + \mathcal{O}(\mathbf{p}^2)$$

Considerando que  $\mathbf{p}(t)$  son pequeñas perturbaciones, se pueden despreciar los términos no lineales y quedarnos únicamente con la primera derivada, finalmente se tiene

$$\frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = A\mathbf{p}(t)$$

donde  $A$  es una matriz cuadrada a la que May denomina como *community matrix*<sup>2</sup> y sus elementos son tal que  $a_{ij} = \left. \frac{\partial F_i}{\partial X_j} \right|_{X^*}$ . Esta es una forma de ver al sistema de manera local alrededor del punto de equilibrio, realizar esta aproximación es definir un plano tangente en  $X^*$  y así tener la capacidad de poder investigar que sucede aquí, en términos de la dinámica y estabilidad. Para ello se propone una solución del sistema linealizado, el cual puede ser resuelto de manera analítica

$$p_i(t) = \sum_{j=1}^n c_{ij} e^{\lambda_j t} \vec{v}_j$$

en este caso los  $\lambda_j$  son el conjunto de eigenvalores de  $A$  y los  $\vec{v}_j$  sus eigenvectores asociados. De esta ecuación se puede percibir que el signo de los eigenvalores es sustancial para que el sistema sea estable

---

<sup>1</sup>cita

<sup>2</sup>También conocida como matriz de interacciones.

o no. Si todos ellos tienen parte real negativa, entonces será estable de lo contrario (con al menos uno que no lo sea) será inestable. Esto es crucial porque no será necesario resolver el sistema de ecuaciones diferenciales para determinar si es estable o no, basta con conocer el signo de la parte real de sus eigenvalores y con ello determinar si el sistema es estable o no. Por esta razón May ha dejado de lado el proceso de linearización del sistema y se enfoca exclusivamente en las cualidades de la matriz de interacciones  $A$ .

May tiene una forma de definir estas matrices de interacción, primeramente establece que la diagonal de  $A$  tiene que estar fijado a un valor  $-d$  ya que considera que estos valores fungen el papel de auto-regulación de cada una de las especies; el sistema sea estable o no, es importante que considere esta característica. Posteriormente, el resto de las entradas de la matriz  $a_{ij} \in A$  con  $i \neq j$  están sampleadas a partir de una distribución estadística, centrada en  $\mu = 0$  y con desviación estándar  $\sigma$ , de manera directa se decide utilizar una función de densidad de probabilidad normal. La forma de samplear estos valores se va a dar mediante un parámetro  $C$  llamado *conectancia*, y la regla para definirlos es que para cada entrada de la matriz con  $i \neq j$ , si se cumple  $r < C$  entonces  $a_{ij} = x$ , donde  $x$  es un valor aleatorio de la FDP normal. En caso contrario ( $r \geq C$ ) el valor será cero  $a_{ij} = 0$ .

Al parámetro  $\sigma$  también se le conoce como fuerza de interacción promedio, y no es más que el peso de los enlaces que se relacionan entre especies. Estos parámetros, en conjunto con el número de entes interactuantes  $n$ : define la complejidad del sistema, y en concreto las condiciones necesarias que se deben de cumplir para que el sistema sea estable. Estas condiciones están bien estudiadas y definidas, y las conclusiones se pueden consultar en [cita<sup>3</sup>], además en los siguientes capítulos se hablarán de ello con cierta precisión.

Definir un sistema estable significa hallar todos los eigenvalores del sistema linearizado con parte real negativa; deja de ser estable cuando existe al menos un eigenvalor con parte real positiva. Al visualizar la distribución de eigenvalores en el plano complejo, May establece que ésta se ajusta adecuadamente a un círculo con centro y radio  $-d$ , tal y como esta definida la diagonal de la matriz de interacciones  $A$ . Si el sistema es estable: la distribución de eigenvalores se ajusta a esta *Ley Circular*, de lo contrario los eigenvalores se salen de este confinamiento haciendo énfasis en la parte real de los mismos.

En resumen, la estabilidad de los sistemas dados por las matrices de interacción de May dependen exclusivamente de los parámetros que las construyen ( $\sigma$ ,  $C$  y  $N$ ). Por lo tanto es posible que exista un parámetro crítico que relaciona los anteriores en uno solo, capaz de definir un régimen de estabilidad y otro de inestabilidad siendo éste el punto de inflexión entre ambos regímenes. El parámetro en

---

<sup>3</sup>cita

concreto se encuentra definido por la siguiente desigualdad  $\sigma < (NC)^{-1/2}$  y del que se puede obtener  $\sigma\sqrt{NC} < 1$ .

Este parámetro sugiere que existirán diversas condiciones para que un sistema sea estable y dependerá de la relación de los 3 parámetros. Existe una relación estrecha entre  $\sigma$  y  $C$ , sin embargo, el parámetro  $N$  define complejidad del sistema en términos del tamaño del mismo, entre más grande sea más influyente es la relación entre  $\sigma$  y  $C$ . La desigualdad lleva a concluir que la estabilidad en los sistemas depende de que  $\sigma$  sea inversamente proporcional a  $C$  y  $N$ ; un sistema será estable si existen pocas conexiones en la red y que las que existen tengan una fuerte interacción. En caso contrario, una red bien conectada podrá ser estable únicamente con interacciones débiles. La interacción débil o fuerte en este contexto es ambigua y ciertamente subjetiva: las interacciones débiles y fuertes se considerarán en los valores promedio  $\sigma \approx 0$  y  $\sigma \approx 1$  respectivamente de la FDP que samplea las matrices de interacción de May. Este concepto adquiere mayor significado cuando estos valores se comprometen con la desigualdad antes mencionada.

## 1.2. Planteamiento del problema

Como bien podría pensarse, el trabajo de May esta publicado con todo y sus conclusiones ¿Qué se podría extraer de aquí? La propuesta de esta tesis es poder mostrar al lector una alternativa de construcción de estos sistemas desde el principio, considerando una serie de pasos que May asume *a priori*. Primeramente se piensa trabajar con el sistema de Lotka-Volterra generalizado (2.1), mismo que describe dinámica de las especies en términos de su población. Este es un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales y se piensa construir para  $N \gg 1$ , por lo que se contempla utilizar integración numérica mediante algoritmos computacionales para lograr este cometido.

Para ello debe de modelarse con una serie de interacciones que se consideran en el sistema y que viene dado por los coeficientes  $\alpha_{ij}$  que multiplican a las especies interactuantes  $x_j$  con la especie  $x_i$ . Estos coeficientes formarán parte de una matriz que más adelante se definirá denominada como *matriz de incidencias*, esta matriz únicamente guarda la información de como son las interacciones del sistema (2.1). La ventaja de esta matriz es que en su construcción se pueden considerar diferentes topologías de red, en esta tesis exclusivamente se ha empleado el modelo de red aleatoria de Erdös–Rényi. Al emplear este modelo, la matriz de incidencias guarda en sí un parámetro  $p$  que es la probabilidad de conexión entre nodos. Además se añaden pesos a los enlaces para representar las interacciones del sistema; cada uno de estos enlaces también estarán sampleados a partir de una FDP normal.

De esta forma se construye apenas el modelo del sistema, el cual será integrado numéricamente con

el algoritmo Runge-Kutta de orden 4. Realizar esto nos dará oportunidad de conocer las series de tiempo resultantes y visualizar la dinámica del sistema además de indicarnos si son estables o no. Sin embargo, lo que nos interesa es conocer el atractor al que tienden los sistemas que resultaron estables (bajo los parámetros antes mencionados) para poder determinar el Jacobiano del sistema y evaluarlo en este punto crítico ( $X^*$ ).

Este proceso es todo aquello que May ha asumido *a priori*, al construir el Jacobiano mediante la serie de pasos antes mencionados, y al evaluarlo en  $X^*$  se podrá llegar a la matriz de interacciones del sistema que nos indicará como es la dinámica del sistema de manera local alrededor del atractor. Con el resultado de esta matriz interacciones se pueden hacer varias cosas: se investigará como es la distribución de eigenvalores en el plano complejo y si coincide con los resultados de May. Sin embargo el principal objetivo de esta tesis es explorar la cualidad de los parámetros que forman la matriz de incidencias para determinar que el sistema sea estable o no. Dicho de otra forma es hallar las condiciones de estabilidad en función de  $p$ ,  $\sigma$  y  $N$  para las matrices de interacción provenientes de (2.1).

Para lograr este cometido se va a repetir todo el proceso para diferentes valores de  $\sigma$  y  $p$  concentrados en el intervalo  $[0, 1]$  con un paso de 0.1 entre cada valor del intervalo. Y estos valores para los siguientes números de especies  $N = 25, 50, 100$ . Al lograr esta misión, se busca comparar estos resultados con lo que ha estipulado May y si se relacionan de alguna forma. En esta dirección, explorar si el parámetro crítico y la forma de las transiciones entre el régimen estable e inestable se siguen respetando o presenta variaciones.

Con estos elementos se presenta la siguiente hipótesis: Los sistemas de Lotka-Volterra generalizados bajo la topología del modelo de red aleatoria, presentan una transición de fase entre un régimen estable y otro inestable, así mismo, ésta depende de los parámetros que dan origen a la matriz de incidencias ( $p$ ,  $\sigma$  y  $N$ ).



## Capítulo 2

# Generalizando al sistema de Lotka-Volterra

### 2.1. Sistema de especies en competencia.

El sistema de Lotka-Volterra de especies en competencia es una de las grandes extensiones del *modelo logístico* aplicado a  $N$  especies lo que se traduce en  $N$  ecuaciones diferenciales. Es uno de los sistemas más utilizados para poder comprender la naturaleza de la dinámica no lineal; en este sistema se exploran espacios fase más complejos con múltiples puntos fijos y por lo tanto una estabilidad que no es trivial de determinar. Los términos no lineales de estas ecuaciones son cuadráticos y representan la interacción entre la especie  $i$  y la especie  $j$ . El conjunto de ecuaciones diferenciales que representa al sistema es el siguiente:

$$\frac{dx_i}{dt} = r_i x_i \left( 1 - \frac{\sum_{j=1}^N \alpha_{ij} x_j}{K_i} \right) \quad (2.1)$$

Donde  $i \in \{1, \dots, N\}$ , las ecuaciones consideran una tasa de crecimiento  $r_i$  para la especie  $i$ , una capacidad de carga  $K_i$  que limita hasta cierto punto su crecimiento tal y como se discutió en el capítulo anterior, y se considera su respectiva interacción con la especie  $j$  dado por el término  $x_i x_j$  cuya “fuerza” de interacción esta dada por los coeficientes  $\alpha_{ij}$ . En un primer acercamiento, cuando nos referimos a “fuerza” de interacción nos referimos a la capacidad de la especie  $j$  de intervenir sobre la especie  $i$ , entre más grande sea su coeficiente más afecta a la dinámica de la especie  $i$ .

Como bien sabemos hasta ahora, el sistema llega a ser tan complejo debido a los términos no lineales que ya no es posible poder acceder a una solución analítica general de manera directa o trivial, ya que podrían existir múltiples de ellas tal y como se discutía en el capítulo anterior con base en el teorema de existencia y unicidad<sup>1</sup>; para fines de este trabajo únicamente nos concentraremos en las soluciones aproximadas dadas por integración numérica, particularmente con RK4 por su precisión

---

<sup>1</sup>Referenciar teorema de nuevo.

garantizada<sup>2</sup>.

## 2.2. Caso particular para $N = 2$

Conviene resolver y analizar el sistema para 2 especies y con base en su experiencia poder extender los aprendizajes al caso generalizado de  $N$  especies. Las ecuaciones de (2.1) se reducen al siguiente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = r_1 x_1 \left(1 - \frac{a_{11}x_1}{k_1} - \frac{a_{12}x_1x_2}{k_1}\right) \\ \dot{x}_2 = r_2 x_2 \left(1 - \frac{a_{21}x_1x_2}{k_2} - \frac{a_{22}x_2}{k_2}\right) \end{cases}$$

Para este caso particular y en general, normalmente se tendrá una tasa de crecimiento y una capacidad de carga personalizada para cada especie, lo que es razonable con el hecho de que cada especie crece a un ritmo determinado y también es limitada de manera determinada. Por otro lado, los coeficientes  $\alpha_{ij}$  formarán parte de una *matriz de incidencias* entre especies definida de la siguiente manera

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Es apreciable que los términos de la diagonal se encuentran fijados en  $\alpha_{ii} = 1$  respectivamente, más adelante se discutirá sobre esta característica y se dará una explicación detallada del por qué debe ser así, por el momento solo nos enfocaremos en la dinámica que produce el sistema.

**Ejemplo 1.** Para ello definimos el siguiente sistema de especies en competencia

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x \left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy \\ \frac{dy}{dt} &= 3y \left(1 - \frac{y}{3}\right) - 2xy \end{aligned} \quad (2.3)$$

De este sistema se pueden notar algunas características: se tiene para cada especie una tasa de crecimiento y una capacidad de carga específica o personalizada. Por ejemplo para la ecuación  $\dot{x}$  se tiene una tasa de crecimiento y capacidad de carga de 2 para la especie  $x$  y para la especie  $y$  estos valores son iguales a 1; para la ecuación  $\dot{y}$  se tiene una tasa de crecimiento y capacidad de carga de 3 para la especie  $x$  y para la especie  $y$  se tiene una tasa de crecimiento de 2 y una capacidad de carga de 1.

Aunque este sistema tal cual no tiene una solución analítica, si es posible explorar acerca de su comportamiento. En principio se pueden hallar sus puntos fijos que nos hablan de la estabilidad del sistema. Para hallar puntos fijos es necesario encontrar las raíces de este sistema. La solución trivial siempre será  $(0, 0)$ , de ahí se tienen que igualar a cero las ecuaciones para hallar los otros puntos

---

<sup>2</sup>Puedes consultar su implementación en el apéndice, sección (??).

críticos.

$$\begin{aligned} 2x - x^2 - xy &= 0, && \text{suponiendo que } y = 0 \\ 2x &= x^2 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

y para  $\dot{y}$  se tiene

$$\begin{aligned} 3y - y^2 - 2xy &= 0, && \text{suponiendo que } x = 0 \\ 3y &= y^2 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Por tanto tenemos para  $\dot{x}$  el punto fijo  $(2, 0)$  mientras que para  $\dot{y}$  se tiene el punto fijo  $(0, 3)$ . Aún es posible hallar un último punto fijo que es para cuando ambas ecuaciones se hacen cero.

$$\begin{aligned} 2x - x^2 - xy &= 0, && \text{Se despeja } y \text{ de esta ecuación.} \\ xy &= x(2 - x) \\ y &= (2 - x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3(x - 2) - (x - 2)^2 - 2x(x - 2) &= 0 \\ 3x - 6 - (x^2 - 4x + 4) - 2x^2 + 4x &= 0, && \text{Reduciendo términos se tiene.} \\ x^2 - 3x + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Al resolver esta última ecuación y sustituyendo en  $y$  se encuentra que el último punto fijo que corresponde a  $(1, 1)$ . Como podemos ver ya no solo tenemos 2 puntos fijos (como en el sistema presa-depredador (??)) sino hasta 4 puntos fijos y estos irán aumentando de acuerdo al número de especies consideradas. Sus estabilidades pueden ser variadas pero para este caso veremos que se tendrá un repulsor (el origen), dos atractores (los puntos que se sitúan en los ejes) y un punto silla (el último que determinamos).

Dependiendo de la elección de condiciones iniciales es la forma en la que va a evolucionar el sistema, en esencia se tienen dos opciones generales, o converge a un atractor de un eje o al otro, donde cada eje corresponde a una especie y por lo tanto la predominancia de una se traduce en la extinción de la otra. Lo dicho hasta este punto lo podremos sustentar a través de un gráfico de espacio fase (Figura (2.1)), sin embargo más adelante veremos una técnica para poder conocer la estabilidad de los puntos fijos de forma analítica ya que no siempre podremos contar con la herramienta visual/cualitativa; cuando se tengan más de 3 especies, el espacio fase es  $N$ -dimensional y por lo tanto imposible de representar.

Una vez determinando el espacio fase del sistema, podemos comprobar la estabilidad de los puntos fijos antes encontrados, de tal modo que todas las posibles soluciones terminan convergiendo a uno de los dos atractores posibles. Además de ello podemos observar las dos isoclinas del sistema que no son más que el conjunto de puntos donde se satisface:

$$\dot{x} = f(x, y) = 0, \quad \dot{y} = g(x, y) = 0$$

a lo largo de la isocлина de  $x$  la componente en  $x$  es cero y sus soluciones únicamente apuntarán hacia arriba o hacia abajo, dependiendo de la zona. De modo similar ocurre para la isocлина de  $y$ ,

en donde la componente  $y$  es cero y sus soluciones a lo largo de la recta solo pueden ir hacia la derecha o izquierda de forma horizontal. Nuevamente podemos apreciar al punto silla como inestable ya que posicionados ahí y ante una mínima perturbación, el sistema se alejará de este punto e irá convergiendo a cualquiera de los dos atractores (dependiendo de la perturbación). Por último es bien sabido que del origen todas las soluciones divergen debido a la tasa de crecimiento que genera un aumento natural en las poblaciones.

Al tratarse de un sistema simple de dos ecuaciones, se tiene la fortuna poder contar con el espacio fase que nos brinda información crucial sobre su estabilidad, pero ¿Qué ocurre cuando tenemos un sistema de más de 3 especies? como se ha mencionado, la representación visual ya no está disponible porque cada eje del espacio fase representa a una de las especies que intervienen. A lo mucho podemos acceder a sub-espacios del hiper-espacio fase pero además de que sería engorrosa la generación de cada gráfica, al final solo obtendríamos información a nivel local.

Si el número de ecuaciones del sistema (2.1) llega a ser considerablemente alto, conviene mejor ejecutar una técnica analítica para poder conocer la estabilidad de cada uno de los puntos fijos del sistema, a dicha técnica se le conoce como *linealización*<sup>3</sup>. Particularmente para nuestro sistema, el proceso consiste en bajar el grado de las ecuaciones no lineales para convertirlo a un sistema lineal, y poder operar como se hizo en el capítulo anterior. Los términos no lineales de nuestro sistema (2.1) son cuadráticos y basta con bajarles su grado por medio de derivadas parciales. Por lo tanto el proceso de linearización consiste en convertir el sistema (2.1) en un sistema lineal aplicándole el *jacobiano*.

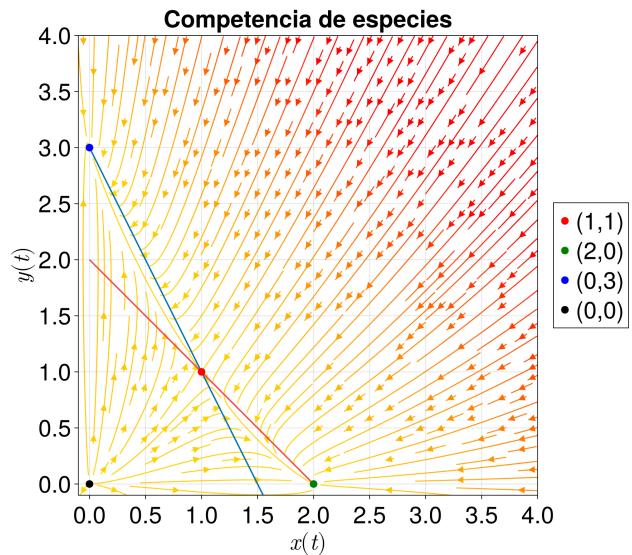


Figura 2.1: Campo vectorial de las soluciones del sistema propuesto de dos especies.

<sup>3</sup>agregar referencia

**Definición 1.** Sea la función vectorial  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , entonces el sistema de Lotka-Volterra de especies en competencia se define en su forma vectorial del la siguiente manera

$$\mathbf{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_n(\vec{x}) \end{pmatrix}, \quad \text{donde } \vec{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n. \quad (2.4)$$

donde cada una de las componentes de  $\mathbf{F}(\vec{x})$  corresponde con las funciones del sistema (2.1), mientras que las componentes del vector  $\vec{x}$  corresponden con las especies involucradas. Por lo tanto el sistema (2.1) puede ser re-escrito de la siguiente forma

$$\dot{\vec{x}}(t) = \mathbf{F}(\vec{x}(t)), \quad \text{considerando } \dot{\vec{x}}(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt} \quad (2.5)$$

Nos conviene definir al sistema de esta manera para que podamos ver directamente como se aplica el Jacobiano

$$\mathbb{J}_{\mathbf{F}}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(\vec{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\vec{x})}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(\vec{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

El jacobiano resultante al ser evaluado en los puntos fijos del sistema es ahora un sistema lineal al que le podemos extraer sus eigenvalores para poder conocer su estabilidad. Esta matriz es conocida como *matriz de interacciones* ya que guarda en ella la información necesaria para determinar la estabilidad de los puntos fijos del sistema. Sin embargo esta información también se esta limitada a nivel local, pues no será posible que nos brinde información de algún otro punto fijo.

Para validar esta aseveración continuaremos con nuestro ejemplo y determinaremos la estabilidad de cada uno de los puntos fijos relacionándolos con lo mostrado en el espacio fase. Para ello aplicamos el jacobiano al sistema de ecuaciones quedándonos con:

$$\mathbb{J}_{\mathbf{F}}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} r_1 - \frac{2r_1x_1 + r_1a_{12}x_2}{K_1} & -\frac{r_1a_{12}x_1}{K_1} \\ -\frac{r_2a_{21}x_2}{K_2} & r_2 - \frac{2r_2x_2 + r_2a_{21}x_1}{K_2} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

debido a la matriz de incidencias (2.2), se tiene que los valores de la diagonal son  $a_{ii} = 1$  y corresponden con las auto-interacciones del sistema. Sustituyendo y operando sobre nuestro sistema, al evaluar los puntos fijos antes encontrados se tienen las siguientes matrices de interacciones:

$$\mathbb{J}_{(2,0)} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{J}_{(0,3)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{J}_{(1,1)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{J}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Como previamente se ha revisado, los eigenvalores determinan la estabilidad de un sistema lineal. Se establece que mientras ellos tengan parte real negativa se asegurará que el punto fijo será estable y que en otro caso será inestable. Por lo tanto los eigenvalores de las primeras dos matrices de interacciones deben ser negativos para que sustenten los atractores de la figura (2.1). Mientras que los eigenvalores

de  $\mathbb{J}_{(1,1)}$  deben ser uno negativo y otro positivo para sustentar al punto silla. Para el caso de la matriz  $\mathbb{J}_{(0,0)}$  sus eigenvalores deben tener parte real positiva para que sustenten el repulsor. Realizando el álgebra correspondiente se encuentra lo siguiente

$$\begin{aligned}\mathbb{J}_{(2,0)} &\implies \lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -1 \\ \mathbb{J}_{(0,3)} &\implies \lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = -1 \\ \mathbb{J}_{(1,1)} &\implies \lambda_1 = -1 + \sqrt{2}, \quad \lambda_2 = -1 - \sqrt{2} \\ \mathbb{J}_{(0,0)} &\implies \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3\end{aligned}$$

Por tanto se termina de validar la consistencia del método de la linealización al menos para este caso particular. Esta técnica resulta muy útil para obtener la estabilidad de los puntos fijos de forma analítica sin tener que recurrir a una representación visual y como bien se ha mencionado, sobre todo para cuando tengamos sistemas  $N$  ecuaciones diferenciales en donde los espacios fase ya son  $N$ -dimensionales. En la siguiente sección se estará generalizando todo lo mencionado hasta ahora para cuando se tenga dicho escenario.

### 2.3. Generalizando a N especies

En la sección anterior se ha introducido el sistema de especies en competencia (2.1) y se ha definido su forma vectorial (2.5) generalizada; se mostró un ejemplo particular con  $n = 2$  para observar su dinámica a través de su espacio fase (figura (2.1)) en donde se contempla la naturaleza de sus puntos fijos si se trata de atractores, repulsores o puntos silla. Se propone el método de la linealización para conseguir matrices de interacción que determinen de forma analítica la estabilidad de cada uno de los puntos fijos del sistema. En esta sección se profundizará más acerca de lo mencionado comenzando con la construcción matriz de incidencias que será eje fundamental de las interacciones del sistema de  $N$  especies.

Hasta ahora se ha estado discutiendo puramente sobre dinámica y ecuaciones diferenciales, sin embargo, el lector recordará al principio del primer capítulo que se ha mencionado sobre el uso estratégico de redes para poder modelar cierto sistema dinámico no lineal, en este caso para representar las interacciones de (2.1): por lo tanto, ahora toca hablar un poco sobre redes. Una red es considerada una colección de *nodos* que se encuentran unidos por *enlaces*<sup>4</sup>. Para definir redes siempre es necesario establecer que es lo que representan los nodos y que representan los enlaces, en nuestro caso los nodos representan directamente las especies que participan en el sistema mientras que los enlaces serían sus

---

<sup>4</sup>definir más adelante el tipo de interacciones con base en el signo y si son dirigidas o no dirigidas. Además de agregar cita del Newman para esta definición.

interacciones, más adelante veremos su naturaleza.

Si definimos un conjunto de especies  $x_i$  y sabemos que se relacionan por medio de los coeficientes  $\alpha_{ij}$  de

(2.1), entonces decimos que una interacción entre las especies  $x_i$  y  $x_j$  (nodos de la red) es para cuando  $\alpha_{ij} \neq 0$  y esto representaría un enlace en la red. En el mundo es posible encontrar diferentes tipos de redes con cierto significado, tales como la red de energética de un país, redes de amistades en una universidad o redes de acciones que cotizan en la bolsa de valores; en el caso de la Figura (2.2) es una red conocida por quienes se dedican a ello y es la representación de una red social llamada [Red del club Karate de Zachary](#). Para poder representar estas redes y cualquier otro tipo de red conviene introducir el concepto de *matriz de adyacencia*.

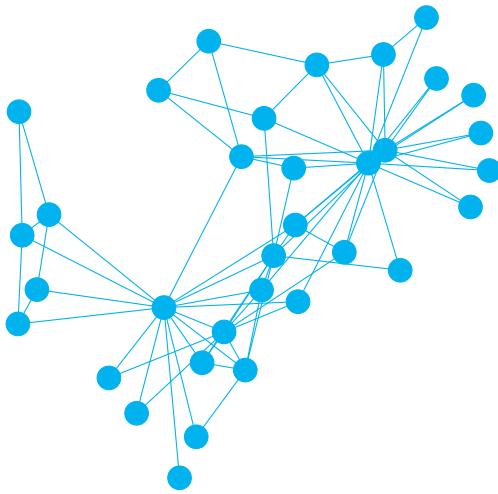
Figura 2.2: Red de Karate de Zachary

**Definición 2.** Sea  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Se define la matriz de adyacencia tal que sus entradas son de la siguiente forma

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } \exists \text{ un enlace entre el nodo } i \text{ y el nodo } j. \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La matriz de adyacencia será la herramienta para determinar la relación de interacción entre especies, pero solo hablará de su existencia y se tendrán que agregar algunas características para darle los pesos de interacción, mismos que están representados por los coeficientes  $\alpha_{ij}$  del sistema (2.1)

**Ejemplo 2.** Para poder apreciar la matriz de adyacencia definamos una red de 10 nodos y veamos la matriz de adyacencia que le corresponde. Cada nodo ha sido marcado para poderlo identificar y relacionar con la matriz de adyacencia. Los renglones y columnas de la matriz representan los nodos, siendo el primer renglón el primer nodo (número 1), el quinto renglón será el quinto nodo (número 5); esto pasa de manera equivalente con las columnas, la cuarta columna corresponde con el cuarto nodo (número 4), la octava columna corresponde con el octavo nodo (número 8). Por tanto, mediante la matriz de adyacencia sabemos que el primer nodo (renglón 1) esta enlazado con el noveno nodo (columna 9) ya que existe un uno, mientras que el primer renglón y la quinta columna hay un cero lo que indica que no existe un enlace entre estos nodos.



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

También hay que destacar qué la matriz es simétrica y que la diagonal es igual a cero: para el primer punto se debe notar que la relación de los enlaces entre nodos no tiene dirección, es decir, que exista un enlace entre nodos significa que el nodo  $i$  se conecta con  $j$  y viceversa, que el nodo  $j$  se conecta con el nodo  $i$ . Por tanto decimos que la red de la figura (2.3) es *no dirigida* puesto que no hay una dirección preferencial en el enlace. Para el segundo punto se puede deducir que los nodos podrían relacionarse consigo mismo, en este caso caso particular no lo hacen pero si es posible la existencia de *autoenlaces*. Para el sistema (2.1) los autoenlaces representan las autointeracciones que dan el carácter logístico de las ecuaciones. En cuanto se defina la matriz de interacciones se verá el papel que toman los elementos de la diagonal y de porque deben de existir autoenlaces en cada una de las ecuaciones del sistema.

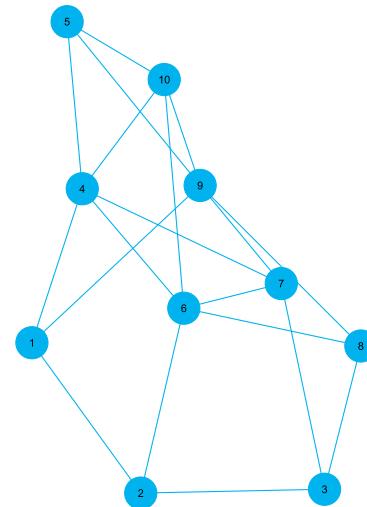


Figura 2.3: Red no dirigida de 10 nodos.

Cuando se tiene el caso en que los enlaces tienen una dirección preferencial de nodo a nodo, decimos que corresponde a una *red dirigida*. En este caso el enlace podrá ir del nodo  $i$  al nodo  $j$  pero no necesariamente lo hará en sentido contrario, deberá definirse explícitamente. En el mundo también existe un gran conjunto de redes dirigidas como lo son las citaciones académicas, la propia WWW (World Wide Web), incluso redes tróficas de depredador-presa. Y para este caso también se tiene asociada una matriz de adyacencia con una ligera diferencia con respecto de la definición 2.

**Definición 3.** Sea  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , matriz de adyacencia de una red dirigida. Se definen sus elementos de la siguiente manera:

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{Si existe un enlace del nodo } i \text{ al nodo } j \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Los enlaces de las redes dirigidas van a estar representados por flechas para que puedan mostrar adecuadamente las direcciones correspondientes entre los nodos.

**Ejemplo 3.** Se tiene la siguiente red dirigida de 10 nodos con exactamente 14 enlaces. La matriz de adyacencia asociada es la siguiente

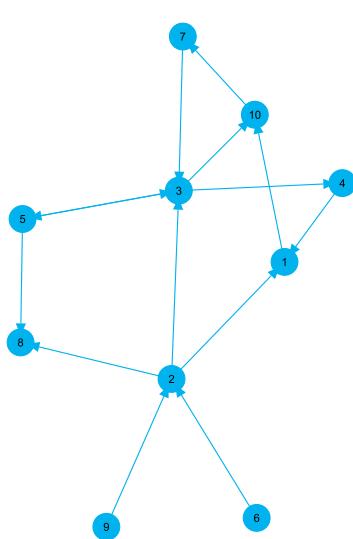


Figura 2.4: Red no dirigida de 10 nodos.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora se puede notar que la matriz de adyacencia no es simétrica y que por lo tanto los enlaces presentan una dirección preferencial. Ambas vi-

siones se van a tomar en cuenta para modelar al sistema de especies en competencia, sin embargo, preferentemente tendrá mayor protagonismo la *red no dirigida* que la otra ya que como se verá más adelante, producen los mismos resultados y la diferencia recae en el tiempo de obtención de los datos en donde las redes dirigidas requieren mayor tiempo de compilación para generar escenarios estables.

En este punto el lector ya debe suponer la razón de la presentación de estas dos formas de redes; el sistema dinámico de especies en competencia considera las interacciones dadas por los coeficientes  $\alpha_{ij}$ , sin embargo puede que exista el coeficiente  $\alpha_{ij}$  que relaciona a la especie  $x_i$  con la  $x_j$  pero bien podría suceder que  $\alpha_{ji} = 0$  y en consecuencia no exista interacción de la especie  $x_j$  con la especie  $x_i$ . Por lo tanto la matriz de incidencias, esta construida con base en alguna de estas dos formas de red.

### 2.3.1. Red de incidencias

La *red de incidencias* es el artilugio principal que se va a ocupar para poder modelar las interacciones del sistema de especies en competencia, tiene asociada una matriz de adyacencia que llamaremos *matriz de incidencias* y se va a componer de tres factores: puede ser de una red dirigida o no dirigida, las interacciones son importantes y definir la dirección de las mismas hace más completo al sistema, sin embargo usaremos mayormente redes no dirigidas. La topología de la red que se va a utilizar es la conocida *red aleatoria* de Erdös–Rényi [Cita<sup>5</sup>] que nos van a modelar interacciones entre las especies de forma aleatoria con base en cierto parámetro. Y aunado a todo ello tendremos una matriz de pesos

---

<sup>5</sup> poner cita de esto

en donde sus entradas se encuentran en una distribución normal centrada en el cero. La conjunción de estos tres elementos da lugar a la matriz de incidencias y por lo tanto a su red asociada.

La red de Erdős–Rényi es ampliamente utilizada para aprender sobre la estructura y propiedades de las redes y con ello poder extender ese aprendizaje al estudio de las llamadas *redes libres de escala*. La diferencia sustancial entre la red aleatoria y la red libre de escala es que la primera tiene muy pocas (o ninguna) aplicaciones en escenarios de la naturaleza, se ha encontrado que las estructuras de las redes en la naturaleza siguen cierto patrón y distribución que se han englobado en las redes libres de escala. Sin embargo este trabajo únicamente se centrará en el uso del modelo de Erdős–Rényi aplicado al sistema (2.1) para poder entender la dinámica que produce y con las intenciones de extender el análisis al caso de las redes libres de escala<sup>6</sup>.

**Definición 4.** Sea un conjunto de  $N$  nodos sin enlaces asociados. Para cada par de nodos  $i$  y  $j$  de las  $\binom{N}{2}$  posibles combinaciones, se definen sus enlaces aleatorios dada una probabilidad  $p$  y un número aleatorio  $r$  en el intervalo  $[0, 1]$  de la siguiente forma

$$L_{ij} = \begin{cases} \exists, & \text{Si } r < p \\ \nexists, & \text{Si } r \geq p \end{cases}$$

desde luego que entre mayor sea la  $p$  se tendrá mayor cantidad de enlaces. El conjunto de los  $N$  nodos con sus posibles  $L_{ij}$  enlaces forman la red aleatoria de Erdős–Rényi. En esta referencia [cita<sup>7</sup>] el lector podrá conocer más sobre sus propiedades, nosotros por ahora solamentearemos uso de ella. La matriz de adyacencia de esta red aleatoria es simétrica lo que nos da entender que la red es no dirigida en esencia. Podemos extender esta definición a redes aleatorias dirigidas suponiendo que la conexión va en dirección del nodo  $i$  al nodo  $j$  y considerar también conexiones del nodo  $j$  al nodo  $i$ , por lo tanto ahora tendremos  $N(N - 1)$  posibles combinaciones de nodos.

Si solo se considerara uno de los dos casos, es decir, para  $\binom{N}{2}$  combinaciones de nodos entonces tendríamos la mitad de posibles conexiones, la matriz de adyacencia sería triangular superior por haber considerado únicamente la dirección de  $i$  a  $j$ . Para llenar la parte triangular inferior de esta matriz debemos considerar las conexiones de  $j$  a  $i$  y haciéndolo de esa forma habremos obtenido nuestra red aleatoria dirigida cuya matriz de adyacencia es no simétrica, es decir, que en general se cumple  $A_{ij} \neq A_{ji}$ . En la sección (??) se encuentra la implementación computacional de ambas visiones de la red aleatoria.

---

<sup>6</sup>Un modelo teórico que rescata todas las propiedades de las redes libres de escala es el de Albert-Barabasi [Cita].

<sup>7</sup>referencia a barabasi

En este punto estamos a un solo paso de construir finalmente a la matriz de incidencias, únicamente nos falta de considerar la magnitud de las interacciones entre especies y para ello se va a emplear una matriz de  $N \times N$  donde  $N$  es el número de nodos de la red que vayamos a modelar; esta matriz se va a mapear con una función de densidad de probabilidad (FDP) asociada a una distribución normal en cada entrada

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

en esencia será una matriz con entradas aleatorias bajo una FDP normal centrada en  $\mu = 0$  y variando a sigma en  $[0, 1]$  con un paso de 0.1 (esto se irá detallando más adelante).

**Definición 5.** Sea una red aleatoria de  $N$  nodos dirigida o no dirigida y  $A$  su matriz de adyacencia asociada, definimos así mismo una matriz de entradas aleatorias  $M$  mapeada bajo una FDP normal centrada en  $\mu = 0$  y con  $\sigma \in [0, 1]$ . Definimos a  $\Lambda$  la *matriz de incidencias* como el producto de Hadamard (entrada a entrada) de la matriz de adyacencia con la matriz aleatoria sumada con la matriz identidad:

$$\Lambda = (A \odot M) + I \quad (2.8)$$

El producto  $A \odot M$  simplemente agrega pesos a cada posible enlace de a la matriz de adyacencia asociada a la red aleatoria de nuestra elección, y seguida la suma con la identidad es para poder agregar autoenlaces a cada nodo de la red aleatoria.

La matriz de incidencias  $\Lambda$  puede ser *estructuralmente simétrica*<sup>8</sup> si se escoge una red aleatoria no dirigida, o su contraparte si se escoge una red aleatoria dirigida, además para todo  $\alpha_{ii} \in \Lambda$ , se tiene que  $\alpha_{ii} = 1.0$ . Esto nos lleva a asociar esta matriz con

una red con pesos y autoenlaces a la que llamaremos *red de incidencias*. Por la forma en como consideramos  $M$  para la red de incidencias resultante, decimos que es forzosamente dirigida independientemente de la elección de red aleatoria. Hablando específicamente para el caso en donde se considera  $A$  simétrica de la red no dirigida, al momento de realizar el producto punto con  $M$ , las entradas  $\alpha_{ij}$  no necesariamente son iguales a su contraparte simétrica, por lo que se tendrá un peso para el enlace  $i \rightarrow j$  y otro peso diferente para el enlace  $j \rightarrow i$ ; en este caso la matriz podrá ser únicamente estructuralmente simétrica. Para

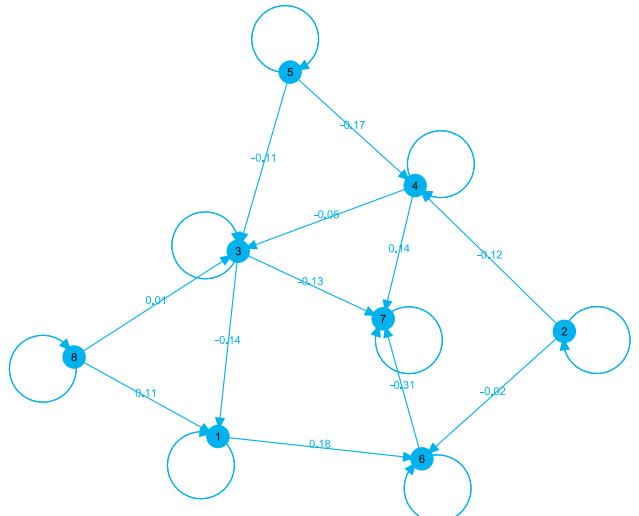


Figura 2.5: Red de incidencias de 8 nodos bajo la topología de una red aleatoria dirigida con  $p = 0.15$  y una matriz aleatoria con  $\mu = 0$  y  $\sigma = 0.2$ .

<sup>8</sup>Es una matriz cuyas entradas cumplen  $B_{ij} \neq B_{ji} \neq 0$  para toda  $B_{ij} \in B$ , quiere decir que aunque  $B$  no sea simétrica, relativo a las posiciones de sus entradas si lo es.

que  $\Lambda$  fuera enteramente simétrica necesitaríamos considerar que  $M$  estuviera mapeada en la parte triangular superior sus entradas aleatorias y la simetrizáramos hacia su correspondiente triangular inferior, solo así así podríamos conseguir una red de incidencias puramente no dirigida con  $\Lambda$  simétrica. La figura (2.5) es una representación visual de los sistemas con los que iremos a trabajar bajo las ecuaciones de (2.1). En la sección (??) se muestra la implementación computacional de la red de incidencias.

### 2.3.2. Tipos de interacciones

La red de incidencias es de tipo dirigida independientemente de la red aleatoria que se decida elegir para su construcción, a lo mucho podrá ser estructuralmente simétrica pero los pesos de los enlaces  $i \rightarrow j$  y  $j \rightarrow i$  son diferentes lo que implica que los coeficientes cumplen  $\alpha_{ij} \neq \alpha_{ji}$  para toda  $\alpha_{ij} \in \Lambda$ . Esto genera repercusiones interesantes para el sistema (2.1) por lo que conviene conocer que tipos de interacciones pueden darse en  $\Lambda$  y como impactan en la dinámica del sistema.

Hasta ahora sabemos que los  $\alpha_{ij} \in \Lambda$  forman parte de una FDP normal centrada en  $\mu = 0$  y con  $\sigma \in [0, 1]$ , cabe preguntarse si para todo valor posible de  $\alpha_{ij}$  tendremos una dinámica homogénea o si se tendrán escenarios particulares. May nos brinda la respuesta [cita<sup>9</sup>] con un abanico de 5 posibles escenarios. Antes de presentar los escenarios hay que resaltar el hecho de que el signo de  $\alpha_{ij}$  importa mucho más que el propio peso que se le asigne, ya que tiene repercusiones en la ecuación (2.1) más que nada con el signo negativo de la suma dentro del paréntesis; particularmente si tenemos  $\alpha_{ij} < 0$  el producto de la especie  $x_i$  con la  $x_j$  ya no se resta sino lo contrario, de forma que fomenta el propio crecimiento de la especie  $x_i$  (suponiendo que nos situamos en la ecuación  $\dot{x}_i = f_i(\vec{x})$ ).

El tipo de interacciones a las que May se refiere, aplican a la *community matrix* que es para nosotros la matriz de interacciones, es decir, el Jacobiano del sistema (2.6) evaluado en algún punto fijo estable. Estas interacciones no necesariamente aplican a nuestra matriz de incidencias, de hecho más adelante se discutirá que las interacciones de May aplicarán a la red de incidencias si y solo si las volteamos al signo contrario; y en su momento se verá que al aplicar el Jacobiano a las ecuaciones (2.1), las interacciones de las especies cerca del equilibrio se ajustan con lo que May estipula.

Las posibles interacciones se reparten de la siguiente forma: para la red de interacciones<sup>10</sup> no dirigida cuya matriz de adyacencia  $A$  es estructuralmente simétrica, únicamente puede acceder a tres tipos de interacciones las de competencia (--) y las de mutualismo o simbiosis<sup>11</sup> (++) y las de presa-

<sup>9</sup>poner cita del libro de ecología.

<sup>10</sup>Refiriéndonos a la *community matriz de May*

<sup>11</sup>A mi me gusta llamarles de cooperación, así que de ahora en adelante de esa forma me estaré refiriendo a ellas.

depredador (+-) o (-+). Al ser estructuralmente simétrica sus coeficientes cumplen una de las dos situaciones:  $A_{ij} \neq A_{ji} \neq 0$  ó  $A_{ij} = A_{ji} = 0$  para toda  $A_{ij} \in A$ , lo que significa que si son diferentes de cero tendrán mismo signo y diferentes pesos. Cuando sus signos son positivos implica que la especie  $x_i$  y la(s) especie(s)  $x_j$  cooperan y fomentan sus crecimientos aunque la medida de ello dependerá de la magnitud de sus pesos asignados. En el caso en donde los signos de las entradas cuasi simétricas sean negativos entonces existe una relación de competencia y la especie  $x_i$  compite con la(s) especie(s)  $x_j$  de tal forma que una de las especies intentará sobreponerse en las otras.

Para el caso de la red de interacciones dirigida, pueden acceder a los 5 tipos de interacción ya que en su matriz de adyacencia bien pueden existir entradas cuasi simétricas aunque la matriz en general no lo sea, las que nos faltan son: el comensalismo (+0), amensalismo (−0) y presa-depredador (+−). Para el caso del comensalismo se da para cuando tenemos una interacción de  $i \rightarrow j$  y la especie  $x_i$  obtiene un beneficio mientras que no existe algún impacto para la especie  $x_j$ . En contraparte el amensalismo es cuando se tiene la interacción  $i \rightarrow j$  y la especie  $x_i$  se ve perjudicada mientras que tampoco existe algún impacto para  $x_j$ . El caso de la depredación es cuando la interacción  $i \rightarrow j$  y la especie  $x_i$  obtiene un beneficio mientras que  $j \rightarrow i$  la especie  $x_j$  se ve perjudicada. En la sección (??) del capítulo 1 se discute la dinámica de este sistema, sin embargo en este contexto se tienen algunas diferencias.

### Interacciones de May aplicadas a la red de incidencias

Las interacciones que se aplican a la red de incidencias son las mismas que las que May estipula para la matriz de interacciones solamente que con el signo contrario. Para el caso de la red de interacciones con matriz de adyacencia estructuralmente simétrica, las interacciones de competencia se darán para cuando los signos de las  $\alpha_{ij}, \alpha_{ji} \in \Lambda$  con  $i \neq j$  sean (++) , mientras que las de cooperación se darán cuando se cumpla (−−). Esto se debe a lo que brevemente se comentó anteriormente, el sistema

$$\dot{x}_i = r_i x_i \left( 1 - \frac{\sum_{j=1}^N \alpha_{ij} x_j}{K_i} \right)$$

tiene interacciones  $\alpha_{ij}$  que son afectadas por el signo negativo que existe a su izquierda, si se tiene  $\alpha_{ij} > 0$  entonces el crecimiento  $r_i x_i$  se contrarresta con los términos  $\alpha_{ij} x_i x_j$  de la población  $x_i$  y esta dinámica se desencadenará en ver quien de las  $N$  especies se superpone sobre el resto (aunque claro que esto dependerá de los pesos de las  $\alpha_{ij}$  y las condiciones iniciales). Por el contrario, cuando los  $\alpha_{ij}, \alpha_{ji} \in \Lambda$  son negativos entonces el término  $\alpha_{ij} x_i x_j$  de la especie  $x_i$  se suma al término  $r_i x_i$  y propicia su crecimiento.

Cuando tenemos redes de incidencias con matriz de adyacencia no simétrica ni estructuralmente simétrica la competencia y la cooperación también están presentes de la misma forma que para el caso anterior. En estos casos el comensalismo se da para interacciones (−0) ya que es necesario que

la interacción cumpla  $\alpha_{ij} < 0$  para que la especie  $x_i$  obtenga un beneficio de la especie  $x_j$ , en este caso la especie  $x_j$  no obtiene ningún beneficio ni tampoco queda perjudicada pues se tiene  $\alpha_{ji} = 0$ . En contraparte, el amensalismo ahora se da con la interacción (+0), en este caso el término  $\alpha_{ij}x_jx_i > 0$  y por lo tanto restará al término dado por  $r_i x_i$  haciendo que la especie  $x_i$  quede perjudicada en su crecimiento, pero al igual que el comensalismo, la especie  $x_j$  no se le genera ningún impacto puesto que  $\alpha_{ji} = 0$ . Finalmente para la depredación ahora los papeles se invierten para (−+) y la dinámica sigue la misma lógica que como se plantean los casos anteriores.

Hay que hacer notar que cada especie tiene la capacidad de tener a lo mucho  $N$  interacciones y eso dependerá de como resulte la matriz de incidencias y su red asociada con base en los parámetros  $p$  y  $\sigma$ . Significa que dada especie  $x_i$  tiene la capacidad de interactuar con el resto de las  $N - 1$  especies bajo los 5 escenarios posibles (dependiendo de si la matriz de incidencias es estructuralmente simétrica o no). Puede darse el caso en el que  $x_i$  tenga cooperación con alguna  $x_j$  y competencia, comensalismo, amensalismo o depredación con alguna otra especie y además eso se repite para el resto de las especies del sistema. Al ser prácticamente aleatorias la elección de las interacciones entre especies la dinámica del sistema se vuelve cada vez más compleja de determinar y de predecir. Por ello es bastante conveniente recurrir a la integración numérica.

**Ejemplo 4.** Cuando se tienen sistemas en presencia de cooperación entre especies ocurre algo interesante con los puntos fijos. Veamos como son los espacios fase y las series de tiempo de un sistema de Lotka-Volterra de  $2 \times 2$  en presencia de la cooperación. Definimos el siguiente sistema similar al del Ejemplo 1 con coeficientes de cooperación:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2x\left(1 - \frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}xy \\ \frac{dy}{dt} &= 3y\left(1 - \frac{y}{3}\right) + xy\end{aligned}\tag{2.9}$$

La matriz de incidencias asociada este caso sería

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

A diferencia del sistema del Ejemplo 1 (Ec. 2.3) su anti-diagonal es negativa lo que indica que son coeficientes de interacción (−−) que propician la cooperación entre especies y fomentan sus crecimientos. Los puntos fijos para este sistema ahora son: (0, 0), (2, 0), (0, 3) y (7, 10); las matrices de interacción asociadas son:

$$\mathbb{J}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{J}_{(2,0)} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{J}_{(0,3)} = \begin{pmatrix} 3.5 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{J}_{(7,10)} = \begin{pmatrix} -7 & 3.5 \\ 10 & -10 \end{pmatrix}$$

Realizando el cálculo de los eigenvalores de cada una de las matrices de interacción se encuentra que para el primer punto fijo se tiene el ya conocido y trivial repulsor con eigenvalores con parte real positiva. En el caso de los puntos fijos de los ejes ahora su estabilidad ha cambiado con respecto del sistema

(2.3), ahora su estabilidad es de puntos silla y por tanto son inestables; cada uno tiene un eigenvalor positivo y otro negativo, en consecuencia para  $t \rightarrow \infty$  las soluciones terminan divergiendo. Por último se encuentra que los eigenvalores del punto fijo restante son negativos, por lo tanto las soluciones del sistema irán a converger a este punto. Esto es cuanto menos interesante porque la cooperación entre

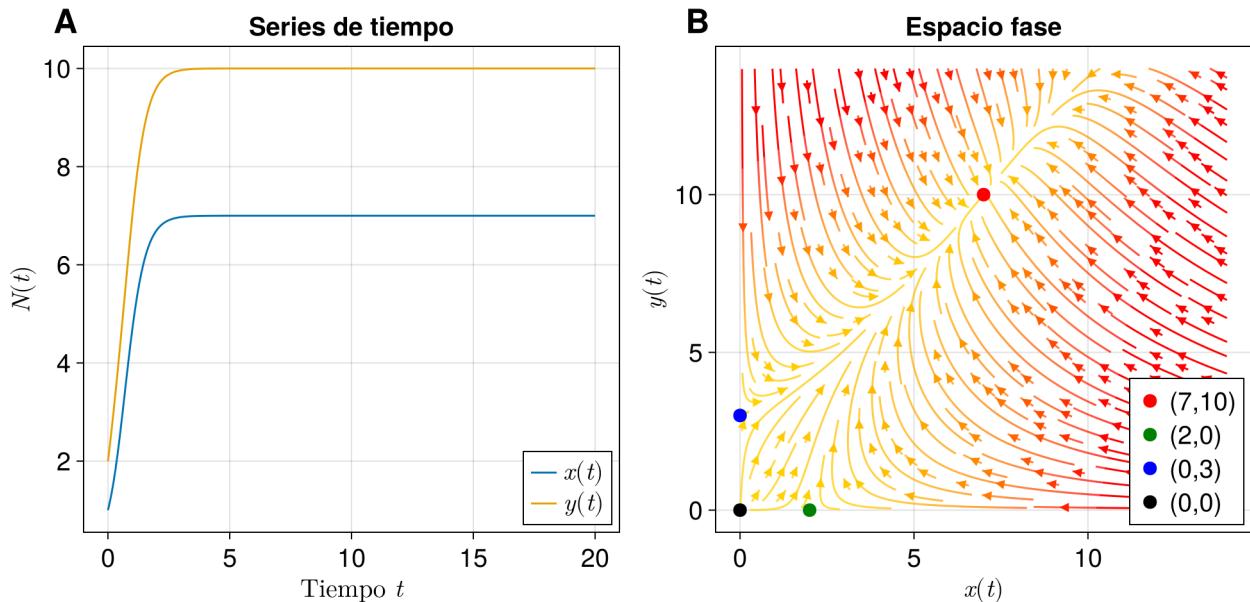


Figura 2.6: Sistema de Lotka-Volterra con interacciones de cooperación dados por las ecuaciones (2.9). Capacidades de carga:  $K_x = 2$  y  $K_y = 3$ . **A)** Series de tiempo del sistema para las especies  $x(t)$  y  $y(t)$  bajo la condición inicial  $(1, 2)$ . **B)** Espacio fase del sistema con sus puntos fijos asociados, se muestra solamente un único punto fijo estable.

las especies  $x$  y  $y$  es de tal forma que superan su propia capacidad de carga que funge como límite que les impone el sistema. Bajo este escenario el concepto de la capacidad de carga toma otro significado: ahora será un parámetro que regule el crecimiento de las especies, cuanto mayor sea la capacidad de carga más difícil serán sus crecimientos, sin embargo, si la capacidad de carga no es lo suficientemente grande como para contener las interacciones de cooperación entonces el crecimiento podría darse de forma desmedida de modo que todo el sistema sea completamente inestable.

La cooperación entre especies fomenta su crecimiento y ahora su estabilidad se posiciona en puntos que quedan por arriba de sus capacidades de carga. Algo similar ocurre para el comensalismo (-0) y el amensalismo (+0), solo que una de las especies seguirá un comportamiento logístico lo cual indica que no sufre algún impacto mientras que la otra especie se ve beneficiada o perjudicada dependiendo de la interacción que tenga. Para la interacción de depredación (+-) la especie depredadora se beneficia mientras que la presa se ve perjudicada.

Ahora modificamos el sistema (2.9) de tal modo que obtengamos cada una de estas interacciones. En este caso se elige que  $\alpha_{21} = 0$  de la ecuación  $\dot{y}$  y  $\alpha_{12} = \pm \frac{1}{2}$  de la ecuación  $\dot{x}$  para cubrir los casos de comensalismo y amensalismo. La ecuación  $\dot{y}$  queda reducida a una ecuación logística normal y pese a la dinámica que ocurra con  $\dot{x}$ , no se ve afectada y mantiene su estabilidad en su capacidad de carga. La especie  $x(t)$  es la que se verá impactada por sus coeficientes de interacción correspondientes,

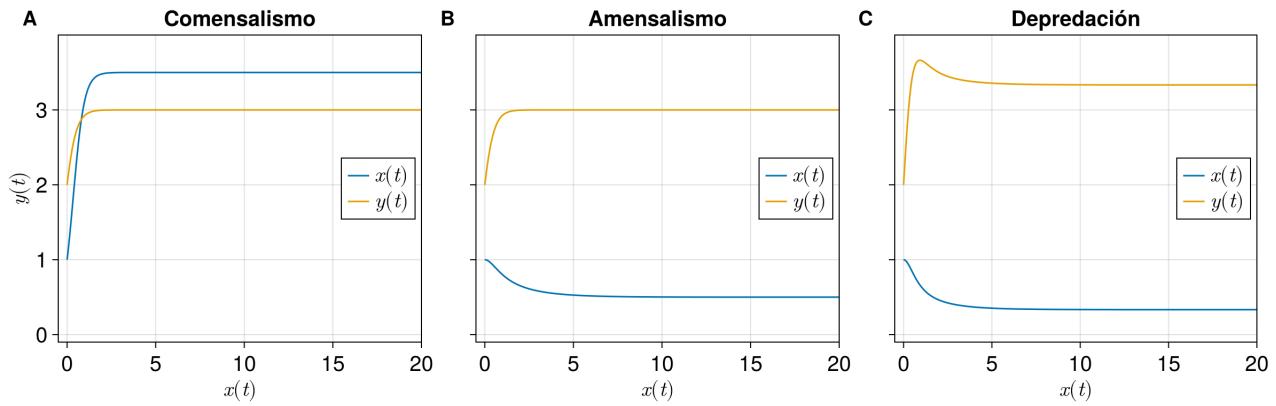


Figura 2.7: Series de tiempo para las interacciones comensalismo, amensalismo y depredación. **(A)** Para el comensalismo se definió  $\alpha_{21} = 0$  y  $\alpha_{12} = -\frac{1}{2}$ . **(B)** Para el amensalismo se consideró  $\alpha_{21} = 0$  y  $\alpha_{12} = \frac{1}{2}$  **(C)** Para la depredación se consideró  $\alpha_{21} = -1$  y  $\alpha_{12} = \frac{1}{2}$ .

cuando recibe un beneficio podemos notar como es capaz de estabilizarse en un valor superior al de su capacidad de carga, mientras que en el caso contrario se ve perjudicada pero al menos no decae a 0 su población, sino que se establece en un valor menor a su capacidad de carga correspondiente. El caso de depredación es como una combinación de los anteriores, mientras una de las especies se ve beneficiada, logra estabilizarse en un punto superior a la capacidad de carga mientras que para la especie que se ve perjudicada se establece igualmente en algún punto menor a su capacidad de carga pero sin llegar a extinguirse. Por último es importante remarcar que los pesos de la forma  $\alpha_{ij} < 0$  deben estar soportados por sus capacidades de carga, de lo contrario el sistema será inestable y sus soluciones divergerán.

El lector hasta ahora quizás se haga las siguientes preguntas ¿Por qué son necesarios los autoenlaces y por qué deben de ser  $\alpha_{ii} = 1$  para toda  $\alpha_{ii} \in \Lambda$ ? Se han fijado los pesos de los autoenlaces a  $w = 1.0$  ¿Podrán ser de otra forma? La respuesta es *depende*; en los ejemplos 1 y 4 hallamos una gran pista que nos resuelve esta conjetura: en estos sistemas se han separado los términos en donde tenemos por un lado el carácter logístico del sistema y por el otro lado las interacciones con las otras especies.

Recordando la discusión que se tuvo sobre la ecuación logística (??) en el capítulo pasado, se mencionaba que para cierto tiempo  $t^*$  en donde  $N(t^*) = K$ , la población llegaba a su tope de crecimiento y en ese valor se estabilizaba. El numerador del término  $\frac{N}{K}$  bien puede tener un factor  $c$  (tal que se

tenga  $\frac{cN}{K}$ ) y al final la capacidad de carga estará ahí para definir el tope, la cuestión es como debe de ser  $c$ . Para no tener tantos problemas hacemos  $c = 1$ , sin embargo si  $c > 0$  esto provocará que el valor de la capacidad de carga se modifique de modo que la población se estabilizará en algún otro punto diferente de  $K$ , pero a final de cuentas se estabilizará. Si  $c = 0$  entonces tenemos la ecuación (??) y ya sabemos que toda solución de esa ecuación diferencial diverge. Y si  $c < 0$  entonces la ecuación resultante tendrá un término de la forma  $rx_i \left(1 + \frac{x_i}{K_i}\right)$  el cual también va a diverger para  $t \rightarrow \infty$ . Por lo tanto, por motivos de simplicidad escogemos el peso de todas las  $\alpha_{ii}$  como  $w = 1.0$ .

En resumen, las auto-interacciones en la red de incidencias son necesarias para regular el crecimiento de cada especie, este es el trabajo del término logístico que tiene cada  $x_i$ . Sin embargo ese auto-regulamiento no es todo poderoso pues como se vio anteriormente, las interacciones  $\alpha_{ij}$  son clave para determinar si el sistema es estable o no. Hasta ahora tenemos todo lo necesario para poder construir e integrar el sistema (2.1) de forma numérica, para ello basta únicamente con implementar correctamente el método RK4 (sec. ??) y aplicarlo para poder obtener las series de tiempo, espacios fase y demás elementos que servirán para el análisis riguroso de lo que viene. En la sección (??) se muestra la implementación computacional de este sistema.

## 2.4. Jacobiano del sistema: Matriz de interacciones

Anteriormente se ha comentado sobre el método de la *linealización* para poder acceder a matrices de interacciones de forma local alrededor de algún punto fijo. Se definió el *Jacobiano* del sistema (ec. 2.6) para efectuar esta tarea y más tarde se determinó el Jacobiano para el caso particular de un sistema de  $N = 2$  (ec. 2.7). En esta sección nos tocará hablar sobre la matriz de interacciones para un sistema de  $N$  especies, se verán las interacciones resultantes y si se aplican con las interacciones de May [cita<sup>12</sup>] y se abrirá paso a hablar sobre la estabilidad de este sistema.

Recordando la definición 1 se define el sistema de Lotka-Volterra generalizado bajo la función vectorial  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  donde se tienen las especies como dominio y las funciones de su dinámica en el codominio. Para determinar el Jacobiano de  $\mathbf{F}(\vec{x})$  tenemos que aplicar la derivada  $i$ -ésima a cada  $f_i(\vec{x}) \in \mathbf{F}(\vec{x})$  para ello sepáramos en dos casos, para cuando elementos de la diagonal:  $\frac{\partial f_i(\vec{x})}{\partial x_i}$ , y para elementos fuera de la diagonal:  $\frac{\partial f_i(\vec{x})}{\partial x_k}$ ; tomamos las ecuaciones del sistema (2.1) para realizar el cálculo:

$$f_i(\vec{x}) = r_i x_i \left(1 - \frac{\sum_{j=1}^N \alpha_{ij} x_j}{K_i}\right)$$

---

<sup>12</sup>cita

para los términos de la diagonal tenemos

$$\begin{aligned} f_i(\vec{x}) &= r_i x_i - \frac{\sum_{j=1}^N r_i \alpha_{ij} x_i x_j}{K_i} \\ \frac{\partial f_i(\vec{x})}{\partial x_i} &= r_i - \frac{2\alpha_{ii} x_i + \sum_{j \neq i} r_i \alpha_{ij} x_j}{K_i} \\ \frac{\partial f_i(\vec{x})}{\partial x_i} &= r_i \left( 1 - \frac{2x_i + \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} x_j}{K_i} \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

y para los términos que quedan fuera de la diagonal tenemos

$$\frac{\partial f_i(\vec{x})}{\partial x_k} = -\frac{r_i \alpha_{ik} x_i}{K_i} \quad (2.11)$$

**Definición 6.** Sea  $\mathcal{I} \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$  donde  $N$  es el número de especies del sistema de Lotka-Volterra generalizado. Definimos la matriz de *interacciones* del sistema de Lotka-Volterra generalizado de la siguiente forma<sup>13</sup>:

$$\mathcal{I} = \begin{cases} \mathcal{I}_{ii} = r_i \left( 1 - \frac{2x_i + \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} x_j}{K_i} \right), & \text{para } i \in \{1, \dots, N\} \\ \mathcal{I}_{ij} = -\frac{r_i \alpha_{ik} x_i}{K_i}, & \text{para } i \neq j \end{cases} \quad (2.12)$$

Una vez hallando el/los punto(s) fijo(s) del sistema y evaluándolo(s) en  $\mathcal{I}$  tendremos finalmente un sistema lineal al que le podemos calcular sus eigenvalores para determinar su estabilidad. A primera vista se puede notar que los coeficientes de  $\mathcal{I}$  voltean el signo con respecto de la matriz de incidencias  $\Lambda$ , esto parece ajustarse perfectamente con las interacciones de May en donde se discutía que tienen signos opuestos con respecto de la red de incidencias; de momento esto aplica únicamente para los elementos fuera de la diagonal. ¿Qué ocurre con los elementos de la diagonal?

**Proposición 1.** *Los elementos de la diagonal de la matriz de interacciones  $\mathcal{I}$  son negativos, es decir:*

$$r_i \left( 1 - \frac{2x_i + \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} x_j}{K_i} \right) < 0$$

*Demostración.* Revisando los términos de la ecuación comenzamos por  $r_i$ , sabemos que corresponde con la tasa de crecimiento y que forzosamente debe ser mayor que cero para estimular el crecimiento de las  $x_i$ . Por lo que realmente debemos demostrar que lo que esta entre paréntesis es menor que cero, es decir:

$$1 - \frac{2x_i + \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} x_j}{K_i} < 0 \iff K_i < 2x_i + \sum_{i \neq j} \alpha_{ij} x_j$$

Esto implica que para que la derivada parcial de los elementos de la diagonal sean menores que cero, se debe de cumplir que la suma de las interacciones de la especie  $x_i$  con las especies  $x_j$  (incluido  $2x_i$ ) debe ser mayor a la capacidad de carga de la especie  $x_i$ , o sea  $K_i$ . Esto ya lo habíamos visto en el Ejemplo 4 (ver  $\mathbb{J}_{(7,10)}$ ) en donde las interacciones de cooperación (en este caso las negativas) propician que estabilidad de  $x_i$  quede por arriba a de la capacidad de carga, es decir que cuando la estabilidad de  $x_i$  es mayor que  $K_i$  (sin que tiendan a infinito) entonces los valores de la diagonal de la matriz de interacciones  $\mathcal{I}$  serán negativos.  $\square$

<sup>13</sup>La implementación computacional del Jacobiano la puedes consultar en la sección ()

La conjunción de todo esto nos dice que los valores de autoregulación de la matriz de incidencias (que son autointeracciones positivas que limitan el crecimiento) pasan a ser interacciones de competencia (--) en la matriz de interacciones. Para el resto de las entradas ocurre exactamente lo mismo, las interacciones de cooperación (--) en la matriz de incidencias  $\Lambda$  pasan a ser interacciones de cooperación (++) en la matriz de interacciones  $\mathcal{I}$ , y aplicará de la misma forma para las otras cuatro interacciones posibles de modo que finalmente hemos llegado a comprobar las interacciones de May.

¿Pueden los valores de la diagonal ser mayores que cero? La respuesta es sí, pero eso implicaría que las interacciones de  $x_i$  con el resto de las especies deben ser menores a su respectiva capacidad de carga  $K_i$  y esto únicamente se va a cumplir para cuando se tengan puros coeficientes positivos en la matriz de incidencias  $\Lambda$ , es decir, para cuando se tengan puras interacciones de competencia que no permitan que la estabilidad se posiciones por arriba de  $K_i$ . Más adelante se analizará este resultado y se verán sus implicaciones.

Otra de las preguntas importantes sería ¿Cómo determinar el punto fijo **estable** de un sistema  $N$ -dimensional? Este autor llegó a considerar que mediante la implementación del método numérico Newton-Raphson generalizado a un vector de dimensión  $N$  sería la solución, sin embargo definir la condición inicial puede llevarte a puntos fijos que no necesariamente son estables e incluso dicha elección puede no llegar a converger oportunamente. Resulta poco práctico esta forma y sin embargo en el Ejemplo 4 nuevamente hallamos una pista para la solución. Si nos fijamos en la serie de tiempo de los sistemas que propusimos integrar numéricamente (fig. 2.6 (A) y la fig. 2.7) podemos notar la convergencia hacia el punto fijo estable, de manera provechosa ¡al integrar numéricamente estamos obteniendo el punto fijo estable que necesitamos para evaluar en la matriz de interacciones  $\mathcal{I}$ ! Lo único que restaría hacer es guardar la última iteración de nuestro conjunto solución y listo.

No obstante, los sistemas no siempre serán estables. Dependiendo de los parámetros  $p$  y  $\sigma$  para la matriz de incidencias, tendremos situaciones en donde el sistema sea estable o donde no lo sea y por consiguiente (y de manera obvia) no obtengamos ningún punto fijo, por lo que esta extracción solamente será válida mientras el sistema y sus interacciones propicien que sea estable. Esto será de demasiada utilidad ya que al realizar la implementación computacional del Jacobiano, extraer el punto fijo de las series de tiempo y evaluarlo para así obtener la matriz de interacciones y averiguar su estabilidad mediante sus eigenvalores (poniendo a prueba nuevamente la proposición ??). En la sección (??) se encuentra la implementación computacional del Jacobiano considerando al punto fijo estable.

## 2.5. Estabilidad

Habiendo definido al sistema (2.1) con todos los elementos discutidos hasta ahora y teniendo la posibilidad de tener una matriz de interacciones  $\mathcal{I}$  correspondiente al punto fijo estable del sistema sigue hacerse la pregunta ¿De qué depende que el sistema (2.1) de  $N$  ecuaciones sea estable? Se irá discutiendo la respuesta en esta última sección de este capítulo para que en el siguiente se puedan explorar todos los resultados de los procesos vistos hasta ahora.

Robert May [cita<sup>14</sup>] y Stefano Allesina [cita<sup>15</sup>] respectivamente tienen trabajos sobre esta conjetura, May comenzó con la discusión de la estabilidad para sistemas complejos grandes y de ahí se derivó el trabajo de Allesina que complementó el trabajo de May (extendiendo a la ley elíptica). Este autor se ha inspirado en las propuestas de los anteriores para generar una propia. El trabajo de May consistió en definir un sistema complejo bajo la propuesta de una red ecológica con varias especies interactuando entre sí. Su sistema deviene de un conjunto de  $N$  ecuaciones diferenciales no-lineales en las que se halla un punto fijo estable; realizando una expansión en series de Taylor alrededor del punto fijo se obtiene la solución

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = A\vec{x}(t)$$

de forma local alrededor del punto fijo se trata de un sistema lineal cuya matriz de interacciones  $A$  es una matriz aleatoria con la diagonal  $a_{ii} = -1$  para toda  $a_{ii} \in A$ <sup>16</sup>. Las entradas aleatorias están mapeadas bajo “alguna distribución estadística” y tienen una magnitud dada por  $\alpha$  que corresponde con “una fuerza de interacción promedio”, la existencia de “enlaces” está determinada por otro factor que el autor refiere como conectancia  $C$  que es un parámetro tal que existe probabilidad  $C$  de que exista un enlace (o una entrada aleatoria en la matriz  $A$ ) en esta red ecológica y,  $1 - C$  de que no exista (en este caso  $a_{ij} = 0$ ); tal y como la  $p$  de nuestra red aleatoria. Con esta información May presenta un primer resultado importante: el sistema es estable si se cumple la siguiente relación

$$\alpha < (nC)^{-1/2} \tag{2.13}$$

donde  $n$  es en este caso el tamaño de la red ecológica (y la matriz  $A$  es de  $n \times n$ ). Esta relación puede concebirse como un punto crítico de transición de fase entre sistemas que son estables e inestables. Además demarca que para  $n \gg 1$  la transición entre el régimen estable e inestable es muy “abrupta” y que además se tiene un ancho de transición de tamaño  $n^{-2/3}$ . Para que este tipo de sistemas sean estables se debe de cumplir que todos sus eigenvalores deben tener parte real negativa, de no cumplirse se dice que el sistema es inestable. Más adelante, May presenta otro resultado que es sumamente importante: *El sistema podrá ser estable para una red ecológica con una gran conectancia*

---

<sup>14</sup>cita

<sup>15</sup>cita

<sup>16</sup>En este caso también se trata de una autoregulación para las especies consideradas.

*C pero con interacciones débiles  $\alpha$ , y de manera inversa también podrá ser estable mientras se tengan interacciones fuertes  $\alpha$  pero con pocas especies en interacción, es decir, para una conectancia baja.*

El trabajo de Allesina se extiende al de May al considerar que la matriz de interacciones  $A$  está construida con la diagonal  $a_{ii} = -d \in \mathbb{R}$  para toda  $a_{ii} \in A$  y con una distribución bivariante, es decir, que la parte triangular superior de  $A$  se mapea con una FDP normal centrada en  $\mu_1$  y con desviación estándar  $\sigma_1$  mientras que la parte triangular inferior de  $A$  se mapea con otra FDP normal centrada en  $\mu_2$  y con desviación estándar  $\sigma_2$ . Esto genera cambios importantes en la estabilidad del sistema resultante sin embargo se sigue obteniendo una transición entre un régimen estable y otro inestable [cita<sup>17</sup>].

### 2.5.1. Distribución de eigenvalores

Otro de los resultados interesantes de los autores antes mencionados, es la forma de la distribución de los eigenvalores de su respectiva matriz de interacciones. Se tendrán dos tipos de distribuciones una *Circular* para el caso del modelo de May y otra *elíptica* para el caso del modelo de Allesina. La matriz de interacciones de May tiene interacciones aleatorias que de cierto modo se pueden ver como “independientes” ya que al ser mapeadas de una FDP normal, se tiene prácticamente una misma probabilidad de que la interacción sea negativa o positiva. Para este caso las especies interactúan sin restricciones ni patrones claros, sino más bien en un supuesto desorden o caos.

Además la diagonal de la matriz de interacciones se encuentra fijada a un valor  $-d$ <sup>18</sup> y representa la *auto-regulación* de las especies por mantenerse en una vecindad de estabilidad; los autores mencionan que es lo equivalente a una “capacidad de carga” del sistema en donde las especies mantendrán estabilizado su respectiva dinámica. Este valor al mismo tiempo representa el centro y radio de un círculo que encierra a la distribución de eigenvalores del sistema de May, a esto le denominaron como **Ley Circular**.

No importa que la matriz de interacciones de May sea estructuralmente simétrica o completamente aleatoria, la distribución de eigenvalores se sigue ajustando al círculo de centro  $-d$  y radio  $d$ . En la figura (2.8) se encuentra la distribución de eigenvalores para una matriz de interacciones estructuralmente simétrica (Red no dirigida) y para otra matriz de interacciones completamente aleatoria (Red dirigida). Para cada sistema se ha considerado para  $N = 100$  especies ( $A \in M_{100}(\mathbb{R})$ ), con una FDP normal centrada en  $\mu = 0$  con  $\sigma = 0.2$  y para una conectancia de  $C = \frac{1}{\sigma^2 N} - 0.03$ , considerando que esta  $C$  viene de la relación (2.13) para que se tuvieran sistemas estables; es decir con eigenvalores con

---

<sup>17</sup>cita

<sup>18</sup>Que para May es equivalente a  $-1$  pero se puede generalizar a cualquier valor negativo

parte real negativa.

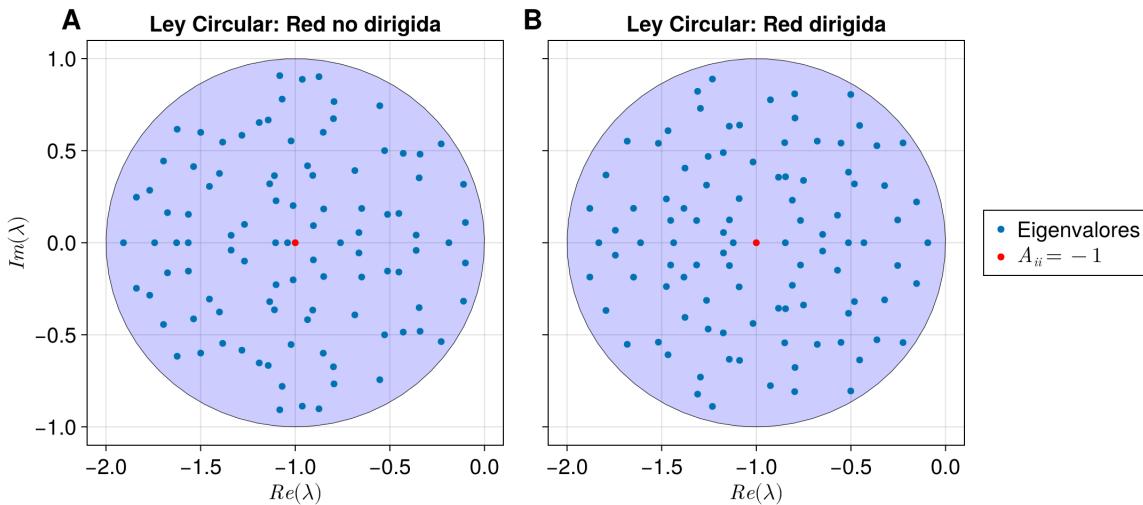


Figura 2.8: Distribución de eigenvalores que cumplen la Ley Circular de May. Para ambos sistemas se consideró  $N = 100$ , una FDP normal centrada en  $\mu = 0$  y con  $\sigma = 0.2$  para una conectancia  $C = \frac{1}{\sigma^2 N} - 0.03$ . (A) Considerando una matriz de interacciones estructuralmente simétrica. (B) Considerando una matriz de interacciones puramente aleatoria.

Si el sistema resultante no es estable entonces no se cumple la Ley circular y los eigenvalores salen del confinamiento del círculo, aunque lo más importante es que existirán algunos eigenvalores con parte real positiva que eventualmente volverán inestable al sistema. Para que esto ocurra se deben de considerar valores de la conectancia de la forma  $C > \frac{1}{\sigma^2 N}$ , siguiendo nuevamente la relación (2.13). Este parámetro de alguna manera sigue la regla que estipula que el sistema podrá ser estable cuando se tenga un valor promedio de interacciones ( $\sigma$ ) bajo pero con alta conectancia  $C$  o un valor promedio fuerte de interacciones pero con baja conectancia, la idea es buscar un equilibrio entre ambos parámetros.

Para el sistema de Allesina se ha mencionado anteriormente que se consideran matrices de interacciones mapeadas a partir de una distribución bivariante, es decir que la matriz triangular superior se mapea con una FDP normal para una  $\mu_1$  y  $\sigma_1$  y para la triangular inferior se mapea con otra FDP normal con  $\mu_2$  y  $\sigma_2$ . De esta forma nos permite realizar un cálculo de correlación  $\rho$  entre ambas matrices triangulares de la matriz de interacciones. Al calcular la correlación entre ambas partes de la matriz de interacciones se define  $a = 1 + \rho$  y  $b = 1 - \rho$  como semi ejes de la ellipse y dependiendo de como se encuentren los signos del resto de la matriz de interacciones es que veremos dos diferentes formas de distribución elíptica. Otro aspecto de esta matriz es que Allesina también considera a la diagonal fijada a un valor  $A_{ii} = -d$  lo que implica que los eigenvalores estarán en la vecindad elíptica alrededor de  $-d$ .

La forma de la elipse, que podrá ser vertical u horizontal vendrá dada por el valor de la correlación, si se tienen interacciones “presa-depredador” (+−) o (−+) entonces la distribución elíptica resultante será vertical, en este caso habría que escoger una FDP normal con  $\mu_1 < 0$  y otra FDP normal con  $\mu_2 > 0$ . Por otro lado si las interacciones son de cooperación (++) y/o competencia (--) entonces la distribución elíptica será horizontal. En la figura (2.9) se han considerado dos matrices de interacción,

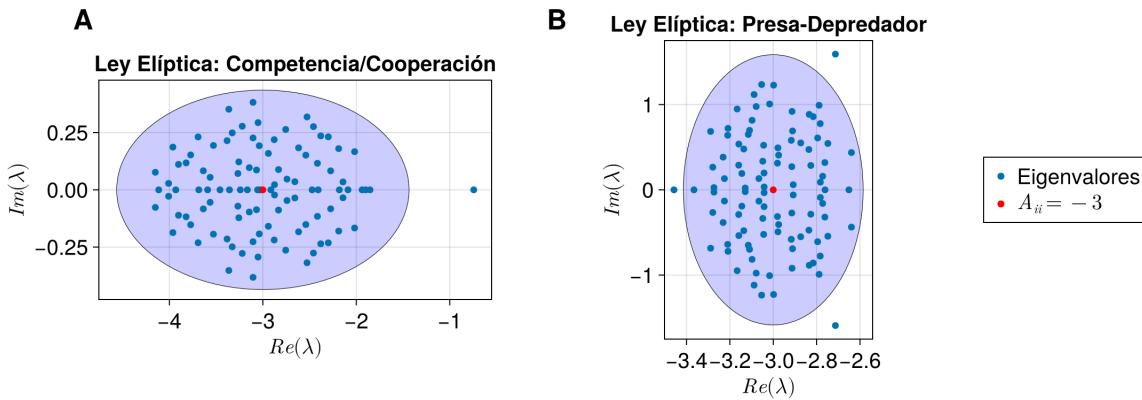


Figura 2.9: Distribución de eigenvalores que cumplen la Ley Elíptica de Allesina. Para ambos sistemas se consideró  $N = 100$ , dos FDP normal respectivamente, una conectancia  $C = 0.12$  y en ambas se debe de considerar a la matriz de interacciones como estructuralmente simétrica. (A) Se considera una FDP normal para la parte triangular superior con  $\mu_1 = 0.1$  y  $\sigma_1 = 0.1$  y para la parte inferior se considera otra FDP normal con  $\mu_2 = 0.3$  y  $\sigma_2 = 0.2$ . (B) Se considera una FDP normal para la parte triangular superior con  $\mu_1 = -0.1$  y  $\sigma_1 = 0.1$  y para la parte inferior se considera otra FDP normal con  $\mu_2 = 0.3$  y  $\sigma_2 = 0.2$ .

una con interacciones de competencia/cooperación y otra con interacciones presa depredador. Para que la distribución de eigenvalores pueda ajustarse a la elipse se deben de considerar matrices estructuralmente simétricas, ya que si fueran puramente aleatorias la correlación  $\rho$  sería igual a cero y por lo tanto  $a = b$  lo que daría lugar al resultado de May. El resultado de Allesina es interesante porque ya las interacciones poseen un sentido y estructura, no son independientes como en el caso de May. Si por ejemplo se tuviera  $\rho > 0$  implicaría que las especies tienden a cooperar o competir de forma similar, tal y como ocurre en la fig. (2.9 A). En contra parte, cuando  $\rho < 0$  entonces las especies tienden a un comportamiento presa-depredador siguiendo la tendencia de  $\rho$ . Por lo tanto los ejes capturan como las correlaciones afectan la dirección dominante del sistema.

Si se desea, se recomienda profundizar más en el trabajo de Allesina ya que en este presente no se hará de tal forma. Este trabajo esta basado principalmente en los resultados de May ya que la matriz de incidencias  $\Lambda$  y consecuentemente la matriz interacciones  $\mathcal{I}$  están construidas sobre redes aleatorias bajo una FDP normal centrada en  $\mu = 0$  y para diversas  $\sigma$ . El fin de presentar estos resul-

tados es para mostrar al lector que dirección se va a tomar con el sistema que se ha construido hasta ahora; la idea es explorar como cambia su estabilidad al variar sus parámetros y también explorar como es la distribución de eigenvalores de  $\mathcal{I}$ , ya que como se verá más adelante, ¡su diagonal no es homogénea!

### 2.5.2. Transición de May

Antes de pasar al siguiente capítulo, en donde exploraremos los resultados de integrar el sistema construido a lo largo de este capítulo, vamos a revisar los resultados de transición de May con base en la relación (2.13). A continuación veremos diversos gráficos de estabilidad ya sea en función de la conectancia  $C$  o de la fuerza promedio de interacciones  $\sigma$ . Para ello se van a considerar matrices de May estructuralmente simétricas y puramente aleatorias con el fin de ver que tanto cambia la transición entre ambos tipos de sistemas. Las entradas aleatorias de las matrices consideradas estarán mapeadas a partir de una FDP normal centradas en  $\mu = 0$  y para diversos valores de  $\sigma$ , en concreto se considerará el conjunto  $\tilde{\sigma} = \{0.1, 0.2, \dots, 1.0\}$ . Por último, las redes/matrices consideradas van a ser para  $N = 100$  por lo que se espera que la transición ocurra de forma “abrupta” por considerar  $N \gg 1$ .

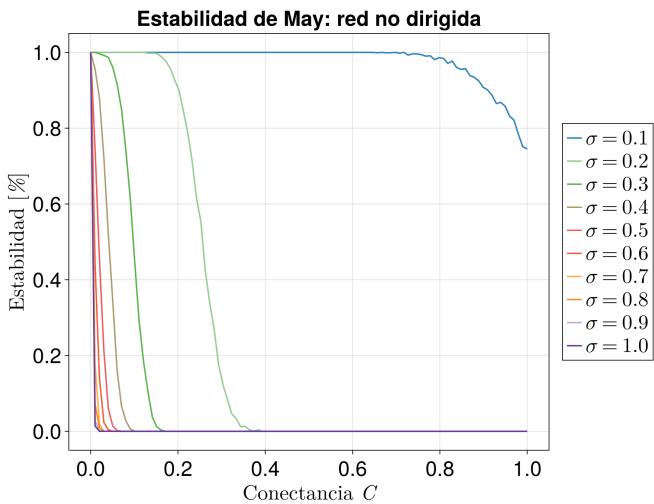


Figura 2.10: Matrices de May estructuralmente simétricas. Se ha integrado el sistema para 100 conectancias equidistantes en el intervalo  $[0, 1]$ . Se considera también el conjunto promedio de la fuerza de las interacciones  $\tilde{\sigma} = \{0.1, 0.2, \dots, 1.0\}$ . Para cada valor de la conectancia se consideraron 1000 simulaciones rescatando por cada valor el número de simulaciones que resultaron estables.

ocurre para valores pequeños de la conectancia lo que corresponde con lo estipulado por May.

En cada uno de los gráficos se van a contemplar 1000 muestras de sistemas de May por cada valor de  $C$  o  $\sigma$  y se contabilizará el número de sistemas estables resultante con base en el signo de la parte real de los eigenvalores de cada sistema. Comenzando por matrices de May no dirigidas (es decir: estructuralmente simétricas) se investiga en la figura (2.10) cómo es la dinámica de transición en función de  $C$ . Notamos que para  $\sigma = 0.1$  el sistema mayormente es estable debido a las interacciones débiles que tiene; incluso para una alta conectancia ( $C = 1$ ) será estable en un 75 % de probabilidad. Para  $\sigma = 0.2$  muestra una transición moderada, aproximadamente alcanza su punto crítico en  $C = 0.25$ ; gracias a ello se considerará de referencia a esta configuración para este y el resto de simulaciones de este trabajo. Para el resto de varianzas la transición

Visualizando el mismo escenario pero para valores de la conectancia en escala  $\log_{10}$  se podrán apreciar

mejor las transiciones para valores altos de  $\sigma$ . En este caso podemos ver como las transiciones ocurren para valores de la conectancia entre  $10^{-4}$  hasta  $10^{-1}$  lo que indica que entre mayor sea  $\sigma$  es cada vez menos probable que un sistema sea estable. En estos casos se tiene la ventaja de que cada uno de los sistemas considerados se consideran las diagonales fijas en  $A_{ii} = -1$  para toda  $A_{ii} \in A$ . Lo que muestra una suavidad en la forma de las transiciones, en el siguiente capítulo veremos una gran diferencia cuando la diagonal no es homogénea. Actualmente consideramos únicamente matrices de May estructuralmente simétricas, y nos da un tipo de estabilidad, esta forma cambia ligeramente cuando se consideran matrices de May puramente aleatorias. Se encuentra que la transición para este tipo de matrices es ligeramente más pronunciada que las anteriores y también se encuentra ligeramente recorrida hacia la derecha. Tales diferencias se muestran para todo caso sin embargo lo haremos visible para el caso  $\sigma = 0.2$  y  $\sigma = 0.6$ , esto con el fin de notar la sutil diferencia que existe para el primer caso y la gran diferencia que existe para el segundo caso. A medida que el valor de  $\sigma$  aumenta, esta diferencia es cada vez más pronunciada. Además se puede observar como la

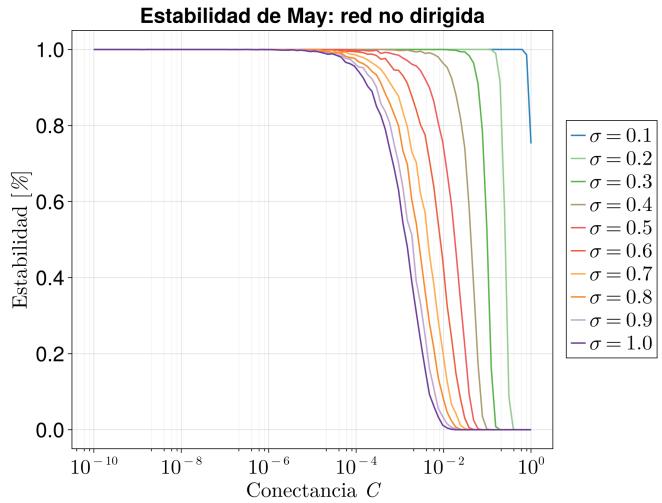


Figura 2.11: Matrices de May estructuralmente simétricas. Se ha integrado el sistema para 100 conectancias en escala  $\log_{10}$  en el intervalo  $[0, 1]$ . Se considera también el conjunto promedio de la fuerza de las interacciones  $\tilde{\sigma} = \{0.1, 0.2, \dots, 1.0\}$ . Para cada valor de la conectancia se consideraron 1000 simulaciones rescatando por cada valor el número de simulaciones que resultaron estables.

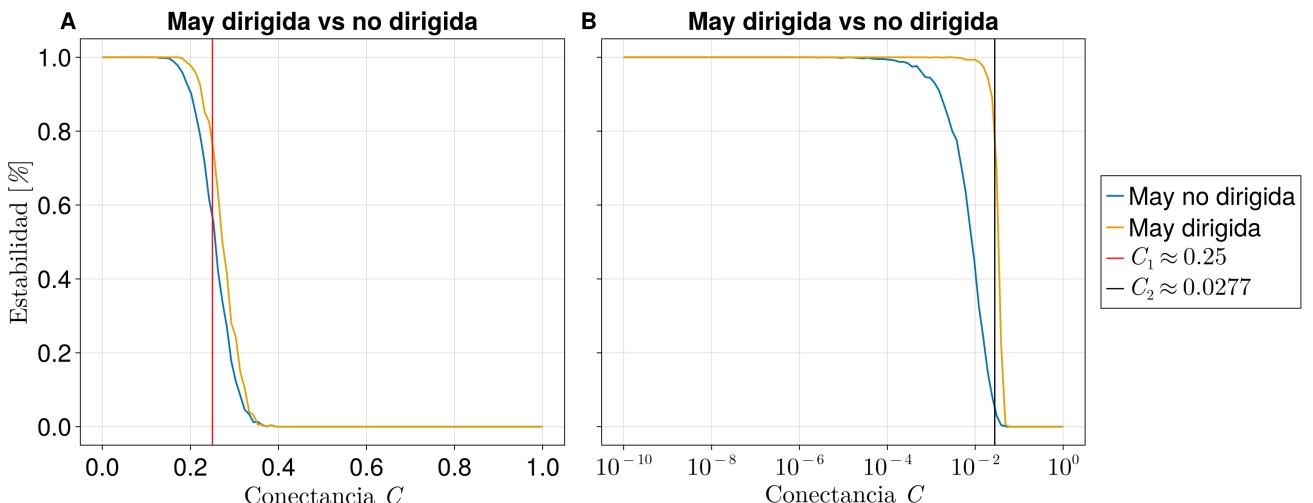


Figura 2.12: Transición entre redes de May dirigidas vs No dirigidas. (A) Se considera para  $\sigma = 0.2$  (B) Se considera para  $\sigma = 0.6$ .

red no dirigida de May comienza a decaer primero y de forma más suave en comparación con la red

puramente aleatoria de May que respeta fielmente su parámetro de transición.

Para el caso de la transición en función de sigma tenemos un resultado similar. Para este caso se consideró el conjunto de conectancias  $\tilde{C} = \{0.1, \dots, 1.0\}$ . Además la simulación considera 1000 matrices de interacción por cada valor de  $\sigma$  y para cada  $C \in \tilde{C}$  y en cada uno de ellos se verifica si es estable o no mediante el cálculo de la parte real de los eigenvalores. Se verá que a medida que  $\sigma$  y  $C$  aumenten, los sistemas tienen menor probabilidad de ser estables. Para este caso en particular se logra notar que la transición no ocurre para valores  $\sigma \ll 1$  como en el caso de las gráficas en función

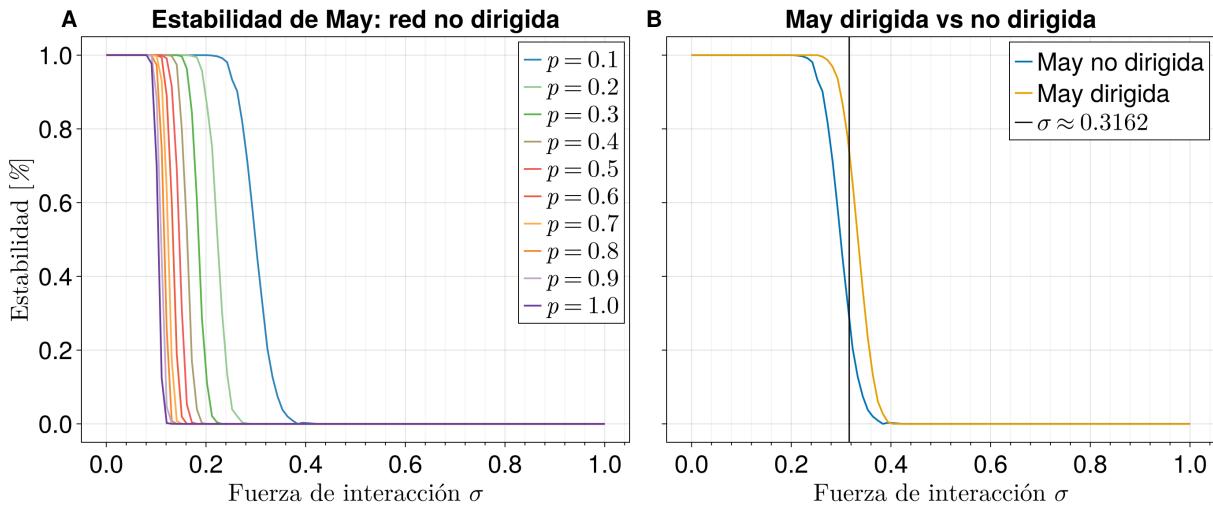


Figura 2.13: Transiciones en función de la fuerza de interacción  $\sigma$  **(A)** Se considera para un conjunto de conectancias  $\tilde{C}$ . Por cada valor de  $\sigma$  se consideran 1000 matrices de May estructuralmente simétricas; en cada simulación se contabilizan los sistemas estables mediante el cálculo de la parte real de sus respectivos eigenvalores. **(B)** Caso particular para  $C = 0.1$ ; se consideran las diferencias entre la matriz de May estructuralmente simétrica y la matriz puramente aleatoria.

de la conectancia  $C$ , sin embargo, estos parámetros están íntimamente relacionados por (2.13) por lo que en el fondo esta información es complementaria del mismo fenómeno. Algo importante a notar es que aún con el valor de la conectancia  $C = 0.1$ , a medida que  $\sigma$  aumenta los sistemas son cada vez menos estables, a diferencia de la transición en función de  $C$  que para  $\sigma = 0.1$  no se observaba un cambio abrupto en la estabilidad. Esto podría implicar que la fuerza de las interacciones tiene mayor peso que la misma conectividad de la red, sin embargo, al final esto es relativo ya que depende de cada parámetro de transición considerando cada  $\sigma$  o  $C$  según sea el caso; en función de la conectividad  $C$  y para  $\sigma = 0.1$  el parámetro crítico se encuentra en una vecindad alrededor de  $C = 1$  mientras que para el caso de la fuerza de las interacciones  $\sigma$ , su parámetro crítico se encuentra alrededor de  $\sigma \approx 0.3162$ . Por lo tanto la transición de de cada caso será particular y dependiente de sus parámetros y por ahora no es posible dar una respuesta que nos indique cual de los parámetros juega el papel más relevante para determinar la estabilidad del sistema.

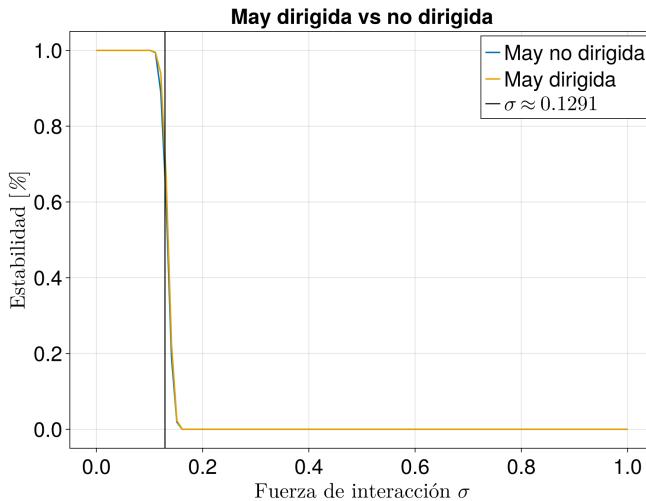


Figura 2.14: Variaciones en la transición para la matriz de May estructuralmente simétrica y para matriz puramente aleatoria. Se consideró el valor de la conectancia  $C = 0.6$ .

A diferencia de la conectancia, cuanto mayor sea la  $\sigma$  se observa que las variaciones entre la red dirigida de May y la no dirigida son prácticamente nulas, de hecho, estas variaciones únicamente se ven para valores de  $\sigma$  pequeños. Esto nos indica que existe una relación inversa entre  $\sigma$  y  $C$  de modo que para el caso de la transición en función de  $C$ , cuanto mayor es  $\sigma$  las variaciones son cada vez más notorias mientras que para la transición en función de  $\sigma$ , cuanto mayor es  $C$  las variaciones son cada vez menores. En la figura (2.13) (B) se muestran las variaciones para  $C = 0.1$  y en la figura (2.14) las variaciones son notablemente imperceptibles para  $C = 0.6$ .

Existe una forma conveniente de juntar ambos gráficos (en función de  $C$  y  $\sigma$ ) y con ello podremos observar las diferencias entre los parámetros ajustados. Nos sirve esta forma de visualización para poder reunir la información en un solo lugar, sin embargo, los parámetros ajustables solamente tienen un punto de intersección, es decir que cada una de las gráficas de transición es un conjunto independiente (salvo por las mencionadas intersecciones) que se puede estudiar por separado. La forma de hacerlo es definir al eje  $X$  como el producto  $\sigma\sqrt{NC}$ ; esta referencia viene de la relación (2.13) en donde se establece que los sistemas serán estables si se cumple  $\sigma\sqrt{NC} < 1$ .

Esta visualización posiciona convenientemente a la transición en una vecindad alrededor del 1, independientemente de cual sea el parámetro de transición del caso a evaluar; es conveniente porque se tiene la certeza de que ocurre en 1, cuando las diagonales de las matrices de interacción ya no son homogéneas entonces esta propiedad ya no se cumple en su totalidad: se observa que la vecindad se ensancha y el parámetro de transición se desplaza con respecto de los resultados de May. Esto se irá a explorar y discutir en el siguiente capítulo, por mientras veamos como son los resultados de las 4 opciones disponibles: transiciones en función de  $C$  y  $\sigma$  con matrices estructuralmente simétricas y matrices puramente aleatorias.

A continuación se muestran un par de escenarios en donde se realiza el reescalamiento del eje  $x$ , particularmente para  $C_1 = \sigma_1 = 0.2$  y  $C_2 = \sigma_2 = 0.6$ . Curiosamente para el primer caso las gráficas se ajustan casi perfectamente, sugiriendo que existen mucha compatibilidad entre los valores  $C_1$  y  $\sigma_1$ . Mientras que para el segundo caso (figura 2.16 A) se percibe una gran desviación entre las matri-

ces de May estructuralmente simétricas y las puramente aleatorias y por el contrario en la (B) las desviaciones de este caso son casi imperceptibles, tal y como se venía discutiendo anteriormente.

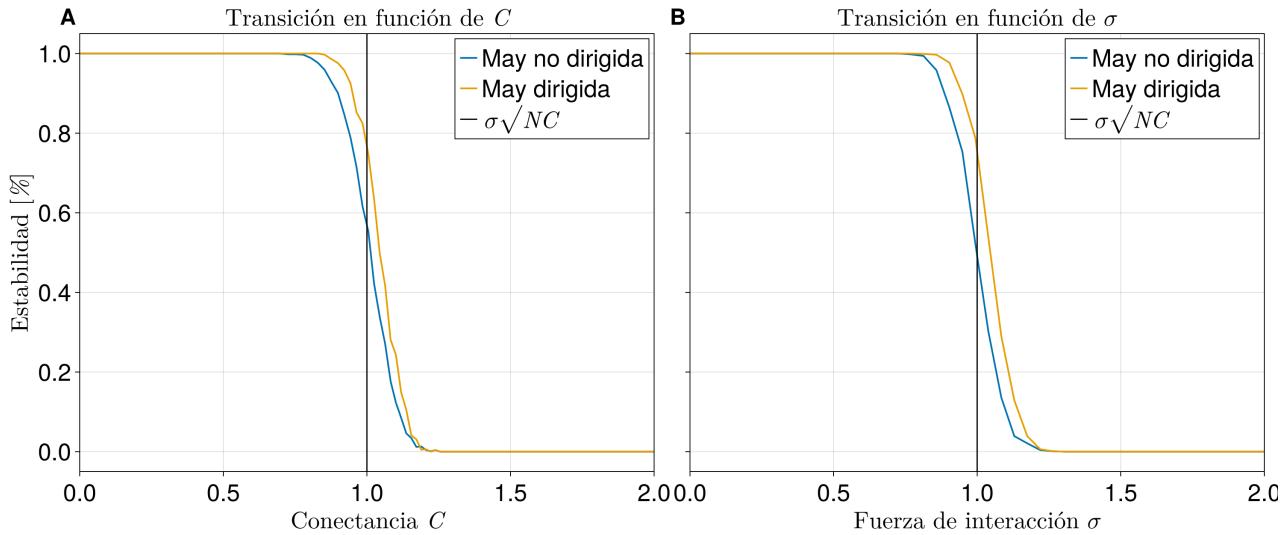


Figura 2.15: Re-escalamiento del eje  $x$  para visualizar las transiciones de la conectancia  $C$  y la fuerza promedio de las interacciones  $\sigma$ . Para este caso particular se escogió  $C = \sigma = 0.2$ . En ambos casos se consideran las transiciones para las matrices de May estructuralmente simétricas y las puramente aleatorias.

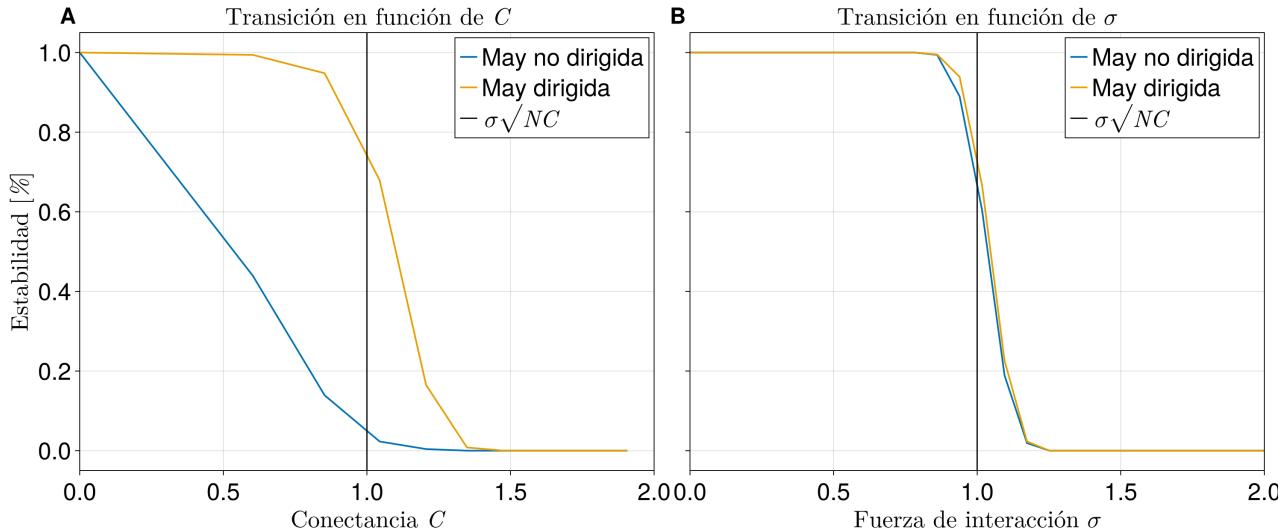


Figura 2.16: Re-escalamiento del eje  $x$  para visualizar las transiciones de la conectancia  $C$  y la fuerza promedio de las interacciones  $\sigma$ . Para este caso particular se escogió  $C = \sigma = 0.6$ . En este caso a diferencia del anterior, se logra apreciar la desviación que ocurre en (A) cuando  $\sigma$  se va acercando a 1.0.

## Capítulo 3

# Condiciones de estabilidad

El capítulo anterior motiva al actual para presentar los resultados de la dinámica que produce la matriz de incidencias  $\Lambda$  (Ec. 2.8) al integrarse en el sistema de Lotka-Volterra generalizado (ec. 2.1) y linearizarse produciendo entonces la Matriz de Interacciones (2.12). En este capítulo se presentarán los resultados que produce cada etapa del proceso, así como sus características. Nuestra meta es alcanzar los diagramas de transición y compararlos con los resultados de May en sus distintos escenarios; con ello se busca caracterizar estas transiciones y proponer algunos criterios para que se tengan lugar estas transiciones.

Para ello se consideraron 3 diferentes simulaciones que comparten algunas similitudes; en concreto la única diferencia es el número de especies o nodos en la red/matriz de incidencias: las simulaciones se consideraron para 25, 50 y 100 especies/nodos, siendo el último caso donde se generó más información. Para poder explorar los resultados de dejaron fijos la mayor cantidad de parámetros para poder observar cambios significativos, de todos los parámetros que hay en la ec. 2.1 únicamente se variaba la forma de la matriz de incidencias  $\Lambda$  y que a su vez esta matriz depende de una probabilidad de conectividad  $p$  y una fuerza promedio de interacción  $\sigma$ . En todas las simulaciones la tasa de crecimiento se dejó fija en  $r = 2$  y la capacidad de carga en  $K = 5$  para toda especie del sistema. Se integró el sistema con RK4 para un intervalo de tiempo entre 0 y 50 con un paso de integración de  $h = 0.01$ .

Además de estos parámetros, siempre se inicializó cada simulación con la condición inicial  $\vec{x}_0 = \vec{1}$  (dependiendo de la dimensión del sistema) y se consideraron dos escenarios<sup>1</sup>: Matrices de incidencias estructuralmente simétricas y puramente aleatorias, tal y como se visualizó al final del capítulo anterior. En el apéndice (??), el lector puede darse una idea de como se realizó el proceso de las simulaciones. En cada escenario se presentó cierta cantidad de ruido en las gráficas de estabilidad, por lo que el número de simulaciones fue establecido en función de la disminución de dicho ruido.

---

<sup>1</sup>solo aplica para  $N = 100$

### 3.1. Series de tiempo

Anteriormente se comentaba que las interacciones de la matriz de incidencias  $\Lambda$  están volteadas con respecto de la matriz de interacciones  $\mathcal{I}$  (ver Definición 6), la cooperación en  $\mathcal{I}$  se da para las interacciones  $(++)$  mientras que para  $\Lambda$  se da para  $(--)$ . Esto es muy importante no perderlo de vista puesto que al tener  $N \gg 1$  especies, es difícil poder monitorear el signo de todas las interacciones que intervienen. Si tuviéramos un sistema puramente de competencia, es decir para toda  $\alpha_{ij} \in \Lambda$  mayor o igual que cero, entonces no hay forma de que ninguna de las poblaciones participantes sobrepasen la capacidad de carga establecida, tal y como se pudo esbozar en el Ejemplo 1. Por lo tanto obtendríamos series de tiempo caóticas para cada una de las especies por debajo de  $K = 5$ .

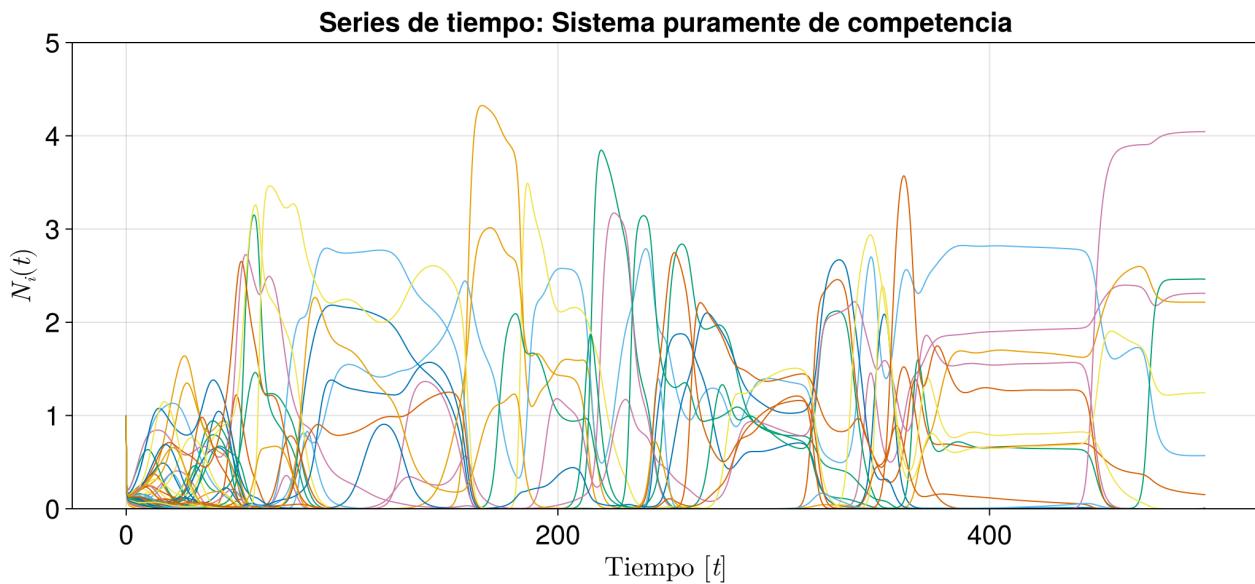


Figura 3.1: Series de tiempo para el sistema de competencia de especies. Se emplea una matriz de incidencias de  $100 \times 100$  cuyas entradas son de una distribución uniforme en el intervalo  $[0,1]$ . En este caso particular no se considera a  $\sigma$ , solamente el tamaño de la red con  $p = 1.0$ , es decir que es una red con el número máximo de enlaces posibles. En este caso la dinámica no sobrepasa la capacidad de carga puesto que las 100 especies se encuentran compitiendo y obedecen fielmente al comportamiento logístico.

Una de las características que se encontró en esta clase de sistema en particular es que el tiempo en que tarda en estabilizarse es considerablemente mayor que en los sistemas donde consideraremos todas las interacciones antes mencionadas. Las poblaciones al estar confinadas por la capacidad de carga, tienen más oportunidad de interactuar entre sí pero esto genera que las constantes fluctuaciones prolonguen el tiempo de estabilización. Por el contrario, el sistema generalizado sí excede la capacidad de carga lo que se traduce en una disminución de la cantidad de fluctuaciones que hace que el sistema pueda llegar al atractor en un tiempo mucho menor. Otro aspecto que se encontró en la red de competencias es que

cuando es más conectada, tarda más tiempo en estabilizarse. Si generáramos una red de competencias con pocas conexiones ( $p \leq 0.5$ ), el número de especies que compiten es considerablemente menor lo que produce que existan menor cantidad de fluctuaciones y a su vez las dinámicas de las poblaciones sean menos caóticas lo que hace que se pueda llegar a la estabilidad en un tiempo menor.

En el Ejemplo 4 del capítulo anterior, se observaba como las interacciones de cooperación (--) en la matriz de incidencias  $\Lambda$  genera la aparición de un atractor para ambas especies que se posiciona por arriba de la capacidad de carga (Figura (2.6)). En el caso extendido a  $N \gg 1$  especies ocurrirá lo mismo, solo que ahora tendremos un atractor  $N$ -dimensional. En este caso pueden haber especies que sobrepasen por mucho o poco la capacidad de carga, pero también cabe la posibilidad de que algunas no logren sobreponerla y otras que lleguen a extinguirse. A continuación se muestran dos ejemplos diferentes

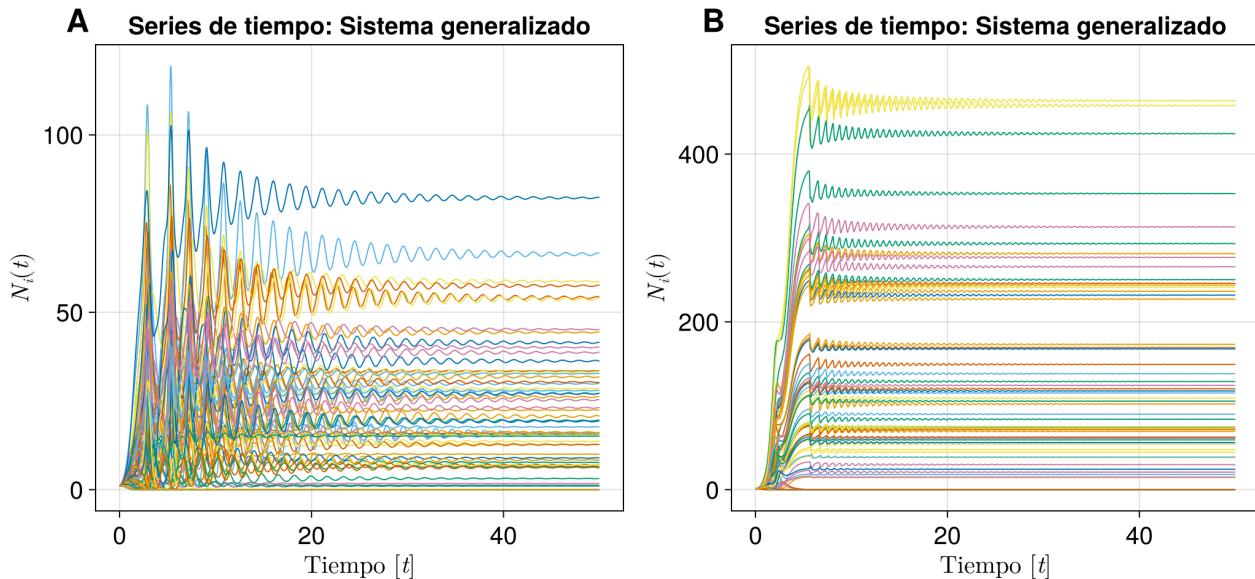


Figura 3.2: (A) Series de tiempo para el sistema de especies en competencia asociada a una matriz de incidencias de  $100 \times 100$ , con  $\sigma = 0.2$  y  $p = 0.35$ . (B) Series de tiempo para el sistema de especies en competencia asociada a una matriz de incidencias de  $100 \times 100$  nodos con  $\sigma = 0.2$  y  $p = 0.5$

La diferencia evidente entre estas gráficas se da gracias a la matriz de incidencias, las interacciones que intervienen vienen de una fuerza de interacción promedio de  $\sigma = 0.2$  con diferentes probabilidades de conectividad, para  $p = 0.35$  y para  $p = 0.5$ . El segundo caso corresponde con una red más conectada que el primero y eso se traduce al mismo tiempo en mayor oportunidad para crecer puesto que el crecimiento en este caso ronda hasta los 400 mientras que el otro escenario no pasa de 100. Esto podría interpretarse de la siguiente manera: entre más especies existan y cooperen entre sí, mayores serán sus crecimientos. Como se puede observar, el tiempo en que llegaron a estabilizarse fue menor a  $t = 50$ , considerablemente menor a diferencia del caso de la Figura (3.1).

Sin embargo, el crecimiento no solamente depende de la cantidad de interacciones que existan (enlaces de la red), sino también de la fuerza de interacción promedio, entre mayor sea también se verá que la capacidad de crecimiento es proporcional a ello. Cuando se genera la matriz de incidencias en función de la matriz aleatoria (simétrica o no) y la matriz con entradas de una FDP normal centrada en  $\mu = 0$  se asume que existirán 50 % de valores positivos y 50 % de valores negativos distribuidos aleatoriamente en las 5 diferentes interacciones posibles<sup>2</sup>. La presencia del comensalismo ( $-0$ ), depredación ( $+-$ ) o ( $-+$ ) y cooperación ( $--$ ) provoca numerosas especies logren superar la capacidad de carga del sistema para establecerse en el atractor  $N$ -dimensional, pero no hay que perder de vista que un “exceso” de estas interacciones genera inestabilidad y la posibilidad de que algunas de las especies divergan a infinito.

Los resultados de la Figura (3.2) en un principio se generaron a partir del tanteo y tomando como referencia la relación (2.13), cabe preguntarse ¿cuál debería ser la cualidad de  $\sigma$  y  $p$  para que los sistemas de  $N = 100$  puedan hallar la estabilidad? La pregunta va encaminada a tratar de motivar la cualidad del parámetro crítico que relaciona  $N$ ,  $\sigma$  y  $p$ . Pero para llegar a ese punto primero se debe de conocer a la matriz de interacciones  $\mathcal{I}$  resultante de realizar la integración del sistema y validar si lo que se nos muestra en estas gráficas de verdad es estabilidad (recordar la proposición ?? acerca de la parte real de los eigenvalores de la matriz de interacciones).

## 3.2. Matriz de interacciones

En el capítulo anterior se definió el Jacobiano del sistema generalizado para poder determinar la matriz de interacciones, pero aún con ello no se ha presentado una forma de acceder a los puntos de equilibrio del sistema necesarios para dicho Jacobiano; debido a la naturaleza del sistema (considerando  $N = 100$ ), deben ser al menos 100 de ellos con diversas estabilidades. Calcularlos de manera analítica puede llegar a ser una tarea desafiante y poco redituable, pues de todos los puntos de equilibrio que puedan existir solo nos interesa el que es estable, y la mayoría de ellos podrían ser silla. La solución de ello por fortuna lo hallamos en el resultado de la integración numérica, como se puede ver en la Figura (3.2), al final de cada serie de tiempo se observa que las poblaciones llegan a estabilizarse. El último valor de cada población corresponde con una entrada del vector correspondiente al atractor que se encuentra contenido en el hiperespacio fase del sistema.

Esto favorece a la construcción de los algoritmos que generan la matriz Jacobiana. Fácilmente se pueden programar las entradas de la matriz Jacobiana con base en la Definición 6 y con ayuda de este vector correspondiente al atractor, se evalúa y finalmente se genera la matriz de interacciones  $\mathcal{I}$  que tanto buscamos. Para tener certeza de la matriz de interacciones generada es importante validar que el

---

<sup>2</sup>Si la matriz es puramente aleatoria son 5 posibles interacciones, sino entonces son 3.

sistema se estabiliza en un tiempo menor o igual (de preferencia menor) al tiempo final de la integración (en nuestro caso general para  $t = 50$ ). Se puede validar visualmente con las series de tiempo; una segunda validación sobre  $\mathcal{I}$  es revisar que todos los elementos de su diagonal sean menores que cero, invocando así a la Proposición (1). Se ha observado que cuando se ingresa un vector no correspondiente al punto de equilibrio estable, la diagonal de  $\mathcal{I}$  contiene elementos positivos invalidando la proposición mencionada<sup>3</sup>.

De esta forma podemos conocer las matrices de interacción de sistemas de competencia como los de la Figura 3.1 y los sistemas generalizados de la Figura 3.2. En este enlace<sup>4</sup> el lector puede entrar a revisar por su cuenta el resultado de 4 matrices de interacción de sistemas que resultaron estables para los parámetros  $N = 100$ ,  $\sigma = 0.2$  y probabilidades  $\{0.3, 0.4, 0.5, 0.6\}$ . Revisemos si en efecto estos ejemplos cumplen con la Poposición 1

#### Entrada

```
using CSV, DataFrames
jacobianos = []
for i in 0.3:0.1:0.6
    ruta = "Datos/Ejemplo Jacobianos/Jacobiano100_p$i.s0.2.csv"
    df = CSV.read(ruta, DataFrame, header=false)
    push!(jacobianos, df)
end
jacobianos
```

#### Salida

4-element VectorAny:  
100×100 DataFrame

Validando las diagonales de cada uno de las matrices de interacción consideradas se tiene

#### Entrada

```
using LinearAlgebra
print(all(x -> x<0, diag(Matrix(jacobianos[1]))), ", ")
print(all(x -> x<0, diag(Matrix(jacobianos[2]))), ", ")
print(all(x -> x<0, diag(Matrix(jacobianos[3]))), ", ")
print(all(x -> x<0, diag(Matrix(jacobianos[4]))))
```

<sup>3</sup>Una hipótesis implícita de la Proposición 1 es que para generar a  $\mathcal{I}$  es necesario aplicar el Jacobiano de la Definición 6 y evaluarlo en el atractor.

<sup>4</sup>Consultar: <https://github.com/rogve98/Tesis/tree/master/Notebooks/Datos/Ejemplo%20Jacobianos>

Salida

true, true, true

El aspecto más importante de todas las matrices de interacción resultantes es que la diagonal no es homogénea como sí lo es en las matrices de May. Ocupando nuestro arreglo de Jacobianos veamos como son las distribuciones de los eigenvalores mediante la graficación de un histograma

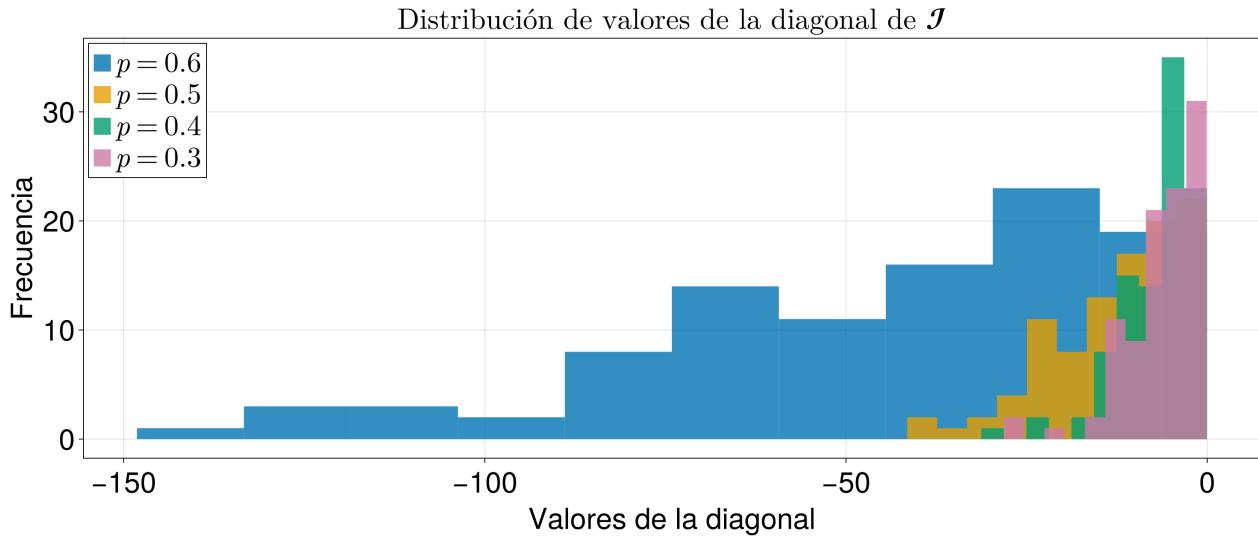


Figura 3.3: Distribución de la diagonal en matrices de interacción  $\mathcal{J}$  del sistema generalizado para  $N = 100$ ,  $\sigma = 0.2$  y  $p \in \{0.3, 0.4, 0.5, 0.6\}$ .

No solo no es homogénea sino que cuanto la probabilidad es mayor, la distribución es más dispersa hacia los valores negativos tal y como ocurre en el caso de  $p = 0.6$  en contraste con  $p = 0.3$ . Este comportamiento es natural considerando el proceso de modelación e integración del sistema generalizado; suponer la diagonal homogénea es establecer un sistema demasiado ideal y por tanto difícilmente aproximable a la realidad. Esta propuesta pretende acercarse hacia la dinámica que presentan sistemas semejantes a la realidad, sin embargo aún sigue siendo muy teórico.

En el capítulo pasado se vio que la importancia de la diagonal radica en la forma de la distribución de los eigenvalores del sistema en el plano complejo, englobado bajo la Ley Circular. En las matrices de May, la diagonal representaba el centro y radio del círculo que encerraba esta distribución de eigenvalores; a partir de esta distribución se puede visualizar de otra forma si el sistema es estable o no, viendo el signo de la parte real de los mismos. En nuestro caso, al no tener un radio/centro definido ¿qué podemos esperar de la distribución de eigenvalores de  $\mathcal{J}$ ?

### 3.3. Leyes Circulares

Viendo que la distribución de la diagonal no es homogénea en los sistemas generalizados, se debe analizar como es la distribución de los eigenvalores en el plano complejo y si podría seguir la Ley Circular que establece May. Para ello se comenzará por revisar la distribución de eigenvalores de las matrices de interacción  $\mathcal{I}$  que se invocaron en la sección anterior

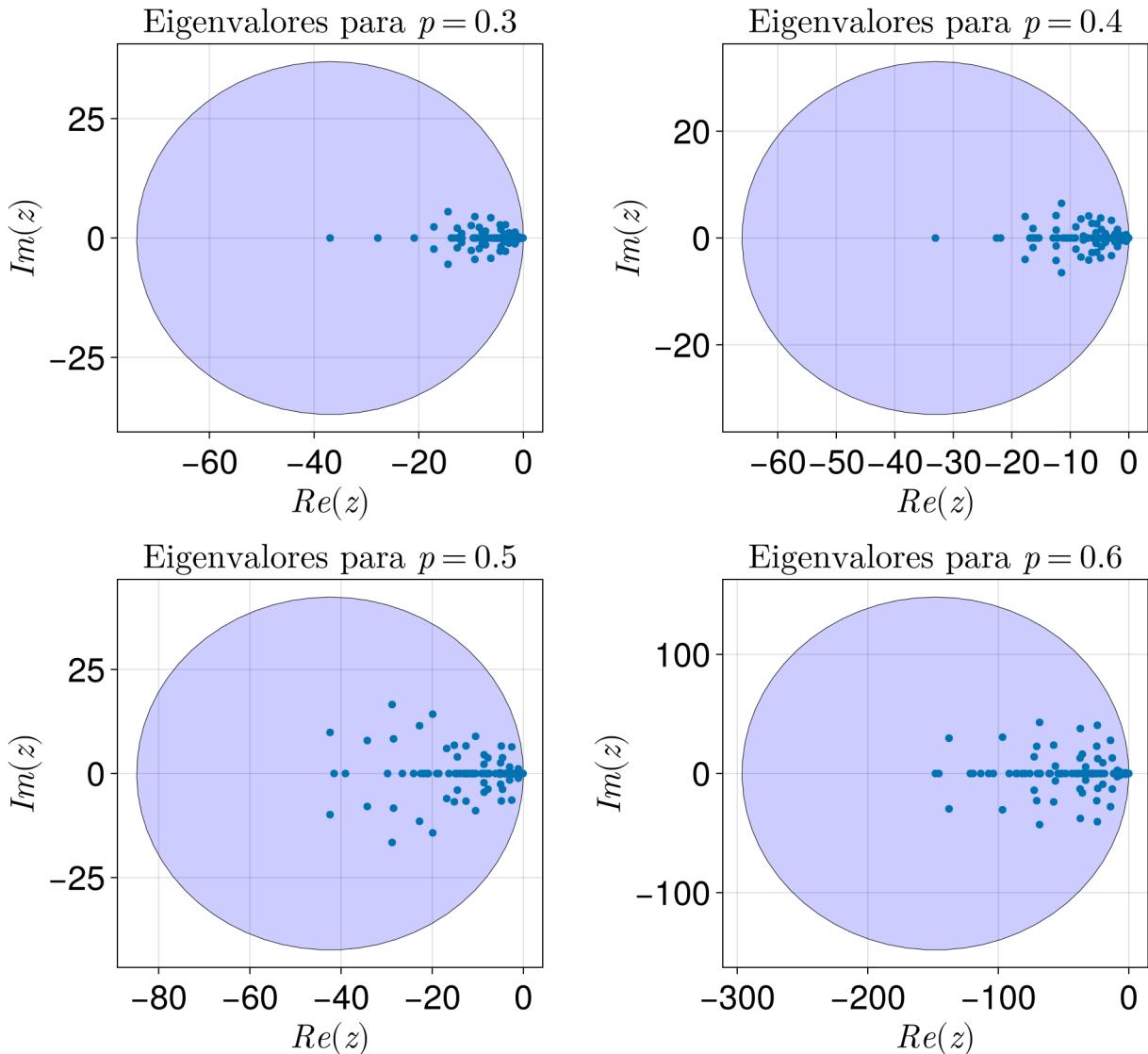


Figura 3.4: Distribución de eigenvalores para el conjunto de jacobianos con los parámetros  $N = 100$ ,  $\sigma = 0.2$  y  $p \in \{0.3, 0.4, 0.5, 0.6\}$ .

Para comenzar, se ha propuesto el centro/radio como el eigenvalor con parte real mínima de cada distribución<sup>5</sup>, y en primera instancia se puede observar que dicho círculo si encierra a toda la distribución de eigenvalores, además también se puede notar que en cada caso los eigenvalores cuentan con parte real negativa lo que sustenta que cada sistema sea estable. Sin embargo es notorio que la distribución no se ajusta al círculo resultante sino solamente a una parte del mismo. Otro aspecto que

<sup>5</sup>En consecuencia se genera el Círculo con el radio más grande posible de cada sistema.

se puede apreciar de esta distribución es que cuanto mayor es la probabilidad de conexión entre nodos, la distribución se ensancha al igual que como ocurrió en la distribución de la diagonal Figura (3.3).

El hecho de que la distribución de la diagonal no sea homogénea impacta directamente en la distribución de los eigenvalores, pero ¿qué pasa si en lugar de proponer una sola Ley Circular, se proponen  $N$ ? Para ello se ocupará la distribución más ancha, con  $p = 0.6$  y se considerará cada valor de la diagonal de su matriz de interacciones  $\mathcal{I}$  como centro y radio de una Ley Circular particular

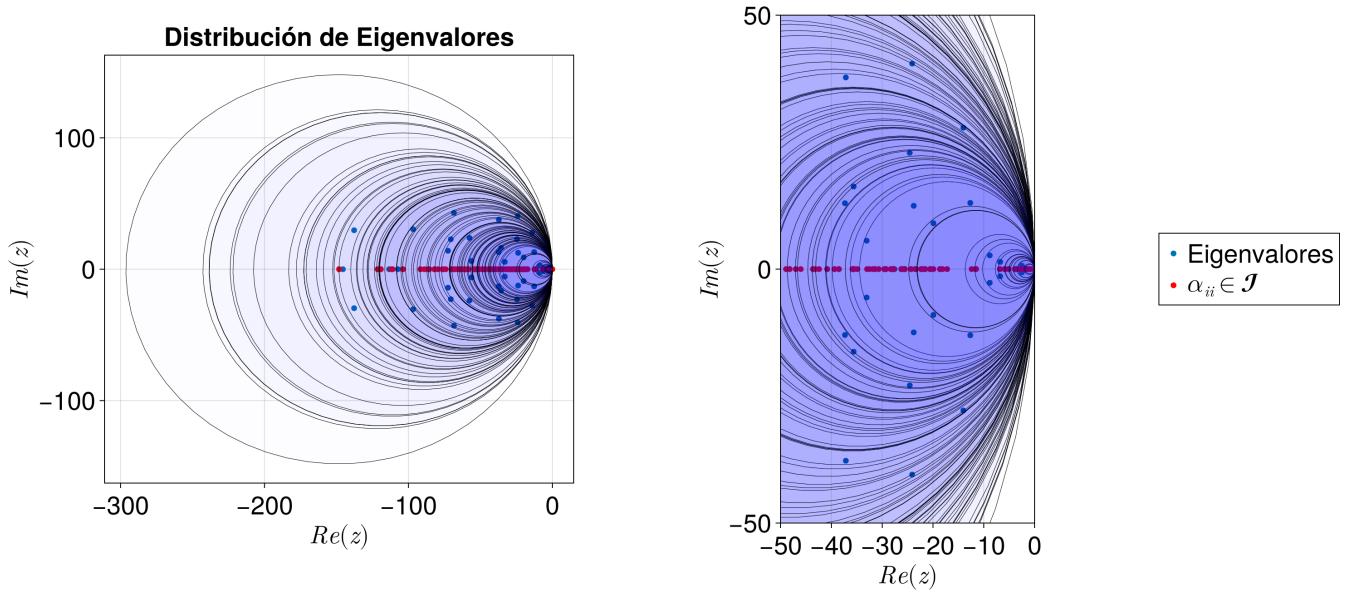


Figura 3.5: Distribución de eigenvalores del sistema generalizado para  $N = 100$ ,  $\sigma = 0.2$  y  $p = 0.6$ . Se consideran  $N$  Leyes Circulares cuyo radio y centro es cada valor de la diagonal de la matriz de interacciones  $\mathcal{I}$  asociada.

Esta propuesta sugiere que cada valor de la diagonal funge como un centro y radio de una Ley Circular local que encierra cierta cantidad de eigenvalores mismos que se ajustan a dicho círculo particular. Hemos visto el mínimo valor de la distribución de la diagonal genera un Círculo que encierra

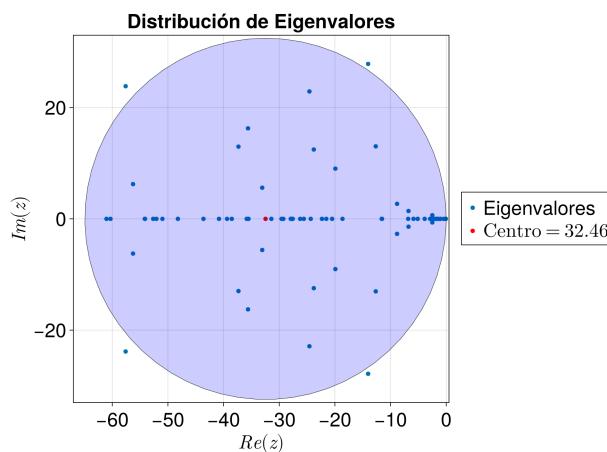


Figura 3.6: Caso particular de la Figura (3.5) para el valor de la diagonal  $\alpha_{ii} = 32.46 \in \mathcal{I}$ .

a todos los eigenvalores pero no necesariamente la distribución se ajusta a este círculo más grande. En resumen, la propuesta que aquí se genera es que la distribución de eigenvalores de un sistema generalizado se ajusta a  $N$  Leyes Circulares, mismas que se generan a partir de los valores de la diagonal de  $\mathcal{I}$ . De la Figura (3.5) analicemos más de cerca un caso particular para el valor de la diagonal  $\alpha_{ii} = 32.46$  (Figura 3.6), gran parte de los eigenvalores no tienen parte imaginaria

sino solo la parte real negativa mientras que el resto se distribuye por el resto del círculo a excepción de algunos otros eigenvalores que pasan al siguiente nivel o siguiente círculo. Para poder confirmar o refutar esta propuesta, se necesitan de más eigenvalores dibujados en el plano complejo, ya que los eigenvalores de un solo sistema nos brinda información limitada.

### 3.3.1. Análisis para $N = 50$

Como parte de la investigación, se tienen a disposición un banco de Jacobianos y otro de Diagonales<sup>6</sup> de Jacobianos en donde se concentran 78 archivos .csv en cada banco, y contienen cada uno la información de 100 simulaciones diferentes que resultaron ser estables. Debido al costo computacional, se tuvieron que generar para  $N = 50$  para los siguientes casos:

Valor promedio $[\sigma]$	Probabilidades $[p]$	Cantidad de archivos	Simulaciones realizadas
0.1 – 0.5	0.1 – 1.0	50	5000
0.6	0.1 – 0.9	9	900
0.7	0.1 – 0.7	7	700
0.8	0.1 – 0.5	5	500
0.9	0.1 – 0.4	4	400
1.0	0.1 – 0.3	3	300
<b>Total:</b>		78	7800

Tabla 3.1: Cantidad de archivos generados para el banco de Diagonales y Jacobianos considerando  $N = 50$ . A partir de  $\sigma = 0.6$  en adelante, los tiempos de compilación fueron muy prolongados por lo que no se obtuvieron los 10 archivos respectivos a diferencia de los valores promedio anteriores.

La razón de explorar sistemas estables para valores de  $\sigma$  y  $p$  cercanos a 1.0 era para ver que tan probable era que fueran estables en estas condiciones, además de obtener un mínimo de información posible para fortalecer el análisis que se hará a continuación. Se busca realizar una caracterización de las distribuciones enfocándose principalmente en la relación que tiene la media con la desviación estándar de cada una de las 7800 distribuciones; sobre todo ver de que forma cambia en función de los parámetros  $\sigma$  y  $p$ . Con base en los resultados encontrados, se explorará si también existe una relación entre la distribución de las diagonales con la distribución de la parte real de los eigenvalores asociados a los sistemas estables, de esta forma se podrá justificar parcialmente la propuesta de las *Leyes Circulares*, que indica que cada valor de la diagonal puede fungir como centro y radio de una de  $N$  leyes circulares que encierran localmente cierta cantidad de eigenvalores del sistema.

---

<sup>6</sup>Para los Jacobianos acceder a: <https://github.com/rogve98/Tesis/tree/master/Notebooks/Datos/Jacobianos>.  
Para las Diagonales acceder a <https://github.com/rogve98/Tesis/tree/master/Notebooks/Datos/Diagonales>.

## Diagonales

Algo que se ha visualizado en un primer acercamiento (Figura (3.3)) es que cuando es más grande la conectividad del sistema (parámetro  $p$ ), la distribución de la diagonal es más amplia. Se confirmará esto con los datos disponibles y además se verá si ocurre algo similar para  $\sigma$  en las mismas circunstancias. A continuación se revisará de forma cualitativa la forma de algunas distribuciones de diagonales asociadas a ciertas  $p$  y  $\sigma$  con  $N = 50$

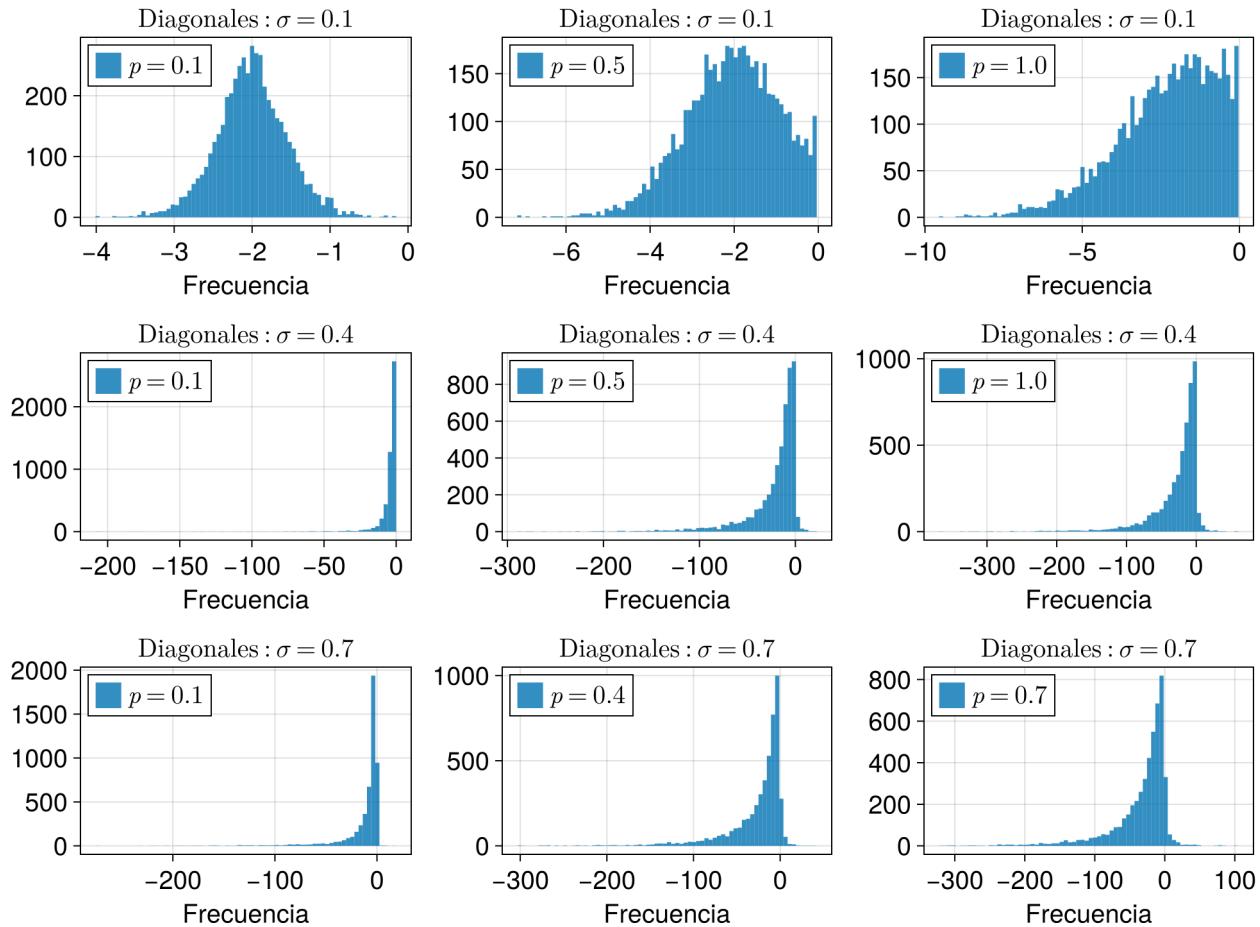


Figura 3.7: Distribución de 500 diagonales resultantes de 100 sistemas estables/cuasi-estables para  $N = 50$ . Cuando  $\sigma$  y  $p$  tienden hacia 1, aumenta la tendencia hacia distribuciones de cola pesada.

Se puede observar que la distribución de las diagonales tiene una tendencia FDP normal para los casos con  $\sigma = 0.1$ , sin embargo conforme las probabilidades aumentan, haciendo que los sistemas sean cada vez más conectados, la distribución se va ensanchando y sesgando hacia la izquierda. Para los casos  $\sigma = 0.2$  en adelante, se sigue una tendencia de distribución de cola pesada. Las distribuciones al no ser simétricas, indican que la media estadística  $\langle d_{kk}(\sigma_i, p_j) \rangle$  se encuentra hacia la izquierda de la moda estadística. Para cada  $\sigma$  se observa que a medida que  $p$  aumenta, la distribución se ensancha siendo cada vez más dispersa; por lo tanto la media estadística se va desplazando hacia la parte negativa a medida que la desviación estándar  $s(d_{kk}(\sigma_i, p_j))$  es más grande.

Cuando se observa que las distribuciones son más compactas, entonces la media puede encontrarse en un valor más cercano al cero. Esto puede indicar que existe una correlación entre ambas medidas estadísticas por lo que se tendría que comprobar este hecho. La forma de la distribución de las diagonales puede asemejarse a la distribución Log-Normal que es bien conocido que tiene una relación no trivial entre su media y desviación estándar [cita<sup>7</sup>], sin embargo, al realizar los ajustes correspondientes, se encuentra que el  $p$ -valor es suficientemente cercano a cero como para descartar esta hipótesis.

Debido a ello solamente se asumirá que es una distribución con sesgo negativo. Se ha determinado un ajuste lineal “general” para las 7800 simulaciones únicamente para notar si el comportamiento es compartido entre diferentes parámetros de  $\sigma$  y  $p$ .

Cada color corresponde con una  $\sigma$  definida y las probabilidades se distinguen a partir de la media/desviación estándar, entre más grande sea el valor de  $p$  también será más grande la magnitud de las anteriores. El comportamiento general es que existe una relación lineal entre la media y la desviación estándar. Cuanto más grandes son  $\sigma$  y  $p$ , la media se desplaza hacia los valores negativos y las distribuciones son cada vez más dispersas.

Habría de ejecutarse un ajuste lineal para cada  $\sigma$ , sin embargo, con los datos disponibles se puede determinar los coeficientes de correlación para cada  $\sigma$  y corroborar de manera indirecta lo que nos anuncia la gráfica (Tabla (3.2)). Lo que se

puede observar es que se tiene una muy fuerte correlación entre ambas cantidades estadísticas, a excepción de los casos  $\sigma = \{0.1, 1.0\}$  en donde se tienen los coeficientes bajos.

El primer caso es muy especial ya que las observaciones indican que las distribuciones de diagonales pasan de ser simétricas (normal) a ser una distribución con sesgo negativo a medida que  $p$  vaya aumentando. Realizando un ajuste lineal al caso  $\sigma = 0.1$  se podrá ver que no es tan bueno como en el resto de los casos, muy posiblemente se deba a esta evolución hacia las distribuciones con sesgo negativo. Para el segundo caso simplemente haría falta más información para poder comprobar

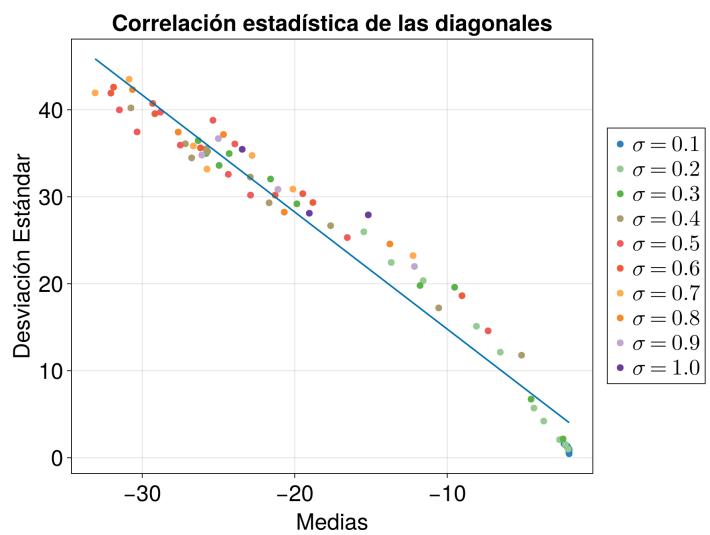


Figura 3.8: Ajuste lineal entre los promedios y las desviaciones estándar de cada una de las 7800 simulaciones realizadas bajo los parámetros que dicta la Tabla (3.1).

<sup>7</sup>Cita

si en verdad es fuerte o débil la correlación<sup>8</sup>. Lo mismo ocurre para los conjuntos de simulaciones  $\sigma = \{0.6, 0.7, 0.8, 0.9\}$ , le hacen falta información para todos aquellos casos (probabilidades) que por cuestiones de complejidad del sistema y demanda computacional no se pudieron concretar; pero aún con la información disponible indican una muy fuerte correlación entre las medidas estadísticas y las desviaciones estándar consideradas.

Fuerza de interacción promedio: $\sigma$	$\text{corr}(\langle d_{kk}(\sigma_i, p_j) \rangle, s(d_{kk}(\sigma_i, p_j)))$
0.1	-0.8798
0.2	-0.9920
0.3	-0.9829
0.4	-0.9963
0.5	-0.9630
0.6	-0.9954
0.7	-0.9646
0.8	-0.9675
0.9	-0.9818
1.0	-0.8943

Tabla 3.2: Correlación entre la media ( $\langle d_{kk}(\sigma_i, p_j) \rangle$ ) y la desviación estándar ( $s(d_{kk}(\sigma_i, p_j))$ ) de cada una de las 7800 simulaciones. Se considera por cada conjunto de  $\sigma_i$  para toda  $p_j$  disponible según la Tabla (3.1).

La máxima correlación se visualiza en la región dada por el conjunto  $\sigma = \{0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6\}$ , misma en donde los sistemas suelen ser estables con una alta probabilidad. Aún así en cada caso, pueden existir algunas variaciones en la forma de dispersión de las distribuciones consideradas, las cuales se pueden medir a través del *Coeficiente de variación* definido como

$$CV = \frac{s(d_{kk}(\sigma_i, p_j))}{|\langle d_{kk}(\sigma_i, p_j) \rangle|} \quad (3.1)$$

El coeficiente indica que si tiene valor  $CV = 1$ , la media y la dispersión se encuentran equilibradas, mientras que para  $CV < 1$  la dispersión es menor a la media y en caso contrario la dispersión es mayor a la media. Este coeficiente solamente relaciona las cantidades anteriores, no habla de que tan ancha es la distribución tal y como se mostró en la Figura (3.8). Servirá para ubicar cómo es la dispersión de la distribución para cada caso  $d_{kk}(\sigma_i, p_j)$  y como evoluciona en función de  $\sigma$  y  $p$ .

---

<sup>8</sup>Aún así con las 300 simulaciones para  $p = \{0.1, 0.2, 0.3\}$  la correlación es considerablemente fuerte, aunque no tanto como en el resto de los casos.

Coeficiente de variación promedio $\langle CV \rangle$	$\min(CV)$	$\max(CV)$
1.3354	0.2280	2.2995

Tabla 3.3: Se determinan los 78 coeficientes de variación disponibles según la Tabla (3.1) y se determina el promedio, mínimo y el máximo del conjunto total.

Una vez determinando los 78 coeficientes de variación se puede observar que en promedio las desviaciones estándar son mayores a las medias de las distribuciones  $d_{kk}(\sigma_i, p_j)$ , lo que indica que en general las distribuciones son dispersas y sustentan el carácter de cola pesada: se confirma de manera directa lo que se ha estado discutiendo con anterioridad. Con el mínimo y el máximo del conjunto de coeficientes se establece un rango que nos da una idea de que tan dispersas son las distribuciones, anuncia que existen más distribuciones con desviación estándar mayor a la media que en su caso contrario. Para corroborarlo es necesario graficar las variaciones del conjunto de coeficientes de variación:

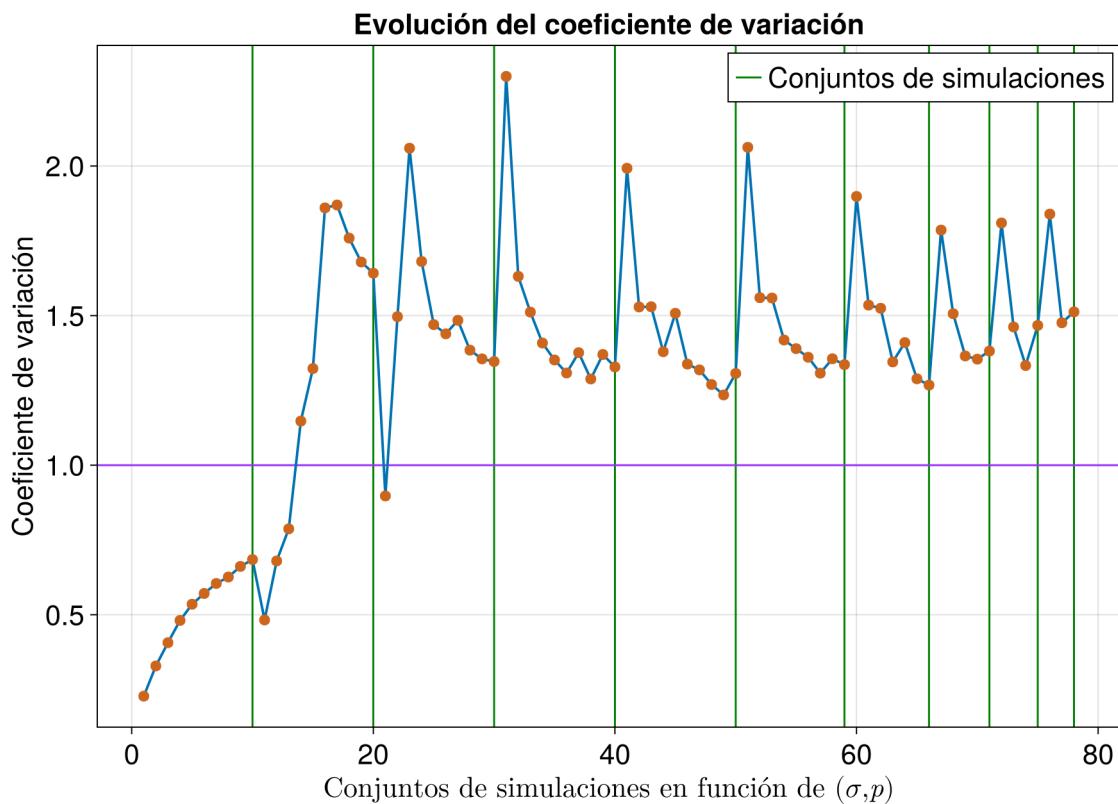


Figura 3.9: Evolución del coeficiente de variación en función de  $\sigma$  y  $p$ . Cada coeficiente se muestra para cada distribución disponible según la Tabla (3.1).

Del gráfico se pueden analizar varios puntos: para el conjunto de datos  $\sigma = 0.1$  se observa que la desviación estándar es menor al valor de sus medias, lo que indica que no son distribuciones muy dispersas o de cola pesada tal y como sucede con el resto de las distribuciones, además de que se

ha observado que se comienza en una FDP normal que se va sesgando hacia la izquierda conforme  $p$  aumenta. Esto se puede apreciar desde el esbozo de la Figura (3.7). Además del sesgo, si se encuentra bien marcada la tendencia de que la dispersión aumente conforme  $p$  también lo haga. Ocurre algo interesante para  $\sigma = 0.2$ , comienza con baja dispersión con respecto de la media y para  $p \geq 0.4$  emergen las distribuciones con alta dispersión. En este caso también se observa una ligera transición entre una FDP normal truncada que se va sesgando hacia la izquierda, sin embargo el resto de conjuntos de  $\sigma$  las distribuciones comienzan sesgadas hacia la izquierda con cola pesada.

A partir de  $\sigma = 0.3$  en adelante se puede observar un patrón interesante, se tiene un punto máximo del coeficiente de variación que indica una máxima dispersión y después disminuye, como si la cola pesada se suavizara. Y justamente eso es lo que ocurre, para cada  $\sigma \geq 0.3$  con  $p = 0.1$ , un gran porcentaje de la distribución se concentra cerca de la media mientras que son muy pocos los valores que se encuentran en la cola pesada. Conforme  $p$  vaya aumentando en estos escenarios, la desviación estándar va disminuyendo con respecto de la media lo que indica que la distribución es cada vez menos dispersa haciendo que a su vez existan más valores que se concentren en la cola pesada. ¡Y esto ocurre similarmente para cada  $\sigma \geq 3$ !

Algo importante de preguntarse es ¿por qué en general las distribuciones son de cola pesada con sesgo negativo? todo viene a raíz de como se definió la matriz de interacciones (Definición 6) y a su vez de como está construida la matriz de incidencias (Definición 5). Es fácil responder la parte del signo, desde un principio las diagonales siempre fueron negativas y se encuentra sustentado en la Proposición 1, por lo que las distribuciones siempre tuvieron que ser negativas<sup>9</sup> pero con el carácter de cola pesada y además sesgada se tendrá que desarrollar un argumento más fuerte.

Aunque estas distribuciones no tengan relación con FDP Log-Normales, es posible rescatar algunos elementos de su construcción para argumentar nuestra conjetura actual. Es bien conocido que para una variable aleatoria: si sus cambios son multiplicativos entonces se genera una distribución de cola pesada [cita<sup>10</sup>]. Además de ello, los mismos factores multiplicativos son los que determinan el sesgo de la distribución, en nuestro caso particular: de carácter negativo. Recordar que los valores de la diagonal vienen determinados por

$$\mathcal{I}_{ii} = r_i \left( 1 - \frac{2x_i + \sum_{j \neq i} \alpha_{ij} x_j}{K_i} \right), \quad \text{para } i \in \{1, \dots, N\}$$

---

<sup>9</sup>Aunque si se observa en la 3.7 se puede ver como para  $\sigma$  y  $p$  altas, las distribuciones tienen valores positivos; esto podría no ser congruente con la Proposición 1 y más adelante se discutirá lo que ocurrió aquí.

<sup>10</sup>Para una variable aleatoria  $X$ , si el proceso multiplicativo es  $X_t = X_{t-1} \cdot e^{\epsilon_t}$ , donde  $\epsilon_t \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ .

Claramente el término de la tasa de crecimiento  $r_i$  reescala a todo  $\mathcal{I}_{ii}$  de modo que las fluctuaciones que se generen con base en  $x_i$  y  $x_j$  se magnifican en función de esta  $r_i$ . No obstante, el valor intrínseco del término de la diagonal viene bien dictada por la relación de estas  $x_i$  y  $\alpha_{ij}x_j$  divididos por  $K_i$ <sup>11</sup>, donde se sabe que estos coeficientes vienen de una distribución normal centrada en  $\mu = 0$  con las  $\sigma$ s que se han venido considerando hasta ahora. Por lo tanto bien pueden existir valores extremos que se ubiquen en la cola pesada como puede haber valores que se concentren entorno a una media ( $\langle d_{kk}(\sigma_i, p_j) \rangle$ , Ver Figura (3.11, B)) dependiendo totalmente de como se encuentren configuradas las  $\alpha_{ij}x_j$  que como recordatorio: vienen de la *red de incidencias*.

El motivo del sesgo se deberá a que son más comunes los coeficientes de interacción  $\alpha_{ij}$  de la distribución normal entorno a  $\mu = 0$  con su respectiva  $\sigma$  en comparación con los que se encuentren en los extremos de la misma, en especial cuando se tienen pocas interacciones ( $p$  baja). Por lo tanto las sumas y el re-escalamiento de  $\mathcal{I}_{ii}$  se concentra entorno a cierta moda estadística y en concreto se ajusta en torno a 2 que coincide con el valor fijo que se le dio al parámetro  $r_i$ . Cuando se tienen mayor número de

interacciones ( $p$  alta) es más probable que aumente la cantidad de valores extremos de las  $\alpha_{ij}$  asociadas a  $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma)$  y en consecuencia la suma y los reescalamientos pueden situarse en valores más allá del 2 tal y como se puede apreciar en la Figura (3.10). Esta causa es la clave para que la media  $\langle d_{kk}(\sigma_i, p_j) \rangle$ , la desviación estándar  $s(\sigma_i, p_j)$  y la moda estadística de las distribuciones de valores de las diagonales de los sistemas **estables** se vaya desplazando cada vez más hacia los valores negativos conforme  $\sigma$  y  $p$  aumenten: la estructura multiplicativa subyacente de la diagonal

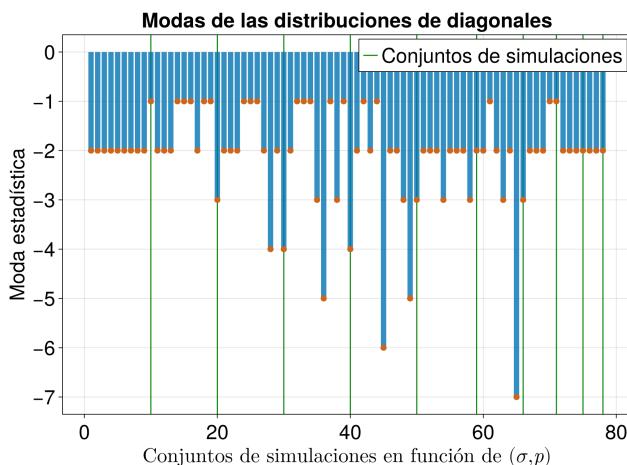


Figura 3.10: Modas de las distribuciones de diagonales disponibles dadas por la Tabla (3.1).

diagonal de la matriz de interacciones y las fluctuaciones que producen  $x_i$  en conjunto con las  $\alpha_{ij}x_j$  divididos por  $K_i$  son la causa de este comportamiento. Para verificar si verdaderamente se trata de una propiedad de los sistemas estables, se habrían de generar más experimentos para otras  $r_i$  y  $K_i$  y validar si es reproducible este comportamiento.

### Relación con la estabilidad y eigenvalores de los sistemas.

¿Qué relación tienen las diagonales con la estabilidad del sistema? Una fuerte hipótesis se puede realizar a partir de ello, pues resulta que de todos los sistemas que resultaron estables (salvo unas excepciones), tienen a sus diagonales con sus elementos negativos, sugiriendo que la diagonal es una

<sup>11</sup>Donde las  $x_j$  y  $x_i$  son las entradas del atractor del sistema.

fuerte componente decisiva para volver a los sistemas estables. No existe por ahora un teorema que resuelva esta conjetura, pues deben existir contra ejemplos en donde los elementos de la diagonales son negativos pero el resto de entradas de la matriz impacta de tal modo que vuelve al sistema inestable. Por ahora las simulaciones sustentan el argumento de la estabilidad pero entonces ¿qué pasa con las diagonales que resultaron positivas? respectivamente) ¿impactarán también en la distribución de eigenvalores con algunos de ellos con parte real positiva? ¿Con base en el procedimiento, como es que se llegó a estos escenarios? (Ver Figura (3.7) para  $\sigma = \{0.4, 0.7\}$  con  $p = \{1.0, 0.7\}$ )

Como el mecanismo para determinar que los sistemas fueran estables o no se hizo a partir de revisar que las series de tiempo no divergieran, ha sucedido que para  $\sigma$  y  $p$  cercanos a 1.0, los sistemas tienen mayor dificultad para estabilizarse por la cantidad de interacciones existentes, a su vez las fluctuaciones que se producen provocan el retardo de la estabilización. Lo ideal hubiera sido prolongar el tiempo de integración a  $t_f = 100$  para estos casos y verificar si suceden dos cosas: o logran llegar al atractor o también es posible lleguen a un punto crítico inestable haciendo que divergan las soluciones tras un efecto de retardo igualmente.

Por lo tanto, debido al tiempo de integración: las series de tiempo se han quedado a medias para resolver en alguno de los dos escenarios anteriores. Esto es importante ya que se ha tomado el último punto de la serie como aquel vector  $N$ -dimensional considerado para evaluar en la matriz jacobiana que da origen a la matriz de interacciones. En conclusión existe un cierto número de matrices de interacción con esta situación y que por lo tanto no son estrictamente matrices de interacción, pues no se encuentran evaluadas sobre un punto crítico. Sin embargo se ha intentado realizar una técnica para poder intentar llegar a ese posible atractor: consiste en utilizar el método de Newton-Raphson multivariado para hallar el punto crítico que se espera.

Se utilizaría como condición inicial el último punto de la serie de tiempo ya que se esperaría que el atractor estuviera cerca de esa región y se llegaron a dos resultados principales: Si la matriz resultante tiene de 1 a 3 entradas positivas, es probable que si encuentre el atractor y entonces terminemos de concluir que si se trataba de un sistema estable. El segundo resultado es menos esperanzador, pues si se tienen más de 3 entradas positivas, aún ejecutando Newton-Raphson multivariado con las condiciones mencionadas, el algoritmo no devuelve al punto crítico atractor: de aquí se desprenden dos posibles escenarios, el primero y más directo es simplemente asumir que el sistema no era estable y que tuvo una acción retardada para que las soluciones divergieran. El segundo escenario es que debido a la condición inicial propuesta, el algoritmo solamente pudo aproximarse a un punto silla que se encontraba más próximo que el atractor y que gracias a ello no sea posible acceder a este segundo punto crítico que es el que se espera.

No es trivial encontrar puntos críticos para sistemas  $N \gg 1$  aún teniendo métodos numéricos que ayuden a simplificar la tarea, pues se sabe que existen más de  $N$  en cuestión y no se sabe con exactitud en qué región del hiper-espacio se encuentra al menos uno de ellos que es el atractor. Por lo que se concluye esta parte con el hecho de que no hay forma de saber con la información actual qué tipo de estabilidad tenían, la alternativa sería repetir esos experimentos considerando un tiempo de integración mayor a 50 esperando que lleguen a su respectivo atractor.

Excluyendo por ahora los casos de las diagonales con entradas positivas, ¿cuál es la relación de las diagonales negativas con respecto de la estabilidad de los sistemas? Se puede plantear que mientras las trazas de las matrices sean negativas el sistema es estable, pero en esto hay que poner una restricción: las trazas negativas con todos los valores de la diagonal negativos. Si existe al menos un valor positivo en la diagonal del Jacobiano del sistema, entonces cabe la posibilidad de que exista al menos un eigenvalor positivo que volvería instable al sistema. Los experimentos han mostrado que la diagonal es un factor determinante para la estabilidad de estos sistemas, aunque no es absoluto si es un requisito importante que debe cumplirse. Las trazas de las matrices guardan una íntima relación con las medias ( $d_{kk}(\langle \sigma_i, p_j \rangle)$ ) y a su vez como ya se ha visto anteriormente, con la desviación estándar  $s(\sigma_i, p_j)$

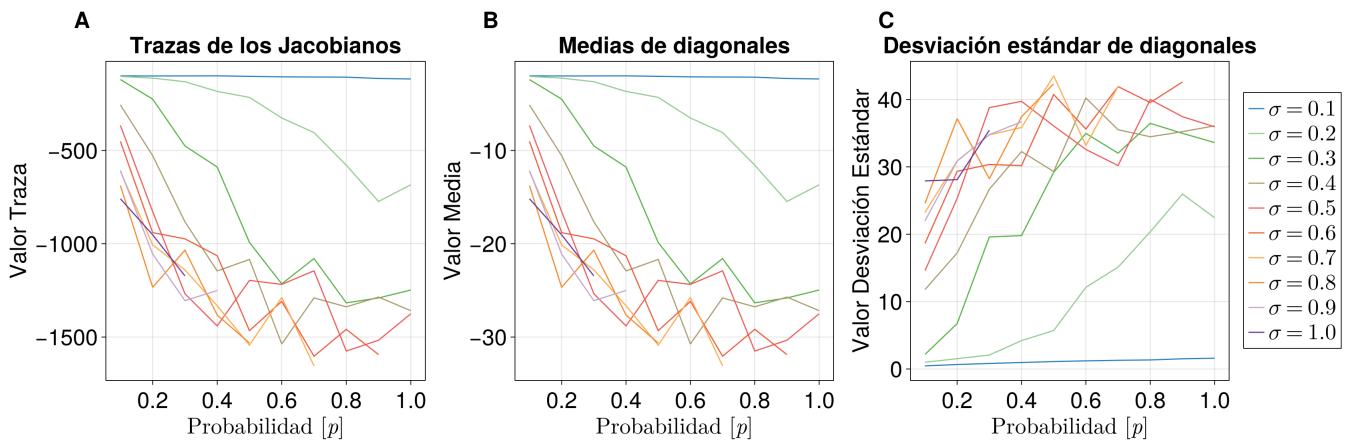


Figura 3.11: Cada una de las cantidades se considera con base en las simulaciones disponibles. **(A)** Evolución de las trazas de los jacobianos del sistema. **(B)** Evolución de las medias de las diagonales de los jacobianos del sistema. **(C)** Evolución de la desviación estándar de las diagonales de los jacobianos del sistema.

Aquí se puede ver de manera directa la relación que aparece retratada en la Figura (3.8), a medida que la traza/media de las simulaciones disminuye hacia valores cada vez más negativos, la desviación estándar por el contrario va aumentando. ¿Cuál será la relación de las diagonales de los jacobianos con respecto de su distribución de eigenvalores?

### Distribución de valores propios

Anteriormente se había propuesto, con un argumento cualitativo de la Figura (3.5), que existen  $N$  *leyes circulares* donde a cada una de ellas le corresponde un centro y radio de cada valor de la diagonal del jacobiano del sistema. De esta manera cada ley circular encierra cierta cantidad de valores propios del sistema. Con la información provista de las simulaciones realizadas, se puede determinar un argumento estadístico más fuerte para sostener esta propuesta.

La clave estará en revisar si existe una correlación estadística entre los valores de las diagonales mencionadas con las partes reales de los eigenvalores, se ha observado que para algunas simulaciones la relación fue casi perfecta mientras que para otras no tanto. Lo interesante de ver es que la relación es mejor cuando el valor de  $p$  es alto, es decir, cuando hay cada vez más interacciones y para cuando las distribuciones de las diagonales son menos dispersas. Tomando una simulación al azar, se aprecia la siguiente relación entre partes reales de los eigenvalores con las diagonales de los jacobianos calculados

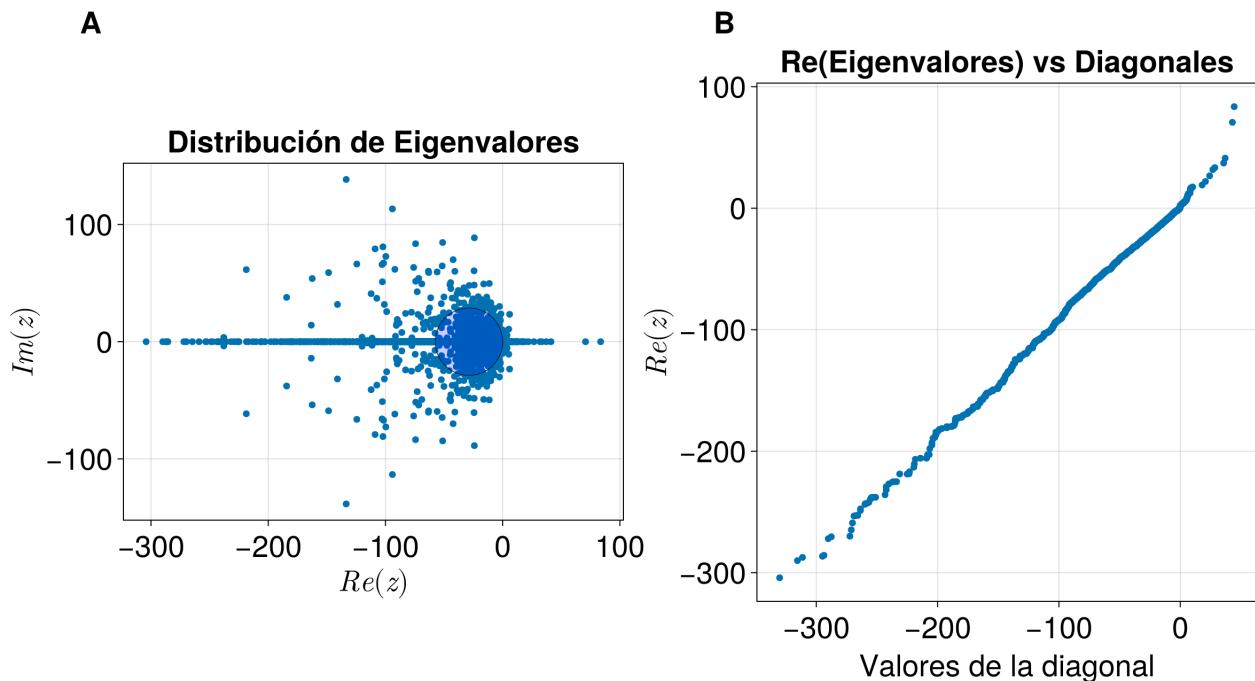


Figura 3.12: (A) Distribución de valores propios de 100 jacobianos para el caso  $\sigma = 0.5$ ,  $p = 0.4$ . Se agrega una ley circular correspondiente al valor medio de la distribución de diagonales. (B) Relación entre la parte real de los valores propios con las diagonales de los jacobianos considerados.

En la distribución de valores propios hay algunas características a analizar: Se ha agregado una ley circular con centro y radio correspondiente al valor medio de su distribución de valores; encierra una gran cantidad de valores propios concentrados en la mancha. Por otro lado se observan valores propios

positivos, esto deviene de la discusión que anteriormente se tuvo con respecto de las entradas positivas de las diagonales de los Jacobianos. Hay un porcentaje de éstos que tuvieron valores propios positivos, para evitarlos se debe de considerar en futuras simulaciones un tiempo de integración mayor a 50. En cuanto a la relación entre partes reales de valores propios y elementos de la diagonal de los Jacobianos considerados, existe una relación lineal casi perfecta para el caso particular:  $\sigma = 0.5$  y  $p = 0.4$ . Sobre todo es interesante ver que incluso existe una relación entre las entradas positivas de las diagonales con los valores propios con parte real positiva, esto ya habla más de la estructura del Jacobiano. En otras distribuciones el ajuste puede ir variando pero en general se sigue esta tendencia entre ambos valores considerados.

Para explorar más a profundidad sobre el panorama completo de las simulaciones, se verá la relación entre la media, la mediana y la moda de las diagonales con respecto de las partes reales de los valores propios de cada uno de los 78 conjuntos de simulaciones; con ello se verá si es que realmente existe una relación lineal entre estas cantidades. Sin embargo, aunque estos sean valores representativos de cada una de las distribuciones, sigue siendo esbozo general.

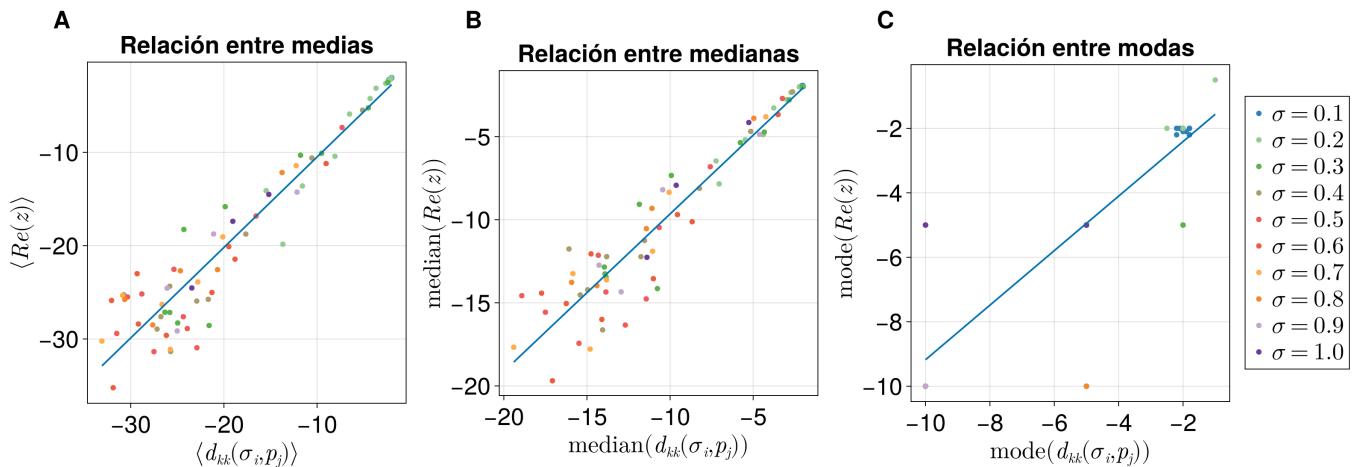


Figura 3.13: (A) Ajuste lineal de la relación entre las medias de las  $Re(\bar{\lambda})$  con las medias de las  $d_{kk}(\sigma_i, p_j)$  de los Jacobianos del sistema. (B) Ajuste lineal de la relación entre las medianas  $Re(\bar{\lambda})$  con las medianas de las  $d_{kk}(\sigma_i, p_j)$  de los Jacobianos del sistema. (C) Ajuste lineal de la relación entre las modas de  $Re(\bar{\lambda})$  con las modas de las  $d_{kk}(\sigma_i, p_j)$  de los Jacobianos del sistema.

Lo que se aprecia es que la relación lineal se ajusta mejor para valores  $d_{kk}(\sigma_i, p_j)$  y  $Re(\bar{\lambda})$  cercanos al cero (donde  $\bar{\lambda}$  es el conjunto de valores propios de los Jacobianos), en contraste con los valores cada vez más negativos que se ajustan menos a la recta.

En perspectiva con los jacobianos generados, cuando para cada  $\sigma$  cuando  $p$  es cada vez mayor, también es mas ancha la distribución de  $d_{kk}(\sigma_i, p_j)$  lo que implica que su valor mínimo es cada vez más negativo. Entonces para estos casos se tiene que la relación entre

Esto viene a raíz de la naturaleza de cada simulación, para cada  $\sigma$  cuando la  $p$  es cada vez más grande: la distribución de valores de la diagonal son cada vez más anchas y su valor mínimo es cada vez menor lo que impacta en la distribución de valores propios, solo que para estos valores extremos, la relación lineal no es tan buena, es decir, que la dependencia de estas  $Re(\lambda_k)$  no es tan lineal con respecto de las correspondientes  $d_{kk}(\sigma, p_j)$ .