IF111 - Algorithmes et structures de données
EI4 - ABR et Graphes

Rohan Fossé

rfosse@labri.fr

Recherche dans un ABR

1. Écrire une fonction qui retourne *true* si l'ABR qui lui est passé en paramètre est une feuille.
2. Écrire une fonction récursive qui affiche l'ABR qui lui est passé en paramètre, par ordre croissant des valeurs.
3. Écrire une fonction récursive qui affiche l'ABR qui lui est passé en paramètre, par ordre décroissant des valeurs.
4. Écrire une fonction qui retourne la hauteur de l'ABR qui lui est passé en paramètre.
5. Écrire une fonction qui retourne le nombre de nœuds de l'ABR qui lui est passé en paramètre.

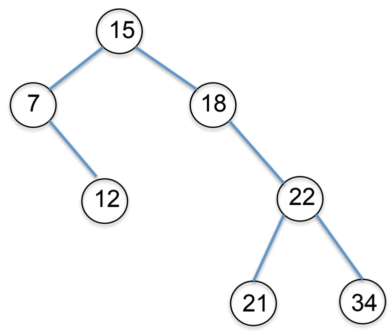

Figure 1: Arbre binaire de recherche

Suppression dans un arbre binaire de recherche

Soit l'arbre binaire de recherche donné dans la figure 1

1. Dessiner l'arbre après la suppression du noeud 18.
2. L'opération suppression est-elle "commutative" au sens où la suppression de x puis de y dans un arbre binaire de recherche produit le même arbre que la suppression de y puis de x.
   Si oui dire pourquoi, sinon donner un contre exemple.

Algorithme de Dijkstra

On considère maintenant des graphes pondérés. Appliquer l'algorithme de Dijkstra au graphe dans la Figure 2 pour calculer la plus courte distance de B à D.

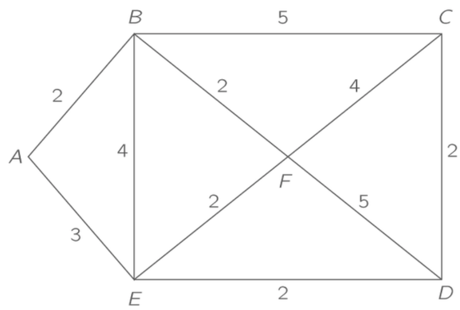

Figure 2: Graphe pour Dijkstra.

Récursivité sur les arbres

1. Dessiner l'arborescence binaire ayant 10 noeuds {0, 1, 2, ..., 9}, telle que le parcours infixe et le parcours postfixe de cette arborescence produisent respectivement les suites suivantes : 9, 3, 1, 0, 4, 2, 6, 7, 8, 5 (infixe) et 9, 1, 4, 0, 3, 6, 7, 5, 8, 2 (postfixe). Dire quel est le raisonnement utilisé pour arriver à la solution.
   Dire quelle est la hauteur du noeud 1 et 2 dans l'arborescence dessinée et quelle est la hauteur de l'arborescence elle même.

Coloration de graphes

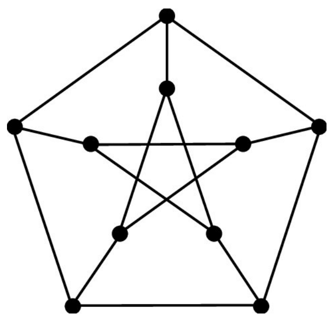

Figure 3: Graphe de Petersen

On cherche à colorier le graphe de la figure 3 en utilisant des entiers positifs de façon telle que deux sommets voisins ont des couleurs dont la différence, en valeur absolue, est au moins égale à trois.

La bibliothèque

Sept élèves, désignés par A,B,C,D,E,F et G se sont rendus à la bibliothèque aujourd'hui. Le tableau suivant précise "qui a rencontré qui" (la bibliothèque étant petite, deux élèves présents au même moment se rencontrent nécessairement...).

élève	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**
a rencontré	D,E	D,E,F,G	E,G	A,B,E	A,B,C,D,F,G	B,E,G	B,C,E,F

De combien de places assises doit disposer la bibliothèque pour que chacun ait pu travailler correctement au cours de cette journée ?

Degré de graphe

On s'intéresse aux graphes dont tous les sommets sont de degré trois.

1. Construisez de tels graphes ayant 4 sommets, 5 , 6 , 7 .
2. Qu'en déduisez-vous ?
3. Prouvez-le !

Graphes Eulériens

Soit G un graphe non Eulérien. Est-il toujours possible de rendre G Eulérien en lui rajoutant un sommet et quelques arêtes ?

Les dominos

On considère des dominos dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4 ou 5.

1. En excluant les dominos doubles, de combien de dominos dispose-t-on ?
2. Montrez que l'on peut arranger ces dominos de façon à former une boucle fermée (en utilisant la règle habituelle de contact entre les dominos).
3. Pourquoi n'est-il pas nécessaire de considérer les dominos doubles ?
4. Si l'on prend maintenant des dominos dont les faces sont numérotées de 1 à n, est-il possible de les arranger de façon à former une boucle fermée ?

Les tournois

Un tournoi est un graphe orienté tel que toute paire de sommets est reliée par un arc, dans un sens ou dans l'autre (mais pas dans les deux sens).

1. Pourquoi, selon vous, appelle-t-on de tels graphes des tournois ?
2. Montrez que si un tournoi contient un circuit de longueur k, alors il contient également des circuits de longueur k', pour tout k' ¡ k (une " preuve " à l'aide d'un dessin suffit...).
3. Dessinez un tournoi à 6 sommets ne possédant pas de circuit de longueur 4.

Le robot

Un robot se promène sur le graphe 4. Partant d'un sommet quelconque s, appelé sommet de stockage, il doit déposer un cube sur chacun des autres sommets. Il possède suffisamment de cubes sur le sommet de stockage, mais ne peut transporter qu'un cube à la fois (il doit donc repasser par le sommet de stockage avant de livrer un autre cube).

1. Calculer, pour chacun des sommets du graphe, le trajet minimum que doit parcourir le robot si ce sommet est sommet de stockage.

2. Quel est le "meilleur" sommet de stockage ?

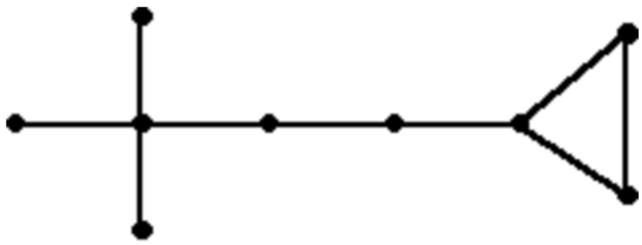

Figure 4: Graphe du robot

Nombres premiers

Construire le graphe orienté dont les sommets sont les entiers compris entre 1 et 24 et dont les arcs relient x à y lorsque x divise y. De plus, les arcs sont valués par le quotient $\frac{y}{x}$ (ainsi, l'arc allant de 3 vers 15 a la valeur 5).

1. Comment reconnaît-on dans ce graphe un nombre premier ?

2. Comment retrouver dans ce graphe la décomposition d'un nombre en facteurs premiers ?