



---

Lehrstuhl für Strömungsmechanik - Chair of Fluid Mechanics

# Master-Thesis

**Entwicklung und experimentelle Validierung eines  
Mehrphasen-CFD-Modells zur Analyse des Durchmischungsprozesses  
im Hinblick auf die Bewertung von Rührwerkzeugen in Mischbehältern.**

Kai-Michael Struski

1538940

Maschinenbau

Wuppertal, den 20. Mai 2025

Betreuer

M.Eng. Clément Georges Corselli  
Dr. Jayotpaul Chaudhuri

Erstgutachter

Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Uwe Janoske

Zweitgutachter

Dr.-Ing. Sebastian Burgmann





## Sperrvermerk

Die vorliegende Masterarbeit mit dem Titel „Entwicklung und experimentelle Validierung eines Mehrphasen-CFD-Modells zur Analyse des Durchmischungsprozesses im Hinblick auf die Bewertung von Rührwerkzeugen in Mischbehältern“ beinhaltet interne und vertrauliche Informationen des Unternehmens Vorwerk Elektrowerke GmbH & Co.KG sowie der Vorwerk Gruppe.

**Eine Einsicht in diese Masterarbeit ist Dritten nicht gestattet. Ausgenommen davon sind die betreuenden Dozierenden sowie die befugten Mitglieder des Prüfungsausschusses. Eine Veröffentlichung und Vervielfältigung der Masterarbeit – auch in Auszügen – ist innerhalb der Sperrfrist von 10 Jahren nicht gestattet.**

Ausnahmen von dieser Regelung bedürfen einer Genehmigung der Vorwerk Elektrowerke GmbH & Co. KG.

A handwritten signature in blue ink, appearing to read "K. Struski".

Kai-Michael Struski



## Master-Thesis

Fachgebiet: Lehrstuhl für Strömungsmechanik - Chair of Fluid Mechanics

Name: Struski

Vorname: Kai-Michael

Matrikel-Nr.: 1538940

Thema:

Entwicklung und experimentelle Validierung eines Mehrphasen-CFD-Modells zur Analyse des Durchmischungsprozesses im Hinblick auf die Bewertung von Rührwerkzeugen in Mischbehältern.

Aufgabenstellung:

Im Rahmen dieser Masterarbeit soll ein CFD-Modell zur Simulation von Mehrphasenströmungen (Luft + Wasser) entwickelt und validiert werden, mit dem das Testen von Rotationskörpern möglich ist, um so einen Optimierungsprozess für das Rührwerkzeug eines Mischbehälters anzustoßen. Hierfür werden Vereinfachungen zur Topfgeometrie getroffen und der Fokus auf Durchmischungen von Newtonschen Flüssigkeiten gelegt. Zu Beginn werden für den Stand der Technik Methoden zur Bewertung von Durchmischungen in Experimenten und Simulationen beleuchtet und weiterhin analysiert, inwieweit verschiedene Rotationskörper eine Durchmischung positiv beeinflussen. Für das Mehrphasen-CFD-Modell ist eine Implementierung geeigneter numerischer Methoden zur Beschreibung der Strömungs- und Mischvorgänge vorgesehen. Das CFD-Modell wird mittels eines Experimentes validiert, welches die Gegebenheiten der Simulation widerspiegeln soll. Auf den vorangegangenen Erkenntnissen aufbauend, werden im Anschluss sinnvoll ausgewählte Prototypen simulativ mit der Ausgangsgeometrie des Mischbehälters verglichen.

Tag der Ausgabe:  
(erfolgt durch ZPA) 03.02.2025

Abgabefrist:  
(erfolgt durch ZPA) 20.05.2025

Betreuende/r  
Hochschullehrer/in: Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Uwe Jar

Wuppertal, den  
21.1.2025



Eingangsstempel

  
Unterschrift des betreuenden Hochschullehrers/in



---

## **Eidesstattliche Erklärung**

Hiermit versichere ich, dass ich die Arbeit selbstständig verfasst, keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie Zitate kenntlich gemacht habe.

Wuppertal, den 20. Mai 2025

\_\_\_\_\_  
(Unterschrift)

---

## **Danksagung**

*An erster Stelle möchte ich meinen Dank an meine Betreuer im Unternehmen Vorwerk, Clement und Jayotpaul, aussprechen, auf die ich mich in jeder Situation - insbesondere in äußerst schwierigen Momenten - verlassen konnte. Ein weiterer Dank gilt meinen Kolleginnen und Kollegen im Unternehmen Vorwerk, die mich mit ihrer Expertise in weitreichenderen Themenfeldern beraten und unterstützt haben.*

*Weiterhin möchte ich mich bei Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Uwe Janoske dafür bedanken, dass ich meine Abschlussarbeit unter seiner Betreuung in einem praxisnahen Umfeld verfassen durfte.*

*Der größte Dank jedoch gebührt meinen Eltern Eva und Michael, meinen Brüdern Thomas und Daniel, meiner Oma Elisabet und meinen Freunden. Ohne eure Geduld, euren Zuspruch und eure beständige Unterstützung - sowohl in schwierigen als auch motivierenden Momenten - wäre dieser Weg um einiges beschwerlicher gewesen.*

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>XII</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>XV</b>
<b>Symbole</b>	<b>XVI</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Problemstellung . . . . .	2
1.2 Ziel der Arbeit . . . . .	3
<b>2 Stand der Technik</b>	<b>5</b>
2.1 Rührgeometrien und Einfluss auf die Strömungsbildung . . . . .	5
2.1.1 Rührgeometrien und Wirkweise . . . . .	6
2.1.2 Einfluss geometrischer Parameter . . . . .	8
2.2 Numerische Methoden zur Beschreibung von Rührsystemen . . . . .	11
2.2.1 Turbulenzmodellierung . . . . .	11
2.2.2 Numerische Modellierung rotierender Systeme . . . . .	15
2.2.3 Mehrphasenmodelle . . . . .	15
2.3 Experimentelle Validierungsmethoden von numerischen Rührmodellen . . . . .	17
2.3.1 Qualitative Betrachtung . . . . .	17
2.3.2 Quantitative Betrachtung . . . . .	18
<b>3 Strömungsmechanische Grundlagen</b>	<b>21</b>
3.1 Untersuchungsgegenstände und Konzepte von Fluidströmungen . . . . .	21
3.2 Grundgleichungen der Strömungsmechanik und der Mischprozesse . . . . .	22
3.2.1 Erhaltungsgleichungen . . . . .	22
3.2.2 Allgemeine Transportgleichung . . . . .	28
3.2.3 Skalenabhängige Dynamik und Homogenisierung . . . . .	29
3.2.4 Mischzeit . . . . .	30
3.3 Dimensionslose Kennzahlen . . . . .	31
3.3.1 Reynoldszahl . . . . .	32
3.3.2 Schmidt-Zahl . . . . .	32
3.3.3 Leistungskennzahl . . . . .	33

---

---

<b>4 Design und Ablauf des Experiments</b>	<b>35</b>
4.1 Konzept des Versuchsszenarios . . . . .	35
4.2 Aufbau des Prüfstands . . . . .	36
4.3 Versuchsdurchführung . . . . .	39
<b>5 Numerisches Simulationsmodell</b>	<b>42</b>
5.1 Modellaufbau und -implementierung für die Rührprozesssimulation . . . . .	42
5.1.1 Rigid Body Motion . . . . .	42
5.1.2 SST $k-\omega$ Modell . . . . .	44
5.1.3 Volume of Fluid . . . . .	44
5.1.4 Passiver Skalar . . . . .	48
5.1.5 Diskretisierung . . . . .	50
5.1.6 Initialisierung und Randbedingungen . . . . .	54
5.1.7 Beschleunigungsmethode mit aggressiven Setup . . . . .	56
5.2 Netzkonvergenzuntersuchung . . . . .	59
<b>6 Validierung des numerischen Modells</b>	<b>61</b>
6.1 Auswertung der Geschwindigkeits- und Druckfelder . . . . .	61
6.2 Qualitativer Trombenvergleich . . . . .	65
6.3 Mischzeit und Leistungskennzahl . . . . .	67
6.3.1 Glättung und Normierung . . . . .	67
6.3.2 Ergebnispräsentation . . . . .	70
<b>7 Simulative Untersuchung von Rührwerkzeugen</b>	<b>75</b>
7.1 Numerische Parametervariation . . . . .	75
7.1.1 Versuchsdurchführung nach dem Taguchi-Ansatz . . . . .	76
7.1.2 Auswertung und Gegenüberstellung . . . . .	78
<b>8 Diskussion und Kritik zum numerischen Modell</b>	<b>81</b>
<b>9 Fazit</b>	<b>83</b>
9.1 Zusammenfassung . . . . .	83
9.2 Ausblick . . . . .	84
<b>Literatur</b>	<b>87</b>
<b>A Schaltplan</b>	<b>96</b>

---



---

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Thermomix der Generation 6 (Abbildung von Stiftung Warentest [2]) . . . . .	1
1.2	Mixmesser im Inneren des Thermomix (Abbildung von dem offiziellen Vorwerk-Shop [3]) . . . . .	2
2.1	Einsatzgebiete und Wirkweise von etablierten Rührwerkzeugen (Abbildung von Zlokarnik aus Transportvorgänge in der Verfahrenstechnik [6]) . . . . .	7
2.2	Förderrichtung für Schrägblatt- und Scheibenrührer (Abbildung von Qiu et al. [14]) . . . . .	9
2.3	Beispielhafte Darstellung von Parametern anhand eines Rührbehälters, Scheiben- und Schrägblattrührer . . . . .	9
2.4	Vereinfachte Darstellung von RANS, LES UND DNS im direkten Vergleich für eine zufällige Variable $\Psi$ (In Anlehnung an Foale [26]) . . . . .	13
2.5	Verfügbare Mehrphasenmodelle in Star-CCM+ (Eigene Darstellung in Anlehnung an Star-CCM+ Dokumentation [33]) . . . . .	16
3.1	Quaderförmiges Volumen zur Beschreibung von Massenströmen mit kartesischen Koordinaten (aus „Einführung in die numerische Strömungsmechanik“ von Ghaib [25]) . . . . .	25
3.2	Konvektives und diffusives Mischen im Vergleich (Aus „Direkte Simulation und Modellierung des Mikromischens“ von Schwertfirm [57]) . . . . .	30
4.1	Konzeptuelle Darstellung des Versuchsaufbaus mit Leitfähigkeitssensoren und Dimensionierungskenngrößen . . . . .	36
4.2	Oben: Mit dem FDM-Verfahren 3D-gedruckter Schrägblattrührer (a) und Scheibenrührer (b). Unten: CAD-Darstellung des TM6-Mixmessers. . . . .	37
4.3	4-Elektroden Leitfähigkeitssensoren der Firma Hamilton . . . . .	38
4.4	Fertiggestellter Prüfstand mit Messsensoren und Einlass an den Seiten befestigt (Links). An der Halterung verschraubte Sensoren bündig zur Wand (Rechts). . . . .	39
5.1	Schrägblattrührer, Scheibenrührer und TM6-Mixmesser umgeben von rotierenden Volumen für den Rigid Body Motion Ansatz . . . . .	43
5.2	Darstellung der Volumenanteile nach der Volume of Fluid Methode (Abbildung aus [63]) . . . . .	45
5.3	Freie Oberfläche ohne (oben) und mit (unten) Gradientenglättung . . . . .	47

---

---

5.4	Vergleich der Volumenanteile . . . . .	49
5.5	Erhaltung des passiven Skalars im Behältervolumen über die Zeit aufgetragen	50
5.6	Prismatische Zellschichten in der Nähe von Wand Randbedingungen . . . . .	52
5.7	Beispielhaftes Geschwindigkeitsprofil für einen Scheibenrührer . . . . .	53
5.8	Gemittelte Geschwindigkeit als Integral des gesamten Behältervolumen aufgetragen über die Zeit zur Bestimmung eines quasi-stationären Zustands . . . . .	56
5.9	Gemittelte Geschwindigkeit als Integral des Behältervolumen im Vergleich für standard und aggressives Setup . . . . .	58
5.10	Netzkonvergenzuntersuchung für gemittelte Geschwindigkeit, Mischzeit und dimensionslose Leistungskennzahl . . . . .	60
6.1	Geschwindigkeitsfelder als Vektorgrafik in einer horizontalen Ebene inmitten der Strömung ( $H = 0,1$ ) bei 150RPM . . . . .	62
6.2	Vektorgrafik der tangentialen Strömungsfelder als zentrierte vertikale Ebene bei 350RPM für den Schrägblatt und Scheibenrührer . . . . .	63
6.3	Druckfelder für einen Schrägblattrührer bei 350RPM in zentriert vertikaler und horizontaler ( $H = 0,02$ ) Darstellung . . . . .	64
6.4	Druckfelder für einen Scheibenrührer bei 350RPM in zentriert vertikaler und horizontaler ( $H = 0,02$ ) Darstellung . . . . .	64
6.5	Gegenüberstellung der Trombenbilder für einem Schrägblattrührer mit Zwei um $45^\circ$ angewinkelten Schaufeln . . . . .	65
6.6	Gegenüberstellung der Trombenbilder für einen konventionellen Scheibenrührer mit sechs vertikal ausgerichteten Schaufeln . . . . .	66
6.7	Sensormesspunkte und Einlassposition im experimentellen Aufbau und numerischen Modell . . . . .	68
6.8	Erfasste Rohdaten der lokalen Leitfähigkeitsmesswerte aus dem Experiment .	69
6.9	Verarbeitete Daten durch gleitendes Durchschnittsverfahren und einer Min-Max-Normierung inklusive 95 %-Grenzlinien und dem Einlass-Signal . . . . .	70
6.10	Auswertung für den Schrägblattrührer bei 150 RPM . . . . .	71
6.11	Auswertung für den Schrägblattrührer bei 350 RPM . . . . .	72
6.12	Auswertung für den Scheibenrührer bei 150 RPM . . . . .	72
6.13	Auswertung für den Scheibenrührer bei 350 RPM . . . . .	73
7.1	Black Box zur Veranschaulichung der ausgewählten Parameter für den statistischen Versuchsplan . . . . .	76
7.2	Auftretende Divergenz im Laufe der numerischen Berechnung . . . . .	78

---

---

7.3	Freie Oberfläche bei Divergenz . . . . .	78
7.4	Ermittelte Regressionsgleichung mit Minitab . . . . .	80

---

# Tabellenverzeichnis

2.1	Vergleich von angewendeten Methoden zur Ermittlung einer Mischzeit unter Berücksichtigung der Drehzahlen und geometrischen Verhältnisse . . . . .	20
4.1	Geometrische Abmessungen des numerischen Modells . . . . .	38
4.2	Resultierende Drehzahlen für die jeweiligen Stufen des TM6 (Darstellung angefertigt von Mitarbeitenden der Akustikabteilung bei Vorwerk) . . . . .	40
5.1	Größenmaße des RBM-Volumens für Schrägbrett-, Scheiben- und TM6-Rührer	43
5.2	Vergleich Paper Mixing Times . . . . .	48
5.3	Grenzschichten in Abhängigkeit des dimensionslosen Wandabstands an Anlehnung an Mauri [69] . . . . .	51
5.4	Zusammenfassende Darstellung der gewählten Simulationsmethoden und -modelle	55
5.5	Unterrelaxationsfaktoren und Konvergenztoleranz für Standard und „aggressives“ Setup . . . . .	58
6.1	Auswertungstabelle für alle Rührer . . . . .	73
7.1	Parameter und Stufen für den Taguchi Ansatz . . . . .	77
7.2	Statistischer Versuchsplan nach Taguchi . . . . .	77
7.3	Auswertung des statistischen Versuchsplans . . . . .	80

# Symbole

Symbol	Bedeutung	Einheit
$\alpha$	Volumenanteil	-
$\alpha_\phi$	Unterrelaxationsfaktor	-
$\beta$	Winkel	Grad, ( $^{\circ}$ )
$\Gamma$	Diffusionskoeffizient	$\frac{m^2}{s}$
$\Delta$	Differenz	
$- \eta$	Kinematische Viskosität	$\frac{m^2}{s}$
$\mu$	Dynamische Viskosität	Pa s
$\pi$	Kreiszahl	-
$\phi$	Intensive Eigenschaft	-
$\Phi$	Extensive Eigenschaft, Skalare Variable	-
$\rho$	Dichte	$\frac{kg}{m^3}$
$\Sigma$	Summe	-
$\sigma$	Spannung	$\frac{N}{m^2}, Pa$
$\tau$	Torsionsmoment	N m
$\Theta$	Mischzeit	s
$\nabla$	Nabla-Operator	-
$\omega$	Winkelgeschwindigkeit	$\frac{rad}{s}$
$c$	Konzentration	-
$C$	Bodenabstand	m
$C_i$	Konzentrationsfaktor	-
$v, u$	Geschwindigkeit	$\frac{m}{s}$
$p$	Statischer Druck	$\frac{N}{m^2}, Pa$
$r_i$	Sensitivitätsfaktor	-
$t$	Zeit	s
$f$	Kraft	N
$f_\sigma$	Oberflächenkraft	N m
$\otimes$	Dyadisches Produkt	-
$b$	Zusammenfassende Variable für Körperkräfte	N
$n$	Einheitsvektor	-
$H$	Füllhöhe	m
$I$	Einheitstensor	-
$N$	Drehzahl	1/s

---

$P$	Leistung	$\text{W} \quad \frac{\text{Nm}}{\text{s}}$
$S_\Phi$	Quellterm	-
$T_\sigma$	Spannungstensor	$\frac{\text{N}}{\text{m}^2}, \text{ Pa}$
$u_\tau$	Schubspannungsgeschwindigkeit	$\frac{\text{m}}{\text{s}}$
$T$	Behälterdurchmesser	m
$V$	Volumen	$\text{ms}$
$D$	Rührerdurchmesser	m
$D_f$	Deformationsrate	1/s
$x$	Weg	m
$Re$	Reynoldszahl	-
$Sc$	Schmidt-Zahl	-
$N_P$	Dimensionslose Leistungskennzahl	-
$y^x$	Dimensionsloser Wandabstand	-



---

# 1 Einleitung

Das Unternehmen Vorwerk SE & Co. KG (kurz: Vorwerk) stellte in der Vergangenheit eine Vielzahl von Produkten her seit der Gründung im Jahre 1883. Zu diesen gehören Teppiche, Motoren für Grammofone oder die bis heute seit Jahren bekannten Haushaltsgegenstände wie der Staubsauger „Kobold“ und die Küchenmaschine Thermomix. Letzteres ist seit 1971 auf dem Markt erhältlich ist und hat seither das Kocherlebnis für viele Kunden revolutioniert. Der Name „Thermomix“ entspringt aus der Kombination von typischen Aufgaben einer handelsüblichen Küchenmaschine zu denen das Zerkleinern, Durchmischen und Kneten von Nahrungsmitteln gehören mit thermischen Aufheizvorgängen wie Kochen oder Dünsten. [1]

Das Modell Thermomix der Generation 6 (Nachfolgend TM6 bezeichnet), welcher in Abbildung 1.1 dargestellt ist, besteht typischerweise aus einer Basis und einem Topf, welcher im inneren mit drei Wellenbrechern im Abstand von  $120^\circ$  versehen ist. Der Topf besitzt hierbei eine verjüngende Form ausgehend von dem Behälterrand zum Boden. Zentral am Boden gelagert ist das Rühr- und Schneidewerkzeug vorzufinden, welches über eine Kupplung mit der Basis und dem darin befindlichen Elektromotor verbunden ist und mit diesem betrieben wird.



**Abbildung 1.1** Thermomix der Generation 6 (Abbildung von Stiftung Warentest [2])

---

Eine multifunktionale und essentielle Komponente des Thermomix ist das Mixmesser, welches seit dem 2004 erschienen Modell Thermomix 31 unverändert im Thermomix vorzufinden ist und links- wie auch rechtsseitig rotieren kann, um unterschiedliche Aufgaben zu erfüllen (Abbildung 1.2). Im der vorliegenden Masterarbeit, welche in Kooperation mit dem Unternehmen Vorwerk entstanden ist, wird das Mixmesser des TM6 und dessen Funktion des „Rührrens“ im Vordergrund stehen. Im Folgenden wird in diesem Kapitel näher auf mögliche Probleme mit dem Produkt TM6 eingegangen. Weiterhin wird das Ziel dieser Arbeit beleuchtet und die angewendete Methodik zum Erreichen dieses Ziels beschrieben.



**Abbildung 1.2** Mixmesser im Inneren des Thermomix (Abbildung von dem offiziellen Vorwerk-Shop [3])

## 1.1 Problemstellung

Als ein wirtschaftlich orientiertes Unternehmen, welches Haushaltsprodukte entwickelt und verkauft, sind die Kundenanforderungen eine zentrale Grundlage für die Produktgestaltung. Bezogen auf den TM6 gehören hierzu eine geringe Betriebslautstärke, ein geringer Energieverbrauch und ein schnelles und qualitativ hochwertiges Zubereiten einer Speise. Im Folgenden liegt der Fokus auf den zuletzt genannten Aspekt - genauer gesagt auf den bereits zu Beginn erwähnten Rührvorgang, welcher neben dem Schneiden eine der Hauptfunktionen des Mixmessers darstellt. Hierbei wird dieses in Richtung der schneidenfreien Seite rotiert, um primär ein weiteres Zerkleinern von möglichen Festkörpern in der Speise zu verhindern. In solchen Anwendungsfällen mit dem TM6 kann es vereinzelt zu Problemen kommen, die im engen Zusammenhang mit dem Mixmesser stehen. So können kleinere Lebensmittel wie Körner jeglicher Art oder auch Gewürze aufgrund ihrer geringen Masse im oberen Bereich des Topfes verharren und dadurch nicht zerkleinert oder ordnungsgemäß in das Essen hinzugeführt werden. Das Mixmesser ist, gemeinsam mit der Topfgeometrie, eine der Hauptfaktoren, welche konstruktiv beeinflusst werden können, um eine effizientere Homogenisierung bei

möglicher gleichzeitiger Verringerung der Betriebslautstärke zu erreichen und kann dadurch zur Lösung der oben genannten Probleme beitragen. Weiterhin kann eine modifizierte Form des Mixmessers für zukünftige Generationen oder als aufwertendes Modul (Retrofit) angeboten werden, was eine mögliche Verbesserung für den Kunden bedeutet und gleichzeitig eine wirtschaftliche und kostengünstige Sortimentserweiterung für das Unternehmen Vorwerk darstellt. In gleicher Weise sollte der Prozess zur Optimierung möglichst kostengünstig und effizient verlaufen, weshalb es ein nötiges Werkzeug hierfür bedarf. Im nachfolgenden Unterkapitel wird ein solches Werkzeug präsentiert und beleuchtet inwiefern mit dessen Hilfe der erste Schritt zur Optimierung vollzogen wird.

## 1.2 Ziel der Arbeit

Eine heutzutage lukrative und weit ausgereifte Methode ist die Nutzung von numerischer Simulations-Software, um strömungsmechanische Abläufe frühzeitig verstehen und analysieren zu können. Durch ein solches CFD-Modell (Kurz: Computational Fluid Dynamics) können Ergebnisse mit guter Annäherung zum systematischen Testen von Designansätzen geliefert werden, wodurch unwirtschaftliches und zeitaufwendiges Herstellen und Testen von Prototypen nicht erforderlich ist [4]. Gerade in der frühen Entwicklungsphase von Produkten können frühe Erkenntnisse durch CFD-Modelle große wirtschaftliche Vorteile bieten. Dies wird noch deutlicher anhand einer Umfrage an der 20 Unternehmen teilnahmen. Daraus geht hervor, dass diese Unternehmen bis zu 20 % ihres Entwicklungsbudgets für rückwirkende Modifikationen an einem bestehenden Produkt ausgeben [5].

Auf Basis der vorgestellten Probleme wird im Rahmen dieser Arbeit ein Optimierungsprozess im Bezug auf das Mixmesser des Produkts TM6 angestoßen. Hierbei liegt der Fokus der Arbeit primär auf dem Prozess des Rührens und der Erstellung eines validierten CFD-Modells mit dem diverse Prototypen von Rührwerkzeugen miteinander hinsichtlich ihrer Effizienz verglichen werden können. Die Validierung erfolgt durch einen Abgleich des numerischen Modells mit einem analog dazu entwickelten experimentellen Prüfstand anhand erarbeiteter und geeigneter Methoden. Das numerische CFD-Modell wird hierbei, bezogen auf die Topfgeometrie und das zu mischende Medium, vereinfacht dargestellt. Ziel dieser Vereinfachung ist den Einfluss des Rührers in einem Mischprozess klar definieren zu können und die Komplexität des numerischen Modells auf das notwendige Maß zu begrenzen. Zusammenfassend werden die folgenden Vereinfachungen getroffen:

- Alleinige Betrachtung der Funktion des Rührens im Bezug auf das Mixmesser
- Behandlung von Newtonschen Flüssigkeiten ohne Festkörper bei freier Oberfläche

- Vereinfachte Darstellung des TM6-Topfes: Keine Wellenbrecher und keine Verjüngung

Zum Schluss wird das numerische Modell einem Test durch einen statistischen Versuchsplan unterzogen und nach gängigen Methoden aus der Wissenschaft hinsichtlich der Rühreffizienz bewertet.

Zusammenfassend sollen folgende Fragen im Rahmen dieser Arbeit behandelt werden:

- Welche Methoden können zur Validierung eines CFD-Modells verwendet werden?
- Wie wird eine Durchmischung bewertet? Wie kann eine Bewertung durch eine Simulation unterstützt stattfinden?
- Inwieweit nimmt ein Rotationskörper Einfluss auf die Durchmischungseffizienz?
- Kann die aktuelle Geometrie des Mixmessers vom Thermomix im Hinblick auf ihre Rührfähigkeit und durch die Nutzung eines validierten CFD-Modells optimiert werden, sodass eine bessere Durchmischung erzielt wird? Wenn ja, welche Parameter sind hierfür ausschlaggebend?

---

## 2 Stand der Technik

In diesem Kapitel werden die heute etablierten Werkzeuge zum Röhren und ihre Aufgabenbereiche vorgestellt. Hierbei werden sowohl die zu Grunde liegenden Funktionsweisen, als auch deren spezifische Einsatzbereiche beleuchtet. Dies dient der Auswahl eines geeigneten Rührwerkzeugs, um in späteren Kapiteln den Vergleich des Experiments (Kapitel 4) mit dem numerischen Modell (Kapitel 5) durchzuführen. Weiterhin werden anhand dessen die geeigneten Parameter zur numerischen Variation für den simulativen Vergleich in Kapitel 7 bestimmt. Zusätzlich wird untersucht, inwieweit die Rührer eine Durchmischung hinsichtlich ihren geometrischen Parametern beeinflussen.

Um ein geeignetes numerisches Modell zur Analyse von Durchmischungen zu erhalten, wird weiterhin in diesem Kapitel untersucht, welche numerischen Ansätze und physikalischen Modelle in der Literatur üblicherweise zur Simulation von Rührprozessen berücksichtigt werden.

Schließlich wird erörtert, inwieweit Durchmischungen durch etablierten Bewertungsmethoden charakterisiert werden können. Dadurch wird ein Überblick über geeignete Validierungsmethoden geschaffen, die zur Bestätigung eines Simulationsmodells geeignet sind und weiterhin zur Bewertung der Modellgüte genutzt werden können.

### 2.1 Rührgeometrien und Einfluss auf die Strömungsbildung

Um den Einfluss auf einen Rührprozess zu beurteilen, muss erst definiert werden, was unter dem Begriff des Röhrens verstanden wird. Gemäß Zlokarnik ist ein Prozess als „Röhren“ zu definieren und die rotierende Geometrie als Rührer zu bezeichnen, sobald in einem zu vermischtenden Stoffgemisch die flüssige Phase überwiegt [6]. Weiterhin beschreiben Zlokarnik und Kraume folgende fünf Hauptaufgaben eines Rührers [6, 7]:

- Homogenisierung (Ausgleich von Konzentrations- und Temperaturunterschieden)
- Intensivieren des Wärmeaustausches zwischen der Flüssigkeit und der Wärmeübertragungsfläche
- Aufwirbeln (und ggf. Lösen) bzw. Suspendieren (ggf. Anschlämmen) eines Feststoffes in der Flüssigkeit

- Dispergieren (ggf. Emulgieren) zweier ineinander nicht löslicher Flüssigkeiten
- Dispergieren (Zerteilen) eines Gases in der Flüssigkeit

Wie bereits im ersten Kapitel erwähnt wurde, wird im Rahmen dieser Arbeit der Fokus auf den Prozess des Rührens gesetzt. Obwohl das Dispergieren, das Suspendieren und auch das Intensivieren des Wärmeaustauschs fundamentale Aufgaben eines Rührers sind, sollen diese Funktionen hier vernachlässigt werden und der Fokus auf dem Homogenisieren, also dem Konzentrationsausgleich eines Stoffgemisches liegen. Hinsichtlich dieser Hauptaufgabe werden nachfolgend standardmäßige und moderne Ansätze für Rührgeometrien vorgestellt.

## 2.1.1 Rührgeometrien und Wirkweise

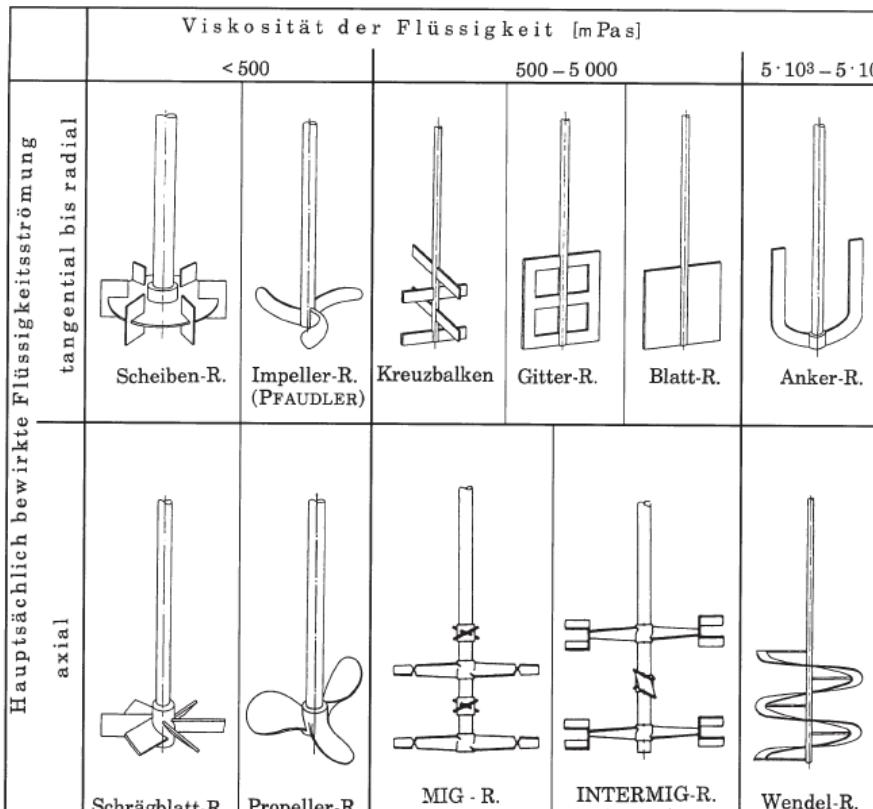
In der industriellen Praxis sind eine Vielzahl der Rührwerkzeuge für gezielte Anwendungen bereits seit Jahren etabliert, da diese ausgiebig erforscht und optimiert wurden und jeher gute Ergebnisse entsprechend ihres Aufgabenfeldes erzielen. Dabei sind diese an das Aufgabengebiet angepasst und gewährleisten diesbezüglich eine hohe Effizienz und Zuverlässigkeit. Weiterhin besteht gleichzeitig ein Interesse darin stets das geeignetste Design für ein Rührwerkzeug entsprechend ihrer Aufgabe zu finden, da das Strömungsverhalten im Inneren eines Mischbehälter maßgeblich von ihnen beeinflusst wird [8].

Je nach Anwendungsfall des Rührwerkzeuges sind Radial-, Tangential- und Axialgeschwindigkeiten in unterschiedlicher Ausprägung relevant und werden neben der Drehzahl maßgeblich durch die Form des rotierenden Körpers beeinflusst. Entsprechend Zlokarnik können 90 Prozent aller Röhraufgaben mit den in Abbildung 2.1 dargestellten Geometrien bewältigt werden [6]. Viele der heute bekannten Rührorgane, die von namhaften Entwickler für Rührer verwendet werden, sind in den meisten Fällen von diesen Geometrien abgeleitet und unterscheiden sich nur marginal von ihnen [7].

Alle in Abbildung 2.1 dargestellten Rührer, die in Axialrichtung fördern, sind grundsätzlich zum homogenisieren geeignet [6, 7]. Neben der primären Funktion des Rührers ist insbesondere die Viskosität des zu homogenisierenden Stoffgemischs von zentraler Bedeutung, da sie maßgeblich das Strömungsverhalten, den Energiebedarf sowie die Effektivität des Mischprozesses beeinflusst. Obwohl sowohl der Propeller- und der Schrägblattrührer, als auch der Wendelrührer gut zum homogenisieren geeignet sind und in axiale Richtung fördern, unterscheiden diese sich bezogen auf den Nutzen für unterschiedliche Viskositäten. Während die schnelllaufenden Propeller- und Schrägblattrührer zur Homogenisierung von niedrigviskosen Flüssigkeiten geeignet sind, kommt der Wendelrührer vermehrt bei hochviskosen Medien zum

Einsatz, indem dieser eng an der Wand das Medium langsam Richtung Boden befördert [7]. Weiterhin existieren sogenannte Mehrstufen-Impuls-Gegenstrom Rührer (kurz MIG-Rührer) oder auch Interferenz Mehrstufen-Impuls-Gegenstrom Rührer (Kurz: Intermig-Rührer) wie sie von dem Unternehmen EKATO hergestellt werden, um eine geeignete Homogenisierung bei leicht höherviskosen Medien zu erreichen. Auch hier handelt es sich, um axial fördernde Rührer, die durch die mehrstufige Anordnung sowohl die Förderung zum Boden, als auch in die entgegengesetzte Richtung gleichzeitig erzwingen [6].

		Viskosität der Flüssigkeit [ $\text{mPas}$ ]					
		< 500	500 – 5 000	5 · 10 <sup>3</sup> – 5 · 10 <sup>4</sup>			
Hauptsächlich bewirkte Flüssigkeitsströmung	tangential bis radial	Scheiben-R.	Impeller-R. (PFAUDLER)	Kreuzbalken	Gitter-R.	Blatt-R.	Anker-R.
	axial	Schrägblatt-R.	Propeller-R.	MIG - R. (EKATO)	INTERMIG-R. (EKATO)		Wendel-R.



**Abbildung 2.1** Einsatzgebiete und Wirkweise von etablierten Rührwerkzeugen (Abbildung von Zlokarnik aus Transportvorgänge in der Verfahrenstechnik [6])

Es existieren zusätzlich weitere Formen der bereits in Abbildung 2.1 aufgeführten standardmäßigen Impellerrührer, die durch tragflügelähnliche Bauweise ein effizienteres Strömungsverhalten erreichen können. Sie werden auch Hydrofoil-Impeller genannt und sind durch ihre optimierten axiale Wirkweise besonders zur Homogenisierung geeignet [9]. Weitere Bauweisen wie beispielsweise der Schmetterlings- und Sägeblattrührer werden von Salho und Hamzah vorgestellt [8]. Zur Erzeugung hoher Scherkräfte kommen sogenannte Rotor-Stator

Mixer wie beispielsweise von dem Unternehmen Silverson zum Einsatz, welche durch einen rotierenden Körper in einem Käfig besonders zur Dispersion, aber auch für Mischprozesse und der Aufbereitung von Emulsionen geeignet sind [10].

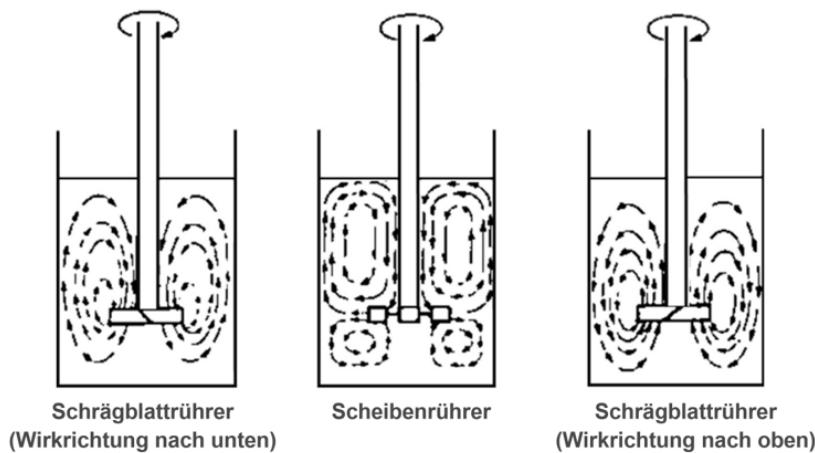
Neben den etablierten Rührwerkzeugen werden stets neue und unkonventionelle Methoden zur Ableitung neuer Geometrien angewendet. Beispielhaft hierfür sind Ansätze aus der Natur mittels Biomimikrie wie sie in der Arbeit von Chalise und Kittur [11] vorzufinden sind. Weiterhin gibt es die Möglichkeit computergestützte Formoptimierungen durchzuführen wie sie in den Arbeiten von Eggel und Schmidt [12] durch partielle Differentialgleichungsansätze oder auch Castro und Ocon [13] mit Hilfe der diskreten Element Methode durchgeführt werden. Da der Thermomix mit hohen Drehzahlen betrieben werden kann und zur Vereinfachung Newtonsche Flüssigkeiten betrachtet werden, sollen Nachfolgend die „schnelllaufenden“ Rührer analysiert werden. Obwohl der Scheibenrührer teilweise zur Lösung von anderen Aufgaben als dem Homogenisieren bestimmt ist, wird dieser trotzdem für einen Vergleich beleuchtet, um darzustellen, welchen Einfluss die Förderrichtung auf das zu rührende Medium nehmen kann. Der in vielerlei Literatur genannte schnelllaufende Scheibenrührer soll hierbei als Gegenstück für den ebenfalls schnelllaufenden Schrägblattrührer fungieren. Dieser wird auch als Rushton-Turbine bezeichnet, da der Name Scheibenrührer trotz der vorhandenen Schaufeln irreführend sein kann [6]. Bei der Nutzung dieses Rührers entstehen abhängig von Viskosität ausschließlich in Tangentialrichtung wirkende Scherkräfte und Radialkräfte. Bevorzugt wird dieser Rührer, aufgrund des Erzeugens von erheblichen Scherkräften, für Dispersionsprozesse genutzt. In Abbildung 2.2 sind durch Qui et al. [14] die typischen Förderrichtungen für Schrägblattrührer mit Wirkung nach unten und nach oben, sowie die Förderrichtung eines Scheibenrührers dargestellt.

Bei Nutzung des Schrägblattrührers entsteht meist eine große Schleifenbahn, wohingegen der Scheibenrührer zwei Schleifenbahnen erzeugt, die für eine Trennung der Strömungsgebiete sorgt[15] und dadurch negativen Einfluss auf eine Durchmischung nimmt.

## 2.1.2 Einfluss geometrischer Parameter

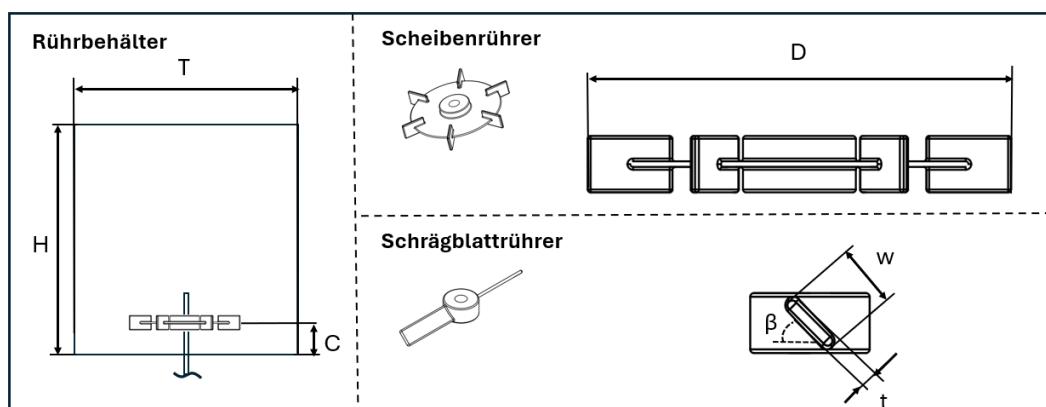
Nachdem im letzten Unterkapitel ein Einblick über etablierte Rührwerkzeuge und deren Aufgabengebiete geschaffen wurde, werden nachfolgend Parameter für Rührsysteme mit besonderen Fokus auf der Rührergeometrie in Mischversuchen betrachtet. Diese werden für die Auslegung der Dimensionen des Prüfstands und des numerischen Modells verwendet und dienen weiterhin der späteren Analyse von Ergebnissen.

In der Abbildung 2.3 ist beispielhaft ein Rührbehälter, ein Scheiben- und ein Schrägblat-



**Abbildung 2.2** Förderrichtung für Schrägblatt- und Scheibenrührer (Abbildung von Qiu et al. [14])

trührer dargestellt anhand dessen typische geometrischen Parameter und die dazugehörigen Variablen zu sehen sind. Üblicherweise werden für Untersuchungen mit Behälter- und Rührerkonfigurationen erwähnte Parameter als dimensionslose Zahlen in Beziehung zueinander gesetzt, wodurch eine allgemeine Skalierung für unterschiedliche Konfigurationen möglich ist. Diese Konvention wird daher auch für die Dimensionsbeschreibung in dieser Arbeit übernommen. Weiterhin ist zu erwähnen, dass in vielen Arbeiten Behälter mit größerem Durchmesser und höherer Füllhöhe behandeln werden als es bei dem Thermomixtopf der Fall ist, weshalb eine eigenständige Untersuchung unerlässlich ist.



**Abbildung 2.3** Beispielhafte Darstellung von Parametern anhand eines Rührbehälters, Scheiben- und Schrägblattrührer

Der Thermomix verfügt wie zuvor erwähnt über drei Wellenbrecher in einem Abstand von  $120^\circ$  zueinander, die dazu beitragen die Turbulenz und somit die durch Konvektion bedingte Durchmischung zu beschleunigen. In der Literatur werden Behälter mit Wellenbrechern vorrangig behandelt, welche zum jetzigen Stand, ähnlich wie bei Rührwerkzeugen, bereits für viele Anwendungen häufig optimiert wurden. Typische Konfigurationen für Behälter sehen vier Wellenbrecher mit einer Größe von  $T/12$  bis  $T/10$  vor [16]. Dass der Einsatz von Wellenbrechern im Rahmen von Mischvorgängen beliebt ist, liegt mitunter daran, dass Mischzeiten häufig doppelt bis dreifach so hoch ausfallen, wenn ein Behälter ohne Wellenbrechern verwendet wird [17]. Wohingegen bereits häufig bewiesen werden konnte, dass die zu erbringende Leistung für einen Mischprozess ohne Wellenbrecher geringer ausfällt [18]. Jaszczur et al. erwähnen in ihrer Arbeit, entgegen vieler Untersuchungen, dass ein Behälter ohne Wellenbrecher sogar eine geeignete Alternative sein kann. Dies trifft zu wenn mit einem für den Behälter angepassten und optimierten Rührgeometrie vermischt wird. Ein zusätzlicher Vorteil liegt dabei in der möglichen Leistungseinsparung [19]. Weiterhin wird eine Flüssigkeitstrombe bei Mischbehältern ohne Wellenbrechern erzeugt, welche berücksichtigt werden sollte und häufig ein unerwünschtes Phänomen darstellt. Busciglio et al. hingegen erwähnen, dass die Mischeffizienz bei Trombenbegasung (Rührwerkzeug in Kontakt mit Luft) gleichwertig wie bei der Nutzung von Wellenbrechern sein soll [18]. Bezogen auf die Füllhöhe ist ein Verhältnis von  $H/T = 1$  für die meisten Rühraufgaben ein günstiges Verhältnis, wobei mit einem ansteigen dessen mit höheren Mischzeiten zu rechnen ist. [6, 16, 20]

Rewatkar und Joshi untersuchten in ihrer Arbeit ausgiebig die unterschiedlichen Parameter von axial nach oben und unter fördernden Schrägbatatrührern und dem radialwirkenden Scheibenrührer. Nachfolgend wird auf einige Kernaussagen ihrer Arbeit eingegangen. Auf Basis des Schrägbatatrührers, welcher in Richtung des Behälterbodens fördert, wurden Untersuchungen zum Durchmesser durchgeführt. Die Erkenntnisse zeigen, dass die Mischzeit mit steigendem Durchmesser sinkt, wohingegen der effizienteste Durchmesser zwischen  $D = T/3$  und  $T/2$  liegt, da mit größeren Durchmessern und somit mehr benötigter Energie die Mischzeit langsam abnimmt. Für den Abstand zum Behälterboden wurden diverse optimale Höhen ermittelt, da diese von dem Rührwerkzeug abhängt. So erreichte ein zum Boden wirkender Schrägbatatrührer mit einer Höhe von  $C = T/2$  die geringste Mischzeit bei drei verschiedenen Höhen, wohingegen die Mischzeit für einen nach oben wirkenden Schrägbatatrührer und einen Scheibenrührer mit einem Bodenabstand von  $C = T/6$  am geringsten ausgefallen ist. Der Winkel mit dem die Schrägbatatrührer wirken, haben weiterhin

ebenfalls einen eindeutigen Einfluss auf die Mischzeit. So sinkt die Mischzeit bei ansteigendem Anstellwinkel zwischen  $\beta = 30^\circ$  und  $\beta = 60^\circ$ , wobei ein Winkel von  $90^\circ$  einem radialwirkenden Scheibenrührer gleichen würde, welcher zu einer Erhöhung der Mischzeit beitragen würde. Eine Erhöhung der Anzahl der Schaufeln eines zum Boden gerichteten Schrägbalattrührers bewirkt eine Verringerung der Mischzeit, wobei sechs Schaufeln als am Energieeffizientesten angesehen wurden. Sowohl die Schaufeldicke  $t$ , als auch die Schaufelbreite  $w$  nehmen einen marginalen Einfluss auf die Mischzeit im direkten Vergleich mit den zuvor genannten Parametern [21].

## 2.2 Numerische Methoden zur Beschreibung von Rührsystemen

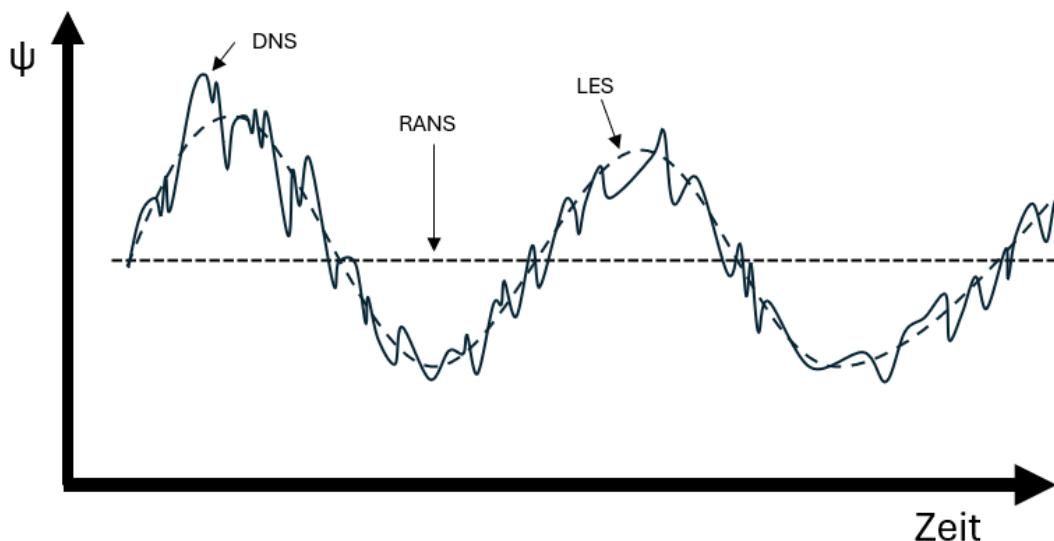
Durch die zunehmende Leistungsfähigkeit von Rechnern gewinnen Simulationen mehr an Relevanz, da diese den Vorteil bieten virtuell Vorhersagen zu treffen bei gleichzeitiger Reduktion der Kosten [4]. Im Bereich der numerischen Strömungsmechanik gibt es heutzutage eine Vielzahl an kommerziellen und kostenlosen Software-Anbietern. Einige Nennenswerte sind hierbei Ansys fluent, OpenFOAM und Star-CCM+. Im Rahmen dieser Thesis wird die kommerzielle Software Star-CCM+ verwendet, um ein numerisches Mehrphasenmodell eines Mischbehälters aufzustellen, welches später validiert wird. In dieser Software wird überwiegend die Finite-Volumen-Methode (FVM) verwendet mit der die Erhaltungsgleichungen über Integrale gelöst werden [22]. In diesem Kapitel werden wichtige Grundansätze zur Erstellung eines solchen numerischen Modells für einen Mischprozess vorgestellt. Zu denen zählen die Generierung einer Rotationsbewegung mit einem Rührwerkzeug und die Mehrphasenmodellierung. Zunächst werden jedoch die Möglichkeiten des Detailgrades hinsichtlich der Turbulenzmodellierung und somit der Qualität eines Simulationsmodells aufgezeigt.

### 2.2.1 Turbulenzmodellierung

Eine **laminare** Strömung beschreibt eine gleichgerichtete Schichtenströmung, bei der die Moleküle nebeneinander angeordnet fließen. Die im technischen Kontext betrachteten und daher meist relevanteren Strömungen sind hingegen nahezu immer **turbulent** und weisen eine ungeordnete Charakteristik auf, durch die ein erhöhter Impuls austausch stattfindet [23]. Das genaue Auflösen vom komplexen Turbulenzverhalten in Strömungen mit hohen Reynolds-Zahlen ist daher im numerischen Kontext bedeutend relevant und kann nur durch Berücksichtigung einer hohen räumlichen und zeitlichen Diskretisierung erfolgen bei der

Veränderungen in Größe der Kolmogrov-Länge  $l_k$  erfasst werden. Eine sogenannte "Direkte numerische Simulation"(DNS), welche dazu in der Lage ist, kann nur mit einem hohen Rechenaufwand realisiert werden, was ebenfalls mit immensen Kosten einhergeht und somit nicht rentabel für den Großteil der Industrie ist [24]. Die Nutzung ist aktuell tendenziell wissenschaftlichen Einrichtungen zur Analyse von einfachen laminaren Strömungen vorbestimmt. Somit benötigt es eine schnellere und weiterhin möglichst verlässliche Methode zur Darstellung von turbulenten Strömungen, vor allem da auch unter der Berücksichtigung einer rasanten Weiterentwicklung von rechnungsstarken Computern eine wirtschaftliche Nutzung von DNS noch weit entfernt scheint [24]. Aufgrund dessen wurden Methoden entwickelt die Modellierung von Feinwirbelstrukturen bei gleichzeitiger Simulation von Grobwirbelstrukturen, sogenannte „Large Eddys“ zu ermöglichen, wodurch die benötigte Rechenleistung verringert werden kann im Vergleich zu einer DNS. Hierfür kommen Filter zum Einsatz, welche die zeitabhängigen Grundgleichungen in größere Gitterstrukturen (Maschenvolumen) integrieren und somit Änderungen in diesen verzeichnen, obwohl die in ihnen enthaltenen kleinen Volumen konstant im Bezug auf Ihre Erhaltungsgrößen sind. Aufgrund der Berücksichtigung dieser groben Wirbelstrukturen wird diese Methode „Large Eddy Simulation“ (LES) genannt [23]. Diese findet bereits in der Industrie Anschluss, benötigt dennoch eine vergleichsweise große Rechenleistung. Die derzeit am meisten vertretene und rechengünstigste Methode ist die „Reynolds Averaged Navier Stokes“ Simulation (RANS) [25]. Für eine Vielzahl von Strömungsproblemen ist eine detaillierte Beschreibungen der Turbulenzen nicht zwingend notwendig, viel mehr genügt eine Betrachtung der zeitgemittelten Größen aus den Grundgleichungen für Massen-, Impuls- und Energieerhaltung, um die Auswirkung einer Strömung zu analysieren. Dies liefert den Grund für die Namensgebung der RANS-Methode [23]. Auf Basis dieser drei herkömmlichen und bekannten Methoden können weiterhin zusätzliche Konzepte beschrieben werden, zu denen Unsteady RANS oder auch der hybride Ansatz der „Detached-Eddy-Simulation“ (DES) gehören [24, 22]. Eine Einordnung für die genannten Methoden kann der Abbildung 2.4 entnommen werden. Dabei entspricht  $\Psi$  einer willkürlichen Variablen, die bei DNS analog wiedergegeben wird und für LES oder RANS in Annäherung an die exakte Lösung [23].

Da die RANS Methode als die aktuelle Standardmethode in Star-CCM+ gilt, werden nachfolgend unterschiedliche Methoden zur statistischen Mittelung der RANS Turbulenz Darstellung vorgestellt, welche als Wirbelviskositätsmodelle bezeichnet werden.



**Abbildung 2.4** Vereinfachte Darstellung von RANS, LES und DNS im direkten Vergleich für eine zufällige Variable  $\Psi$  (In Anlehnung an Foale [26])

### 2.2.1.1 Wirbelviskositäts- und Spannungsmodelle

Im Jahre 1877 präsentierte Joesph Boussinesq einen Ansatz, um turbulente Spannungen mit Hilfe eines Gradientensatzes als isotrop darzustellen. Durch diesen Ansatz ist es möglich sechs unbekannte Spannungen, die auf Basis von Turbulenzen existieren, auf die beiden Unbekannten Variablen für die Wirbelviskosität  $\eta_t$  (auch turbulente Viskosität) und die turbulente kinetische Energie  $k$  zu vereinfachen. Unter den sogenannten Wirbelviskositätsmodellen werden Methoden zur Bestimmung dieser beiden Variablen verstanden. Allerdings wird bei dem **Nullgleichungsmodell**, welches die Lösung von  $\eta_t$  mittels algebraischer Gleichung vorsieht, als auch bei dem **Eingleichungsmodell** auf Basis einer Differenzialgleichung das  $k$  vernachlässigt. Lediglich mit dem **Zweigleichungsmodell** können beide Variablen mit zwei Differenzialgleichungen bestimmt werden [25].

Da die Nullgleichungsmodelle wie der Prandtlsche Mischungsweg oder auch das Baldwin-Lomax-Modell heutzutage selten Anwendungen in numerischen Berechnungen finden, werden diese hier nicht weitergehend beschrieben und auf Ghaib [25] verwiesen. Das Eingleichungsmodell mit dem Namen Spalart-Allmaras-Modell hingegen wird auch heute noch in numerischen Berechnungen von hybriden RANS-LES-Modellen benutzt oder auch um beispielsweise die Umströmungen eines Körpers darzustellen. Die Zweigleichungsmodelle werden nachfolgend detaillierter beschrieben, da diese häufig eingesetzt werden. Das  $k-\epsilon$ -Modell ist eines der

bekanntesten Modelle zur Beschreibung von Turbulenzen, welches neben der turbulenten kinetischen Energie  $k$  die Dissipationsrate  $\epsilon$  berücksichtigt. Vorwiegend eignet es sich zur Beschreibung der Strömungsbewegung im Inneren eines Strömungsfeldes, also entfernt von Grenzen. Sobald die Strömung aufgrund von Druckgradienten umgeleitet wird, versagt das Modell durch die ungenauen Berechnung der Ablösung von der Wand. Auch bei niedrigen Reynolds-Zahlen ist das  $k-\epsilon$ -Modell nur bedingt geeignet zur Beschreibung des Strömungsverhaltens, weshalb weiterentwickelte Varianten dieses Modells existieren, die zur Beschreibung von geringen Reynolds-Zahlen geeignet sind, wie das Modell nach Jones und Launder [27], Lam und Bremhorst [28] oder auch nach Chien [29, 25]. Darüber hinaus sind das RNG- $k-\epsilon$ -Modell, welches zur Beschreibung von hohen Scherraten geeignet ist und das Realizable- $k-\epsilon$ -Modell zur geeigneten Beschreibung von Staupunkten oder eines Freistrahls, weitere erwähnenswerte Modelle. Für die angemessene Darstellung von wandnahen Vorgängen ist hingegen die Anwendung des  $k-\omega$ -Modell nach Wilcox vorteilhaft, da anstatt der turbulenten Dissipation  $\epsilon$ , die spezifische Dissipation (auch turbulente Frequenz)  $\omega$  berücksichtigt wird, wodurch eine korrekte Beschreibung der wandnahen Grenzschichtvorgänge bis hin zur viskosen Unterschicht möglich ist [24]. Umgekehrt zum  $k-\epsilon$ -Modell werden Freistromvorgänge im Inneren einer Strömung weniger detailliert dargestellt. Um diese Schwäche des  $k-\omega$ -Modells zu kompensieren, beziehungsweise um die stärken hervorzuheben kombinierte Menter dieses Modell mit dem  $k-\epsilon$ -Modell, indem eine Gewichtung der Modelle abhängig zum Wandabstand integriert wurde. Auf der Grundlage basierend, dass in diesem Modell die Schubspannungen mit zunehmenden Druckanstieg begrenzt werden, entstammt der Name SST- $k-\omega$ -Modell (Kurz für Shear Stress Transport). Dieses dient als neuer Standard für die Turbulenzmodellierung [25].

Trotz ihrer häufigen Anwendung besitzen die Wirbelviskositätsmodelle Mängel in Hinblick auf die Beschreibung der Folgen der Wirbelviskositättdarstellung. Durch Nutzung der **Reynoldsspannungsmodelle** RSM, können diese besser eingeschätzt werden, wobei dies eine Erhöhung der notwendigen Rechenleistung zur Folge hat. Anstatt den Ansatz von Boussinesq zu verwenden, werden turbulente Spannungen in Form von Transportgleichungen im dreidimensionalen Raum gelöst, wodurch anisotropes Verhalten aufgrund von Turbulenz berücksichtigt wird [25].

---

## 2.2.2 Numerische Modellierung rotierender Systeme

In der numerischen Strömungsmodellierung sind zwei Methoden, hinsichtlich der Nutzung der Software Star-CCM+ zur Darstellung von Rotationsbewegungen, etabliert. Die beiden Methoden Moving Reference Frame (MRF) und Rigid Body Motion (RBM) sollen nachfolgend in diesem Kapitel beschrieben werden. Weiterhin sollen dabei relevante Aspekte zur zeitlichen und räumlichen Diskretisierung beleuchtet werden [30].

Für beide erwähnten Methoden wird das Rührwerkzeug, welches in Rotationsbewegung versetzt wird, von einem rotationssymmetrischen Volumen umschlossen. Das Rührwerkzeug wird hierbei als negative Form innerhalb des rotierenden Volumens dargestellt und es werden hierfür Haftbedingungen definiert. Bei der ersten Methode namens Moving Reference Frame (MRF) werden die Kräfte, die auf den Zylinder wirken in gemittelter Form aufgeprägt und übertragen. Dabei wird keine sichtbare Rotationsbewegung durchgeführt. Anders sieht es der Rigid Body Motion-Ansatz (RBM) vor, bei dem das gesamte Volumen tatsächlich rotiert, was jedoch eine deutlich höhere Rechenleistung abverlangt. Weiterhin ist RBM geeigneter dazu transiente Simulationen durchzuführen. Die Methode Rigid Body Motion kann als Lösung von Star-CCM+ mit der bekannten Sliding Mesh Methode [16, 31] zu einem gewissen Maße verglichen werden, da in beiden Fällen eine Rotationsbewegung des Netzes vorgesehen wird. Eine detaillierte Erklärung anhand eines Beispiels kann der offiziellen Star-CCM+ Dokumentation entnommen werden [30].

## 2.2.3 Mehrphasenmodelle

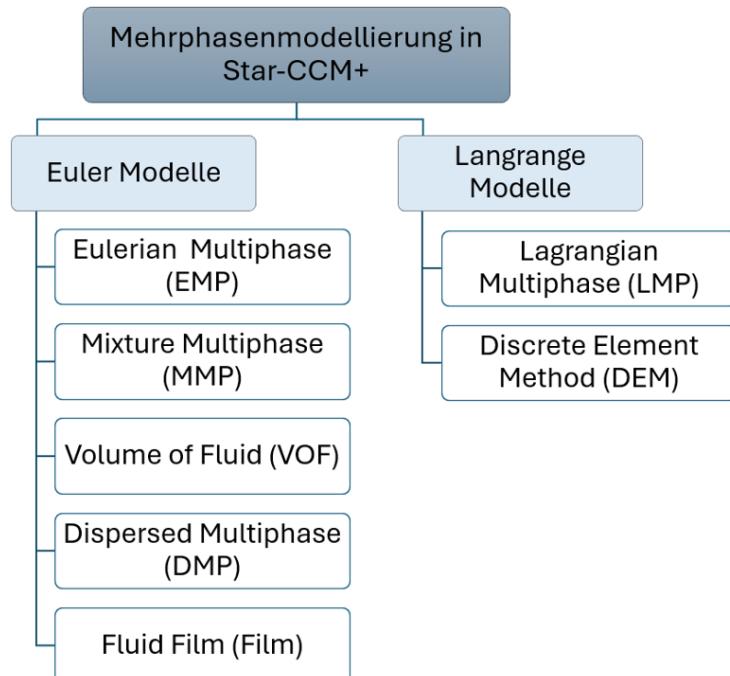
Die im Rahmen dieser Arbeit genutzte Software Star-CCM+ bietet insgesamt sieben Möglichkeiten zur Modellierung von Mehrphasenströmungen an. In diesem Kapitel sollen diese kurz erwähnt werden, mit Fokus auf die geeigneten Modelle zur Beschreibung von Durchmischungen.

Zu Beginn ist erwähnenswert, dass die Modelle in zwei Kategorien unterteilt werden können, nämlich den Euler-Euler- und Euler-Langrange-Modellen. Die Letzteren sind geeignet zur Verfolgung von einzelnen Tropfen, Blasen oder Partikeln wie beispielsweise Tropfen im Regen oder einzelne Partikel, die in einer Strömung schwimmen. Somit wird eine dispergierte Phase mit Hilfe des Euler-Lagrange-Ansatzes innerhalb einer kontinuierlichen Phase, welche durch die Euler-Euler-Methode definiert ist, beschrieben [32]. Da in dieser

Arbeit das Durchmischungsverhalten von newtonschen Flüssigkeiten in einem Rührprozess mit kontinuierlichen Fluiden betrachtet werden soll, sind diese Methoden von geringerer Bedeutung, weshalb an dieser Stelle für weitere Informationen auf Chen et al. [32] verwiesen wird.

Bei der Modellierung von Mehrphasenströmungen auf Basis der Euler-Euler-Methoden werden die einzelnen Phasen als kontinuierlich angesehen. Somit sind diese gut geeignet, um unterschiedliche Phasen eindeutig voneinander getrennt zu betrachten oder um Durchmischungen von unterschiedlichen Flüssigkeiten darzustellen. Hierbei werden die Phasen in vernetzten Systemen als Volumenanteile der einzelnen Zellen ermittelt und ihre Erhaltungsgrößen für Masse, Impuls und Energie separat berechnet [32].

In Abbildung 2.5 sind die in Star-CCM+ verfügbaren Mehrphasenmodelle aufgeführt, welche in die Kategorien Euler-Methoden und Lagrange-Methoden unterteilt werden. Hierbei beschreiben die Euler-Methoden eine kontinuierliche Betrachtungsweise in der ebenfalls eine Masse von Partikeln, Blasen oder Tropfen als kontinuierlich in Schichten angenommen werden. Mit den Lagrange-Methoden hingegen werden diese einzeln oder in Paketen zusammenfassend betrachtet [33].



**Abbildung 2.5** Verfügbare Mehrphasenmodelle in Star-CCM+ (Eigene Darstellung in Anlehnung an Star-CCM+ Dokumentation [33])

## 2.3 Experimentelle Validierungsmethoden von numerischen Rührmodellen

Auf Basis von analytischen Berechnungen und Abschätzungen ist es möglich ein numerisches Modell bereits vorab im gewissen Maße als realistisch einzuschätzen. Bei der Entwicklung von alltäglichen Produkten ist es jedoch aus der Perspektive der Forschung und Industrie zusätzlich erforderlich eine absichernde Validierung des Modells durchzuführen. Dies gilt vor allem in Sicherheitskritischen Bereichen in denen ein Versagen schwerwiegende Konsequenzen mit sich zieht [34]. Da auf Basis dieser Arbeit durch eine CFD-Simulation eine Grundlage zur Optimierung einer Rührgeometrie geschaffen wird, folgt in diesem Kapitel eine Vorstellung einiger verschiedener Methoden zur qualitativen und quantitativen Validierung eines solchen numerischen Modells. Die hier vorgestellten qualitativen Methoden können meist auf quantitative Methoden durch tiefere Analysen erweitert werden.

### 2.3.1 Qualitative Betrachtung

Für die qualitativen Validierungsmethoden ist es üblich das Strömungsverhalten durch Einfärbung, Positionsbeobachtungen oder der Veränderung von Formen zu bewerten und erste Schlüsse auf ein physikalisch korrektes Verhalten in numerischen Modellen zu ziehen. Ein Problem an qualitativen Methoden ist, dass eine subjektive Wahrnehmung einhergeht, die nicht als fester Zahlenwert festgehalten wird und zusätzlich Expertise erfordert. Ist jedoch für die Validierung nur ein Trend oder eine grobe Validierung ausreichend, so kann dies meist sehr kostengünstig und einfach realisiert werden im Vergleich zu einigen qualitativen Methoden. Ein Beispiel hierfür ist das Ein- oder Entfärben einer Flüssigkeit bei dem sogenannten Kolorimetrie-Verfahren. Dafür wird eine Flüssigkeit eingefärbt oder umgekehrt durch eine chemische Reaktion, wie beispielsweise zwischen Iod mit Natriumthiosulfat im Experiment von Assirelli et al. [35], entfärbt. Durch die Visualisierung können Strömungsmuster oder Totzonen nachvollzogen und mit Auswertungen der Geschwindigkeitsfelder oder einem passiven Skalar aus Simulationen verglichen werden [36]. Bei vielen realen Strömungsproblemen mit Wasser ist Luft als weitere Phase enthalten, wodurch es durch die Schwerkraft und die Oberflächenspannungen zur Bildung einer freien Oberfläche und somit zu einer klaren Trennung der flüssigen und gasförmigen Phase kommen kann. Ausnahmen hierfür bilden Mehrphasenströmungen bei denen ungleiche Geschwindigkeiten beziehungsweise Massenströme für die verschiedenen Phasen vorhanden sind, wie es bei-

spielsweise für Strömungen in einem waagerechten Rohr beschrieben wird [37]. Wird die freie Oberfläche in einem mit Wasser gefüllten zylindrischen Behälter ohne Wellenbrecher betrachtet, dann ist bereits bei geringen Rührgeschwindigkeiten eine Trombe zu verzeichnen. Diese werden sowohl im Experiment als auch im numerischen Modell näherungsweise die gleiche Form aufweisen, sofern Randbedingungen und Geschwindigkeiten identisch ausfallen. Die erzwungene Trombe kann in ihrer Form verglichen werden wie es in der Arbeit von Yamamoto et al. [38] demonstriert wird.

### 2.3.2 Quantitative Betrachtung

Nachfolgend werden verschiedene quantitative Messmethoden vorgestellt, welche durch Bestimmung von physikalischen Größen wie der **Position**, der **Zeit** oder der **Geschwindigkeit** zur Validierung durch einen Vergleich eines numerischen Modells geeignet sind.

Bezogen auf freie Oberflächen können Formen der freien Oberfläche mit Hilfe von Kamerasystemen definiert werden, wie es bereits anhand eines Beispiels an einer Trombe demonstriert wurde. Hierbei könnten zusätzlich exakte Positionen errechnet werden, ähnlich wie es Busciglio et al. [39] ebenfalls an einer Trombe demonstrieren oder Andersson et al. [40] in ihrer Arbeit an einer freien Oberfläche in einem Wasserreservoir demonstrieren.

Ein wesentlicher Parameter, der für die quantitative Bewertung einer Durchmischung häufig betrachtet wird, ist die Zeit, welche benötigt wird, um einen vorher festgelegten Grad an Homogenität zu erreichen. Ascanio stellt diverse experimentelle Methoden vor, die hierfür genutzt werden können und teilt diese in die Kategorien eindringende und nicht-eindringende Verfahren ein und weiterhin die Messmethoden in direkt und indirekt ein [36]. Das bereits vorgestellte direkte und nicht-eindringende Kolorimetrie-Verfahren kann neben der Visualisierung zusätzlich zur Ermittlung der Mischzeit verwendet werden. Die Zeit zur Bestimmung einer endgültigen Homogenisierung ist dabei subjektiv, weshalb es bei diesem Verfahren notwendig sein kann die Bilder nachträglich zu verarbeiten, um beispielsweise die Änderung der Helligkeit mittels einer Grauwertanalyse durchzuführen. Das eigentliche Messverfahren ist hierbei leicht zu implementieren, kostengünstig und erfordert keine Kalibrierung [36]. Weiterhin werden optische Verfahren zur Ermittlung der Mischzeit durch Kolorimetrie in der Literatur vorgestellt [41]. Das planare laserinduzierte Fluoreszenzverfahren ist ebenfalls ein nicht-eindringendes und ein direktes Verfahren mit dem zweidimensionale durch Laser erzeugte Ebenen im Wasser hinsichtlich ihrer Fluoreszenz untersucht werden. Diese ist dabei abhängig von der Konzentration des hinzugefügten Farbmittels, welche zu einem gegebenen Zeitpunkt einen Sättigungszustand erreicht und somit zur Ermittlung einer Mischzeit dient [36]. Eine weitere Möglichkeit die Mischzeit zu bestimmen, ist durch herbeigeführte

chemische Reaktionen in der Flüssigkeit, welche bewirken, dass sich der Ursprungszustand verändert. Beispiele hierfür sind pH-Messungen durch Zugabe von basischen oder säurehaltigen Chemikalien oder Leitfähigkeitsmessungen auf Basis einer Veränderung der Ionenkonzentration durch Zugabe von Salz. Diese Methode ist vergleichsweise günstig und einfach zu implementieren, benötigt jedoch eine Kalibrierung der Messgeräte [36]. Hierbei werden lokale Messwerte über die Zeit bis zur Sättigung betrachtet, wobei die dadurch entstehenden Konzentrationskurven einen vorher definierten Schwellenwert überschreiten. Üblicherweise wird der Zeitraum betrachtet zu dem die Fluktuationen geringer als 5 Prozent von der zu erwartenden Endkonzentration abweichen [36]. Eine weiteres Verfahren, welches die Leitfähigkeit von Flüssigkeiten untersucht ist die elektrische Widerstandstomographie. Hierbei wird eine Reihe von Elektroden in einem Behälter platziert und ein Strom durch ein Elektrodenpaar gesendet, wodurch Potentialdifferenzen an den anderen Elektroden festgestellt werden können. Anschließend können darüber Leitfähigkeitskarten erstellt oder Sättigungskurven ermittelt werden [36]. Für numerische Modelle können konzentrationsbasierte Validierungen mit Hilfe von passiven Skalaren durchgeführt werden, da diese keinen direkten Einfluss auf die Strömung nehmen. Beispielhafte Anwendungen sind Larsson und Lindenbaum [42], Montante et al. [43] und Bågmark [44] zu entnehmen.

Abseits der Betrachtung der Mischzeit kann ein Modell durch eine Geschwindigkeitsmessung validiert werden. Ein hierfür häufig erwähntes und etabliertes Messverfahren in der Literatur ist Particle Image Velocimetry (Kurz PIV). Hierfür sind Position und Zeit die relevanten Faktoren, die mit optischen Methoden experimentell ermittelt werden. Im Gegensatz zu anderen indirekten Methoden bei denen beispielsweise der Druck, die Drehgeschwindigkeit oder die Wärmeübertragung gemessen werden, handelt es sich hierbei um ein direktes Messverfahren, bei dem durch die Nutzung von sogenannten „Tracer Partikeln“ zeitliche Positionen dieser in einer Ebene ermittelt werden [45]. Ein weiteres bekanntes Geschwindigkeitsmessverfahren wird durch die Laser-Doppler Anenometrie beschrieben. Hierbei werden ebenfalls Tracer-Partikel verwendet, die in der Strömung ein durch überlagerte Laser erzeugtes Interferenzmuster durchqueren und eine Streuung des Lichts und eine einhergehende Frequenzverschiebung bewirken, die abhängig von der Geschwindigkeit ist [46].

Für einige der genannten Verfahren und eine beispielhafte Simulation sind in Tabelle 2.1 Mischzeiten bei unterschiedlichen Drehzahlen in kleinen Behältern mit verschiedenen H/T-Verhältnissen aufgelistet. Da in dieser Arbeit weiterhin die Validierung eines Simulationsmodells aus einem vergleichsweise kleinen Mischbehälter im Vordergrund steht, dient

diese Tabelle der Einschätzung der zu erwartenden Mischzeiten.

Paper	Wellenbrecher vorhanden?	Methode	Drehzahl N [RPM]	H/T [mm/mm]	Mixing Time $\Theta$ [s]
Determination of mixing...[47]	Ja	Simulation	2160	100/100=1	<1
A novel method for measurement...[48]	Ja	Leitfähigkeitsmessung	60	150/150=1	$\approx$ 16
Mixing dynamics in uncovered...[17]	Nein	PIV und PLIF	100–900	190/190=1	10–100
Macro and micromixing studies in an unbaffled...[35]	Nein	Kolorimetrie	300–522	377/290=1,3	13,3; 36,6 (berechnet)
The influence of the addition...[49]	Ja	Kolorimetrie	50	220/220=1	13 ( $\Theta_{90}$ )

**Tabelle 2.1** Vergleich von angewendeten Methoden zur Ermittlung einer Mischzeit unter Berücksichtigung der Drehzahlen und geometrischen Verhältnisse

---

# 3 Strömungsmechanische Grundlagen

Nachdem in Kapitel 2 etablierte Rührwerkzeuge und deren Funktionsweise, sowie numerische Darstellungen von Rührsystemen und experimentelle Methoden zur Validierung von Mischsimulationen vorgestellt wurden, sollen nachfolgend strömungsmechanische Gleichungen zur Beschreibung von Strömungen und Mischvorgängen vertieft werden. Hierzu gehören Erhaltungsgleichungen zu verschiedenen physikalischen Größen, sowie die Betrachtung von dimensionslosen Kennzahlen zur Beschreibung von Strömungsfeldern und Mischprozessen. Diese dienen als Grundlage für nachfolgende Kapitel, welche darauf abzielen, das Strömungsverhalten und Mischvorgänge in Mischbehältern zu analysieren und numerische und experimentelle Ergebnisse systematisch einordnen zu können.

## 3.1 Untersuchungsgegenstände und Konzepte von Fluidströmungen

Im Rahmen von strömungsmechanischen Untersuchungen wird das Verhalten von Flüssigkeiten und Gasen erforscht, welche im Allgemeinen auch als Fluide bezeichnet werden, da diese in gewissen thermodynamischen Zustandsbereichen nicht unterschieden werden können. Von einem Festkörper unterscheidet sich ein Fluid hauptsächlich durch sein nicht-endliches Verformungsverhalten, welches als Strömen verstanden wird. Weiterhin ist die Verformung bei Festkörpern meist proportional zu den einwirkenden Kräften, wohingegen bei Fluiden die zeitbezogene Änderung der Verformung, also die resultierenden Geschwindigkeiten ein proportionales Verhalten aufweisen. Diese permanente Deformation eines Fluids ist eine besondere Schwierigkeit bei der Beschreibung von Strömungen gegenüber der von Festkörpern, weshalb es notwendig ist, zu einer ortsfesten Beschreibung eines dreidimensionalen Raumes überzugehen. Die folgenden Kapitel erörtern die mathematischen Beziehungen, die auf ortsfesten Ausdrücken basieren. [23]

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, soll das im Rahmen dieser Arbeit erstellte Modell auf newtonsche Fluide vereinfacht werden. Dazu zählen Fluide die ein lineares Verhalten bezogen auf Geschwindigkeitsgradienten  $du^*/dy^*$  und aufgeprägte Schubspannungen  $\tau$  aufweisen [25]. Dazu gehören unter anderem Luft und Wasser [23]. Im Hinblick auf die Herstellung von Lebensmitteln in einem Thermomix, wie beispielsweise Suppen, Mayonnaise oder Teig können Strömungen ein nicht-newtonssches Verhalten aufweisen [50, 51]. Diese nicht-lineare

---

Eigenschaft erhöht die Komplexität konstitutiver Gleichungen und kann teilweise nur durch Vereinfachungen dargestellt werden, weshalb im Folgenden ausschließlich newtonsche Fluide behandelt werden [52, 51].

## 3.2 Grundgleichungen der Strömungsmechanik und der Mischprozesse

Nachfolgend werden die bereits erwähnten Gleichungen zur ortsfesten Beschreibung von Masse und Impulsen von Fluiden vorgestellt. Diese Methodik bietet sich weiterhin dazu an die Erhaltung von Energie zu beschreiben, die auf dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik beruht. Da jedoch im Rahmen der numerischen Simulation Temperaturen als Konstanten angesehen werden, kein Phasenwechsel stattfindet und die Darstellung eines chemischen Prozesses nur passiv abläuft, wird an dieser Stelle für den Ansatz der Energieerhaltung auf [22] und auf [25] verwiesen.

Anschließend werden die allgemeinen Transportgleichungen für die Beschreibung von Konvektion, Diffusion und weitere Faktoren vorgestellt und Methoden zur Ermittlung von Mischzeiten und der Mischarbeit in Rahmen von Homogenisierprozessen aufgezeigt.

### 3.2.1 Erhaltungsgleichungen

Durch die Betrachtung einer sogenannten Kontrollmasse (KM) und den dazugehörigen extensiven Eigenschaften zu denen Masse, Impuls und Energie gehören, können Erhaltungsprinzipien für Festkörper hergeleitet werden. Das zuvor beschriebene nicht-endliche Verhalten von Fluiden sorgt dafür, dass diese nur schwierig als KM verfolgt werden können. Daher kann die Beschreibung der Erhaltungsgesetze im strömungsmechanischen Zusammenhang mittels des Kontrollvolumen-Ansatzes geschehen, welcher sowohl für die Massenerhaltungsgleichung als auch die Impulserhaltung relevant ist. Für den Inhalt dieser Arbeit sind Energieerhaltungsgleichungen, aufgrund von konstanten Temperaturen zur Vereinfachung der Probleme, irrelevant, weshalb an dieser Stelle auf Ferziger et al. [22], Ghaib [25] und Oertel [53] für eine Herleitung der Energieerhaltungsgleichung verwiesen wird.

Zur Beschreibung der Erhaltungsgesetze und der zu Grunde liegenden Kontrollvolumengleichung werden intensive anstatt extensive Eigenschaften betrachtet, welche unabhängig von der Masse sind. Die Beziehung von intensiven und extensiven Eigenschaften kann wie folgt

beschrieben werden:

$$\Phi = \int_{V_{KM}} \rho\phi \, dV \quad (3.1)$$

wobei  $\Phi$  die extensiven Eigenschaften,  $\phi$  die intensiven Eigenschaften und  $\rho$  die Dichte im Kontrollmasse  $V_{KM}$  beschreibt. Durch das Reynolds-Transporttheorem (auch Kontrollvolumengleichung) kann eine Beziehung von diesen extensiven Eigenschaften auf der linken Seite der Gleichung 3.2 zum Kontrollvolumen (KV) jeglicher Erhaltungsgleichungen geschaffen werden:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_{KM}} \rho\phi \, dV = \frac{d}{dt} \int_{V_{KV}} \rho\phi \, dV + \int_{S_{KV}} \rho\phi(\mathbf{v} - \mathbf{v}_s) \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (3.2)$$

Hier beschreibt  $V_{KV}$  das KV-Volumen,  $S_{KV}$  die Oberfläche, welche das Volumen umfasst,  $\mathbf{n}$  den Einheitsvektor, der orthogonal aus dem Volumen raus zeigt,  $\mathbf{v}$  die Fluidgeschwindigkeit und  $v_s$  die Geschwindigkeit des Kontrollvolumens. Letzteres wird in den nachfolgenden Erhaltungsgleichungen zu 0 und weiterhin wird die Ableitung vor dem Integral für das KV-Volumen als lokale und partielle Ableitung ausgedrückt, da von einem unbewegten KV ausgegangen werden soll. Zusammenfassend werden in der Gleichung 3.2 die Änderungsrate einer Eigenschaft für eine Kontrollmasse und ein Kontrollvolumen plus dem konvektiven Fluss über die KV-Oberflächen gleichgesetzt. Diese Gleichung bietet das Fundament, um nachfolgend die Erhaltung von Masse und Impuls zu beschreiben, wobei im Rahmen dessen die Begrifflichkeiten **Kompressibilität** und **Inkompressibilität** differenziert werden sollen [22]. Bezogen auf ein gesamtes Strömungsfeld kann es dazu führen, dass in einem Fluid eine Dichteänderung verzeichnet wird. In diesem Fall weist dieses Strömungsfeld eine Kompressibilität auf, welche jedoch nicht auf die eigene Fähigkeit eines Gases oder einer Flüssigkeit bezogen ist, die Dichte aufgrund der Temperatur zu verändern. Ein Strömungsfeld in dem die Dichte konstant bleibt, wird demzufolge als inkompressibel charakterisiert [23]. Sowohl die Massenerhaltungsgleichungen, als auch die Impulserhaltungsgleichungen werden dieser Eigenschaft entsprechend unterschiedlich formuliert.

### 3.2.1.1 Massenerhaltungsgleichung

Die zuvor hergeleitete Kontrollvolumengleichung (nachfolgend ohne Integral-Indize KM und KV) liefert durch setzen von  $\phi = 1$  die Massenerhaltungsgleichung in Integralform (auch Kontinuitätsgleichung):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV + \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 \quad (3.3)$$

Um eine Vektorform der Massenerhaltungsgleichung zu erhalten, die frei von Koordinaten ist, wird mit Hilfe des Gaußschen Divergenztheorems das Oberflächenintegral in ein Volumenintegral umgeformt und weiterhin wird angenommen, dass das KV unendlich klein wird. Daraus resultiert folgender Ausdruck für kompressible (links) und inkompressible (rechts) Strömungen [22, 25]:

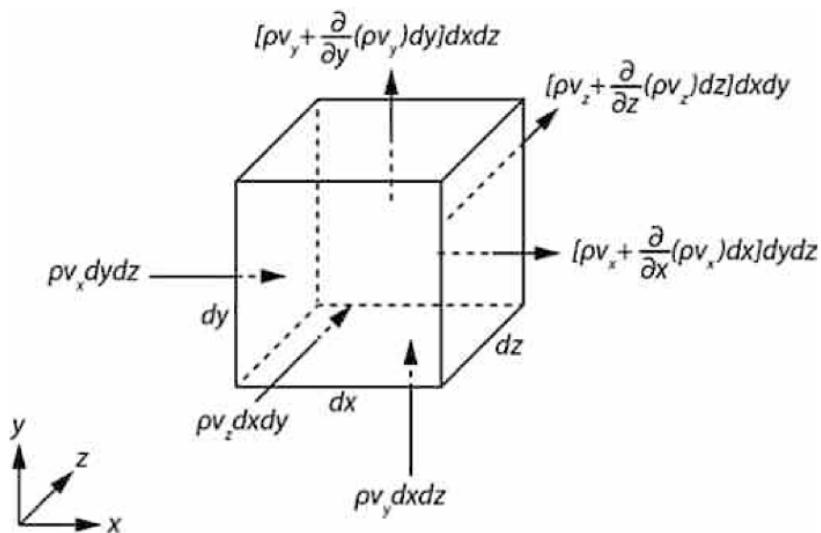
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.4)$$

Anhand dieser Gleichung wird gezeigt, dass weder Masse hinzukommt noch verloren geht [25]. Ausgehend von dieser Form der Gleichung kann die Form für ein beliebiges Koordinatensystem, sei es ein konventionelles wie das kartesische, zylindrische, sphärische Koordinatensystem oder auch ein nichtorthogonales Koordinatensystem hergeleitet werden, indem der passende Ausdruck des Divergenzoperators verwendet wird. Im Folgenden soll die Kontinuitätsgleichung für ein kartesisches Koordinatensystem betrachtet werden. Hierfür ist die Betrachtung eines quaderförmigen Volumenelementes  $dxdydz$  geeignet wie es in Abbildung 3.1 dargestellt ist.

Basierend auf der Erhaltung der Masse über die Zeit in x-, y- und z-Richtung im Volumen des Quaders kann folgender Ausdruck formuliert werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz + \left[ \rho u_x + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} dx \right] dydz - \rho u_x dydz + \left[ \rho u_y + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} dy \right] dxdz \\ - \rho u_y dxdz + \left[ \rho u_z + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} dz \right] dxdy - \rho u_z dxdy = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Durch Division aller Terme mit  $dxdydz$  und Subtraktion identischer Terme entsteht folgende verkürzte Gleichung:



**Abbildung 3.1** Quaderförmiges Volumen zur Beschreibung von Massenströmen mit kartesischen Koordinaten (aus „Einführung in die numerische Strömungsmechanik“ von Ghaib [25])

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0 \quad (3.6)$$

Hierbei ersetzt das  $x_i$  die Variablen in Koordinatenrichtungen  $x$ ,  $y$  und  $z$  des kartesischen Koordinatensystems und der Indize  $i$  unter dem  $u$  die Geschwindigkeiten in die jeweiligen Koordinatenrichtung ein.

### 3.2.1.2 Impulserhaltungsgleichung

Die Impulserhaltungsgleichung entspricht dem 2. newtonschen Gesetz, welches aussagt, dass ein Körper in die Richtung einer resultierenden Kraft beschleunigt wird [54]. Eine Möglichkeit ist die Herleitung analog zur Massenerhaltungsgleichung über die Kontrollvolumengleichung 3.2, jedoch wird an dieser Stelle anders als in der Kontinuitätsgleichung  $\phi = v$  gesetzt, wodurch folgende Gleichung in Integralschreibweise resultiert [22]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathbf{v} \, dV + \int_S \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = \sum \mathbf{f} \quad (3.7)$$

Die rechte Seite der Gleichung ist durch extensive Eigenschaften ausgedrückt, kann jedoch durch intensive Eigenschaften wie Oberflächen- und Körperkräfte (auch Volumenkräfte)

ersetzt werden. Beispiele für Oberflächenkräfte sind Reibungskräfte wie die Normal- und Schubspannungskraft oder auch die Druckkraft und zu Körperkräften gehören unter anderem die Schwerkraft oder elektromagnetische Kräfte. Diese Kräfte müssen durch die Dichte und Geschwindigkeit beschreibbar sein, da die Gleichungen ansonsten nicht lösbar sind. Hiervon ausgenommen sind mögliche Vereinfachungen, wie beispielsweise durch die Annahme einer newtonschen Flüssigkeit. Für nicht-newtonsche Flüssigkeiten wird das Lösen dieser Gleichungen wie bereits zu Beginn dieses Kapitels beschrieben deutlich komplexer. Da die Relevanz dieser Fluide für diese Arbeit von untergeordneter Bedeutung sind, wird für weitere Informationen auf Herwig [23] verwiesen. [22]

Durch den Spannungstensor  $T_\sigma$  können die auf der molekularen Ebene die Oberflächen durchdringenden Impulsflüsse, die durch Drücke und Spannungen Oberflächenkräfte erzeugen, beschrieben werden. Die Gleichung für die molekulare Rate eines Impulstransports wird wie folgt definiert[22]:

$$T_\sigma = - \left( p + \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \mathbf{v} \right) I + 2\mu D_f, \text{ mit } D_f = \frac{1}{2} \left[ \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \right] \quad (3.8)$$

Hierbei entspricht  $\mu$  der dynamischen Viskosität,  $I$  einem Einheitstensor,  $p$  dem statischen Druck und  $D_f$  einer Deformationsrate durch einen Tensor ausgedrückt. Durch Spannungstensor  $T_\sigma$  als Ersatz für die Oberflächenkräfte und der zusammenfassenden Variable  $b$  für die Körperkräfte, kann die Gleichung vollständig durch intensive Eigenschaften wie folgt ausgedrückt werden [22]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathbf{v} \, dV + \int_S \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_S T_\sigma \cdot \mathbf{n} \, dS + \int_V \rho \mathbf{b} \, dV \quad (3.9)$$

Die Impulserhaltungsgleichung kann weiterhin ebenfalls in Vektorform und frei von Koordinaten mit dem gaußschen Divergenztheorem wie folgt aufgestellt werden [22]:

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = \nabla \cdot T_\sigma + \rho \mathbf{b} \quad (3.10)$$

Analog mit kartesischen Indize  $i$ , kann ein koordinatenbehafteter Ausdruck für die Gleichungen 3.9 und 3.10 formuliert werden [25, 22]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho u_i \, dV + \int_S \rho u_i \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_S \mathbf{t}_i \cdot \mathbf{n} \, dS + \int_V \rho b_i \, dV \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u_i \mathbf{v}) = \nabla \cdot \mathbf{t}_i + \rho b_i \quad (3.12)$$

wobei  $t_i$  in kartesischen Koordinaten und in Indexnotation folgenden Ausdruck entspricht:

$$t_i = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)_{ij} - \left( p + \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)_{ii} \quad (3.13)$$

Um die Impulserhaltungsgleichungen in Form der Navier-Stokes-Gleichungen darzustellen, werden die an den Oberflächen angreifenden Normal- und Schubspannungen, die an einem Volumenelement wie in Abbildung 3.1 auf den senkrechten Flächen einer jeden Koordinatenachse zu finden sind, für den Spannungstensor  $T$  eingesetzt [53, 25]. Die resultierenden neun Spannungen sind in den Gleichungen 3.14 bis 3.16 dargestellt:

$$\sigma_{xx} = 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right), \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (3.14)$$

$$\sigma_{yy} = 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right), \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (3.15)$$

$$\sigma_{zz} = 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right), \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (3.16)$$

Für inkompressible Fluide kann die Summe  $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$  gleich Null gesetzt werden.

### 3.2.2 Allgemeine Transportgleichung

Im Rahmen von Mischprozessen kommt es zum Transport von gelösten Stoffen in Flüssigkeiten und Gasen, weshalb es einer mathematischen Beziehung zur Beschreibung dieser Prozesse bedarf. Zwei Begrifflichkeiten sind hierbei bedeutend, die **Konvektion** und **Diffusion**. Die Konvektion ist ein Transportmechanismus und der Grund weshalb ein Fluid in eine Strömungsbewegung versetzt wird, sei es in Form einer erzwungenen Konvektion, die durch Förderung mit Hilfe einer Pumpe geschieht oder eine natürliche Konvektion, bei der eine Flüssigkeit durch die Erdbeschleunigung und einer Höhendifferenz bedingt einen neuen Gleichgewichtszustand anstrebt, indem es einen Hügel hinunterfließt. Weiterhin existieren Fluidsysteme die sowohl erzwungenen als natürlichen Gegebenheiten ausgesetzt sind und dadurch zu einer gemischten Konvektion angeregt werden. Der Zweite Transportmechanismus, welcher im Bezug auf Mischprozessen eine erhebliche Rolle spielt, ist die Diffusion. Sie entsteht durch Konzentrationsgradienten in einem System und führt dazu, dass Moleküle in Richtung geringerer Konzentrationen bewegt werden [23, 55].

Anhand der allgemeinen Transportgleichung können die Konvektion, Diffusion und weitere Einflussgrößen definiert werden. Hergleitet wird sie durch die allgemeine Bilanzgleichung eines Kontrollvolumens [56] und durch Fick's Gesetz für Diffusion [57]. Auch die in den vorherigen Kapiteln beschriebenen Massen- und Impulsbilanzgleichungen können im Allgemeinen in dieser Form beschrieben werden. Sie lautet wie folgt:

$$\frac{\delta(\rho\Phi)}{\delta t} + \frac{\delta(\rho v_j \Phi)}{\delta x_j} = \frac{\delta}{\delta x_j} \rho \Gamma \frac{\delta \Phi}{\delta x_j} + S_\Phi \quad (3.17)$$

Dabei steht  $\Phi$  für die Konzentration eines gelösten Stoffes. Weiterhin entspricht nach Noll der erste Term auf der linken Seite der Gleichung einer lokalen zeitlichen Änderung und der zweite einer Konvektion. Zur rechten ist die Definition der Diffusion im ersten Term zusammen mit dem Diffusionskoeffizienten  $\Gamma$  vorzufinden, welcher mit dem Quellterm  $S_\Phi$  addiert wird. Zum Quellterm gehören alle äußeren Einflüsse, die weder auf die Diffusion noch auf die Konvektion zurückzuführen sind [56].

Die allgemeine Transportgleichung kann weiterhin wie folgt als Vektorschreibweise definiert werden:

$$\frac{\delta(\rho\Phi)}{\delta t} + \nabla \cdot (\rho v\Phi) = \nabla \cdot (\rho\Gamma\nabla\Phi) + S_\Phi \quad (3.18)$$

Für inkompressible Strömungen werden beide Gleichungen folgendermaßen vereinfacht:

$$\frac{\delta\Phi}{\delta t} + \frac{\delta(v_j\Phi)}{\delta x_j} = \Gamma \frac{\delta^2\Phi}{\delta x_j^2} + S_\Phi \quad (3.19)$$

$$\frac{\delta\Phi}{\delta t} + \nabla \cdot (v\Phi) = \nabla \cdot (\Gamma\nabla\Phi) + S_\Phi \quad (3.20)$$

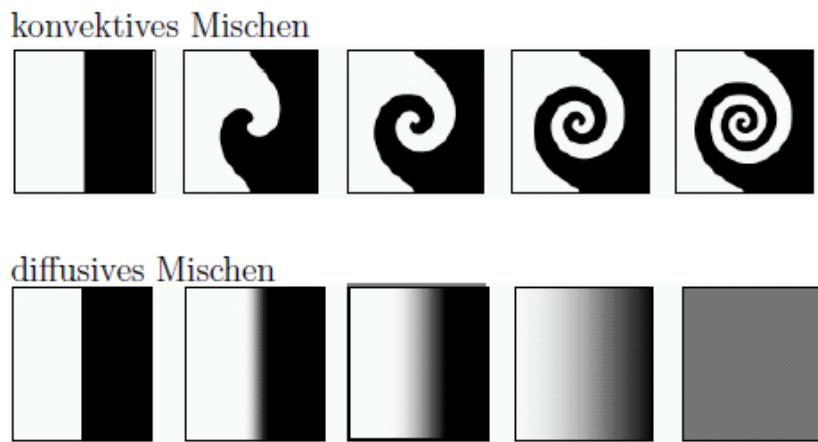
Wenn in einer Transportgleichung kein Einfluss auf die Navier-Stokes-Gleichungen durch die skalare Variable  $\Phi$  genommen wird, so erhält diese Variable entsprechend den Namen passiver Skalar [57].

### 3.2.3 Skalenabhängige Dynamik und Homogenisierung

Ein Mischprozess wird häufig als eine Vermengung von mindestens zwei Fluiden verstanden bis diese einen homogenen Zustand erreichen. Abhängig davon, ob die Moleküle miteinander eine Reaktion eingehen oder nicht, steigt der Grad der Unordnung, auch Entropie genannt, an. Bei kaum miteinander reagierenden Molekülen erreicht die Vermischung den maximalen Grad der Unordnung, wenn diese miteinander vollständig vermengt sind. Dann wird dies als eine Ideale Vermischung bezeichnet. Findet jedoch eine Reaktion zwischen Molekülen statt, so sinkt die Entropie dadurch [58].

Der Begriff Homogenisierung beschreibt im Rahmen von Mischprozessen, das Ausgleichen von Konzentrations- und Temperaturunterschieden, wobei letzteres für diese Arbeit weniger von Bedeutung ist. Um möglichst Effizient eine gewünschte Homogenisierung zu erreichen, ist es weiterhin notwendig zu verstehen, auf welchen Ebenen eine Vermischung stattfindet. Hierbei muss zwischen Makro- und Mikromischen unterschieden werden. Unter Makromischen wird das Grobvermischen oder exakter beschrieben, die Konvektion verstanden, welche durch das mechanische Rühren durch ein Rührwerkzeug herbeigeführt wird und die Diffusionswege verkürzt. Darauf folgt der Prozess des Mikromischens in welchem der Konzentrationsausgleich auf molekularer Ebene durch Diffusion geschieht. Meist findet der diffusive Prozess im Rahmen von Mischproblemen deutlich langsamer statt, weshalb

dieser gezielt durch entstehende Verwirbelungen im Makromischprozess zur Verkürzung des Diffusionsweges beschleunigt wird [6, 57]. Anhand der Abbildung 3.2 sind konvektive und diffusive Vorgänge vereinfacht dargestellt. Zlokarnik beleuchtet dahingehend zusätzlich den Begriff des Mesomischens, welcher das Phänomen des gegenseitigen Einschließens von Reaktionspartnern beschreibt [6]. Wenn im Rahmen dieser Arbeit von Optimierungen der Effizienz bei Vermischungsvorgängen in technischen Apparaten gesprochen wird, dann ist hiermit immer der Prozess des Makromischens gemeint auf den Einfluss genommen werden soll, da dieser die Dauer eines Mischprozesses maßgeblich bestimmt [57].



**Abbildung 3.2** Konvektives und diffusives Mischen im Vergleich (Aus „Direkte Simulation und Modellierung des Mikromischens“ von Schwertfirm [57])

### 3.2.4 Mischzeit

In Kapitel 2 wurden bereits einige experimentelle und numerische Methoden zur Bestimmung einer Mischzeit vorgestellt. Die Ermittlung dieser wird üblicherweise durch eine Normierung anhand der gemessenen Konzentrationen vorgenommen. Dabei sei  $c(t)$  die lokale Konzentration zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t$ ,  $c_0$  die Anfangskonzentration und  $c_\infty$  eine gesättigte Endkonzentration. Hierdurch kann der normierte Konzentrationsfaktor  $C_i$  wie folgt berechnet werden [16, 36]:

$$C_i = \frac{c(t) - c_0}{c_\infty - c_0} \quad (3.21)$$

Der daraus resultierende Wert wird über die Zeit beobachtet und dadurch eine Mischzeit  $\Theta$

ermittelt. Wenn eine festgelegte Konzentration im Rahmen eines Rührvorganges überschritten werden soll, wird dies im Indize der Variable notiert, sodass diese als  $\Theta_{95}$  für 95% oder  $\Theta_{99}$  für 99% geschrieben werden. Der Zeitwert  $\Theta_{95}$  beschreibt die Grenze dabei von zwei Seiten, sodass ein Wert von 0,95 überschritten oder ein Wert von 1,05 unterschritten werden muss. Hierbei ist es wichtig, dass die Konzentration über den Zeitpunkt des Erreichens einer 95%-Homogenisierung hinaus betrachtet wird, da aufgrund von fluktuiierenden Messwerten die Konzentrationsgrenzen wieder kurzzeitig verlassen werden können [16, 36].

### 3.3 Dimensionslose Kennzahlen

Um Lösungen für strömungsmechanische Probleme zu finden, sind mathematische Beziehungen notwendig, die in Form von Gleichungen die relevanten Einflussgrößen beschreiben. Ein Gleichungssystem kann nur dann ein dimensionsrichtiges Endergebnis liefern, wenn diese Einflussgrößen sinnvoll verknüpft sind. In einigen Fällen ist ebenfalls von Nutzen Einflussgrößen so zu kombinieren, dass alle Einheiten wegfallen, wodurch am Ende eine dimensionslose Kennzahl zustande kommt. Neben der Vereinfachung von Problemen oder der Möglichkeit Experimente skalieren zu können, hat dies den Vorteil, dass gewisse Phänomene mit nur einer Zahl charakterisiert werden können [23]. Im Jahr 1914 wurde eine analytische Methode von Buckingham entwickelt, um mittels des sogenannten Pi-Theorems relevante dimensionslose Kennzahlen für die Lösung eines Problems zu ermitteln, nur durch das Wissen über die vorhandenen Einflussgrößen. Ein einfaches Beispiel hierfür ist das in 2 bereits vorgestellte Größenverhältnis  $H/T$  oder eine abgewandelte Form der zuvor vorgestellten Mischzeit. Hierfür wird in der Literatur zum Thema Mischprozesse üblicherweise die dimensionslose Mischzeit als Produkt aus der Drehzahl  $N$  und der Mischzeit  $\Theta$  betrachtet. Sie beschreibt die notwendige Anzahl an Umdrehungen durch einen Rührer zum Erreichen eines gewissen Grades an Homogenisierung [16]. Nachfolgend werden einige weitere dieser Kennzahlen, die im Zusammenhang mit Mischprozessen stehen, vorgestellt. [23]

### 3.3.1 Reynoldszahl

Im vorherigen Abschnitt wurde bereits thematisiert, dass die dimensionslose Reynoldszahl dazu dienen kann bestimmte Phänomene mit nur einem einzigen Zahlenwert zu charakterisieren. Wenn klar definierbare und gerade Strömungslinien festgestellt werden können, wird eine Strömung als laminar bezeichnet, wohingegen ein turbulentes Strömungsfeld durch ein instabiles und willkürliches Verhalten charakterisiert wird [22]. Um nun zu bestimmen, ob ein laminares oder turbulentes Regime in einem Rührbehälter vorliegt, wird folgende Gleichung angewendet [16]:

$$Re = \frac{\rho ND}{\eta} \quad (3.22)$$

Für diese Gleichung ist  $\rho$  die Dichte der Flüssigkeit,  $N$  die Drehzahl,  $D$  den Durchmesser des Rührers und  $\eta$  die dynamische Viskosität der Flüssigkeit in einem Rührbehälter beschreiben.

Ein laminares und turbulentes Strömungsfeld kann nicht anhand eines einzigen klaren Wertes definiert werden, vielmehr wird der Übergang durch einen Zahlenbereich deklariert. In Mischbehältern wird, abhängig von dem genutzten Rührer und dessen Leistungskennzahl, aus einem laminaren Regime ein turbulentes Regime in etwa im Bereich zwischen  $RE = 50 - 5000$ . [16]

### 3.3.2 Schmidt-Zahl

Die Schmidt-Zahl ist eine weitere dimensionslose Kennzahl, welche in numerischen Mischprozessen relevant ist. Sie beschreibt das Verhältnis von kinematischer Viskosität  $\nu$  zum Diffusionskoeffizienten  $D$  (molekulare Diffusivität)(auch Verhältnis Impulstransport zu Stofftransport) [57, 59]:

$$Sc = \frac{\nu}{D} \quad (3.23)$$

Bei der Beschreibung von Mischproblemen mittels numerischen Methoden ist diese Kennzahl zusammen mit der Reynoldszahl eine der wenigen Möglichkeiten, um konvektive und diffusive Prozesse zu definieren. Abhängig von den betrachteten Fluiden kann die Schmidt-Zahl stark variieren. Während für thermische Diffusion an der Luft die Schmidt-Zahl in etwa 0,7

und im Wasser 7 entspricht, sind bei der Diffusion von gelösten Partikeln im Wasser wie beispielsweise Salz Werte von etwa 700 für die Schmidt-Zahl zu erwarten. Für nicht-mischbare Flüssigkeiten die in Form einer Emulsion vorliegen, wie es bei Öl und Wasser der Fall ist, kann die Schmidt-Zahl einen nahezu unendlichen Wert annehmen. Weiterhin nimmt der Einfluss durch die Schmidt-Zahl bei steigender Turbulenz bei höheren Reynolds-Zahlen ab, während diese bei geringen Reynolds-Zahlen einen großen Effekt auf die Durchmischung haben kann. [59, 60]

Die turbulente Schmidt-Zahl ist analog zur Schmidt-Zahl ein Verhältnis aus der turbulenten Viskosität, beziehungsweise der Wirbelviskosität, welche die Impulsübertragung durch turbulente Strömungen bedingt beschreibt, mit der Variable  $\nu_t$  und der turbulenten Diffusivität  $D_t$ :

$$Sc_t = \frac{\nu_t}{D_t} \quad (3.24)$$

Die Ermittlung eines einheitlichen Wertes für die turbulente Schmidt-Zahl ist nur schwer möglich, da dieser Wert entsprechend mehrerer wissenschaftlichen Untersuchungen eine Ortsabhängigkeit aufzuweisen scheint. Daher wird häufig bei der Auslegung numerischer Mischprozesse die turbulente Schmidt-Zahl mit einem konstanten Wert von 0,7 global festgelegt. [57, 61]

### 3.3.3 Leistungskennzahl

Bei der Betrachtung diverser Rotationskörper ist die Leistung ein wichtiger Faktor, der einbezogen werden kann, da die Mischzeit alleine keine Auskunft über die Effizienz eines Rührwerkzeuges gibt. Vielmehr sollte das Verhältnis einer Mischzeit zur Leistungserbringung in Betracht gezogen werden. Die dimensionslose Leistungskennzahl  $N_P$  (Auch als Newton-Zahl  $N_e$  bekannt) ist daher eine häufig einbezogene Größe für Studien, die sich mit der Effektivität von Rührsystemen auseinandersetzen und wird wie folgt berechnet [16]:

$$N_P = \frac{P}{\rho N^3 D^5} \quad (3.25)$$

Hierbei entspricht  $P$  der Leistung des Impellers,  $\rho$  der Dichte des flüssigen Mediums,  $N$  der Drehzahl und  $D$  dem Impellerdurchmesser. Die Leistung  $P$ , die von dem Impeller auf die

Flüssigkeit übertragen wird, ist das Produkt aus der Winkelgeschwindigkeit  $\omega=2\pi N$  und dem Torsionsmoment  $\tau$ :

$$P = 2\pi N \tau \quad (3.26)$$

Sowohl die dimensionslose Leistungskennzahl als auch die bereits in Kapitel 2 und 3.2 beschriebene Mischzeit sind zwei geeignete Variablen, welche für einen Vergleich von diversen Rührwerkzeugen oder im Rahmen einer Optimierung betrachtet werden können. Zlokarnik beschreibt zusätzlich für Optimierungsprozesse die Mischarbeit  $P\Theta$ , die als zu minimierende Größe in Betracht gezogen werden kann [6].

---

# **4 Design und Ablauf des Experiments**

Auf Basis der vorgestellten Einleitung, dem Stand der Technik und den strömungsmechanischen Grundlagen in den Kapiteln 1 bis 3.2 wird nachfolgend das Konzept, der fertige Prüfstand und die Durchführung des Experiments vorgestellt. Darauf aufbauend wird in 5 ein numerisches Modell mit der Software Star-CCM+ erstellt und verifiziert, welches die Gegebenheiten des Experiments widerspiegeln soll. Dies schafft die Grundlage für den Vergleich des Experiments mit dem numerischen Modell im Rahmen der Validierung, welches im Kapitel 6 behandelt wird.

## **4.1 Konzept des Versuchsszenarios**

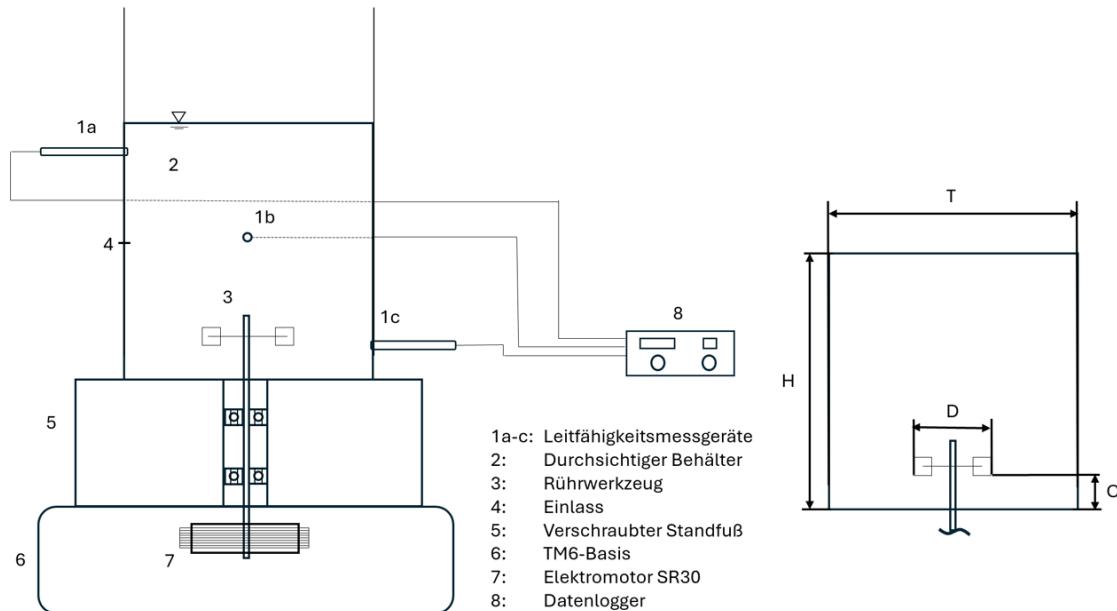
In Kapitel 2.3 wurden bereits einige geeignete Methoden zur experimentellen Validierung von numerischen Modellen vorgestellt. Aus dieser Auswahl an möglichen Methoden wurde eine quantitative und eine qualitative Methode ausgewählt. Die Auswahl der Methoden wird nachfolgend diskutiert und eine erste konzeptuelle Darstellung des Prüfstandes präsentiert.

Die Grundlage zur Erzeugung der Rotationsbewegung des hier beschriebenen Prüfstandes liefert der Elektromotor der TM6-Basis.

Zu Beginn muss es für eine qualitative Validierung eines numerischen Modells durch ein Experiment möglich sein, qualitative Bilder aufzunehmen, da eine Vielzahl dieser Methoden zum großen Teil auf visueller Wahrnehmung beruhen. Daher ist es sinnvoll den Prüfstand durchsichtig zu gestalten, sodass die Prozesse im inneren eines Mischbehälters verstanden werden können. Zur Aufnahme von Bildern wird weiterhin eine Kamera benötigt, welche bereits für andere Versuche dem Unternehmen Vorwerk vorlag. Diese ist dazu im Stande viele Bilder in einer hohen Frequenz aufzunehmen, was sie sowohl für Aufnahmen einer Trombe, als auch für das Farbeindringverfahren eignet.

Um quantitative Messungen vorzunehmen bedarf es Hilfsmittel in Form von Messtechnik. Bei der Auswahl des Verfahrens wurden daher zwei Aspekte berücksichtigt. Dies sind zum einen die notwendige Erfahrung zur Anwendung des Messverfahrens und zum anderen die finanziellen Möglichkeiten. Für das Experiment ist daher die Entscheidung gefallen eine Leitfähigkeitsmessung durchzuführen. Diese benötigt im Vergleich zu den anderen in Kapitel 2.3 vorgestellten Verfahren weniger Expertise, wie beispielsweise das PIV-Verfahren und ist darüber hinaus kostengünstiger.

Eine konzeptuelle Darstellung des Prüfstandes inklusive der Positionierung der Sensoren ist in Abbildung 4.1 abgebildet. Im folgenden Kapitel wird der anhand der genannten Punkte umgesetzte Prüfstand präsentiert.

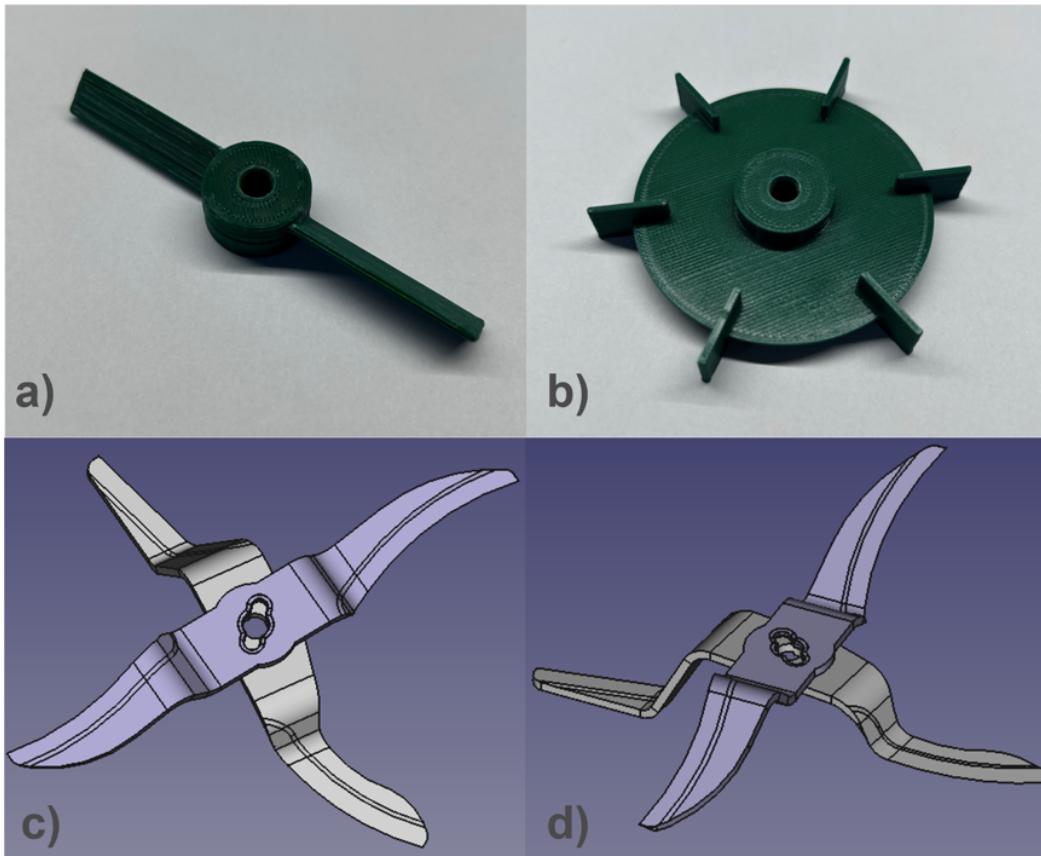


**Abbildung 4.1** Konzeptuelle Darstellung des Versuchsaufbaus mit Leitfähigkeitssensoren und Dimensionierungskenngrößen

## 4.2 Aufbau des Prüfstands

Im Rahmen der experimentellen Validierung wurden zwei Prüfstände gefertigt, welche in ihrer Größe und Form identisch sind. Dabei wurde einer zur reinen visuellen Betrachtung des Strömungsverhaltens gefertigt, um die Form der freien Oberfläche analysieren zu können und der zweite Prüfstand dient der Durchführung eines Durchmischungsversuchs zur Ermittlung einer Mischzeit mit Hilfe Leitfähigkeitssensoren. Die Prüfstände bestehen jeweils aus einem durchsichtigen Plexiglasrohr und 3D-gedruckten und mit Klarlack beschichteten PLA-Komponenten, welche mit CAD konstuiert und mit dem FDM-Verfahren gefertigt wurden. Eine in den Behälter hineinragende Welle besitzt ein Gewinde und wird genutzt, um Rührwerkzeuge jeglicher Art mit einer zentralen Bohrung und mit Muttern zu befestigen. Betrieben wird diese Welle durch den Elektromotor der TM6-Basis. Auf Basis der in Kapitel 2 vorgestellten Rührer wurde entschieden die Mischversuche und den Trombenabgleich mit Hilfe eines Schrägbrett- und Scheibenrührers durchzuführen. Dies geschieht unter dem

Vorwand, dass beide Rührer gut für die Anwendung in newtonschen Flüssigkeiten geeignet sind und unterschiedliche Strömungsfelder erzeugen. Daraus folgt, dass die Trombenform und die gemessenen Mischzeiten unterschiedlich ausfallen und gut voneinander differenziert werden können. Die genutzten Rührwerkzeuge werden mit CAD konstruiert und ebenfalls mittels FDM-3D-Druck gefertigt und beschichtet (Abbildung 4.2). Weiterhin ist die Nutzung des TM6-Mixmessers sowohl im Experiment und in der Simulation vorgesehen. Die Dimensionen der Rührer und des Behälters können der Tabelle 4.1 entnommen werden. Der Innendurchmesser des Plexiglasrohrs mit 144mm wurde an den konischen Verlauf des TM6-Topf angeglichen. Dieser besitzt einen geringsten Durchmesser von näherungsweise 120mm auf der Höhe der Heizscheibe und einen größten Durchmesser von etwa 170mm auf Höhe des Topfrandes.



**Abbildung 4.2** Oben: Mit dem FDM-Verfahren 3D-gedruckter Schrägblattrührer (a) und Scheibenrührer (b). Unten: CAD-Darstellung des TM6-Mixmessers (c)-(d)

Die Leitfähigkeitsmessung findet hierbei an drei Positionen statt, welche unterschiedlichen

Geometrische Parameter des Experiments (in mm)			
	Maximaler Durchmesser (T und D)	Füllhöhe (H)	Boden-abstand (C)
Rührbehälter	144	185	-
Rührer	Schrägblattrührer	90	-
	Scheibenrührer	75	-
	TM6-Mixmesser	133,372	4,9

**Tabelle 4.1** Geometrische Abmessungen des numerischen Modells

Abstand zum Boden aufweisen. Darüber hinaus sind die Leitfähigkeitssensoren an den Seiten des Behälters 90 Grad zueinander versetzt vorzufinden, wie es im Handbuch zum industriellen Mischen vorgeschlagen wird [16]. Somit ist ein Sensor auf Höhe der freien Oberfläche, einer inmitten der Flüssigkeit und ein weiterer unmittelbar auf Höhe des Rührwerkzeugs positioniert. Der Autor schlägt weiterhin vor die Messgeräte nicht im gleichen radialen Abstand zur Rotationsachse anzubringen, jedoch wurde sich aufgrund der geringen Größe des Behälters bewusst dagegen entschieden [16]. Stattdessen sind die Leitfähigkeitsensoren möglichst bündig an der Innenwand des Behälters angebracht, um die Strömung möglichst wenig zu beeinflussen (Abbildung 4.4 rechts). Für die lokalen Leitfähigkeitsmessungen wurden drei 4-Pol Leitfähigkeitssensoren des Unternehmens Hamilton verwendet (Abbildung 4.3). Der Einlass für die Salzlösung ist auf Höhe des obersten Sensors ebenfalls um 90 Grad versetzt angebracht. Der Massenstrom der hinein fließenden Salzlösung wird hierbei über eine Pumpe gesteuert. In Abbildung 4.4 ist links der reale Prüfstand und einer der befestigten Sensoren dargestellt.



**Abbildung 4.3** 4-Elektroden Leitfähigkeitssensoren der Firma Hamilton



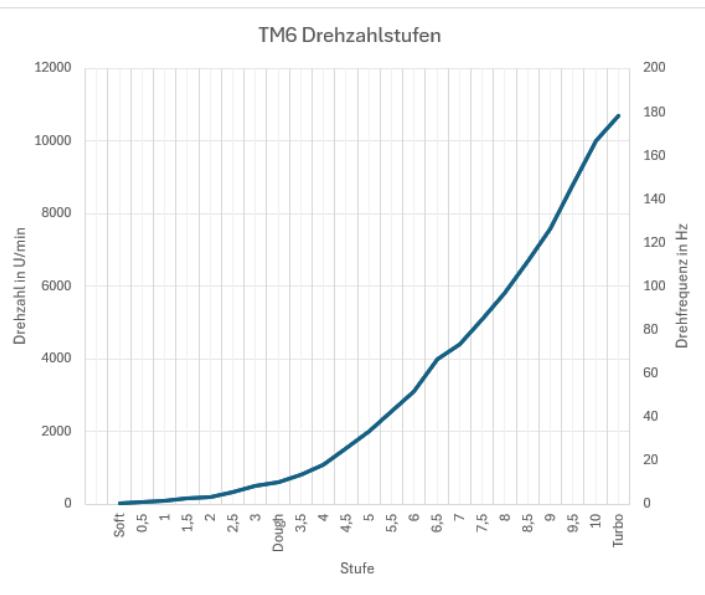
**Abbildung 4.4** Fertiggestellter Prüfstand mit Messsensoren und Einlass an den Seiten befestigt (Links). An der Halterung verschraubte Sensoren bündig zur Wand (Rechts).

## 4.3 Versuchsdurchführung

Im folgenden wird die Durchführung einer Messaufnahme beschrieben. Hierfür sei erwähnt, dass der Motor, ähnlich wie bei der gewöhnlichen Nutzung durch den Kunden, über ein Display gesteuert wird. Hierbei sind verschiedene Stufen einstellbar, womit an dem Prüfstand nur bestimmte Drehzahlen eingestellt werden können. Die möglichen Stufen mit den dazugehörigen Drehzahlen sind in Tabelle 4.2 aufgeschlüsselt.

Auf Basis der vorgestellten Mischversuche in Kapitel 2 aus passender Literatur wurden Rotationsgeschwindigkeiten des Rührwerkzeugs mit bis 350 RPM (Stufe 2.5) für Mischversuche und Analysen der Trombenform als geeignet empfunden. Höhere Drehzahlen durch die nachfolgenden Stufen sorgen für einen schnellen Mischversuch, wodurch ein Abgleich des Experiments mit einer Simulation erschwert wird. Darüber hinaus können zu hohe

Stufe	Drehzahl in U/min	Drehfrequenz in Hz
Soft	40	0,67
0,5	70	1,17
1	100	1,67
1,5	150	2,50
2	200	3,33
2,5	350	5,83
3	500	8,33
Dough	600	10,00
3,5	800	13,33
4	1100	18,33
4,5	1550	25,83
5	2000	33,33
5,5	2550	42,50
6	3100	51,67
6,5	4000	66,67
7	4400	73,33
7,5	5100	85,00
8	5800	96,67
8,5	6700	111,67
9	7600	126,67
9,5	8800	146,67
10	10000	166,67
Turbo	10700	178,33



**Tabelle 4.2** Resultierende Drehzahlen für die jeweiligen Stufen des TM6 (Darstellung angefertigt von Mitarbeitenden der Akustikabteilung bei Vorwerk)

Geschwindigkeiten zusätzlich eine Trombenbegasung herbeiführen, wodurch die Komplexität der Strömungen drastisch zunimmt. Weiterhin wurde zusätzlich entschieden geringere Rotationsgeschwindigkeiten von 150 RPM (Stufe 1,5) zu untersuchen, um zu prüfen, ob eine physikalisch korrekte Erhöhung der Mischzeit mit dem selben Rührer einhergeht. Eine noch niedrigere Rotationsgeschwindigkeit wäre möglich, aber würde nach Abschätzung die Mischzeit signifikant in die Länge ziehen, wodurch zu lange numerische Berechnungen notwendig wären. Basierend auf der vorgestellten Formel für die Reynoldszahl in Rührerströmungen ist mit hochgradig turbulente Verhalten für jeden Mischversuch zu rechnen, da für jeden Rührer  $RE > 5000$  gilt und somit  $Re_{krit}$  überschritten ist.

Das maximale Wasservolumen eines bis zum Rand gefüllten TM6-Topfes beträgt in etwa 3 Liter, welche für alle zukünftigen Versuche festgelegt wurde, um den Topf in einer vereinfachten Form wiederzugeben. Dieses Füllvolumen wurde nach einer Testreihe als geeignet befunden, da eine klar definierbare Trombe bei den gegebenen Drehzahlen erzeugt wird und weiterhin eine Verlängerung der Dauer eines Mischversuchs gegenüber niedrigeren Volumina gewährleistet wird. Da aufgrund der Größe des Behälters mit einer vergleichsweise kurzen Mischzeit gerechnet wird, ist eine Verlängerung dieser wünschenswert. Ansonsten hätten kleine Fehler bereits einen großen Einfluss auf die Ergebnisse. Ein Beispiel hierfür ist ein vier Sekunden langer Mischversuch bei dem ein Fehler von  $\pm 1$  s bereits  $\pm 25\%$

Abweichung bedeutet. Die resultierende Füllhöhe beträgt 0,185 m, wodurch ein Verhältnis von  $H \approx \frac{5}{4}T$  zustande kommt. Damit ist die Füllhöhe ein wenig über der in Kapitel 2 erwähnten idealen Füllhöhe  $H=T$ , was mit einer einhergehenden längeren Mischzeit toleriert wurde. Für alle Messungen wurde demineralisiertes Wasser mit einem geringen Leitfähigkeitswert (Ca. 0 bis 10  $\mu\text{S}/\text{cm}$ ) als Ausgangsmedium verwendet. Für die Erhöhung des Leitfähigkeitswerts wird eine 10 ml NaCl-Lösung mit einer Konzentration von 1 Mol/Liter dem System für 5 Sekunden über eine kleine Pumpe zugeführt. Die Pumpe wird über eine Stromversorgungsquelle mit 5V betrieben, wodurch sie, entsprechend einiger Vorversuche, einen konstanten Massenstrom von 2g/s liefert. Für alle Versuche wird für fünf Sekunden die NaCl-Lösung durch einen bereits ausgefüllten Schlauch in den Behälter transportiert. Sowohl die Betreibung der Leitfähigkeitssensoren, als auch die Signalverarbeitung einschließlich der Berechnung der resultierenden Leitfähigkeitswerte wurde mit Hilfe einer Schaltung selbstständig vorgenommen. Hierfür wird der eingespeiste Strom zum Betreiben der Leitfähigkeitssensoren von einer Stromversorgungsquelle geliefert, welche ebenfalls über einen weiteren Kanal die Pumpe betreibt. Mit Hilfe eines Funktionsgenerators und H-Brücken wird dieser Gleichstrom zu einem rechteckförmigen Wechselstrom umgewandelt, um elektrochemische Effekte und Polarisation zu verhindern. Über einen Datenlogger werden die Messwerte in Form von Spannungen an den Sensoren und an bekannten Shunt-Widerständen in einer CSV-Datei generiert. Hieraus wird zum Schluss der Leitfähigkeitsmesswert in  $\frac{\mu\text{S}}{\text{cm}}$  als Kehrwert des Widerstands mit Hilfe eines Python-Codes ermittelt. Weiterhin wird über einen weiteren Kanal an der Stromversorgungsquelle die Pumpe betrieben und am Datenlogger ein Signal empfangen, welches das Ein- und Ausschalten registriert. Die Signalverarbeitung ist im Anhang A (Abbildung von einem Mitarbeitenden des Unternehmens Vorwerk erstellt) schematisch dargestellt und wird nachfolgend nicht weiter behandelt.

Die Verarbeitung und Präsentation der aufgenommenen Messwerte mit den Leitfähigkeitsensoren für das in diesem Kapitel beschriebene Experiment werden in Kapitel 6 gemeinsam mit den numerischen Ergebnissen vorgestellt.

---

# **5 Numerisches Simulationsmodell**

Nachdem im letzten Kapitel der Aufbau des Prüfstands und der Ablauf des Experiments beschrieben wurde, soll nun der Aufbau des CFD-Modells näher erläutert werden. Hierbei sollen die wesentlichen relevanten Modelle miteinander verglichen und beurteilt werden, um eine Entscheidung über die geeigneten Modelle zu treffen. Anschließend werden physikalische Größen im Rahmen der Verifizierung des Modells mittels mathematischer Beziehungen und einer Netzkonvergenzstudie beurteilt. Weiterhin ist zu erwähnen, dass die hier vorgestellten numerischen Modelle mit Standrechnern unter Nutzung von bis zu 56 Prozessorkernen berechnet wurden. Zu einem späteren Zeitpunkt war der Zugriff auf Rechencluster von Amazon Web Services möglich, um die Rechenleistung mit bis zu 192 Prozessorkernen zu erhöhen.

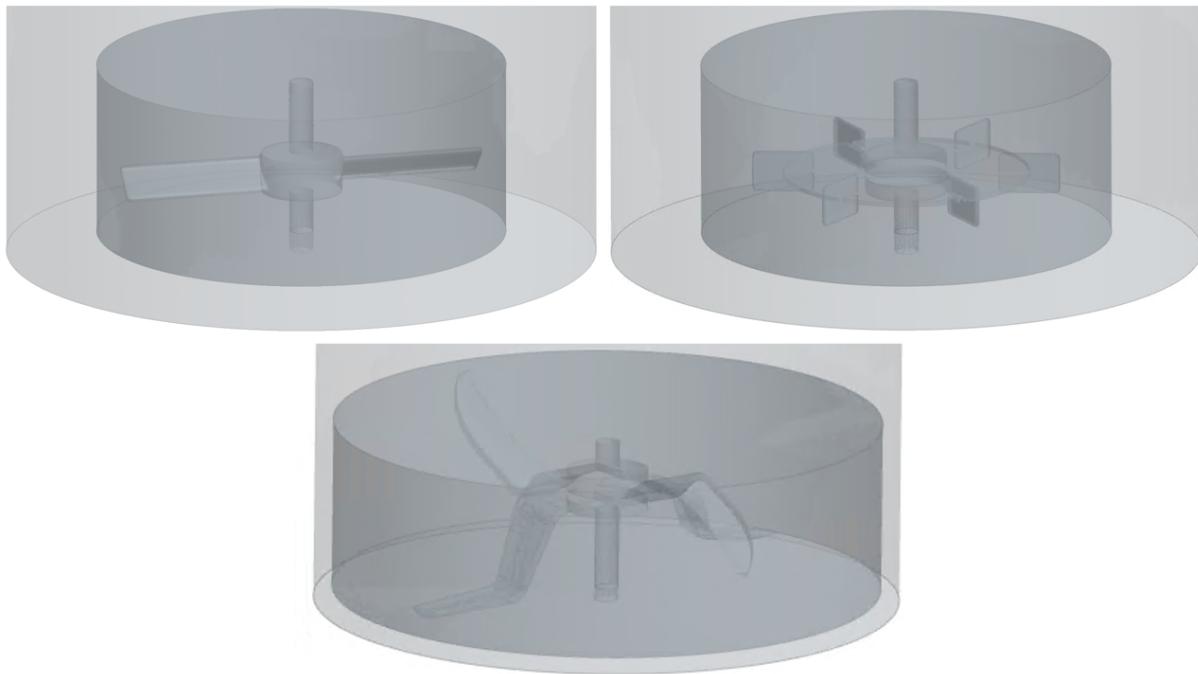
## **5.1 Modellaufbau und -implementierung für die Rührprozesssimulation**

Ziel dieses Kapitels ist es den Aufbau des an das Experiment angeglichenen numerischen Modells detailliert zu beschreiben. Hierbei wurde, unter Berücksichtigung der in Kapitel 2.2 vorgestellten Methoden, eine gezielte Modellierung des experimentellen Mischprozesses vorgenommen. Im Anschluss an die Modellbeschreibung erfolgt eine Verifizierung des Modells durch Untersuchung von physikalischen Größen und einer Netzkonvergenzstudie.

### **5.1.1 Rigid Body Motion**

Für eine möglichst exakte Abbildung der erzeugten Rotationsbewegung wird der RBM Ansatz gewählt, welcher es weiterhin ermöglicht instationäre Charakteristiken wiederzugeben. Dabei handelt es sich um eine Strömungsfeld, welches bei Betrachtung eines festen Bereichs seine Strömungsgrößen zeitabhängig verändert, ähnlich wie es bei einer zunächst ruhenden Flüssigkeit in einem Mischbehälter der Fall ist, bevor die Rotationsbewegung durch den Motor initiiert wird. Die Flüssigkeit muss somit erst einmal beschleunigt werden, woraufhin diese bei gegebener Zeit einen (quasi-)stationären, also einen zeitunabhängigen, Zustand erreichen kann. Der Übergang von instationär zu stationär und umgekehrt wird als transient bezeichnet [23]. Durch den Rigid Body Motion Ansatz wird somit ermöglicht das transiente Strömungsfeld zu untersuchen und zu beurteilen wie lange es dauert bis die

Strömung ein stationäres Verhalten aufweist. Die daraus folgende erhöhte Rechenzeit wurde hierbei ebenfalls berücksichtigt und akzeptiert.



**Abbildung 5.1** Schrägblattrührer, Scheibenrührer und TM6-Mixmesser umgeben von rotierenden Volumen für den Rigid Body Motion Ansatz

RBM - Volumen				
	Durchmesser (mm)	Höhe (mm)	Bodenabstand (mm)	Volumen (mm <sup>3</sup> )
Schrägblattrührer	100	42	5	329867,23
Scheibenrührer	100	42	5	329867,24
TM6-Mixmesser	135	42	3	601183,02

**Tabelle 5.1** Größenmaße des RBM-Volumens für Schrägblatt-, Scheiben- und TM6-Mixmesser

Für das TM6-Rührwerkzeug wurde aufgrund des größeren Durchmessers und Höhe ein größeres Volumen definiert (Abbildung 5.1). Der Bodenabstand wurde dabei analog dem eingebauten Zustand in der TM6-Geometrie angepasst. Hierbei ist das umschließende Volumen nah an den angrenzenden Behälterrundbedingungen positioniert. Um weiterhin zu prüfen, ob die Haftbedingungen physikalisch korrekt dargestellt werden, ist eine Untersuchung des Geschwindigkeitsprofil notwendig. Daher wird in Kapitel 5.1.6 das Grenzschichtverhalten

an dem Behälterwänden detaillierter behandelt. Die Maße der Volumina können der Tabelle 5.1 entnommen werden.

## 5.1.2 SST $k-\omega$ Modell

In ihrer Arbeit merken Larsson und Lindenbaum [42] an, dass die Wahl des Turbulenzmodells einen beachtlichen Einfluss auf das Geschwindigkeitsfeld und somit auch auf die Leistung und die Mischzeit ausüben kann. Weiterhin führen Sie auf Basis des Geschwindigkeitsfeldes einen Vergleich mit dem Realizable  $k-\epsilon$ , SST  $k-\omega$ , RSM und einem zeitgemittelten DES Turbulenzmodell durch und leiten daraus ab, dass RSM die genauesten Ergebnisse liefert von den genannten RANS Modellen. Darüber hinaus weicht deren Aussage nach das  $k$ -Epsilon Modell am stärksten ab und wird daher ausgeschlossen. Sowohl RSM und SST  $k-\omega$  werden zum Schluss ausgewählt und liefern akzeptable Ergebnisse, jedoch soll nur durch die Anwendung von RSM die Trombe beziehungsweise das Geschwindigkeitsfeld des Strudels korrekt aufgelöst haben, was jedoch darauf zurückgeführt wird, dass in dieser Arbeit der Rührer exzentrisch positioniert ist. Davon abweichende Anwendungsfälle mit einem mittig positionierten Rührer bewiesen demnach das Geschwindigkeitsfeld korrekt aufzulösen. [42]

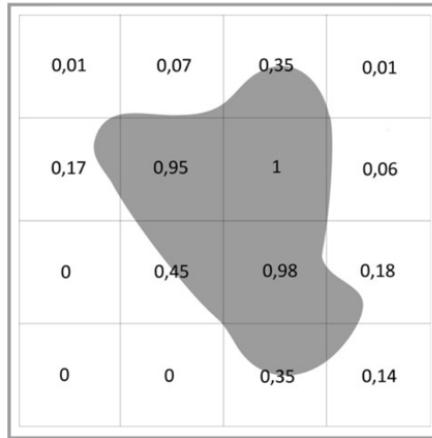
Tamburini et al. haben ebenfalls einen Vergleich in einem einphasigen, ähnlich großen Wasserbehälter ohne Wellenbrecher und geringen Reynoldszahlen ( $Re = 600-33000$ ) für die Turbulenzmodelle  $k-\epsilon$ , SST  $k-\omega$  und SSG durchgeführt. Sie kamen zum Entschluss, dass das SST  $k-\omega$ -Modell am geeignetsten für die Simulation eines Mischbehälters bei geringen Reynoldszahlen ist. [62]

Auf Basis der eben beschriebenen Erfahrungen aus anderen Arbeiten und dem Grund, dass sowohl DES als auch RSM deutlich rechenintensiver sind, wird das SST  $k-\omega$ -Modell für die Turbulenzbeschreibung im Rahmen dieser Arbeit verwendet.

## 5.1.3 Volume of Fluid

Unter den in Kapitel 2 vorgestellten Modellierungsmethoden von Mehrphasen wurde die Volume-of-Fluid-Methode (Kurz: VOF-Methode) ausgewählt. Für die Beschreibung von nicht mischbaren Fluiden wie Luft und Wasser ist die VOF-Methode eine der am häufigsten angewendeten Methoden zur Beschreibung von Mehrphasen-Strömungen. Weiterhin ist diese Methode gut geeignet, um freie Oberflächen detailliert aufzulösen und somit für eine klare Trombenstruktur sorgt. Das Volumen der Zellen in einem Gitternetz wird hierbei Zwei oder

mehreren Phasen zugeteilt. Für den Fall, dass nur Wasser und Luft vorhanden ist, entspricht der Wert 0 einer vorher definierten primären und 1 der sekundären Phase. Alle Werte die zwischen 0 und 1 fallen entsprechen einem Luft-Wasser-Gemisch (siehe Abbildung 5.2)[63]. Im Fall der Simulation für den Mischbehälter soll hierdurch eine klare freie Wasseroberfläche, bei der Betrachtung eines vertikalen Schnitts, zu erkennen sein, welche je nach Rührwerkzeug und Rotationsgeschwindigkeit unterschiedliche Trombenformen ausbildet.



**Abbildung 5.2** Darstellung der Volumenanteile nach der Volume of Fluid Methode (Abbildung aus [63])

Die Volumenanteile für die jeweiligen Phasen  $\alpha_{Wasser}$  und  $\alpha_{Luft}$  innerhalb einer Zelle mit dem Volumen  $V$  und dem Wasservolumen  $V_{Wasser}$  wird mit folgenden Ausdruck beschrieben [64, 65]:

$$\alpha_{Wasser} = \frac{V_{Wasser}}{V}, \quad \alpha_{Luft} = 1 - \alpha_{Wasser} \quad (5.1)$$

Ausgehend von den jeweiligen Volumenanteilen  $\alpha_i$ , den dazugehörigen Dichten  $\rho_i$  und Viskositäten  $\mu_i$  für bestimmte Volumengemische wird eine Gesamtdichte/Gesamtviskosität wie folgt ermittelt [65]:

$$\rho = \sum_i \rho_i \alpha_i, \quad \mu = \sum_i \mu_i \alpha_i \quad (5.2)$$

Darauf aufbauend können gemeinsam mit den dazu vorgestellten Gleichungen in Kapitel 3.2 der Erhalt von Masse und Impulse in mehrphasigen Fluidsystemen in modifizierter

Form abgeleitet werden. Der Massentransport einer Phase  $i$  wird durch eine angepasste Massenerhaltungsgleichung für Volumenanteile wie folgt beschrieben [65]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \alpha_i dV + \oint_S \alpha_i \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \left( S_{\alpha_i} - \frac{\alpha_i D_{\rho i}}{\rho_i} \right) dV - \int_V \frac{1}{\rho_i} \nabla \cdot (\alpha_i \rho_i \mathbf{v}_{d,i}) dV \quad (5.3)$$

Hierbei entspricht  $S_{\alpha_i}$  einem benutzerdefinierten Quellterm einer Phase  $i$ , das Verhältnis  $\frac{D_{\rho i}}{Dt}$  einer materialbezogenen Dichte einer Phase  $\rho_i$  und  $v_{d,i}$  der Diffusionsgeschwindigkeit bedingt durch Gleiten an den Phasengrenzen. Die gesamte Massenerhaltung eines mehrphasigen Fluidsystems entspricht der in Kapitel 3.2 vorgestellten Gleichung 3.3, welche an dieser Stelle statt 0, dem Volumenintegral des folgenden Quellterms gleich gesetzt wird [65]:

$$S = \sum_i S_{\alpha_i} \cdot \rho_i \quad (5.4)$$

Demnach ist die Massenbilanz nun mit allen benutzerdefinierten und phasenabhängigen Quelltermen und ihren Dichten verbunden.

Zuletzt wird die Dynamik eines Systems mit mehr als einer Phase durch die folgende Impulserhaltungsgleichung (hier mit dyadischen Produkt dargestellt) definiert [65]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_V \rho \mathbf{v} dV \right) + \oint_S \rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} &= - \oint_S p \mathbf{I} \cdot d\mathbf{a} + \oint_S \mathbf{T} \cdot d\mathbf{a} + \int_V \rho \mathbf{g} dV \\ &+ \int_V \mathbf{b} dV - \sum_i \int_S \alpha_i \rho_i \mathbf{v}_{d,i} \otimes \mathbf{v}_{d,i} \cdot d\mathbf{a} \end{aligned} \quad (5.5)$$

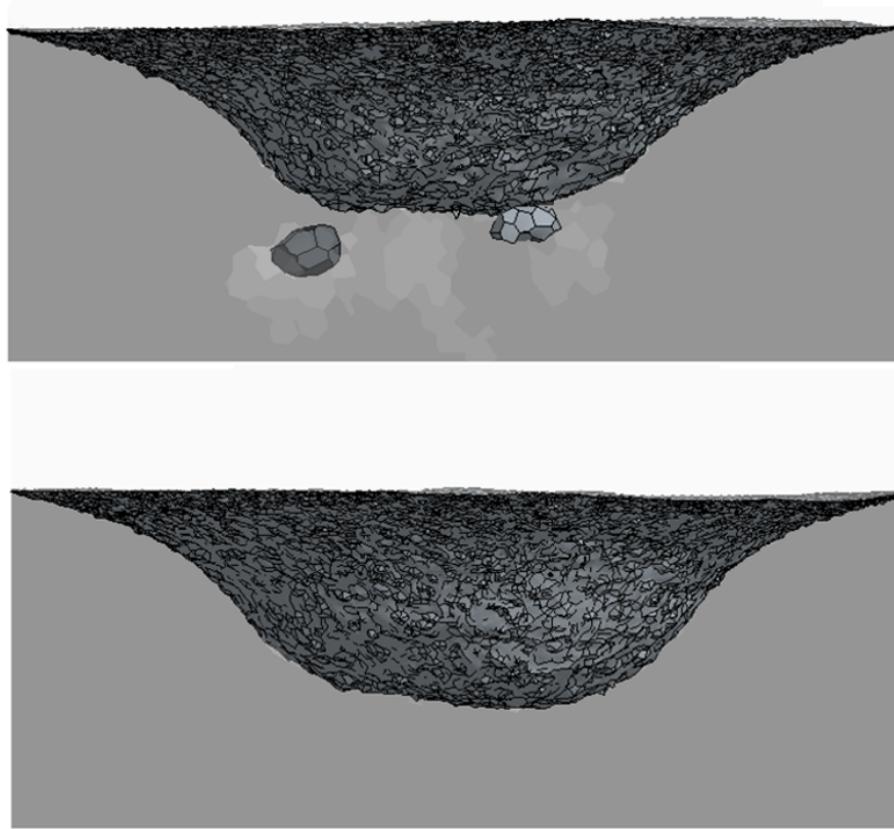
In dieser Darstellung ist im linken Teil der Gleichung das Kontrollvolumen definiert welches den bereits bekannten Größen für Druck  $p$ , Spannungen  $\mathbf{T}$ , Körperkräften  $\mathbf{b}$  und Gravitation  $\mathbf{g}$  gleichgesetzt ist. Weiterhin ist zusätzlich ein Term zur Berücksichtigung der Diffusionsgeschwindigkeit  $\mathbf{v}_{d,i}$  vorhanden.

Zur Stabilisierung des VOF-Modells an den Phasengrenzen wird eine Oberflächenkraft wie folgt auf die freie Oberfläche aufgebracht [66]:

$$f_\sigma = f_{\sigma,n} + f_{\sigma,t}, \text{ mit } f_{\sigma,n} = \sigma \kappa \mathbf{n}, \quad f_{\sigma,t} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} t \quad (5.6)$$

Hierbei ist die resultierende Kraft  $f_\sigma$  in ihre Komponenten in Normalenrichtung  $f_{\sigma,n}$  und in tangentialer Richtung  $f_{\sigma,t}$  unterteilt. Die Kraft in Normalenrichtung entspricht dabei dem Produkt aus der Oberflächenspannungskoeffizienten  $\sigma$ , der gemittelten Krümmung  $\kappa$  und dem Einheitsvektor in normalenrichtung  $\mathbf{n}$ . Weiterhin wird die tangentiale Kraft  $f_{\sigma,t}$  durch die Spannungsänderung über der Zeit  $\frac{\partial \sigma}{\partial t}$  und dem tangentialen Einheitsvektor  $t$  beschrieben. Die Oberflächenspannung kann hierbei in Star-CCM+ festgelegt werden und wurde für dieses Modell mit dem voreingestellten Wert von 0,072 definiert.

Da es im vorgestellten Simulationsmodell in Kombination mit der VOF-Methode vereinzelt zur Bildung von numerischen Artefakten innerhalb der Flüssigkeit kommt, wird an der freien Oberfläche eine zusätzliche Gradientenglättung durchgeführt, welche die Artefakte nahezu unterbindet. Zur klaren Darstellung ist die freie Oberfläche als Isosurface-Ansicht präsentiert, die einen festgelegten Volumenanteil von Wasser (0,8) entspricht. (Abbildung 5.3).



**Abbildung 5.3** Freie Oberfläche als Isosurface-Ansicht ohne (oben) und mit (unten) Gradientenglättung

## 5.1.4 Passiver Skalar

Im numerischen Modell soll nachfolgend ein passiver Skalar analog zum Experiment definiert werden, indem dieser dem quasi-stationären System zugeführt wird. Bereits in Kapitel 3.2.2 wurde die Methode zur Ermittlung einer Mischzeit mittels passiven Skalars kurz vorgestellt. Der Transport des passiven Skalars wird analog zur allgemeinen Transportgleichung berechnet, die in Kapitel 3.2.2 in Gleichung 3.17 beschrieben wurde.

Für den passiven Skalar wird sowohl eine Schmidt-Zahl, als auch eine turbulente Schmidt-Zahl definiert, welche einigen Quellen entsprechend unterschiedlich angenommen wurde (Tabelle 5.2).

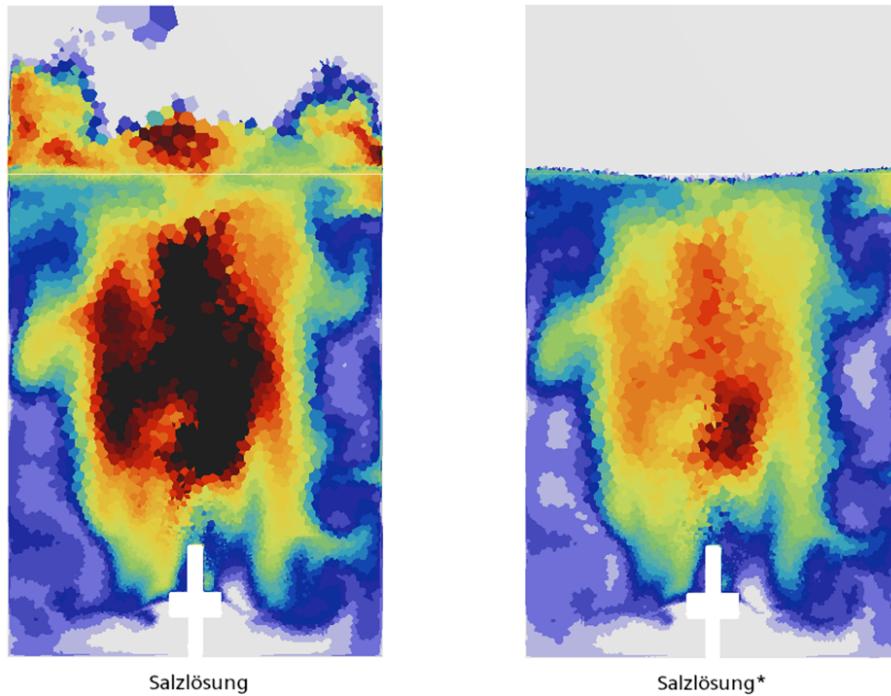
Literatur	Schmidt-Zahl
Larsson und Lindenbaum [42]	450
Bågmark [59]	672
Bonometti und Balachandar[44]	100
Mulloy [67]	1000

**Tabelle 5.2** Vergleich Paper Mixing Times

Larsson und Lindenbaum wählten ihren Wert basierend auf der Eigendiffusion von Wasser, während Bågmark erfolgreiche Arbeiten referenzierte. Bonometti und Balachandar nannten einen Wert von etwa 700 und Mulloy einen Wert von 1000-2100 für Salzlösungen. Für das hier beschriebene Modell wurde ein Wert von  $Sc = 700$  ausgewählt, da dieser zwischen den genannten Werten liegt. Für die Turbulente Schmidt-Zahl wird ein Wert von  $Sc_t = 0,7$  festgelegt, da dies als Standard gilt wie bereits in 3.3.2 beschrieben.

In Star-CCM+ wurde der passive Skalar gezielt innerhalb der Phase Wasser definiert, wodurch dieser die gleichen physikalischen Eigenschaften wie Wasser aufweist. Durch Kombination der Volume of Fluid Methode mit einem Passiven Skalar kann neben Wasser und Luft auch der passive Skalar mit einem Volumenanteil  $\alpha_{PS}$  berechnet werden. Wird der passive Skalar innerhalb einer Szene betrachtet so wirkt es als würde dieser ebenfalls an die Luft abgegeben werden (Abbildung 5.4 Links). Diese Darstellung resultiert daraus, dass das Verhältnis des Volumens vom passiven Skalars zum Wasser abgebildet wird. Um eine korrekte Darstellung des Volumenanteils vom passiven Skalars wie in Abbildung 5.4 rechts zu erhalten, wurde dieser mit dem Volumenanteil des Wassers  $\alpha_{Wasser}$  multipliziert, damit der passive Skalar als Verhältnis zum Gesamtzellenvolumen dargestellt wird (Siehe

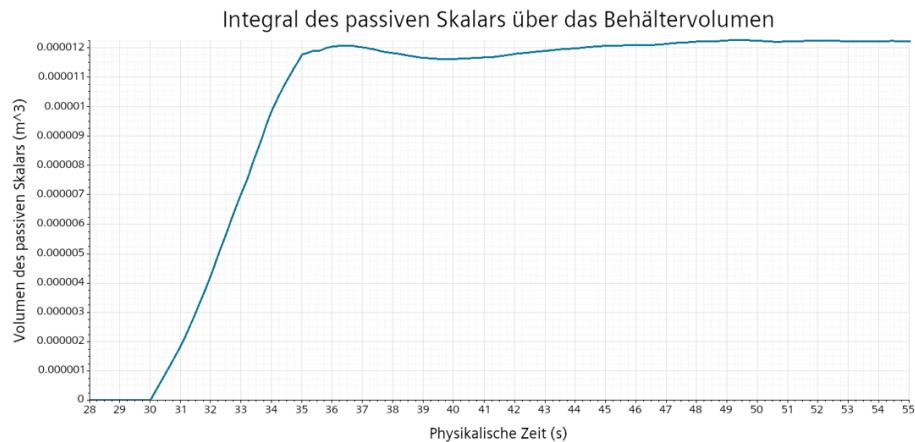
Gleichung 5.7).



**Abbildung 5.4** Vergleich der Volumenanteile

$$\alpha_{PS} = \frac{V_{PS}}{V} = \frac{V_{PS}}{V_{Wasser}} \cdot \alpha_{Wasser} \quad (5.7)$$

Durch ein Integral über das gesamte Behältervolumen wurde die Konzentration in Form des passiven Skalar Volumens über die Zeit betrachtet, um zu prüfen, ob dieser erhalten bleibt (Abbildung 5.5). Der passive Skalar gelangt über den Zeitraum von der 30. bis zur 35. Sekunde kontrolliert über den dafür definierten Einlass und sollte anschließend konstant im Behältervolumen vorhanden sein. Im dargestellten Graphen ist jedoch eine geringe Schwankung, der ein konvergentes Verhalten anschließt, zu vermerken. Dies kann auf das äußerst geringe Volumen des passiven Skalars zurückzuführen sein, wodurch es zu numerischer Diffusion kommen kann.



**Abbildung 5.5** Erhaltung des passiven Skalars im Behältervolumen über die Zeit aufgetragen

## 5.1.5 Diskretisierung

Die Genauigkeit einer numerischen Berechnung ist abhängig von der Qualität der angewendeten Diskretisierung in Raum und Zeit, so wie die Qualität von Messmitteln bestimmen wie genau die Ergebnisse eines Experiments ausfallen [22]. Eine feinere Diskretisierung geht jedoch meist mit einer Erhöhung der Rechenzeit einher, weshalb es wichtig ist die Balance zwischen Rechenzeit und Diskretisierung zu finden. Für die **räumliche Diskretisierung** wird in Star-CCM+ vorzugsweise ein automatisierter Vernetzer verwendet, welcher standardmäßig polyhydrdale Netze auf Basis der Finite-Volumen-Methode erzeugt. Diese bieten gegenüber tetrahedralen Netzen den Vorteil, dass sie genauer sind, eine geringere Anzahl an Zellen verwenden bei gleicher Auflösung, die genauereren hexahedralem Netze generieren und vorteilhaft angeordnet werden können [68]. Für die Anzahl der generierten Zellen sind zwischen 500.000 bis 1.200.000 gedacht abhängig von der gewählten Basisgröße der Zellen. Die Auswahl der genauen Anzahl der Zellen wird im Rahmen einer Netzkonvergenzuntersuchung in Kapitel 5.2 erörtert.

In der Nähe von Wänden wird grundlegend zwischen 3 verschiedenen Schichten unterschieden (Tabelle 5.3). In der viskosen Unterschicht unmittelbar an der Wand ist das Verhalten von Strömungen nahezu ausschließlich linear und laminar. In einem weiteren Bereich wird die Geschwindigkeit über eine logarithmische Gleichung beschrieben, weshalb dieser Bereich vorzugsweise als Log-Bereich betitelt wird. Zwischen der viskosen Unterschicht und dem Log-Bereich ist die Pufferschicht in der das lineare Verhalten in das logarithmische über geht. Diese Bereiche werden über den dimensionslosen Wandabstand üblicherweise mit der

Variable  $y^+$  (Ferziger et al.:  $y^+ = n^+$ ) wie folgt definiert [22]:

$$y^+ = \frac{\rho u_\tau y}{\mu}, \quad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_{Wand}}{\rho}} \quad (5.8)$$

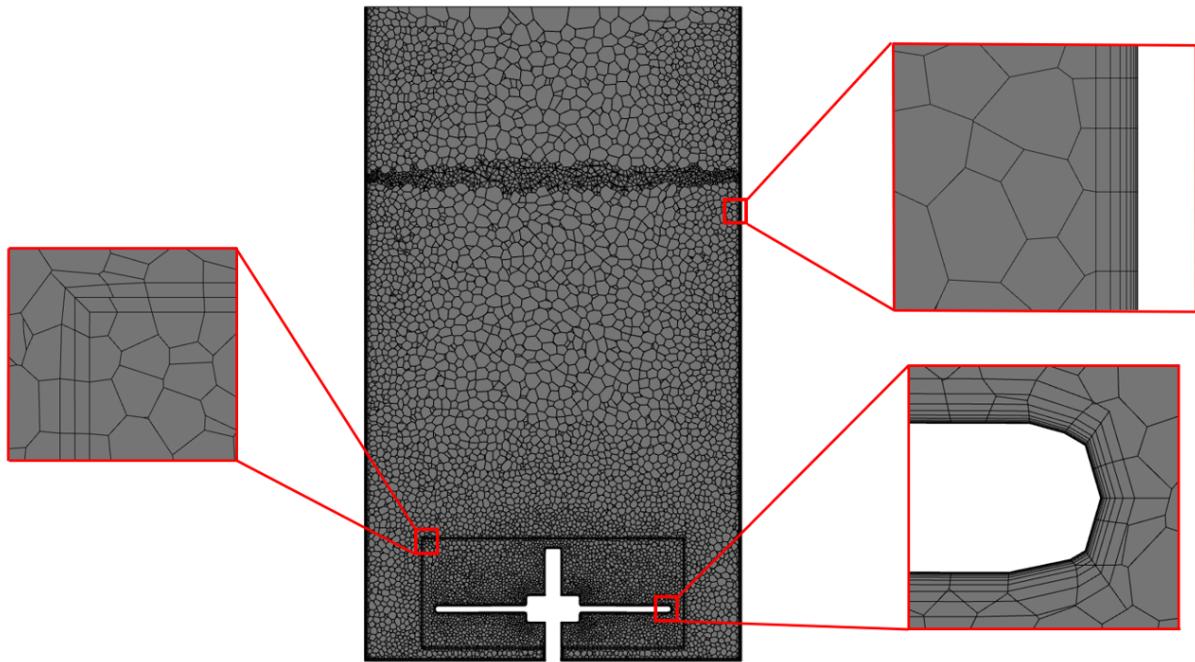
Hierbei entspricht  $y$  dem dimensionsbehafteten Wandabstand und  $u_\tau$  der Schubspannungs geschwindigkeit (auch Reibungsgeschwindigkeit) basierend auf der Wurzel aus der in tangentialrichtung wirkenden Schubspannung im Verhältnis zur Dichte. Die unterschiedlichen  $y^+$ -Grenzwerte sind in der Tabelle 5.3 vorzufinden. In Star-CCM+ wurde die Auflösung an der Wand über die Simulationsdauer beobachtet, damit im gesamten Behälter und an dem Rührwerkzeug der gemittelte dimensionslose Wandabstand  $y^+ < 1$  beträgt. Darüber hinaus ist eine voreingestellte Methode zur angepassten Behandlung von Wandeffekten namens „All- $y^+$ “ integriert, welche selbständig feine und grobe Vernetzungen an der Wand, sowie die Pufferschicht, erkennt und dementsprechend die Wandfunktionen anpasst.

Grenzschichten	Dimensionsloser Wandabstand
Viskose Unterschicht	$y^+ < 5$
Pufferschicht	$5 < y^+ < 30$
Log-Bereich	$30 < y^+$

**Tabelle 5.3** Grenzschichten in Abhängigkeit des dimensionslosen Wandabstands an Anlehnung an Mauri [69]

Um das Grenzschichtverhalten an Wänden möglichst realistisch wiederzugeben, ist eine besonders feine Auflösung des Netzes an den Wänden notwendig. Eine geeignete Methode ein feines und homogenes Netz an den Grenzflächen zu erzeugen ist die Nutzung von prismatischen Zellschichten (siehe Abbildung 5.6 [22]). Hierbei ist eine Vergrößerung der Zellschichten um das 1,5-fache in Normalenrichtung von der Wand ausgehend definiert worden, da es wichtig ist, dass die Zellen nebeneinander in etwa gleich groß sind beziehungsweise das Zellwachstum nur gering ist. Für die Wände wurden 8 prismatische Schichten gewählt und für den Rührer 10, da in diesen Bereichen mit höheren Geschwindigkeitsgradienten zu rechnen ist. Zusätzlich wurde auf Empfehlung von der STAR-CCM+ Dokumentation die Randbedingung zwischen Behälter und Rigid Body Motion Volumen ebenfalls beidseitig mit einer prismatischen Schicht versehen, um Zellen zu erhalten, die in Normalrichtung zueinander orientiert sind [70].

Weiterhin ist anhand der Abbildung 5.6 eine unterschiedliche Grundgröße der Zellen fest-



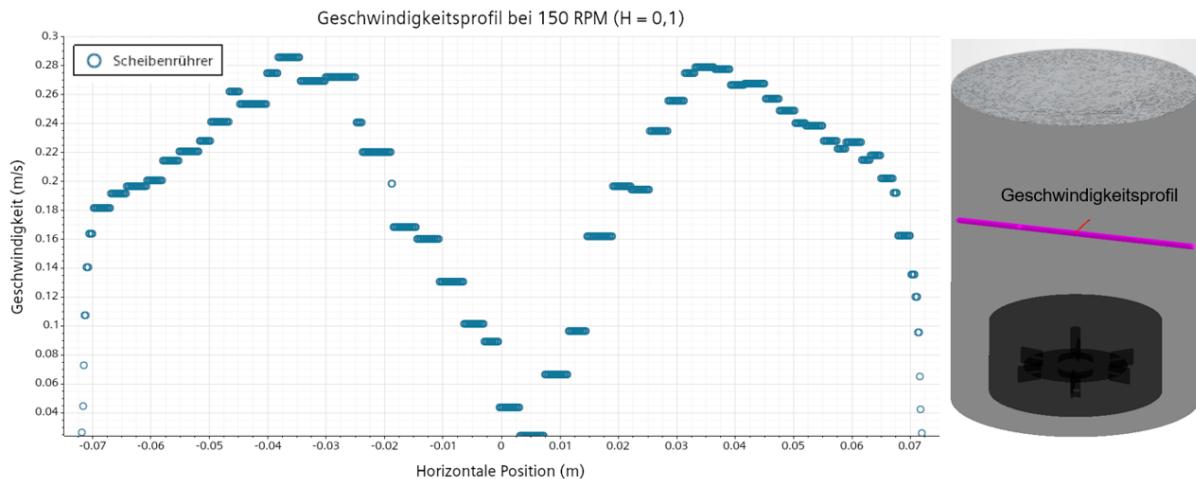
**Abbildung 5.6** Prismatische Zellschichten in der Nähe von Wand Randbedingungen

zustellen. Von den Behältergrenzen ausgehend wächst die Zellgröße an, wobei diese mittig und an der oberen Öffnung am größten ausfällt. Diese Bereiche besitzen einen geringeren Detailbedarf, da dort geringe Geschwindigkeitsgradienten zu erwarten sind. Darüber hinaus sind die Bereiche im Zentrum des Mischbehälters oberhalb und unterhalb der freien Oberfläche unerheblich für den Mischversuch und die Trombendarstellung solange die freie Oberfläche ausreichend diskretisiert ist.

In Abbildung 5.7 ist das Geschwindigkeitsprofils im inneren des Behälters beispielhaft für den Scheibenrührer über die horizontale Achse auf einer Höhe von 0,1m ausgehend vom Behälterboden aufgetragen. Es ist hierbei zu erkennen, dass die Geschwindigkeit mit ansteigendem Radius unmittelbar vor der Behälterwand signifikant sinkt, was auf eine physikalisch korrekte Umsetzung der Haftbedingungen hinweist.

Weiterhin wird eine automatisierte und einstufige Netzverfeinerung (Adaptive Mesh) an der freien Oberfläche zwischen Wasser und Luft vorgenommen, welche iterativ aktualisiert wird. Hierfür erkennt ein Algorithmus den Betrag der Gradienten der Volumenanteile durch folgende Gleichung [71]:

$$|(\nabla \alpha)_i| > \frac{(\nabla \alpha)_{max}}{r_i} \quad (5.9)$$



**Abbildung 5.7** Beispielhaftes Geschwindigkeitsprofil für einen Scheibenrührer

Dabei entspricht  $\nabla\alpha$  dem Gradienten des Volumenanteils und  $r_i$  einem Sensitivitätsfaktor, welcher nach belieben verändert werden kann und mit einem Wert von 5 voreingestellt ist. Der Algorithmus verfeinert weiterhin Zellen unter- und oberhalb der freien Oberfläche, um eine scharfe Darstellung zu gewährleisten. Das Identifizieren der zu verfeinernden Zellen für die nachfolgenden Zeitschritte geschieht meist entlang der Strömungsrichtung, kann jedoch in Einzelfällen entgegen der Strömungsrichtung als sinnvoll erachtet werden. Für die detaillierte Berechnung der folgenden Verfeinerungsschritte mit Hilfe des expliziten Euler Schemas wird hier auf den Star-CCM+ User Guide verwiesen [71].

Für die **zeitliche Diskretisierung** bestimmen vorzugsweise zwei Bedingungen den Betrag des Zeitschritts. Zum einen ist das die Rotationsbewegung durch den Rigid Body Motion Ansatz. Entsprechend der Empfehlung von Siemens [72] und einem anderen Werk zum Thema Simulation von Mischprozessen [42] soll der Zeitschritt höchstens einen Grad der Rotationsbewegung entsprechen. Demnach variiert der größtmögliche Zeitschritt abhängig von der gewählten Drehzahl  $N$  wenn folgende Bedingung erfüllt sein soll:

$$\Delta t_{Max} < \frac{1}{6N} \quad (5.10)$$

Die zweite Bedingung steuert den Zeitschritt direkt mit Hilfe von einer automatisierten Zeitschrittenanpassung (Adaptive Time-Step). Diese wird durch die CFL-Zahl (auch: Courantzahl) bedingt gesteuert und ist wie folgt definiert [25, 22]:

$$C = v \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1 \quad (5.11)$$

Für die im Rahmen dieser Arbeit erstellten numerischen Simulationen ist der Zeitschritt in dem Maße bedingt, dass eine gemittelte CFL-Zahl von 0.95 und eine maximale CFL-Zahl von 10 eingehalten werden soll. Grundlegend wäre somit mit dem maximalen Wert die CFL-Bedingung nicht erfüllt, jedoch kann durch die Methode des impliziten Mehrschrittverfahrens (Implicit Multi-Step), welche für VOF Mehrphasen Simulationen zur Verfügung steht, weiterhin eine korrekte Darstellung der freien Oberfläche geleistet werden [73]. Die Methode verspricht nahezu unveränderte bis identische Auflösung der freien Oberfläche, wenn Zeitschritt und Anzahl der Teilschritte im selben Verhältnis gesteigert werden. Frosina et al. beleuchten die Wirksamkeit dieser Methode mit einer Simulation für schwappendes Wasser in einem Tank und erhalten angemessene Ergebnisse [74]. Basierend auf diesen Erkenntnissen, wird für die hier vorgestellten Simulationen die maximale Teilschrittanzahl von 20 für das Mehrschrittverfahren ausgewählt.

### 5.1.6 Initialisierung und Randbedingungen

Nachdem im vorherigen Unterkapitel die zeitliche und räumliche Diskretisierung behandelt wurde, sollen nun nachfolgend die festgelegten Start- und Randbedingungen für das numerische Modell vorgestellt werden. Das Simulationsmodell wurde im Größenverhältnis analog zum Prüfstand angeglichen. Nur die Höhe des Füllstands musste im geringen Maße angepasst werden. Dieser wird hierbei durch eine selbstdefinierte Feldfunktion festgelegt (Field Function), indem die Volumenanteile von Luft und Wasser abhängig von einer Höhe zum Koordinatenursprung definiert werden. Eine Höhe von 185,05 mm ergab im Simulationsmodell eine Wassermasse von 3000 g mit einer Abweichung von  $\pm 1$  g. abhängig von der räumlichen Diskretisierung. Durch Einwirkung einer Gravitationskraft in Richtung des Topfbodens von 9,81 N wird versichert, dass das Wasser im Behälter verbleibt. Weiterhin wird dem physikalischen Verhalten von Wasser entsprechend eine Oberflächenspannung von 0,072 N/m auf die freie Oberfläche erzeugt, wodurch eine klare Trennung der beiden kontinuierlichen Phasen Wasser und Luft gewährleistet wird. Um eine höhere Stabilität zu gewährleisten wird die Berechnung der Oberflächenspannungen mit einem semi-impliziten Verfahren durchgeführt.

Sowohl die Stirnfläche am Boden als auch die Mantelfläche des Zylinders sind als Wand mit Haftbedingung (No-Slip Wall) definiert, wodurch typisches mit typischen grenzschichtverhal-

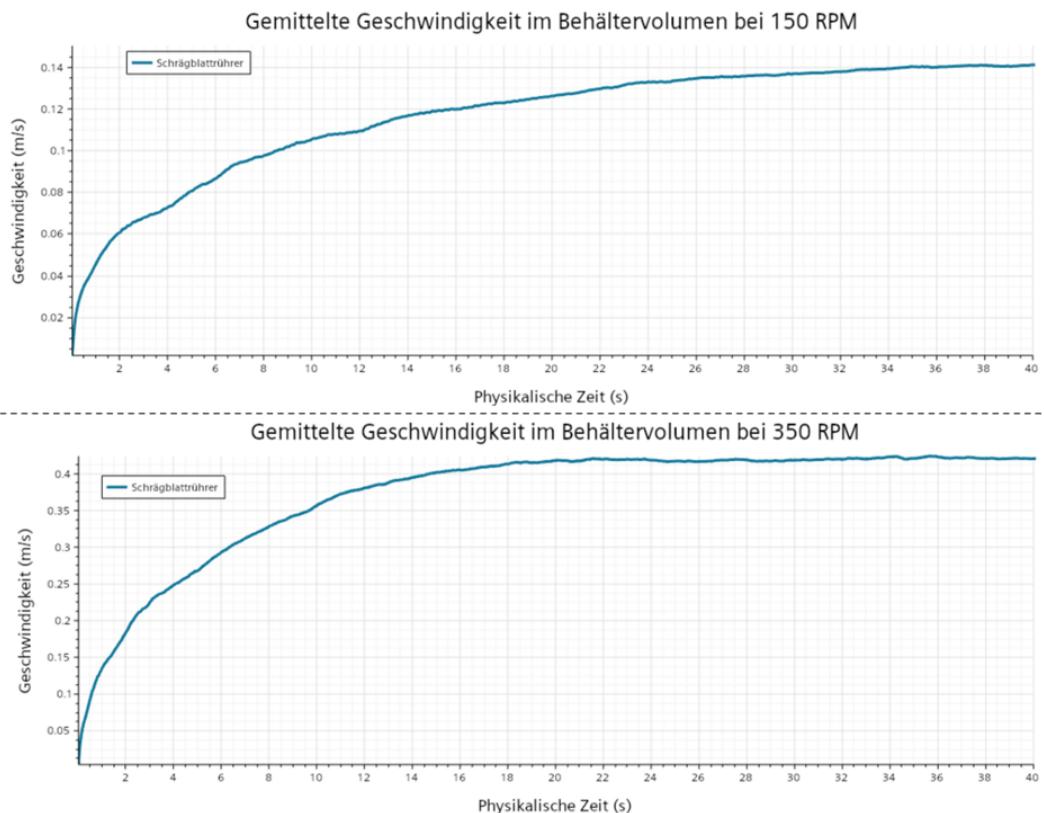
ten an den Wand zu rechnen ist. Hiervon ausgenommen ist die Runde Fläche für den Einlass an der Mantelfläche des Zylinders, welcher als Massenstromeinlass definiert ist, um an dieser Position, angepasst an das Experiment, den Einlass des passiven Skalars zu ermöglichen. Die obere Stirnfläche hingegen ist ein Druckauslass an dem ein atmosphärischer Druck definiert ist. Wie im Experiment kommen hier ein Schrägblatt- und ein Scheibenrührer zum Einsatz, welche ebenfalls als Wände mit Haftbedingung definiert sind.

Die Simulation wird bei ruhender Flüssigkeit initialisiert, wodurch eine gewisse Zeit zur Ausbildung eines stabilen Geschwindigkeitsfeldes notwendig ist. Anhand des Integrals der gemittelten Geschwindigkeit über das gesamte Behältervolumen wurde ein Zeitpunkt bestimmt an dem ein quasi-stationärer Zustand erreicht wird. Diese Zeitpunkte dienen dazu den Moment für die Initialisierung der Mischversuchs zu definieren. In Abbildung 5.8 sind die Graphen für Drehzahlen von 150 RPM (TM6 Stufe 1.5) und 350 RPM (TM6 Stufe 2.5) für den Schrägblattrührer dargestellt. Es ist zu erkennen, dass die Kurve für die höhere Drehzahl bereits früher ein konvergierendes Verhalten aufweist als bei 150 RPM. Die Bedingung trifft weiterhin ebenfalls für die anderen Rührer zu. Somit wurde anhand der geringeren Drehzahl die Annahme getroffen, dass ein quasi-stationärer Zustand bei etwa 30 Sekunden für beide Drehzahlen eintritt.

In Tabelle 5.4 sind die bereits erwähnten Methoden und Modelle zur numerischen Simulation zusammenfassend dargestellt.

<b>Transiente Simulation</b>	Implizit instationär (Unsteady RANS)
<b>Turbulenzmodell</b>	SST K- $\omega$
<b>Mehrphasenmodell</b>	Volume of Fluid (VOF)
<b>Wandschichtfunktion</b>	All $y^+$ ( $y^+ < 1$ )
<b>Zeitschritt</b>	Angepasst an Rotationsgeschwindigkeit: 1° Rotation pro Zeitschritt oder kleiner + CFL-Bedingung: Mittelwert = 0,95; max. Wert = 10
<b>Numerisches Lösungsschema</b>	Segregated Flow (SIMPLE)
<b>Randbedingungen</b>	Wandhaftung (No-Slip): Rührer, Mantelfläche und Boden des Rührbehälters Druck Auslass: Stirnfläche oberhalb der freien Oberfläche Massenstrom Einlass: Runde Fläche an der Mantelfläche (H=0,17mm)

**Tabelle 5.4** Zusammenfassende Darstellung der gewählten Simulationsmethoden und -modelle



**Abbildung 5.8** Gemittelte Geschwindigkeit als Integral des gesamten Behältervolumen aufgetragen über die Zeit zur Bestimmung eines quasi-stationären Zustands

## 5.1.7 Beschleunigungsmethode mit aggressiven Setup

Da transiente Simulationen von Mehrphasenströmungen in Kombination mit dem Rigid Body Motion Ansatz äußerst rechenintensiv sind, bleibt die Frage offen, ob die Simulationszeit effektiv und idealerweise ohne Einbußen im Hinblick auf die Genauigkeit verkürzt werden kann. Ein Faktor, der hierbei einen Einfluss auf die Geschwindigkeit der Konvergenz nehmen kann, ist die Unterrelaxation. Bei numerischen Berechnungen ist von Konvergenz die Rede, wenn die zu lösenden Gleichungen, die diskretisiert wurden, der genauen Lösung angenähert werden. Durch eine Unterrelaxation wird die aktuelle Lösung mit der vergangenen gemischt, anstatt die neue Lösung unmittelbar zu übernehmen, wodurch eine Dämpfung stattfindet. Hierfür muss vorerst verstanden werden, dass zwei Iterationsebenen in numerischen Berechnungen existieren. Die inneren Iterationen, welche die Lösung der linearen Gleichungssysteme aus der Diskretisierung der Strömungsgleichungen übernehmen und den äußeren, welche dazu benötigt werden Nichtlinearitäten zu behandeln und die Kopplung von Gleichungen

vorzunehmen. Es ist nicht immer zwingend erforderlich Gleichungen exakt aufzulösen, da es äußerst zeitintensiv wäre. Daher werden innere und äußere Iterationsschleifen verwendet, um eine Lösung sukzessiv bis zu einem festgelegten Grad an Genauigkeit anzunähern. Die Anzahl der inneren Iterationen kann in Star-CCM+ direkt festgelegt werden, während die äußeren Iterationen über das Relaxationsverfahren gesteuert werden. Wenn  $\phi$  als eine beispielhafte und zu lösende Variable angenommen wird, die über mehrere äußere Iterationen hinweg verändert wird, so kann durch den Term  $\alpha_\phi$  (Unterrelaxationsfaktor) eingestellt werden inwieweit der aktuelle Wert  $\phi^n$  einem vermischten neuen Wert  $\phi^{neu}$  mit einem alten Wert  $\phi^{n-1}$  entspricht [22]:

$$\phi^n = \phi^{n-1} + \alpha_\phi(\phi^{neu} - \phi^{n-1}) \quad (5.12)$$

Eine Unterrelaxation ist vorhanden, wenn die Bedingung  $0 < \alpha_\phi < 1$  erfüllt ist. Hierbei stabilisiert ein niedriger Wert für  $\alpha_\phi$  die Simulation bei gleichzeitiger Verzögerung oder sogar Unterbindung der Konvergenz.

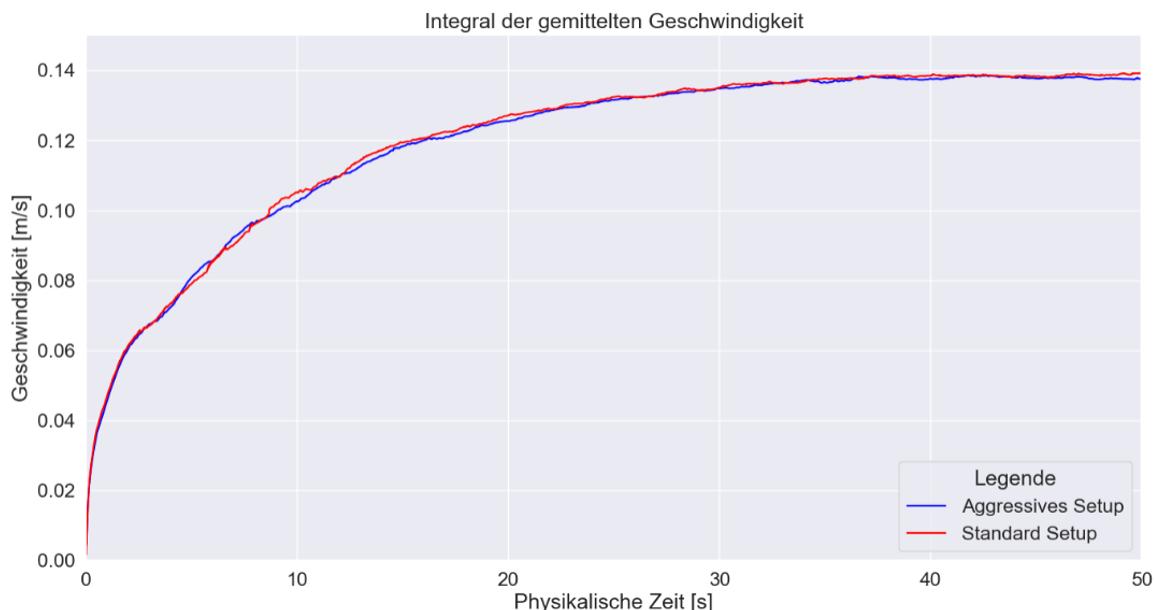
Im folgenden wird eine Methode zur Beschleunigung einer transienten Volume of Fluid Simulation vorgestellt durch Gegenüberstellung von zwei Simulationkonfigurationen und -ergebnissen mit unterschiedlichen Unterrelaxationsfaktoren und Konvergenztoleranzen. Diese Methode basiert auf einem Artikel aus dem Online-Wissensportal von „Siemens Support Center - Knowledge Base“ und ist lediglich Nutzern der Software zugänglich [75]. Daher werden einige daraus stammende Inhalte nachfolgend mit eigenen Worten wiedergegeben. Die verschiedenen Einstellungen für die jeweiligen Methoden sind in der Tabelle 5.5 gegenübergestellt. Das „Standard Setup“ ist durch die voreingestellten Werte für die Unterrelaxationsfaktoren (Kurz: URF) und Konvergenztoleranz definiert. Das „aggressive VOF-Setup“ hingegen sieht vor, dass die URFs, mit Ausnahme des Drucks, auf 1 gesetzt werden, sodass keine Unterrelaxation mehr vorhanden ist. Gleichzeitig wird die Konvergenztoleranz von 0,1 auf 0,01 gesetzt, damit bei der Lösung des linearen Systems die Residuen um zwei anstatt einer Größenordnung gesenkt werden müssen. Zuletzt werden nur noch 2-3 innere Iterationen ausgeführt, welche als Ausgleich jedoch durch die niedrigere Konvergenztoleranz stärker der exakten Lösung angenähert werden müssen. Regulär wären 10-20 innere Iterationen üblich für das Standard Setup. Somit ist die Beschriebene Methode darauf ausgelegt weniger Iterationen durchzuführen, diese jedoch näher an die exakte Lösung anzunähern.

Die Ergebnisse von zwei Simulationen mit den beiden vorgestellten Setups und ansonsten

Berechnungsverfahren		Standard Setup		Aggressives VOF-Setup	
		URF	Konvergenz-toleranz	URF	Konvergenz-toleranz
Segregated Flow	Druck	0,2	0,1	0,2	0,01
Segregated VOF	Geschwindigkeit	0,8	0,1	1	0,01
Turbulenz	Impliziter Mehrfachschritt	0,9	0,1	1	0,01
	K-Omega Turbulenz	0,8	0,1	1	0,01

**Tabelle 5.5** Unterrelaxationsfaktoren und Konvergenztoleranz für Standard und „aggressives“ Setup

identischen Voreinstellungen sind in der Abbildung 5.9 dargestellt. Hierfür wurden die gemittelten Geschwindigkeiten als Integral über das gesamte Volumen, sowie die Mischzeiten beider Simulationen übereinandergelegt. Zuletzt ist die berechnete physikalische Zeit in Sekunden der Simulation über die reale Zeit in Stunden dargestellt.



**Abbildung 5.9** Gemittelte Geschwindigkeit als Integral des Behältervolumen im Vergleich für Standard und Aggressives Setup

Die Ergebnisse des aggressiven Setups ermöglichen bei sonst gleicher Konfiguration eine Beschleunigung der Rechenzeit, um das 2,5-Fache je durchgeföhrter numerischen Berechnung

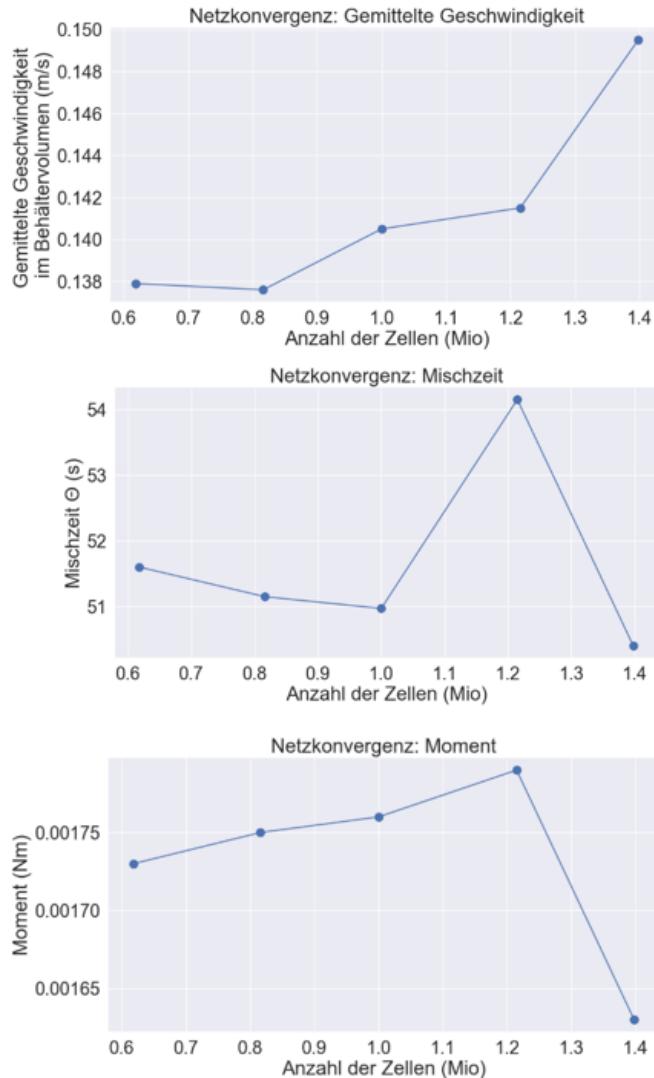
und liefern dabei eine hohe Übereinstimmung zu den Ergebnissen des „Standard Setups“. Weiterhin sind für einen Vergleich im Rahmen der Validierung in Kapitel 6 und der numerischen Parameter Variation durch einen statistischen Versuchsplans in Kapitel 7 eine große Anzahl an Simulationen notwendig. Auf Basis dieser Gründe wurde entschieden die folgenden numerischen Berechnungen mit dem „aggressiven Setup“ durchzuführen. Dabei wird Berücksichtigt, dass kleine Fehler über die Gesamtberechnungszeit akkumuliert werden können. Besonders langwierige Simulationen mit dem aggressiven Setup sollten aus diesem Grund stets mit Bedacht durchgeführt werden.

## 5.2 Netzkonvergenzuntersuchung

Wie bereits in Kapitel 5.1.5 erwähnt, werden im Rahmen einer Netzkonvergenzuntersuchung die gemittelte Strömungsgeschwindigkeit im Behälter  $v_{Mittel}$ , die Mischzeit  $\Theta_{95}$  und das Rührmoment für unterschiedliche räumliche Diskretisierungen unter Nutzung des Schrägbatatrührers betrachtet. Dadurch ist ein Abwägen des Betrags möglicher Fehler für spätere Simulationen bezüglich der genannten Kenngrößen möglich. Für die Bestimmung der relevanten Größen wurde zunächst abgewartet bis ein quasi-stationärer Zustand erreicht wird. Dies geschah durch Beobachtung der gemittelten Geschwindigkeit analog wie in Kapitel 5.1.6 und zusätzlich durch Betrachtung der Konvergenz des auf den Rührer wirkenden Moments. Dieses Moment dient in späteren Kapiteln dazu die dimensionslose Leistungskennzahl  $N_P$  zu berechnen, um diese mit in dem Vergleich von unterschiedlichen Rührwerkzeugen mit einzubeziehen .

Geprüft wurden fünf Netze mit einer Zellenanzahl von 0,6 bis 1,4 Millionen Zellen im Abstand von etwa 200.000 Zellen. Mit einer Anzahl von 1,2 Millionen Zellen ist ein größerer Sprung hinsichtlich der der Mischzeit festzustellen, der nach einer höheren Diskretisierung wieder absinkt. Ein Faktor der hierfür sorgen könnte, sind die fluktuierenden Werte während eines Mischversuch, weshalb dies nur schwer zu beurteilen ist. Die Geschwindigkeit nimmt stark zu und das Moment sinkt gleichzeitig ab mit einer Verfeinerung von 1.2 Millionen auf 1.4 Millionen Zellen. Jedoch sind diese Differenzen unter Anbetracht der Skala in einem vergleichsweise geringfügigen Bereich mit unter 7 Prozent Abweichung zum vorherigen Wert. Es ist jedoch mit einem weiteren Anstieg zu rechnen der hier nicht exakt eingeschätzt werden kann. Trotz dessen wurde die Entscheidung getroffen mit einem Netz von einer Millionen Zellen fortzufahren, da im Rahmen dieser Arbeit eine größerer Anzahl an Ergebnissen miteinander verglichen werden soll und die akkumulierte Rechenzeit aller Simulationen beträchtlich ansteigt mit jeder höheren Diskretisierung. Eine genauere Abschätzung des

Fehlers mit einer feineren Diskretisierung im Rahmen dieser Netzkonvergenzuntersuchung ist für spätere Anwendungen empfehlenswert.



**Abbildung 5.10** Netzkonvergenzuntersuchung für gemittelte Geschwindigkeit, Mischzeit und dimensionslose Leistungskennzahl

---

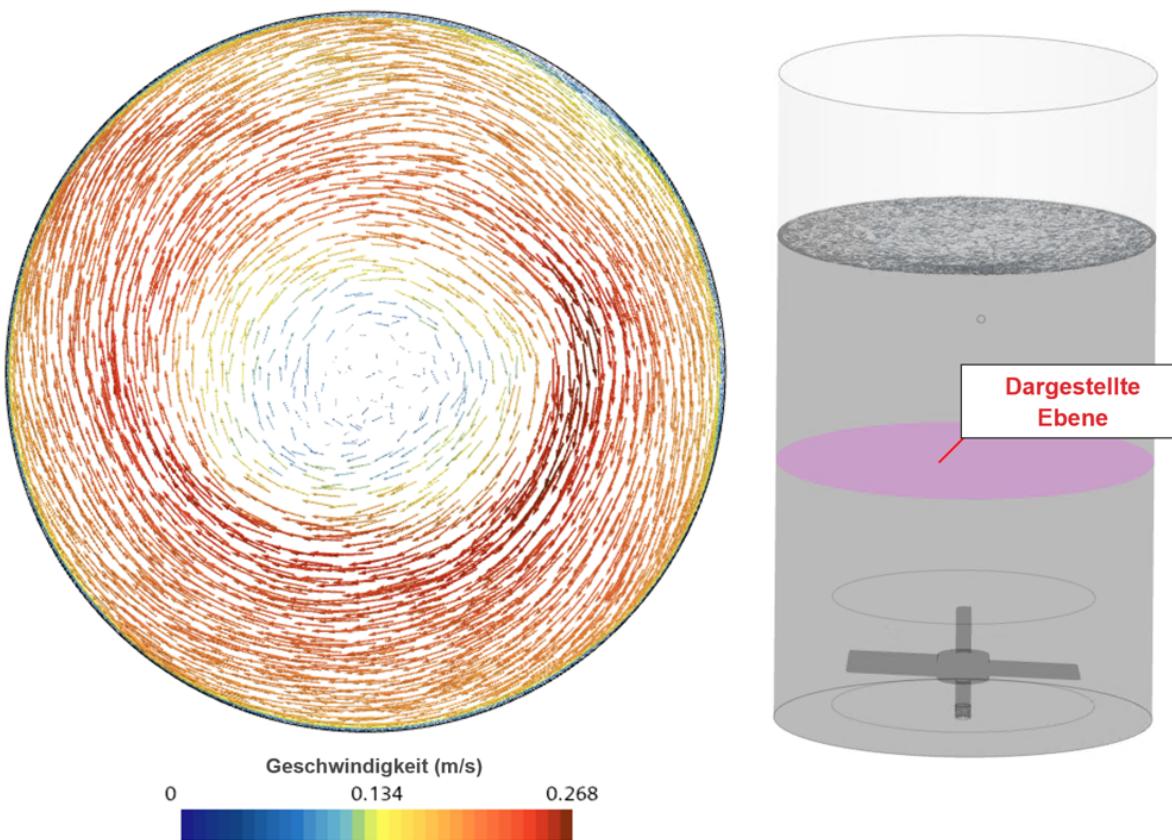
# **6      Validierung des numerischen Modells**

Das Kapitel 4 diente dazu die Konzeptionierung und Entwicklung eines Prüfstandss zu beschreiben und weiterhin die Durchführung eines damit verbunden Experiments zu präsentieren. Das ausgewählte Messverfahren entsprach hierbei einem Mischversuch mit lokalen Leitfähigkeitsmessungen unter Zugabe einer NaCl-Lösung. Darüber hinaus wurde die Gelegenheit genutzt Bilder der Trombenformen aufzunehmen, um zusätzlich einen qualitativen Vergleich zu ermöglichen. Darauf aufbauend wurde in Kapitel 5 analog dazu ein numerisches mehrphasen Modell mit einer freien Oberfläche präsentiert. Auf Basis dessen wird im Folgenden eine Verifizierung durch betrachten der Geschwindigkeits- und Druckfelder vorgenommen und weiterhin eine Validierung durch einen Vergleich der Ergebnisse durchgeführt. Dies dient zur Einschätzung der Genauigkeit des numerischen Modells und weiterhin als Basis für eine numerische Parameter Variation in Kapitel 7.

## **6.1    Auswertung der Geschwindigkeits- und Druckfelder**

Nachfolgend werden zusätzlich zu den Ergebnissen des Trombenabgleichs und der ermittelten Mischzeiten die Geschwindigkeits- und Druckfelder anhand einiger Simulationsergebnisse veranschaulicht, da diese weitere Informationen dazu liefern, ob die Simulationsmodelle physikalisch korrektes Verhalten aufweisen. In Abbildung 6.1 ist hierzu das Geschwindigkeitsfeld bei 150 RPM im Inneren des Rührbehälters in Form einer horizontalen Ebene durch Vektoren dargestellt. Diese wachsen hierbei mit zunehmender Geschwindigkeit an und ändern ihre Farbe entsprechend der angegebenen Skala. Anhand der Abbildung ist zu erkennen, dass die Geschwindigkeit im Zentrum etwa 0 beträgt und mit ansteigendem Radius von der Mitte ausgehend die Geschwindigkeit zunächst steigt und unmittelbar an den Wänden aufgrund der Haftbedingung wieder abnimmt. In Summe geben die in strudelform angeordneten Geschwindigkeitsvektoren ein realistisches Bild einer Rührströmung wieder. In der nachfolgenden Abbildung 6.2 sind erneut Geschwindigkeiten in Vektorform zu erkennen, welche in dieser Darstellung des Behälterquerschnitts präsentiert werden. Die Ebene schneidet hierbei exakt durch die Mitte des Behälters. Diese Abbildungen dienen dem Vergleich mit den in 2 vorgestellten Strömungslinien für Schrägblatt- und Scheibenrührer.

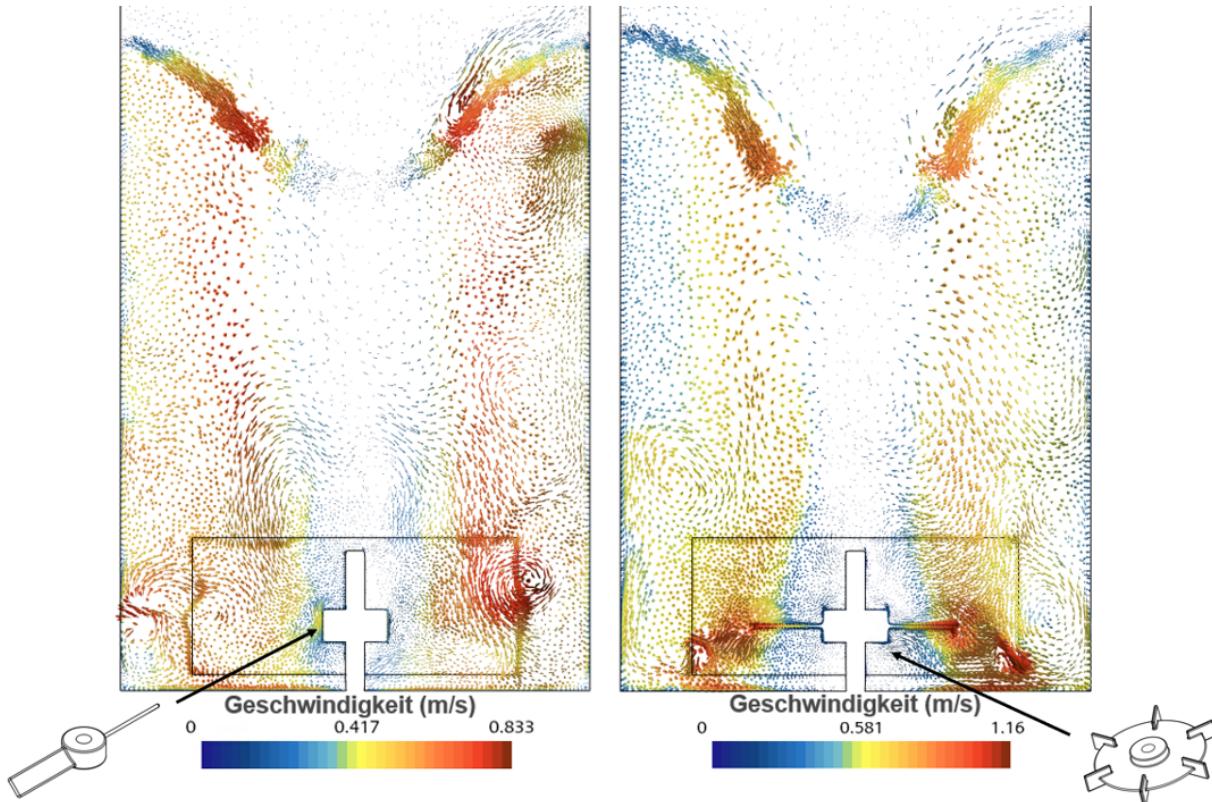
---



**Abbildung 6.1** Geschwindigkeitsfelder als Vektorgrafik in einer horizontalen Ebene inmitten der Strömung ( $H = 0,1$ ) bei 150RPM

Hierbei ist keine klar Strömungsrichtung zu erkennen, wie es in der Abbildung 2.2 in Kapitel 2.1.1 demonstriert wurde. Dies kann sowohl auf den geringen Bodenabstand, als auch auf das Verhältnis von Höhe zum Durchmesser zurückzuführen sein. Aufgrund der Anpassung des experimentellen Prüfstands an den Thermomix konnte kein besonders hoher Bodenabstand ausgewählt werden. Gleichzeitig wurde die Füllhöhe bedingt durch die Dauer eines Mischversuchs maximiert, damit die Mischzeiten nicht zu gering ausfallen. Es ist zu erwarten, dass mit einem höheren Bodenabstand und einem geeigneteren H/T-Verhältnis vorteilhaftere Strömungsbahnen ausgebildet werden können und somit geringere Mischzeiten erreicht werden können. In diesen vorgestellten Konfigurationen kann sowohl die Wirkung in Axialrichtung durch den Schrägblattrührer, als auch der radialwirkende Scheibenrührer nicht vollständig ausgeschöpft werden hinsichtlich ihres Potentials. Das Phänomen, welches hier für den Scheibenrührer zustande kommt gleicht der Beschreibung von Ochieng et al. [76]. Sie beschreiben in ihrer Arbeit, dass der Scheibenrührer bei geringen Bodenabständen nicht dazu fähig ist die typischen zwei Schleifenbahnen, wie in Abbildung 2.2 aus Kapitel

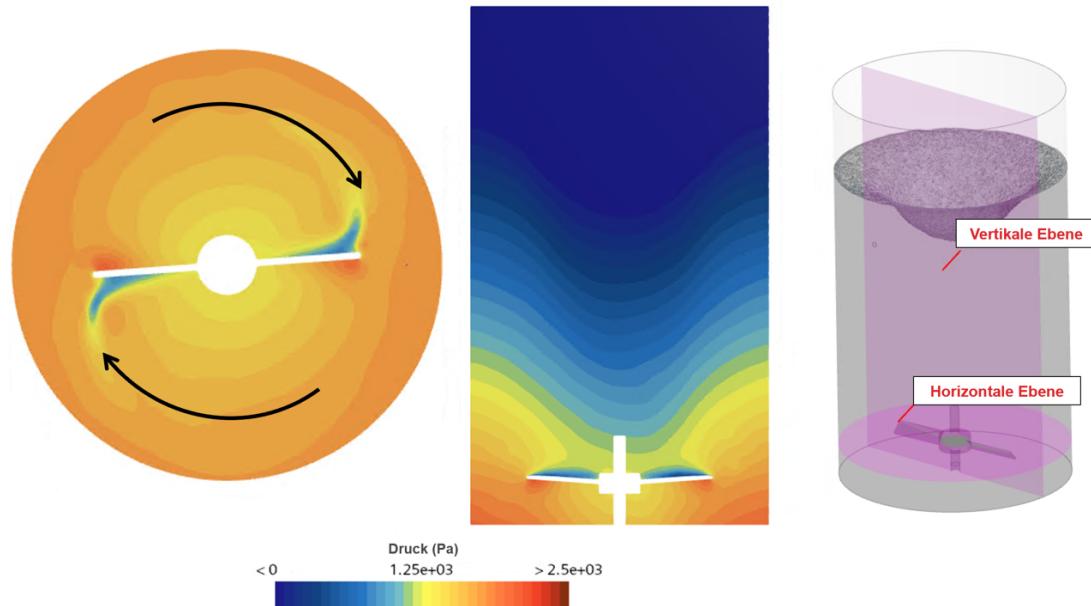
2 vorgestellt, auszubilden. Stattdessen wird dadurch ein axiales Förderverhalten erzeugt. Weiterhin sind für beide Rührer auf der Höhe des maximalen Durchmessers dieser die höchsten Geschwindigkeiten zu verzeichnen und mittig die niedrigsten. Dies spricht vermehrt für eine physikalisch korrekte Darstellung.



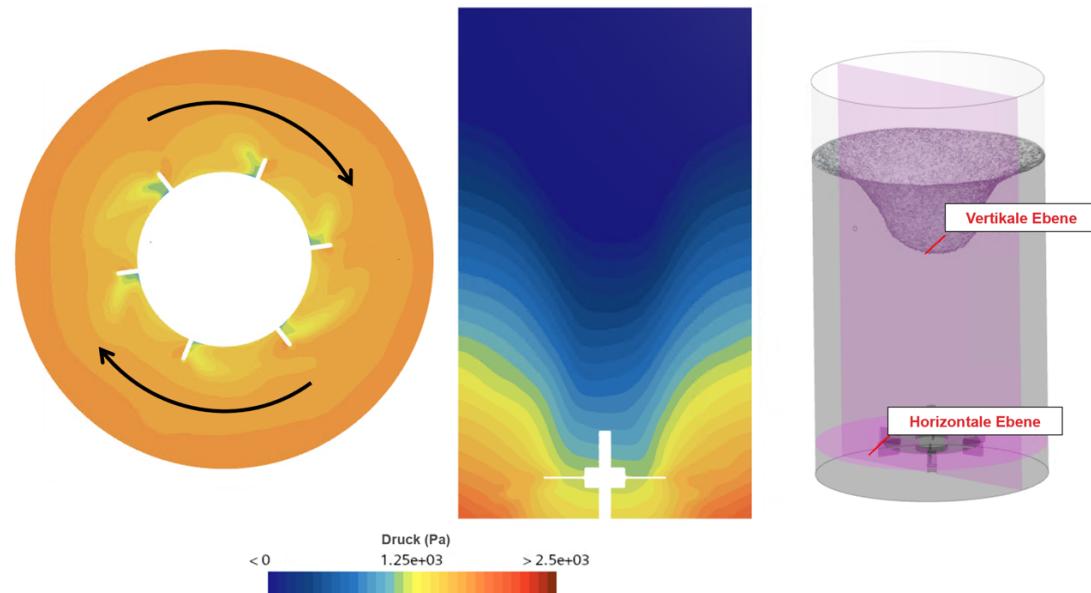
**Abbildung 6.2** Vektorgrafik der tangentialen Strömungsfelder als zentrierte vertikale Ebene bei 350RPM für den Schrägblatt und Scheibenrührer

Die Abbildungen 6.3 und 6.4 beschreiben die Druckfelder für den Schrägblatt- und Scheibenrührer sowohl in einer horizontalen als auch in einer vertikalen Ebene als skalare Größe. Zur Orientierung der Drehrichtung dienen die schwarzen Pfeile in der horizontalen Ebene. Für beide Rührer ist hierbei zu erkennen, dass durch das fördern des Wasser mit den Schaufeln in Rotationsrichtung Druckspitzen entstehen. Weiterhin sind auf den entgegengesetzten Seiten der Schaufeln Bereiche mit geringen Druck zu erkennen, welche durch das nachziehen des Wassers entstehen. Somit weisen beide Rührer ein physikalisch korrektes Verhalten an den Schaufeln auf. Entsprechend der vertikalen Ebenen kann bei beiden Rührern ein erhöhter Druck an den Rändern des Behälterbodens verzeichnet werden. Dies ist dadurch zu erklären, da obwohl beide Rührer auf unterschiedliche Art und Weise wirken sollten, es in beiden

Fällen dazu kommt, dass dem geförderten Fluid in Richtung des Bodens zu wenig Raum geboten wird. Dadurch kommt es zum Anstauen der Flüssigkeiten in den Behälterrändern.



**Abbildung 6.3** Druckfelder für einen Schrägblattrührer bei 350RPM in zentriert vertikaler und horizontaler ( $H = 0,02$ ) Darstellung

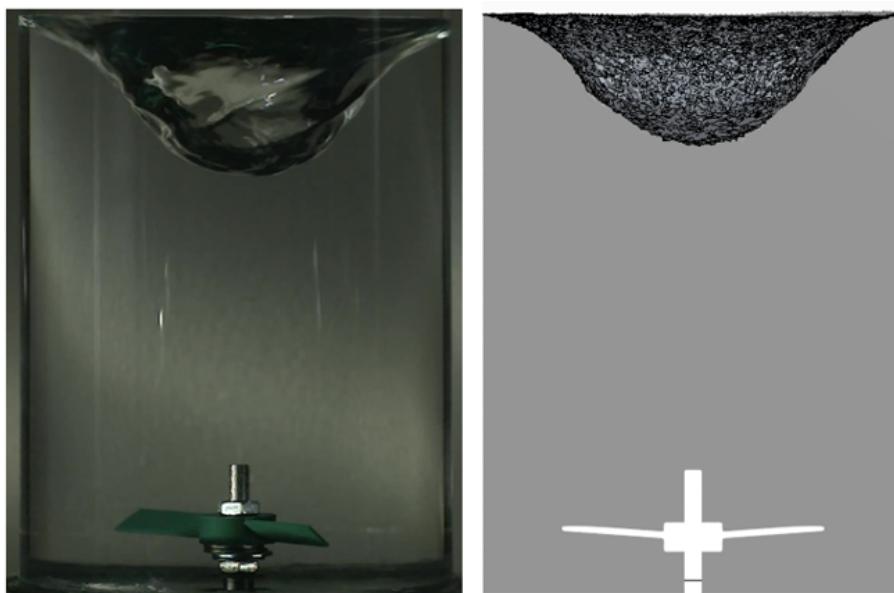


**Abbildung 6.4** Druckfelder für einen Scheibenrührer bei 350RPM in zentriert vertikaler und horizontaler ( $H = 0,02$ ) Darstellung

Demnach wäre es in diesem Fall ebenfalls sinnvoll die das H/T-Verhältnis und den Abstand des Rührers zum Boden anzupassen, wenn eine geringere Mischzeit gewünscht ist. Weiterhin kann anhand der abgebildeten Druckverteilungen bereits für den Schrägblattrührer eine tiefere Trombe erahnt werden, da der Druck mittig geringer und zu den Seiten hin größer ausfällt und somit eine größere Menge des Fluids zu den Wänden des Mischbehälters verdrängt wird.

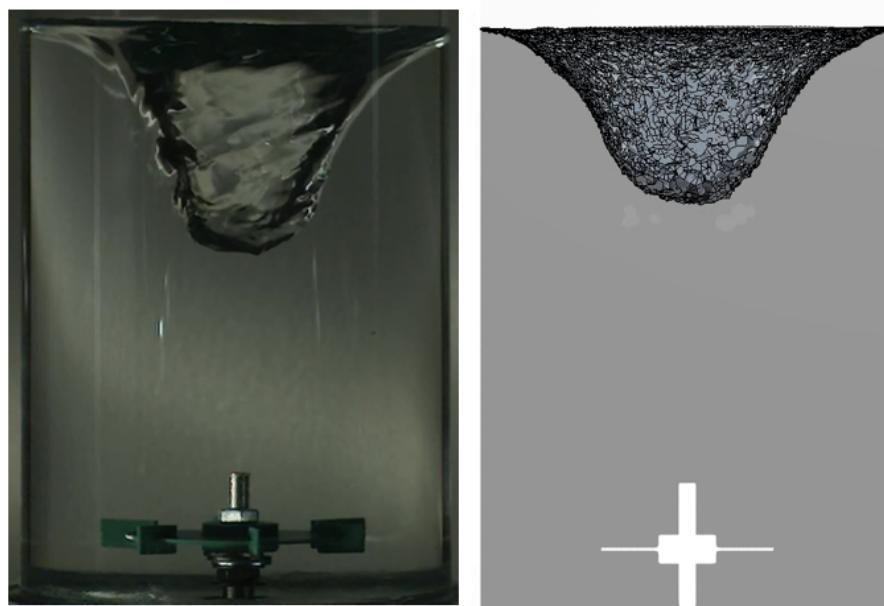
## 6.2 Qualitativer Trombenvergleich

Nachfolgend werden die Trombenformen, die durch den Mischprozess an der freien Oberfläche zustande kommen, für den qualitativen Vergleich von Experiment und Simulation gegenübergestellt. Hierfür werden die von der Seite aufgenommenen Bilder aus dem Experiment mit vertikalen Querschnittsflächen aus der Simulation verglichen. In Abbildung 6.5 ist der Vergleich der numerischen Modells mit dem Experiment für den bereits vorgestellten Schrägblattrührer und in Abbildung 6.6 für den bekannten Scheibenrührer aufgeführt. Für die Bilder im Experiment wurde die Mitte der Kameralinse auf gleicher Höhe mit der ruhenden freien Oberfläche positioniert und anhand der Welle scharf gestellt.



**Abbildung 6.5** Gegenüberstellung der Trombenbilder für einen Schrägblattrührer mit Zwei um  $45^\circ$  angewinkelten Schaufeln

Die Oberflächentrombe ist in der numerischen Darstellung des Scheibenrührers und des



**Abbildung 6.6** Gegenüberstellung der Trombenbilder für einen konventionellen Scheibenrührer mit sechs vertikal ausgerichteten Schaufeln

Schrägblattrührers geringer ausgefallen im Vergleich zu den experimentellen Versuchsergebnissen. Für diese Varianz in der Darstellung können mehrere Faktoren verantwortlich sein, die im Experiment und in der Simulation potentiell ihren Ursprung haben. Im Rahmen des numerischen Modells fällt einerseits der Betrag der Geschwindigkeit im numerischen Modell niedriger aus als in der Realität. Dies kann mit einer zu geringen räumlichen oder zeitlichen Diskretisierung zusammenhängen. Anhand der Netzunabhängigkeitsuntersuchung in Kapitel 5 konnte diesbezüglich bereits ein gewisser Fehler für die gemittelte Geschwindigkeit festgestellt werden. Weitere Unterschiede sind die Muttern zur Befestigung der Rührgeometrien im Experiment, die im numerischen Modell nicht berücksichtigt wurden. Außerdem wird die Oberfläche im Simulationsmodell als Glatt angenommen, während die additiv gefertigten Rührer eine gewisse Stufenform aufweisen. Weiterhin kann die Abweichung im direkten Vergleich durch falsche räumliche Darstellungen im Experiment und der Simulation zustande kommen. Die Form der Trombe und das Tiefenverhältnis ist abseits dessen näherungsweise als physikalisch richtig eingeschätzt, was anhand der breiteren Form der Trombe bei dem Schrägblattrührer und der gestauchteren Form für den Scheibenrührer deutlich wird. Weiterhin ist ebenfalls eine physikalisch korrekte Zu- und Abnahme der Trombentiefe bei Erhöhung und Senkung der Drehgeschwindigkeit oder des Wasserspiegels zu verzeichnen.

## 6.3 Mischzeit und Leistungskennzahl

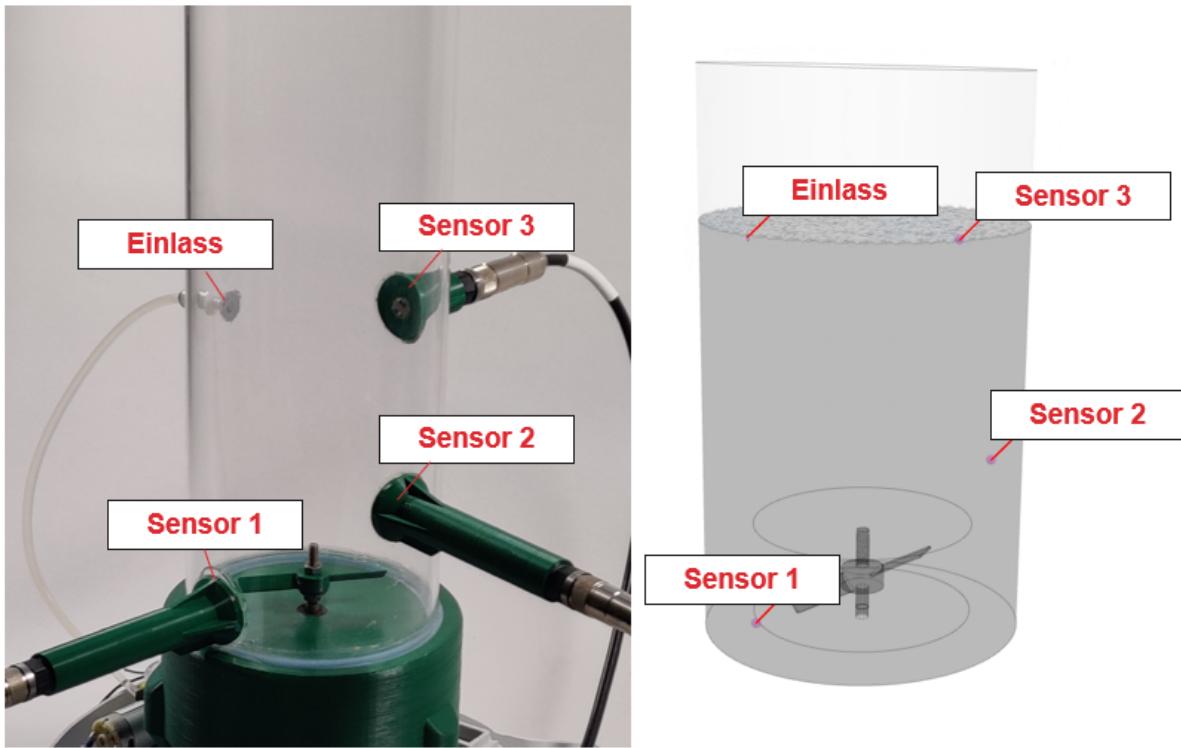
In diesem Kapitel zur Validierung wird die Effizienz von Rührgeometrien in einem quantitativen Vergleich betrachtet, indem die Mischzeiten unter Berücksichtigung der aufzubringenden Leistung des Rührkörpers in Simulation und der Realität gegenübergestellt werden. Weiterhin soll auch hier diskutiert werden, wodurch gewisse Abweichungen entstehen können. Die Berechnung der Mischzeit und der dimensionslosen Leistung wird analog zu den Formeln in 3.2 vorgenommen.

### 6.3.1 Glättung und Normierung

Die nachfolgenden Messdaten basieren auf lokalen Konzentrationsmessungen wie sie in den Kapiteln 4 und 5 veranschaulicht wurden. Die Nummerierung der Sensormesspunkte kann anhand der Abbildung 6.7 nachvollzogen werden. Hierbei ist zu erwähnen, dass die Sensorenden mit den Elektroden bündig der Wand angeglichen wurden. Da durch die Ränder der Bohrung und der Form des Sensors gewisse Abweichungen zur Wand entstehen, kommt es an diesen Stellen zu Verwirbelungen, wodurch kein vollständig ausgeprägtes Grenzschichtverhalten vorhanden ist. In der Simulation wurden an den selben Positionen Punkt-Proben verwendet, die außerhalb der prismatischen Zellen positioniert sind, da unmittelbar an der Wand die Strömungsgeschwindigkeit gegen 0 tendiert und der passive Skalar somit kaum durch Konvektion und nahezu ausschließlich durch Diffusion die Punkt-Proben erreichen würde.

Da es sich bei den experimentellen Daten um absolute Leitfähigkeitswerte und bei den numerischen Daten um Konzentrationen eines passiven Skalars handelt, müssen die Messwerte für einen direkten Vergleich zunächst verarbeitet werden. Eine Reihe von aufgenommenen Rohdaten eines Experiments sind in Abbildung 6.8 dargestellt, welche nachfolgend beispielhaft zur Erklärung der Ermittlung der verarbeiteten Messdaten verwendet werden. Hierbei ist die gemessene Leitfähigkeit über die Zeit aufgetragen. Der Mischversuch beginnt bei 30 Sekunden.

Die unverarbeiteten Daten weisen aufgrund des Wechselstroms ein schwingendes Verhalten für die Leitfähigkeitswerte auf und werden daher mit dem Glättungsverfahren „zweiseitiger gleitender Durchschnitt“ wie folgt gemittelt [77]:

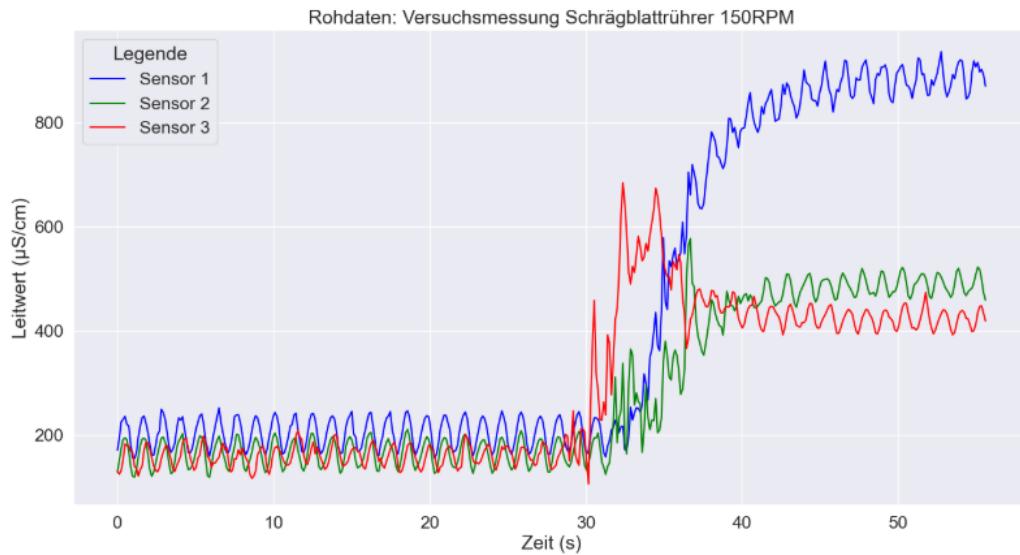


**Abbildung 6.7** Sensormesspunkte und Einlassposition im experimentellen Aufbau und numerischen Modell

$$x_{aktuell} = \frac{1}{2k+1} \sum_{j=-k}^k y_{t+j} \text{ mit } t = k+1, \dots, n-k \quad (6.1)$$

Hierbei wird ein aktueller Messwert  $x_{aktuell}$  aus einer Messreihe  $y_t$  durch einen neuen Messwert ersetzt, welcher über ein definiertes Fenster  $2k + 1$  mit  $k$  vorherigen und  $k$  nachfolgenden Werten gemittelt wurde. Für das Glättungsfenster im Experiment wurde eine Breite von 17 Messwerten bei einer Abtastrate etwa 8 Hz ausgewählt. Dementsprechend wurde jeder Messwert mit den eine Sekunde zurückliegenden und nachfolgenden Messwerten gemittelt.

Die vorgestellte Gleichung für die Mischzeit aus Kapitel 3.2 dient an dieser Stelle der Min-Max-Normierung bei der ein aktueller Messwert  $x_{aktuell}$  aus einer Datenreihe  $y_t = x_1, x_2, \dots, x_n$  durch den neuen Wert  $x_{normiert}$  folgendermaßen ersetzt wird [78]:

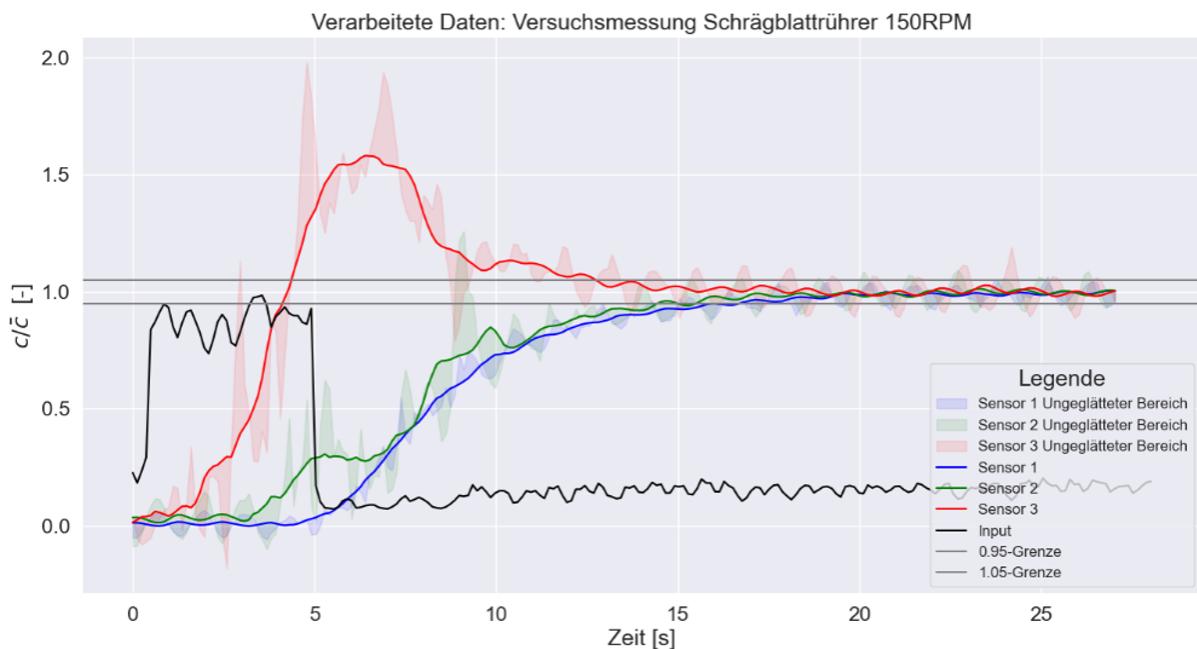


**Abbildung 6.8** Erfasste Rohdaten der lokalen Leitfähigkeitsmesswerte aus dem Experiment

$$x_{\text{normiert}} = \frac{x_{\text{aktuell}} - y_{t.\min}}{y_{t.\max} - y_{t.\min}} \quad (6.2)$$

Hierbei entspricht  $y_{t.\min}$  dem kleinsten Wert der Datenreihe und  $y_{t.\max}$  dem höchsten Wert. Der Wert  $x_{\text{normiert}}$  entspricht dem bereits vorgestellten Wert  $C_i$  aus der Gleichung 3.21.

Wie in Kapitel 2 vorgestellt, wird für die Ermittlung der Mischzeit ein Grenzwert festgelegt, welcher von den Sensoren überschritten werden muss, damit der Mischprozess als beendet gilt. Da die nachfolgenden Ergebnisse einer gewissen Schwankung unterliegen, wurde eine 95 %-Grenze für die Homogenisierung festgelegt. Eine 99 %-Grenze wäre demnach nur nach langer Zeit erreicht, wodurch die Rechenzeit für alle numerischen Modelle deutlich länger ausfällt. In Abbildung 6.9 sind die aus der Glättung und Normierung resultierenden, verarbeiteten Daten inklusive der 95 %-Grenzen (horizontale Geraden) und dem Einlass-Signal für die Pumpe von 5 Sekunden dargestellt. Hinter jedem Sensorgraphen ist hierbei das ungeglättete Signal hinterlegt. Die vertikale Achse beschreibt das Verhältnis von lokal gemessener Konzentration  $c$  zur gemittelten Konzentration  $\bar{c}$ , sodass alle Kurven bei vollständiger Homogenisierung einen Wert von 1 erreichen. In den Abbildungen im nachfolgenden Kapitel wird aus Gründen der Übersicht auf das ungeglättete Signal und das Pumpensignal verzichtet.



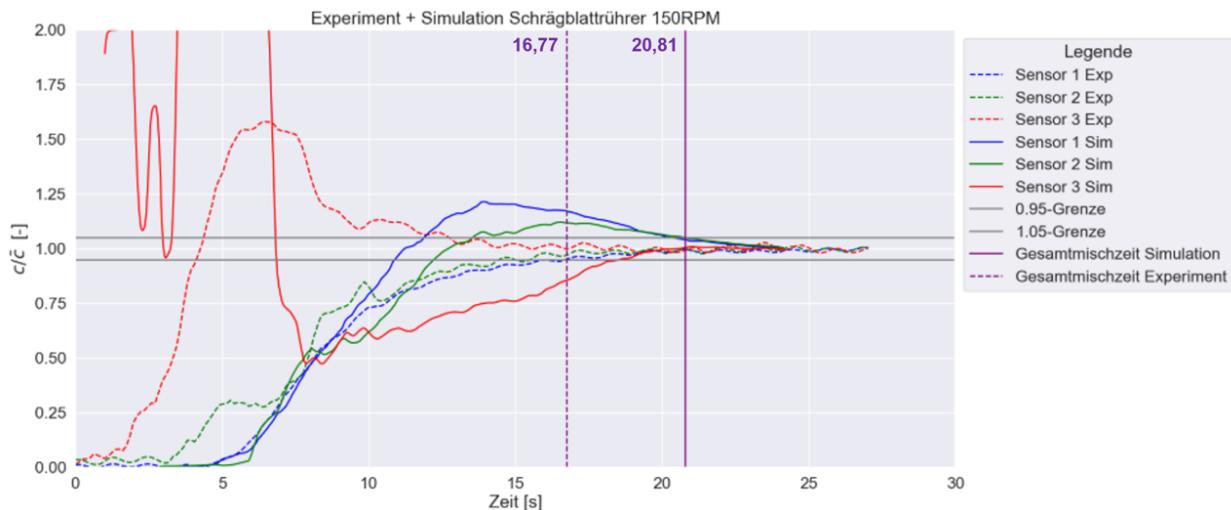
**Abbildung 6.9** Verarbeitete Daten durch gleitendes Durchschnittsverfahren und einer Min-Max-Normierung inklusive 95 %-Grenzlinien und dem Einlass-Signal

Die Messdaten für die numerischen Ergebnisse werden bereits durch eine Feldfunktion analog in der Software normiert. Die Glättung wurde versucht analog an das Experiment angepasst über ein Fenster von zwei Sekunden durchzuführen. Da die Zeitschritte jedoch inkonsistent sind aufgrund der CFL-Zahl-Bedingung, sind die Glättungen nicht vollständig konstant über die Messungen. Weiterhin gibt es einen Verlust der ersten Werte aufgrund der Glättung, da erst nach einer Sekunde ein Glättungsfenster von zwei Sekunden vorhanden ist. Anhand dessen wurde versucht den Verlust der ersten Sekunde nach Start in allen Experimenten gleichmäßig zu erreichen. Hierbei wurde ein Fenster von 189 Werten für angemessen befunden. Damit ist die erste Sekunden mit einer Abweichung von  $\pm 0,055$  s in allen Experimenten verloren und die nachfolgenden Werte entsprechend geglättet.

### 6.3.2 Ergebnispräsentation

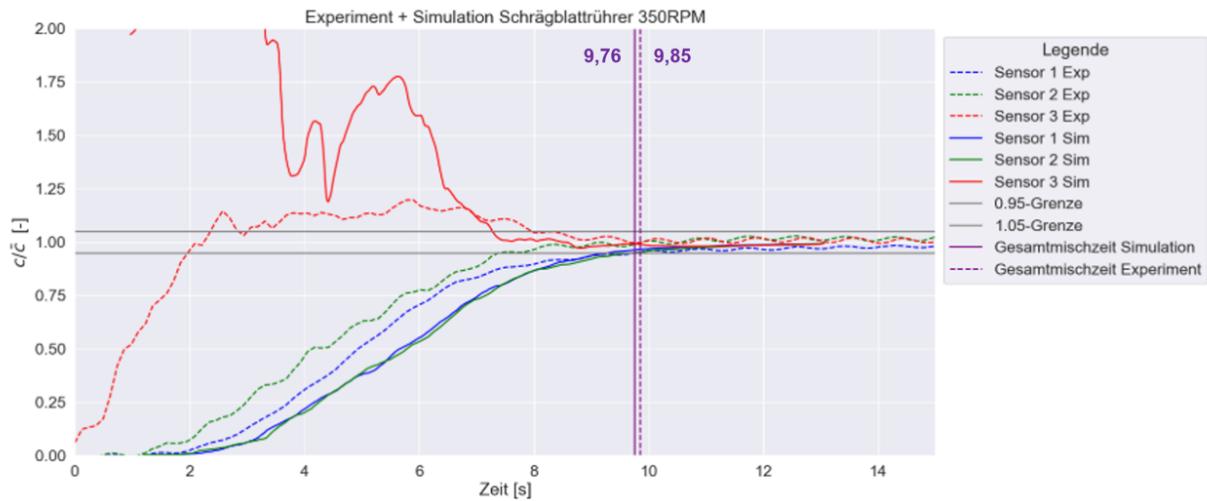
Nachfolgend werden die Ergebnisse der Mischzeiten unter Berücksichtigung der Leistungskennzahl  $N_P$  miteinander verglichen. In den Abbildungen 6.10 bis 6.13 sind die Graphen der Sensoren 1 bis 3 für den Schrägbatatrührer und den Scheibenrührer bei 150 RPM und 350 RPM dargestellt. Hierbei sind die lokalen Konzentrationsmessungen des numerischen Modells und des Experiments für einen direkten Vergleich in der gleichen Abbildung präsentiert.

Zusätzlich werden für die experimentellen und die simulativen Ergebnisse die Zeitpunkte berechnet, zu denen Sensor 1 bis 3 gleichzeitig und dauerhaft zwischen den Grenzwerten befinden (vertikale Linien in Lila). Der durch die Farbe Rot dargestellte Sensor 3 ist in allen experimentellen, wie auch numerischen Modellen als erstes ausgeschlagen. Dies ist zu erwarten, da der Einlass und Sensor 3 auf der selben Höhe, um 90° im Uhrzeigersinn zueinander versetzt, positioniert sind. Weiterhin wird der passive Skalar und die NaCl-Lösung zuerst in diese Richtung bewegt, da das Rührwerkzeug ebenfalls im Uhrzeigersinn dreht. Die Steigung und der Betrag der Hochpunkte weisen, trotz Glättungsfunktion, zu Beginn einer Messung in der Simulation für Sensor 3 große Schwankungen auf. Weiterhin wird die Kurve für Sensor 3 im Experiment stets von oben angenähert, während die Kurve für den Sensor 3 in der Simulation ansteigt und nachfolgend von unten angenähert wird. Diese Unterschiede können mit der Auflösung der Messwerte zusammenhängen, da im Experiment mit etwa 8 Hz abgetastet wird wohingegen in der Simulation mehr als 100 Zeitschritte pro simulierter Sekunde durchgeführt werden. Dadurch ist es möglich in der Simulation schnelle und kurzfristige Änderungen zu verzeichnen. Sensor 1 und Sensor 2 hingegen reagieren auf das Signal mit Verzug, da die hinzugegebene Flüssigkeit zunächst in Richtung des Behälterbodens bewegt werden muss. Die Signale dieser beiden Sensoren weisen bis auf wenige Ausnahmen geringere Differenzen zwischen Simulation und Experiment auf.

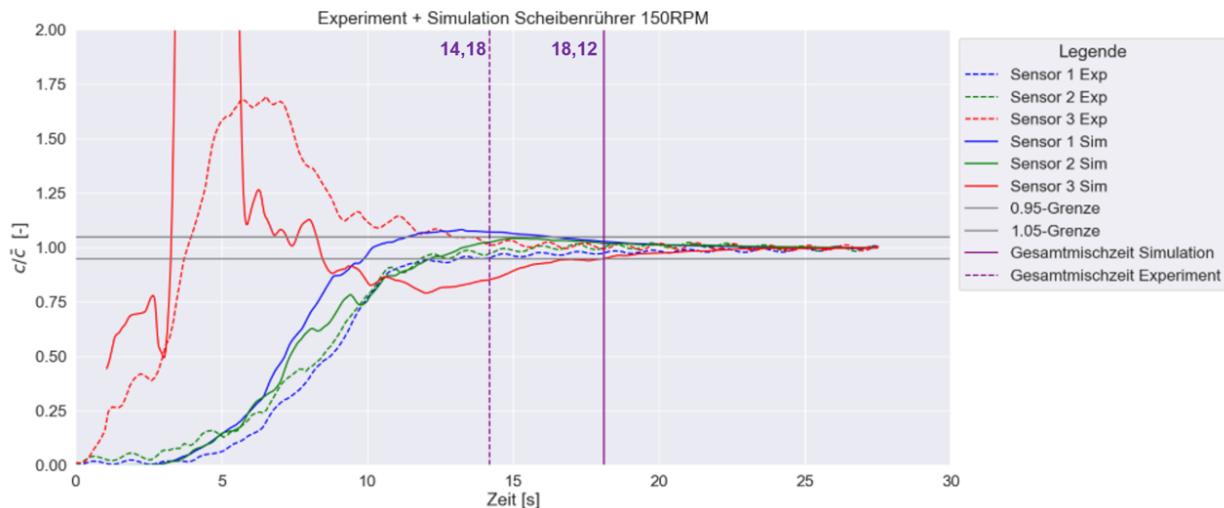


**Abbildung 6.10** Auswertung für den Schrägblattrührer bei 150 RPM

In Tabelle 6.1 sind alle Mischzeiten der Experimente und Simulationen im direkten Vergleich gegenübergestellt. Zusätzlich sind die dimensionslosen Leistungskennzahlen aus dem numerischen Modell aufgelistet, welche über das auf den Rührer wirkende Gesamtmoment analog



**Abbildung 6.11** Auswertung für den Schrägbatatrührer bei 350 RPM



**Abbildung 6.12** Auswertung für den Scheibenrührer bei 150 RPM

zur Gleichung 3.25 berechnet wurden. Hierbei weisen für beide Rührer die Mischzeiten für die geringeren Drehzahlen eine größere Diskrepanz auf als für die höheren mit etwa 24 bis 28 % Abweichung. Bei einer Rotationsgeschwindigkeit von 350 RPM ist die Differenz für beide Rührer geringer, wobei es für den Schrägbatatrührer mit guter Annäherung weniger als 1 % ist und für den Scheibenrührer in etwa 12 %. Aus dieser Korrelation kann vermutet werden, dass der Unterschied zwischen Simulation und Experiment mit ansteigender Gesamtmischzeit zunehmend abweicht. Bei den experimentellen Daten ist zu erwähnen, dass diese auf einzelnen Versuchen basieren, weshalb für die Validierung essentiell wäre die

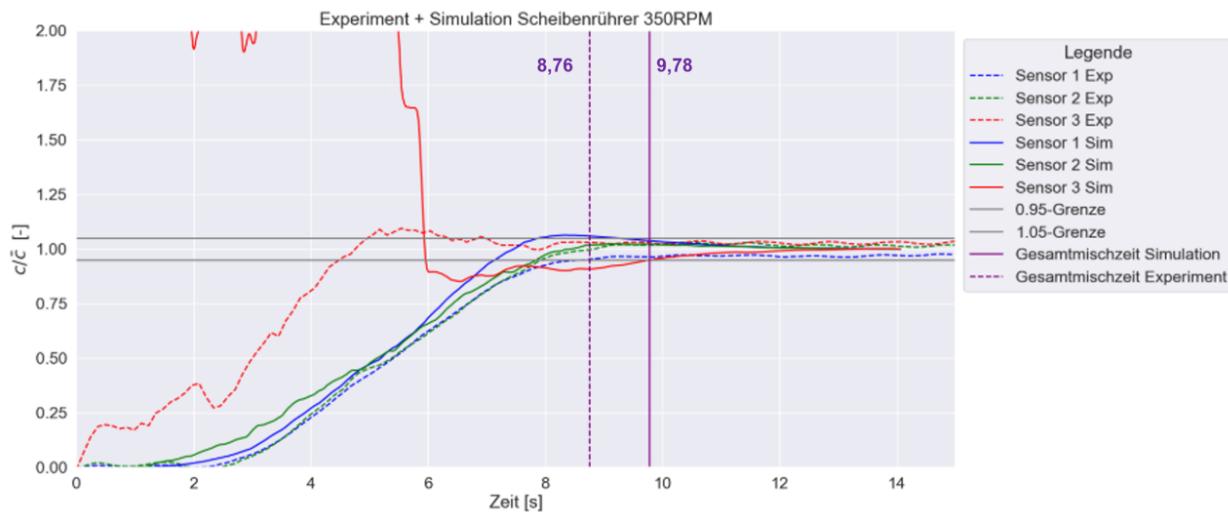


Abbildung 6.13 Auswertung für den Scheibenrührer bei 350 RPM

Mischversuche zu wiederholen und über weitere Versuche zu mitteln.

Der Schrägblattrührer weist für beide Drehzahlen eine ähnliche dimensionslose Leistungskennzahl auf, was mit der Erkenntnis von Chapple et al. [79] für Reynoldszahlen  $> 2 * 10^4$  übereinstimmt, wobei  $Re$  für den Schrägblattrührer etwas geringer ausfällt als in der vorgestellten Arbeit. Die geringere Drehzahl von 350 RPM ist dabei als Energieeffizienter anzusehen, bezogen auf  $N_P$ . Im Allgemeinen erreicht der Scheibenrührer in nahezu allen Fällen eine geringere Mischzeit was mit der höheren dimensionslosen Leistungskennzahl korreliert. Die Leistungskennzahl sollte hierbei hinterfragt werden, da diese recht gering ausfällt. Jedoch zeigten Experimente in kleinen Behältern ohne Wellenbrecher bereits ähnliche Ergebnisse [80, 81] für den Scheibenrührer. Dieser ist hierbei auch bei 350 RPM als Energieeffizienter anzusehen.

Rührer	Drehzahl $N$	Leistungs- kennzahl $N_P$	Mischzeit $\Theta_{95}$ (in s)			Abweichung (in %)
			Simulation	Experiment	$\Delta\Theta_{95}$	
<b>Schrägbla- rrührer</b>	150	0,297	20,81	16,77	4,04	24,09
	350	0,229	9,76	9,85	0,09	0,91
<b>Scheiben- rührer</b>	150	0,849	18,12	14,18	3,94	27,79
	350	0,588	9,78	8,76	1,02	11,64

Tabelle 6.1 Auswertungstabelle für alle Rührer

Zusammenfassend liefern die Simulationen und Experimente einige geeignete Korrelationen, jedoch sollten diese durch wiederholende Versuche gefestigt werden. Weiterhin sollten bei gegebener Rechenzeit höhere Diskretisierungen der Modelle untersucht werden und Ergebnisse mit dem Standard Setup durchgeführt werden, um dahingehend das aggressive Setup auf die Mischzeit bezogen zu untersuchen.

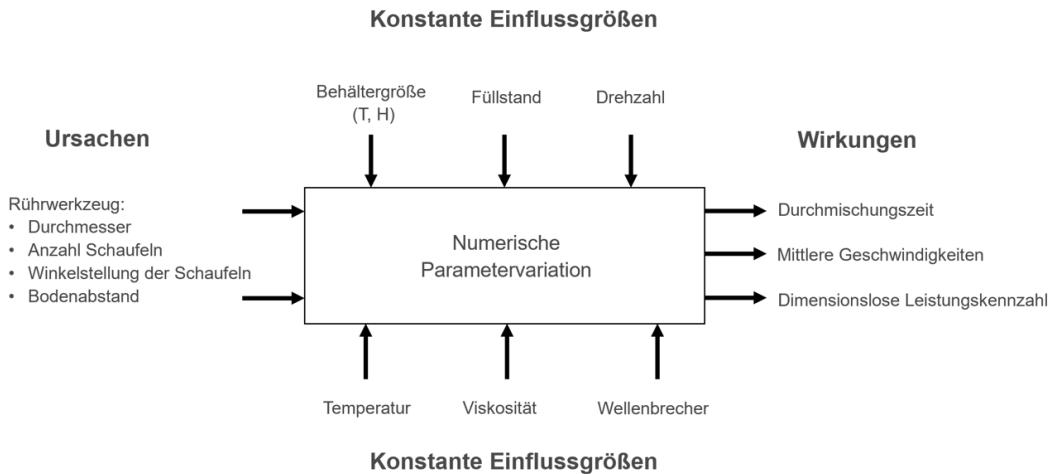
---

# **7 Simulative Untersuchung von Rührwerkzeugen**

Mit Hilfe des im vorherigen Kapitel validierten numerischen Modells soll nachfolgend eine statistische Parametervariation stattfinden. Ziel der Variation ist einerseits die Qualität des Modells weiter zu analysieren und andererseits dessen Potential für zukünftige Optimierungsprozesse am TM6-Mixmesser zu bewerten. Hierfür werden im ersten Schritt die relevanten Parameter vorgestellt, die für eine Analyse berücksichtigt werden sollen. Im Anschluss wird die zur Anwendung kommende Methode nach Taguchi erläutert. Diese dient der Erstellung eines statistischen Versuchsplans, auch Design of Experiment oder kurz DOE genannt. Die Auswertung erfolgt hierbei mit der Software Minitab, um abschließend im letzten Teil dieses Kapitels eine Gegenüberstellung aufzubereiten und eine Analyse mit Vergleich des simulativ getesteten TM6-Mixmessers durchzuführen.

## **7.1 Numerische Parametervariation**

An einem Rührwerkzeug können verschiedene Parameter variiert werden, um einen Einfluss auf physikalische Größen wie das Geschwindigkeitsfeld, die Rührleistung oder auch die Mischzeit zu nehmen. Auf Basis der bereits in Kapitel 2 vorgestellten Rührwerkzeuge und Einflussparameter, wird nun die Ursachen-Wirkungs-Beziehung, durch eine „Black Box“ nach Schiefer und Schiefer [82] präsentiert (Abbildung 7.1). Die ausgewählten Parameter, hier als Ursachen dargestellt, basieren auf den Erkenntnissen aus Kapitel 2.1.2 und wurden als die Wirkungsvollsten eingestuft. Die konstanten Einflussgrößen sind mit aufgeführt, um weitere potentielle Faktoren aufzuzeigen, die jedoch an diesem Punkt durch eine Simulationsumgebung als konstant angenommen werden. Die Wirkungen stellen die Zielfunktionen dar, die im Rahmen dieser Parametervariation untersucht werden sollen. Somit basieren die Wirkungen beziehungsweise die Ergebnisse einzig und allein auf der Variation der Ursachen.



**Abbildung 7.1** Black Box zur Veranschaulichung der ausgewählten Parameter für den statistischen Versuchsplan

### 7.1.1 Versuchsdurchführung nach dem Taguchi-Ansatz

Eine besondere Form der statistischen Versuchsplanung ist der nach dem Erfinder Genichi Taguchi benannte Taguchi-Ansatz, welcher eine verkürzte Versuchsplanung vorsieht, mit der gleichzeitig das optimale Ergebnis gefunden und ein großer Umfang an Informationen gewonnen werden soll. Ursprünglich als Optimierungsmethode für Fertigungsteile entworfen, kann diese Methode im Beispiel des Rührwerkzeuges verwendet werden, um eine möglichst optimale Parameterkonfiguration zu ermitteln. Von den in der Einleitung vorgestellten Wirkungsgrößen aus der Black Box soll die Mischzeit als Optimierungsziel definiert sein, wobei eine Optimierung nach der Geschwindigkeit, Leistung oder Lautstärke ebenfalls erstrebenswert und, wie bereits zu Beginn dieser Arbeit erwähnt, eine Kundenanforderung sein kann [83].

Nachfolgend werden somit der Durchmesser des Rührers, der Abstand zwischen Behälterboden und Rührer, Anzahl der Schaufeln und Anstellwinkel der Schaufeln als besonders Einflussreich erachtet. Der Anstellwinkel ist ausgehend von einer vollständig horizontalen Schaufel anzunehmen, der bei einem Scheibenrührer mit 6 Schaufeln,  $90^\circ$  entsprechen würde. Somit wären hiermit vier Parameter vorhanden, welche in 2 Stufen variiert werden sollen, wodurch das orthogonale Array  $L_8$  nach Taguchi einen Versuchsplan mit 8 Versuchen liefert. Die einzelnen Stufen sind in Tabelle 7.1 und der daraus resultierende Versuchsplan in Tabelle 7.2 zu sehen.

	Anzahl Schaufeln i	Durchmesser D	Winkel $\beta$	Bodenabstand C
<b>Stufe 1</b>	2	T/2	45	H/5
<b>Stufe 2</b>	4	5T/8	60	H/2

**Tabelle 7.1** Parameter und Stufen für den Taguchi Ansatz

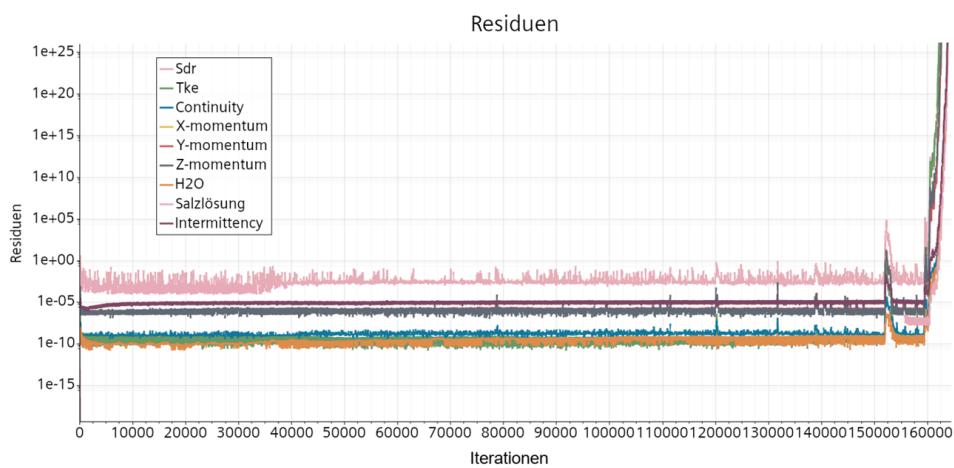
Für die Anpassung der Geometrie wird das Volumen, welches das Rührwerkzeug für den Rigid Body Motion Ansatz umschließt, ein weiteres Mal angepasst, um die Höhen und Durchmesser in der Simulation zu ermöglichen. Hierbei wird die Welle ebenfalls verlängert, wodurch sie diesbezüglich nicht mehr dem Experiment gleicht. Der Start und somit der quasi-stationäre Zustand des Durchmischungsversuchs wurde analog zur beschriebenen Methode in Kapitel 5.1.6 für jede Simulation einzeln anhand der integrativ gemittelten Geschwindigkeiten bestimmt. Die Konzentrationskurven der Sensoren in den nachfolgenden Simulationen sind dieses mal, anders als in Kapitel 6, nicht gemittelt worden, da das zuvor genutzte Mittelungsverfahren keine konstante Glättung bei adaptiven Zeitschritten ermöglicht. In Kapitel 6 diente die Glättung in erster Linie der Anpassung an die Messergebnisse. Dennoch sollten für zukünftige simulative Vergleiche geeignete Mittelungsverfahren gefunden werden, um den Fluktuationen entgegen zu wirken. Nachfolgend werden die Ergebnisse der Mischversuche aus dem DOE für die Parameterkonfigurationen und das TM6-Mixmesser gegenübergestellt und analysiert.

Versuchsnummer	Anzahl der Schaufeln i	Durchmesser D	Winkel $\beta$	Bodenabstand C
1	2	T/2	45	H/5
2	2	T/2	60	H/2
3	2	5T/8	45	H/2
4	2	5T/8	60	H/5
5	4	T/2	45	H/2
6	4	T/2	60	H/5
7	4	5T/8	45	H/5
8	4	5T/8	60	H/2

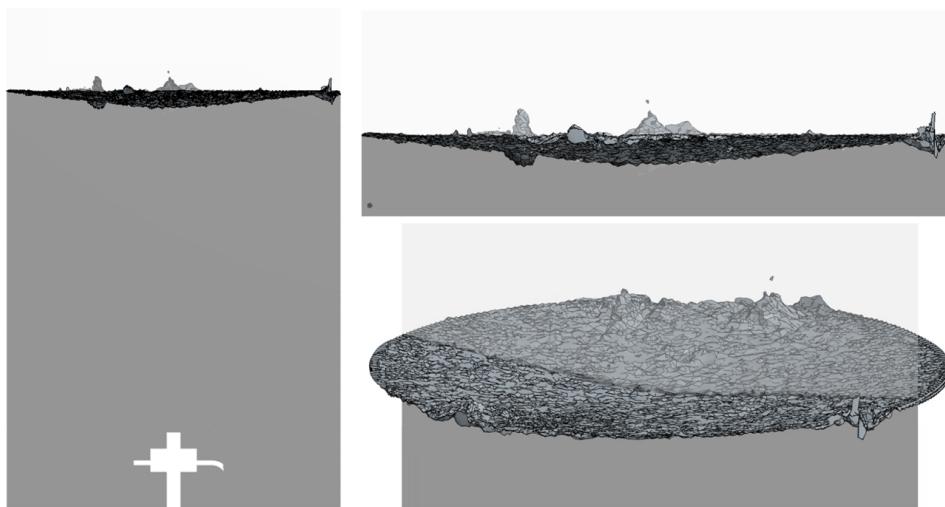
**Tabelle 7.2** Statistischer Versuchsplan nach Taguchi

## 7.1.2 Auswertung und Gegenüberstellung

Vor der Auswertung muss erwähnt werden, dass der statistische Versuch aufgrund von spät in der Simulation auftretenden Divergenzproblemen nicht vollständig durchgeführt werden konnte (Abbildung 7.2). Die Gründe hierfür sind mit hoher Wahrscheinlichkeit mit einer instabilen freien Oberfläche verbunden, was wiederum auf mehrere Faktoren zurückzuführen sein könnte. Beispielsweise hierfür sind eine zu hohe CFL-Zahl, die Nutzung des aggressiven Setups und ungenügende Umsetzung der Oberflächenspannung an der freien Oberfläche, die mit der Kapillarzahl zusammen hängen könnten.



**Abbildung 7.2** Auftretende Divergenz im Laufe der numerischen Berechnung



**Abbildung 7.3** Freie Oberfläche bei Divergenz

Indizien hierfür sind in Abbildung 7.3 anhand der Isosurface-Darstellung veranschaulicht. Hierbei zeigen sich numerische Artefakte, die die freie Oberfläche augenscheinlich in vertikale Richtung verformen. In Kapitel 8 wird dieses Thema weiterführend diskutiert.

Die Ergebnisse des DOE inklusive Vergleichswerte sind der Tabelle 7.3 zu entnehmen und werden angehend der Reihenfolge nach analysiert. Hierbei entsprechen die Werte in der Spalte „Parameterkonfiguration“ den nacheinander aufgelisteten Parametern als die direkte Zahlenfolge (Schaufelzahl.Durchmesser.Anstellwinkel.Bodenabstand). Es ist festzustellen, dass mit einem steigenden Durchmesser und einer Erhöhung der Schaufeln die **gemittelte Geschwindigkeit**  $v_{Mittel}$  im Mischbehälter in nahezu allen Fällen ansteigt. Wobei dabei nicht exakt darauf geschlossen werden kann wie groß der Einfluss der einzelnen Parameter Durchmesser und Schaufelanzahl ist. Dies spricht jedoch für ein physikalisch sinnvolles Verhalten. Die gemittelte Geschwindigkeit des TM6-Rührers ist hierbei trotz des großen Durchmessers vergleichsweise klein. Dies ist vorrangig bedingt durch die Geometrie der Schneiden, die keine „geführte“ Strömungsbewegung erzeugen aufgrund der geringen projezierten Fläche in Rotationsrichtung.

Die **dimensionslose Leistungskennzahl**  $N_P$  ist für Rührer mit kleinem Durchmesser am höchsten ausgefallen, was realistisch ist, wenn bedacht wird, dass der Durchmesser im Bruch mit einem Exponenten von 5 einhergeht. Dies liefert weiterhin ebenfalls den Grund, weshalb das TM6-Mixmesser einen signifikant kleineren  $N_P$ -Wert ausweist.

Die **Mischzeiten** fallen für vier Schaufeln und einem großen Durchmesser am besten aus und weisen weiterhin gleichzeitig die höchsten Geschwindigkeiten auf. Zusätzlich ist auch eine Auswirkung der Geschwindigkeit auf alle Mischzeiten zu erkennen, wodurch vermutet werden kann, dass diese maßgeblich die Mischzeit bestimmt. Diese Korrelation spricht für eine grundlegend richtige Darstellung der Geschwindigkeiten im direkten Vergleich. Dabei muss beachtet werden, dass die Diskretisierung einen Einfluss auf die Geschwindigkeit genommen hat und diese mit hoher Wahrscheinlichkeit größer ausfallen würde. Ein Anstellwinkel von  $60^\circ$  sorgt in allen Fällen für eine höhere Geschwindigkeit und einer daraus resultierenden schnelleren Mischzeit gegenüber den Parameterkonfigurationen mit einem  $45^\circ$  Winkel. Dies gleicht der bereits in Kapitel 2 zitierten Aussage von Rewatkar und Joshi [21]. Anhand des Bodenabstands hingegen ist keine signifikante Korrelation zu erkennen.

Basierend auf dem DOE und den gewonnen Messwerten für die Mischzeit wird nachfolgend die Regression für die Ergebnisse betrachtet, um zu beurteilen, welche Konfiguration die geringste Mischzeit hervorbringt. Die mit Minitab berechnete Regressionsgleichung lautet wie folgt 7.4:

Versuchsnummer	Parameterkonfiguration	Mittlere Geschwindigkeit $v_{Mittel}$	Leistungskennzahl $N_P$	Mischzeit (ungeglättet) $\Theta_{95U}$
1 (Divergenz bei 33s)	<b>2.72.45.0,037</b>	0,078	0,39	-
2	<b>2.72.60.0,0925</b>	0,105	0,5	29,2
3	<b>2.90.45.0,0925</b>	0,145	0,273	20,76
4	<b>2.90.60.0,037</b>	0,177	0,34	17,85
5	<b>4.72.45.0,0925</b>	0,107	0,52	26,78
6	<b>4.72.60.0,037</b>	0,138	0,7	18,71
7	<b>4.90.45.0,037</b>	0,191	0,367	24,67
8	<b>4.90.60.0,0925</b>	0,217	0,443	18
TM6 (Divergenz bei 25s)	<b>4.135.0.0,028</b>	0,156	0,054	-

**Tabelle 7.3** Auswertung des statistischen Versuchsplans

### Methode

Nicht verwendete Zeilen 1

### Regressionsgleichung

$$\text{Mischzeit} = 62,7 - 0,96 \text{ Schaufeln} - 0,297 \text{ Durchmesser} - 0,274 \text{ Winkel} + 24,9 \text{ Bodenabstand}$$

**Abbildung 7.4** Ermittelte Regressionsgleichung mit Minitab

Ein optimaler Rührer basierend auf der Taguchi-Methode und der Regressionsgleichung besitzt demnach eine Schaufelanzahl von 4, einen Durchmesser von 90 mm, einen Anstellwinkel von 60 ° und einen Bodenabstand von 0,037 mm. Dadurch kann eine Mischzeit von 16,6113 s berechnet werden, welche geringer ist als die Mischzeiten aller vorgestellten Parameterkonfigurationen aus der Auswertung (7.3). Somit konnte der Ansatz nach Taguchi erfolgreich durchgeführt werden. Zusammenfassend liefert das numerische Modell erste plausible Ergebnisse, trotz der fehlenden Mischzeiten für die erste Parameterkonfiguration und das TM6-Mixmesser. Im nachfolgenden Kapitel 8 werden die bisher gesammelten Informationen noch einmal kritisch diskutiert bevor in Kapitel 9 das Fazit erfolgt.

---

## **8 Diskussion und Kritik zum numerischen Modell**

Dieses Unterkapitel dient der Auseinandersetzung und der damit verbundenen kritischen Beurteilung der gewonnenen Ergebnisse. Im Rahmen der Validierung in Kapitel 6 und dem soeben vorgestellten statistischen Versuchsplan konnten erste Erkenntnisse über das in dieser Arbeit beschriebene numerische Modell gesammelt werden. Die korrekte Implementierung der Rotationsbewegung durch den Rigid body Motion Ansatz und die Darstellung der freien Oberfläche mit Hilfe des Mehrphasenmodells Volume of Fluid wurden gleichzeitig durch eine Betrachtung der Trombenform untersucht. Darauf bezogen weist die Form der Trombe im numerischen Modell eine akzeptable Annäherung an das Experiment auf, wobei diese in der Numerik etwas geringer ausfällt. Dies kann auf geringere Geschwindigkeitsfelder aufgrund von unzureichender Diskretisierung des numerischen Modells, abweichender Oberflächenbeschaffenheit und materialbezogenen Unterschieden zurückzuführen sein. Die Ergebnisse weisen weiterhin physikalisch betrachtet logische Druck und Geschwindigkeitsfelder in der Simulation auf. Die Auswahl der Rührer ist Rückblickend für einen Vergleich der beiden Rührwerkzeuge bei geringen Bodenabstand diskussionsbedürftig, da sie in ihrer Position nicht das gesamte Potential entfalten. Bezogen auf die Mischzeit konnten Ergebnisse in akzeptabler Annäherung an das Experiment gewonnen werden. Bei höheren Drehzahlen ist die Differenz im direkten Vergleich höchstens bei etwa einer Sekunde, wobei die Gesamtdauer des Mischversuchs ebenfalls gering ist und diese Sekunde stärker ins Gewicht fällt. Längere Mischversuche wie sie bei einer Drehzahl von 150 RPM vorkommen weisen jedoch eine zu hohe Abweichung auf und es kann abgeschätzt werden, dass mit sinkender Drehzahl und längerer Mischzeit der Fehler konsequent ansteigt. Fortführend bedarf es einer Verfeinerung des numerischen Modells, um Ergebnisse in besserer Annäherung an das Experiment zu erhalten. Abseits dessen können Abweichungen im Experiment durch eine optimierte Durchführung ein entscheidender Faktor sein, der nicht missachtet werden sollte. Diesbezüglich eignet es sich eine Messsystemanalyse des experimentellen Verfahrens durchzuführen oder eine höhere Anzahl an Versuchen gemittelt zu betrachten.

Im Zuge dieser vorgestellten Arbeit war es aufgrund von vermehrt auftretender Divergenz im numerischen Modell nicht möglich einen vollständigen statistischen Versuchsplan nach Taguchi durchzuführen und diese Ergebnisse mit dem TM6-Mixmesser zu vergleichen. Besonders hiervon betroffen sind das angepasste numerische Modell mit der Parameter-

---

konfiguration 2.72.45.925 und das Modell für den TM6-Mixmesser, wobei keine oder nur geringe Indizien dafür bestehen, dass dies der Geometrie verschuldet sei. Diese Vermutung basiert darauf, dass die genannte Parameterkonfiguration lediglich einen marginal erhöhten Abstand zum Boden aufweist im Vergleich zum numerischen Validierungsmodell, welches nie Anzeichen von divergierenden Verhalten zeigte. Vielmehr hängen die Probleme mit der freien Oberfläche und den dort herrschenden Oberflächenspannungen im VOF-Modell zusammen, welche bereits in der Auswertung des statistischen Versuchsplans präsentiert wurden. Zur Optimierung der Stabilität der VOF-Methode werden weitere Untersuchungen hinsichtlich der Kapillarzahl und dem Kontaktwinkel in der Star-CCM+ Dokumentation empfohlen [66, 84]. Weitere nennenswerte Faktoren, die in diesem Zusammenhang das CFD-Modell negativ beeinflusst haben könnten, sind die zu geringe Diskretisierung mit einer Millionen Zellen, eine weiterhin zu hohe CFL-Zahl und das vorgestellte aggressive Setup. Letzteres könnte einen sukzessiv ansteigenden Fehler herbeigeführt haben, was mit einer spät eintreffenden Divergenz korreliert.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass das numerische Modell vergleichbare Ergebnisse liefert, um unterschiedliche Rührwerkzeuge miteinander vergleichen zu können. Eine Analyse mit Hilfe der Taguchi-Methode mit einer definierten Anzahl von konfigurierten Versionen des TM6-Mixmessers birgt viel Potential und wird als sinnvoll erachtet, wenn der Aspekt des Rührens im Vordergrund steht. Da das Produkt jedoch multifunktionell ist und es das Schneiden von Produkten gleichzeitig zulassen muss, bedarf es guter Überlegungen darüber welche Modifikationen sinnvoll sind. Zuvor benötigt es hingegen ein numerisches Modell mit ausreichender Stabilität und der Genauigkeit. Daher sollten zukünftig weitere Anpassungen durchgeführt werden, die wie bereits erwähnt durch eine feinere Diskretisierung, strengere CFL-Zahl Bedingungen und einer geeigneten Behandlung der freien Oberfläche umgesetzt werden können.

---

# **9 Fazit**

Nachfolgend werden für das Fazit die in dieser Arbeit behandelten Themen zusammengefasst und die zu Beginn in der Einleitung beschriebene Forschungsfrage erneut aufgegriffen. Darüber hinaus werden im Rahmen des Ausblicks weitere Optimierungen für das bestehende numerische Modell und neue Anreize für CFD-Simulationen im Zusammenhang mit Rührwerkzeug des TM6 präsentiert.

## **9.1 Zusammenfassung**

Im Rahmen dieser Arbeit wurde der Prozess des Rührens im Zusammenhang mit dem Produkt „Thermomix“ des Unternehmens Vorwerk untersucht. Hierfür wurden zunächst Probleme und Kundenanforderungen, wie beispielsweise leichte unvermischt Zutaten, eine geringe Lautstärke und ein effiziente Homogenisierung aufgegriffen, um die Relevanz dieser Arbeit zu beleuchten und weiterhin ein Ziel und die Methodik zum Erreichen dieses Ziels zu definieren. Im zweiten Kapitel, dem Stand der Technik, wurden neben der Erläuterung des Begriffs Rühren, etablierte Rührer und ihre Wirkweise vorgestellt. Darüber hinaus wurde ein kurzer Überblick geschaffen, inwieweit numerische Simulationen heutzutage die Realität abbilden können unter dem Gesichtspunkt der Rechenzeit. Abschließend wurde eine Reihe von experimentellen Validierungsmethoden präsentiert von denen eine ausgewählt wurde. Im Kapitel zu strömungsmechanischen Grundlagen wurde ein Einblick zu Erhaltungsgleichungen für verschiedene physikalische Größen und mathematische Beziehungen zum Thema Mischen in verschiedenen Skalen geschaffen. Basierend auf den in Kapitel 2 vorgestellten Validierungsmethoden wurde ein Trombenabgleich für eine qualitative Validierung und die Bestimmung einer Mischzeit mittels Leitfähigkeitsmessung von Wasser-Salz-Lösungen und passiven Skalar als quantitative Methode ausgesucht. Der erste Teil der Validierung erfolgte im Rahmen der Entwicklung eines Prüfstands und der Durchführung eines Experiments in Kapitel 4. Im nachfolgenden Kapitel wurde darauf aufbauend ein numerisches Modell mit der Software Star-CCM+ erstellt, welches an den experimentellen Aufbau des Rührbehälters angeglichen wurde. Mit Hilfe des passiven Skalars und sinnvoll platzierten Messpunkten in der Simulation wurde eine Möglichkeit geschaffen die Leitfähigkeitsmessung im ähnlichen Maße nachzustellen mit dem Vorteil die Ausbreitung der quasi-stationären Strömungsbahnen innerhalb der Software betrachten zu können. In Kapitel 6 erfolgte der Hauptteil der Validierung durch die Gegenüberstellung der Trombenbilder und der Mischzeiten aus dem Experiment und dem numerischen Modell. Weiterhin wurden hierfür vorab Untersuchungen

an den Druck- und Geschwindigkeitsfeldern vorgenommen. Es konnten geeignete Annäherungen durch die numerischen Modelle hinsichtlich der Trombendarstellung gewonnen werden. Die generierten Mischzeiten konnten miteinander verglichen werden und waren dabei zu einem bestimmten Grad abweichend für niedrigere Drehzahlen und in akzeptabler Annäherung für höhere Rotationsgeschwindigkeiten. Bezuglich der Mischzeiten, die durch das in Kapitel 7 durchgeführte DOE ermittelt wurden, sind sinnvolle Trends für die numerischen Modelle in Abhängigkeit der ausgewählten Konfigurationen zu erkennen. Hierbei wurde nach der Methode nach Taguchi vorgegangen. Durch das DOE konnte nur bedingt ein Vergleich zum TM6-Mixmesser gezogen werden, da es in dieser Simulation und einem weiteren konfigurierten Modell vermehrt zur Divergenz kam. Im inhaltlich abschließenden Kapitel 8 erfolgte schließlich eine kritische Diskussion über die gewonnenen Ergebnisse.

## 9.2 Ausblick

Die vorliegende Arbeit bildet die Grundlage für eine Optimierung an dem TM6-Mixmesser für spätere Generationen oder um einen Retrofit durchzuführen. Die numerische Simulation, die in diesem Kontext zum Einsatz kommt, liefert annehmbare Ergebnisse, die in Zukunft entsprechend der genannten Punkte zur Diskretisierung, Einhaltung niedriger CFL-Zahl-Bedingungen und Behandlung der freien Oberfläche weiter ausgebaut werden sollte. Gerade in Bezug auf die Netzqualität könnten durch eine ausgeweitete Netzkonvergenzuntersuchung weitere Erkenntnisse gesammelt werden und optimierte Vernetzungen integriert werden, um detailliertere Simulationen durchzuführen. Die stetige Zunahme der Rechenleistung durch bessere Computer und die Entwicklung neuer Cloud-Computing-Dienste ermöglichen fortgeschrittenere Methoden zur numerischen Modellierung. Darüber hinaus wurden zu Beginn der Arbeit einige Vereinfachungen getroffen, die nachfolgend zur Erweiterung des numerischen Modells herangezogen werden könnten. Hierzu zählen die originalgetreue Darstellung des konisch zulaufenden TM6-Topfs inklusive Wellenbrecher, die Betrachtung von chemischen Vorgängen im Sinne eines Phasenwechsels und die Implementierung von nicht-newtonischen Flüssigkeiten im Modell. Letzteres ist gerade im Bezug auf Lebensmittel relevant, da viele gemischte Medien wie zum Beispiel Teige und Emulsionen ein nicht-lineares rheologisches und komplexeres Verhalten aufweisen im Vergleich zu Wasser. Für die Validierung dieser zusätzlichen Faktoren könnte der entwickelte Prüfstand entsprechend ausgebaut und optimiert werden. Weiterhin könnte der Schneidprozess unter Zuhilfenahme geeigneter Mehrphasenmodellierungen von Festkörpern betrachtet werden, wobei dies mit einer signifikanten Komplexitätssteigerung einhergehen würde. Im Bezug auf den Kunden könnten zusätzlich

weitere Anforderungen einbezogen werden, wie beispielsweise die bereits eingangs der Arbeit erwähnte Lautstärke des Geräts. Darüber hinaus könnten weitere Aufsätze entwickelt werden, wie ein speziell für die Mischbarkeit von kleinteiligen Zutaten wie Gewürze und Körner ausgearbeiteten Rührer. Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass das Modell eine vielversprechende Ausgangslage bietet, um fortgeschrittenere Untersuchungen im Bereich der Lebensmittelherstellung mit dem TM6 zu initiieren.



---

# Literatur

- [1] Wikipedia-Autoren. *Vorwerk (Unternehmen)*. Hrsg. von Wikipedia – Die freie Enzyklopädie. 9. Dezember 2024. URL: [https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Vorwerk\\_\(Unternehmen\)&oldid=251098673](https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Vorwerk_(Unternehmen)&oldid=251098673).
  - [2] Stiftung Warentest. *Vorwerk Thermomix TM6*. Hrsg. von Stiftung Warentest. 2023. URL: <https://www.test.de/Kuechenmaschinen-mit-Kochfunktion-im-Test-4947836-detail/320000027190!005/>.
  - [3] Vorwerk Online-Shop. *TM6 - Mixmesser*. URL: [https://www.vorwerk.com/de/de/s/shop/mixmesser-tm6?utm\\_source=Bing&utm\\_medium=SEA&utm\\_campaign=Paid\\_SEA\\_Shopping\\_Sale\\_Bing\\_x\\_All-Products\\_Always-on&utm\\_content=Bing\\_Always-on\\_x\\_x\\_x&msclkid=c9ed639d96ad132f45110b82d83e85ee&utm\\_term=4582558378315626&gclid=c9ed639d96ad132f45110b82d83e85ee&gclsrc=3p.ds&gad\\_source=7](https://www.vorwerk.com/de/de/s/shop/mixmesser-tm6?utm_source=Bing&utm_medium=SEA&utm_campaign=Paid_SEA_Shopping_Sale_Bing_x_All-Products_Always-on&utm_content=Bing_Always-on_x_x_x&msclkid=c9ed639d96ad132f45110b82d83e85ee&utm_term=4582558378315626&gclid=c9ed639d96ad132f45110b82d83e85ee&gclsrc=3p.ds&gad_source=7).
  - [4] Sharma, Atul. *Introduction to Computational Fluid Dynamics*. Cham: Springer International Publishing, 2022. ISBN: 978-3-030-72883-0. DOI: [10.1007/978-3-030-72884-7](https://doi.org/10.1007/978-3-030-72884-7).
  - [5] Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Uwe Janoske. *Vorlesung: Computational Fluid Dynamics*. 2023.
  - [6] Zlokarnik, Marko. *Rührtechnik: Theorie und Praxis*. Chemische Technik Verfahrenstechnik. Berlin und Heidelberg: Springer, 1999. ISBN: 9783642586354. DOI: [10.1007/978-3-642-58635-4](https://doi.org/10.1007/978-3-642-58635-4).
  - [7] Kraume, Matthias. *Transportvorgänge in der Verfahrenstechnik: Grundlagen und apparative Umsetzungen*. 3. Auflage. Springer Lehrbuch. Berlin und Heidelberg: Springer Vieweg, 2020. ISBN: 9783662600115.
  - [8] Salho, Ameer K. und Hamzah, Dhafer A. „A Review of Stirred Tank Dynamics: Power Consumption, Mixing Time and Impeller Geometry“. In: *International Journal of Heat and Technology* 42.3 (2024), S. 1081–1092. DOI: [10.18280/ijht.420335](https://doi.org/10.18280/ijht.420335).
  - [9] Kumaresan, T. und Joshi, Jyeshtharaj B. „Effect of impeller design on the flow pattern and mixing in stirred tanks“. In: *Chemical Engineering Journal* 115.3 (2006), S. 173–193. ISSN: 13858947. DOI: [10.1016/j.cej.2005.10.002](https://doi.org/10.1016/j.cej.2005.10.002).
  - [10] Hall, S.; Cooke, M.; Pacek, A. W.; Kowalski, A. J. und Rothman, D. „Scaling up of silverson rotor–stator mixers“. In: *The Canadian Journal of Chemical Engineering* 89.5 (2011), S. 1040–1050. ISSN: 0008-4034. DOI: [10.1002/cjce.20556](https://doi.org/10.1002/cjce.20556).
-

- [11] Prashant Chalise, Jeevan Kittur. „Design\_of\_Bio\_Mimic\_Impeller“. In: *REST Journal on Emerging trends in Modelling and Manufacturing* 2020 ().
- [12] Eggli, Maximilian F. und Schmid, Peter J. „Mixing by stirring: Optimizing shapes and strategies“. In: *Physical Review Fluids* 7.7 (2022). DOI: 10.1103/PhysRevFluids.7.073904.
- [13] Castro, Michael T. und Ocon, Joey D. „Novel designs of blade mixer impellers from the discrete element method and topology optimization“. In: *Chemical Engineering Journal* 490 (2024), S. 151863. ISSN: 13858947. DOI: 10.1016/j.cej.2024.151863.
- [14] Qiu, Facheng; Liu, Zuohua; Liu, Relong; Quan, Xuejun; Tao, Changyuan und Wang, Yundong. „Gas-liquid mixing performance, power consumption, and local void fraction distribution in stirred tank reactors with a rigid-flexile impeller“. In: *Experimental Thermal and Fluid Science* 97 (2018), S. 351–363. ISSN: 08941777. DOI: 10.1016/j.expthermflusci.2018.04.006.
- [15] Rosseburg, A.; Fitschen, J.; Wutz, J.; Wucherpfennig, T. und Schlüter, M. „Hydrodynamic inhomogeneities in large scale stirred tanks – Influence on mixing time“. In: *Chemical Engineering Science* 188 (2018), S. 208–220. ISSN: 00092509. DOI: 10.1016/j.ces.2018.05.008.
- [16] Paul, Edward L.; Atiemo-Obeng, Victor A. und Kresta, Suzanne M. *Handbook of industrial mixing: Science and practice*. Hoboken N.J.: Wiley-Interscience, 2004. ISBN: 0471269190.
- [17] Busciglio, A.; Grisafi, F.; Scargiali, F. und Brucato, A. „Mixing dynamics in uncovered unbaffled stirred tanks“. In: *Chemical Engineering Journal* 254 (2014), S. 210–219. ISSN: 13858947. DOI: 10.1016/j.cej.2014.05.084.
- [18] Joannis Markopoulos, Eleni Kontogeorgaki. „Vortex depth in unbaffled single and multiple impeller agitated vessels“. In: () .
- [19] Jaszcjur, Marek; Mlynarczykowska, Anna und Demurtas, Luana. „Effect of Impeller Design on Power Characteristics and Newtonian Fluids Mixing Efficiency in a Mechanically Agitated Vessel at Low Reynolds Numbers“. In: *Energies* 13.3 (2020), S. 640. DOI: 10.3390/en13030640.
- [20] Rodgers, T. L.; Gangolf, L.; Vannier, C.; Parriaud, M. und Cooke, M. „Mixing times for process vessels with aspect ratios greater than one“. In: *Chemical Engineering Science* 66.13 (2011), S. 2935–2944. ISSN: 00092509. DOI: 10.1016/j.ces.2011.03.036.

- [21] REWATKAR, V. B. und JOSHI, J. B. „EFFECT OF IMPELLER DESIGN ON LIQUID PHASE MIXING IN MECHANICALLY AGITATED REACTORS“. In: *Chemical Engineering Communications* 102.1 (1991), S. 1–33. ISSN: 0098-6445. DOI: 10.1080/00986449108910846.
- [22] Ferziger, Joel H.; Perić, Milovan und Street, Robert L. *Numerische Strömungsmechanik*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2020. ISBN: 978-3-662-46543-1. DOI: 10.1007/978-3-662-46544-8.
- [23] Herwig, Heinz und Schmandt, Bastian. *Strömungsmechanik: Physikalisch-mathematische Grundlagen und Anleitung zum Lösen von Aufgaben*. 4., erweiterte Auflage. Lehrbuch. Berlin und Heidelberg: Springer Vieweg, 2018. ISBN: 978-3-662-57772-1.
- [24] Schmidt, Tobias. „Untersuchung von Unsicherheiten und deren Quantifizierbarkeit bei der Grenzschichtwiedergabe mit RANS-Verfahren“. Diss.
- [25] Ghaib, Karim. *Einführung in die numerische Strömungsmechanik*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2019. ISBN: 978-3-658-26922-7. DOI: 10.1007/978-3-658-26923-4.
- [26] Jenna Michelle Foale. „Simulating Extinction and Blow-off in Kerosene Swirl Spray Flames“. Dissertation. University of Cambridge, 31 October 2021.
- [27] W.P Jones, B.E Launder. „The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence“. In: *Int. J. Heat Mass Transfer* Vol. 15 (1972), pp. 301–314.
- [28] C. K. G. Lam, K. Bremhorst. „A Modified Form of k-epsilon Model for predicting Wall Turbulence“. In: *J. Fluids Eng.* 103(3) (1981), 456–460 (5 pages).
- [29] Kuei-Yuan Chien. „Predictions of Channel and Boundary-Layer Flows with a Low-Reynolds-Number Turbulence Model“. In: *AIAA JOURNAL* Vol. 20 (1982).
- [30] Simcenter STAR-CCM+: Documentation: Motion. 2020. URL: <https://docs.sw.siemens.com/documentation/external/PL20200805113346338/en-US/userManual/userguide/html/index.html?param=WXD84&authLoc=#page/STARCCMP%2FGUID-2560165C-A648-4D48-B631-70888C3768DC.html>.
- [31] Z Jaworski, M L Wyszynski, I P T Moore and AW Nienow. „Sliding mesh computational fluid dynamics—a predictive tool in stirred tank design“. In: *Proc Instn Mech Engrs* Vol 211 (1997).

- [32] Chen, Meng; Liu, Malin und Tang, Yaping. „Comparison of Euler-Euler and Euler-Lagrange Approaches for Simulating Gas-Solid Flows in a Multiple-Spouted Bed“. In: *International Journal of Chemical Reactor Engineering* 17.7 (2019). DOI: 10.1515/ijcre-2018-0254.
- [33] Simcenter STAR-CCM+: Documentation: Multiphase Flow. 2020.
- [34] Chowdhury, Imtiaz Ahmed. „State-of-the-Art CFD Simulation: A Review of Techniques, Validation Methods, and Application Scenarios“. In: *Journal of Recent Trends in Mechanics* 9.2 (2024), S. 45–53. DOI: 10.46610/JoRTM.2024.v09i02.005.
- [35] Assirelli, Melissa; Bujalski, Waldemar; Eaglesham, Archie und Nienow, Alvin W. „Macro- and micromixing studies in an unbaffled vessel agitated by a Rushton turbine“. In: *Chemical Engineering Science* 63.1 (2008), S. 35–46. ISSN: 00092509. DOI: 10.1016/j.ces.2007.07.074.
- [36] Ascanio, Gabriel. „Mixing time in stirred vessels: A review of experimental techniques“. In: *Chinese Journal of Chemical Engineering* 23.7 (2015), S. 1065–1076. ISSN: 10049541. DOI: 10.1016/j.cjche.2014.10.022.
- [37] Bender, Beate und Göhlich, Dietmar. *Dubbel Taschenbuch für den Maschinenbau 3: Maschinen und Systeme*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2020. ISBN: 978-3-662-59714-9. DOI: 10.1007/978-3-662-59715-6.
- [38] Yamamoto, Takuya; Fang, Yu und Komarov, Sergey V. „Surface vortex formation and free surface deformation in an unbaffled vessel stirred by on-axis and eccentric impellers“. In: *Chemical Engineering Journal* 367 (2019), S. 25–36. ISSN: 13858947. DOI: 10.1016/j.cej.2019.02.130.
- [39] Busciglio, A.; Caputo, G. und Scargiali, F. „Free-surface shape in unbaffled stirred vessels: Experimental study via digital image analysis“. In: *Chemical Engineering Science* 104 (2013), S. 868–880. ISSN: 00092509. DOI: 10.1016/j.ces.2013.10.019.
- [40] Andersson, Anders G.; Andreasson, Patrik und Staffan Lundström, T. „CFD-Modelling and Validation of Free Surface Flow During Spilling of Reservoir in Down-Scale Model“. In: *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics* 7.1 (2013), S. 159–167. ISSN: 1994-2060. DOI: 10.1080/19942060.2013.11015461.
- [41] Fyfe, Calum; Barrington, Henry; Gordon, Charles M. und Reid, Marc. „A Computer Vision Approach toward Verifying CFD Models of Stirred Tank Reactors“. In: *Organic process research & development* 28.9 (2024), S. 3661–3673. ISSN: 1083-6160. DOI: 10.1021/acs.oprd.4c00229.

- [42] Jacob Larsson, Lisa Lindenbaum. „CFD methods for liquid mixing with the presence of a vortex“. In: () .
- [43] Montante, Giuseppina; Moštěk, Michal; Jahoda, Milan und Magelli, Franco. „CFD simulations and experimental validation of homogenisation curves and mixing time in stirred Newtonian and pseudoplastic liquids“. In: *Chemical Engineering Science* 60.8-9 (2005), S. 2427–2437. ISSN: 00092509. DOI: 10.1016/j.ces.2004.11.020.
- [44] Gustav Bågmark. „Mixing time prediction in stirred tanks using empirical methods and computational fluid dynamics“. Diss. Lund: Lund University.
- [45] Raffel, Markus; Kähler, Christian J.; Kompenhans, Jürgen; Scarano, Fulvio; Wereley, Steve T. und Willert, Christian E. *Particle Image Velocimetry: A Practical Guide*. 3rd ed. 2018. Cham: Springer International Publishing und Imprint: Springer, 2018. ISBN: 9783319688527.
- [46] Nitsche, Wolfgang und Brunn, André. *Strömungsmesstechnik*. 2., aktualisierte und bearb. Aufl. VDI-Buch. Berlin und Heidelberg: Springer, 2006. ISBN: 3540209905.
- [47] Yeoh, S. L.; Papadakis, G. und Yianniskis, M. „Determination of mixing time and degree of homogeneity in stirred vessels with large eddy simulation“. In: *Chemical Engineering Science* 60.8-9 (2005), S. 2293–2302. ISSN: 00092509. DOI: 10.1016/j.ces.2004.10.048.
- [48] Aydin, Özkan und Yapıcı, Sinan. „A novel method for the measurement of mixing time: A new application of electrochemical limiting diffusion current technique“. In: *Experimental Thermal and Fluid Science* 99 (2018), S. 242–250. ISSN: 08941777. DOI: 10.1016/j.expthermflusci.2018.08.002.
- [49] Bujalski, J. M.; Jaworski, Z.; Bujalski, W. und Nienow, A. W. „The Influence of the Addition Position of a Tracer on CFD Simulated Mixing Times in a Vessel Agitated by a Rushton Turbine“. In: *Chemical Engineering Research and Design* 80.8 (2002), S. 824–831. ISSN: 02638762. DOI: 10.1205/026387602321143354.
- [50] Krishnan, J. Murali; Deshpande, Abhijit P. und Kumar, P. B. Sunil. *Rheology of Complex Fluids*. New York, NY: Springer New York, 2010. ISBN: 978-1-4419-6493-9. DOI: 10.1007/978-1-4419-6494-6.
- [51] Della Valle, Guy; Dufour, Maude; Hugon, Florence; Chiron, Hubert; Saulnier, Luc und Kansou, Kamal. „Rheology of wheat flour dough at mixing“. In: *Current Opinion in Food Science* 47 (2022), S. 100873. ISSN: 22147993. DOI: 10.1016/j.coofs.2022.100873.

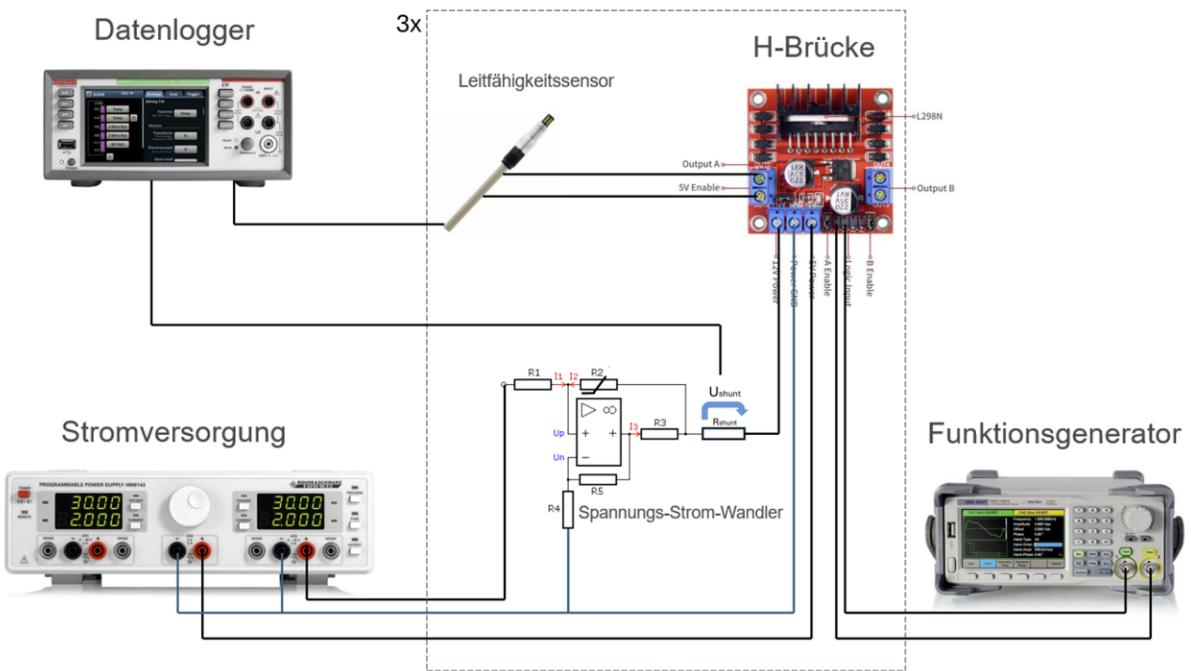
- [52] Walters, K. und Webster, M. F. „The distinctive CFD challenges of computational rheology“. In: *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 43.5 (2003), S. 577–596. ISSN: 0271-2091. DOI: [10.1002/fld.522](https://doi.org/10.1002/fld.522).
- [53] Oertel, Herbert. *Prandtl - Führer durch die Strömungslehre*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2022. ISBN: 978-3-658-27841-0. DOI: [10.1007/978-3-658-27894-6](https://doi.org/10.1007/978-3-658-27894-6).
- [54] Lecheler, Stefan. *Numerische Strömungsberechnung*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2023. ISBN: 978-3-658-42405-3. DOI: [10.1007/978-3-658-42406-0](https://doi.org/10.1007/978-3-658-42406-0).
- [55] Behr, Arno; Agar, David W.; Vorholt, Andreas J. und Jörissen, Jakob. *Einführung in die Technische Chemie*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2025. ISBN: 978-3-662-70147-8. DOI: [10.1007/978-3-662-70148-5](https://doi.org/10.1007/978-3-662-70148-5).
- [56] Noll, Berthold. *Numerische Strömungsmechanik: Grundlagen*. Springer-Lehrbuch. Berlin und Heidelberg: Springer, 1993. ISBN: 9783540567127.
- [57] Schwertfirm, Florian. „Direkte Simulation und Modellierung des Mikromischens bei hohen Schmidt Zahlen: Dissertation“. In: (2008).
- [58] Klimenko, A. Y. „What is mixing and can it be complex?“ In: *Physica Scripta* T155 (2013), S. 014047. ISSN: 0031-8949. DOI: [10.1088/0031-8949/2013/T155/014047](https://doi.org/10.1088/0031-8949/2013/T155/014047).
- [59] Bonometti, Thomas und Balachandar, S. „Effect of Schmidt number on the structure and propagation of density currents“. In: *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* 22.5 (2008), S. 341–361. ISSN: 0935-4964. DOI: [10.1007/s00162-008-0085-2](https://doi.org/10.1007/s00162-008-0085-2).
- [60] MUESCHKE, NICHOLAS J.; SCHILLING, OLEG; YOUNGS, DAVID L. und ANDREWS, MALCOLM J. „Measurements of molecular mixing in a high-Schmidt-number Rayleigh–Taylor mixing layer“. In: *Journal of Fluid Mechanics* 632 (2009), S. 17–48. ISSN: 0022-1120. DOI: [10.1017/S0022112009006132](https://doi.org/10.1017/S0022112009006132).
- [61] Gualtieri, Carlo; Angeloudis, Athanasios; Bombardelli, Fabian; Jha, Sanjeev und Stoesser, Thorsten. „On the Values for the Turbulent Schmidt Number in Environmental Flows“. In: *Fluids* 2.2 (2017), S. 17. DOI: [10.3390/fluids2020017](https://doi.org/10.3390/fluids2020017).
- [62] Tamburini, Alessandro; Brucato, Alberto; Ciofalo, Michele; Gagliano, Gaetano; Micalle, Giorgio und Scargiali, Francesca. „CFD simulations of early- to fully-turbulent conditions in unbaffled and baffled vessels stirred by a Rushton turbine“. In: *Chemical Engineering Research and Design* 171 (2021), S. 36–47. ISSN: 02638762. DOI: [10.1016/j.cherd.2021.04.021](https://doi.org/10.1016/j.cherd.2021.04.021).

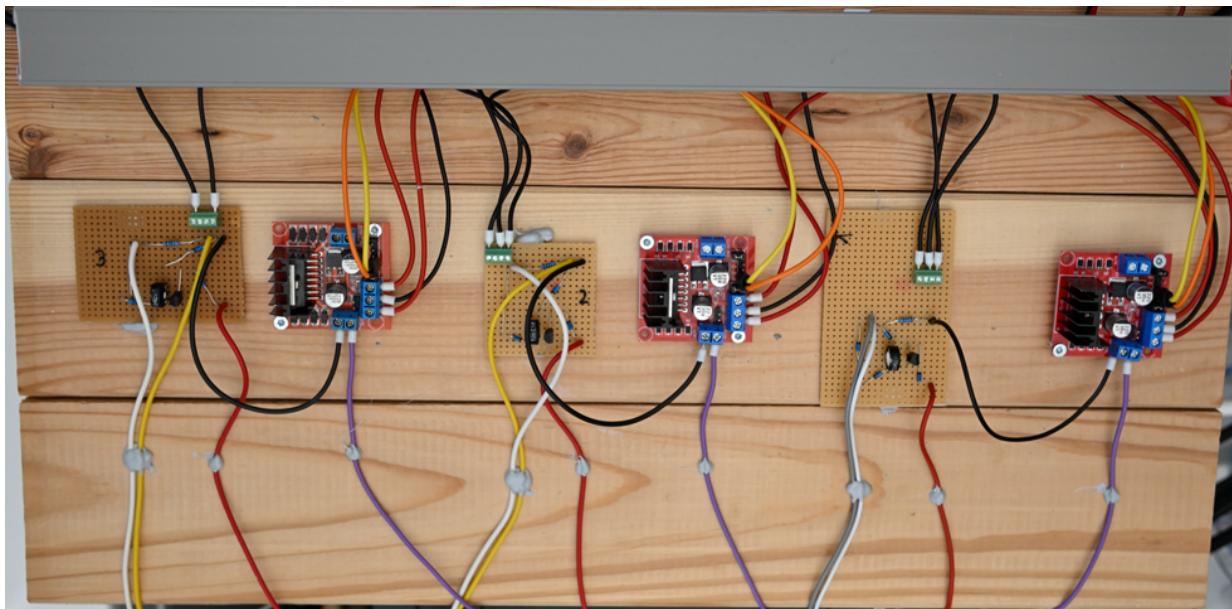
- [63] Ghaib, Karim. „The Volume of Fluid Method, a Method for the Simulation of Two-Phase Flow“. In: *Chemie Ingenieur Technik* 90.3 (2018), S. 316–323. ISSN: 0009-286X. DOI: 10.1002/cite.201700136.
- [64] Kind, Johannes; Sielaff, Axel und Stephan, Peter. „Physical modeling of conjugate heat transfer for multiregion and multiphase systems with the Volume-of-Fluid method“. In: *Engineering with Computers* 41.2 (2025), S. 761–783. ISSN: 0177-0667. DOI: 10.1007/s00366-024-02051-6.
- [65] *Simcenter STAR-CCM+: Documentation: Volume of Fluid Method*. 2020. URL: <https://docs.sw.siemens.com/documentation/external/PL20200805113346338/en-US/userManual/userguide/html/index.html?param=WXD84&authLoc=#page/STARCCMP%2FGUID-11CD4B05-2045-4FFB-9BCA-F31DD3C59599.html%23wwID0E1T4JD>.
- [66] *Simcenter STAR-CCM+: Documentation: Surface Tension*. 2020. URL: <https://docs.sw.siemens.com/documentation/external/PL20200805113346338/en-US/userManual/userguide/html/index.html?param=WXD84&authLoc=#page/STARCCMP%2FGUID-4FE0FF9C-D5CF-4242-AE56-B858FC696076.html%23wwID0ESCUID>.
- [67] „A Rans analysis of pressurized thermal shock phenomena in nuclear reactor geometries using Starccm+“. In: ().
- [68] Lorenzis, Laura de und Düster, Alexander. *Modeling in Engineering Using Innovative Numerical Methods for Solids and Fluids*. Bd. 599. Cham: Springer International Publishing, 2020. ISBN: 978-3-030-37517-1. DOI: 10.1007/978-3-030-37518-8.
- [69] Mauri, Roberto. *Transport Phenomena in Multiphase Flows*. 2nd ed. 2023. Bd. 112. Fluid Mechanics and Its Applications. Cham: Springer International Publishing und Imprint Springer, 2023. ISBN: 9783031289200. DOI: 10.1007/978-3-031-28920-0.
- [70] *Simcenter STAR-CCM+: Documentation: Specifying Prism Layer Size on the Interface*. 2020. URL: <https://docs.sw.siemens.com/documentation/external/PL20200805113346338/en-US/userManual/userguide/html/index.html?param=WXD84&authLoc=#page/STARCCMP%2FGUID-4635E87A-9D2B-419E-87D7-68AEA89CF272.html>.
- [71] *Simcenter STAR-CCM+: Documentation: Free Surface Mesh Refinement*. 2020. URL: <https://docs.sw.siemens.com/documentation/external/PL20200805113346338/en-US/userManual/userguide/html/index.html?param=WXD84&authLoc=#page/STARCCMP%2FGUID-2B0F4E04-423C-4293-A0D1-DF966D746DEB.html%23wwID0ERQBKD>.

- [72] *Simcenter STAR-CCM+: Documentation: Setting Solver Parameters and Stopping Criteria.* 2020. URL: <https://docs.sw.siemens.com/documentation/external/PL20200805113346338/en-US/userManual/userguide/html/index.html?param=WXD84&authLoc=#page/STARCCMP%2FGUID-8EFC4822-8FE5-4D3C-ADEA-8410E623F4BD.html%23>.
- [73] David Mann. *Shift gears for VOF simulation speed-up with Implicit Multistep.* 2022. URL: <https://blogs.sw.siemens.com/simcenter/vof-simulation-speed-up-with-implicit-multistep/>.
- [74] Frosina, Emma; Senatore, Adolfo; Andreozzi, Assunta; Fortunato, Francesco und Giliberti, Pino. „Experimental and Numerical Analyses of the Sloshing in a Fuel Tank“. In: *Energies* 11.3 (2018), S. 682. DOI: 10.3390/en11030682.
- [75] Siemens Support Center - Knowledge Base. *What is the most effective numerical setup for VOF?* Zugriff nur für registrierte Lizenzbenutzer. URL: [https://support.sw.siemens.com/en-US/product/226870983/knowledge-base/KB000112218\\_EN\\_US](https://support.sw.siemens.com/en-US/product/226870983/knowledge-base/KB000112218_EN_US).
- [76] Ochieng, Aoyi; Onyango, Maurice S.; Kumar, Anil; Kiriamiti, Kirimi und Musonge, Paul. „Mixing in a tank stirred by a Rushton turbine at a low clearance“. In: *Chemical Engineering and Processing: Process Intensification* 47.5 (2008), S. 842–851. ISSN: 02552701. DOI: 10.1016/j.cep.2007.01.034.
- [77] Rob J Hyndman. „Moving Averages: Smoothing using two-sided moving averages“. In: (2009). URL: <https://robjhyndman.com/papers/movingaverage.pdf>.
- [78] Singh, Dalwinder und Singh, Birmohan. „Feature wise normalization: An effective way of normalizing data“. In: *Pattern Recognition* 122 (2022), S. 108307. ISSN: 00313203. DOI: 10.1016/j.patcog.2021.108307.
- [79] Chapple, D.; Kresta, S. M.; Wall, A. und Afacan, A. „The Effect of Impeller and Tank Geometry on Power Number for a Pitched Blade Turbine“. In: *Chemical Engineering Research and Design* 80.4 (2002), S. 364–372. ISSN: 02638762. DOI: 10.1205/026387602317446407.
- [80] Scargiali, Francesca; Busciglio, Antonio; Grisafi, Franco; Tamburini, Alessandro; Micalle, Giorgio und Brucato, Alberto. „Power Consumption in Uncovered Unbaffled Stirred Tanks: Influence of the Viscosity and Flow Regime“. In: *Industrial & Engineering Chemistry Research* 52.42 (2013), S. 14998–15005. ISSN: 0888-5885. DOI: 10.1021/ie402466w.

- 
- [81] Scargiali, F.; Tamburini, A.; Caputo, G. und Micale, G. „On the assessment of power consumption and critical impeller speed in vortexing unbaffled stirred tanks“. In: *Chemical Engineering Research and Design* 123 (2017), S. 99–110. ISSN: 02638762. DOI: 10.1016/j.cherd.2017.04.035.
  - [82] Schiefer, Hartmut und Schiefer, Felix. *Statistik für Ingenieure*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2018. ISBN: 978-3-658-20639-0. DOI: 10.1007/978-3-658-20640-6.
  - [83] Shyam Kumar Karna, Dr. Rajeshwar Sahai. „An Overview on Taguchi Method“. In: *International Journal of Engineering and Mathematical Sciences* (2012).
  - [84] *Simcenter STAR-CCM+: Documentation: Modeling Surface Tension*. 2020. URL: <https://docs.sw.siemens.com/documentation/external/PL20200805113346338/en-US/userManual/userguide/html/index.html?param=WXD84&authLoc=#page/STARCCMP%2FGUID-C941989F-B00B-47CE-87AF-6784FCC0914E.html>.

# A Schaltplan





## B Visualisierung einer Durchmischung

