אווירודינמיקה חישובית - ש.ב 2

יובל רובינסקי 208224170

תוכן עניינים

[תיאור הבעיה המתמטית 3](#_Toc178956073)

[השיטה הנומרית 6](#_Toc178956074)

[תיאור פונקציונלי של התוכנית 11](#_Toc178956075)

[תוצאות 13](#_Toc178956076)

[השפעת פונקציות הבקרה על הפתרון 13](#_Toc178956077)

[סיכום ומסקנות 13](#_Toc178956078)

רשימת איורים

[איור 1 - Body fitted mesh 4](#_Toc178956079)

[איור 2 -" שגיאת לוח שחמט". בכחול ובירוק - שני "תתי פתרונות" 8](#_Toc178956080)

[איור 3 - השפעת דיסיפציה מלאכותית על "שגיאת לוח שחמט" 8](#_Toc178956081)

[איור 4 – תנאי השפה במישור החישובי 9](#_Toc178956082)

[איור 5 - תנאי שפה קיר אדיאבטי 9](#_Toc178956083)

[איור 6 - תנאי שפה cut 10](#_Toc178956084)

[איור 7 - תנאי שפה outflow 10](#_Toc178956085)

[איור 8 - תיאור מהלך הפתרון 11](#_Toc178956086)

# תיאור הבעיה המתמטית

הקדמה

נדרשנו בתרגיל הבית לחשב את שדה הזרימה הנוצר סביב פרופיל 0012NACA המתואר ע"י העקום הבא:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| (1) |  |  |

כאשר הסימן החיובי מתאר את העקימון העליון, והסימן השלילי מתאר את העקימון התחתון, הוא העובי המירבי של הכנף ו הוא פרמטר שנבחר כך שהזנב יסגר בדיוק בשפת הזרימה וערכו . הקואורדינטות והפרמטר מנורמלים באורך המיתר.

שדה הזרימה חושב ביום סטדנרטי בגובה פני הים כלומר: עם זרימות הצפה שונות:

1. זרימה הצפה עבר קולית במהירות
2. זרימה הצפה על קולית במהירות

המשוואות השולטות

משוואות השימור בקואורדינטות קרטזיות לזרימה דו מימדית עבור זרימה אידיאלית ודחיסה, בהזנחת כוחות גוף, נקראות משוואות אוילר ומנוסחות באופן הבא:

|  |  |
| --- | --- |
| (2) |  |

|  |  |
| --- | --- |
| (3) |  |

|  |  |
| --- | --- |
| (4) |  |

|  |  |
| --- | --- |
| (5) |  |

כאשר הם רכיבי המהירות בצירים בהתאמה, *הוא הלחץ הכולל ו היא צפיפות הזורם. היא האנרגיה הכוללת של הזורם המוגדרת בתור הסכום של האנרגיה הפנימית() והאנרגיה הקינטית.עבור גז אידיאלי ומושלם קלורית מתקיים הקשר הבא:*

|  |  |
| --- | --- |
| (6) |  |

|  |  |
| --- | --- |
| (7) |  |

כאשר הוא יחס קיבולי החום של הזורם.ממשוואה (*7*) נוכל לקשור בין האנרגיה הכוללת ללחץ:

|  |  |
| --- | --- |
| (8) |  |

את סט המשוואות (*2*)-(*5*) נוכל לראות באופן קומפקטי:

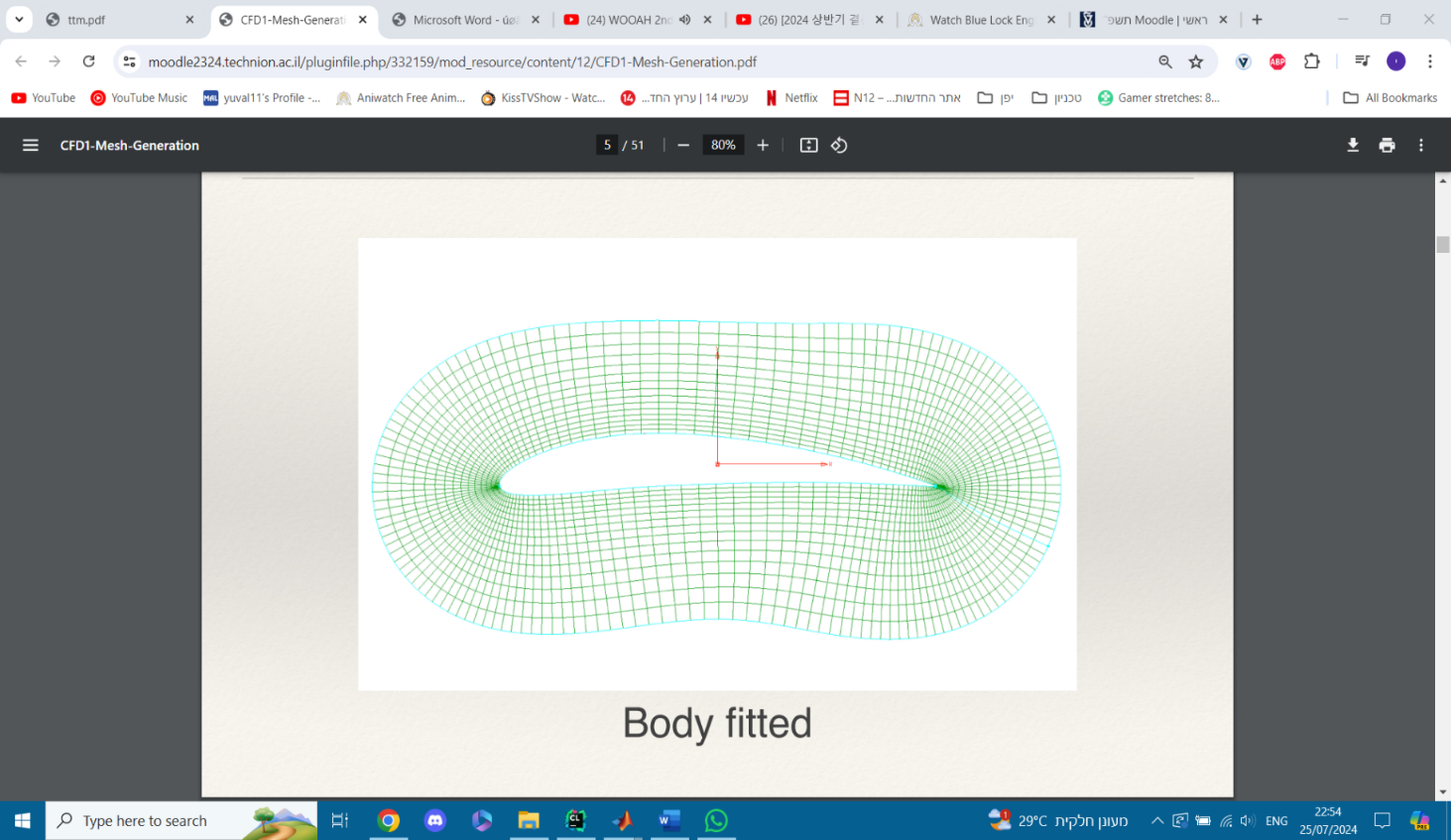
|  |  |
| --- | --- |
| (9) |  |

כאשר:

|  |  |
| --- | --- |
| (10) |  |

המרה לקואורדינטות עקומות

בשיעורי הבית הקודמים, יצרנו רשת עם קואורדינטות עקומות עבור הפרופיל הנדרש מסוג Body Fitted - רשת סדורה בה צירי הרשת מותאמים לצורת הגוף – אחד הכיוונים עוקב אחר צורת הגוף - ,והשני "מנפח" את הרשת – .



איור 1 - Body fitted mesh

כתוצאה מכך, נצטרך להמיר את המשוואות השולטות גם כן. נזכור כי מערכות הצירים מקושרות דרך המטריצה הבאה:

|  |  |
| --- | --- |
| (11) |  |

ויעקוביאן הטרנספורמציה, ,מוגדר באופן הבא:

|  |  |
| --- | --- |
| (12) |  |

נשתמש בקשר הנ"ל על מנת להגדיר את כללי השרשרת הבאים:

|  |  |
| --- | --- |
| (13) |  |
| (14) |  |
| (15) |  |

נציב קשרים אלה במשוואה (*9*):

|  |  |
| --- | --- |
| (16) |  |

נשים לב לקשר הבא, הנובע מנגזרת מכפלה:

|  |  |
| --- | --- |
| (17) |  |

נכפיל את משוואה (*9*) ב ונשתמש בקשר (*17*) על כל האיברים:

|  |  |
| --- | --- |
| (18) |  |

נזכור כי:

|  |  |
| --- | --- |
| (19) |  |

נציב במשוואה (*18*) ונסדר:

|  |  |
| --- | --- |
| (20) |  |
|  |  |
| (21) |  |

נגדיר:

|  |  |
| --- | --- |
| (22) |  |

ונקבל את הצורה הבאה עבור משוואות אוילר בקואורדינטות עקומות:

|  |  |
| --- | --- |
| (23) |  |

נציב את משוואה (*10*) במשוואה (*23*):

|  |  |
| --- | --- |
| (24) |  |

נגדיר את המהירות במישור החישובי - Contravariant Velocity:

|  |  |
| --- | --- |
| (25) |  |
| (26) |  |

נציב במשוואה (*24*):

|  |  |
| --- | --- |
| (27) |  |

ניתן לבטא את רכיבי הווקטורים בעזרת רכיבי הווקטור :

|  |  |
| --- | --- |
| (28) |  |

|  |  |
| --- | --- |
| (29) |  |
| (30) |  |

# השיטה הנומרית

אלגוריתם Beam&Warming

אלגוריתם זה משתמש באינטגרציה בשיטת הטרפז והפרשים קדמים בזמן(סדר שני):

|  |  |
| --- | --- |
| (31) |  |

כפי שניתן לראות ממשוואות (*28*)-(*30*) אינן פונקציות לינאריות של לכן נדרש לבצע לינאריזציה לפני חישוב הנגזרות:

|  |  |
| --- | --- |
| (32) |  |
| (33) |  |

כאשר:

|  |  |
| --- | --- |
| (34) |  |

והן מטריצות יעקוביאן המוגדרות באופן הבא:

|  |  |
| --- | --- |
| (35) |  |

|  |  |
| --- | --- |
| (36) |  |

הקבועים מוגדרים כך:

|  |  |
| --- | --- |
| (37) |  |

בשביל לקבל את מטריצה נציב , ועבור מטריצה נציב .

נפתח לטור טיילור:

|  |  |
| --- | --- |
| (38) |  |

|  |  |
| --- | --- |
| (39) |  |

נציב במשוואה (*31*):

|  |  |
| --- | --- |
| (40) |  |

|  |  |
| --- | --- |
| (41) |  |

|  |  |
| --- | --- |
| (42) |  |

|  |  |
| --- | --- |
| (43) |  |

באופן דומה,עבור שיטת Euler Implicit נקבל את הסכמה הנומרית הבאה:

|  |  |
| --- | --- |
| (44) |  |

נציין כי סכמה זו יציבה יותר מהסכמה שהתקבלה משימוש בשיטת הטרפז, ועדיפה לשימוש פתרון במצב מתמיד.

נשתמש בהפרשים מרכזיים לחישוב הנגזרות המרחביות:

|  |  |
| --- | --- |
| (45) |  |

ניתן לפתור סכמה זו בעזרת היפוך block penta-diagonal matrix אך שיטה זו בעלת מחיר חישובי רב לכן נשתמש בשיטת ADI:

נשים לב כי:

|  |  |
| --- | --- |
| (46) |  |

את השגיאה נצמצם בעזרת איטרציות, וניתן להעריכה באופן הבא:

|  |  |
| --- | --- |
| (47) |  |

ביטוי המזכיר מכפלה של שני מספרי CFL חד מימדיים.

תהליך הפתרון:

|  |  |
| --- | --- |
| (48) |  |

|  |  |
| --- | --- |
| (49) |  |

|  |  |
| --- | --- |
| (50) |  |

|  |  |
| --- | --- |
| (51) |  |

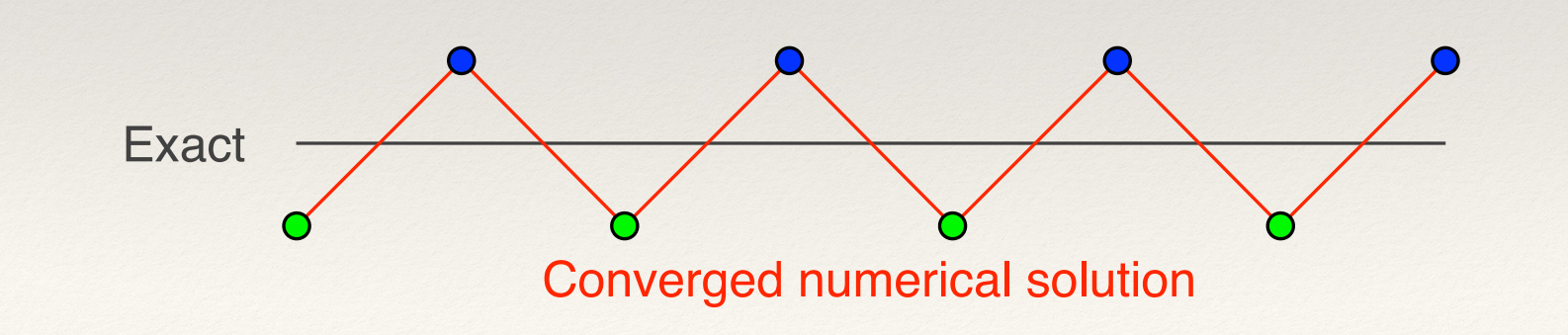
משוואות (*49*),(*50*) כוללות block tridiagonal line inversions ,לדוגמא עבור היפוך בכיוון :

|  |  |
| --- | --- |
| (52) |  |

נחזור על התהליך עד שהפתרון יתכנס,כאשר נשתמש בקריטריון על להגדרת התכנסות:

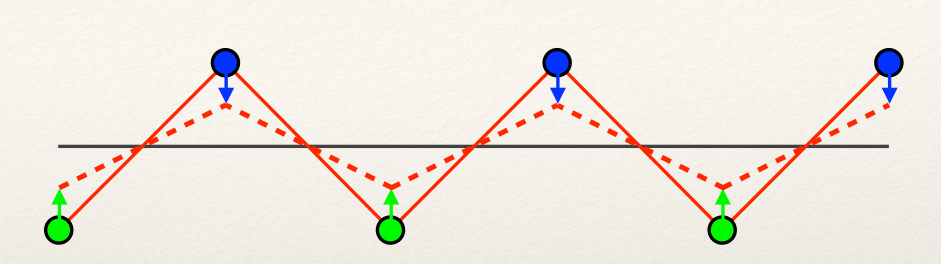
|  |  |
| --- | --- |
| (53) |  |

נזכיר כי השתמשנו בהפרשים מרכזיים לחישוב הנגזרות המרחביות – סכמות העושות שימוש באופרטור זה עלולות לסבול מ"שגיאת לוח שחמט" – פתרון המורכב משתי תת קבוצות של פתרונות שעבור כל אחת מהן בנפרד הפתרון התכנס, אך הפתרון הכולל יתנוד בתדירות גבוהה.



איור 2 -" שגיאת לוח שחמט". בכחול ובירוק - שני "תתי פתרונות"

ניתן להתמודד עם תופעה זו בעזרת הוספת איבר דיסיפציה מלאכותי – איבר המכיל נגזרות מרחביות מסדר שני או רביעי אשר יקטין את אמפליטודת התנודה.



איור 3 - השפעת דיסיפציה מלאכותית על "שגיאת לוח שחמט"

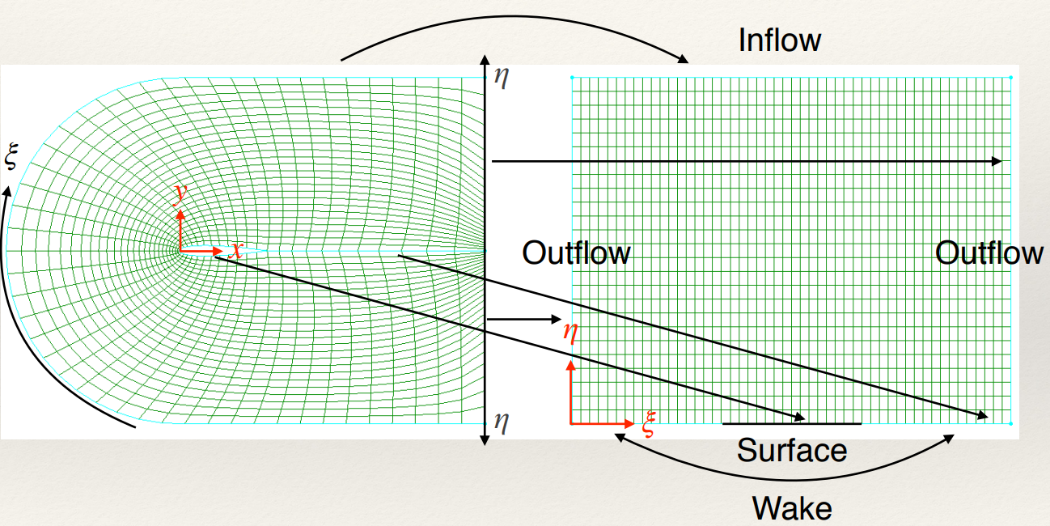
סיבה נוספת לשימוש בדיסיפציה מלאכותית תתקבל לאחר שימוש ב modified equation analysisעל סכמת Beam&Warming בשימוש Euler Implicit:

|  |  |
| --- | --- |
| (54) |  |

כלומר השגיאה היא מסוג dispersive ותורמת לתנודתיות בקרבת נקודות אי רציפות.

תנאי שפה

תחילת נזכיר כיצד נראים תנאי השפה במישור החישובי:



איור 4 – תנאי השפה במישור החישובי

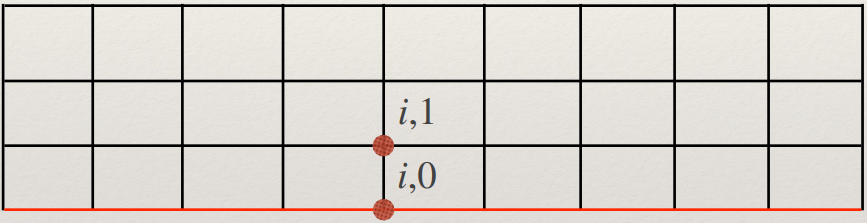
עבור ,תנאי free stream הוגדרו בתור תנאי השפה – אותם נקבל בתור קלט לפותרן.

עבור , נעשה שימוש בשלושה תנאי שפה שונים, כתלות באינדקס :

1. קיר אדיאבטי : עבור זרימה אידיאלית דו מימדית, נקח את הגדלים הנשמרים מתא אחד מעל ונדרוש קיום תנאי אי חדירה:

|  |  |
| --- | --- |
| (55) |  |

כאשר U,V הם רכיבי המהירות במישור החישובי, והרכיבים עם האינדקס ידועים מהאיטרציה הקודמת



איור 5 - תנאי שפה קיר אדיאבטי

נשתמש במשוואות (*25*),(*26*) עבור רשת קבועה ונקבל את מערכת המשוואה עבור רכיבי המהירות על פרופיל:

|  |  |
| --- | --- |
| (56) |  |

משימוש בכלל קרמר נקבל:

|  |  |
| --- | --- |
| (57) |  |

|  |  |
| --- | --- |
| (58) |  |

נשתמש במשוואה (*8*) לחישוב הלחץ על הפרופיל:

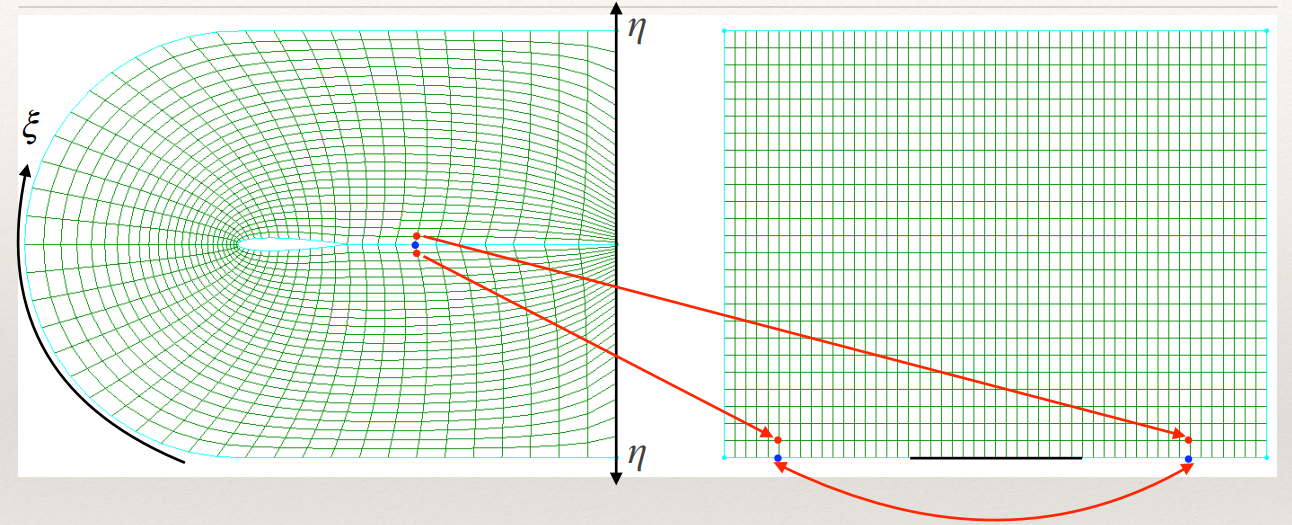
|  |  |
| --- | --- |
| (59) |  |

כעת נוכל לחשב את האנרגיה הכוללת על הפרופיל בעזרת משוואות (*6*),(*7*):

|  |  |
| --- | --- |
| (60) |  |

לאחר מכן ניתן לחשב את הוקטור כפי שמתואר במשוואה (*10*).

1. תנאי קוטה : באופן דומה לתנאי השפה הקודם, נחשב את המהירויות,הצפיפות והלחץ בשני האינדקסים הנמצאים בשפת הזרימה. נמצע את הערכים, נחשב את האנרגיה הכוללת ונחשב את הוקטור עבור אינדקסים אלו.
2. תנאי שפה מסוג cut : נדרוש רציפות בערכים מעל ומתחת לעקבה, לכן נמצע את הערכים למציאת הערכים על העקבה:



איור 6 - תנאי שפה cut

|  |  |
| --- | --- |
| (61) |  |

עבור נשתמש בתנאי שפה מסוג outflow אותו נגדיר באמצעות אקסטרפולציה:

|  |  |
| --- | --- |
| (62) |  |



איור 7 - תנאי שפה outflow

# תיאור פונקציונלי של התוכנית

התוכנה נכתבה בצורה מודולרית, עם האפשרות לשנות את פרמטרי הבעיה ללא צורך בקימפול מחדש של הקוד.

אופן הפעולה של התוכנה מתואר בתרשים הבא:

כניסה לפונקצית step

חישוב LHS באמצעות היפוך מטריצות בכיוון וsmoothx

חישוב המטריקות והיעקוביאן

חישוב פתרון ראשוני – שדה זרימה קבוע

חישוב תנאי השפה

קבלת פרמטרים מתוך קובץ טקסט

קריאת הרשת מתוך קובץ טקסט

עדכון Q

בדיקת התכנסות

התכנס - ייצוא הפתרון לקובץ טקסט

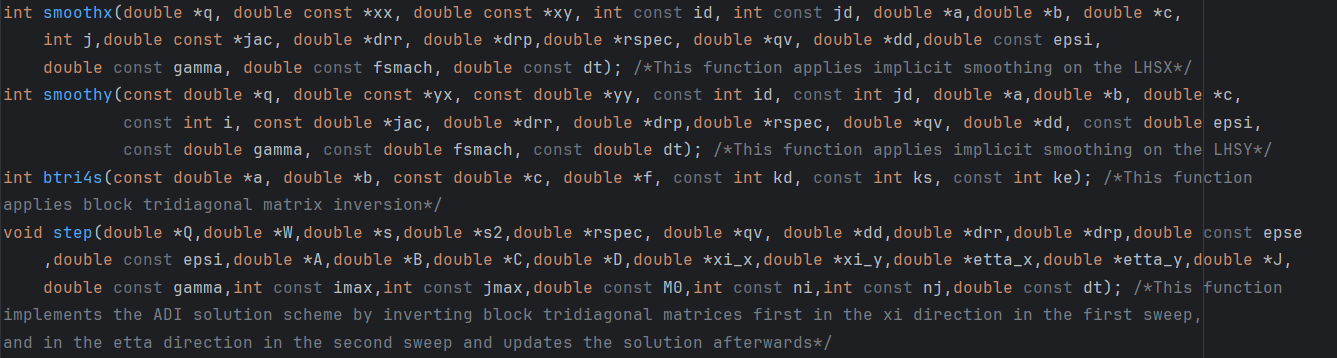
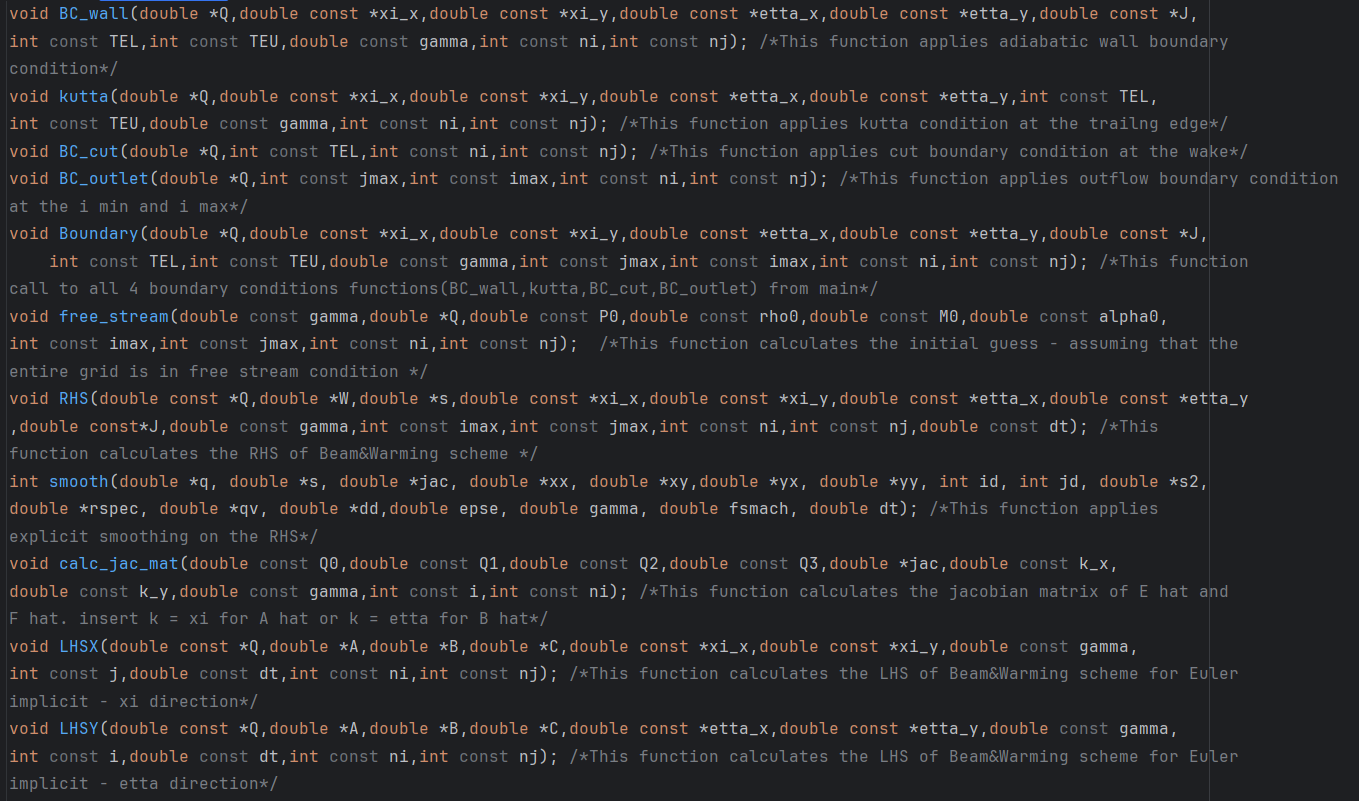
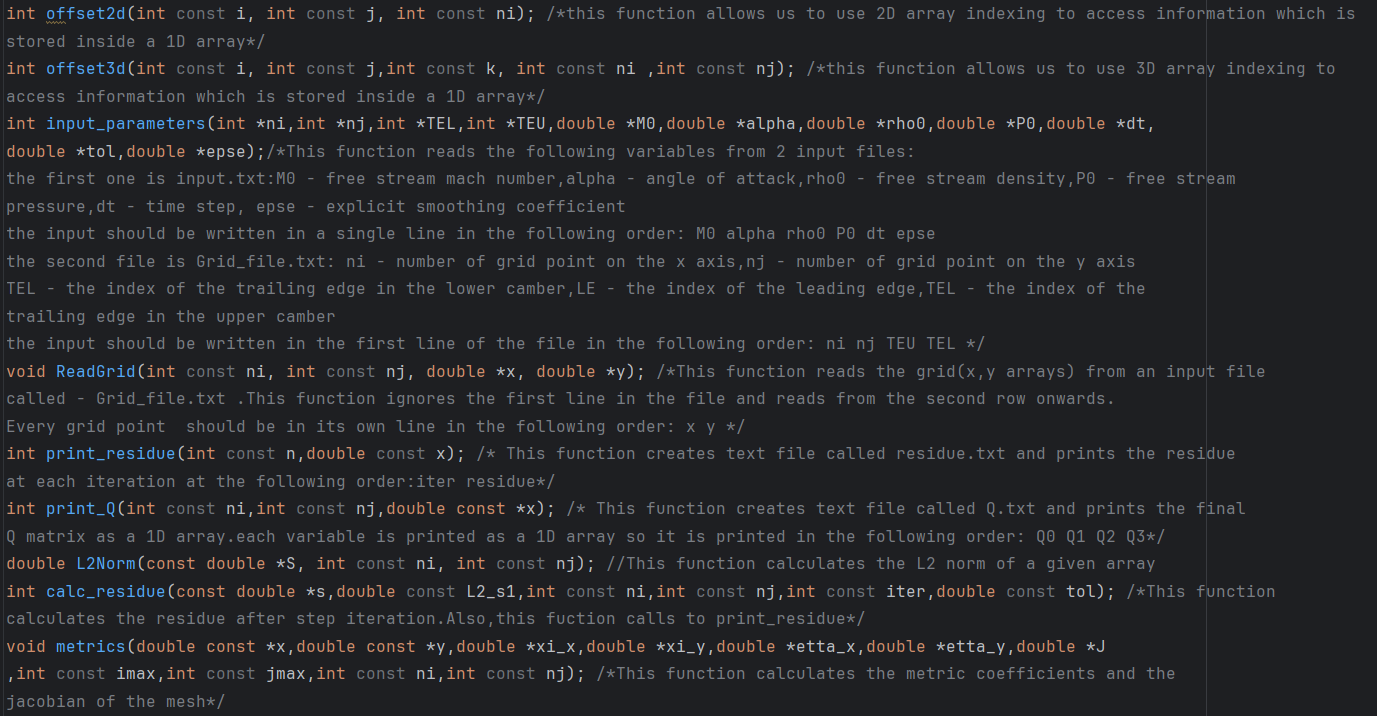
לא התכנס – איטרציה נוספת

חישוב Q באמצעות RHS ושימוש בsmooth

חישוב LHS באמצעות היפוך מטריצות בכיוון וsmoothy

איור 8 - תיאור מהלך הפתרון

פירוט והסבר על הפונקציות המוכלות בתוכנית המחשב:



# תוצאות

## השפעת פונקציות הבקרה על הפתרון

# סיכום ומסקנות