1. Espais afins

1.1 Siguin a, b, c i d punts d'un espai afí. Demostreu que les condicions següents són equivalents i que, sota aquestes condicions, els quatre punts són coplanaris:

(a) $\overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ad} = \overrightarrow{ac}$;

(b) $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{dc}$;

(c) $\overrightarrow{ad} = \overrightarrow{bc}$;

(d) $a + \frac{1}{2}\overrightarrow{ac} = b + \frac{1}{2}\overrightarrow{bd}$;

(e) $c = a + \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{ad}$.

Nota: Quan quatre punts a, b, c i d són diferents i no n'hi ha tres d'alineats i se satisfan aquestes condicions, es diu que els quatre punts formen un *paral·lelogram* de costats ab, bc, cd i da. La quarta condició ens diu que els paral·lelograms estan caracteritzats pel fet que les diagonals es tallen en els seus punts mitjans.

1.2 Siguin $p_1, \dots, p_n$ punts d'un espai afí i sigui σ una permutació del conjunt d'índexs $\{1, 2, \dots, n\}$. Demostreu la relació $\overrightarrow{p_1 p_{\sigma(1)}} + \cdots + \overrightarrow{p_n p_{\sigma(n)}} = 0$.

1.3 Siguin $\{p_1, \dots, p_n\}$ i $\{q_1, \dots, q_n\}$ dos conjunts de punts en un espai afí i siguin P i Q els seus baricentres respectius. Expresseu la suma $\overrightarrow{p_1 q_1} + \cdots + \overrightarrow{p_n q_n}$ en funció de $\overrightarrow{PQ}$.

1.4 En un pla afí es consideren quatre punts diferents A, B, C i D. Demostreu que els punts mitjans de AB, BC, CD i DA són els vèrtexs d'un paral·lelogram o bé estan alineats. Digueu si el mateix és cert prenent punts A, B, C, D en un espai afí de dimensió tres.

1.5 En un pla afí amb cos base $\mathbb{R}$, suposem que A, B, C i D són quatre punts diferents i no n'hi ha tres d'alineats. Demostreu que si $\overrightarrow{AC} = \lambda\,\overrightarrow{AB} + \mu\,\overrightarrow{AD}$ amb $\lambda\mu > 0$, llavors entre els punts mitjans dels costats AB, BC, CD i DA no n'hi ha tres d'alineats. Doneu un contraexemple en cas que $\lambda\mu < 0$.

1.6 Sigui ABC un triangle del pla afí. Siguin P el punt mitjà del costat BC, Q el punt mitjà de AC i R el punt mitjà de AB. Demostreu els fets següents:

(a) Les rectes AP, BQ i CR, anomenades mitjanes del triangle, es tallen en un punt G.

(b) El punt G és el baricentre de A, B i C.

(c) Es compleix que $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GP}$, $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{GQ}$ i $\overrightarrow{CG} = 2\overrightarrow{GR}$.

1.7 En un pla afí es considera un paral·lelogram $ABCD$ de diagonals AC i BD. Sigui P el punt mitjà del costat DC i sigui Q el punt mitjà del costat BC. Demostreu que les rectes AP i AQ divideixen la diagonal BD en tres parts iguals.

1.8 En un pla afí considerem un triangle de vèrtexs P_1, P_2 i P_3. Per a $i = 1, 2, 3$, sigui Q_i el punt mitjà de la mitjana des del vèrtex P_i. Demostreu que els triangles $P_1P_2P_3$ i $Q_1Q_2Q_3$ tenen els costats paral·lels.

1.9 Siguin $V_1 = a + F$ i $V_2 = b + G$ dues varietats lineals d'un espai afí $\mathbb{A}$ i sigui E l'espai vectorial associat a $\mathbb{A}$. De les implicacions següents (on $\{p\}$ designa un conjunt amb un únic element), demostreu les que siguin certes i doneu un contraexemple de les que siguin falses:

(a) $E = F + G \;\Rightarrow\; \mathbb{A} = V_1 + V_2$;

(b) $\mathbb{A} = V_1 + V_2 \;\Rightarrow\; E = F + G$;

(c) $F \cap G = \{\overrightarrow{0}\} \;\Rightarrow\; V_1 \cap V_2 = \{p\}$;

(d) $V_1 \cap V_2 = \{p\} \;\Rightarrow\; F \cap G = \{\overrightarrow{0}\}$;

(e) $E = F \oplus G \;\Rightarrow\; V_1 \cap V_2 = \{p\}$.

1.10 Considerem l'espai afí $\mathbb{A}^3$ ordinari o estàndard ($\mathbb{A} = \mathbb{R}^3$, $E = \mathbb{R}^3$). Demostreu que els conjunts de punts següents són varietats lineals. Determineu les seves dimensions, els subespais directors i un sistema d'equacions paramètriques de cadascuna d'elles.

$$\begin{aligned}
V_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{A} \mid x + y + z = 3\};\\
V_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{A} \mid x - y + z = 0\};\\
V_3 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{A} \mid x - y + z = 0,\ x - 2y = 1\};\\
V_4 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{A} \mid y + z = 0,\ x - 3y + 2z = 2\};\\
V_5 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{A} \mid x - 2y = 1,\ x + y - z = 2,\ 3x - 2z = 5\};\\
V_6 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{A} \mid x + 3z = 1,\ x - y + 2z = 1,\ 3y + z = 0\}.
\end{aligned}$$

Determineu la dimensió i el subespai vectorial director de la varietat lineal intersecció $V_2 \cap V_4$.

1.11 Sigui $\mathbb{A}$ un espai afí de dimensió 4 sobre $\mathbb{R}$. En un sistema de referència $\{p; u_1, u_2, u_3, u_4\}$ tenim les varietats lineals següents:

$$V_1 : \left\{ \begin{array}{l} x + y - z + t = 1 \\ x - 2y + t = 0; \end{array} \right. \qquad V_2 : 2x + 4y - 2z + t = 1;$$

$$V_3 = \{(1,1,1,0)\} + \{(0,0,2,1)\}; \qquad V_4 = \{(-4,-3,-9,0)\} + \{(2,-1,1,0)\} + \{(1,0,1,0)\}.$$

(a) Determineu-ne les dimensions i trobeu els subespais vectorials associats.

(b) Calculeu $V_1 \cap V_2$; $V_3 \cap V_4$; $V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap V_4$; $V_1 + V_2$; $V_3 + V_4$; $V_1 + V_2 + V_3 + V_4$.

(c) Determineu una varietat V_5 de dimensió 2 que passi per p i sigui paral·lela a $V_1 \cap V_2$.

1.12 Siguin $H_1, \ldots, H_n$ hiperplans d'un espai afí real de dimensió n. Demostreu que si $\dim(H_1 \cap \cdots \cap H_n) = 0$, aleshores per a tot $0 \le i \le n$ es té $\dim(H_1 \cap \cdots \cap H_i) = n - i$.

1.13 En un espai afí de dimensió 3 tenim dues rectes que, en una referència afí, tenen les equacions

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x + z = 0 \\ y = -2; \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y - z + 3 = 0. \end{array} \right.$$

Trobeu la recta t que passa pel punt $(1,1,0)$ i talla r i s.

1.14 Siguin r i s dues rectes de l'espai afí real de dimensió 3 i sigui P un punt que no pertany a cap d'elles. Estudieu si existeixen rectes t (i quantes n'hi ha) que passin per P i tallin r i s. Discutiu els casos possibles segons la posició relativa de r i s.

1.15 Donades tres rectes r, s i t de $\mathbb{A}^3$ de manera que els seus vectors directors siguin linealment independents, demostreu que existeix una única recta l paral·lela a t tal que $r \cap l \neq \emptyset$, $s \cap l \neq \emptyset$.

1.16 Sigui $\mathbb{A}$ un espai afí de dimensió 4 sobre $\mathbb{R}$. En una referència afí donada, considerem

$$r : x = y = z = t; \qquad \pi_{(a,b)} : \begin{cases} ax + y + z + t = b \\ x + by - z + t = a. \end{cases}$$

Estudieu les posicions relatives de la recta r i el pla $\pi_{(a,b)}$ segons els diferents valors de a i b.

1.17 (Tardor 2018) En un pla afí considerem un quadrilàter de vèrtexs consecutius $ABCD$. Siguin $K \in AC$ i $M \in BD$ punts tals que BK és paral·lela a AD i AM és paral·lela a BC. Demostreu que KM i CD també són paral·leles.

1.18 (Tardor 2018) Sigui ABC un triangle en un pla afí. Considerem dos punts $A_1, A_2 \in BC$ simètrics respecte del punt mitjà de B i C. De la mateixa manera es defineixen B_1 i B_2 en el costat AC i C_1 i C_2 en el costat AB. Demostreu que els baricentres dels triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ i ABC estan alineats.

1.19 (Tardor 2019) Siguin A, B, C, D els vèrtexs consecutius d'un paral·lelogram d'un pla afí. Siguin $E \in AB$ i $F \in CD$ tals que EF sigui paral·lela i diferent a AD. Anàlogament. siguin $G \in BC$ i $H \in AD$ tals que GH sigui paral·lela i diferent a AB. Demostreu que les rectes EH, GF, BD són concurrents o bé són paral·leles.

1.20 (Tardor 2016) Siguin $P_1, \ldots, P_6$ sis punts diferents en un pla afí. Suposem que els punts P_1, P_2, P_3 són linealment independents i suposem que es compleix $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_5P_4}$ i $\overrightarrow{P_1P_3} = \overrightarrow{P_6P_4}$.

(a) Demostreu que $\overrightarrow{P_2P_6} = \overrightarrow{P_3P_5}$.

(b) Demostreu que les rectes P_1P_4, P_2P_5 i P_3P_6 es tallen en el baricentre del conjunt $\{P_1, \ldots, P_6\}$.

1.21 Donades dues rectes r i s de l'espai afí real de dimensió 3, trobeu el lloc geomètric dels punts mitjans dels parells de punts a, b amb $a \in r$ i $b \in s$.

1.22 En l'espai afí real $\mathbb{A}$ de dimensió 3 es consideren dos plans no paral·lels π_1 i π_2 i una recta r no paral·lela a cap d'ells. Descriviu el lloc geomètric dels punts mitjans de les interseccions amb π_1 i π_2 de les rectes de l'espai paral·leles a r.

1.23 Donades dues rectes que s'encreuen a l'espai afí de dimensió 3 i un pla no paral·lel a cap d'elles, determineu el lloc geomètric dels punts mitjans dels segments amb un extrem a cada recta i paral·lels al pla.

1.24 Fixat un tetràedre en un espai afí i un parell d'arestes oposades d'aquest, es consideren els plans paral·lels a aquest parell de rectes que no contenen cap d'elles.

(a) Demostreu que aquests plans tallen les arestes restants en els vèrtexs d'un paral·lelogram.

(b) Demostreu que els punts d'intersecció de les diagonals d'aquests paral·lelograms es troben sobre una recta i descriviu-la geomètricament.

1.25 Siguin $a \neq b$ dos punts del pla afí real. Dibuixeu els punts p_i, per a $i = 1, \ldots, 9$, tals que

$$\begin{array}{lll} (p_1, a, b) = 3; & (p_2, a, b) = 1; & (p_3, a, b) = 0; \\ (a, p_4, b) = 3; & (a, p_5, b) = 1; & (a, p_6, b) = 0; \\ (a, b, p_7) = 3; & (a, b, p_8) = 1; & (a, b, p_9) = 0. \end{array}$$

Atenció! No tots els casos són possibles.

1.26 Siguin a, b, c tres punts d'una recta r i a', b', c' punts d'una recta s. Suposem que les dues ternes tenen la mateixa raó simple: $(a, b, c) = (a', b', c')$. Siguin a'', b'', c'' punts tals que

$$(a, a', a'') = (b, b', b'') = (c, c', c'').$$

Demostreu que a'', b'' i c'' estan alineats i calculeu la raó simple (a'', b'', c'').

1.27 Sigui ABC un triangle i siguin A', B' i C' tres punts situats sobre les rectes BC, AC i AB respectivament. Demostreu que els triangles ABC i $A'B'C'$ tenen el mateix baricentre si i només si se satisfan les igualtats $(A', B, C) = (B', C, A) = (C', A, B)$.

1.28 (Tardor 2018) Siguin l_1 i l_2 dues rectes en un pla afí que es tallen en un punt O. Suposem donats punts $p_1, q_1 \in l_1$ i $p_2, q_2 \in l_2$ diferents entre ells i diferents del punt O. Denotem per b_p el baricentre de O, p_1 i p_2, i b_q el baricentre de O, q_1 i q_2.

(a) Demostreu que les rectes p_1p_2 i q_1q_2 són paral·leles si i només si O, b_p i b_q estan alineats.

(b) Suposant que es donen les condicions equivalents de (a), demostreu la igualtat de raons simples següent:

$$(O, p_1, q_1) = (O, p_2, q_2) = (O, b_p, b_q).$$

(c) Novament suposant que les condicions de (a) es compleixen, demostreu que les rectes p_1q_2, p_2q_1 són paral·leles si i només si el baricentre dels quatre punts p_1, p_2, q_1, q_2 és O.

1.29 (Tardor 2019) Sigui ABC un triangle del pla afí i denotem per m_A, m_B, m_C els punts mitjans de BC, AC i AB respectivament. Sigui b el baricentre del triangle ABC. Donat un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, siguin A', B', C' tals que

$$(A', m_A, b) = (B', m_B, b) = (C', m_C, b) = \lambda.$$

Demostreu que els triangles ABC i $A'B'C'$ tenen els costats paral·lels dos a dos.

1.30 (Tardor 2019) En un espai afí de dimensió 3 considerem un tetràedre de vèrtexs A, B, C i D. Siguin $B' \in AB$, $C' \in AC$ i $D' \in AD$ punts diferents dels vèrtexs.

(a) Demostreu que les condicions següents són equivalents:

i. Els plans $B'C'D'$ i BCD són paral·lels.

ii. Es compleix la igualtat de raons simples $(B', B, A) = (C', C, A) = (D', D, A)$.

iii. Els baricentres $b_A = \mathrm{bar}(B, C, D)$, $b'_A = \mathrm{bar}(B', C', D')$ i $b = \mathrm{bar}(A, B, C, D)$ estan alineats.

(b) Suposant certes les condicions de l'apartat anterior, demostreu que

$$(b_A, b'_A, b) \cdot (4(B', B, A) - 3) = 1.$$

1.31 (Tardor 2020) Sigui $ABCD$ un tetràedre en un espai afí $\mathbb{A}^3$ de dimensió 3. Donats dos punts X, Y, denotem per M_{XY} el punt mitjà de X i de Y. Sigui r la recta que passa per M_{AB} i M_{CD}, sigui s la recta que passa per M_{AC} i M_{BD}, i sigui t la recta que passa per M_{AD} i M_{BC}.

(a) Demostreu que les rectes r, s i t es tallen en el baricentre G del tetràedre.

(b) Demostreu que $(M_{AB}, M_{CD}, G) = (M_{AC}, M_{BD}, G) = (M_{AD}, M_{BC}, G) = -1$.

1.32 (Tardor 2020) En un pla afí considerem un trapezi de vèrtexs consecutius $ABCD$ i de costats paral·lels AB i CD. Siguin M i N els punts mitjans de A, B i de C, D respectivament. Definim $E = AC \cap BD$ i $F = AD \cap BC$.

(a) Demostreu que E, F, M, N estan alineats.

(b) Demostreu que $(A, E, C) = (B, E, D)$.

1.33 (Primavera 2021) Siguin A, B, C i D vèrtexs consecutius d'un paral·lelogram i sigui G el baricentre del paral·lelogram. Sigui P un punt de la recta AB i sigui Q un punt de la recta CD.

(a) Demostreu que si les rectes AQ i DP es tallen en un punt M i les rectes BQ i CP es tallen en un punt N, llavors els punts M, N i G són diferents i estan alineats.

(b) En les hipòtesis de l'apartat anterior, calculeu la raó simple (M, N, G) en funció de les raons simples (P, B, A) i (Q, C, D).

(c) Demostreu que si les rectes AQ i DP són paral·leles i $N \neq G$, llavors la recta NG és paral·lela a AQ. Quins han de ser els punts P i Q per tal que $N = G$?

1.34 (Tardor 2017) Suposem que A, B, C i D són vèrtexs consecutius d'un paral·lelogram en un pla afí.

(a) Demostreu que els baricentres de tots els triangles PQR on P pertany a la recta AB i els punts Q i R pertanyen a la recta CD estan alineats.

(b) Fixem dos punts $P \in AB$ i $Q \in AD$, tots dos diferents dels vèrtexs del paral·lelogram. Demostreu que els punts O tals que la recta OP talla la recta BC en un punt P' i la recta OQ talla CD en un punt Q' tals que $(P, P', O) = (Q, Q', O)$ pertanyen tots a una recta r que passa per C.

(c) Demostreu que la recta r passa pel vèrtex A si i només si $(P, B, A) = (Q, D, A)$.