Geometria Lineal 19-20
Grau de Matemàtiques, UB

Joan Carles Naranjo

7 de setembre de 2021

Introducció

Aquestes són les notes de l'assignatura semestral Geometria Lineal del grau de Matemàtiques de la UB corresponents al curs 2021-2022.

Se suposa que els alumnes que cursen l'assignatura han superat els cursos precedents en el Grau "Matrius i Vectors" i "Àlgebra Lineal".

Aquests apunts s'han beneficiat dels comentaris i suggeriments fets per Miguel Angel Barja, Carles Casacuberta, Eduard Casas, Teresa Cortadellas, Gerald Welters i Carlos D'Andrea als que vull expressar el meu reconeixement.

Índex

1 Espais afins

En tot el tema treballem amb un cos K fixat al qual anomenarem cos base. En certs moments necessitarem posar hipòtesis sobre el cos, per exemple que sigui de característica 0. Això vol dir que si 1 és l'element neutre respecte del producte, aleshores $n \cdot 1 \stackrel{def}{=} 1 + \overset{n)}{\cdots} + 1 \neq 0$ per a qualsevol natural $n > 0$. En particular K conté $\mathbb{Z}$ i tots els enters no nuls tenen invers.

1.1 Espais Afins.

Definició 1.1. *Un* **espai afí** *sobre K és un triple $(\mathbb{A}, E, \phi)$, on $\mathbb{A}$ és un conjunt, E és un K-espai vectorial de dimensió finita i ϕ és una aplicació:*

$$\begin{aligned} \phi: \quad & \mathbb{A} \times E \longrightarrow \mathbb{A} \\ & (p, \vec{u}) \mapsto \phi(p, \vec{u}) \stackrel{notació}{=} p + \vec{u} \end{aligned}$$

amb les propietats següents:

a) $(p + \vec{u}) + \vec{v} = p + (\vec{u} + \vec{v}), \qquad \forall p \in \mathbb{A}, \ i\ \forall \ \overrightarrow{u}, \ \overrightarrow{v} \in E$

b) Fixat $p \in \mathbb{A}$, l'aplicació $f : E \longrightarrow \mathbb{A}$ tal que $f(\vec{u}) = p + \vec{u}$ és bijectiva.

Als elements de $\mathbb{A}$ els anomenem **punts**. *La propietat b) ens diu que "hi ha tants punts com vectors". A causa d'això, és natural definir la dimensió de l'espai afí com la dimensió del K-espai vectorial E. Sovint direm que $(\mathbb{A}, E)$ és un espai afí sense fer esment explícit al cos base ni a l'aplicació ϕ.*

Exemple. Considerem el producte cartesià K^n com a conjunt de punts i d'altra banda $E := K^n$ amb l'estructura natural de K-espai vectorial. Definim l'aplicació

$$\phi : K^n \times E \longrightarrow K^n, \qquad ((\dots, x_i, \dots), (\dots, y_i, \dots)) \mapsto (\dots, x_i + y_i, \dots).$$

Aleshores (K^n, E, ϕ) és un espai afí de dimensió n. Usem el símbol $\mathbb{A}^n_K$ per referir-nos a aquest exemple.

Les propietats de la definició d'espai afí es poden reformular com segueix:

Proposició 1.2. *Siguin $p, q, r \in \mathbb{A}$ punts de l'espai afí. Aleshores a), b) de la definició són equivalents a:*

c) Existeix un únic vector $\overrightarrow{v}$ tal que $p + \overrightarrow{v} = q$. Diem $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{pq}$.

d) $\overrightarrow{pr} = \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr}$.

Demostració: La propietat c) és una re-escriptura de la propietat b) de la definició. Si posem $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ pels vectors $\overrightarrow{pq}$, $\overrightarrow{qr}$ tenim per la propietat a) de la definició:

$$p + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = (p + \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{v} = (p + \overrightarrow{pq}) + \overrightarrow{qr} = q + \overrightarrow{qr} = r.$$

Per tant $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{pr}$. Viceversa, si $p \in \mathbb{A}$ i $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in E$ anomenem q a $p + \overrightarrow{u}$ i r a $q + \overrightarrow{v} = (p + \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{v}$. Per provar a) hem de veure que $r = p + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$, o sigui que $\overrightarrow{pr} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr}$ que és cert perquè estem suposant d). $\square$

Observació. Segons aquesta proposició una definició alternativa d'espai afí és donar un triple $(\mathbb{A}, E, \psi)$, amb $\mathbb{A}$ conjunt de punts, E un K-espai vectorial i ψ una aplicació exhaustiva:

$$\begin{aligned} \psi : \quad & \mathbb{A} \times \mathbb{A} \longrightarrow E \\ & (p,q) \mapsto \psi(p,q) = \overrightarrow{pq} \end{aligned}$$

satisfent les propietats c) i d).

Proposició 1.3. *Es tenen les propietats següents:*

a) $\overrightarrow{pq} = 0 \iff p = q$

b) $\overrightarrow{pq} = -\overrightarrow{qp}$

c) $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{rs}$ *si, i només si* $\overrightarrow{pr} = \overrightarrow{qs}$

Demostració: Per provar a) primer notem que per la propietat d) de la proposició anterior aplicada a $p = q = r$ tenim que $\overrightarrow{pp} = \overrightarrow{pp} + \overrightarrow{pp}$. Simplificant: $\overrightarrow{pp} = \overrightarrow{0}$. Suposem ara que $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{0}$, aleshores:

$$p = p + \overrightarrow{0} = p + \overrightarrow{pq} = q.$$

Per demostrar b) notem que $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{pp} = \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qp}$. Finalment, com $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{pr} + \overrightarrow{rs} + \overrightarrow{sq}$, aleshores $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{rs}$ si, i només si $\overrightarrow{pr} + \overrightarrow{sq} = \overrightarrow{0}$ i si, i només si $\overrightarrow{pr} = -\overrightarrow{sq} = \overrightarrow{qs}$. □

1.2 Sumes de punts. Baricentres.

En aquest apartat suposem que el cos base té característica zero, ja que necessitarem que els escalars $\frac{1}{k}$ estiguin ben definits en K per a tots els naturals $k \neq 0$.

En general no té cap sentit fer combinacions lineals de punts perquè les úniques operacions permeses són la suma de vectors (operació en l'espai vectorial E) i la suma ϕ de punt i vector. Podríem convenir que per definir una combinació lineal de punts:

$$\alpha_1 p_1 + \cdots + \alpha_k p_k,$$

amb $\alpha_i \in K$, $p_i \in \mathbb{A}$, es fixa un punt auxiliar O i es calcula:

$$O + \alpha_1 \overrightarrow{Op_1} + \cdots + \alpha_k \overrightarrow{Op_k}. \tag{1}$$

Això no tindrà cap interés si el resultat de (1) depèn del punt O.

Proposició 1.4. *Per a qualsevol parella de punts* $O, O' \in \mathbb{A}$ *es té la igualtat*

$$O + \alpha_1 \overrightarrow{Op_1} + \cdots + \alpha_k \overrightarrow{Op_k} = O' + \alpha_1 \overrightarrow{O'p_1} + \cdots + \alpha_k \overrightarrow{O'p_k} \tag{2}$$

si, i només si $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$.

Demostració: La igualtat (2) equival a

$$O + \alpha_1\,\overrightarrow{Op_1} + \cdots + \alpha_k\overrightarrow{Op_k} - \alpha_1\,\overrightarrow{O'p_1} - \cdots - \alpha_k\overrightarrow{O'p_k} = O'$$

és a dir:

$$\overrightarrow{OO'} = \alpha_1(\overrightarrow{Op_1} - \overrightarrow{O'p_1}) + \cdots + \alpha_k(\overrightarrow{Op_k} - \overrightarrow{O'p_k}) = (\alpha_1 + \cdots + \alpha_k)\,\overrightarrow{OO'}.$$

Operant: $(1-\alpha_1-\cdots-\alpha_k)\,\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{0}$ per a qualsevol parella de punts $O, O' \in \mathbb{A}$. Per tant (2) equival a $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k = 1$. □

A partir d'aquest moment escriurem $\alpha_1 p_1 + \cdots + \alpha_k p_k$ sempre que la suma dels coeficients sigui 1, amb el benentés de què aquest punt és (1) on O és un punt auxiliar arbitrari.

Exemple. Fixem dos punts diferents p, q, aleshores $(1-t)p + tq$ està ben definit per a qualsevol $t \in K$. Si agafem $O = p$ en la definició, tenim:

$$(1-t)p + tq = p + (1-t)\overrightarrow{pp} + t\overrightarrow{pq} = p + t\overrightarrow{pq}.$$

Si $K = \mathbb{R}$, definim el **segment** d'extrems p, q com el conjunt de punts: $\{tp + (1-t)q \mid 0 \le t \le 1\}$.

Definició 1.5. *El* **baricentre** *de k punts $p_1, \ldots, p_k$ de $\mathbb{A}$ és el punt*

$$bar(p_1, \ldots, p_k) = \frac{1}{k}\,p_1 + \cdots + \frac{1}{k}\,p_k.$$

Si $k = 2$, el punt $bar(p_1, p_2)$ s'anomena **punt mig de** p_1 **i** p_2.

Proposició 1.6. *Siguin $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{A}$. El baricentre $B = bar(p_1, \ldots, p_k)$ és l'únic punt tal que*

$$\overrightarrow{Bp_1} + \cdots + \overrightarrow{Bp_k} = \overrightarrow{0}.$$

Demostració: Per definició de baricentre tenim:

$$B = O + \frac{1}{k}\overrightarrow{Op_1} + \cdots + \frac{1}{k}\overrightarrow{Op_k}$$

per a qualsevol punt O. En particular, si $O = B$:

$$\frac{1}{k}\overrightarrow{Bp_1} + \cdots + \frac{1}{k}\overrightarrow{Bp_k} = \overrightarrow{0}.$$

Per veure la unicitat suposem que per a un altre punt B' també tenim $\overrightarrow{B'p_1} + \cdots + \overrightarrow{B'p_k} = \overrightarrow{0}$, aleshores

$$\overrightarrow{0} = \overrightarrow{B'p_1} + \cdots + \overrightarrow{B'p_k} = (\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{Bp_1}) + \cdots + (\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{Bp_k}) = k\overrightarrow{B'B} + (\overrightarrow{Bp_1} + \cdots + \overrightarrow{Bp_k}) = k\overrightarrow{B'B}.$$

Per tant $B = B'$. □

Notació: Quan el context ho permeti i sigui difícil confondre punts i vectors alleugerirem la notació deixant d'utilitzar la fletxa per denotar els vectors, de manera que posarem u en comptes de $\overrightarrow{u}$. Normalment les lletres utilitzades: u, v, w,... per als vectors, a, b, c, p, q, r,... per als punts, ja indicaran de quin tipus és l'element. Només mantindrem la fletxa quan es tracti del vector associat a dos punts $\overrightarrow{pq}$.

1.3 Varietats lineals.

Definició 1.7. *Una* **varietat lineal** *en un espai afí* $(\mathbb{A}, E)$ *és un subconjunt de la forma*

$$\mathbb{L} = p + F := \{p + u \mid u \in F\},$$

on $p \in \mathbb{A}$ *és un punt i* $F \subset E$ *és un subespai vectorial. Diem que* F *és el* **subespai director** *de* $\mathbb{L}$ *i que* $\dim \mathbb{L} = \dim F$. *Així, els punts són varietats lineals de dimensió* 0 *i l'única varietat lineal de dimensió* n *és* $\mathbb{A}$. *A les varietats lineals de dimensió* 1 *les anomenem* **rectes**, *a les de dimensió* 2 **plans** *i a les de dimensió* $n-1$ **hiperplans**.

Observació. Una varietat lineal $\mathbb{L} = a + F$ és en sí mateixa un espai afí, on $\mathbb{L}$ és el conjunt de punts, F l'espai vectorial i l'aplicació $\mathbb{L} \times F \longrightarrow \mathbb{L}$ és la restrició de $\mathbb{A} \times E \longrightarrow \mathbb{A}$.

Exemple. En l'espai afí $\mathbb{A}^n_K$ considerem un punt $p = (a_1, \ldots, a_n)$ i un subespai

$$F = \langle (v^1_1, \ldots, v^1_n), \ldots, (v^k_1, \ldots, v^k_n) \rangle \subset E = K^n.$$

Per definició, la varietat lineal $\mathbb{L} = p + F$ és el conjunt de punts de la forma

$$(a_1, \ldots, a_n) + \lambda_1(v^1_1, \ldots, v^1_n) + \cdots + \lambda_k(v^k_1, \ldots, v^k_n) = (a_1 + \lambda_1 v^1_1 + \cdots + \lambda_k v^k_1, \ldots, a_n + \lambda_1 v^1_n + \cdots + \lambda_k v^k_n)$$

variant λ_i en K.

Exemple. El subconjunt $\mathbb{L} \subset \mathbb{A}^n_K$ definit per

$$\mathbb{L} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^n_K \mid A_1 x_1 + \cdots + A_n x_n + B = 0\}$$

és una varietat lineal, on $A_i \in K$ són constants no totes nul·les i $B \in K$. En efecte, considerem el subespai vectorial $H \subset E = K^n$ donat per

$$H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in K^n \mid A_1 x_1 + \cdots + A_n x_n = 0\}.$$

Aleshores una solució general de l'equació que defineix $\mathbb{L}$ s'escriu com la suma d'una solució particular i una solució del sistema homogeni, per tant $\mathbb{L}$ és una varietat lineal de subespai director H. Aquesta varietat té dimensió $n-1$, per tant és un hiperplà. També podem considerar varietats lineals donades per diverses equacions. El subespai vectorial director ve definit pel mateix sistema d'equacions un cop eliminats els termes independents.

Proposició 1.8. *Es tenen les propietats següents:*

a) Si $q \in \mathbb{L} = p + F$, *aleshores* $\mathbb{L} = q + F$.

b) El subespai director és únic.

c) Si dos punts a, b *pertanyen a* $\mathbb{L} = p + F$, *aleshores* $\overrightarrow{ab} \in F$.

d) $p + F \subset q + G \iff p \in q + G$ *i* $F \subset G$

Demostració: Provem a) per doble inclusió, si $x \in \mathbb{L} = p + F$, aleshores $x = p + u$, amb $u \in F$. Notem que si $q \in \mathbb{L}$, aleshores $q = p + v$, o sigui $\overrightarrow{pq} = v \in F$. Així

$$x = q + \overrightarrow{qp} + u = q - v + u \in q + F.$$

En direcció contrària, si $a \in q + F$, és a dir $a = q + w$, substituint: $a = p + v + w \in \mathbb{L}$.

Per definició, per a un vector $u \in F$ podem posar $b = p + u$ i $u = \overrightarrow{pb}$. Per tant F s'identifica amb el conjunt $\{\overrightarrow{pb} \,|\, b \in \mathbb{L}\}$. Aleshores

$$F = \{\overrightarrow{pb} \,|\, b \in \mathbb{L}\} = \overrightarrow{pq} + \{\overrightarrow{qb} \,|\, b \in \mathbb{L}\},$$

Com F és subespai i $\overrightarrow{pq} \in F$ tenim que també $F = \{\overrightarrow{qb} \,|\, b \in \mathbb{L}\}$. Això demostra b).

Per provar c) expressem $a = p + u$, $b = p + v$ i tenim que $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{ap} + \overrightarrow{pb} = u - v \in F$. Finalment provem l'equivalència d): si $p + F \subset q + G$, aleshores $p \in p + F \subset q + G$. Pel primer apartat podem posar $q + G = p + G$ i tenim

$$F = \{\overrightarrow{pb} \,|\, b \in p + F\} \subset \{\overrightarrow{pb} \,|\, b \in p + G\} = G.$$

De dreta a esquerra: com $p \in q + G$, aleshores $q + G = p + G$ i arribem a $p + F \subset p + G = q + G$. $\square$

Operacions amb varietats lineals. Siguin $\mathbb{L}, \mathbb{M}$ dues varietats lineals, considerem la intersecció com a conjunts de $\mathbb{L}$ i de $\mathbb{M}$, o sigui el conjunt dels punts que pertanyen a les dues varietats. En la proposició següent provem que la intersecció, si és no buida, és una varietat lineal i que el seu subespai director és la intersecció dels subespais directors.

Proposició 1.9. *Si $(p + F) \cap (q + G) \neq \emptyset$, aleshores $(p + F) \cap (q + G) = c + (F \cap G)$, on c pertany a les dues varietats.*

Demostració: Sigui $c \in (p+F) \cap (q+G)$. Podem suposar $p = q = c$. Així $c + F \cap G \subset (c+F) \cap (c+G)$. Per l'altra inclusió, si $x \in (c+F) \cap (c+G)$, tindrem que $x = c+u, u \in F$ i $x = c+v, v \in G$. Aleshores, per definició, $u = \overrightarrow{cx} = v \in F \cap G$. $\square$

El següent resultat caracteritza quan una intersecció de varietats lineals és no buida.

Proposició 1.10. *Siguin $\mathbb{L} = p + F$, $\mathbb{M} = q + G$ dues varietats lineals. Aleshores $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} \neq \emptyset$ si, i només si $\overrightarrow{pq} \in F + G$.*

Demostració: Suposem que es tallen i sigui $c \in \mathbb{L} \cap \mathbb{M}$, aleshores $c = p + v, v \in F$ i $c = q + u, u \in G$. Tenim que:

$$\overrightarrow{pc} = v \qquad \overrightarrow{qc} = u$$

i per tant, $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{pc} + \overrightarrow{cq} = v - u \in F + G$. Suposem ara que $\overrightarrow{pq} = u + v$, $u \in F, v \in G$. Definim $c = p + u \in p + F$. Tindrem que:

$$c = p + u = p + \overrightarrow{pq} - v = q - v \in q + G.$$

Per tant, $c \in (p + F) \cap (q + G) \neq \emptyset$. $\square$

Definició 1.11. *Siguin $\mathbb{L} = p + F$, $\mathbb{M} = q + G$ dues varietats lineals. Anomenem* **suma** *de $\mathbb{L}$ i $\mathbb{M}$, i ho escriurem com $\mathbb{L} + \mathbb{M}$, a la varietat lineal més petita que conté $\mathbb{L}$ i $\mathbb{M}$.*

Observació. Si $\mathbb{L} \subset \mathbb{M}$ aleshores $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} = \mathbb{L}$ i $\mathbb{L} + \mathbb{M} = \mathbb{M}$.

Atenció. La suma de varietats lineals introdueix una notació que pot portar a confusió: si $p_0, \ldots, p_k$ són punts, podem veure cadascun d'ells com una varietat lineal de dimensió 0 i per tant podem usar la notació $p_0 + \cdots + p_k$ que simbolitza la varietat lineal més petita que conté els punts. En ocasions, per tal d'evitar confusions amb la suma dels punts en l'espai afí (que com hem fet notar no té sentit a no ser que posem coeficients que sumin 1) posarem $\{p_0\} + \cdots + \{p_k\}$ per indicar la varietat suma.

Proposició 1.12. *Es té la fórmula següent per la suma de dues varietats lineals* $\mathbb{L} = p+F$ *i* $\mathbb{M} = q+G$*:*

$$\mathbb{L} + \mathbb{M} = p + \langle \overrightarrow{pq} \rangle + F + G$$

Demostració: Per definició $p + \langle \overrightarrow{pq} \rangle + F + G$ és una varietat lineal que conté $\mathbb{L}$. Com $q = p + \overrightarrow{pq}$ també tenim

$$q + G \subset q + \langle \overrightarrow{pq} \rangle + F + G = p + \langle \overrightarrow{pq} \rangle + F + G.$$

Ara cal veure que és la varietat lineal més petita que conté $\mathbb{L}$ i $\mathbb{M}$. Sigui $\mathbb{H} = a + H_0$ una altra varietat tal $\mathbb{L} \subset \mathbb{H}$ i $\mathbb{M} \subset \mathbb{H}$. Aleshores per la proposició (1.9) tenim $p, q \in \mathbb{H}$ i $F, G \subset H_0$. Per tant $\overrightarrow{pq} \in H_0$ i tot plegat diu que $\langle \overrightarrow{pq} \rangle + F + G \subset H_0$ la qual cosa implica que

$$p + \langle \overrightarrow{pq} \rangle + F + G \subset p + H_0 = a + H_0 = \mathbb{H}.$$

$\square$

Definició 1.13. *Diem que dues varietats lineals $p + F$ i $q + G$ són paral·leles si $F \subset G$ o $G \subset F$.*

Observació. Pot passar que dues varietats lineals no es tallin i no siguin paral·leles. Si $\mathbb{L}$ i $\mathbb{M}$ són paral·leles, o no es tallen o estan una dintre de l'altra.

Teorema 1.14. (Fórmules de Grassmann.) *Siguin $\mathbb{L} = p + F$, $\mathbb{M} = q + G$ dues varietats lineals. Es tenen les fórmules següents:*

a) $\dim(\mathbb{L} + \mathbb{M}) = \dim \mathbb{L} + \dim \mathbb{M} - \dim(\mathbb{L} \cap \mathbb{M})$, *si* $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} \neq \emptyset$.

b) $\dim(\mathbb{L} + \mathbb{M}) = \dim \mathbb{L} + \dim \mathbb{M} + 1 - \dim(F \cap G)$ *si* $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} = \emptyset$.

Demostració: Recordem primer la fórmula de Grassmann per a subespais vectorials $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$. Aplicant la proposició (1.12):

a) $\dim(\mathbb{L} + \mathbb{M}) = \dim(\langle \overrightarrow{pq} \rangle + F + G) = \dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) = \dim \mathbb{L} + \dim \mathbb{M} - \dim(\mathbb{L} \cap \mathbb{M})$, ja que $\overrightarrow{pq} \in F + G$ per tallar-se les varietats.

b) $\dim(\mathbb{L} + \mathbb{M}) = \dim(\langle \overrightarrow{pq} \rangle + F + G) = \dim(F + G) + 1 = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G) + 1 = \dim \mathbb{L} + \dim \mathbb{M} + 1 - \dim(F \cap G)$, ja que $\overrightarrow{pq} \notin F + G$ per no tallar-se les varietats.

$\square$

Cal notar que el terme $\dim(F \cap G)$ de la fórmula b) no es pot substituir per la dimensió de la intersecció de les varietats lineals ja que en aquest cas $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} = \emptyset$.

Exemples. Les següents són conseqüències directes de les definicions i de les fórmula de Grassmann:

a) Si p, q són dos punts diferents, aleshores la varietat suma té dimensió 1. O sigui: "per dos punts diferents passa una única recta".

b) Si p, q, r són tres punts diferents, considerem la recta l que passa per p i q. Si $r \in l$ diem que els tres punts estan alineats. En cas contrari la varietat suma dels tres punts té dimensió 2, és un pla. En aquest cas els tres punts determinen un **triangle**. Si afegim un quart punt fora del pla, diem que els quatre punts determinen un **tetraedre**.

c) Considerem dues rectes $r = p + \langle u \rangle$ i $s = q + \langle v \rangle$ en un espai afí de dimensió 2. Suposem que les rectes són diferents. Si no es tallen, per la fórmula de Grassmann (apartat b)):

$$\dim (r + s) = \dim r + \dim s - \dim \langle u \rangle \cap \langle v \rangle + 1 = 3 - \dim \langle u \rangle \cap \langle v \rangle.$$

Atès que l'espai afí té dimensió 2, $\dim (r + s) \leq 2$ i per tant $\dim \langle u \rangle \cap \langle v \rangle \geq 1$, és a dir $\langle u \rangle = \langle v \rangle$ i les rectes són paral·leles. Si r i s es tallen i són diferents, aleshores

$$\emptyset \subsetneq r \cap s \subsetneq r$$

i per tant $r \cap s$ és una varietat lineal de dimensió 0, o sigui un punt. En aquest cas, per la fórmula de Grassmann $r + s$ és tot el pla. La conclusió és que dues rectes diferents del pla o són paral·leles o es tallen en un punt.

d) Amb la mateixa notació suposem ara que r, s són rectes en un espai afí de dimensió $n \geq 3$. Si es tallen, pel mateix argument que abans, ho fan en un punt i $r + s$ és un pla. Diem que són **coplanàries secants**. Si són disjuntes, per la fórmula de Grassmann, trobem dos casos: si són paral·leles (o sigui $\langle u \rangle = \langle v \rangle$) aleshores $\dim (r+s) = 2$. En aquest cas són **coplanàries paral·leles**. En el segon cas no són paral·leles, la dimensió de $\langle u \rangle \cap \langle v \rangle$ és zero. Per la fórmula $\dim (r + s) = 3$, diem que les rectes **es creuen**.

e) Suposem que $\mathbb{L}$ és una varietat lineal de dimensió k i que p és un punt que no pertany a $\mathbb{L}$. Aleshores la fórmula de Grassmann ens diu que la dimensió de $\mathbb{L} + p$ és $k + 1$.

f) Considerem un hiperplà $\mathbb{H}$ i una varietat lineal $\mathbb{L}$ de dimensió k en un espai afí $\mathbb{A}$. Suposem que $\mathbb{L} \not\subseteq \mathbb{H}$, aleshores existeix un punt $p \in \mathbb{L}$ que no està en $\mathbb{H}$. Per l'exemple anterior $\mathbb{A} = \mathbb{H} + p$, per tant $\mathbb{L} + \mathbb{H} = \mathbb{A}$. Aplicant la fórmula de Grassmann, trobem:

   a) Si $\mathbb{L} \cap \mathbb{H} \neq \emptyset$, aleshores $\dim (\mathbb{L} + \mathbb{H}) = n = k + n - 1 - \dim(\mathbb{L} \cap \mathbb{H})$. Per tant $\dim (\mathbb{L} \cap \mathbb{H}) = k - 1$.

   b) Si $\mathbb{L} \cap \mathbb{H} = \emptyset$, aleshores $\dim (\mathbb{L} + \mathbb{H}) = n = k + n - 1 - \dim(F \cap G) + 1$, on F és el subespai director de $\mathbb{L}$ i G el de $\mathbb{H}$. Per tant $\dim F \cap G = k = \dim F$. Per tant $F \subset G$ i les varietats són paral·leles.

g) Particularitzem la situació anterior al cas d'una recta r i un pla π en un espai afí de dimensió 3. Obtenim que es poden donar tres situacions: ó bé $r \subset \pi$, o bé r i π es tallen en un punt, o bé r i π són paral·leles.

Siguin $p_0, \ldots, p_n \in \mathbb{A}$ punts diferents. Com a conseqüència de l'exemple e), $\dim (\{p_0\} + \cdots + \{p_k\}) \leq k$ (cada punt afegit augmenta la dimensió com a molt en una unitat). Això motiva la definició següent:

Definició 1.15. *Diem que $k + 1$ punts diferents són* **linealment independents** *si* $\dim(\{p_0\} + \cdots + \{p_k\}) = k$.

Exemples. Dos punts són linealment independents si són diferents. Tres punts ho són si formen triangle i quatre si formen tetraedre.

Observació. Utilitzant la Proposició (1.12) de manera reiterada tenim que

$$\{p_0\} + \cdots + \{p_k\} = p_i + \langle \overrightarrow{p_ip_0}, \ldots, \overrightarrow{p_ip_k} \rangle.$$

Per tant, els punts són linealment independents si, i només si $\dim \langle \overrightarrow{p_ip_0}, \ldots, \overrightarrow{p_ip_k} \rangle = k$ per a qualsevol i. Equivalentment, els punts són linealment independents si i només si els k vectors $\overrightarrow{p_ip_0}, \ldots, \overrightarrow{p_ip_k}$ són linealment independents, per a qualsevol i. En particular, qualsevol subcol·lecció d'una col·lecció de punts linealment independents està formada per punts linealment independents .

1.4 Sistemes de referència. Coordenades cartesianes.

En aquest apartat fixem un espai afí $(\mathbb{A}, E, \phi)$ de dimensió n.

Definició 1.16. *Una* **referència cartesiana** *o* **sistema de referència** *és el conjunt format per un punt $p \in A$ i una base $e_1, \ldots, e_n$ de l'espai vectorial E. Posarem:*

$$R = \{p; e_1, \ldots, e_n\}.$$

Una forma equivalent de donar un sistema de referència consisteix en donar una col·lecció ordenada de $n+1$ punts linealment independents $\{p_0, \ldots, p_n\}$. En aquest cas $e_i = \overrightarrow{p_0p_i}$ és una base.

Donat un punt $x \in A$, posem $\overrightarrow{px} = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ i diem que $(x_1, \ldots, x_n)$ són les **coordenades** *del punt x en la referència R. Al punt p se l'anomena* **origen del sistema de referència** *o bé* **origen de coordenades**. *Observem que p té coordenades $(0, \ldots, 0)$.*

Les operacions fonamentals de l'espai afí tenen una fàcil expressió en termes de les coordenades: si $a = (a_1, \ldots, a_n)$ en un sistema de referència $R = \{p; e_i\}$ i u té coordenades $(u_1, \ldots, u_n)$ en la base e_i, aleshores les coordenades del punt $b = a + u$ són les següents:

$$\overrightarrow{pb} = \overrightarrow{pa} + \overrightarrow{ab} = \overrightarrow{pa} + u = \Sigma a_ie_i + \Sigma u_ie_i = \Sigma(a_i + u_i)\, e_i,$$

o sigui $b = a + u = (a_1 + u_1, \ldots, a_n + u_n)$. És a dir l'operació "punt+vector" es calcula sumant coordenada a coordenada. Això ens diu també que conegudes les coordenades de dos punts $a, b \in \mathbb{A}$, $\quad a = (a_1, \ldots, a_n)$ i $b = (b_1, \ldots, b_n)$, les coordenades del vector $\overrightarrow{ab}$ en la base e_i són

$$(b_1 - a_1, \ldots, b_n - a_n).$$

Equacions de les varietats lineals. Fixar un sistema de referència permet crear un nexe entre la geometria i l'àlgebra: les varietats lineals tenen equacions associades que permeten comprovar quan un punt pertany a una varietat lineal fent càlculs amb les seves coordenades. Hi ha dues formes naturals de donar les equacions d'una varietat lineal, les fem per separat.

Equacions paramètriques. Suposem que s'ha fixat un sistema de referència i considerem la varietat lineal de dimensió k següent

$$\mathbb{L} = (a_1, \ldots, a_n) + \langle (\alpha_1^1, \ldots, \alpha_n^1), \ldots, (\alpha_1^k, \ldots, \alpha_n^k) \rangle.$$

Aleshores els punts de $\mathbb{L}$ són, per definició, els que s'escriuen sumant a $(a_1, \ldots, a_n)$ combinacions lineals de la base del subespai, o sigui $(x_1, \ldots, x_n)$ pertany a $\mathbb{L}$ si es té la igualtat

$$(x_1, \ldots, x_n) = (a_1 + \lambda_1 \alpha_1^1 + \cdots + \lambda_k \alpha_1^k, \ldots, a_n + \lambda_1 \alpha_n^1 + \cdots + \lambda_k \alpha_n^k)$$

per a certs escalars $\lambda_i \in K$. Les equacions paramètriques seran doncs:

$$\begin{gathered} x_1 = a_1 + \lambda_1 \alpha_1^1 + \cdots + \lambda_k \alpha_1^k \\ \vdots \\ x_n = a_n + \lambda_1 \alpha_n^1 + \cdots + \lambda_k \alpha_n^k \end{gathered}$$

Exemple. Una recta d'un pla afí que passa per un punt p de coordenades (a_1, a_2) en una referència fixada i vector director (u_1, u_2) té equacions paramètriques:

$$x = a_1 + \lambda u_1, \qquad y = a_2 + \lambda u_2, \qquad\qquad \lambda \in K.$$

Equacions implícites. Recordem primer com es troben les equacions d'un subespai vectorial F. Fixem una base $e_1, \ldots, e_n$ i suposem que $(\alpha_1^1, \ldots, \alpha_n^1), \ldots, (\alpha_1^k, \ldots, \alpha_n^k)$ són les coordenades en la base fixada d'una base de F. Imposem que un vector variable $(x_1, \ldots, x_n)$ pertanyi al subespai demanant que

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} x_1 & \alpha_1^1 & \ldots & \alpha_1^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & \alpha_n^1 & \ldots & \alpha_n^k \end{pmatrix} = k.$$

Caldrà anul·lar els menors d'ordre $k+1$ i així obtindrem un sistema d'equacions homogènies. En el cas de l'espai afí amb una referència fixada $\{p; e_i\}$, tenim que un punt x pertany a $\mathbb{L} = a + F$ si, i només si és de la forma $x = a + u$, on $u \in F$. Per tant $\overrightarrow{ax} = u \in F$. Utilitzant la notació d'abans per a una base de F, tindrem que:

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} x_1 - a_1 & \alpha_1^1 & \ldots & \alpha_1^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - a_n & \alpha_n^1 & \ldots & \alpha_n^k \end{pmatrix} = k. \tag{3}$$

Així obtindrem les equacions de $\mathbb{L}$ (ara no necessàriament homogènies). Notem que cadascuna d'aquestes equacions provindrà d'imposar l'anul·lació d'un menor d'ordre $k+1$ de la matriu anterior. O sigui, imposem

$$0 = \begin{vmatrix} x_{i_1} - a_{i_1} & \alpha_{i_1}^1 & \ldots & \alpha_{i_1}^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{i_{k+1}} - a_{i_{k+1}} & \alpha_{i_{k+1}}^1 & \ldots & \alpha_{i_{k+1}}^k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{i_1} & \alpha_{i_1}^1 & \ldots & \alpha_{i_1}^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{i_{k+1}} & \alpha_{i_{k+1}}^1 & \ldots & \alpha_{i_{k+1}}^k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{i_1} & \alpha_{i_1}^1 & \ldots & \alpha_{i_1}^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_{k+1}} & \alpha_{i_{k+1}}^1 & \ldots & \alpha_{i_{k+1}}^k \end{vmatrix}.$$

En la descomposició anterior el primer terme dóna una equació homogènia, mentre que el segon és constant. Això ens diu que si eliminem els termes independents de les equacions de la varietat lineal, ens queden les equacions del subespai director F.

Exemple. Considerem el cas d'un hiperplà, o sigui $k = n - 1$. La matriu que ha sortit a (3) resulta ser quadrada n per n. Per tant el rang serà $n - 1$ si, i només si el determinant és 0:

$$\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & \alpha_1^1 & \dots & \alpha_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n - a_n & \alpha_n^1 & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = 0.$$

Això ens dóna una sola equació de la forma

$$A_1 x_1 + \cdots + A_n x_n = B.$$

L'equació del subespai director serà $A_1 x_1 + \cdots + A_n x_n = 0$. En particular dos hiperplans

$$A_1 x_1 + \cdots + A_n x_n = B \quad \text{i} \quad A'_1 x_1 + \cdots + A'_n x_n = B'$$

són paral·lels si, i només si les equacions dels subespais directors són proporcionals, o sigui:

$$\langle (A_1, \dots, A_n) \rangle = \langle (A'_1, \dots, A'_n) \rangle.$$

En general, gràcies al mètode d'orlar, una varietat lineal de dimensió k vindrà donada per $n - k$ equacions i en conseqüència es pot veure com la intersecció de $n - k$ hiperplans.

Baricentres en coordenades. Recordem que el baricentre de k punts $p_1, \dots, p_k$ es calcula

$$bar(p_i) = O + \frac{1}{k}\overrightarrow{Op_1} + \cdots + \frac{1}{k}\overrightarrow{Op_k},$$

on O és un punt qualsevol. Agafant O com l'origen de coordenades els vectors $\overrightarrow{Op_i}$ tenen com a coordenades exactament les coordenades del punt p_i. En definitiva, si les coordenades dels punts són $p_i = (a_1^i, \dots, a_n^i)$ les coordenades del baricentre són:

$$bar(p_i) = \left(\frac{a_1^1 + \cdots + a_1^k}{k}, \dots, \frac{a_n^1 + \cdots + a_n^k}{k} \right).$$

En particular el punt mig s'obté fent la mitjana de les coordenades dels dos punts.

Nota. Hem estat utilitzant la paraula baricentre sense fer cap esment a la noció, probablement ja coneguda per l'estudiant, de **baricentre d'un triangle**. Recordem que una **mediana** d'un triangle de vèrtexs A, B, C és una recta que uneix el punt mig de dos vèrtexs amb l'altre vèrtex. Ara comprovarem, usant coordenades, que les tres medianes es tallen en el baricentre dels tres punts, o sigui que el baricentre dels punts coincideix amb el baricentre del triangle. En efecte, agafem com a sistema de referència $R = \{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ de manera que les coordenades dels punts són $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$ i $C = (0, 1)$. Pel que acabem de dir, les coordenades del baricentre són $bar = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Serà suficient comprovar que aquest punt pertany a les 3 medianes:

- La mediana que passa per $A = (0,0)$ i el punt mig $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ de B i de C té equació $y = x$ i *bar* hi pertany.
- La mediana que passa per $B = (1,0)$ i el punt mig $(0, \frac{1}{2})$ de A i de C té equació $x + 2y = 1$. Notem que *bar* satisfà aquesta equació.
- Canviant el paper de la primera i de la segona coordenada en el càlcul anterior obtenim que la tercera mediana és $2x + y = 1$. També *bar* la compleix.

Canvis de referència. Fixem dos sistemes de referència:

$$R_1 = \{p_1; e_1, \cdots, e_n\} \quad \text{i} \quad R_2 = \{p_2; v_1, \cdots, v_n\}.$$

Volem relacionar les coordenades d'un punt en els dos sistemes de referència. Per evitar confusions posarem un subíndex al final de les coordenades per indicar el sistema de referència. Per exemple posem $p_2 = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)_1$ per indicar les coordenades de p_2 en la referència R_1, òbviament $p_2 = (0, \dots, 0)_2$. Calculem primer la matriu de canvi M entre les dues bases posant els vectors $v_1, \dots, v_n$ en funció de $e_1, \dots, e_n$:

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} a_j^i e_j \quad \longrightarrow \quad M = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Siguin $(x_1, \cdots, x_n)_2$ les coordenades d'un punt r en el sistema de referència R_2. Volem calcular les coordenades de r en R_1. Per definició $\overrightarrow{p_2 r} = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$, o sigui:

$$\overrightarrow{p_2 r} = x_1(a_1^1 e_1 + \cdots + a_n^1 e_n) + \cdots + x_n(a_1^n e_1 + \cdots + a_n^n e_n).$$

Tenim que:

$$\overrightarrow{p_1 r} = \overrightarrow{p_1 p_2} + \overrightarrow{p_2 r} = (\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n) + x_1(a_1^1 e_1 + \cdots + a_n^1 e_n) + \cdots + x_n(a_1^n e_1 + \cdots + a_n^n e_n)$$

$$= (\alpha_1 + x_1 a_1^1 + \cdots + x_n a_1^n) e_1 + \cdots + (\alpha_n + x_1 a_n^1 + \cdots + x_n a_n^n) e_n,$$

que són les coordenades de r en la referència R_1. Per tant:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_2 + \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 a_1^1 + \cdots + x_n a_1^n + \alpha_1 \\ \vdots \\ x_1 a_n^1 + \cdots + x_n a_n^n + \alpha_n \end{pmatrix}_1 \tag{4}$$

Podem integrar totes les dades del canvi de referència en una sola matriu posant els coeficients α_i com una darrera columna. Per tal que la matriu de canvi de base sigui quadrada (i la puguem invertir per trobar el canvi de referència invers) afegim una fila de zeros al final amb un 1 en la darrera posició. Així la igualtat (4) esdevé:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n & \alpha_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n^1 & \dots & a_n^n & \alpha_n \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 a_1^1 + \cdots + x_n a_1^n + \alpha_1 \\ \vdots \\ x_1 a_n^1 + \cdots + x_n a_n^n + \alpha_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

Observació. La fila final de la matriu de canvi de referència amb zeros i un 1 al final té una explicació natural en termes de coordenades projectives, tal com es veurà en un curs vinent.

De manera resumida, la matriu de canvi de referència de R_2 en funció de R_1 és de la forma:

$$P = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \alpha_1 \\ & M & & \vdots \\ & & & \alpha_n \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)$$

on M és la matriu de canvi de base de v_i en funció de e_i i $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ són les coordenades de p_2 en la referència R_1. Si $r = (x_1, \cdots, x_n)_2 = (y_1, \dots, y_n)_1$ aleshores

$$P \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad P^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.5 Raó Simple. Teoremes Clàssics.

Donats 3 punts sobre una recta en un espai afí $(\mathbb{A}, E)$, volem associar-los un nombre que mesuri la posició relativa entre ells.

Definició 1.17. *Siguin $a, b, c \in \mathbb{A}$ tres punts alineats tals que $b \neq c$. La* **raó simple** *dels tres punts és l'escalar λ que satisfà la relació*

$$\overrightarrow{ac} = \lambda\, \overrightarrow{bc}.$$

Ho denotarem per $(a, b, c) = \lambda$.

Avís. No hi ha unanimitat sobre la definició de raó simple en els diferents textos que es poden consultar. És freqüent trobar la definició: $(a, b, c) = \lambda$ si $\overrightarrow{ac} = \lambda \overrightarrow{ab}$ que és <u>diferent</u> de la que acabem de donar. La motivació per a l'opció que se segueix aquí és la seva compatibilitat amb la raó doble que s'introduirà en l'assignatura Geometria Projectiva.

Observacions. Tot i que hem imposat que el segon i el tercer punt siguin diferents, es poden donar altres coincidències entre els punts. Si posem $(a, b, c) = \lambda$, aleshores:

- $a = b$ si, i només si $\lambda = 1$.
- $a = c$ si, i només si $\lambda = 0$.

Una altra situació en la que és fàcil calcular la raó simple la trobem en el cas que un dels punts és el punt mig dels altres dos. De la definició obtenim fàcilment:

a) Si a és el punt mig de b i c, aleshores $\overrightarrow{ac} = \frac{1}{2}\overrightarrow{bc}$ i per tant $(a, b, c) = \frac{1}{2}$.

b) Si b és el punt mig de a i de c, aleshores $\overrightarrow{ac} = 2\overrightarrow{bc}$ i $(a, b, c) = 2$.

c) Finalment, quan c és el punt mig de a i de b, tenim que $\overrightarrow{ac} = -\overrightarrow{ab}$ i $(a, b, c) = -1$.

El valor de la raó simple depèn de l'ordre en qué es posin els punts, com hem vist en el cas del punt mig. Per determinar exactament l'efecte de permutar els punts en la raó simple, necessitem el següent resultat:

Lema 1.18. *Siguin a, b, c tres punts alineats diferents dos a dos de l'espai afí. Si $(a, b, c) = \lambda$, aleshores: $(b, a, c) = \frac{1}{\lambda}$ i $(a, c, b) = 1 - \lambda$.*

Demostració: Suposem que $\overrightarrow{ac} = \lambda\overrightarrow{bc}$. Aleshores $\overrightarrow{bc} = \frac{1}{\lambda}\overrightarrow{ac}$ per tant $(b, a, c) = \frac{1}{\lambda}$. D'altra banda

$$\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{ac} + \overrightarrow{cb} = \lambda\overrightarrow{bc} + \overrightarrow{cb} = (-\lambda + 1)\overrightarrow{cb},$$

que implica $(a, c, b) = 1 - \lambda$. $\square$

El Lema ens diu com canvia la raó simple permutant els dos primers punt o els dos últims. Com component aquestes dues transposicions podem obtenir totes les permutacions arribem a la taula següent:

(a, b, c)	λ	(b, a, c)	$1/\lambda$
(a, c, b)	$1 - \lambda$	(c, a, b)	$1/(1 - \lambda)$
(b, c, a)	$(\lambda - 1)/\lambda$	(c, b, a)	$\lambda/(\lambda - 1)$

Càlcul de la raó simple amb coordenades. Considerem en un espai afí n-dimensional una referència fixada i tres punts alineats $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$ i $c = (c_1, \dots, c_n)$. La raó simple λ satisfà per definició:

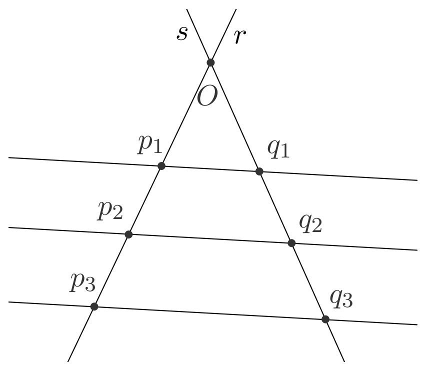
$$(c_1 - a_1, \dots, c_n - a_n) = \lambda(c_1 - b_1, \dots, c_n - b_n).$$

Per tant, si $c_i \neq b_i$, tenim

$$(a, b, c) = \lambda = \frac{c_i - a_i}{c_i - b_i}.$$

Teoremes Clàssics.
El següents són resultats ben coneguts i involucren la raó simple:

Teorema 1.19. *(Thales, 624 AC – 546 AC) Siguin r i s dues rectes del pla afí que es tallen un punt O, i siguin l_1, l_2, l_3 tres rectes paral·leles tallant r i s en punts p_1, p_2, p_3 i q_1, q_2, q_3 respectivament. Aleshores $(p_1, p_2, p_3) = (q_1, q_2, q_3)$.*



Demostració: Considerem el sistema de referència $R = \{O; \overrightarrow{Op_1}, \overrightarrow{Oq_1}\}$ en el qual $O = (0,0), p_1 = (1,0), q_1 = (0,1)$ i la recta Op_1 té equació $y = 0$. Per tant, les coordenades de p_2 i p_3 són de la forma $p_2 = (a,0)$ i $p_3 = (b,0)$. La recta Oq_1 té equació $x = 0$, mentre que la paral·lela a p_1q_1 per p_2 és:

$$p_2 + \langle \overrightarrow{p_1q_1} \rangle = (a,0) + \langle (-1,1) \rangle.$$

Per tant, q_2 és de la forma $(a,0) + \rho(-1,1)$ i al mateix temps pertany a $x = 0$. Això implica que $\rho = a$ i $q_2 = (0,a)$. De la mateixa forma $q_3 = (0,b)$. Aleshores:

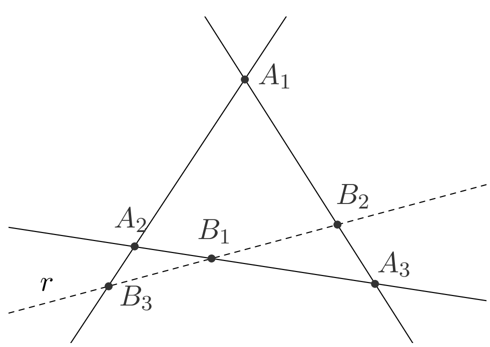
$$(p_1, p_2, p_3) = ((1,0),(a,0),(b,0)) = \frac{b-1}{b-a} = ((0,1),(0,a),(0,b)) = (q_1, q_2, q_3).$$

□

En els dos Teoremes següents trobem propietats sobre triangles. Per a nosaltres, un "costat"del triangle és una recta (no un segment!) que conté dos dels seus vèrtexs.

Teorema 1.20. *(Menelao, 70 – 140). Donat un triangle de vèrtexs A_1, A_2, A_3 del pla afí anomenem a_i al costat oposat a A_i. Sigui r una recta que talla els tres costats del triangle en punts $B_i = r \cap a_i$ diferents dels vèrtexs. Aleshores*

$$(A_3, A_2, B_1)\,(A_1, A_3, B_2)\,(A_2, A_1, B_3) = 1.$$



Demostració: Considerem la referència $R = \{A_1; \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}\}$ en la qual $A_1 = (0,0)$, $A_2 = (1,0)$ i $A_3 = (0,1)$. Els costats del triangle tenen equacions respectives $y = 0$, $x = 0$ i $x + y = 1$. El punt

$B_2 \in A_1A_3$ serà de la forma $(0,b)$ i anàlogament $B_3 = (a,0)$. Com sabem que no són vèrtexs tenim que a,b no són ni 0 ni 1. La recta $r = B_2B_3$ té equació paramètrica $(x,y) = (a,0) + \lambda(-a,b)$. Tallant amb la recta $x + y = 1$ s'obté que $a \neq b$ i que:

$$B_1 = \left(\frac{a(b-1)}{b-a}, \frac{b(1-a)}{b-a} \right).$$

Calculem les tres raons simples:

$$(A_3, A_2, B_1) = \left((0,1), (1,0), \left(\frac{a(b-1)}{b-a}, \frac{b(1-a)}{b-a} \right) \right) = \frac{a(b-1)}{b-a} : \left(\frac{a(b-1)}{b-a} - 1 \right) = \frac{a(b-1)}{b(a-1)}$$

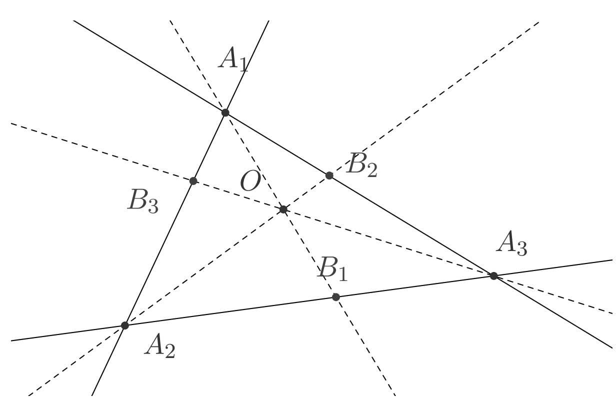
$$(A_1, A_3, B_2) = ((0,0),(0,1),(0,b)) = \frac{b}{b-1}$$

$$(A_2, A_1, B_3) = ((1,0),(0,0),(a,0)) = \frac{a-1}{a}.$$

Multiplicant els tres resultats dóna 1. □

Teorema 1.21. *(Ceva, 1647 – 1734). Donat un triangle de vèrtex A_1, A_2, A_3 del pla afí anomenem a_i al costat oposat a A_i. Sigui O un punt que no pertany a cap dels costats i tal que, per a tot i, la recta que passa per O i A_i talla a_i en un punt B_i. Aleshores*

$$(A_3, A_2, B_1)\,(A_1, A_3, B_2)\,(A_2, A_1, B_3) = -1.$$



Demostració: Considerem la referència $R = \{A_1; \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}\}$ en la qual $A_1 = (0,0)$, $A_2 = (1,0)$ i $A_3 = (0,1)$. Els costats del triangle tenen equacions respectives $y = 0$, $x = 0$ i $x + y = 1$. Siguin (a,b) les coordenades del punt O en aquesta referència, per hipòtesi $a \neq 0, b \neq 0$ i $a + b \neq 1$. Unim cada vèrtex A_i amb O i tallem amb el costat oposat. Obtenim que perquè hi hagi intersecció $a + b$, $a - 1$ i $b - 1$ són no nuls i les solucions són:

$$B_1 = \left(\frac{a}{a+b}, \frac{b}{a+b} \right),\ B_2 = \left(0, \frac{b}{1-a} \right),\ B_3 = \left(\frac{a}{1-b}, 0 \right).$$

Aleshores:

$$(A_3, A_2, B_1) = \left((0,1),(1,0),\left(\frac{a}{a+b},\frac{b}{a+b}\right)\right) = \frac{a}{a+b} : \left(\frac{a}{a+b} - 1\right) = -\frac{a}{b}$$

$$(A_1, A_3, B_2) = \left((0,0),(0,1),\left(0,\frac{b}{1-a}\right)\right) = \frac{b}{1-a} : \left(\frac{b}{1-a} - 1\right) = \frac{b}{a+b-1}$$

$$(A_2, A_1, B_3) = \left((1,0),(0,0),\left(\frac{a}{1-b},0\right)\right) = \left(\frac{a}{1-b} - 1\right) : \frac{a}{1-b} = \frac{a+b-1}{a}.$$

Multiplicant els tres resultats dóna -1. □

2 Aplicacions afins i afinitats

2.1 Definició d'aplicació afí i exemples.

Definició 2.1. *Donats dos espais afins* $(\mathbb{A}_1, E_1), (\mathbb{A}_2, E_2)$ *una* **aplicació afí** *és un parell d'aplicacions:*

$$f : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_2 \qquad \tilde{f} : E_1 \longrightarrow E_2$$

tals que:

a) $\tilde{f}$ *és lineal.*

b) Per a tot punt $p \in A_1$ *i per a tot vector* $u \in E_1$*, tenim* $f(p+u) = f(p) + \tilde{f}(u)$.

Equivalentment, si en la propietat b) posem $q = p + u$*, tenim que* $\overrightarrow{f(p)f(q)} = \tilde{f}(\overrightarrow{pq})$.

Observació. Sovint, es diu només que $f : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_2$ és una aplicació afí, i que $\tilde{f}$ és l'aplicació lineal associada.

Definició 2.2. *Diem que una aplicació afí és una* **afinitat** *si és bijectiva.*

Exemples. Suposem que $(\mathbb{A}_1, E_1) = (\mathbb{A}_2, E_2) = (\mathbb{A}, E)$. En aquest cas, direm que un punt p és **fix** per una aplicació afí f si $f(p) = p$.

1. Si $f(p) = p$ per a tot p, aleshores $\overrightarrow{f(p)f(q)} = \overrightarrow{pq}$. Així la **identitat** és una afinitat amb $\tilde{f}$=Id en E.

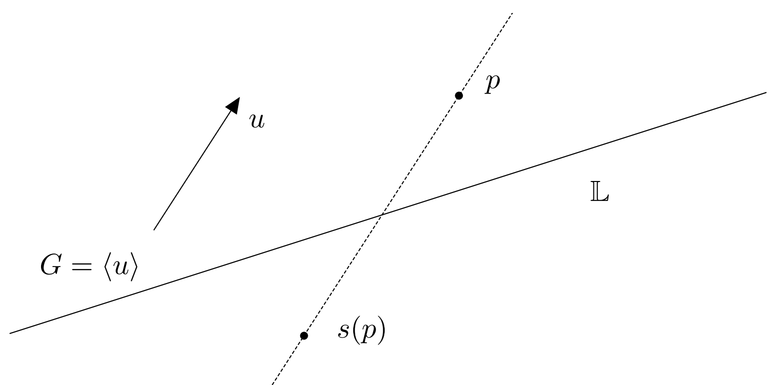
2. Fixem un vector no nul $u \in E$ i definim $f(p) = p + u$ la **translació de vector** u. Comprovem que és una afinitat: donats dos punts $p, q \in \mathbb{A}$, observem que $\overrightarrow{pf(p)} = \overrightarrow{qf(q)} = u$, aleshores

$$\overrightarrow{f(p)f(q)} = \overrightarrow{f(p)p} + \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qf(q)} = \cancel{-u} + \overrightarrow{pq} + \cancel{u} = \overrightarrow{pq}.$$

   Per tant, f és una afinitat amb $\tilde{f}$=Id en E. Notem que en aquests dos primers exemples l'endomorfisme associat és la identitat.

3. Fixem un punt $O \in \mathbb{A}$ i una constant $r \in K$, $r \neq 0, 1$. Definim l'**homotècia de centre** O **i raó** r com la transformació: $h : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$, $h(p) = O + r\,\overrightarrow{Op}$. Comprovem que és una afinitat: en efecte, donats dos punts $p, q \in \mathbb{A}$ tenim
$$\overrightarrow{h(p)h(q)} = \overrightarrow{h(p)O} + \overrightarrow{Oh(q)} = r\,\overrightarrow{pO} + r\,\overrightarrow{Oq} = r\,\overrightarrow{pq}.$$
Per tant, h és una afinitat amb endomorfisme associat $\widetilde{h} = r\mathrm{Id}$.

4. Sigui $\mathbb{L} = a + F \subset \mathbb{A}$ una varietat lineal. Suposem que G és un subespai suplementari de F en E, o sigui que $E = F \oplus G$. Un vector $u \in E$ descompondrà de manera única en una suma $u_F + u_G$ on cada sumand pertany al subespai que indica el subíndex. Definim la **simetria d'eix** $\mathbb{L}$ **i direcció** G com l'aplicació $s : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$, $s(p) = a + \overrightarrow{ap}_F - \overrightarrow{ap}_G$. Si $\mathbb{L}$ és un punt l'anomenem **simetria central**.



Atès que per a qualsevol parella de punts p, q es té
$$\overrightarrow{s(p)s(q)} = \overrightarrow{s(p)a} + \overrightarrow{as(q)} = \overrightarrow{pa}_F - \overrightarrow{pa}_G + \overrightarrow{aq}_F - \overrightarrow{aq}_G = \overrightarrow{pq}_F - \overrightarrow{pq}_G,$$
obtenim que s és afinitat amb endomorfisme associat $\tilde{s}$ determinat per ser la Id sobre F i -Id sobre G. Dit d'una altra forma, $\tilde{s}$ diagonalitza amb VAPS 1 i -1, F és el subespai de VEPs de VAP 1 i G és el subespai de VEPS de VAP -1. Notem que tots els punts de l'eix $\mathbb{L}$ són fixos i que, per la mateixa definició, s^2 és la identitat en $\mathbb{A}$.

5. Utilitzant les mateixes notacions que en l'exemple anterior definim la **projecció sobre** $\mathbb{L}$ **en la direcció** G com l'aplicació $\Pi : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$, $\Pi(p) = a + \overrightarrow{ap}_F$, o sigui, els vectors de G són ara vectors del nucli (per tant VEPs de VAP 0). Raonant de la mateixa manera trobem que és una aplicació afí (que no és afinitat) i que l'aplicació lineal associada és la identitat sobre F i és 0 sobre G. Observem que $\Pi(\mathbb{A}) = \mathbb{L}$ i que $\Pi^2 = \Pi$.

Tenim les caracteritzacions següents:

Proposició 2.3. *Sigui $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ una aplicació afí d'endomorfisme associat $\tilde{f} : E \longrightarrow E$. Aleshores:*

a) f és la identitat o una translació si, i només si $\tilde{f}$ =Id.

b) f és una homotècia si, i només si $\tilde{f}$ és una homotècia de raó $\neq 0, 1$.

c) f és una simetria si i només si f^2 =Id i f ≠Id.

d) f és una projecció si, i només si $f^2 = f$ i f ≠Id.

Demostració: En tots els casos hem vist que les condicions són necessàries, anem a veure un per un que també són suficients. Suposem primer que $\tilde{f}$ =Id i fixem un punt p. Posem $u = \overrightarrow{pf(p)}$. Per a qualsevol altre punt q es tindrà:

$$\overrightarrow{qf(q)} = \overrightarrow{qp} + \overrightarrow{pf(p)} + \overrightarrow{f(p)f(q)} = \overrightarrow{qp} + \overrightarrow{pf(p)} + \overrightarrow{pq} = \overrightarrow{pf(p)} = u.$$

Així $f(q) = q + \overrightarrow{qf(q)} = q + u$. Si $u = \overrightarrow{0}$, f és la identitat, en cas contrari és una translació. Considerem ara el cas en que $\tilde{f} = r\mathrm{Id}$, $r \neq 0, 1$. Volem veure que f té un punt fix. Notem que si f fos una homotècia, aleshores existiria un punt fix O tal que $f(p) = O + r\,\overrightarrow{Op}$ i per tant:

$$r\,\overrightarrow{Op} = \overrightarrow{Of(p)} = \overrightarrow{Op} + \overrightarrow{pf(p)} \;\longrightarrow\; (r-1)\,\overrightarrow{Op} = \overrightarrow{pf(p)}$$

i així tindríem que

$$O = p + \overrightarrow{pO} = p + \frac{1}{1-r}\,\overrightarrow{pf(p)}. \tag{5}$$

Considerem un punt p arbitrari i definim O com el punt donat per (5). Comprovem que és fix:

$$f(O) = f(p) + \tilde{f}(\frac{1}{1-r}\,\overrightarrow{pf(p)}) = f(p) + \frac{r}{1-r}\,\overrightarrow{pf(p)} = p + (1 + \frac{r}{1-r})\,\overrightarrow{pf(p)} = p + \frac{1}{1-r}\,\overrightarrow{pf(p)} = O.$$

Ara ja podem veure que, suposant $\tilde{f} = r\mathrm{Id}$, f és l'homotècia de centre O i raó r:

$$f(p) = f(O + \overrightarrow{Op}) = f(O) + \tilde{f}(\overrightarrow{Op}) = O + r\,\overrightarrow{Op}.$$

Per provar c), considerem f amb f^2 =Id i notem que si p és un punt qualsevol, aleshores el punt mig M de p i de $f(p)$ és fix:

$$f(M) = f(p + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{pf(p)}) = f(p) + \frac{1}{2}\,\tilde{f}(\overrightarrow{pf(p)}) = f(p) + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{f(p)f^2(p)} = f(p) + \frac{1}{2}\,\overrightarrow{f(p)p} = M.$$

Posem $f(p) = M + \tilde{f}(\overrightarrow{Mp})$ i apliquem aquesta expressió dues vegades $p = f^2(p) = M + \tilde{f}(\tilde{f}(\overrightarrow{Mp}))$, per tant $(\tilde{f})^2(\overrightarrow{Mp}) = \overrightarrow{Mp}$. O sigui $(\tilde{f})^2$ és la identitat. Obtenim que el mínim de $\tilde{f}$ divideix $x^2 - 1$. Com $\tilde{f}$ no és la identitat, tenim que el mínim és $x + 1$ o $(x+1)(x-1)$. En el primer cas $\tilde{f}$ (i per tant f) és una homotècia de raó -1, o sigui una simetria central. En el segon cas $\tilde{f}$ diagonalitza amb VAPs 1 i -1. Denotem per F (respectivament G) el subespai de VEPs de VAP 1 (respectivament -1), aleshores $E = F \oplus G$. Sigui O un punt fix. Tenim:

$$f(p) = f(O + \overrightarrow{Op}) = O + \tilde{f}(\overrightarrow{Op}) = O + \tilde{f}(\overrightarrow{Op}_F + \overrightarrow{Op}_G) = O + \overrightarrow{Op}_F - \overrightarrow{Op}_G.$$

Per tant, f és la simetria d'eix $O + F$ i direcció G. El cas de la projecció és gairebé idèntic: el mínim és $x(x-1)$, $\tilde{f}$ diagonalitza i s'agafen F com el subespai de VEPs de VAP 1 i G com el VEPs de VAP 0. □

2.2 Propietats de les aplicacions afins. Determinació i matrius associades.

Estudiem primer les propietats més bàsiques de les aplicacions afins.

Propietats. Siguin $f : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_2$, $g : \mathbb{A}_2 \longrightarrow \mathbb{A}_3$ dues aplicacions afins. Aleshores:

a) La composició $g \circ f : \mathbb{A}_1 \longrightarrow \mathbb{A}_3$ és afí i $(\widetilde{g \circ f}) = (\tilde{g} \circ \tilde{f})$.

b) f és injectiva si, i només si $\tilde{f}$ ho és.

c) f és exhaustiva si, i només si $\tilde{f}$ ho és.

d) f és bijectiva si, i només si $\tilde{f}$ ho és.

e) Una aplicació afí f envia una varietat lineal $\mathbb{L} = a + F$ a la varietat lineal $f(\mathbb{L}) = f(a) + \tilde{f}(F)$.

f) Sigui $\mathbb{M}$ una varietat lineal tal que $f^{-1}(\mathbb{M}) \neq \emptyset$ i sigui $a \in f^{-1}(\mathbb{M})$. Aleshores si $\mathbb{M} = f(a) + G$, tindrem que $f^{-1}(\mathbb{M}) = a + \tilde{f}^{-1}(G)$.

g) Siguin $a, b, c \in \mathbb{A}_1$ tres punts alineats amb $b \neq c$, aleshores $f(a), f(b), f(c) \in \mathbb{A}_2$ també estan alineats o són el mateix punt. Si $f(b) \neq f(c)$, aleshores $(a, b, c) = (f(a), f(b), f(c))$, és a dir, la raó simple es manté per aplicacions afins.

Demostració. Per provar la primera propietat és suficient notar que

$$\tilde{g}(\tilde{f}(\overrightarrow{pq})) = \tilde{g}(\overrightarrow{f(p)f(q)}) = \overrightarrow{g(f(p))g(f(q))},$$

per tant la composició és aplicació afí amb aplicació lineal associada $\tilde{g} \circ \tilde{f}$.

Siguin $p, q \in \mathbb{A}$ dos punts diferents amb la mateixa imatge $f(p) = f(q)$, aleshores $u = \overrightarrow{pq} \neq 0$ pertany al nucli ja que $\tilde{f}(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{f(p)f(q)} = \overrightarrow{0}$. Per tant, $\tilde{f}$ no és injectiva. En direcció contrària: si $u \neq 0$ és del nucli, aleshores per a tot $p \in \mathbb{A}$, posant $q = p + u$, $\overrightarrow{0} = \tilde{f}(u) = \tilde{f}(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{f(p)f(q)}$. Així $f(p) = f(q)$ i f no és injectiva.

Suposem f exhaustiva i sigui $v \in E_2$. Per a un punt $q \in \mathbb{A}_2$ qualsevol posem $q' = q + v$. Per hipòtesi existeixen $p, p' \in \mathbb{A}_1$ amb $f(p) = q, f(p') = q'$. Per tant $\tilde{f}(\overrightarrow{pp'}) = \overrightarrow{f(p)f(p')} = v$. Suposem que $\tilde{f}$ és exhaustiva i sigui $q \in \mathbb{A}_2$. Donat un punt $p \in \mathbb{A}_1$, considerem el vector $\overrightarrow{f(p)q}$ i una antiimatge u. Aleshores $q = f(p) + \overrightarrow{f(p)q} = f(p) + \tilde{f}(u) = f(p + u)$.

La propietat d) és conseqüència de b) i de c).

Per demostrar e) notem que els punts de $\mathbb{L}$ són de la forma $a + u$, on $u \in F$, per tant

$$f(\mathbb{L}) = \{f(a + u) \,|\, u \in F\} = \{f(a) + \tilde{f}(u) \,|\, u \in F\} = f(a) + \tilde{f}(F).$$

Sigui $a \in f^{-1}(\mathbb{M})$. Aleshores podem posar $\mathbb{M} = f(a) + G$. Un punt $p \in f^{-1}(\mathbb{M})$ si, i només si $f(p) = f(a) + v$ amb $v \in G$. O sigui $\overrightarrow{f(a)f(p)} \in G$. Equivalentment $\tilde{f}(\overrightarrow{ap}) \in G$. En definitiva, els punts de $f^{-1}(\mathbb{M})$ són de la forma $p = a + \overrightarrow{ap} \in a + \tilde{f}^{-1}(G)$.

Finalment, si a, b, i c estan alineats i b i c són diferents, podem posar $\overrightarrow{ac} = \lambda\overrightarrow{bc}$. Aplicant $\tilde{f}$ a aquesta igualtat: $\overrightarrow{f(a)f(c)} = \lambda\overrightarrow{f(b)f(c)}$. Si $f(b) = f(c)$, aleshores els tres punts són iguals. En cas contrari $(f(a), f(b), f(c)) = \lambda = (a, b, c)$. □

A continuació demostrem que una aplicació afí queda determinada per la imatge d'una referència. Això permetrà associar-li una matriu.

Proposició 2.4. *Siguin* $(\mathbb{A}_1, E_1), (\mathbb{A}_2, E_2)$ *dos espais afins. Fixem punts* $p_1 \in \mathbb{A}_1, p_2 \in \mathbb{A}_2$ *i suposem donada una aplicació lineal* $h : E_1 \longrightarrow E_2$*. Aleshores existeix una única aplicació afí* $(f, \tilde{f}) : (\mathbb{A}_1, E_1) \longrightarrow (\mathbb{A}_2, E_2)$ *tal que* $f(p_1) = p_2$ *i* $\tilde{f} = h$*. En altres paraules, una aplicació afí queda totalment determinada per l'aplicació lineal associada i la imatge d'un punt.*

Demostració: Comencem veient la unicitat. Si existeix una tal aplicació afí $(f, \tilde{f})$, aleshores

$$f(x) = f(p_1 + \overrightarrow{p_1 x}) = f(p_1) + \tilde{f}(\overrightarrow{p_1 x}) = p_2 + h(\overrightarrow{p_1 x}),$$

per tant p_1, p_2 i h la determinen completament. Això també ens diu com hem de definir f per provar l'existència. Posem $f(x) = p_2 + h(\overrightarrow{p_1 x})$. Només falta veure que és una aplicació afí amb $\tilde{f} = h$. En efecte, donats dos punts x, y tenim que $f(x) = p_2 + h(\overrightarrow{p_1 x})$ i $f(y) = p_2 + h(\overrightarrow{p_1 y})$. Per tant,

$$\overrightarrow{f(x)f(y)} = \overrightarrow{f(x)p_2} + \overrightarrow{p_2 f(y)} = -h(\overrightarrow{p_1 x}) + h(\overrightarrow{p_1 y}) = h(\overrightarrow{p_1 y} - \overrightarrow{p_1 x}) = h(\overrightarrow{xy}).$$

□

Com una aplicació lineal està determinada per la imatge d'una base, la Proposició anterior ens diu que una aplicació afí queda determinada per la imatge d'un sistema de referència, o bé per la imatge de $n+1$ punts linealment independents:

Corol·lari 2.5. *Siguin* $(\mathbb{A}_1, E_1)$ *i* $(\mathbb{A}_2, E_2)$ *dos espais afins i sigui* n *la dimensió del primer.*

a) Fixat un sistema de referència $R = \{p_0; e_1, \cdots, e_n\}$ *en* $(\mathbb{A}_1, E_1)$ *i donats* $q_0 \in \mathbb{A}_2$ *i* $v_1, \cdots, v_n \in E_2$ *qualssevol, existeix una única aplicació afí* $(f, \tilde{f})$ *tal que* $f(p_0) = q_0$ *i* $\tilde{f}(e_i) = v_i$*.*

b) Donats $p_0, \cdots, p_n \in \mathbb{A}_1$ *linealment independents i* $n+1$ *punts qualssevol* $q_0, \cdots, q_n \in \mathbb{A}_2$*, existeix una única aplicació afí* $(f, \tilde{f})$ *tal que* $f(p_i) = q_i$*.*

Matriu associada a una aplicació afí.

Sigui $(f, \tilde{f}) : (\mathbb{A}_1, E_1) \longrightarrow (\mathbb{A}_2, E_2)$ una aplicació afí. Fixem sistemes de referència

$$R_1 = \{p; e_1, \ldots, e_n\}, \qquad R_2 = \{q; v_1, \ldots, v_m\}$$

en $\mathbb{A}_1$ i $\mathbb{A}_2$ respectivament. Suposem que $f(p)$ té coordenades $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ en la referència R_2, i que $\tilde{f}(e_i) = a_1^i v_1 + \cdots + a_m^i v_m$. És a dir la matriu de $\tilde{f}$ en aquestes bases és:

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m^1 & \cdots & a_m^n \end{pmatrix}.$$

Anomenem **matriu associada a** f en les referències R_1, R_2 a la matriu:

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \alpha_1 \\ & \tilde{M} & & \vdots \\ & & & \alpha_m \\ \hline 0 & \ldots & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Tenim que

$$f(x) = f(p + \overrightarrow{px}) = f(p) + \tilde{f}(\overrightarrow{px}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \tilde{M} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

on $(x_1, \cdots, x_n)$ són les coordenades de x en R_1. Per tant si $(x_1^*, \ldots, x_m^*)$ són les coordenades de $f(x)$ en R_2, tenim que:

$$M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_m^* \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Observació. L'expressió matricial anterior es pot escriure en forma d'equacions:

$$\begin{array}{lll} x_1^* = \Sigma_{i=1}^n a_1^i x_i + \alpha_1 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ x_m^* = \Sigma_{i=1}^n a_m^i x_i + \alpha_m \end{array}$$

de manera que les coordenades x_i^* del punt imatge depenen linealment de les coordenades x_i del punt inicial. Com la imatge d'una referència determina de manera única una afinitat, la matriu també la determina. Això ens diu que un cop fixada una referència podem donar una afinitat mitjançant un sistema d'equacions com l'anterior.

Exemples.

1. La matriu de la identitat utilitzant la mateixa referència a la sortida i a l'arribada $R_1 = R_2$ és la identitat. En canvi, si considerem la identitat amb una referència diferent a l'espai de sortida i a l'espai d'arribada, retrobem la matriu de canvi de referència de R_1 en funció de R_2.

2. Sigui t_r una translació. En qualsevol base la matriu de $\tilde{t_r}$ és la identitat. Per tant, en un sistema de referència qualsevol, si el vector de translació té coordenades $(a_1, \ldots, a_n)$ les equacions són:

   $$x_i^* = x_i + a_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

   i la matriu és:

   $$M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \ldots & 0 & a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & a_n \\ \hline 0 & \ldots & 0 & 1 \end{array}\right).$$

3. Sigui h una homotècia de raó r i centre O. En una referència $\{O; e_1, \cdots, e_n\}$ tenim que

   $$h(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0) + r\, \overrightarrow{(0, \ldots, 0)(x_1, \ldots, x_n)} = (r\, x_1, \ldots, r\, x_n).$$

   Per tant les equacions són:

   $$x_i^* = r\, x_i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

i la matriu és:

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} r & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & r & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array}\right).$$

4. Sigui $\mathbb{L} = a + F$ una varietat lineal i G un subespai suplementari de F en E, o sigui $E = F \oplus G$. Prenem un sistema de referència $R = \{a; e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$, on $e_1, \dots, e_k$ és una base de F i $e_{k+1}, \dots, e_n$ és una base de G. Aleshores la simetria s d'eix $\mathbb{L}$ i direcció G satisfà:

$$s(x_1, \dots, x_n) = s(O + x_1e_1 + \dots + x_ke_k + x_{k+1}e_{k+1} + \dots + x_ne_n) =$$

$$s(O) + \tilde{s}(x_1e_1 + \dots + x_ke_k + x_{k+1}e_{k+1} + \dots + x_ne_n) =$$

$$O + x_1e_1 + \dots + x_ke_k - x_{k+1}e_{k+1} - \dots - x_ne_n = (x_1, \dots, x_k, -x_{k+1}, \dots, -x_n).$$

Per tant, les equacions de s són:

$$\begin{array}{l} x_1^* = x_1, \dots, x_k^* = x_k, \\ x_{k+1}^* = -x_{k+1}, \dots, x_n^* = -x_n. \end{array}$$

La matriu en aquesta referència és:

$$M = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \vdots \\ & & 1 & & & & 0 \\ & & & -1 & & & 0 \\ & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & -1 & 0 \\ \hline 0 & & \dots & & & 0 & 1 \end{array}\right).$$

5. En l'exemple anterior, i amb la mateixa notació, la matriu de la projecció sobre $\mathbb{L}$ en la direcció G és:

$$M = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & \vdots \\ & & 1 & & & & 0 \\ & & & 0 & & & 0 \\ & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & 0 & 0 \\ \hline 0 & & \dots & & & 0 & 1 \end{array}\right).$$

2.3 Varietats lineals invariants per una afinitat.

En aquesta secció $(\mathbb{A}_1, E_1) = (\mathbb{A}_2, E_2) = (\mathbb{A}, E)$ i $(f, \tilde{f}) : (\mathbb{A}, E) \longrightarrow (\mathbb{A}, E)$. Suposarem que $\tilde{f}$ és un automorfisme, és a dir, que f és una afinitat. Recordem que anomenem **punt fix** a $p \in \mathbb{A}$ si $f(p) = p$.

Definició 2.6. *Diem que una varietat lineal* $\mathbb{L} = a + F$ *és* **invariant** *si* $f(\mathbb{L}) = \mathbb{L}$.

Observacions. Notem que si $u \in F$, aleshores $f(a), f(a+u) \in \mathbb{L}$, per tant $\tilde{f}(u) \in F$. Obtenim que $\tilde{f}(F) = F$. Atenció: l'aplicació contrària no és certa. Per exemple, sigui $r = a + \langle u \rangle$ una recta i sigui f la translació de vector v amb v linealment independents amb u. La recta r es transforma en una paral·lela i per tant no és invariant, en canvi $\tilde{f}$ (que aquí és la identitat) transforma $F = \langle u \rangle$ en sí mateix. És important no confondre varietat invariant (si $p \in \mathbb{L}$, $f(p) \in \mathbb{L}$) amb varietat de punts fixos (si $p \in \mathbb{L}, f(p) = p$).

Mètodes de càlcul.

Punts fixos. Només cal imposar $f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1^*, \ldots, x_n^*) = (x_1, \ldots, x_n)$. Algunes propietats del conjunt dels punts fixos són les següents:

Proposició 2.7. *a) El conjunt de punts fixos és una varietat lineal.*

b) Si $p_1, \ldots, p_k$ *són fixos, aleshores tots els punts de la varietat lineal* $\{p_1\} + \cdots + \{p_k\}$ *són fixos.*

c) Si 1 *no és VAP de l'endomorfisme* $\tilde{f}$*, aleshores l'afinitat té un únic punt fix.*

Demostració. Fixem un sistema de referència. Suposem que les equacions de f són:

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Els punts fixos són els que satisfan el sistema

$$(A - \mathrm{Id}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Això demostra l'apartat a). L'apartat b) n'és una conseqüència. Notem finalment que si 1 no és VAP, aleshores $\det(A - \mathrm{Id}) \neq 0$ i el sistema de punts fixos és compatible determinat. $\square$

En particular, si p_0, p_1 són punts fixos aleshores tots els punts de la recta $p_0 + \langle \overrightarrow{p_0 p_1} \rangle$ són fixos.

Rectes invariants. Si una recta $r = a + \langle v \rangle$ és invariant, aleshores $\tilde{f}(\langle v \rangle) = \langle v \rangle$. És a dir, el vector director de r és propi. Com hem fet notar en una observació anterior, que el subespai director sigui invariant per $\tilde{f}$ no és una condició suficient per tenir varietats lineals invariants. El que farem és trobar primer els VEPs de $\tilde{f}$ i aleshores imposar que $\overrightarrow{pf(p)}$ sigui VEP. Així determinarem les rectes invariants que tenen aquest VEP com a vector director.

Exemple. Considerem l'afinitat d'un pla afí que en un cert sistema de referència té equacions

$$x^* = y, \ y^* = x + 2.$$

La matriu associada a aquesta afinitat és:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Estudiem primer els VEPs de l'endomorfisme associat, el qual té matriu:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

El polinomi característic és $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. El subespai de VEPs de VAP 1 és $\langle(1,1)\rangle$. Anem a veure quines rectes invariants tenen vector director propi de VAP 1: si $p = (x, y)$ pertany a una tal recta aleshores $\overrightarrow{pf(p)} = (x^* - x, y^* - y) = (y - x, x + 2 - y)$ serà proporcional a $(1, 1)$ i per tant:

$$0 = \begin{vmatrix} y - x & x - y + 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = y - x - x + y - 2 = -2x + 2y - 2.$$

Obtenim la recta invariant $x - y + 1 = 0$. Repetim els càlculs amb l'altre VAP. El subespai de VEPs de VAP -1 està generat per $(-1, 1)$. Hem d'imposar la mateixa condició que abans, peró canviant el vector. Obtenim que els punts (x, y) de la possible recta invariant satisfan:

$$0 = \begin{vmatrix} y - x & x - y + 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = y - x + x - y + 2 = 2.$$

No hi ha cap recta invariant amb vector director un múltiple de $(-1, 1)$.

Hiperplans invariants. Recordem que hem suposat que l'aplicació afí és bijectiva. Això ens permet imposar la invariància demanant la condició equivalent $f^{-1}(\mathbb{L}) = \mathbb{L}$. En el cas dels hiperplans aquesta formulació és especialment convenient, ja que si $A_1x_1 + \cdots + A_nx_n + B = 0$ és l'equació d'un hiperplà $\mathbb{H}$ en un sistema de referència fixat, aleshores:

$$f^{-1}(\mathbb{H}) = \{(x_1, \cdots, x_n) \text{ tal que } f(x_1, \cdots, x_n) = (x_1^*, \ldots, x_n^*) \in \mathbb{H}\}.$$

Per tant $f^{-1}(\mathbb{H})$ és l'hiperplà d'equació $A_1x_1^* + \cdots + A_nx_n^* + B = 0$. Suposem que les equacions de f són:

$$x_i^* = \Sigma_j a_j^i\, x_j + b_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Dit d'una altra forma, la matriu de f és

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} a_1^1 & \ldots & a_n^1 & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^n & \ldots & a_n^n & b_n \\ \hline 0 & \ldots & 0 & 1 \end{array}\right).$$

L'equació de l'antiimatge de $\mathbb{H}$ serà:

$$A_1x_1^* + \cdots + A_nx_n^* + B = A_1(\Sigma_j a_j^1\, x_j + b_1) + \cdots + A_n(\Sigma_j a_j^n\, x_j + b_n) + B =$$

$$(A_1a_1^1 + \cdots + A_na_1^n)\, x_1 + \cdots + (A_1a_n^1 + \cdots + A_na_n^n)\, x_n + (A_1b_1 + \cdots + A_nb_n + B) = 0.$$

Hem obtingut que els coeficients de l'equació de $f^{-1}(\mathbb{H})$ s'obtenen aplicant M^T als de $\mathbb{H}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_1^1 & \dots & a_1^n & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_n^1 & \dots & a_n^n & 0 \\ \hline b_1 & \dots & b_n & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_n \\ B \end{pmatrix}.$$

Per tal que $f^{-1}(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$, els nous coeficients han de ser proporcionals als originals. Per tant hem obtingut:

Proposició 2.8. *Sigui $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ una afinitat que en certa referència té matriu M. Un hiperplà d'equació $A_1x_1 + \cdots + A_nx_n + B = 0$ és invariant per f si i només si $(A_1, \dots, A_n, B)$ és un VEP de M^T i almenys un dels coeficients A_i és no nul.*

Exemple. Tornem a considerar l'afinitat del pla afí amb matriu

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en un cert sistema de referència. Les rectes invariants (hiperplans en aquest cas) tenen equació $Ax + By + C = 0$ on (A, B, C) és un VEP de M^T amb A o B no nul. El polinomi característic de la matriu transposada és $(1-x)(x^2-1)$ per tant els VAPS són 1 i -1. Els VEPs de VAP 1 són múltiples de $(0, 0, 1)$ que no correspon a cap recta. En canvi els VEPs de VAP -1 són múltiples de $(1, -1, 1)$. Tornem a obtenir que l'única recta invariant és $x - y + 1 = 0$.

3 Espais vectorials euclidians

En aquest tema introduïm nocions "mètriques" en un espai vectorial tals com ortogonalitat, norma (o mòdul) d'un vector, etc. Les dues primeres seccions corresponen a material contingut a l'assignatura "Àlgebra Lineal" i no s'explicaran a l'aula. S'han mantingut dins el tema com a recordatori.

Suposarem en tot el tema que el cos base és el dels nombres reals. Per tant E serà un $\mathbb{R}$-espai vectorial de dimensió finita n.

3.1 Producte escalar.

Definició 3.1. *Una* **forma bilineal** *en E és una aplicació*

$$\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

que assigna un escalar a un parell de vectors i que és lineal en les dues variables, és a dir que satisfà:

- $\varphi(u_1 + u_2, v) = \varphi(u_1, v) + \varphi(u_2, v)$,
- $\varphi(u, v_1 + v_2) = \varphi(u, v_1) + \varphi(u, v_2)$,
- $\varphi(\lambda\, u, v) = \lambda\, \varphi(u, v)$,

- $\varphi(u, \lambda v) = \lambda \varphi(u, v)$.

per a qualssevol vectors u, u_1, u_2, v, v_1, v_2 i nombre real $\lambda \in \mathbb{R}$. Diem que la forma bilineal és **simètrica** *si $\varphi(u, v) = \varphi(v, u)$.*

Matriu de Gram. Donada una base $e_1, \ldots, e_n$ d'E posem $g_{ij} = \varphi(e_i, e_j)$. Anomenem matriu de Gram de φ en la base e_i a

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}.$$

La matriu G permet calcular la imatge de dos vectors gràcies a la bilinealitat. En efecte, siguin $u = (x_1, \cdots, x_n), v = (y_1, \cdots, y_n)$ les coordenades en la base fixada, aleshores:

$$\varphi(u, v) = \varphi(\Sigma x_i e_i, \Sigma y_j e_j) = \Sigma x_i y_j \varphi(e_i, e_j) = \Sigma x_i y_j g_{ij}.$$

Per tant:

$$\varphi(u, v) = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

De manera una mica abusiva, se sol posar $u^T G\, v$ per referir-se a aquesta darrera expressió, on s'entén que u, v són en realitat vectors en coordenades posats en columna.

Observació. Utilitzarem més endavant que G és l'única matriu que satisfà la relació

$$\varphi(u, v) = u^T G\, v,$$

atès que $g_{ij} = e_i^T G\, e_j$.

La matriu de Gram ens permet identificar ràpidament quan una forma bilineal és simètrica:

Proposició 3.2. *Sigui φ una forma bilineal en E. Són equivalents;*

a) φ és simètrica.

b) Per a tota base d'E la matriu de Gram és simètrica.

c) Existeix una base tal que la matriu de Gram en aquesta base és simètrica.

Demostració. Si φ és simètrica i $\{e_i\}$ és una base qualsevol, aleshores $g_{ij} = \varphi(e_i, e_j) = \varphi(e_j, e_i) = g_{ji}$. Per tant, G és simètrica. Això demostra que a) implica b). Notem que b) implica c) és obvi. Per provar que c) implica a) fixem una base en la qual la matriu de Gram G és simètrica. Aleshores:

$$\varphi(u, v) = u^T G v \overset{(*)}{=} (u^T G v)^T = v^T G^T u = v^T G u = \varphi(v, u).$$

La igualtat en $(*)$ es deu al fet que $u^T G v$ és una matriu 1 per 1. $\square$

Canvi de base. Sigui φ una forma bilineal en E i siguin e_i i v_i dues bases. Denotem per G_e, G_v les corresponents matrius de Gram. Sigui P la matriu de canvi de base de v_i en funció de e_j.

Proposició 3.3. *Amb les notacions anteriors:*

$$G_v = P^T G_e P$$

Demostració. Siguin $x, y \in E$. Posem x_e, y_e (respectivament x_v, y_v) per denotar les seves coordenades en la base e_i (respectivament en la base v_i). La matriu P transforma les coordenades en la base v_i en coordenades en la base e_i, per tant $P\, x_v = x_e$ i $P\, y_v = y_e$. Així:

$$\varphi(x, y) = x_e^T G_e y_e = (P\, x_v)^T G_e P\, y_v = x_v^T P^T G_e P\, y_v.$$

Com només hi ha una matriu tal que $\varphi(x, y) = x_v^T G_v y_v$ obtenim la igualtat de l'enunciat. $\square$

Observació. Notem que, en contrast amb els canvis de base per endomorfismes, ens apareix la transposada P^T en comptes de la inversa P^{-1}.

Producte escalar.

Definició 3.4. *Diem que una forma bilineal φ és* **definida positiva** *si*

$$\varphi(u, u) \geq 0,\ \forall u \qquad i \qquad \varphi(u, u) = 0 \iff u = 0.$$

Definició 3.5. *Un* **producte escalar** *en un espai vectorial E és una forma bilineal:*

$$\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

simètrica i definida positiva. Un **espai vectorial euclidià** *és un espai vectorial amb un producte escalar. Es denota per (E, φ) o $(E, \cdot)$. En un espai vectorial euclidià tenim les definicions següents:*

1. *Dos vectors u, v són* **ortogonals** *si $u \cdot v = 0$.*

2. *Un vector u és* **unitari** *si $u \cdot u = 1$.*

3. *Una base e_i és* **ortogonal** *si $e_i \cdot e_j = 0$, $\forall i \neq j$, és a dir, tots els seus vectors són ortogonals dos a dos. Això equival al fet que la matriu de Gram sigui diagonal en aquesta base.*

4. *Una base e_i és* **ortonormal** *si és ortogonal i està formada per vectors unitaris. Equivalentment, és una base en la qual la matriu de Gram és la identitat.*

Exemple. Siguin $u = (x_1, \ldots, x_n), v = (y_1, \ldots, y_n)$ dos vectors de l'espai vectorial $\mathbb{R}^n$. Aleshores $u \cdot v = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ defineix un producte escalar: és lineal en cada variable, és clarament simètric i:

$$u \cdot u = x_1^2 + \ldots + x_n^2 \geq 0,$$

essent 0 només quan $x_1 = \ldots = x_n = 0$. Diem que és el producte escalar "estàndard" o "usual".

Si φ és un producte escalar arbitrari en un $\mathbb{R}$-espai vectorial E i e_i és una base ortonormal, aleshores G és la identitat i obtenim que el càlcul en coordenades té la mateixa expressió que el producte escalar estàndard en $\mathbb{R}^n$.

3.2 Mètode d'ortonormalització de Gram-Schmidt i aplicacions.

Fixem un espai vectorial euclidià $(E, \cdot)$. Volem demostrar que existeixen bases ortonormals i per fer-ho donem un procés constructiu per produir-ne una a partir d'una base qualsevol $v_1, \ldots, v_n$. Aquest procés es coneix com el **mètode d'ortonormalització de Gram-Schmidt**.
Observem primer que si trobem una base ortogonal $v'_1, \ldots, v'_n$, podem definir una base ortonormal **normalitzant** els vectors de la base. Definim:

$$v''_i := \frac{1}{\sqrt{v'_i \cdot v'_i}}\, v'_i.$$

Aleshores $v''_i \cdot v''_i = 1$ i $v''_i \cdot v''_j = 0$ si $i \neq j$.
Ens centrem per tant en la construcció d'una base ortogonal. Definim recurrentment la base ortogonal e_i de la forma següent: $e_1 = v_1$, $e_2 = v_2 + \lambda e_1$, on λ queda determinat per la condició

$$0 = e_2 \cdot e_1 = (v_2 + \lambda e_1) \cdot e_1 = v_2 \cdot e_1 + \lambda e_1 \cdot e_1.$$

Per tant:

$$\lambda = -\frac{v_2 \cdot e_1}{e_1 \cdot e_1}, \qquad e_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot e_1}{e_1 \cdot e_1}\, e_1.$$

Suposem que hem definit els primers k vectors $e_1, \ldots e_k$ de la base ortogonal. Definim el $k+1$ de la manera següent:

$$e_{k+1} = v_{k+1} + \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k,$$

i imposem l'ortogonalitat amb tots els anteriors:

$$0 = e_i \cdot e_{k+1} = e_i \cdot (v_{k+1} + \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k) = e_i \cdot v_{k+1} + \lambda_i e_i \cdot e_i.$$

Per tant:

$$e_{k+1} = v_{k+1} - \frac{v_{k+1} \cdot e_1}{e_1 \cdot e_1}\, e_1 - \cdots - \frac{v_{k+1} \cdot e_k}{e_k \cdot e_k}\, e_k.$$

Continuant amb aquest procés obtenim n vectors ortogonals dos a dos. Observem que si posem en columna les coordenades de e_i en funció de v_i obtenim una matriu de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * & \ldots & * \\ 0 & 1 & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ja que cada e_k es defineix modificant v_k amb combinacions lineals dels vectors v_i amb $i \leq k-1$. Com la matriu té determinant 1, és invertible i els vectors e_i formen una base.

Com a conseqüència de la construcció anterior tenim dos corol·laris:

Corol·lari 3.6. *Sigui $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal.*

a) φ és un producte escalar si, i només si existeix una base en la qual la matriu de Gram és la identitat.

b) Si φ és un producte escalar aleshores la matriu de Gram G en una base qualsevol satisfà $det(G) > 0$.

Demostració. La implicació d'esquerra a dreta en a) ve justificada pel mètode d'ortonormalització de Gram-Schmidt. En sentit contrari, si la matriu de Gram és la identitat en certa base la forma bilineal és simètrica (per ser-ho la matriu de Gram) i en coordenades

$$\varphi((\dots, x_i, \dots), (\dots, y_i, \dots)) = \Sigma_i x_i y_i.$$

Aleshores $\varphi((\dots, x_i, \dots), (\dots, x_i, \dots)) = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \geq 0$ i és zero si $x_i = 0$, $\forall i$.

Sigui v_i una base qualsevol i sigui G la matriu de Gram de φ en aquesta base. Sigui e_i una base ortonormal qualsevol. Aleshores, per la fórmula del canvi de base, existeix una matriu P tal que $G = P^T \, Id \, P$, ja que la matriu de Gram de la base ortonormal és la identitat. Prenent determinants tenim $det(G) = det(P)^2 > 0$. Això demostra b). □

Per acabar aquesta secció volem donar un criteri que permeti identificar a partir de la matriu de Gram d'una forma bilineal si és o no definida positiva. Per exemple, en l'apartat b) del corol·lari hem provat que una condició necessària és que el determinant de la matriu sigui positiu. Però això no és suficient com mostra l'exemple següent:

Exemple. Considerem la forma bilineal $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ que en certa base e_i té matriu associada:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aquesta matriu té determinant positiu (i fins i tot és simètrica), però no representa un producte escalar perquè $\varphi(e_1, e_1) = 0$. Observem que els termes de la diagonal de la matriu de Gram d'un producte escalar $g_{ii} = \varphi(e_i, e_i)$ són sempre positius i això no es compleix en cap terme de la diagonal d'aquesta matriu. Tampoc les condicions $g_{ii} > 0$ són suficients. Per exemple en $\mathbb{R}^4$ la forma bilineal simètrica φ que en la base canònica té matriu:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

satisfà que el determinant és positiu i també que ho són tots els termes de la diagonal. En canvi no representa un producte escalar: $\varphi((1, -1, 0, 0), (1, -1, 0, 0) = -2 < 0$.

Notació. Per establir el criteri següent necessitem considerar "submatrius" de la matriu de Gram: sigui G la matriu de Gram d'una forma bilineal en una base v_i. Anomenem G_r a la matriu obtinguda eliminant les últimes $(n - r)$ files i les últimes $(n - r)$ columnes de la matriu G. O sigui:

$$G_r = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{r1} & \cdots & g_{rr} \end{pmatrix}.$$

Aquesta matriu també es pot interpretar com la matriu de la restricció de φ al subespai $\langle v_1, \dots, v_r \rangle$. Atès que φ és definida positiva, també ho serà la seva restricció a un subespai, per tant es complirà que $det(G_r) > 0$ per a $r = 1, \dots, n$. Anem a veure que aquestes condicions sí són suficients.

Proposició 3.7. *Sigui φ una forma bilineal simètrica en E. Són equivalents:*

a) φ és definida positiva.

b) Per a tota base, la matriu de Gram G en aquesta base satisfà $det(G_r) > 0$ per a $r = 1, \dots, n$.

c) Existeix una base tal que la matriu de Gram en aquesta base satisfà $det(G_r) > 0$ per a $r = 1, \dots, n$.

Demostració. Per la discusió anterior només cal provar que c) implica a). Ho fem per inducció. Si $n = 1$, aleshores $E = \langle v_1 \rangle$, $G = (a)$, amb

$$a = \varphi(v_1, v_1) > 0.$$

Per tant, φ és definida positiva.

Suposem cert el cas $n = k - 1$, i anem a veure que el cas $n = k$ és cert. Sigui $v_1, \cdots, v_k$ la base tal que la matriu G de φ satisfà les condicions sobre els determinants. Sigui $F = \langle v_1, \cdots, v_{k-1} \rangle$ i considerem la forma bilineal simètrica $\varphi' = \varphi_{|F \times F}$. La matriu de φ' en la base $v_1, \dots, v_{k-1}$ és G_{k-1} i per tant podem aplicar la hipòtesi d'inducció. Tenim doncs que φ' és definida positiva i per tant és un producte escalar. Sigui $e_1, \dots, e_{k-1}$ una base ortonormal en F. Juntament amb v_k proporciona una base de E de manera que la matriu de φ en aquesta base serà de la forma:

$$G_0 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & a_{k-1} \\ \hline a_1 & \cdots & a_{k-1} & a_k \end{array} \right).$$

Com aquesta matriu s'ha obtingut mitjançant un canvi de base de la matriu G: $G_0 = P^T G P$, tenim que també $det(G_0) > 0$. Busquem el determinant d'aquesta matriu:

$$\det(G_0) = \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & a_{k-1} \\ \hline a_1 & \cdots & a_{k-1} & a_k \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc|c} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \hline a_1 & \cdots & a_{k-1} & a_k - a_1^2 \cdots - a_{k-1}^2 \end{array} \right|$$

(hem restat a la columna k-èssima la combinació de columnes $a_1 C_1 + \cdots + a_{k-1} C_{k-1}$, on C_i és la columna i-èssima). Obtenim la desigualtat:

$$\det(G_0) = a_k - a_1^2 \cdots - a_{k-1}^2 > 0. \tag{6}$$

Anem a veure que φ és definida positiva utilitzant la matriu G_0:

$$\varphi((x_1, \dots, x_k), (x_1, \dots, x_k)) = (x_1, \dots, x_k)\, G_0 \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} =$$

$$x_1^2 + \cdots + x_{k-1}^2 + a_k x_k^2 + 2a_1 x_1 x_k + \cdots + 2a_{k-1} x_1 x_{k-1} =$$

$$(x_1 + a_1 x_k)^2 + (x_2 + a_2 x_k)^2 + \cdots + (x_{k-1} + a_{k-1} x_k)^2 + (a_k - a_1^2 - \cdots - a_{k-1}^2) x_k^2.$$

Per tant: $\varphi((\dots, x_i, \dots), (\dots, x_i, \dots)) \geq 0$ degut a (6). A més a més, si és zero, cadascun dels sumands de la darrera fórmula seran 0 (per ser tots els termes positius). Aleshores tindrem que:

$$
\begin{aligned}
&x_1 + a_1 x_k = 0 \\
&\vdots \\
&x_{k-1} + a_{k-1} x_k = 0 \\
\\
&(a_k - a_1^2 - \cdots - a_{k-1}^2) x_k^2 = 0.
\end{aligned}
$$

De l'última equació es dedueix que $x_k = 0$, i substituïnt a la resta d'equacions trobarem que $x_1 = \cdots = x_{k-1} = 0$, per tant φ és definida positiva. □

3.3 Normes. Mesura d'angles.

Definició 3.8. *Una* **norma** *en un espai vectorial de dimensió n és una aplicació*

$$\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$$

tal que:

a) $\|u\| = 0$ *si, i només si* $u = \vec{0}$*.*

b) $\|k \cdot u\| = |k| \cdot \|u\|$*, per a qualsevol vector* $u \in E$ *i per a qualsevol escalar* $k \in \mathbb{R}$*.*

c) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *(desigualtat triangular).*

Sigui $(E, \cdot)$ un espai vectorial euclidià. Associem al producte escalar una funció $E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ de la forma següent:

$$\|u\| = +\sqrt{u \cdot u},$$

on $u \in E$. Comprovar que és una norma:

a) És conseqüència de que el producte escalar és definit positiu.

b) $\|k \cdot u\| = \sqrt{(ku) \cdot (ku)} = |k| \sqrt{u \cdot u}, \ \forall u \in E, \ \forall k \in \mathbb{R}$.

c) Hem de veure que $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$. Per fer-ho necessitem el següent resultat:

Lema 3.9. (Desigualtat de Cauchy-Schwarz). *Siguin $u, v \in E$, aleshores:*

$$(u \cdot v)^2 \leq (u \cdot u)(v \cdot v).$$

Demostració. Considerem una constant $\lambda \in \mathbb{R}$. Tenim que:

$$0 \leq (u + \lambda v) \cdot (u + \lambda v) = u \cdot u + 2\lambda u \cdot v + \lambda^2 v \cdot v.$$

Observem que si $v = \overrightarrow{0}$, aleshores la desigualtat del Lema és trivial. Suposem doncs que $v \neq 0$ i tindrem una equació de segon grau en la variable λ amb coeficient positiu en λ^2. Les seves solucions són:

$$\lambda = \frac{-\,2\,u \cdot v \ \pm \sqrt{4\,(u \cdot v)^2 - 4(u \cdot u)(v \cdot v)}}{2\,v \cdot v}.$$

Veiem que $4\,(u\cdot v)^2 - 4\,(u\cdot u)(v\cdot v) \leq 0$, ja que en cas contrari hi hauria dues solucions diferents λ_1, λ_2 i per a tots els valors $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2) \neq \emptyset$ el valor de l'equació seria negatiu. Hem trobat que:

$$(u\cdot v)^2 \leq (u\cdot u)(v\cdot v).$$

$\square$

Finalitzem ara la demostració de la desigualtat triangular:

$$(u+v)\cdot(u+v) = u\cdot u + 2u\cdot v + v\cdot v \leq u\cdot u + 2\sqrt{u\cdot u}\sqrt{v\cdot v} + v\cdot v = \left(\sqrt{u\cdot u} + \sqrt{v\cdot v}\right)^2$$

i per tant, fent arrel quadrada:

$$\sqrt{(u+v)\cdot(u+v)} \leq \sqrt{u\cdot u} + \sqrt{v\cdot v}.$$

Observació. La desigualtat de Cauchy-Schwarz també ens diu que

$$|u\cdot v| \leq \|u\|\cdot\|v\|$$

o sigui

$$-\|u\|\cdot\|v\| \leq u\cdot v \leq \|u\|\cdot\|v\|.$$

Si ara suposem que $u, v \neq 0$, tenim que:

$$-1 \leq \frac{u\cdot v}{\|u\|\cdot\|v\|} \leq 1.$$

Aleshores, existeix un únic nombre real $\alpha \in [0,\pi]$ tal que

$$\cos(\alpha) = \frac{u\cdot v}{\|u\|\cdot\|v\|}. \tag{7}$$

En un tema posterior donarem la definició d'angle associat a dos vectors no nuls (de fet unitaris). De moment ens conformarem a definir **la mesura de l'angle entre u, v** mitjançant la fórmula (7). Notem que si els vectors són ortogonals el cosinus és 0.

3.4 Subespais ortogonals. Relació amb el dual. Projecció ortogonal.

Fixem un espai vectorial euclidià $(E,\cdot)$. Donat un subespai vectorial F definim **l'ortogonal d'F** com el conjunt de vectors ortogonals a tots els vectors de F:

$$F^\perp := \{x \in E \mid u\cdot x = 0,\ \forall u \in F\}.$$

Proposició 3.10. *Sigui $F \subset E$ un subespai vectorial. Aleshores:*

a) $F^\perp$ *és un subespai vectorial.*

b) $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$ *i* $E = F \oplus F^\perp$.

c) $(F^\perp)^\perp = F$.

d) Si $F \subset G$, aleshores $F^\perp \supset G^\perp$.

e) Sigui $G \subset E$ un altre subespai, aleshores $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ i $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Demostració.

a) Siguin $x, y \in F^\perp$, o sigui $x \cdot u = y \cdot u = 0$ per a tot $u \in F$. Aleshores $(x+y) \cdot u = x \cdot u + y \cdot u = 0$. Per tant $x + y \in F^\perp$. Anàlogament, si $\lambda \in \mathbb{R}$, aleshores $\lambda x \in F^\perp$.

b) Sigui e_i una base ortonormal de F. Pel teorema d'Steinitz, la podem ampliar a una base d'E i aplicant el mètode d'ortonormalització de Gram-Schmidt a partir del vector $(k+1)$-èssim, obtenim una base ortonormal d'E, $\{e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n\}$. Aleshores $x = x_1 e_1 + \ldots x_n e_n$ pertany a $F^\perp$ si, i només si és ortogonal a tots els vectors d'F, o equivalentment, $x \cdot e_i = x_i = 0$, $i = 1, \ldots, k$. Per tant $F^\perp = \langle e_{k+1}, \ldots, e_n \rangle$. Obtenim que la dimensió és $n - k$, i a més a més que:

$$E = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle = \langle e_1, \ldots, e_k \rangle \oplus \langle e_{k+1}, \ldots, e_n \rangle = F \oplus F^\perp.$$

c) De l'apartat anterior, veiem que F i $(F^\perp)^\perp$ tenen la mateixa dimensió. D'altra banda, de la mateixa definició, obtenim que F és ortogonal a tots els vectors de $F^\perp$, per tant $F \subset (F^\perp)^\perp$. Deduïm que són iguals.

d) Suposem que $F \subset G$ i que $x \in G^\perp$. Aleshores x és ortogonal a tots els vectors de G, en particular ho és als d'F. Per tant $x \in F^\perp$.

e) Sigui $x \in (F+G)^\perp$. Aleshores $x \cdot (u+v) = 0$, per a qualssevol $u \in F$ i $v \in G$. En particular, agafant $u = \overrightarrow{0}$ o $v = \overrightarrow{0}$ tenim que x és ortogonal a tots els vectors de F i de G, o sigui $x \in F^\perp \cap G^\perp$.

   Viceversa: si $x \in F^\perp \cap G^\perp$ tenim que $x \cdot w = 0$ per a tots els vectors de F i per a tots els de G. Per tant, també serà ortogonal a totes les sumes de vectors de F i de G. Deduïm que $x \in (F+G)^\perp$.

   Per obtenir l'altra igualtat, n'hi ha prou d'aplicar la que acabem de demostrar als subespais $F^\perp, G^\perp$:

$$(F^\perp + G^\perp)^\perp = (F^\perp)^\perp \cap (G^\perp)^\perp = F \cap G.$$

   Prenent el subespai ortogonal a tots dos costats de la igualtat, obtenim la igualtat buscada.

□

Isomorfisme amb l'espai dual. Denotem per E' l'espai dual d'E:

$$E' = \{\omega : E \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{lineal}\}.$$

Recordem alguns fets bàsics que s'han vist a l'assignatura Àlgebra Lineal i que ens seran útils al llarg d'aquest curs:

1. Donada una base e_i d'E, podem definir una base associada en E' de la forma següent:

$$e_i' : E \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad e_i'(e_j) = 0, \text{ si } i \neq j \quad \text{i} \quad e_i'(e_i) = 1.$$

   Diem que és la seva **base dual**.

2. Donat un endomorfisme $f : E \longrightarrow E$ de matriu M en la base e_i, **l'endomorfisme dual**:

$$f' : E' \longrightarrow E', \qquad f'(\omega) = \omega \circ f$$

   té matriu M^T en la base e'_i.

3. Donat un subespai $F \subset E$ es defineix el subespai de E' de les formes que s'anul·len en els vectors de F:

$$F^\circ := \{\omega \in E' \mid \omega(e) = 0 \text{ per a tots els vectors } e \in F\}.$$

La presència d'un producte escalar permet definir un isomorfisme $\gamma : E \longrightarrow E'$ canònic (o sigui que no depèn de l'elecció d'una base). La definició de $\gamma(u)$ és la forma ω_u que consisteix en "fer producte escalar amb u":

$$\begin{aligned} \gamma : E &\longrightarrow E' \\ u &\longmapsto \omega_u : E \longrightarrow \mathbb{R}, \end{aligned}$$

on $\omega_u(v) = u \cdot v$.

Proposició 3.11. *L'aplicació γ és un isomorfisme d'espais vectorials. Si considerem una base e_i en E i la seva dual e'_i en E', aleshores la matriu de γ en aquestes bases és la matriu de Gram de la base e_i. A més a més, si $F \subset E$, tenim que $\gamma(F^\perp) = F^\circ$.*

Demostració. Comencem per veure que γ és lineal. Fixem dos vectors $u, v \in E$, aleshores, per a tot $x \in E$:

$$\gamma(u+v)(x) = \omega_{u+v}(x) = (u+v) \cdot x = u \cdot x + v \cdot x = \omega_u(x) + \omega_v(x) = \gamma(u)(x) + \gamma(v)(x).$$

Per tant $\gamma(u+v) = \gamma(u) + \gamma(v)$. Anàlogament es comprova que $\gamma(\lambda u) = \lambda\gamma(u)$. Anem a veure que és injectiva: si u pertany al Nucli aleshores $\omega_u = 0$ i com el producte escalar és definit positiu tenim que $u = \overrightarrow{0}$. Atés que E i E' tenen la mateixa dimensió tenim que γ és un isomorfisme.

Per calcular la matriu M de γ posem $\gamma(e_i) = \lambda_1^i e'_1 + \cdots + \lambda_n^i e'_n$. Així λ_j^i és l'element de la fila j i columna i de M. Apliquem ara a un vector e_j i tenim:

$$\gamma(e_i)(e_j) = g_{ij} = (\lambda_1^i e'_1 + \cdots + \lambda_n^i e'_n)(e_j) = \lambda_j^i e'_j(e_j) = \lambda_j^i,$$

per tant M és igual a la matriu de Gram.

Finalment observem que si $u \in F^\perp$, aleshores $\gamma(u) = \omega_u$ és una forma que s'anul·la sobre F, és a dir $\gamma(F^\perp) \subset F^\circ$. Com tots dos tenen dimensió $n - \dim F$, tenim la igualtat. $\square$

Projecció ortogonal. Sigui F un subespai i sigui $x \in E$ un vector qualsevol. Per projectar ortogonalment el vector sobre F utilitzem la descomposició en suma directa $E = F \oplus F^\perp$ per posar $x = x_1 + x_2$, on $x_1 \in F$ i $x_2 \in F^\perp$. Aleshores diem que:

$$x_1 = PO(x, F)$$

és **la projecció ortogonal de x sobre F.** Per calcular-la considerem una base ortogonal (no necessàriament ortonormal) $e_1, \ldots, e_k$ d'F. La completem fins a una base ortogonal $e_1, \ldots, e_n$ d'E. Posem:

$$x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k + \lambda_{k+1} e_{k+1} + \cdots + \lambda_n e_n = x_1 + x_2$$

on

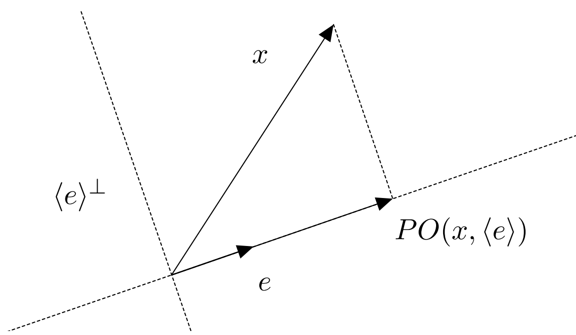
$$x_1 = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k, \qquad x_2 = \lambda_{k+1} e_{k+1} + \cdots + \lambda_n e_n.$$

Aleshores $x \cdot e_i = \lambda_i \, e_i \cdot e_i$. Per tant la projecció ortogonal x_1 té la fórmula següent:

$$\boxed{PO(x, F) = \frac{x \cdot e_1}{e_1 \cdot e_1} \, e_1 + \cdots + \frac{x \cdot e_k}{e_k \cdot e_k} \, e_k}$$

(recordem que la fórmula és vàlida si $e_1, \ldots, e_k$ és una base ortogonal d'F). Per exemple, si $k = 1$, aleshores la projecció ortogonal d'un vector x sobre un subespai $F = \langle e \rangle$ és

$$PO(x, \langle e \rangle) = \frac{x \cdot e}{e \cdot e} \, e.$$



3.5 Orientacions i matrius ortogonals.

Considerem dues bases ortonormals e_i i v_i en un espai vectorial euclidià E. Aleshores la matriu de canvi de base M satisfà

$$M^T \, Id \, M = Id, \tag{8}$$

atès que la matriu de Gram de les dues bases és la identitat. Això ens porta a la següent definició:

Definició 3.12. *Diem que una matriu quadrada M amb coeficients reals és* **ortogonal** *quan es compleix que $M^T M = Id$, és a dir, quan $M^{-1} = M^T$.*

Proposició 3.13. *Una matriu quadrada M amb coeficients reals és ortogonal si, i només si és el canvi de base entre dues bases ortonormals.*

Demostració. La fórmula (8) ens diu que una matriu de canvi de base entre bases ortonormals és ortogonal. En sentit contrari: sigui e_i una base ortonormal de E i sigui M una matriu ortogonal. Definim $v_i = M \, e_i$. Per construcció M és la matriu de canvi de base entre e_i i v_i. Només ens falta comprovar que la base v_i és ortonormal: en efecte, la matriu de Gram en la base v_i és $M^T Id M = M^T M = Id$. $\square$

Observació. Una matriu ortogonal M satisfà que $\det M = \pm 1$ perquè $M^T M = Id$ i, a més a més $\det M = \det M^T$. El contrari no és cert, per exemple la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

té determinant 1, però $A^T A \neq Id$.

Orientacions. Sigui $\mathcal{B}$ el conjunt de totes les bases. Definim en $\mathcal{B}$ la relació $\{e_i\} \sim \{v_i\}$ si

$$det_{e_i}(v_1, \ldots, v_n) > 0.$$

Les propietats dels determinants impliquen que aquesta relació és d'equivalència:

- $det_{e_i}(e_i) = 1$, per tant és reflexiva.
- $det_{e_i}(v_i) = \dfrac{1}{det_{v_i}(e_i)}$, per tant $\{e_i\} \sim \{v_i\}$ implica que $\{v_i\} \sim \{e_i\}$.
- $det_{e_i}(w_i) = det_{e_i}(v_i)\ det_{v_i}(w_i)$, per tant $\{e_i\} \sim \{v_i\}$ i $\{v_i\} \sim \{w_i\}$ impliquen que $\{e_i\} \sim \{w_i\}$.

Fixada una base e_i, considerem l'aplicació

$$D : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R} - \{0\}, \qquad D(v_i) = det_{e_i}(v_1, \ldots, v_n).$$

Notem que $\mathcal{B}_- = D^{-1}(-\infty, 0)$ i $\mathcal{B}_+ = D^{-1}(0, \infty)$ són les dues classes d'equivalència de la relació: en efecte, totes les bases de $\mathcal{B}_+$ estan relacionades amb e_i i per tant entre sí. D'altra banda, si $v_i, v_i' \in \mathcal{B}_-$ aleshores

$$det_{v_i}(v_1', \ldots, v_n') = det_{v_i}(e_1, \ldots, e_n)\ det_{e_i}(v_1', \ldots, v_n') > 0.$$

Definició 3.14. *Una* **orientació** *en E és una classe d'equivalència en $\mathcal{B}$. Un* **espai vectorial euclidià orientat** *és un espai vectorial euclidià en el que s'ha fixat una orientació. En aquest cas diem que una base representa l'orientació* **positiva** *si la seva classe és l'orientació fixada. També es diu que la base és* **directa**. *En cas contrari es diu que representa l'orientació* **negativa** *o que és una base* **indirecta.**

3.6 Producte vectorial.

Fixem en aquesta secció un espai vectorial euclidià orientat de dimensió 3. Sigui e_1, e_2, e_3 una base ortonormal representant l'orientació fixada. Observem que, donats dos vectors qualssevol $u, v \in E$, l'aplicació

$$\begin{aligned} d : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\mapsto det_{e_i}(u, v, z) \end{aligned}$$

és lineal definint una forma en E'. Recordeu que hem vist com construir un isomorfisme canònic $E \cong E'$ amb l'ajut del producte escalar:

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow E' \\ x &\mapsto \omega_x : E \longrightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

on $\omega_x(y) = x \cdot y$. Aleshores, existeix un únic vector x que satisfà $\omega_x = d$. Aquest vector rep el nom de **producte vectorial de** u **i** v i es denota per $u \wedge v$. Dit d'una altra forma, $u \wedge v$ és l'únic vector que satisfà la igualtat:

$$\boxed{(u \wedge v) \cdot z \ = \ det_{e_i}(u, v, z)} \tag{9}$$

per a tot vector $z \in E$. Com veurem de seguida totes les propietats del producte vectorial es dedueixen de la igualtat (9).

Proposició 3.15. *El producte vectorial satisfà les propietats següents:*

1. *Només depèn de l'orientació.*

2. *És lineal en cada variable:* $(u_1 + u_2) \wedge v = u_1 \wedge v + u_2 \wedge v$, *etc.*

3. *És antisimètric:* $u \wedge v = -v \wedge u$.

4. $u \wedge v = \overrightarrow{0}$ *si, i només si* u *i* v *són linealment dependents. Si* $u \wedge v \neq \overrightarrow{0}$, *aleshores* $u, v, u \wedge v$ *és una base directa.*

5. $u \wedge v$ *és ortogonal a* u *i a* v.

6. *Si* e_1, e_2, e_3 *és una base ortonormal directa (o sigui, representant l'orientació fixada), aleshores* $e_1 \wedge e_2 = e_3$, $e_2 \wedge e_3 = e_1$, $e_3 \wedge e_1 = e_2$.

Demostració:

1. Sigui e_i' una altra base ortonormal representant la mateixa orientació. Aleshores la matriu de canvi de base és ortogonal, per tant amb determinant ± 1. Com les dues bases representen la mateixa orientació, el determinant és 1. Per tant:

$$det_{e_i}(u, v, x) = det_{e_i}(e_1', e_2', e_3')\ det_{e_i'}(u, v, x) = det_{e_i'}(u, v, x).$$

   Obtenim que la definició del producte vectorial no depèn de la base ortonormal que hem fixat, sinó de l'orientació.

2. Per veure que $(u_1 + u_2) \wedge v = u_1 \wedge v + u_2 \wedge v$ fem producte escalar del vector de l'esquerra amb un vector $x \in E$ qualsevol:

$$((u_1 + u_2) \wedge v) \cdot x = det_{e_i}(u_1 + u_2, v, x) = det_{e_i}(u_1, v, x) + det_{e_i}(u_2, v, x) =$$

$$(u_1 \wedge v) \cdot x + (u_2 \wedge v) \cdot x = (u_1 \wedge v + u_2 \wedge v) \cdot x.$$

   Així, $(u_1 + u_2) \wedge v) - (u_1 \wedge v + u_2 \wedge v)$ és ortogonal a tot vector x, per tant és zero.

3. És conseqüència del fet que una permutació de dos vectors en un determinant produeix un canvi de signe:

$$(u \wedge v) \cdot x = det_{e_i}(u, v, x) = -det_{e_i}(v, u, x) = -(v \wedge u) \cdot x.$$

   Aleshores $u \wedge v - v \wedge u$ és ortogonal a tots els vectors de l'espai vectorial, per tant és zero.

4. Si u, v són linealment dependents (per exemple, $v = \kappa u$) aleshores, per a qualsevol vector $x \in E$, tenim que:

$$(u \wedge v) \cdot x = det_{e_i}(u, v, x) = det_{e_i}(u, \kappa u, x) = 0.$$

   I si són linealment independents podem completar-los fins a una base u, v, w i tindrem:

$$0 \neq det_{e_i}(u, v, w) = (u \wedge v) \cdot w,$$

per tant $u \wedge v$ no pot ser zero. En aquest cas:

$$det_{e_i}(u, v, u \wedge v) = (u \wedge v) \cdot (u \wedge v) = \|u \wedge v\|^2 > 0,$$

per tant $u, v, u \wedge v$ és una base directa.

5. En efecte $(u \wedge v) \cdot u = det_{e_i}(u, v, u) = 0$ i anàlogament per v.

6. Per la propietat anterior $e_1 \wedge e_2$ és ortogonal a e_1 i a e_2. Com la base és ortonormal $\langle e_1, e_2 \rangle^{\perp} = \langle e_3 \rangle$. Per tant existeix un escalar λ de manera que $e_1 \wedge e_2 = \lambda e_3$. Determinem ara λ utilitzant una vegada més la definició del producte vectorial:

$$1 = det_{e_i}(e_1, e_2, e_3) = (e_1 \wedge e_2) \cdot e_3 = \lambda e_3 \cdot e_3 = \lambda.$$

El mateix argument serveix per la resta de les afirmacions.

$\square$

Com a conseqüència d'aquestes propietats, obtenim una fórmula per calcular el producte vectorial explícitament. Suposem que les coordenades de u i v en la base ortonormal directa e_1, e_2, e_3 són respectivament (u_1, u_2, u_3) i (v_1, v_2, v_3), aleshores (sobre cada igualtat s'indica la propietat utilitzada de la llista de la proposició anterior):

$$u \wedge v = (u_1e_1 + u_2e_2 + u_3e_3) \wedge (v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3) \overset{(2),(4)}{=}$$

$$u_1v_1\cancel{e_1 \wedge e_1} + u_1v_2e_1 \wedge e_2 + u_1v_3e_1 \wedge e_3 +$$

$$u_2v_1e_2 \wedge e_1 + u_2v_2\cancel{e_2 \wedge e_2} + u_2v_3e_2 \wedge e_3 +$$

$$u_3v_1e_3 \wedge e_1 + u_3v_2e_3 \wedge e_2 + u_3v_3\cancel{e_3 \wedge e_3} \overset{(3)}{=}$$

$$(u_1v_2 - u_2v_1)e_1 \wedge e_2 + (u_2v_3 - u_3v_2)e_2 \wedge e_3 + (u_1v_3 - u_3v_1)e_1 \wedge e_3 \overset{(6)}{=}$$

$$(u_1v_2 - u_2v_1)e_3 + (u_2v_3 - u_3v_2)e_1 - (u_1v_3 - u_3v_1)e_2$$

És a dir, les coordenades de $(u_1, u_2, u_3) \wedge (v_1, v_2, v_3)$ són:

$$\left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Regla mnemotècnica: la fórmula anterior és més fàcil de recordar si la identifiquem amb el determinant següent:

$$(u_1, u_2, u_3) \wedge (v_1, v_2, v_3) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Aquest determinant no té cap sentit (les entrades de la primera fila són vectors!), peró ens ajuda a recordar com es calcula el producte vectorial.

(Manca d')associativitat. Tot i que el producte vectorial no és associatiu tenim la fórmula següent:

Proposició 3.16. *Siguin $u, v, w \in E$, aleshores :*

$$(u \wedge v) \wedge w \;=\; (u \cdot w)\, v - (v \cdot w)\, u.$$

Demostració: Notem primer que si u, v són linealment dependents (en particular si un dels dos és zero) la fórmula és certa, ja que a l'esquerra tenim el vector $\overrightarrow{0}$ i a la dreta (suposant per exemple que $v = \kappa u$):

$$(u \cdot w)(\kappa u) - (\kappa u \cdot w)u = \kappa(\cancel{(u \cdot w)u} - \cancel{(u \cdot w)u}) = \overrightarrow{0}.$$

A continuació ens adonem que la fórmula és igual de certa (o falsa) si a u o a v li sumem un múltiple de l'altre. En efecte, d'una banda:

$$(u \wedge (v + \lambda u)) \wedge w = (u \wedge v) \wedge w$$

i per l'altra:

$$(u \cdot w)(v + \lambda u) - ((v + \lambda u) \cdot w)u = (u \cdot w)v - (v \cdot w)\, u + \cancel{(\lambda u \cdot w)u} - \cancel{(\lambda u \cdot w)u}.$$

Anàlogament, si multipliquem u o v per un escalar no nul la fórmula és equivalent. Les observacions anteriors ens diuen que per demostar la fórmula podem modificar els vectors u, v fins a obtenir dos vectors unitaris i ortogonals entre sí. Podem suposar doncs que $e_1 = u, e_2 = v, e_3$ és una base ortonormal. Siguin (a, b, c) les coordenades de w en aquesta base. Aleshores:

$$(u \wedge v) \wedge w = (e_1 \wedge e_2) \wedge (a, b, c) = e_3 \wedge (a, b, c) = (0, 0, 1) \wedge (a, b, c) = (-b, a, 0) = ae_2 - be_1,$$

i per una altra banda:

$$(u \cdot w)v - (v \cdot w)u = (e_1 \cdot (a, b, c))e_2 - (e_2 \cdot (a, b, c))e_1 = ae_2 - be_1.$$

□

Corol·lari 3.17. (Identitat de Jacobi). *Siguin $u, v, w \in E$ vectors qualssevol, aleshores*

$$(u \wedge v) \wedge w + (w \wedge u) \wedge v + (v \wedge w) \wedge u \;=\; \overrightarrow{0}.$$

Demostració: Apliquem la Proposició (3.16) a cada sumand:

$$\begin{aligned}(u \wedge v) \wedge w \;&=\; (u \cdot w)\, v - (v \cdot w)\, u\\ (v \wedge w) \wedge u \;&=\; (v \cdot u)\, w - (w \cdot u)\, v\\ (w \wedge u) \wedge v \;&=\; (w \cdot v)\, u - (u \cdot v)\, w.\end{aligned}$$

Sumant les tres igualtats obtenim la identitat de l'enunciat. □

La Proposició (3.16) també és clau per demostrar el resultat següent:

Proposició 3.18. *Considerem quatre vectors $u_1, u_2, v_1, v_2 \in E$, aleshores*

$$(u_1 \wedge u_2) \cdot (v_1 \wedge v_2) = (u_1 \cdot v_1)(u_2 \cdot v_2) - (u_1 \cdot v_2)(u_2 \cdot v_1).$$

Demostració: Fixem una base ortonormal directa e_i. Primer convertim el terme de l'esquerra en un determinant respecte d'aquesta base i després apliquem (3.16):

$$(u_1 \wedge u_2) \cdot (v_1 \wedge v_2) = det_{e_i}(u_1, u_2, v_1 \wedge v_2) = det_{e_i}(v_1 \wedge v_2, u_1, u_2) = ((v_1 \wedge v_2) \wedge u_1) \cdot u_2$$

$$\overset{(3.16)}{=} ((u_1 \cdot v_1)\, v_2 - (u_1 \cdot v_2)\, v_1)\, u_2 = (u_1 \cdot v_1)\,(u_2 \cdot v_2) - (u_1 \cdot v_2)\,(u_2 \cdot v_1).$$

□

Un corol·lari d'aquesta proposició és la fórmula següent per a la norma d'un producte vectorial:

Corol·lari 3.19. *Siguin $u, v \in E$, aleshores:*

$$\|u \wedge v\| = \|u\| \cdot \|v\| \cdot |\sin(\alpha)|.$$

Observació: Hem vist que podem associar a dos vectors un nombre real $\alpha \in [0, \pi]$ de manera que el seu cosinus ve donat pel producte escalar dividit pel producte de les normes. Un cop fixat el cosinus, el valor absolut del sinus queda fixat per la fórmula $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$.

Demostració: Apliquem la proposició anterior amb $u_1 = v_1 = u$ i $u_2 = v_2 = v$. Aleshores

$$\|u \wedge v\|^2 = (u \wedge v) \cdot (u \wedge v) = (u \cdot u)(v \cdot v) - (u \cdot v)^2 = \|u\|^2 \|v\|^2 (1 - \cos^2(\alpha)).$$

Ara només cal substituir $(1 - \cos^2(\alpha))$ per $\sin^2(\alpha)$ i fer arrel quadrada. □

Nota final: Quan la base no és ortonormal, el càlcul del producte vectorial de u i v es pot fer utilitzant les propietats: sabem que és ortogonal a u i a v, que la base (suposem que els vectors són linealment independents) $u, v, u \wedge v$ està orientada positivament i ara també coneixem la seva norma per la propietat anterior. Tot i així, és natural demanar-se si existeix una fórmula tancada per calcular el producte vectorial en qualsevol base. La resposta és positiva, tot i que d'una certa complexitat, pel qual habitualment no se'n fa ús.

Per trobar la fórmula, fixem una base ortonormal e_1, e_2, e_3 representant l'orientació fixada i considerem una altra base v_1, v_2, v_3. Denotem per P la matriu de canvi de base de la base v_i en funció de la base e_i i per G la matriu de Gram en la base v_i. Per la fórmula de canvi de base per productes escalars, tenim que $P^T \cdot \mathrm{Id} \cdot P = G$. En particular, $det(P)^2 = det(G)$. Volem calcular les coordenades en la base v_i del producte vectorial $u \wedge v$ on $u = (u_1, u_2, u_3)$ i $v = (v_1, v_2, v_3)$. Per simplificar les fórmules, posem

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}.$$

Si la base v_i fos ortonormal directa, aleshores $u \wedge v = (\Delta_1, -\Delta_2, \Delta_3)$.

Recordem que, per definició, per a qualsevol vector x es té $(u \wedge v) \cdot x = det_{e_i}(u, v, x)$. Posem (x_1, x_2, x_3) per a les coordenades de x, i (a, b, c) per a les del producte vectorial en la base v_i. Escrivim la fórmula anterior en coordenades:

$$(a, b, c)\, G \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = det_{e_i}(u, v, x) = det_{e_i}(v_1, v_2, v_3)\, det_{v_i}(u, v, x) =$$

$$det(P)\, det_{v_i}(u, v, x) = \sqrt{det\, G} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \sqrt{det\, G}\, (x_1\Delta_1 - x_2\Delta_2 + x_3\Delta_3) =$$

$$\sqrt{det\, G}\, (\Delta_1, -\Delta_2, \Delta_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Com això és cert per a qualsevol x, obtenim que:

$$(a, b, c)\, G = \sqrt{det\, G} \cdot (\Delta_1, -\Delta_2, \Delta_3),$$

per tant, aplicant G^{-1} per la dreta i transposant (G^{-1} és simètrica per ser-ho G), arribem a què les coordenades del producte vectorial $u \wedge v$ en la base v_i són:

$$\boxed{\sqrt{det\, G} \cdot G^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ -\Delta_2 \\ \Delta_3 \end{pmatrix}.}$$

3.7 Volums.

Sigui E un espai vectorial euclidià orientat de dimensió n. Volem associar a cada base v_i un nombre real que mesuri la "capacitat" del paral·lelepípede vectorial associat:

$$P(v_i) := \{\Sigma_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1\}.$$

Dit d'una forma una mica més concreta: agafant com a unitat de volum $P(e_i)$, on e_i és una base ortonormal directa, volem comptar quantes d'aquestes unitats conté $P(v_i)$.

Definició 3.20. *El* **volum** *(amb signe) d'una col·lecció ordenada de n vectors v_i de E és:*

$$Vol(v_i) = det_{e_i}(v_1, \ldots, v_n),$$

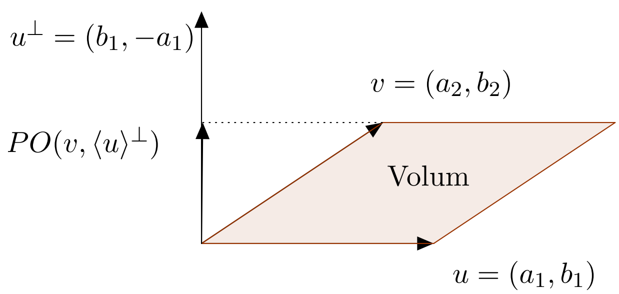
on e_i és una base ortonormal directa.

Observacions.

- La definició no depèn de la base ortonormal fixada sino de l'orientació, ja que si e'_i és una altra base ortonormal directa, $det_{e_i}(e'_i) = 1$.

- Si v_i és una base ortonormal directa, el volum és 1.
- Si els vectors v_i són linealment dependents, aleshores el volum és 0.
- En el cas en què v_i és una base, el signe del volum és positiu si i només si la base és directa.
- Siguin $v_1, \ldots, v_k$ vectors linealment independents en E. Com l'orientació en E no determina una orientació en $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$ no podem definir el volum amb signe d'aquests vectors. Sí té sentit $|Vol(v_i)|$ calculat com el determinant (en valor absolut) dels vectors v_i en funció d'una base ortonormal qualsevol de $\langle v_1, \ldots, v_k \rangle$.

Exemples. Si $n = 1$ aleshores $v = \lambda e$, on e és un vector unitari fixat. El volum és λ i, llevat del signe, coincideix amb la norma del vector: $|\lambda| = \|v\|$. En el cas de dimensió 2, l'expectativa és que la nostra definició, en valor absolut, ens doni l'àrea del paral·lelogram que determinen dos vectors. Fixem una base ortonormal i posem $u = (a_1, b_1)$, $v = (a_2, b_2)$.



Si multipliquem $\|u\| \cdot \|PO(v, \langle u \rangle^\perp)\|$, i.e. "base per alçada", obtenim (usant la fórmula de la projecció ortogonal obtinguda en la secció anterior d'aquest tema):

$$\|u\| \cdot \| \frac{(a_2, b_2)(b_1, -a_1)}{(b_1, -a_1)(b_1, -a_1)} (b_1, -a_1)\| = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \, \frac{|a_2 b_1 - a_1 b_2|}{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_1^2 + b_1^2} = |a_2 b_1 - a_1 b_2| = |det(u, v)|,$$

on hem utilitzat $(b_1, -a_1)$ com a generador de $\langle u \rangle^\perp$.

Usant com a model el que hem fet en l'exemple de dimensió 2, podem definir recurrentment el volum (sense signe) d'una col·lecció de vectors.

Definició 3.21. *Sigui $v_1, \ldots v_n \in E$ una col·lecció ordenada de n vectors. Definim recurrentment el* **volum sense signe** *d'aquests vectors com segueix:*

$$Vol^+(v_i) = \begin{cases} \|v_1\| & si \;\; n = 1 \\ \\ Vol^+(v_1, \ldots, v_{n-1}) \, \|PO(v_n, \langle v_1, \ldots, v_{n-1} \rangle^\perp)\| & si \;\; n > 1. \end{cases}$$

Proposició 3.22. *Amb les notacions anteriors es té que $Vol^+(v_i) = |Vol(v_i)|$.*

Demostració: Per inducció sobre n. Si $n = 1$ ja ho hem vist en els exemples anteriors. Suposem $n > 1$ i que la igualtat és certa per $n-1$. Notem primer que si els primers $n-1$ vectors $v_1, \ldots, v_{n-1}$ són linealment dependents, també ho són els n vectors i per tant $det(v_1, \ldots, v_n) = Vol(v_i) = 0$. D'altra banda

$$Vol^+(v_1, \ldots, v_{n-1})\, \|PO(v_n, \langle v_1, \ldots, v_{n-1}\rangle^\perp)\| \overset{H.I.}{=} |Vol(v_1, \ldots, v_{n-1})|\, \|PO(v_n, \langle v_1, \ldots, v_{n-1}\rangle^\perp)\| = 0,$$

ja que el volum de vectors linealment dependents és zero.

Podem doncs suposar que els primers $n-1$ vectors són linealment independents i, usant Gram-Schmidt, triem una base ortonormal directa e_i de manera que $\langle e_1, \ldots, e_{n-1}\rangle = \langle v_1, \ldots, v_{n-1}\rangle$. Amb aquesta elecció, els vectors v_i, $i \leq n-1$, tenen un 0 en la darrera coordenada. Suposem que $(a_1, \ldots, a_n)$ són les coordenades de v_n en la base fixada. Aleshores,

$$\begin{aligned}
&Vol^+(v_i) \overset{def}{=} Vol^+(v_1, \ldots, v_{n-1})\, \|PO(v_n, \langle v_1, \ldots, v_{n-1}\rangle^\perp)\| \\
&\overset{H.I.}{=} |det_{e_1,\ldots,e_{n-1}}(v_1, \ldots, v_{n-1})|\, \|PO((a_1, \ldots, a_n), \langle e_1, \ldots, e_{n-1}\rangle^\perp)\| \\
&= |det_{e_1,\ldots,e_{n-1}}(v_1, \ldots, v_{n-1})|\, \|PO((a_1, \ldots, a_n), \langle e_n\rangle\| \\
&= |det_{e_1,\ldots,e_{n-1}}(v_1, \ldots, v_{n-1})|\, |a_n| = |\begin{vmatrix} * & \ldots & * & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & \ldots & * & a_{n-1} \\ 0 & \ldots & 0 & a_n \end{vmatrix}| \\
&= |det_{e_1,\ldots,e_n}(v_1, \ldots, v_n)| = |Vol(v_i)|.
\end{aligned}$$

□

Pel que fa al càlcul, és útil adonar-se que el determinant de v_i respecte d'una base ortonormal e_i no és res més que el determinant de la matriu de canvi de base M entre v_i i e_i. Per la fórmula del canvi de base del producte escalar $M^T \,\mathrm{Id}\, M = G$. Per tant:

$$Vol^+(v_i) = |det\, M| = +\sqrt{det\, G}.$$

Aquesta fórmula té interessants conseqüències de tipus pràctic. Això quedarà de manifest en l'exemple següent: en l'espai vectorial $E = \mathbb{R}^5$ amb el producte escalar usual $((\ldots, x_i, \ldots) \cdot (\ldots, y_i, \ldots) = \Sigma x_i y_i)$ considerem tres vectors linealment independents $v_1 = (2, 0, 1, 3, -1), v_2 = (-1, 2, 0, -1, 2), v_3 = (1, 1, 1, 1, 1)$. Per calcular l'àrea del paral·lelogram que generen hauríem de trobar una base ortonormal de $\langle v_1, v_2, v_3\rangle$, calcular les coordenades dels vectors v_i en funció d'aquesta base i després fer el determinant. Molt més curt és aplicar la fórmula anterior:

$$G = \begin{pmatrix} v_1 \cdot v_1 & v_1 \cdot v_2 & v_1 \cdot v_3 \\ v_2 \cdot v_1 & v_2 \cdot v_2 & v_2 \cdot v_3 \\ v_3 \cdot v_1 & v_3 \cdot v_2 & v_3 \cdot v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & -7 & 5 \\ -7 & 10 & 2 \\ 5 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Així:

$$Vol^+(v_i) = \sqrt{det(G)} = \sqrt{750 - 70 - 70 - 250 - 60 - 245} = \sqrt{55}.$$

4 Espais afins euclidians.

4.1 Distància en un espai afí euclidià.

En tot el tema, $(\mathbb{A}, E)$ és un espai afí de dimensió n sobre $\mathbb{R}$ i suposem que E ve dotat d'un producte escalar (o sigui E és un espai vectorial euclidià). Diem que la terna $(\mathbb{A}, E, \cdot)$ (o simplement $(\mathbb{A}, E)$) és un **espai afí euclidià**.

Definició 4.1. *La distància entre dos punts, $p, q \in \mathbb{A}$, es defineix com:*

$$d(p,q) = \| \overrightarrow{pq} \|$$

La funció distància així definida:

$$d : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{R}$$

satisfà les propietats següents:

a) $d(p,q) \geq 0$ i és zero si i només si $p = q$.

b) $d(p,q) = d(q,p)$

c) $d(p,r) \leq d(p,q) + d(q,r)$ (desigualtat triangular),

ja que, com vàrem veure en el tema anterior la norma les compleix.

Nota: La noció de distància val per a un conjunt A qualsevol. Es defineix de la mateixa manera: és una aplicació $d : A \times A \longrightarrow \mathbb{R}$ amb les propietats a), b), c) anteriors. Es diu aleshores que (A, d) és un espai mètric.

Teorema 4.2. *(Teorema de Pitàgores). Siguin $p, q, r \in \mathbb{A}$ tres punts linealment independents tals que $\overrightarrow{pq} \cdot \overrightarrow{qr} = 0$. Aleshores*

$$d(p,r)^2 = d(p,q)^2 + d(q,r)^2.$$

Demostració: Posem $\overrightarrow{pr} = \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr}$. Aleshores:

$$\begin{array}{l} d(p,r)^2 = \| \overrightarrow{pr} \|^2 = \overrightarrow{pr} \cdot \overrightarrow{pr} = (\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr}) \cdot (\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr}) = \\ \overrightarrow{pq} \cdot \overrightarrow{pq} + \cancel{2\overrightarrow{pq} \cdot \overrightarrow{qr}} + \overrightarrow{qr} \cdot \overrightarrow{qr} = d(p,q)^2 + d(q,r)^2. \end{array}$$

$\square$

Observeu que sense la hipòtesi que $\overrightarrow{pq}$ i $\overrightarrow{qr}$ siguin ortogonals el sumand $2\overrightarrow{pq} \cdot \overrightarrow{qr} = -2\overrightarrow{qp} \cdot \overrightarrow{qr}$ es pot substituir per $-2d(p,q)d(q,r)\cos(\alpha)$ on α és l'angle que formen els vectors $\overrightarrow{qp}$ i $\overrightarrow{qr}$. S'obté així el Teorema del cosinus.

4.2 Distància entre varietats lineals.

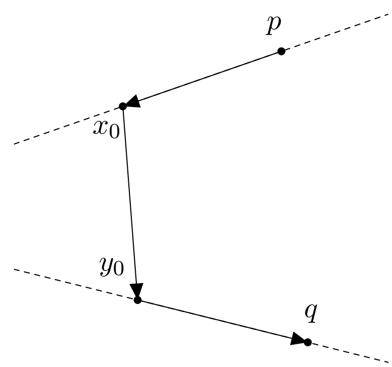
Siguin $\mathbb{L} = a + F$, $\mathbb{M} = b + G$ dues varietats lineals en $\mathbb{A}$. La distància entre aquestes dues varietats lineals es defineix com segueix:

$$d(\mathbb{L}, \mathbb{M}) = \text{ínfim } \{d(x, y) \mid x \in \mathbb{L}, y \in \mathbb{M}\}.$$

Per exemple, si $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} \neq \emptyset$ aleshores $d(\mathbb{L}, \mathbb{M}) = 0$. La següent proposició ens permetrà calcular la distància en molts casos pràctics:

Proposició 4.3. *Suposem que $\mathbb{L} = a + F$ i $\mathbb{M} = b + G$ són dues varietats lineals disjuntes, i que existeixen $x_0 \in \mathbb{L}$ i $y_0 \in \mathbb{M}$ tals que $\overrightarrow{x_0y_0} \in F^\perp \cap G^\perp$. Aleshores $d(x_0, y_0) = d(\mathbb{L}, \mathbb{M})$*

Demostració: Siguin $p \in \mathbb{L}$ i $q \in \mathbb{M}$ punts qualssevol. Per hipòtesi $\overrightarrow{x_0y_0}$ és ortogonal a $\overrightarrow{px_0} \in F$ i a $\overrightarrow{y_0q} \in G$. Aleshores:



$$\begin{aligned}
d(p,q)^2 &= \overrightarrow{pq} \cdot \overrightarrow{pq} = (\overrightarrow{px_0} + \overrightarrow{x_0y_0} + \overrightarrow{y_0q}) \cdot (\overrightarrow{px_0} + \overrightarrow{x_0y_0} + \overrightarrow{y_0q}) \\
&= (\overrightarrow{x_0y_0} + (\overrightarrow{px_0} + \overrightarrow{y_0q})) \cdot (\overrightarrow{x_0y_0} + (\overrightarrow{px_0} + \overrightarrow{y_0q})) \\
&= \overrightarrow{x_0y_0} \cdot \overrightarrow{x_0y_0} + \cancel{2\overrightarrow{x_0y_0} \cdot (\overrightarrow{px_0} + \overrightarrow{y_0q})} + (\overrightarrow{px_0} + \overrightarrow{y_0q}) \cdot (\overrightarrow{px_0} + \overrightarrow{y_0q}) \\
&= \| \overrightarrow{x_0y_0} \|^2 + \| \overrightarrow{px_0} + \overrightarrow{y_0q} \|^2 \geq d(x_0, y_0)^2.
\end{aligned}$$

□

La Proposició anterior es complementa amb el resultat següent:

Proposició 4.4. *Siguin com abans $\mathbb{L} = a + F$ i $\mathbb{M} = b + G$ dues varietats lineals en un espai afí euclidià, aleshores existeixen $x_0 \in \mathbb{L}$ i $y_0 \in \mathbb{M}$ tals que $\overrightarrow{x_0y_0} \in F^\perp \cap G^\perp$. En particular la distància entre $\mathbb{L}$ i $\mathbb{M}$ és el <u>mínim</u> de les distàncies entre punts de $\mathbb{L}$ i de $\mathbb{M}$.*

Demostració: Podem suposar que les varietats lineals no es tallen, en cas contrari es pot prendre $x_0 = y_0 \in \mathbb{L} \cap \mathbb{M}$.

Sigui H el subespai vectorial $\langle \overrightarrow{ab} \rangle + F + G$. Atès que $\overrightarrow{ab} \notin F + G$ tenim que $\dim F + G = \dim H - 1$. Necessitem ara un resultat sobre subespais vectorials:

Lema 4.5. *En un espai vectorial euclidià suposem donats dos subespais vectorials K, H tals que $K \subset H$ i $\dim K = \dim H - 1$. Aleshores $\dim K^\perp \cap H = 1$.*

Demostració. Usant Gram-Schmidt podem construir una base ortonormal $e_1, \ldots, e_{m-1}, e_m, \ldots, e_n$ de manera que

$$K = \langle e_1, \ldots, e_{m-1} \rangle \quad \text{i } H = \langle e_1, \ldots, e_m \rangle.$$

Per ser una base ortonormal, $K^\perp = \langle e_m, \ldots, e_n \rangle$. Per tant:

$$K^\perp \cap H = \langle e_m, \ldots, e_n \rangle \cap \langle e_1, \ldots e_m \rangle = \langle e_m \rangle.$$

□

Apliquem el lemma a $K = F + G$ i H, aleshores $\dim(F+G)^\perp \cap H = 1$. Sigui u un vector generador de $(F+G)^\perp \cap H$. Com $u \notin F + G$ tenim que $H = \langle u \rangle + F + G$. Amb aquesta notació, hem de buscar punts $x_0 \in \mathbb{L}$ i $y_0 \in \mathbb{M}$ tals que $\overrightarrow{x_0 y_0}$ sigui un múltiple de u. Com tenim

$$\overrightarrow{ab} \in H = \langle u \rangle + F + G,$$

podem posar $\overrightarrow{ab} = \alpha u + v_F + v_G$, on α és una costant real no nul·la i $v_F \in F, v_G \in G$. Definim els punts:

$$x_0 = a + v_F \in \mathbb{L} \quad \text{i} \quad y_0 = a + v_F + \alpha u.$$

Observem que

$$y_0 = b + \overrightarrow{ba} + v_F + \alpha u = b - \alpha u - v_F - v_G + v_F + \alpha u = b - v_G \in \mathbb{M}.$$

Finalment comprovem que aquests punts satisfan la condició desitjada:

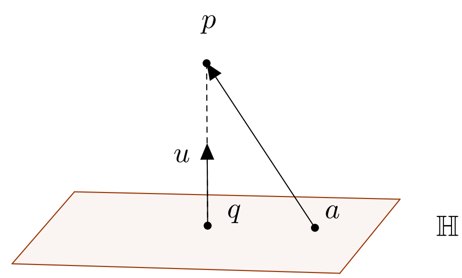
$$\overrightarrow{x_0 y_0} = \overrightarrow{x_0 a} + \overrightarrow{a y_0} = -v_F + v_F + \alpha u = \alpha u.$$

□

Aquests resultats donen un mètode general per al càlcul de la distància entre dues varietats lineals $\mathbb{L} = a + F$ i $\mathbb{M} = b + G$. Caldrà considerar punts variables $x_0 \in \mathbb{L}$, $y_0 \in \mathbb{M}$, i bases $v_1, \ldots, v_k$ de F i $w_1, \ldots, w_l$ de G i imposar les condicions $\overrightarrow{x_0 y_0} \cdot v_i = 0$, $\overrightarrow{x_0 y_0} \cdot w_i = 0$. Això dóna un sistema d'equacions lineals que permet determinar punts x_0, y_0 (no necessàriament únics) que determinen la distància entre les varietats lineals. Aquí deixarem de banda aquesta discussió general per descriure la situació que es produeix en un grapat de situacions molt usuals.

Distància punt-hiperplà. Volem determinar la distància entre un punt p i un hiperplà $\mathbb{H} = a + H$, $\dim \mathbb{H} = n - 1$. L'ortogonal a H té dimensió 1: $H^\perp = \langle u \rangle$; el vector u és **normal** a l'hiperplà. Diem q a la **projecció ortogonal** de p sobre $\mathbb{H}$, és a dir a la intersecció de la recta $p + \langle u \rangle$ amb $\mathbb{H}$. Per construcció el vector $\overrightarrow{pq}$ és un múltiple de u i per tant és ortogonal a tots els vectors de H. Per la Proposició (4.4) obtenim que la distància entre p i $\mathbb{H}$ és igual $d(p, q)$:

$$d(p, \mathbb{H}) = d(p, q).$$



Per estalviar-nos el càlcul del punt q donem una fórmula en la que només intervenen a, p i u. Podem descomposar $\overrightarrow{ap} = \overrightarrow{aq} + \overrightarrow{qp}$ i per tant:

$$\overrightarrow{ap} \cdot u = (\overrightarrow{aq} + \overrightarrow{qp}) \cdot u = \cancel{\overrightarrow{aq} \cdot u} + \overrightarrow{qp} \cdot u.$$

Prenent valor absolut:

$$|\overrightarrow{ap} \cdot u| = |\overrightarrow{qp} \cdot u| = d(p, q) \cdot \|u\| = d(p, \mathbb{H}) \cdot \|u\|.$$

Obtenim la fórmula:

$$\boxed{d(p, \mathbb{H}) = \frac{|\overrightarrow{ap} \cdot u|}{\|u\|}.} \tag{10}$$

Quan la referència és ortonormal podem explicitar més aquesta fórmula. En efecte, suposem que l'equació de $\mathbb{H}$ és:

$$A_1x_1 + \cdots + A_nx_n + B = 0.$$

Recordeu que les equacions del subespai director d'una varietat lineal s'obtenen considerant les equacions de la varietat lineal i eliminant-ne els termes independents. En aquest cas tindrem que l'equació d'H és:

$$A_1x_1 + \cdots + A_nx_n = 0.$$

Com estem en el supòsit de qué la referència és ortonormal aquesta darrera equació es pot escriure com un producte escalar:

$$(A_1, \ldots, A_n) \cdot (x_1, \ldots, x_n) = 0$$

la qual cosa ens diu que $(A_1, \ldots, A_n)$ és ortogonal a tots els vectors de H. Hem provat:

Lema 4.6. *En referència ortonormal el vector $(A_1, \ldots, A_n)$ és ortogonal a l'hiperplà d'equació $A_1x_1 + \cdots + A_nx_n + B = 0$.*

Usem aquest lema per reescriure la fórmula (10): suposem que p té coordenades $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ i que $a = (a_1, \ldots, a_n)$ és un punt qualsevol de l'hiperplà. En particular $A_1a_1 + \cdots + A_na_n + B = 0$, o sigui:

$$-A_1a_1 - \cdots - A_na_n = B. \tag{11}$$

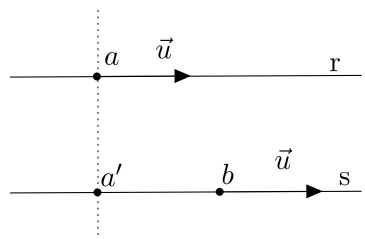
El vector u de la fórmula (10) serà el vector $(A_1, \ldots, A_n)$:

$$d(p, \mathbb{H}) = \frac{|A_1(\alpha_1 - a_1) + \cdots + A_n(\alpha_n - a_n)|}{\sqrt{A_1^2 + \cdots + A_n^2}}.$$

Usant (11) obtenim finalment:

$$\boxed{d(p,\mathbb{H}) = \frac{|A_1\alpha_1 + \cdots + A_n\alpha_n + B|}{\sqrt{A_1^2 + \cdots + A_n^2}}.}$$

Distància entre dues rectes de l'espai tridimensional. Si les rectes es tallen la distància és zero. Suposem que les rectes són paral·leles: posem $r = a + \langle u \rangle$ i $s = b + \langle u \rangle$. Per la proposició, la distància entre r i s coincideix amb la distància entre a i un punt $a' \in s$ tal que $\overrightarrow{aa'} \cdot u = 0$.



El càlcul del punt a' es pot fer tallant s amb el pla ortogonal a r (i a s) que passa per a.

Si la referència és ortonormal la següent fórmula permet calcular la distància sense haver de trobar el punt a':

$$\boxed{d(r,s) = \frac{\|\overrightarrow{ab} \wedge u\|}{\|u\|}.} \tag{12}$$

En efecte:

$$\overrightarrow{ab} \wedge u = (\overrightarrow{aa'} + \overrightarrow{a'b}) \wedge u = \overrightarrow{aa'} \wedge u + \cancel{\overrightarrow{a'b}} \wedge u.$$

Prenent la norma, i tenint en compte que $\overrightarrow{aa'}$ i u formen un angle de 90 graus, tenim:

$$\|\overrightarrow{ab} \wedge u\| = \|\overrightarrow{aa'}\| \, \|u\| \, |\sin(\frac{\pi}{2})| = d(a,a') \, \|u\|$$

que implica la fórmula (12).

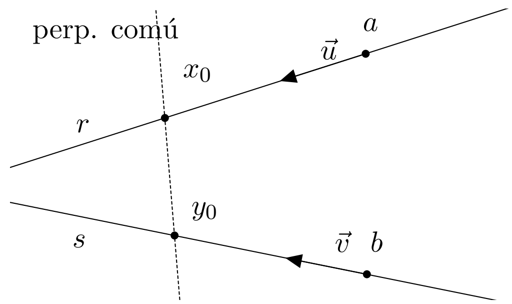
Suposem ara que les rectes són no paral·leles, o sigui $r = a + \langle u \rangle$ i $s = b + \langle v \rangle$ són disjuntes i u, v són linealment independents. Com hem indicat a l'inici d'aquest apartat, podem considerar punts variables:

$$\begin{aligned} x &= a + \lambda u \in r \\ y &= b + \mu v \in s, \end{aligned}$$

i imposar $\overrightarrow{xy} \cdot u = 0 = \overrightarrow{xy} \cdot v$. D'aquesta manera obtenim punts únics $x_0 \in r$, $y_0 \in s$ determinant l'única recta que talla i és perpendicular a r i s simultàniament. Diem que aquesta recta és la **perpendicular comú** a r i a s. Tenim que $d(r,s) = d(x_0, y_0)$.

Observació: La perpendicular comú de r i s també es pot pensar com la intersecció dels plans $a + \langle u, u \wedge v \rangle$ i $b + \langle v, u \wedge v \rangle$.

Per calcular la distància entre les rectes $r = a + \langle u \rangle$ i $s = b + \langle v \rangle$ d'abans (o sigui, entre x_0 i y_0), considerem un vector $w \in \langle u, v \rangle^{\perp}$ ortogonal a u i a v. Observem que w i $\overrightarrow{x_0 y_0}$ són proporcionals.



Descomposem $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{ax_0} + \overrightarrow{x_0 y_0} + \overrightarrow{y_0 b}$, i com $\overrightarrow{ax_0} \in \langle u \rangle$ i $\overrightarrow{y_0 b} \in \langle v \rangle$ tenim que

$$\overrightarrow{ab} \cdot w = (\overrightarrow{ax_0} + \overrightarrow{x_0 y_0} + \overrightarrow{y_0 b}) \cdot w = \overrightarrow{x_0 y_0} \cdot w.$$

Prenent valor absolut:

$$|\overrightarrow{ab} \cdot w| = |\overrightarrow{x_0 y_0} \cdot w| = \|\overrightarrow{x_0 y_0}\| \cdot \|w\| = d(r, s) \cdot \|w\|.$$

Hem trobat la fórmula:

$$\boxed{d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{ab} \cdot w|}{\|w\|}.}$$

Recordem que la projecció ortogonal $PO(\overrightarrow{ab}, \langle u, v \rangle^{\perp}) = PO(\overrightarrow{ab}, \langle w \rangle)$ s'expressa de la forma:

$$PO(\overrightarrow{ab}, \langle w \rangle) = \frac{\overrightarrow{ab} \cdot w}{w \cdot w}\, w.$$

Per tant la fórmula anterior es pot expressar així:

$$\boxed{d(r, s) = \|PO(\overrightarrow{ab}, \langle u, v \rangle^{\perp})\|.}$$

Podem reescriure-ho tot utilitzant $w = u \wedge v$ i observant que $\overrightarrow{ab} \cdot (u \wedge v) = det_{e_i}(u, v, \overrightarrow{ab})$:

$$\boxed{d(r, s) = \frac{|det_{e_i}(u, v, \overrightarrow{ab})|}{\|u \wedge v\|}.}$$

4.3 Angles entre varietats lineals.

Més tard (en el proper tema) definirem l'angle associat a dos vectors unitaris u, v d'un espai vectorial euclidià com la classe de $[\{u, v\}] =: \widehat{uv}$ respecte d'una certa relació d'equivalència. Cal advertir que l'expressió:

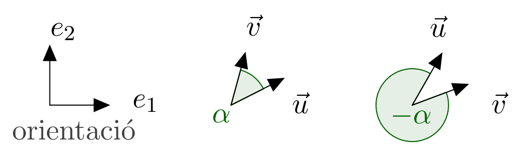
$$\frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|} \tag{13}$$

no depèn dels representants de la classe d'equivalència, per tant, tot angle té associat una mesura en radians única $\alpha \in [0, \pi]$ de manera que el cosinus d'aquest α és igual a l'expressió (13).

Suposem donada una orientació en l'espai vectorial de dimensió 2 generat per u i per v, i sigui e_1, e_2 una base ortonormal directa. Aleshores, podem associar a una parella **ordenada** de vectors unitaris un valor $\alpha \in [0, 2\pi]$ amb el conveni següent: si u, v representen l'orientació positiva, és a dir:

$$det_{\{e_1,e_2\}}(u, v) > 0$$

aleshores α es pren entre 0 i π i queda determinat pel cosinus. Si, per contra, l'orientació és negativa, aleshores α es troba entre π i 2π i, de nou, el cosinus és suficient per determinar l'angle



Contràriament al que acabem d'explicar, en el càlcul de l'angle entre varietats lineals (en els pocs casos en què ho definirem) l'angle serà un valor entre 0 i $\dfrac{\pi}{2}$.

Angle entre rectes. Considerem les dues rectes $r = a + u$, $s = b + v$ on u i v són unitaris. Observeu que tant u com v estan determinats llevat de signe. L'angle entre r i s (en realitat la mesura de l'angle) és, per definició, l'únic valor en $[0, \frac{\pi}{2}]$ tal que el seu cosinus és r $|u \cdot v|$. El valor absolut l'hem de posar per eliminar la indeterminació del signe dels vectors directors.

Angle entre dos hiperplans. Per a cada hiperplà considerem una recta ortogonal qualsevol (diem que és una recta **normal**). Aleshores, per definició, l'angle entre els hiperplans és l'angle entre les rectes normals.

Angle entre una recta i un hiperplà secants. Sigui $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ l'angle que formen la recta donada i una recta normal a l'hiperplà. Aleshores diem que l'angle que formen l'hiperplà i la recta és $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

5 Endomorfismes ortogonals

En tot el tema E és un espai vectorial euclidià de dimensió n. Estem interessats en els endomorfismes d'aquest espai vectorial amb una "bona" relació amb el producte escalar.

5.1 Aplicació adjunta.

Sigui $f : E \longrightarrow E$ un endomorfisme. Recordeu que tenim associat un altre endomorfisme f', aquesta vegada de l'espai dual $E' = \{\omega : E \longrightarrow \mathbb{R} \,|\, \omega \text{ és lineal}\}$, donat per

$$\begin{aligned} E' &\longrightarrow E' \\ \omega &\mapsto \omega \circ f. \end{aligned}$$

La presència del producte escalar indueix un isomorfisme canònic $\gamma : E \longrightarrow E'$ que ja hem usat en temes anteriors. És el que envia un vector u a la forma lineal "fer producte escalar amb u"

$$\begin{aligned} \omega_u : E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto u \cdot x. \end{aligned}$$

Podem doncs convertir f' en un endomorfisme de E transportant f' a E via γ:

$$f^a : E \xrightarrow{\gamma} E' \xrightarrow{f'} E' \xrightarrow{\gamma^{-1}} E.$$

Notem que, per definició, $\gamma \circ f^a = f' \circ \gamma$. Per a tot vector $y \in E$ tindrem que:

$$\gamma(f^a(y)) = \omega_{f^a(y)} = f'(\gamma(y)) = f'(\omega_y) = \omega_y \circ f.$$

Aplicant aquesta igualtat a un vector arbitrari x trobem:

$$\omega_{f^a(y)}(x) = \omega_y(f(x)),$$

i, recordant la definició de ω_x i $\omega_{f^a(y)}$, obtenim:

$$\boxed{f(x) \cdot y = x \cdot f^a(y).} \tag{14}$$

Hem demostrat la part de l'existència de la proposició següent:

Proposició 5.1. *Donat un endomorfisme $f \in End_{\mathbb{R}}(E)$ existeix un únic endomorfisme f^a de E, anomenat* **adjunt d'**f*, satisfent la fórmula (14) per a qualsevol parella de vectors $x, y \in E$.*

Demostració: Només resta provar la unicitat. Si g és un altre endomorfisme amb aquesta propietat, aleshores: $y \cdot f^a(x) = y \cdot g(x)$. Per tant, $y \cdot (gf^a(x) - g(x)) = 0$. Obtenim que $g(x) - f^a(x)$ és ortogonal a tot vector y. Com $E^{\perp} = \{\overrightarrow{0}\}$, tenim que $g(x) - f^a(x) = \overrightarrow{0}$, per a tot $x \in E$. $\square$

Matriu de l'aplicació adjunta. Fixem una base $e_1, \ldots, e_n$ de E. Sigui M la matriu de f en aquesta base. Recordeu que:

a) La matriu de γ, quan a l'espai d'arribada agafem la base dual $e'_1, \ldots, e'_n$, és la matriu de Gram G de la base $e_1, \ldots, e_n$.

b) La matriu de l'endomorfisme dual f' en la base e'_i és M^T.

Usant la definició de f^a s'obté que la seva matriu en la base $e_1, \ldots, e_n$ és:

$$G^{-1}\, M^T\, G.$$

En particular, si la base és ortonormal, la matriu de f^a és la transposada de la matriu de f.

5.2 Endomorfismes ortogonals.

Ens interessen els següents endomorfismes:

Definició 5.2. *Diem que un endomorfisme f és* **ortogonal** *si preserva el producte escalar, o sigui, si per a qualsevol parella de vectors x, y tenim*

$$f(x) \cdot f(y) = x \cdot y. \tag{15}$$

Observem que, en particular, prenent $x = y$ i fent arrel quadrada:

$$\|f(x)\| = \|x\|.$$

Conseqüència d'aquesta fórmula és que **tot endomorfisme ortogonal és un isomorfisme**. En efecte, si un vector x és del Nucli, aleshores $f(x) = \overrightarrow{0}$ i per tant $\|x\| = \|f(x)\| = \|\overrightarrow{0}\|$ i tenim que $x = \overrightarrow{0}$. Com f és un endomorfisme, en ser injectiva és un isomorfisme.

El lema següent ens dóna una caracterització força útil d'aquests endomorfismes:

Lema 5.3. *Un endomorfisme $f \in End_{\mathbb{R}}(E)$ és ortogonal si, i només si $f^a = f^{-1}$.*

Demostració: Suposem que f és ortogonal. Utilitzem la fórmula (14) que defineix f^a:

$$x \cdot y \overset{f \text{ ort}}{=} f(x) \cdot f(y) = x \cdot f^a(f(y)).$$

Com aquesta fórmula és certa per a qualsevol parella de vectors x, y obtenim que $f^a \circ f =$Id. Com f és invertible: $f^a = f^{-1}$. Suposem ara que $f^a = f^{-1}$, aleshores per a tota parella de vectors x, y:

$$f(x) \cdot f(y) \overset{\text{def. de } f^a}{=} x \cdot f^a(f(y)) \overset{f^a = f^{-1}}{=} x \cdot y,$$

la qual cosa ens diu que f és ortogonal. $\square$

Usant el lema tenim dues noves definicions equivalents d'endomorfisme ortogonal, de caire matricial:

a) En qualsevol base, la matriu M de f satisfà $G^{-1}\, M^T\, G = M^{-1}$ (o bé: $M^T\, G\, M = G$).

b) <u>En base ortonormal</u> la matriu M de f és ortogonal: $M^T M = \mathrm{Id}$.

Una de les propietats més interessants dels endomorfismes ortogonals és que la condició de preservar el producte escalar implica la linealitat:

Proposició 5.4. *Sigui $f : E \longrightarrow E$ una aplicació qualsevol, on E és un espai vectorial euclidià. Si f preserva el producte escalar aleshores f és lineal.*

Demostració. Volem veure que $f(u+v) = f(u)+f(v)$ on $u, v \in E$. Per fer-ho veiem que el producte escalar $f(u+v) - f(u) - f(v)$ amb ell mateix és zero:

$$(f(u+v) - f(u) - f(v)) \cdot (f(u+v) - f(u) - f(v)) = f(u+v) \cdot f(u+v) +$$

$$f(u) \cdot f(u) + f(v) \cdot f(v) - 2f(u+v) \cdot f(u) - 2f(u+v) \cdot f(v) + 2f(u) \cdot f(v) =$$

$$(u+v) \cdot (u+v) + u \cdot u + v \cdot v - 2(u+v) \cdot u - 2(u+v) \cdot v + 2u \cdot v = 0.$$

Amb el mateix mètode es demostra que $f(\lambda u) = \lambda f(u)$ per tot $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Grup ortogonal. Denotem per $O(E)$ el conjunt dels endomorfismes ortogonals de E. Anem a provar que té estructura de grup:

Proposició 5.5. *$O(E)$ és un grup considerant com a operació la composició d'endomorfismes. L'anomenem* **grup ortogonal**.

Demostració: Comencem per veure que la composició d'endomorfismes ortogonals és ortogonal: siguin $f, g \in O(E)$ i siguin $x, y \in E$, aleshores

$$(g \circ f)(x) \cdot (g \circ f)(y) = g(f(x)) \cdot g(f(y)) \overset{g \in O(E)}{=} f(x) \cdot f(y) \overset{f \in O(E)}{=} x \cdot y.$$

D'altra banda, la identitat és clarament ortogonal. Només ens falta veure que l'invers de $f \in O(E)$ és ortogonal:

$$f^{-1}(x) \cdot f^{-1}(y) \overset{f \in O(E)}{=} f(f^{-1}(x)) \cdot f(f^{-1}(y)) = x \cdot y.$$

□

Sovint posarem $O(n)$ en comptes de $O(E)$ per referir-nos al grup ortogonal d'un espai vectorial euclidià de dimensió n, ja que no és difícil veure que, per a dos espais vectorials euclidians de la mateixa dimensió, els corresponents grups ortogonals són isomorfs.

En la proposició següent agrupem algunes de les propietats elementals dels endomorfismes ortogonals.

Proposició 5.6. *Per a tot $f \in O(n)$, el determinant de f és 1 o -1. A més a més, si λ és un valor propi de f, aleshores $\lambda = \pm 1$. Finalment, si $u \in E$ és un vector propi de valor propi 1 i $v \in E$ ho és de valor propi -1, aleshores $u \cdot v = 0$.*

Demostració: Com el determinant de f no depèn de la base, podem prendre-la ortonormal . Així la matriu associada M és ortogonal $M \cdot M^T = \mathrm{Id}$. Prenent determinant en aquesta igualtat $det(M)^2 = 1$. Sigui ara $u \neq 0$ un VEP de f de VAP λ. Aleshores:

$$u \cdot u \overset{f \text{ ort.}}{=} f(u) \cdot f(u) \;=\; (\lambda u) \cdot (\lambda u) \;=\; \lambda^2 \; u \cdot u,$$

per tant $\lambda^2 = 1$. Siguin ara u, v vectors com en l'enunciat. Per tant $f(u) = u$ i $f(v) = -v$. Tindrem, doncs, que $f(u) \cdot f(v)$ és $u \cdot v$, per ser f ortogonal, i també $f(u) \cdot f(v) = u \cdot (-v) = -u \cdot v$. Igualant $u \cdot v = -u \cdot v$ i obtenim que u i v són ortogonals. $\square$

Definició 5.7. *Anomenem* **directes** *o* **propis** *als endomorfismes ortogonals amb determinant* 1*, i* **indirectes**, **inversos** *o* **impropis** *als de determinant* -1*. El conjunt dels endomorfismes ortogonals propis formen un subgrup de* $O(n)$ *al que es denomina* **subgrup especial ortogonal** *i es denota per* $SO(n)$*.*

Acabem la secció amb dues caracteritzacions més dels endomorfismes ortogonals.

Proposició 5.8. *Un endomorfisme* f *és ortogonal si, i només si preserva normes, o sigui* $\|f(x)\| = \|x\|$ *per a tot* $x \in E$*.*

Demostració: Ja hem vist que si f és ortogonal, aleshores es conserven les normes. Suposem ara que les normes es conserven i siguin $x, y \in E$. Per hipòtesi $\|f(x+y)\| = \|x+y\|$. Calculem per separat cada membre (elevat al quadrat):

$$\begin{aligned}
&f(x+y) \cdot f(x+y) = (f(x) + f(y)) \cdot (f(x) + f(y)) = \\
&f(x) \cdot f(x) + f(y) \cdot f(y) + 2f(x) \cdot f(y) = \|f(x)\|^2 + \|f(y)\|^2 + 2f(x) \cdot f(y) = \\
&\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2f(x) \cdot f(y).
\end{aligned}$$

Per altra banda:

$$(x+y) \cdot (x+y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2x \cdot y.$$

Comparant $f(x) \cdot f(y) = x \cdot y$. $\square$

Nota: Aquesta Proposició tindrà molta importància en el proper tema, en el qual considerarem les afinitats $(f, \tilde{f})$ d'un espai afí euclidià que mantenen la distància, és a dir tals que

$$d(f(p), d(f(q)) = d(p, q).$$

Fixem-nos que això equival a dir que $\|\overrightarrow{f(p)f(q)}\| = \|\tilde{f}(\overrightarrow{pq})\|$ i $\|\overrightarrow{pq}\|$ són iguals, o dit d'una altra forma, que $\tilde{f}$ manté normes. Per la Proposició anterior podem afirmar el següent:

Proposició 5.9. *Una afinitat* $(f, \tilde{f})$ *manté la distància si, i només si* $\tilde{f}$ *és ortogonal.*

Proposició 5.10. *Un endomorfisme* f *és ortogonal si, i només si per a tota base ortonormal* $e_1, \ldots, e_n$ *tenim que* $v_i := f(e_i)$ *és també una base ortonormal. A més a més la base* v_i *té la mateixa orientació que la base* e_i *si, i només si* $f \in SO(n)$*.*

Demostració: Suposem que f és ortogonal i que la base e_i és ortonormal. Aleshores

$$v_i \cdot v_j = f(e_i) \cdot f(e_j) = e_i \cdot e_j.$$

En direcció contrària, sigui e_i una base ortonormal. La matriu de canvi de base P de la base v_i en funció de e_i és, per construcció, la matriu d'f. Com la matriu de Gram és la identitat, i P és una matriu ortogonal, trobem que f és ortogonal. La afirmació sobre la preservació de la orientació és conseqüència de la relació:

$$det(f) = det_{e_i}(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = det_{e_i}(v_1, \ldots, v_n).$$

$\square$

5.3 Endomorfismes ortogonals en dimensió 2.

L'objectiu d'aquest apartat és provar que als endomorfismes ortogonals en dimensió 2 se'ls hi poden associar matrius especialment simples. També volem aprendre a calacula aquestes matrius a partir d'una matriu qualsevol. La utilitat és doble: per una banda ens dóna la possibilitat de llegir en aquestes matrius informació geomètrica sobre l'endomorfisme, i, per tant, "entendre'l" d'una forma més profunda. Per una altra banda, això ens permetrà reconèixer de manera efectiva quan dos endomorfismes es poden representar per la mateixa matriu (són "equivalents"). En les properes seccions estendrem aquesta anàlisi a dimensió arbitrària mitjançant un argument inductiu que utilitzarà els resultats d'aquesta secció.

Estudi de $O(2)$. Anem ara a estudiar amb més detall els endomorfismes ortogonals en dimensió 2. Si el determinant és -1, o sigui si f és impropi, aleshores el polinomi característic és de la forma $x^2+\alpha x-1$ amb discriminant $\alpha^2+4>0$. Tenim, doncs, dues arrels diferents i, per tant, f diagonalitza. Atès que els VAPs només poden ser 1 o -1, que els VEPs de VAPs diferents són ortonormals, i que el determinant és -1, obtenim que en certa base ortonormal v_1, v_2 la matriu és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Observem que $f^2 = \mathrm{Id}$ i per tant és una **simetria d'eix $\langle v_1 \rangle$ i direcció $\langle v_2 \rangle$** (en vàrem parlar en el tema 2, repasseu l'exemple 4 de la secció 2.1). En les simetries ortogonals usualment només es dóna l'eix, ja que la direcció de simetria és forçosament ortogonal a aquest.

Estudiem ara el cas propi, $f \in SO(2)$. Fixem una base ortonormal e_1, e_2. La matriu associada en aquesta base serà:

$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

amb $M^{-1} = M^T$ i $det\, M = 1$. Calculem la inversa de M i igualem a M^T:

$$M^{-1} = \frac{1}{det\, M} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Per tant $a = d$ i $c = -b$. O sigui, la matriu M associada a f en una base ortonormal qualsevol té la forma:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

on $a^2 + b^2 = det\, M = 1$. Interpretant (a, b) com un punt de la circumferència de radi 1 centrada en el $(0, 0)$, tenim que existeix un únic $\alpha \in [0, 2\pi)$ tal que $a = \cos(\alpha)$, $b = \sin(\alpha)$. Així que, amb aquesta definició de α, M esdevé la matriu:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Observeu que aquest és l'aspecte de la matriu en qualsevol base ortonormal. Diem que f és un **gir (vectorial) d'angle** α i el denotem per g_α. Aquest nom ve justificat per la propietat següent:

Proposició 5.11. *Sigui $f = g_\alpha$ un gir d'angle α, aleshores per a qualsevol vector unitari u:*

a) $u \cdot g_\alpha(u) = \cos(\alpha)$.

b) $det_{e_1,e_2}(u, g_\alpha(u)) = \sin(\alpha)$, *per a qualsevol base ortonormal e_1, e_2 representant l'orientació fixada.*

En particular, fixada una orientació, α no depèn de la representació matricial de f (és un "invariant").

Demostració: Fixem una base ortonormal e_1, e_2. La matriu de f en aquesta base serà com (16). Siguin (x, y) les coordenades del vector unitari u en la base fixada, tenim $x^2 + y^2 = 1$. Usant la matriu obtenim:

$$g_\alpha(u) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\cos(\alpha)x - \sin(\alpha)y, \sin(\alpha)x + \cos(\alpha)y).$$

Ara tant a) com b) són càlculs no gaire complicats:

$$\begin{aligned} & u \cdot g_\alpha(u) = (x, y) \cdot (\cos(\alpha)x - \sin(\alpha)y, \sin(\alpha)x + \cos(\alpha)y) = \\ & x(\cos(\alpha)x - \sin(\alpha)y) + y(\sin(\alpha)x + \cos(\alpha)y) = \\ & x^2 \cos(\alpha) - \cancel{xy\sin(\alpha)} + \cancel{xy\sin(\alpha)} + y^2 \cos(\alpha) = \cos(\alpha). \end{aligned}$$

Això demostra a). Comprovem b):

$$det_{e_1,e_2}(u, g_\alpha(u)) = \begin{vmatrix} x & y \\ \cos(\alpha)x - \sin(\alpha)y & \sin(\alpha)x + \cos(\alpha)y \end{vmatrix} =$$

$$x^2 \sin(\alpha) + \cancel{xycos(\alpha)} - \cancel{xycos(\alpha)} + y^2 \sin(\alpha) = \sin(\alpha).$$

□

Nota: Si no haguéssim fixat l'orientació, el determinant de l'apartat b) podria canviar de signe en canviar la base e_i per una altra base ortonormal e'_i. En efecte:

$$det_{e'_1,e'_2}(u, g_\alpha(u)) = det_{e'_1,e'_2}(e_1, e_2) \cdot det_{e_1,e_2}(u, g_\alpha(u)),$$

i $det_{e_1',e_2'}(e_1, e_2)$ pot ser 1 o -1.

El grup $SO(2)$. És fàcil comprovar que dues matrius de la forma (16) sempre commuten. Per tant $SO(2)$ és un subgrup commutatiu d'$O(2)$. En aquest grup, gràcies a les fórmules del cosinus i sinus d'una suma d'angles, se satisfà que la composició d'un gir d'angle α amb un gir d'angle β és un gir d'angle $\alpha + \beta$. D'aquesta manera obtenim un isomorfisme de grups

$$SO(2) \longrightarrow \mathcal{A} := \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z}), \quad g_\alpha \mapsto \alpha.$$

5.4 Angles.

L'anàlisi que acabem de fer del grup $SO(2)$ permet definir (finalment!) la noció d'angle. Considerem E un espai vectorial euclidià orientat de dimensió 2 i anomenem $\mathcal{P}$ al conjunt de les parelles ordenades de vectors unitaris:

$$\mathcal{P} := \{(u_1, u_2) \in E \times E \mid \|u_1\| = \|u_2\| = 1\}.$$

Es defineix en $\mathcal{P}$ la relació d'equivalència següent: $(u_1, u_2) \sim (v_1, v_2)$ si existeix un element $f \in SO(2)$ tal que $f(u_1) = v_1$ i $f(u_2) = v_2$. Com la identitat és un gir (de zero graus), la inversa d'un gir és un gir, i la composició de girs és un gir (en definitiva $SO(2)$ és un subgrup), tenim que efectivament la relació és d'equivalència. A la classe d'una parella (u, v) se la denota per $\widehat{uv}$.

No és el propòsit d'aquestes notes estendre's en aquest punt. Ens limitem a indicar com construir una bijecció entre $\mathcal{P}/\sim$ i el grup de "mesures d'angles" $\mathcal{A} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ que associa a cada angle la seva mesura:

a) Es prova que donat un parell de vectors $(u, v) \in \mathcal{P}$, existeix un únic $f \in SO(2)$ tal que $f(u) = v$.

b) El gir f anterior només depèn de la classe d'equivalència. És a dir, tenim una bijecció:

$$\mathcal{P}/\sim \longrightarrow SO(2), \qquad \widehat{uv} \mapsto f.$$

Observeu que l'aplicació inversa consisteix en assignar a un endomorfisme directe f la classe del parell $(u, f(u))$ on u és un vector unitari qualsevol.

c) Combinant la bijecció anterior amb l'isomorfisme $SO(2) \longrightarrow \mathcal{A}$ trobat abans, assignem a $\widehat{uv}$ un valor $\alpha \in \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ Diem que α és la mesura de l'angle $\widehat{uv}$ en radians. Notem que per l'apartat a) de la Proposició (5.11) $\cos(\widehat{uv}) = u \cdot v$.

Un cop definit l'angle com a entitat geomètrica (classe d'una parella de vectors) i establert l'isomorfisme amb $\mathcal{A}$ no distingirem més entre l'angle i la seva mesura i parlarem, com de fet ja veníem fent en un abús de notació, de "l'angle de α radians".

5.5 Teorema espectral.

Enunciem primer el teorema central d'aquest tema.

Teorema 5.12. *(Teorema espectral dels endomorfismes ortogonals) Sigui $f \in O(n)$, aleshores existeix una base ortonormal tal que la matriu de f en aquesta base és de la forma:*

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & A_1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & A_k \end{pmatrix}$$

on cada A_i és una matriu 2 per 2 del tipus següent:

$$A_i = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_i) & -\sin(\alpha_i) \\ \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) \end{pmatrix}.$$

amb α_i diferent de 0 i de π (si $\alpha_i = \pi$ la matriu A_i seria diagonal amb dos -1 com a valors propis i formaria part del bloc format per -1's a la diagnal).

Lemes preparatoris. Per demostrar el teorema espectral necessitarem tres resultats previs. Un cop els tinguem a la mà, la demostració del teorema serà molt ràpida.

Lema 5.13. *Sigui f un endomorfisme ortogonal i sigui W un subespai invariant per f, és a dir $f(W) \subset W$ (de fet $f(W) = W$ ja que f és un isomorfisme). Aleshores $W^\perp$ també és invariant.*

Demostració: Observem primer que com $f^a = f^{-1}$ el subespai W és també invariant per f^a. Sigui ara $u \in W^\perp$. Volem veure que $f(u) \in W^\perp$, és a dir que $f(u) \cdot w = 0$ per a tot $w \in W$. En efecte: $f(u) \cdot w = u \cdot f^a(w) = 0$, ja que $f^a(w) \in W$. $\square$

Lema 5.14. *Sigui f un endomorfisme ortogonal i sigui W un subespai invariant per f. Aleshores la restricció de f a W és ortogonal.*

Demostració: Atès que $f(u) \cdot f(v) = u \cdot v$ per a tots els vectors u i v de l'espai vectorial, el mateix serà cert quan considerem aquests vectors en W, per tant $f_{|W}$ és també ortogonal. $\square$

Lema 5.15. *Per a tot endomorfisme d'un espai vectorial real E, existeix un subespai invariant de dimensió 1 o 2.*

Demostració: Si el polinomi mínim té algun factor lineal, tindrem l'existència de VAPs i per tant també de VEPs. Si u és un vector propi, aleshores $W = \langle u \rangle$ és invariant de dimensió 1. Suposem ara que el mínim només té factors quadràtics irresolubles. Sigui $x^2 + ax + b$ un d'aquests factors i descomponem el mínim de la forma:

$$m_f(x) = (x^2 + ax + b) \cdot R(x).$$

Per definició de mínim, $R(f) \neq 0$. Sigui $u_0 \in E$ tal que $R(f)(u_0) = u \neq 0$. Aleshores

$$0 = m_f(f)(u_0) = (f^2 + af + b\,\mathrm{Id})(R(f)(u_0)) = (f^2 + af + b\,\mathrm{Id})(u).$$

Per tant $f^2(u) = -af(u) - bu$. Això implica que $W = \langle u, f(u)\rangle$ és un subespai invariant de dimensió 2. En efecte, si $x = \alpha u + \beta f(u) \in W$, aleshores:

$$f(x) = f(\alpha u + \beta f(u)) = \alpha f(u) + \beta f^2(u) = \alpha f(u) + \beta(-af(u) - bu) \in \langle u, f(u)\rangle = W.$$

□

Demostració del Teorema espectral: Aplicant (5.15) trobem un subespai invariant W de dimensió ≤ 2. Pel Lema (5.13) l'ortogonal $W^{\perp}$ també és invariant. Pel (5.14) la restricció a $W^{\perp}$ torna a ser ortogonal i per tant podem aplicar de nou el Lema (5.15) a $f_{|W}$. Fent aquesta descomposició successivament trobem que E és suma directa de subespais invariants de dimensions 1 o 2 i ortogonals 2 a 2:

$$E \;=\; W_1 \overset{\perp}{\oplus} \ldots \overset{\perp}{\oplus} W_k. \tag{17}$$

Com la restricció de f a W_i és ortogonal, podem aplicar l'estudi que hem fet dels endomorfismes ortogonals en dimensió 2. □

5.6 Endomorfismes ortogonals de l'espai tridimensional.

Ja hem vist com són els elements de $O(2)$: en el cas impropi tenim una simetria l'eix de la qual és el subespai dels VEPs de VAP 1. En el cas propi tenim girs que queden totalment classificats per l'angle. Aquest es pot calcular, llevat de signe, amb la traça de la matriu que és $2\cos(\alpha)$. Per determinar totalment l'angle caldrà calcular el seu sinus, seguint la Proposició (5.11) amb, per exemple, $u = e_1$:

$$det_{e_1,e_2}(e_1, g_\alpha(e_1)) = \sin(\alpha),$$

on e_1, e_2 és una base ortonormal representant l'orientació fixada.

En vista del Teorema espectral dels endomorfismes ortogonals, tot element $f \in O(3)$ té com a matriu associada, en certa base ortonormal, una de les següents:

<u>Cas propi</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ o bé } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ o bé } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Observem que la primera i la segona matriu són casos particulars de la tercera matriu: només cal posar $\alpha = 0$ i $\alpha = \pi$. Li diem **rotació de α graus** ja que el primer vector de la base és propi de VAP 1 i en el subespai ortogonal tenim un gir de α graus. El subespai generat pel VEP de VAP 1 s'anomena **eix**. Quan $\alpha = 0$ tenim la identitat. Quan $\alpha = \pi$ és una simetria (el quadrat és la identitat) a la que s'anomena **axial**.

Cas impropi

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ o bé } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ o bé } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Novament les dues primeres corresponen a casos particulars de la tercera amb $\alpha = 0, \pi$. La primera rep el nom de **simetria especular** ja que tenim un subespai de dimensió 2 format per VEPs de VAP 1, mentre que un vector ortogonal a aquest subespai és propi de VAP -1. La segona és una homotècia de raó -1 i rep el nom de **simetria central**. La tercera és una **rotació d'angle α i eix $\langle e\rangle$ seguida d'una simetria especular respecte de $\langle e\rangle^{\perp}$**. Aquest darrer nom queda justificat per la descomposició matricial següent:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

que mostra aquest endomorfisme com una rotació seguida d'una simetria. Com també es pot posar

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ho podem veure com una simetria seguida d'una rotació.

Tant en les rotacions, com en les rotacions seguides de simetria especular, la traça ens permet calcular el cosinus de l'angle de gir, peró no l'angle. Això és degut a que la seva determinació depèn de fixar una orientació en el pla ortogonal a l'eix. Observeu que una orientació en E NO determina una orientació en un subespai de dimensió 2. Per determinar amb precisió l'angle de gir necessitem **orientar l'eix de rotació**, o sigui triar un dels dos vectors directors unitaris. Automàticament el pla ortogonal tindrà associada una orientació i, com en el cas de $SO(2)$, l'angle α queda determinat.

Exemple. Considerem un espai vectorial euclidià orientat de dimensió 3 amb una base ortonormal fixada e_i. Volem trobar la matriu de l'endomorfisme ortogonal f que consisteix en una rotació d'angle $\pi/3$ al voltant de l'eix $E_1 = \langle(1,1,1)\rangle$. Si no es dóna més informació, la rotació no està ben definida (no podem distingir entre la rotació d'angle $\pi/3$ i $-\pi/3$). Suposem que E_1 està orientat per $u_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1)$. Per definició de rotació, si prenem la base ortonormal directa:

$$u_1 = \tfrac{\sqrt{3}}{3}(1,1,1)$$

$$u_2 \quad \text{unitari i ortogonal a } u_1 \text{ qualsevol, per exemple } u_2 = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1,-1,0)$$

$$u_3 = u_1 \wedge u_2 = \tfrac{\sqrt{6}}{6}(1,1,-2),$$

(observem que és directa perquè $det_{e_i}(u_1,u_2,u_3) = (u_1 \wedge u_2)\cdot u_3 = \|u_1 \wedge u_2\|^2 > 0$), la matriu associada a f és la matriu reduïda:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Fem ara un canvi de base. Observem que la matriu

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$$

és ortogonal (és la matriu de canvi de base entre dues bases ortonormals: u_i en funció de e_i). Per tant la matriu buscada és:

$$P \cdot R \cdot P^{-1} = P \cdot R \cdot P^T = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \\ \end{pmatrix}.$$

La taula següent resumeix la informació més important dels endomorfismes ortogonals en dimensió 3.

Nom	Det	Matriu Reduïda	Elements geomètrics característics
Identitat	1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	
Rotació d'angle α	1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$	Eix=VEP de VAP 1. Traça és $1{+}2\cos(\alpha)$. (Si $\alpha = \pi$ una sim. axial).
Simetria especular	-1	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	Subespai de simetria = VEPS de VAP 1.
Rotació seguida de sim. especular	-1	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$	Traça $= -1 + 2\cos(\alpha)$. Eix de rotació: VEP u de VAP -1. Subespai de simetria: $\langle u \rangle^\perp$ (si $\alpha = \pi$ **simetria central**).

Com estudiar endomorfismes ortogonals: Donat un endomorfisme d'un espai afí euclidià (de dimensió 2 o 3) i de matriu M en una base e_i, entendrem per "estudiar-lo" o "classificar-lo" el següent:

- Esbrinar si és o no ortogonal: cal mirar si $M^T\, G\, M = G$ on G és la matriu de Gram de la base.
- Si és ortogonal, trobar quin dels tipus anteriors li correspon (per tant quina és la seva matriu reduïda en una base convenient): el determinant ens diu si és propi o impropi. L'existència o no de VEPs de VAP 1 o -1 i la traça determinen la matriu reduïda corresponent.
- Finalment donem els elements geomètrics més característics: si és una rotació cal trobar l'eix i el cosinus de l'angle; si és una simetria especular el subespai invariant de dimensió 2, etc.

5.7 Classificació d'endomorfismes ortogonals.

En general, classificar vol dir que, donat un conjunt X amb una relació d'equivalència $\sim$, som capaços de descriure el conjunt de les classes $X/\sim$: saber quantes classes n'hi ha, trobar elements distingits en cada classe i, finalment, saber trobar explícitament l'element distingit associat a un element donat. En el nostre cas, fixem un espai vectorial euclidià de dimensió n, i el conjunt X serà $O(E)$. La relació d'equivalència es defineix així: $f \sim g$ si existeixen bases ortonormals e_i i v_i tals que la matriu d'f en la base e_i és la mateixa que la de g en la base v_i. Observeu que si $f \sim g$, aleshores tots dos tenen el mateix polinomi característic i per tant també comparteixen la informació que se'n deriva mirant els seus coeficients i arrels: traça, determinant, valors propis,...
En primer lloc utilitzem el determinant per separar propis i impropis. En dimensió 2 tots els impropis són equivalents i en el cas dels propis l'invariant $cos(\alpha)$ classifica l'endomorfisme. Si fixem l'orientació i modifiquem l'equivalència demanant que les bases e_i i v_i de la definició representin la mateixa orientació, aleshores la classificació la dóna l'angle (veure (5.11)). En dimensió 3 tenim que determinant i traça classifiquen:

Teorema 5.16. *Sigui E un espai vectorial euclidià de dimensió 3. Aleshores dos endomorfismes $f, g \in O(E)$ són equivalents si i només si $det(f) = det(g)$ i traça(f) =traça(g).*

Demostració: D'esquerra a dreta és obvi. De dreta a esquerra: podem suposar tots dos propis o impropis i amb la traça trobem el cosinus de l'angle. Per tant podem associar a f i a g la mateixa matriu reduïda llevat de canviar α per $-\alpha$. Observem que les matrius

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

són equivalents: si la primera és la matriu de f en la base e_1, e_2, e_3, aleshores la matriu de f en la base e_1, e_3, e_2 és la segona. El mateix passa amb les rotacions seguides de simetria. Podem dir que, tant els endomorfismes propis com els impropis d'$O(3)$, es poden classificar pel determinant i la traça. $\square$

En dimensió general no podem usar la traça. Cal considerar la part real de les arrels del característic que no són ni 1 ni -1. Això permet considerar els termes $\cos(\alpha_i)$ de les diferents "caixes" de la matriu reduïda. D'una manera semblant es pot provar que aquestes parts reals i el determinant classifiquen els endomorfismes ortogonals.

6 Desplaçaments

6.1 Definicions.

En aquest tema $(\mathbb{A}, E, \cdot)$ és un espaí afí euclidià. El nostre propòsit és estudiar les aplicacions $\mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ que preserven la distància entre punts:

Definició 6.1. *Diem que una aplicació $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ és un* **desplaçament** *si per a tota parella de punts $p, q \in \mathbb{A}$ tenim que*

$$d(p, q) = d(f(p), f(q)).$$

Aquesta condició implica que f és una aplicació afí. En efecte, fixem un punt $a \in \mathbb{A}$ i definim $\tilde{f} : E \longrightarrow E$ per la fórmula

$$\tilde{f}(u) = \overrightarrow{f(a)f(b)}, \quad \text{on } b = a + u.$$

Lema 6.2. *Amb aquestes notacions, $\tilde{f}$ és lineal i f és una aplicació afí amb endomorfisme associat $\tilde{f}$.*

Demostració. Per veure que $\tilde{f}$ és lineal serà suficient provar que preserva el producte escalar gràcies a la Proposició (5.4). Sigui $u, v \in E$ i posem $p = a + u$ i $q = a + v$. En particular $u = \vec{ap}$ i $v = \vec{aq}$. Aleshores:

$$d(p, q)^2 = \vec{pq} \cdot \vec{pq} = (\vec{pa} + \vec{aq}) \cdot (\vec{pa} + \vec{aq}) = d(p, a)^2 + d(a, q)^2 + 2\vec{pa} \cdot \vec{aq} = d(p, a)^2 + d(a, q)^2 - 2u \cdot v.$$

Calculant de la mateixa manera, utilitzant el punt $f(a)$ en comptes d'a, trobem que:

$$d(f(p), f(q))^2 = d(f(p), f(a))^2 + d(f(a), f(q))^2 - 2\tilde{f}(u) \cdot \tilde{f}(v).$$

Comparant arribem a $\tilde{f}(u) \cdot \tilde{f}(v) = u \cdot v$.

Veiem ara que f és una aplicació afí, fixem dos punts $p, q \in \mathbb{A}$, aleshores:

$$\overrightarrow{f(p)f(q)} = \overrightarrow{f(p)f(a)} + \overrightarrow{f(a)f(q)} = \tilde{f}(\vec{pa}) + \tilde{f}(\vec{aq}) = \tilde{f}(\vec{pa} + \vec{aq}) = \tilde{f}(\vec{pq}).$$

□

Com hem vist al llarg de la demostració del Lema, l'aplicació $\tilde{f}$ preserva el producte escalar, és a dir: $\tilde{f} \in O(E)$. Seguint la pauta que hem usat en el tema anterior, direm que el desplaçament és **propi** o **directe** si $det(\tilde{f}) = 1$ i que és **impropi**, **indirecte** o **invers** si $det(\tilde{f}) = -1$.

Com a corol·lari del teorema espectral dels endomorfismes ortogonals (mireu (5.12)) sabem que, en un referència ortonormal convenient, les equacions d'un desplaçament són de la forma (n és la dimensió de l'espai afí):

$$
\begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ \\ \\ \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & A_1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & A_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \\ \\ \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ \\ \\ \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \tag{18}
$$

Recordem que les submatrius A_i corresponen a girs en subespais de dimensió 2 d'angle $\alpha_i \neq 0, \pi$.

La matriu anterior encara es pot reduir més amb una elecció adient de l'origen de coordenades O. Per exemple, si existeix un punt fix P, considerant $O = P$ aconseguim que $a_1 = \cdots = a_n = 0$. No sempre ens trobarem en aquesta situació, per exemple les translacions són desplaçaments que no tenen punts fixos. Tot i així, sempre podrem anul·lar alguns dels coeficients a_i, com veurem a continuació. Considerem el sistema de punts fixos del desplaçament anterior:

$$
\begin{aligned}
&x_i = x_i + a_i, \qquad\qquad\qquad \text{si } \ i = 1, \ldots, r \\
&x_j = -x_j + a_j \qquad\qquad\qquad \text{si } \ j = r+1, \ldots, r+s \\
&x_{r+s+1} = \cos(\alpha_1)\, x_{r+s+1} - \sin(\alpha_1)\, x_{r+s+2} + a_{r+s+1} \\
&x_{r+s+2} = \sin(\alpha_1)\, x_{r+s+1} + \cos(\alpha_1)\, x_{r+s+2} + a_{r+s+2} \\
&\cdots
\end{aligned}
$$

(estem suposant que hi ha r valors propis 1 i s valors propis -1). La primera fila (corresponent a les primeres r equacions) només té solució si els coeficients a_i són zero. Respecte de la segona fila, la solució és $x_j = a_i/2$. El subsistemes 2 per 2 restants es reescriuen de la forma següent (només escrivim el primer):

$$
\begin{aligned}
(\cos(\alpha_1) - 1)\, x_{r+s+1} - \sin(\alpha_1)\, x_{r+s+2} &= -a_{r+s+1} \\
\sin(\alpha_1)\, x_{r+s+1} + (\cos(\alpha_1) - 1)\, x_{r+s+2} &= -a_{r+s+2}.
\end{aligned}
$$

La matriu associada a aquest sistema té determinant:

$$
\begin{vmatrix} \cos(\alpha_1) - 1 & -\sin(\alpha_1) \\ \sin(\alpha_1) & \cos(\alpha_1) - 1 \end{vmatrix} = (\cos(\alpha_1) - 1)^2 + \sin^2(\alpha_1) = 2 - 2\cos(\alpha_1) \neq 0.
$$

Per tant, el sistema té una solució única $x_{r+s+1} = \lambda_{r+s+1}$, $x_{r+s+2} = \lambda_{r+s+2}$. Considerem el punt

$$
O' = (0, \ldots, 0, a_{r+1}/2, \ldots, a_{r+s}/2, \lambda_{r+s+1}, \lambda_{r+s+2}, \ldots).
$$

Aleshores

$$f(O') = (a_1, \dots, a_r, a_{r+1}/2, \dots, a_{r+s}/2, \lambda_{r+s+1}, \lambda_{r+s+2}, \dots),$$

i $\overrightarrow{O'f(O')}$ és combinació dels r primers vectors de la base de la referència ortonormal. Per tant, canviant en la referència O per O' aconseguim que els termes independents $a_i, i \geq r$ siguin zero. Observem que les r primeres equacions del desplaçament descriuen una translació de vector $u = (a_1, \dots, a_r)$. La part vectorial d'una translació és la identitat que, en qualsevol base, té matriu associada la matriu identitat. Podem canviar els primers r vectors de la base, de manera que continuï essent una base ortonormal, i tal que el primer vector de la base sigui proporcional a u. D'aquesta manera, l'aspecte de la part vectorial de la matriu és el mateix i aconseguim que el vector de translació sigui proporcional al primer vector de la base, essent de la forma $(a, 0, \dots, 0)$. Així doncs, la conclusió final d'aquest apartat és que en un referència ortonormal convenient les equacions d'un desplaçament són de la forma:

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ \vdots \\ \\ \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & -1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & A_1 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & A_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{19}$$

Observem que si $n = 1$, aleshores (19) es converteix en l'equació $x^* = \pm x + a$. En el cas propi el coeficient de x és 1 i ens queda la **identitat** si $a = 0$ o una **translació** si $a \neq 0$. En el cas impropi queda $x^* = -x$ i obtenim una **simetria central**.

La resta del tema es dedica als desplaçaments en dimensions 2 i 3. No incidirem en la qüestió de la classificació respecte de la relació d'equivalència natural ($(f, \tilde{f}) \sim (g, \tilde{g})$ si en certes referències ortonormals tenen les mateixes equacions) i ens limitarem a veure quina matriu reduïda podem associar a un desplaçament donat i com aquesta matriu explica la geometria de la transformació.

6.2 Desplaçaments del pla.

Tornant a les equacions (19) per $n = 2$, tenim les possibilitats següents:

Cas propi: Vectorialment el desplaçament és un gir d'angle α. Si aquest angle és 0 ens queda que $\tilde{f}$ és la identitat i pel que hem vist a l'apartat anterior en certa ferència ortonormal la matriu és de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $a = 0$, tenim que f és la **identitat**, i si $a \neq 0$, f és la **translació de vector** $(a, 0)$.

Si $\alpha \neq 0$, aleshores hi ha un únic punt fix (en l'origen de coordenades) anomenat **centre de gir**. La matriu reduïda obtinguda és:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Cas impropi:</u> Segons hem vist, en una certa referència ortonormal la matriu és de la forma:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Observem que si $a = 0$, el sistema de punts fixos té com a solució la recta $y = 0$, a la qual anomenem **eix de simetria**. Trobem la matriu reduïda:

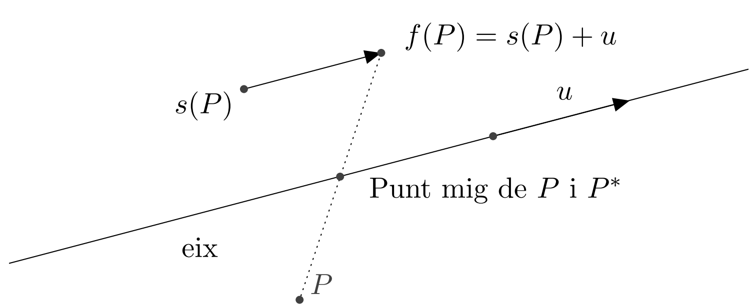
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aquest desplaçament rep el nom de **simetria axial**. Per descriure'l només cal donar l'eix de simetria, que coincideix amb la recta de punts fixos.

Si $a \neq 0$, aleshores el sistema de punts fixos no té solució. La matriu reduïda que s'obté es pot descompondre així:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per tant, la veiem com una **simetria axial seguida d'una translació de vector paral·el a l'eix de simetria**. A efectes de trobar l'eix (no podem utilitzar els punts fixos en aquest cas), és útil adonar-se del fet que el punt mig d'un punt i de la seva imatge pertany a l'eix de simetria (s és la simetria i f la simetria seguida de translació de vector u):

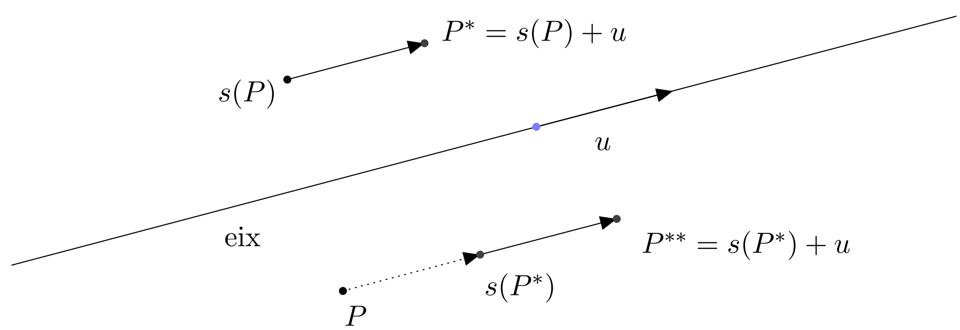


Amb la notació del dibuix, el punt mig de P i $P^* = f(P)$ és

$$P + \frac{1}{2}\overrightarrow{PP^*} = P + \frac{1}{2}(\overrightarrow{Ps(P)} + u) = (P + \frac{1}{2}\overrightarrow{Ps(P)}) + \frac{1}{2}u.$$

Com $s(P)$ és el simètric de P respecte de l'eix, aleshores $P + \frac{1}{2}\overrightarrow{Ps(P)}$ pertany a l'eix i per tant el punt mig de P i de P^* també.

Una altra observació útil és la següent: aplicant dues vegades el desplaçament a un punt P obtenim dues vegades el vector de translació.



Exemple. Considerem l'afinitat d'un pla afí euclidià que en referència ortonormal té equacions:

$$x^* = y + 2 \qquad y^* = x + 4.$$

Notem que la matriu de l'endomorfisme associat és:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que satisfà $M \cdot M^T = \mathrm{Id}$ i $det\, M = -1$. Per tant és un desplaçament impropi. El sistema de punts fixos no té solució, per tant es tracta d'una simetria axial seguida d'una translació de vector paral·lel a l'eix de simetria. Per calcular l'eix, considerem dos punts, per exemple $(0,0)$ i $(2,0)$. Calculem les seves imatges: $(2,4)$ i $(2,6)$, i fem punts mitjos de cada punt amb la seva imatge. Obtenim que tant $(1,2)$ com $(2,3)$ són de l'eix. Per tant la seva equació és $y = x + 1$. Fent la imatge de $(0,0)$ dues vegades: $f^2(0,0) = f(2,4) = (6,6) = 2(3,3)$ tenim que la translació és $(3,3)$.

6.3 Desplaçaments de l'espai.

Particularitzem les equacions (19) amb $n = 3$. Tenim les possibilitats següents:

Cas propi: Per un cert α i en referència ortonormal:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si l'angle és 0, la part vectorial és la identitat, per tant ens queda que f és la **identitat** si $a = 0$ i una **translació de vector** $(a, 0, 0)$ si $a \neq 0$. Les matrius reduïdes corresponents són:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

respectivament.

Si $\alpha \neq 0$ i $a = 0$, la matriu reduïda corresponent és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'anomenem **rotació d'eix** r **i angle** α, on r és la recta de punts fixos, ja que sobre els plans ortogonals a r és un gir de α graus. Si $\alpha = \pi$ també se li diu **simetria axial**.

L'últim cas propi correspon a $\alpha \neq 0$, $a \neq 0$. La matriu reduïda és:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que es pot descompondre així

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es tracta, per tant, d'una rotació seguida d'una translació en la direcció de l'eix. Aquest desplaçament rep el nom de **moviment helicoidal**. Donat un desplaçament en coordenades, és fàcil reconèixer quan es tracta d'un moviment helicoidal: el determinant de l'endomorfisme associat $\tilde{f}$ és 1, no hi ha punts fixos, i $\tilde{f}$ no és la identitat. El cosinus de l'angle de gir es troba amb la traça, com ja hem vist en diverses ocasions. D'altra banda el VEP de VAP 1 ens dóna el vector director de l'eix. Per calcular l'eix caldrà prendre un punt variable $p = (x, y, z)$ i imposar que el vector $\overrightarrow{pf(p)} = (x^* - x, y^* - y, z^* - z)$ sigui proporcional al VEP trobat. Un cop determinat l'eix, la translació la trobarem calculant $\overrightarrow{pf(p)}$ on p pertany a l'eix.

Exemple. Considerem l'afinitat que en una referència ortonormal fixada té equacions:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

L'endomorfisme associat $\tilde{f}$ és ortogonal, propi i la traça és $2 = 1 + 2\cos(\alpha)$. Els VEPs de VAP 1 són múltiples de $(1,1,1)$. Tot això ens diu que $\tilde{f}$ és una rotació (vectorial) d'eix $\langle(1,1,1)\rangle$ i angle $\pm\frac{\pi}{3}$ (caldria fixar un vector director de l'eix per determinar una orientació sobre els plans ortogonals a l'eix i poder decidir el signe de l'angle). El sistema de punts fixos:

$$\begin{array}{rrrl} -x & -y & +2z & = -3 \\ 2x & -y & -z & = 0 \\ -x & +2y & -z & = -6 \end{array}$$

és incompatible (si sumeu les tres equacions queda $0 = -9$) per tant es tracta d'un moviment helicoidal. Per a un punt variable $p = (x, y, z)$ el vector $\overrightarrow{pf(p)}$ és

$$(x^* - x, y^* - y, z^* - z) = (-\frac{x}{3} - \frac{y}{3} + \frac{2z}{3} + 1, \frac{2x}{3} - \frac{y}{3} - \frac{z}{3}, -\frac{x}{3} + \frac{2y}{3} - \frac{z}{3} + 2).$$

Imposem que sigui proporcional a $(1,1,1)$, o sigui:

$$\text{rang} \begin{pmatrix} -\frac{x}{3} - \frac{y}{3} + \frac{2z}{3} + 1 & \frac{2x}{3} - \frac{y}{3} - \frac{z}{3} & -\frac{x}{3} + \frac{2y}{3} - \frac{z}{3} + 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Anul·lant els menors d'ordre 2 ens queda

$$-x - y + 2z + 3 = 2x - y - z = -x + 2y - z + 6.$$

Operant trobem que l'eix té equacions $x - y = 2, x - z = 1$. Finalment escollim un punt de l'eix, per exemple $p = (1, -1, 0)$ i calculem el vector de translació: $\overrightarrow{pf(p)} = \overrightarrow{(1,-1,0)(2,0,1)} = (1,1,1)$.

<u>Cas impropi:</u> Tenim dues possibilitats, la primera correspon a la matriu:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si $a = 0$, obtenim una **simetria especular**. El pla de simetria és el pla dels punts fixos. Si $a \neq 0$, tenim una **simetria especular seguida d'una translació paral·lela al pla**. Les observacions fetes en dimensió 2 per trobar els elements geomètrics característics d'una simetria seguida d'una translació, continuen sent vàlides. El punt mig d'un punt qualsevol p i la seva imatge $f(p)$ pertany al pla de simetria, i el vector de translació es troba fent la meitat de $\overrightarrow{pf^2(p)}$. En la segona possibilitat, per un cert angle α no nul, i en referència ortonormal tindrem la matriu:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'anomenem **simetria especular seguida de rotació d'eix perpendicular al pla de simetria**. Observeu que la simetria i la rotació commuten, per tant, també podem pensar que és una rotació seguida d'una simetria. A efectes de trobar els elements geomètrics característics, notem que el punt fix determina la intersecció entre el pla de simetria i l'eix de rotació. Usant un VEP de VAP 1 l'eix queda determinat i per l'ortogonalitat també el pla. Finalment la traça ens donarà el cosinus de l'angle de rotació.

6.4 Semblances.

Acabem el tema amb un breu esment a les afinitats $(f, \tilde{f}) : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ d'un espai afí euclidià amb la propietat

$$d(f(p), f(q)) = r\, d(p, q)$$

per a tota parella de punts $p, q \in \mathbb{A}$, on $r > 0$ és una constant real positiva. Diem que una afinitat amb aquesta propietat és una **semblança de raó** r. És clar que si $r = 1$ aleshores és un deplaçament.

Exemple. Sigui $h : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ una homotècia qualsevol de raó r, aleshores:

$$d(h(p), h(q)) = \|\overrightarrow{h(p)h(q)}\| = \|\tilde{h}(\overrightarrow{pq})\| = \|r(\overrightarrow{pq})\| = r\|\overrightarrow{pq}\| = r\, d(p, q).$$

Per tant, les homotècies són semblances.

Una altra família d'exemples s'obté fent la composició d'una homotècia h amb un desplaçament g ja que:

$$d(h(g(p)), h(g(q))) = r\, d(g(p), g(q)) = r\, d(p, q).$$

Proposició 6.3. *Sigui f una semblança de raó r d'un espai afí euclidià $\mathbb{A}$. Sigui $O \in \mathbb{A}$ un punt qualsevol, i considerem l'homotècia h de centre O i raó r. Aleshores $h^{-1} \circ f$ és un desplaçament g. Per tant, $f = h \circ g$ és un desplaçament seguit d'una homotècia de raó r.*

Demostració. Siguin p, q dos punts de $\mathbb{A}$. Aleshores:

$$d(h^{-1}(f(p)), h^{-1}(f(q))) = \frac{1}{r}\, d(f(p), f(q)) = \frac{1}{r}\, r\, d(p, q) = d(p, q),$$

per tant $h^{-1} \circ f$ és un desplaçament. □

Així doncs, una afinitat és una semblança de raó r si, i només si el seu endomorfisme associat $\tilde{f}$ compost amb una homotècia vectorial $\frac{1}{r}Id$, és un endomorfisme ortogonal. Apliquem això per provar les caracteritzacions següents:

Proposició 6.4. *a) Amb aquestes notacions, si M és la matriu de $\tilde{f}$ en una base $e_1, \ldots, e_n$ d'E de matriu de Gram G, aleshores f és semblança de raó r si, i només si*

$$M^T G M = r^2 G.$$

En particular $det(M)^2 = r^{2n}$ (n és la dimensió de E).

b) f és semblança de raó r si, i només si $\tilde{f}(u) \cdot \tilde{f}(v) = r^2 u \cdot v$.

Demostració. f és semblança de raó r si, i només si $\frac{1}{r} \tilde{f}$ és ortogonal. Com la matriu d'aquest endomorfisme és $\frac{1}{r} M$ tenim que la condició necessària i suficient és

$$\frac{1}{r} M^T G \frac{1}{r} M = G,$$

que equival a la igualtat de l'apartat a). D'altra banda $\frac{1}{r} \tilde{f}$ és ortogonal si, i només si

$$\frac{1}{r}\tilde{f}(u) \cdot \frac{1}{r}\tilde{f}(v) = u \cdot v,$$

per a qualsevol parella de vectors u, v, això implica b). □

Proposició 6.5. *Sigui f una semblança de raó r.*

a) Si λ és un VAP de $\tilde{f}$, aleshores $\lambda = \pm r$.

b) Si $r \neq 1$, aleshores f té un únic punt fix.

c) f és la composició d'un desplaçament g amb punts fixos i una homotècia amb centre en un punt fix de g.

Demostració.

a) Com f és la composició d'una homotècia h i d'un desplaçament g, aleshores $\tilde{f} = \tilde{h} \circ \tilde{g} = r\,\tilde{g}$. Sigui u un VEP de $\tilde{f}$. Tindrem $\lambda u = \tilde{f}(u) = r\,\tilde{g}(u)$, per tant $\dfrac{\lambda}{r}$ és un VAP de $\tilde{g}$ i només pot ser 1 o -1.

b) És una conseqüència de l'apartat c) de la Proposició (2.7) i de l'apartat anterior.

c) N'hi ha prou d'agafar el punt O del lema anterior igual al punt fix de la semblança.

□

Com a conseqüència d'aquests resultats, tenim que cada semblança té associat un desplaçament totalment determinat: l'obtingut composant amb l'homotècia de raó $\frac{1}{r}$ i centre l'únic punt fix de la semblança. Això implica que tingui sentit definir semblances **directes** i **inverses**. Fixem-nos que una semblança directa de raó r té determinant r^n i una inversa $-r^n$. Finalment demostrem la següent propietat geomètrica de les semblances:

Proposició 6.6. *Sigui $\tilde{f}$ l'endomorfisme associat a una semblança directa d'un espai afí euclidià $(\mathbb{A}, E)$ de dimensió 2, aleshores $\tilde{f}$ preserva els angles. En altres paraules, si u, v són dos vectors d'E i posem $u' = \tilde{f}(u)$, $v' = \tilde{f}(v)$, aleshores*

$$\widehat{uv} = \widehat{u'v'}.$$

Demostració. Atès que els endomorfismes ortogonals directes mantenen els angles, és suficient veure-ho per una homotècia h de raó r. Primer provem que el cosinus de l'angle és el mateix:

$$\frac{\tilde{h}(u) \cdot \tilde{h}(v)}{\|\tilde{h}(u)\| \cdot \|\tilde{h}(v)\|} = \frac{r\,u \cdot r\,v}{\|r\,u\| \cdot \|r\,v\|} = \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|}.$$

D'altra banda, $det_{u,v}(\tilde{h}(u), \tilde{h}(v)) = det_{u,v}(r\,u, r\,v) = r^2 > 0$. Per tant l'angle és el mateix. $\square$

DESPLAÇAMENTS DEL PLA					
NOM	DET	ENDOMORFISME ASSOCIAT $\varphi \in O(2)$	PUNTS FIXOS	MATRIU REDUÏDA	CÀLCUL DELS ELEMENTS GEOMÈTRICS CARACTERÍSTICS
Translació	1	Identitat	$\emptyset$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	Per a tot punt x, el vector de la translació és $\overrightarrow{xf(x)}$
Gir d'angle θ	1	Gir d'angle α	Un punt	$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	La traça de φ és $2\cos(\alpha)$. El punt fix és el punt de gir.
Simetria axial	-1	Simetria axial	Una recta	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	La recta de simetria és la de punts fixos
Simetria axial seguida de translació paral·lela a l'eix	-1	Simetria axial	$\emptyset$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \alpha \neq 0$	Per a tot punt x el vector $\overrightarrow{xf^2(x)}$ és dues vegades el vector de la translació (i el vector director de l'eix de simetria). El punt mig de x i $f(x)$ és de l'eix.

DESPLAÇAMENTS DE L'ESPAI					
NOM	DET	ENDOMORFISME ASSOCIAT $\varphi \in O(3)$	PUNTS FIXOS	MATRIU REDUÏDA	CÀLCUL DELS ELEMENTS GEOMÈTRICS CARACTERÍSTICS
Translació	1	Identitat	$\emptyset$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	Per a tot punt x el vector de la translació és $\overrightarrow{xf(x)}$
Rotació d'angle α	1	Rotació d'angle α	recta	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	La traça de φ és $1 + 2\cos(\alpha)$. L'eix és la recta de punts fixos. (Si $\alpha = \pi$ és una simetria axial).
Moviment helicoidal	1	Rotació d'angle α	$\emptyset$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a \neq 0$	Traça(φ)$= 1 + 2\cos(\alpha)$. Vector director de l'eix = VEP de VAP 1. Eix = punts x tals que $\overrightarrow{xf(x)}$ proporcional al VEP de VAP 1. Translació de vector $= \overrightarrow{xf(x)}$ per a x de l'eix.
Simetria especular	-1	Simetria especular	Un pla	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	El pla de simetria és el de punts fixos.
Simetria especular seguida de translació de vector paral·lel al pla	-1	Simetria especular	$\emptyset$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b \neq 0$	$\forall x$ el vector $\overrightarrow{xf^2(x)}$ és dues vegades el vector de la translació i el punt mig de x i $f(x)$ pertany al pla de simetria.
Rotació seguida de simetria especular respecte d'un pla ortogonal a l'eix	-1	Rotació seguida de simetria especular resp. d'un subespai ort. a l'eix	Un punt	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	Traça(φ)$= -1 + 2\cos(\alpha)$. L'eix és la recta pel punt fix amb vector director el VEP de VAP -1. El pla de simetria passa pel punt fix i és ortogonal a l'eix.

Bibliografia

1. Berger, M., Geometry I, II. Berlin/Heidelberg/New York, Springer 1987, 2009.

2. Castellet, M.; Llerena, I., Àlgebra Lineal i Geometria Lineal. 2a ed., Bellaterra, Publicacions UAB, 1994.

3. Coxeter, M.S.M. Introduction to Geometry. New York, Wiley, 1989.

4. Dieudonné, J., Algèbre Linéare et géométrie élémentaire. Paris, Hermann, 1978.

5. Kostrikin, A.I.; Manin, Y., Linear Algebra and Geometry. New York, Gordon and Breach, 1989.

6. Queysanne, M.; Revuz, A., Geometría. Barcelona, Compañía Editorial Continental, 1976.

7. Raventós, A., Afinitats, moviments i quàdriques. Bellaterra, Publicacions UAB, 2008.