מבוא למערכות לומדות

רועי זהבי 2086417257

<u>תרגיל 5 - חלק תיאורטי:</u>

1) <u>Regularization</u>: יהיו $X\in\mathbb{R}^{n\times d}$ ו-$y\in\mathbb{R}^n$

ונניח כי X^TX הפיכה.

נסמן ב-$\hat{w}$ את פתרון הרגרסיה הלינארית הפשוטה

ו-$\hat{w}_\lambda$ את פתרון Ridge (כאשר $\lambda=0$ $\hat{w}_\lambda=\hat{w}$)

(a) נראה כי $\hat{w}_\lambda = A_\lambda \hat{w}$ כאשר $A_\lambda=(X^TX+\lambda I)^{-1}(X^TX)$

<u>פתרון</u>: בתרגול ראינו כי

$$\hat{w}_\lambda = (X^TX+\lambda I)^{-1}\cdot X^Ty$$

כמו כן נזכר כי

$$\hat{w} = X^+y = V\Sigma^+U^Ty \,,\quad V,U$$

מט' אורתו'

<u>נציב</u>:

$$X = U\Sigma V^T$$

$$A_\lambda \hat{w} = (X^TX+\lambda I)^{-1}(X^TX)\cdot\hat{w} =$$

$$= (X^TX+\lambda I)\cdot(V\Sigma^TU^TU\Sigma V^TV\Sigma^+U^Ty)$$

נרצה להגיע [illegible] ל-X^Ty <u>וסיימנו</u>!

ונזכר כי
$$\Sigma^+_{i,i} = \begin{cases} 1/\sigma_i & \sigma_i \neq 0 \\ 0 & else \end{cases}$$

$$\Sigma_{i,i} = \sigma_i$$

⇐
$$\Sigma\Sigma^+_{i,i} = \begin{cases} 1 & \sigma_i \neq 0 \\ 0 & else \end{cases}$$

נתון כי X^TX הפיכה, לכן אנו במקרה ההפיך כאשר ראינו מעלה כי אין ערכים סינגולריים שווים ל-0!

⇐ $\Sigma^+_{i,i} = 1/\sigma_i$ לכל i ו-σ_j

$$\Sigma\Sigma^+ = I$$

$$\Rightarrow (V\Sigma^T U^T \cancel{U\Sigma V^T V\Sigma^+ U^T} y) = X^T y$$

⇐ $A_\lambda \hat{w} = (X^TX + \lambda I)^{-1} X^T y = \hat{w}_\lambda$

כנדרש!

6) נראה כי רידג' הינו אומד מוטה, קרי

$\mathbb{E}(\hat{w}_\lambda) \neq w$ לכל $\lambda > 0$.

פתרון:

$$\mathbb{E}[\hat{w}_\lambda] = \mathbb{E}(A_\lambda \hat{w}) = \mathbb{E}\left((X^TX + \lambda I)^{-1} X^TX\hat{w}\right)$$

$$(X^TX + \lambda I)^{-1} X^TX \cdot \mathbb{E}(\cancel{\hat{w}}) \neq w$$

w ראינו כי זה אומד לא מוטה

מכיוון ש- $\lambda > 0$ אזי $(X^TX+\lambda I)^{-1}$ אינו ההופכי של X^TX, לכן זו כופלת את w בגורם שונה מיחידה ולכן $\hat{w}_\lambda \neq w$.

ג.) נראה כי הנ״ל מוטה:

נזכיר גם כי
השונות!

$$Var(\hat{w}_\lambda) = Var(A_\lambda \hat{w}) =$$

$$= A_\lambda Var(\hat{w}) \cdot A_\lambda^T = A_\lambda \cdot \sigma^2 (X^TX)^{-1} \cdot A_\lambda^T =$$

סקלר!

$$= \sigma^2 A_\lambda (X^TX)^{-1} A_\lambda^T$$

ד.) נפתור כיוון מפורט לפירוק Bias-variance כפונק' של λ.

תזכורת: בתרגול 4 ראינו כי

$$MSE = \mathbb{E}[\|\hat{y} - y\|^2] = Bias(\hat{y})^2 + Var(\hat{y})$$

$$\Downarrow$$

$$MSE = Bias(\hat{w}_\lambda)^2 + Var(\hat{w}_\lambda) =$$

$$= \mathbb{E}[\hat{w}_\lambda]^2 + \sigma^2 A_\lambda (X^TX)^{-1} A_\lambda^T =$$

$$\mathbb{E}[A_\lambda \hat{w}] = A_\lambda \mathbb{E}(\hat{w}) = A_\lambda w$$

$$\Rightarrow MSE = (A_\lambda w)^2 + \sigma^2 A_\lambda (X^TX)^{-1} A_\lambda^T$$

⇐ ניתן לראות כי המשתנה היחיד שתלוי ב λ ולכן
הבלעדיו לפני כנדרש!

ב)

$$\frac{d}{d\lambda} MSE(\hat{w}_\lambda)\Big|_{\lambda=0} :$$

ראשית נשים לב:

$$Bias^2(\hat{w}_\lambda) = \| E[\hat{w}_\lambda] - E[\hat{w}] \|^2 =$$

מן תכונות
שלנו!

נוס

$$= \| (A_\lambda - I) w \|^2 = w^T (A_\lambda - I)^T (A_\lambda - I) w$$

כמו כן, ראינו עוד כי בנוסף עבור השונות ידרש..

$$Var(\hat{w}_\lambda) = E[\| \hat{w}_\lambda - \hat{w} \|^2] =$$

סכום II
תוחלות הפרט
הריבועית &
אלכסון מ' השונות

$$= trace(Var(w_\lambda)) = \sigma^2 tr(A_\lambda (X^TX)^{-1} A_\lambda^T)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{d\lambda} bias(\hat{w}_\lambda)^2 = \frac{d}{d\lambda} \sum_i \left(\sum_j (A_\lambda - I)_{ij} w_j \right)^2 \Big|_{\lambda=0}$$

$$= 2 \sum_i \left(\sum_j (A_\lambda - I)_{ij} w_j \frac{d}{d\lambda} \sum_j (A_\lambda - I)_{ij} w_j \right) = 0$$

⇐ אז קיים ערך λ חיובי שבו הבט מתאפס!

$$\frac{d}{d\lambda} Var(\hat{\alpha}_\lambda) = \sigma^2 \frac{d}{d\lambda} tr\left(A_\lambda X^T X A_\lambda^T\right)$$

מה

צו נב

התלות ב-λ

פשוט נגזרת

לפי שרשרת

$$\frac{d}{d\lambda} Var(\hat{\alpha}_\lambda^T) = \sum_{i,j} \frac{d\, Var(\hat{\alpha}_\lambda^T)}{d(A_\lambda)_{i,j}} \cdot \frac{d(A_\lambda)_{i,j}}{d\lambda}\Big|_{\lambda=0} =$$

$$= Tr\left(\frac{d\, Var(\hat{\alpha}_\lambda^T)}{dA_\lambda} \cdot \frac{dA_\lambda}{d\lambda} \right)\Big|_{\lambda=0} =$$

$$= -2\underset{>0}{\sigma^2}\, Tr\left(\underset{>0}{(X^TX)^{-1}}(X^TX)^{-T}\right) < 0$$

⇐ קיבלנו כי נגזרת ה-MSE הינה ב-0, כנדרש!

זה

f.) נסיק מן הי"ג כי עבור $\hat{\alpha}_\lambda$ הנגזרת של MSE שלילית!
קרי חיזוק ה-bias והמקרה בה MSE יורדת, מה
שאומר כי ההפסד קטן.
⇐ מכך קיבלנו כי גם בנקודה בה $\lambda=0$, קרי
זהו מודל LS סטנדרטי, אנו רואים כי הנגזרת
שלילית ⇐ הפונק׳ יורדת.

מכיוון הפונק' רציפה (מן הגזירות) כאשר λ גדל

אך עדיין היה מאוד נקט כי ערך ה-MSE יהיה

= הוספת ערך רגולריזציה Ridge מעלה

את ה-MSE כנראה!

PCA:

(ב) פתרון: נראה כי הערך המקסימלי של השונות מתקבל ע"י
הו"ע של M מע"ע הגדול ביותר => השונות של v^Tx
תסומן על ידו.

הוכחה: יהי $v \in \mathbb{R}^d$, $\|v\|_2 = 1$

$$\mathbb{E}(v^TX) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} v^Tx_i$$ כמו שונות ההטלות של x

$$= v^T\bar{x}$$ כמו כפי שראינו בכיתה !!

$$\mathrm{var}(v^TX) = \mathbb{E}_x\left(\left(v^Tx_i - \mathbb{E}_x[v^Tx]\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{m}\sum_i \left(v^Tx_i - v^T\bar{x}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{m}\sum_i \left[v^T(x_i - \bar{x})\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{m}\sum_i \left(v^T(x_i - \bar{x})\right)\left(v^T(x_i - \bar{x})\right)^T =$$

$$= \frac{1}{m}\sum_i v^T(x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})^T v =$$

$$= v^T \underbrace{\sum_i (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})^T}_{\text{cov sample mat}} v =$$

$$= v^TSv$$

$$\hat{v} = \underset{\|v\| = 1}{\arg\max}\; v^TSv$$ => נרצה פתרון ל

דרך [illegible] [illegible]!

נעזר ב- Lagrange multipliers

נגדיר $g(v) = 1 - v^T v$

$$\Downarrow$$

$$L = v^T v + \lambda g(v)$$

$$\frac{d}{dv} L = 2Sv - 2\lambda v = 0$$

<= [illegible] [illegible] כי ה[illegible] Q $v^T v$ הינו [illegible]

ניתן להסיק כי ה[illegible] הוא λ הכי גדול כמובן!

<= קיבלנו כי ה[illegible] [illegible], [illegible] ה[illegible] [illegible] [illegible]

של ה[illegible] הגדול [illegible] [illegible] של [illegible]

$A^T v$ <= [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible], כמובן!

$\square$

פתרונות:

(3) יהי k הקרנל החוקי הנתון לנו, נראה כי עבור פונק׳ f

$$\tilde{k}(z,z') = f(x)\cdot k(x,z')\cdot f(x')$$

הינו קרנל PSD חוקי!

נבחר

$$f(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{k(x,x)} & k(x,x) \geq 0 \\ -1/\sqrt{-k(x,x)} & \text{else} \end{cases}$$

⇐ מספיק לבדוק:

$k(x,x) \geq 0$

$$\tilde{k}(x,x) = f(x)\,k(x,x)\cdot f(x) = $$

$$= 1/k(x,x)\; k(x,x) = 1 \;//$$

אחרת $k(x,x) < 0$ ⇐

$$k(x,x) = \frac{+1}{\sqrt{+k(x,x)}}\; k(x,x) \cdot \frac{+1}{\sqrt{+k(x,x)}} = 1 \;//$$

קרי, בכל מקרה קיבלנו את הנדרש!

מש״ל

ג.) נכונה. S כנ"ל: $x \in \mathbb{R}^2$ כאשר $x_i = (x_i, y_i)$
נקודה ב-$\mathbb{R}^2$ ונקבע כי ה-label של y_i יקבע
באופן הבא:
אם $\sqrt{x_i^2+y_i^2}$ זוגי אז נגדיר 1 אחרת
-1.
⇐ ושים לב כי לא ניתן להפריד את S
הנתון ב-$\mathbb{R}^2$ באופן לינ׳.

נגדיר $\psi(x) = (x_i, y_i, \sqrt{x_i^2+y_i^2} \,\%\, 2)$
⇐ נוסיף מימד שמייצג את זוגיות המרחק
באופן זה נוכל לקבל הפרדה בקלות כאשר
נעלה מימד ע"י משטח או מישור מפריד.
אחרי!

ב) (a) לא נכון! נראה דוגמא נגדית:
נראה כי הנ"ל גרעין אינו PSD.

תהי
דגימות מ- $S=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

כאשר: $k=e^{(\|x-y\|^2)}$

$$\Downarrow$$

$$K=\begin{pmatrix}1 & e^2\\ e^2 & 1\end{pmatrix}$$

נראה ש-k לא PSD, יהי $v=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

$$v^TKv=\left(-2+e^2 \quad -2e^2+1\right)\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}=$$

$$-2(-2+e^2)-2e^2+1=4-4e^2+1=5-4e^2$$

⇐ $e^2>2$ ⇐ $5-4e^2<0$ ⇐ לא
PSD, כנדרש!

☑

6) לא קרנל! נראה כי $k(x,x)<0$

נבחר שני קרנלים פולינומיאלים כפי שראינו בתרגול

$$k_1(x,z) = (\langle x,z\rangle + -5)^3$$

$$k_2(x,z) = (\langle x,z\rangle + 0)^2$$

$$\Downarrow$$

$$k(0,0) = k_1(0,0) - k_2(0,0) = -5^3 = -125 < 0$$

קרי קיבלנו כי הנ"ל לא PSD ולכן הנ"ל לא קרנל חוקי!

$\boxtimes$

c) הטענה נכונה!

הוכחה: יהיו k_a, k_b קרנלים ולידים כך ש-

$K = K_a + K_b$ ויהי מטריצות הגרם של

ו- $x \in \mathbb{R}^d$ $\quad X = \begin{bmatrix} x_a \\ \hline x_b \end{bmatrix}$

נשים לב כי $k_{i,j} = k_{a_{i,j}} + k_{b_{i,j}}$

$\Leftarrow$ ולכן גם סימטרית!

נראה כי היא PSD.

$$k(x,x) = x K x^T = x(K_a + K_b)x^T$$

ראינו כי יש קירוב הן מימין ומשמאל כאשר כמות
הדגימות של תצפית בגודל.

$$X = X_a^* + X_b^*$$

מה — השלמות אורתו a ו בכניסות הלא מוגדרות יש 0

$$XKX^T = (X_a^* + X_b^*)K(X_a^* + X_b^*)^T =$$

$$= X_a^* K X_a^T + X_b^* K X_b^T =$$

$$= X_a^*(K_a + K_b)X_a^{*T} + X_b^*(K_a + K_b)X_b^{*T}$$

<= מהגדרה הקרנלים המיוחדים מוסיפים רק את
הקורה. לגבי הרלוונטיות אחרת ניתן ערך 0

$$\Rightarrow X_a^* K_a X_a^{*T} + 0 + 0 + X_b^* K_b X_b^{*T} =$$

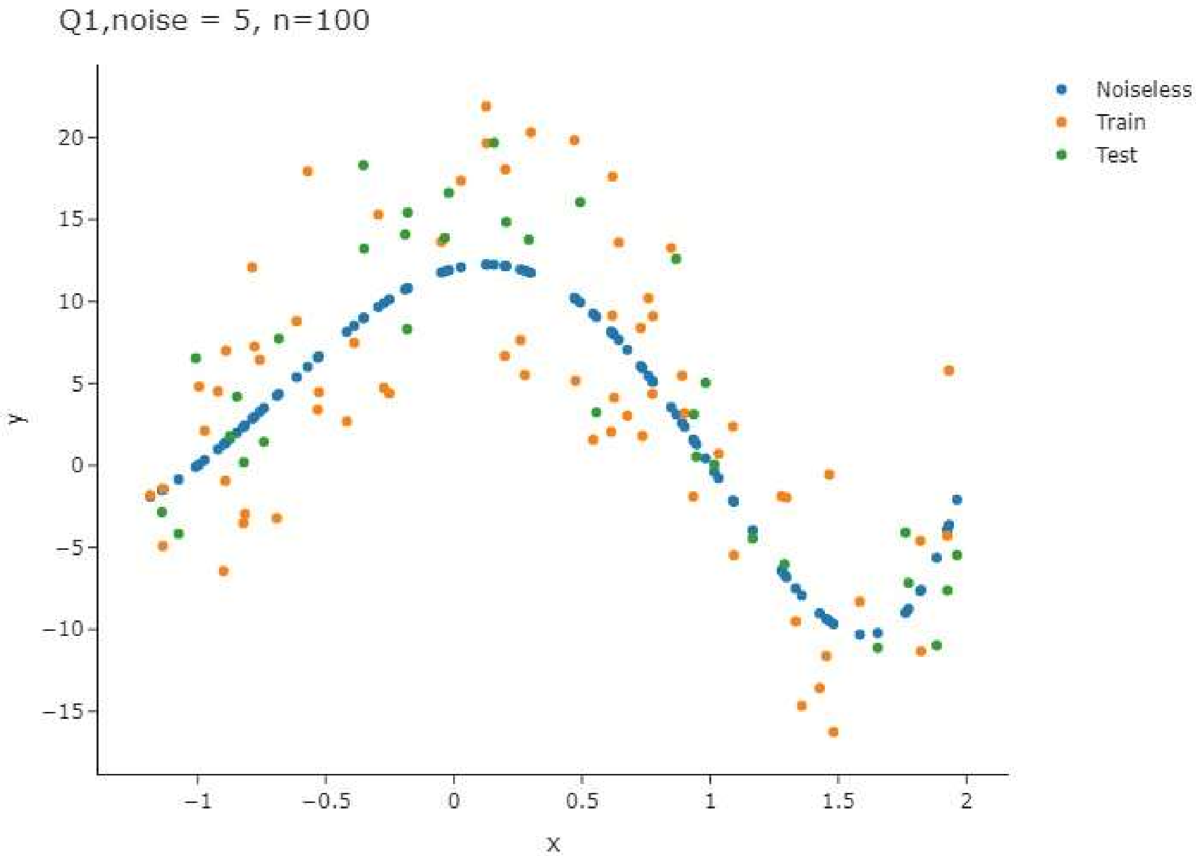
$$= \overset{\geq 0}{X_a K_a X_a^T} + \overset{\geq 0}{X_b K_b X_b^{*T}} \geq 0$$

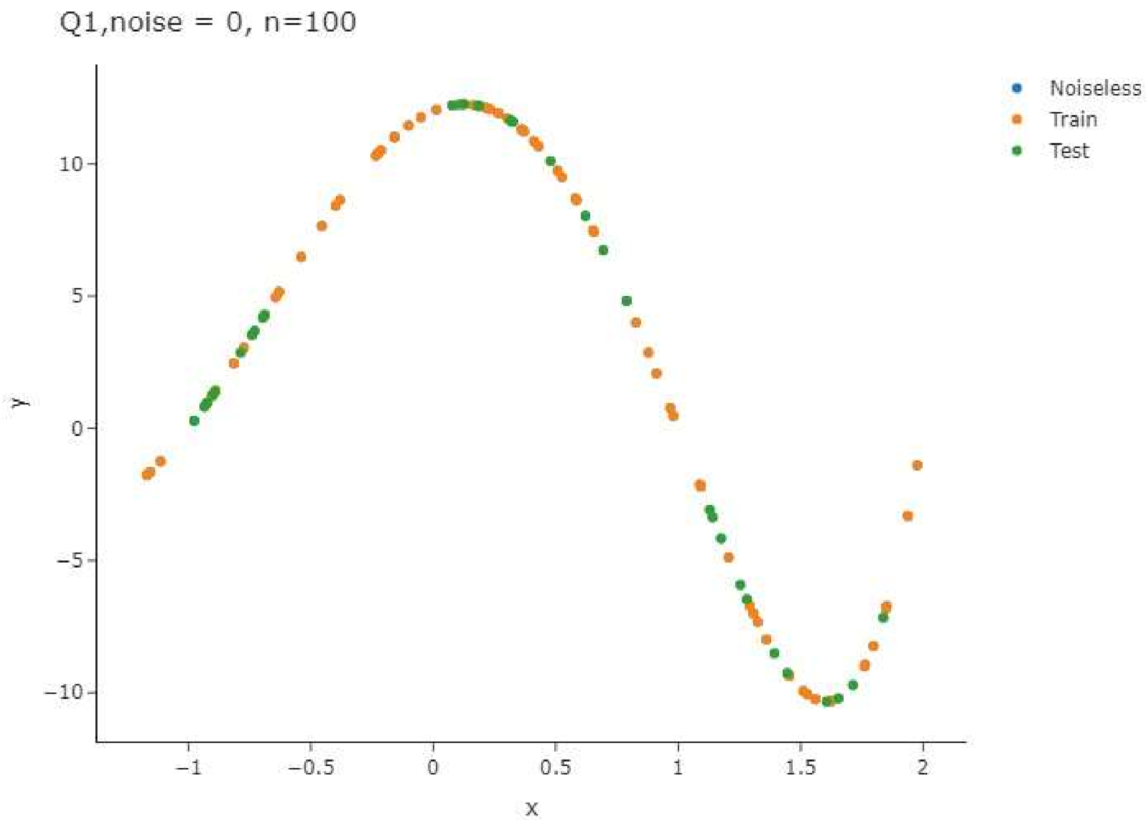
מה הופך של מטלו את תוצאה הכל.

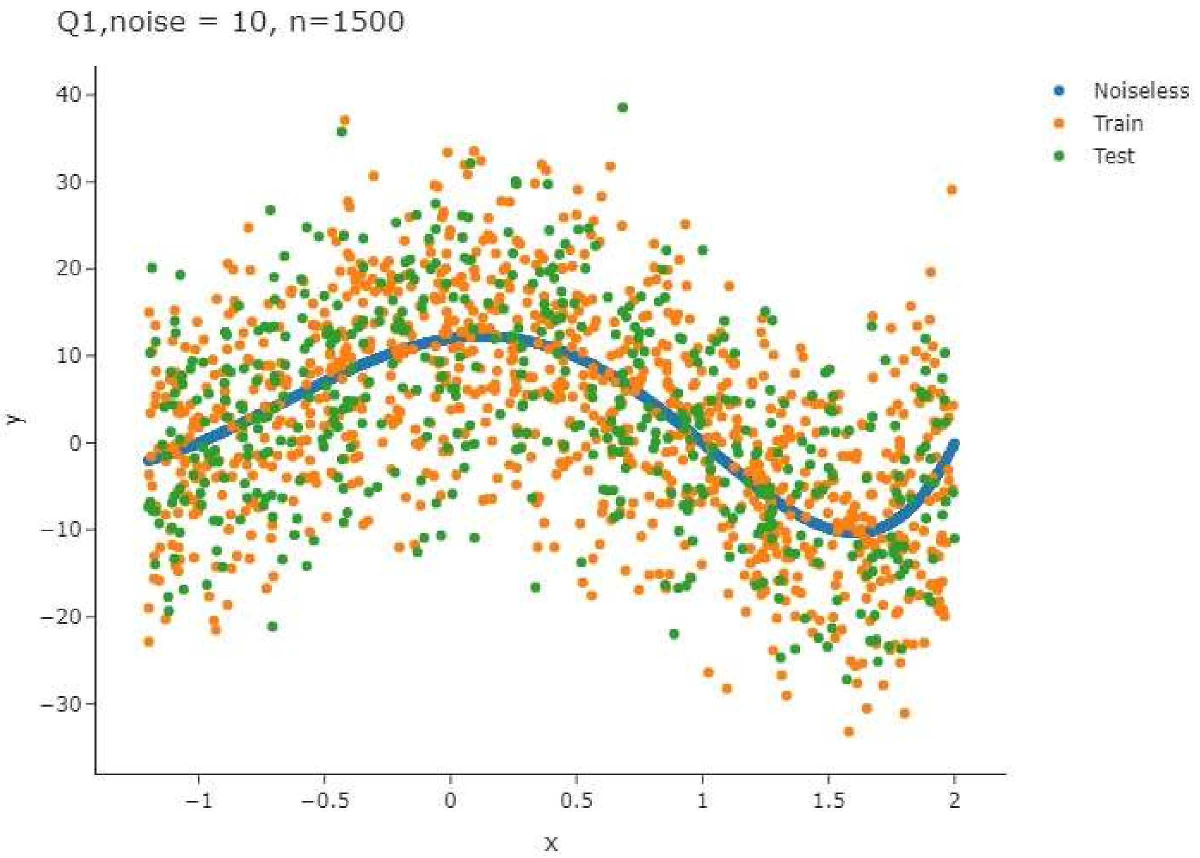
<= הוא PSD וזהו קרנל תקין!

מבוא למערכות לומדות 67577
רועי זהבי 208648154

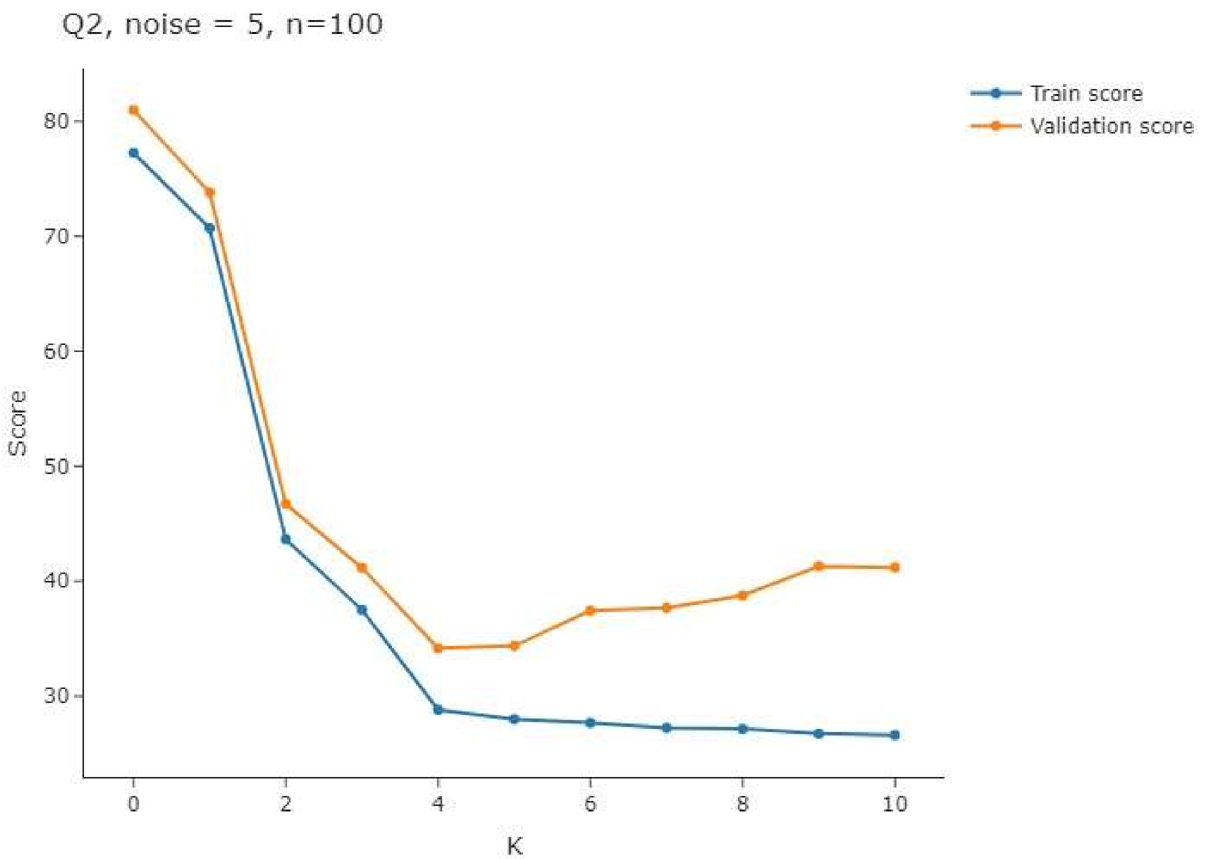
1. להלן הפלטים עבור סט הנתונים בהינתן קלטים שונים



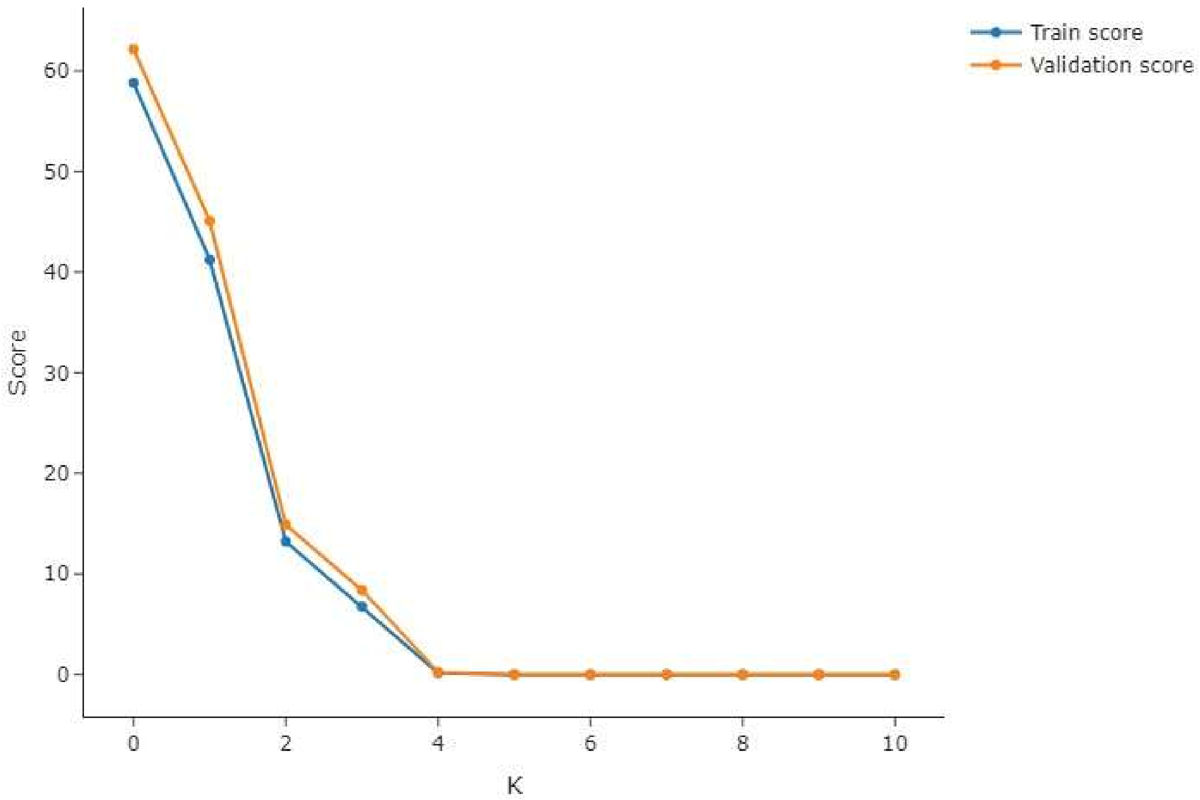




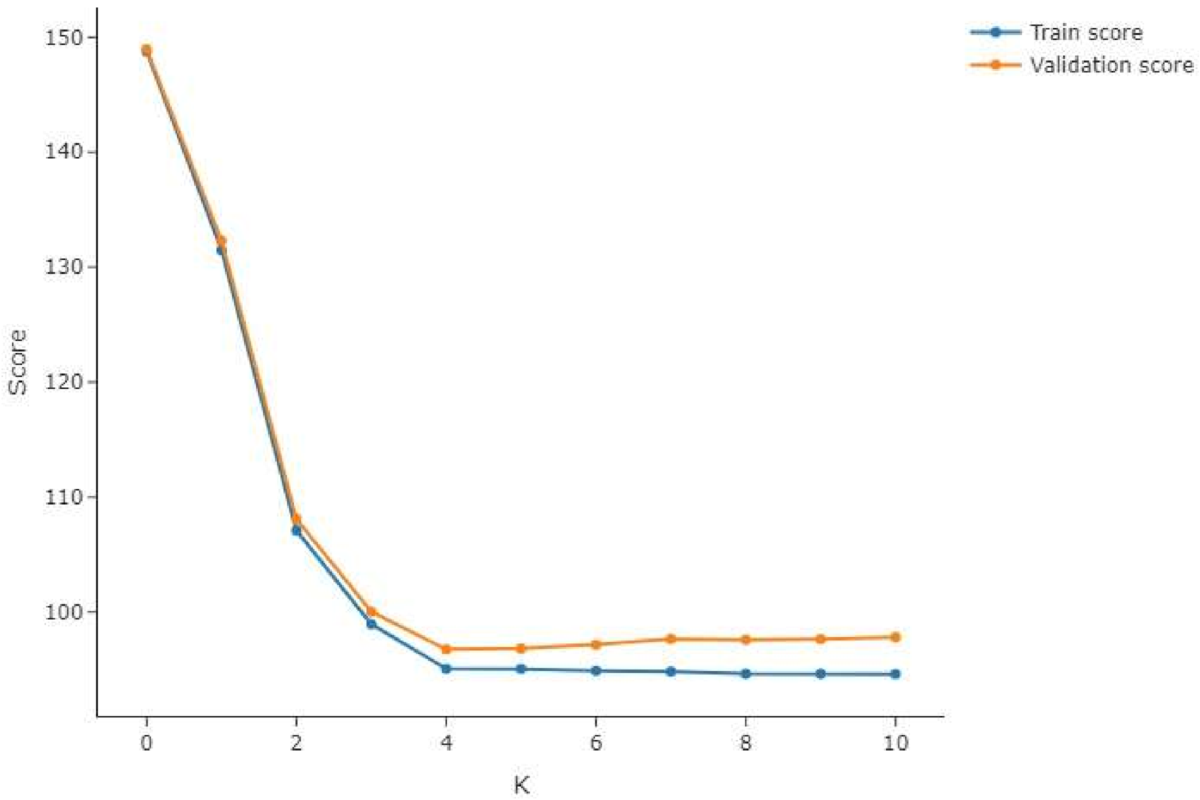
2. להלן הפלטים בהינתן התרחישים השונים (תשובה משולבת עבור סעיפים 4,5) :



Q2, noise = 0, n=100



Q2, noise = 10, n=1500

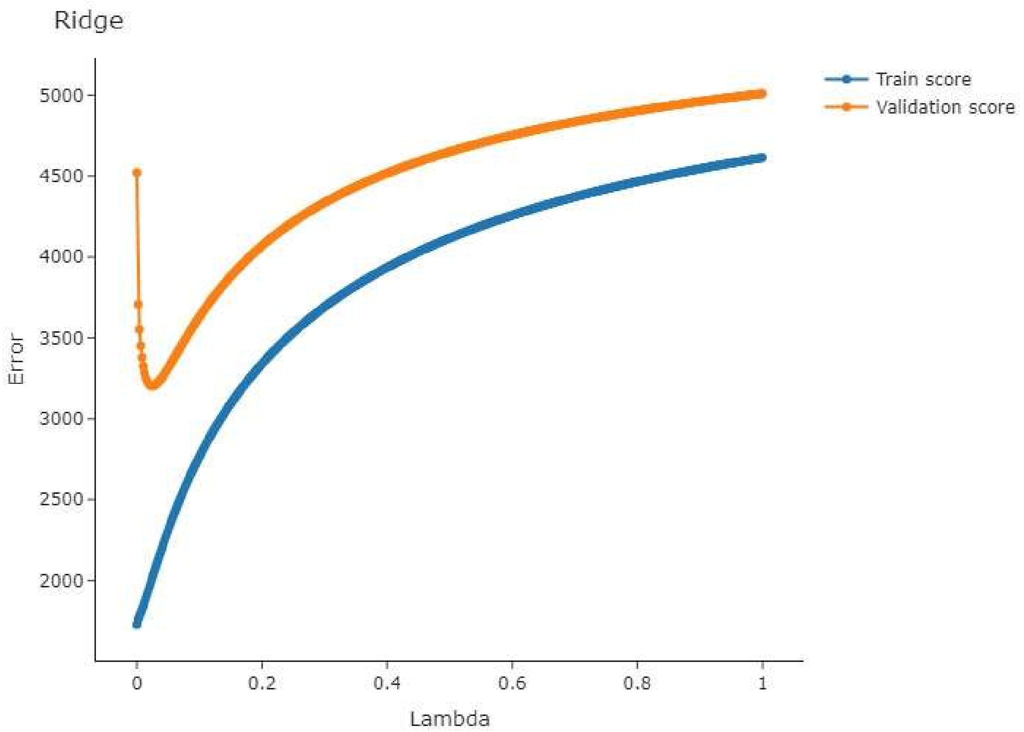


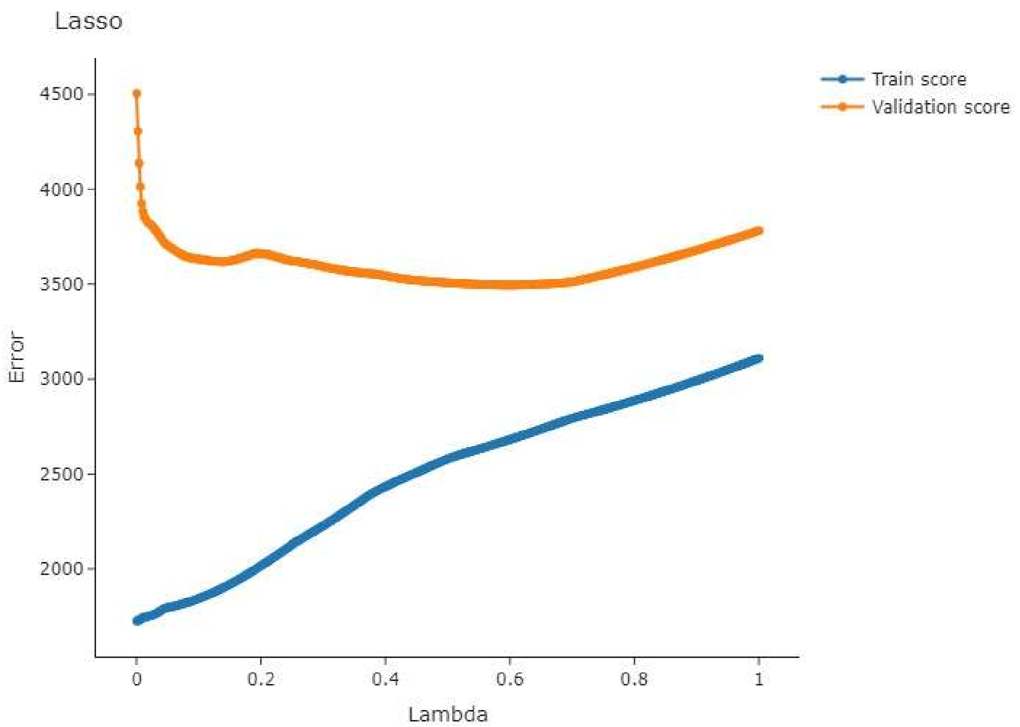
נתבונן בתוצאות שקיבלנו, נשים לב למספר אבחנות:

- ראשית כאשר כמעט ואין רעש שגיאת האימון מתלכדת עם שגיאת הולידאטציה – אבחנה שנובעת ישירות מן העבודה כי כל הנקודות מייצגות את המציאות, כאשר אין משמעות אמיתית לאימון המודל על חלקים שונים (רועשים יותר או פחות) – כאשר הרעש עולה ההפך מתקבל, שוב אבחנה לה אנו מצפים.
- כמו כן, מנגנון הבקרה שלנו עובד כאשר ניתן לראות כי שגיאת הולידאציה גדולה לרוב משגיאת הסט האימון – כמו כן דבר שנרצה לראות.
- נשים לב כי תחת שינוי דרגות הפולינום השגיאות גם מתנהגות בצורה קוהרנטית, כאשר שדרגת הפולינום מתקרבת לדרגה האמיתית השגיאות הן מזעריות ביחס לקצוות האחרים – נשים לב כי שתי המדידות מקיימות גם את עיקרון $bias$ – $variance$ שראינו מספר פעמים עד כה בקורס ($under\ fit$ מול $overfit$).
- לבסוף נראה כי גם כאשר אנו מעלים את מספר המדידות שלנו למרות שהרעש גדול, המודל מצליח להתמודד ולספק תחזית טובה. זאת אנו מסוגלים להפיק תחת שימוש ב-$cross\ validation$, בכל שלב מבצעים אימון על חלק אחר בסט האימון שלנו ובודקים שוב ושוב כך שהמודל נחשף לכמה שיותר מן המידע. באופן זה אנו מקטינים את ה-$overfit$ שיכול להתקיים בהתאמת פולינומים תחת רעש גבוהה ומחזקים את השימוש בחוק המספרים הגדולים – שגם תחת הרעש מספר רב של דגימות ישאף לתצורה האמיתית (נשאף לתוחלת, אשר 0) ולכן נוכל עדין לקבל פרדיקציה טובה.

3. להלן דרגות הפולינום אשר המודל חזה עם הטעויות שקיבלנו עבור שימוש בדרגה זו:
   - במקרה עבור 100 דגימות ורעש 5 - $k = 4, MSE = 16.57$
   - במקרה עבור 100 דגימות ורעש 0 - $k = 5, MSE = 1.35$
   - במקרה עבור 1500 דגימות ורעש 10 - $k = 4, MSE = 98.89$

7. להלן הפלטים עבור $\lambda \in [0,1]$ אשר נלקחו 500 נקודות במרחק שווה. אציין כי ע״מ להגיע לטווח זה, ראשית התחלתי עם טווח גדול $[0,10]$ ניתן היה לראות כי השגיאה מתקבעת ב-$\sim 4 \leq \lambda$ ולכן צמצמתי את הטווח עד לקבלת מדידה שאפשרה לקבל ערך מינימלי.





שוב ניתן לראות את הבדל הניכר בין השגיאות על סט האימון וסט הואלידציה, כאשר הפער היה מעט גדול יותר עבור השימוש ב-$Ridge$. כמו כן, ניתן לראות את מגמת השגיאה כמגמה שראינו

בכיתה – לפיה השימוש בנורה $l2$ מייצרת פונקציה גזירה ב-0 ולכן עקומת רידג׳ מעט מזכירה יותר פרבולה מאשר עקומת $Lasso$ אשר דומה יותר לפונקצית הערך המוחלט.

כמו כן, ניתן לראות כי הוספת ערך הרגולריזציה השפיע יותר בהתחלה על $Lasso$ מאשר על $Ridge$ ביכולת להוריד את השגיאה תחת סט הולידאציה.

8. להלן תוצאות השגיאה שהתקבלו עבור שלושת המודלים :

$$Ridge\ achieved\ 3249.69\ with\ lambda\ of\ 0.024$$

$$Lasso\ achieved\ 3641.16\ with\ lambda\ of\ 0.597$$

$$Basic\ linear\ regression\ achieved\ 3612.25$$

ניתן לראות כי במקרה זה $Ridge$ הוא זה שהשיג את השגיאה הקטנה ביותר, תחת שימוש בפרמטר רגולריזציה מאוד קטן, כ-0.02 אך על סט האימון הקטן הנ״ל גרר שיפור משמעותי (מעל 10%) בשגיאה.