

מבוא למכניקת קוונטים
 חלק 1: מכניקת קוונטים
 תרגיל 5 - חלק 1

(1) Regularization: יהי $x \in \mathbb{R}^{n \times d}$ ו- $y \in \mathbb{R}^d$.
 ונניח כי $x^T x$ הפכה.

אם $\lambda > 0$ אז $x^T x + \lambda I$ הפכה.
 ו- \hat{w}_λ הוא הפתרון של Klfe (כאשר $\lambda = \lambda$)

(א) נראה כי $\hat{w}_\lambda = A_\lambda^{-1} x^T y$ כאשר $A_\lambda = (x^T x + \lambda I)(x^T x)$
 פתרון: ברור כי

$$\hat{w}_\lambda = (x^T x + \lambda I)^{-1} x^T y$$

באופן נוסף כי $\hat{w} = x^T y = V \Sigma^T U^T y$, U, V הם מטריצות

$$X = U \Sigma V^T$$

$$A_\lambda \hat{w}_\lambda = (x^T x + \lambda I)^{-1} (x^T x) \hat{w}_\lambda =$$

$$= (x^T x + \lambda I) \cdot (U \Sigma^T U^T U \Sigma V^T U \Sigma^T U^T y)$$

נרצה להבין למה $x^T x$ הוא סימטרי!

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100. 101. 102. 103. 104. 105. 106. 107. 108. 109. 110. 111. 112. 113. 114. 115. 116. 117. 118. 119. 120. 121. 122. 123. 124. 125. 126. 127. 128. 129. 130. 131. 132. 133. 134. 135. 136. 137. 138. 139. 140. 141. 142. 143. 144. 145. 146. 147. 148. 149. 150. 151. 152. 153. 154. 155. 156. 157. 158. 159. 160. 161. 162. 163. 164. 165. 166. 167. 168. 169. 170. 171. 172. 173. 174. 175. 176. 177. 178. 179. 180. 181. 182. 183. 184. 185. 186. 187. 188. 189. 190. 191. 192. 193. 194. 195. 196. 197. 198. 199. 200. 201. 202. 203. 204. 205. 206. 207. 208. 209. 210. 211. 212. 213. 214. 215. 216. 217. 218. 219. 220. 221. 222. 223. 224. 225. 226. 227. 228. 229. 230. 231. 232. 233. 234. 235. 236. 237. 238. 239. 240. 241. 242. 243. 244. 245. 246. 247. 248. 249. 250. 251. 252. 253. 254. 255. 256. 257. 258. 259. 260. 261. 262. 263. 264. 265. 266. 267. 268. 269. 270. 271. 272. 273. 274. 275. 276. 277. 278. 279. 280. 281. 282. 283. 284. 285. 286. 287. 288. 289. 290. 291. 292. 293. 294. 295. 296. 297. 298. 299. 300. 301. 302. 303. 304. 305. 306. 307. 308. 309. 310. 311. 312. 313. 314. 315. 316. 317. 318. 319. 320. 321. 322. 323. 324. 325. 326. 327. 328. 329. 330. 331. 332. 333. 334. 335. 336. 337. 338. 339. 340. 341. 342. 343. 344. 345. 346. 347. 348. 349. 350. 351. 352. 353. 354. 355. 356. 357. 358. 359. 360. 361. 362. 363. 364. 365. 366. 367. 368. 369. 370. 371. 372. 373. 374. 375. 376. 377. 378. 379. 380. 381. 382. 383. 384. 385. 386. 387. 388. 389. 390. 391. 392. 393. 394. 395. 396. 397. 398. 399. 400. 401. 402. 403. 404. 405. 406. 407. 408. 409. 410. 411. 412. 413. 414. 415. 416. 417. 418. 419. 420. 421. 422. 423. 424. 425. 426. 427. 428. 429. 430. 431. 432. 433. 434. 435. 436. 437. 438. 439. 440. 441. 442. 443. 444. 445. 446. 447. 448. 449. 450. 451. 452. 453. 454. 455. 456. 457. 458. 459. 460. 461. 462. 463. 464. 465. 466. 467. 468. 469. 470. 471. 472. 473. 474. 475. 476. 477. 478. 479. 480. 481. 482. 483. 484. 485. 486. 487. 488. 489. 490. 491. 492. 493. 494. 495. 496. 497. 498. 499. 500. 501. 502. 503. 504. 505. 506. 507. 508. 509. 510. 511. 512. 513. 514. 515. 516. 517. 518. 519. 520. 521. 522. 523. 524. 525. 526. 527. 528. 529. 530. 531. 532. 533. 534. 535. 536. 537. 538. 539. 540. 541. 542. 543. 544. 545. 546. 547. 548. 549. 550. 551. 552. 553. 554. 555. 556. 557. 558. 559. 560. 561. 562. 563. 564. 565. 566. 567. 568. 569. 570. 571. 572. 573. 574. 575. 576. 577. 578. 579. 580. 581. 582. 583. 584. 585. 586. 587. 588. 589. 590. 591. 592. 593. 594. 595. 596. 597. 598. 599. 600. 601. 602. 603. 604. 605. 606. 607. 608. 609. 610. 611. 612. 613. 614. 615. 616. 617. 618. 619. 620. 621. 622. 623. 624. 625. 626. 627. 628. 629. 630. 631. 632. 633. 634. 635. 636. 637. 638. 639. 640. 641. 642. 643. 644. 645. 646. 647. 648. 649. 650. 651. 652. 653. 654. 655. 656. 657. 658. 659. 660. 661. 662. 663. 664. 665. 666. 667. 668. 669. 670. 671. 672. 673. 674. 675. 676. 677. 678. 679. 680. 681. 682. 683. 684. 685. 686. 687. 688. 689. 690. 691. 692. 693. 694. 695. 696. 697. 698. 699. 700. 701. 702. 703. 704. 705. 706. 707. 708. 709. 710. 711. 712. 713. 714. 715. 716. 717. 718. 719. 720. 721. 722. 723. 724. 725. 726. 727. 728. 729. 730. 731. 732. 733. 734. 735. 736. 737. 738. 739. 740. 741. 742. 743. 744. 745. 746. 747. 748. 749. 750. 751. 752. 753. 754. 755. 756. 757. 758. 759. 760. 761. 762. 763. 764. 765. 766. 767. 768. 769. 770. 771. 772. 773. 774. 775. 776. 777. 778. 779. 780. 781. 782. 783. 784. 785. 786. 787. 788. 789. 790. 791. 792. 793. 794. 795. 796. 797. 798. 799. 800. 801. 802. 803. 804. 805. 806. 807. 808. 809. 810. 811. 812. 813. 814. 815. 816. 817. 818. 819. 820. 821. 822. 823. 824. 825. 826. 827. 828. 829. 830. 831. 832. 833. 834. 835. 836. 837. 838. 839. 840. 84

$$\sum_{i,j} \tau_{ij} = \begin{cases} 1 & \sigma_i \neq 0 \\ 0 & \text{p.l.s.p.} \end{cases}$$

$$G_{j+1} : \Delta f \leq \sum_{j,j'}^+ 1/\sigma_j \leq$$

$$\Rightarrow (V \Sigma^T U^T \cancel{U \Sigma} V^T V \Sigma^T U^T y) = X^T y$$

(6) נראה כי קיבלתי ה.נ. מלחמה, תת

22 1

$$(X^T X + \lambda I)^{-1} X^T X \cdot E(\cancel{y}) \neq c$$

Handwritten signature:

נכיון - ל סדר $(X^T X + \lambda I)^{-1}$ ויש לה חזקה 2
 $X^T X$, כך שיש לה חזקה 2, $\lambda^T X$
 $\omega_1^T \neq \omega$ וכן.

(c) נראה כי הדבר נכון.

$$\text{var}(\omega_1) = \text{var}(A_\lambda \omega) =$$

$$= A_\lambda \text{var}(\omega) A_\lambda^T = A_\lambda \cdot \sigma^2 (X^T X)^{-1} A_\lambda^T$$

$$= \sigma^2 A_\lambda (X^T X)^{-1} A_\lambda^T$$

(d) נסתכל בביטוי עבור σ בריבוע
 כפונקציה של λ .

נראה: פתרונם λ הוא 0

$$MSE = E[\|\hat{\gamma} - \gamma\|^2] = \text{Bias}(\hat{\gamma})^2 + \text{var}(\hat{\gamma})$$

$$MSE = \text{Bias}(\omega_\lambda)^2 + \text{var}(\omega_\lambda) =$$

$$= E[\omega_\lambda]^2 + \sigma^2 A_\lambda (X^T X)^{-1} A_\lambda^T =$$

$$E[A_\lambda \omega] = A_\lambda E(\omega) = A_\lambda \omega$$

$$\Rightarrow MSE = (A_\lambda u)^2 + \sigma^2 A_\lambda (X^T X)^{-1} A_\lambda^T //$$

= נוסחה של MSE של הריגורס הליניארי עם פרמטר λ אחד
ההפרדה של MSE כפונקציה!

$$\frac{d}{d\lambda} MSE(u_\lambda) |_{\lambda=0} :$$

נמצא את הפונקציה:

$$\begin{aligned} Bias^2(u_\lambda) &= \|E[u_\lambda] - E[u]\|^2 = \\ &= \|(A_\lambda - I)u\|^2 = u^T (A_\lambda - I)^T (A_\lambda - I) u // \end{aligned}$$

נמצא את הפונקציה!

כמו כן, למצוא את הפונקציה של הריגורס הליניארי

$$Var(u_\lambda) = E[\|u_\lambda - u\|^2] =$$

סכום
הריבועים של
ההפרדה
הריבועית
הריבועית

$$= trace(Var(u_\lambda)) = \sigma^2 trace(A_\lambda (X^T X)^{-1} A_\lambda^T) //$$

$$\frac{d}{d\lambda} Bias^2(u_\lambda) = \frac{d}{d\lambda} \sum_i \sum_j (A_\lambda - I)_{ij} u_j^2 |_{\lambda=0}$$

$$= 2 \sum_i \left(\sum_j (A_\lambda - I)_{ij} u_j \right) \frac{d}{d\lambda} \sum_j (A_\lambda - I)_{ij} u_j = 0 //$$

= נוסחה של MSE של הריגורס הליניארי עם פרמטר λ אחד

$$\frac{d}{d\lambda} \text{Var}(w_1) = \sigma^2 \frac{d}{d\lambda} \text{tr} (A_\lambda X^T X A_\lambda^T)$$

המטריצה $X^T X$ היא מטריצה סימטרית
 המכילה את כל הערכים של X

$$\frac{d}{d\lambda} \text{Var}(w_1) = \sum_{i,j} \frac{d \text{Var}(w_1^T)}{d(A_\lambda)_{i,j}} \cdot \frac{d(A_\lambda)_{i,j}}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0}$$

$$= \text{tr} \left(\frac{d \text{Var}(w_1^T)}{dA_\lambda} \cdot \frac{dA_\lambda}{d\lambda} \right) \Big|_{\lambda=0}$$

$$= -2\sigma^2 \text{tr} \left((X^T X)^{-1} (X^T X)^{-1} \right) < 0 //$$

= קיבלנו כי המידת בה $\text{Var}(w_1)$ יורד, נכבד!

אז

(f) נסיק מן היות כי עבור גודל המדגם n קטן מאוד
 קרה חילוקי ה- $\text{Var}(w_1)$ ובמקרה זה $\text{Var}(w_1)$ נורמל, מה
 שאומר כי המספר קטן.

= מכך קיבלנו כי גם במקרה זה סגור, קרה
 שהם מובנים על סגור, אלו מובנים כי המידת
 מידת = הפונקציה נורמל.

מכיוון שהפונקציה רצופה (אין שגיאות) בגשר ג'ס
אך עדיין קיבלנו מאד נקט כי עדיין ה-MSE קיבל
= הוסבר עדיין ראשונה Ridge מקדור מקיין
אך ה-MSE כנראה!

PCA

(2) נתון: נמצא כיוון המרחב החד-ממדי המקסימלי של התבוננות על המרחב \mathbb{R}^d ו- $v^T x$ הוא המרחב החד-ממדי המקסימלי של התבוננות על המרחב \mathbb{R}^d .

כך: $\|v\|_2 = 1, v \in \mathbb{R}^d$ ה.

$$E(v^T x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v^T x_i \sim \text{ממוצע} \\ = v^T \bar{x} \sim \text{נכונות} \text{ } \parallel \text{ } \text{בכיתה}$$

$$\text{var}(v^T x) = E_x((v^T x_i - E_x[v^T x])^2) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_i (v^T x_i - v^T \bar{x})^2 =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_i [v^T (x_i - \bar{x})]^2 =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_i (v^T (x_i - \bar{x})) (v^T (x_i - \bar{x}))^T =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_i v^T (x_i - \bar{x}) (x_i - \bar{x})^T v =$$

$$= v^T \underbrace{\sum_i (x_i - \bar{x}) (x_i - \bar{x})^T}_{\text{COV Sample set}} v =$$

$$= v^T S v$$

$$\hat{v} = \underset{\|v\|=1}{\text{argmax}} v^T S v$$

ל-15-5 נכונות

הן פונקציות!

לגורמים λ - כפולות

$$\gamma(V) = 1 - V^T V$$

$$L = V^T V + \lambda \gamma(V)$$

$$\frac{d}{dV} L = 2V - 2\lambda V = 0$$

אם $V^T V = 1$ ו- $\gamma(V) = 0$ אז

נכון, כי $\gamma(V) = 0$ אז $V^T V = 1$ ו- $\gamma(V) = 0$ אז

אם $V^T V = 1$ אז $\gamma(V) = 0$ ו- $\gamma(V) = 0$ אז

$V^T V = 1$ אז $\gamma(V) = 0$ ו- $\gamma(V) = 0$ אז

אם $V^T V = 1$ אז $\gamma(V) = 0$ ו- $\gamma(V) = 0$ אז

□

4. נכונה \exists כ"ף: $\mathbb{R}^2 \ni x$ כאשר $x_i = (x_i, y_i)$
 נקודת סגור ונקודה ב-המשאל וכן יחס

כאן הבל:

מ $\sqrt{x_i^2 + y_i^2}$ זאי לני נחזיר 1 זמר
 -1.

\Rightarrow וזיג עב כי עא ויקן ערפיד לר 6
 הלינון כ- \mathbb{R}^2 כאן לני.

לדיר $\psi(x) = (x_i, y_i, \sqrt{x_i^2 + y_i^2})$
 \Rightarrow נוסף לנגח למיז"ל מ זוליוק הלינד
 כאן זה נוסף ע"כ יפדח בקדוה כאשר
 וזה לנגח ע"י ממשל א פל אלא גפרה
לזר!

(5) (a) על גופן! וזה קובע את התוצאה.
 וזה כי הן הן PSO .

הן
 $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ קובע את

$k = e^{\frac{1}{2} \|x-y\|^2}$ קובע
 הן

$k = \begin{pmatrix} 1 & e^2 \\ e^2 & 1 \end{pmatrix}$

$v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ וזה, PSO על L , וזה

$v^T k v = (-2 + e^2 - 2e^2 + 1) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} =$

$-1(-2 + e^2) - 2e^2 + 1 = 4 - 4e^2 + 1 = 5 - 4e^2$

$L \subseteq \{x \mid 5 - 4e^2 \leq 0\} \iff e^2 \geq \frac{5}{4}$

הן, PSO

הן

6. אם λ קריטי! נראה כי $\lambda(x, x)$

נבחרו לנו קריטיים פונקציונליים כך ש

כתוצאה

$$k_1(x, z) = (\langle x, z \rangle + 5)^3$$

$$k_2(x, z) = (\langle x, z \rangle + 0)^2$$

ולכן

$$\lambda(0, 0) = k_1(0, 0) - k_2(0, 0) = -5^3 =$$

קריטיים קיימו כי הן הן λ ו-PSO זמן הן
 אם קריטיים!

א

7. האם נכון?

הוכחה: יהיו k_a, k_b קריטיים ו-2. כך ש-

$$k = k_a + k_b \quad \text{ואם } k \text{ קריטי}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \end{bmatrix} \quad x \in \mathbb{R}^d$$

$$k_{i,j} = k_{a,i,j} + k_{b,i,j} \quad \text{נראה כי}$$

אם λ קריטי!

נראה כי λ ו-PSO.

$$\lambda(x, x) = x \lambda x^T = x (k_a + k_b) x^T$$

מאמץ כ. ג' קיים בן גורג מאמץ כללר כמות
הקצאות על ת.ס.א. א.א.א.

$$X = X_a + X_b$$

השאלות
שנשאלו
אובבליסטר
הם אנשים
על.

$$X / c X^T = (x_a^* + x_b^*) / c (x_a^* + x_b^*)^T =$$

$$= x_a^* k x_a^T + x_b^* k x_b^T =$$

$$= X_a^* (K_a + K_b) X_a^{*T} + X_b^* (K_a + K_b) X_b^{*T}$$

= גמלורה ה קרעז חרדי' אסטאין יק א
ה קורדי. נאע ארעמואל' אדע נאן עיק א

$$\Rightarrow x_a^* k_a k_a^* + 0 + 0 + x_b^* k_b k_b^* =$$

$$= x_a^T K_a x_a + x_b^T K_b x_b \geq 0$$

Pool - D
C
J
K
L
M

ע' א' ס' 1950 י' ס' 1971!