Hoja de trabajo 1

Ecuaciones Diferenciales y Análisis de Fourier

Febrero 2014

1. Conjuntos Ortogonales

1. El proceso de **Gram-Schmidt** para la construcción de un conjunto ortogonal nos lleva de un conjunto linealmente independiente $\{f_0(x), f_1(x), f_2(x), ...\}$ de funciones continuas con valores reales en el intervalo $[a, b]$ a un conjunto ortonormal. Con el producto interno definido como $(f_n, f_m) = \int_a^b f_n(x)f_m(x)dx$, defina las funciones $\phi_n(x)$ como:

$$\begin{array}{rcc} \phi_0(x) & = & f_0(x) \\ \phi_1(x) & = & f_1(x) - \frac{(f_1,\phi_0)}{(\phi_0,\phi_0)}\phi_0(x) \\ \phi_2(x) & = & f_2(x) - \frac{(f_2,\phi_0)}{(\phi_0,\phi_0)}\phi_0(x) - \frac{(f_2,\phi_1)}{(\phi_1\phi_1)}\phi_1(x) \end{array} \tag{1}$$

   con este proceso encuentre los primeros tres polinomios ortonormales utilizando el conjunto $\{x^n\}_{n=0,1,2,3...}$ en el intervalo $-1 < x < 1$. Pruebe que sus respuestas funcionan y son ortonormales en el intervalo

2. Considere la base ortogonal $\{1, x, \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\}$ en el intervalo $[-1, 1]$

   - Compruebe que cumplen la condición de ortogonalidad

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm} \tag{2}$$

     donde $P_n(x)$ es el polinomio de grado 0 según corresponda en la familia de funciones ortogonales dada.
   - Encuentre la expansión de e^{-x} en términos de dicha familia ortogonal.

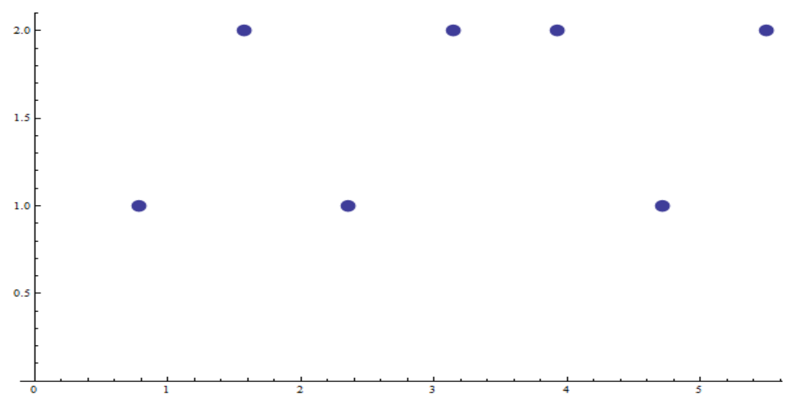
2. Series de Fourier

1. Encuentre la serie de Fourier de:

   - $f(x) = 1 - x^2$ de $-1 < x < 1$. Grafique la función.
   - $f(x) = \begin{cases} -1 & -1 < x < 0 \\ 2x & 0 < x < 1 \end{cases}$. Grafique la función.

- $f(x) = \frac{x^2}{4}$ de $(-\pi < x < \pi)$. Utilicela para probar $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + ... = \frac{\pi^2}{12}$.

2. Suponga de que se reciben señales con coordenadas $(\pi/4, 1), (\pi/2, 2), (3\pi/4, 1), (\pi, 2), (5\pi/4, 2), (3\pi/2, 1), (7\pi/4, 2),$ visualmente



Encuentre la Serie de Fourier de esta señal, grafíquela y vea qué pasa con las amplitudes. ¿Tendrá sentido? ¿Sera Relevante? ¿Cómo era la deficinicón de la Delta de Dirac?

Ayuda: El punto $(\pi/2, 2)$ puede representarse por medio de una *Delta de Dirac* como $2\delta(x - \pi/2)$, y el conjunto de puntos-la señal completa- sería la suma de deltas de dirac con las amplitudas correspondientes.

3. Ecuación de Transporte

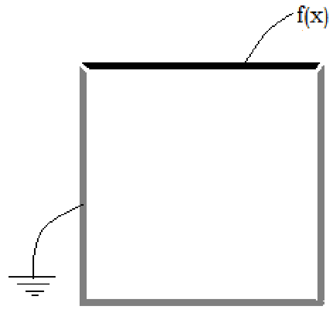
1. Resuelva la siguiente ecuación de transporte, por el método visto en clase, con su condición inicial:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + b\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + c\,u(x,t) = f(x,t) \quad (3)$$
$$u(x,0) = g(x) \quad (4)$$

4. Ecuación de Laplace

Resuelva lo siguiente dejando TODO el proceso indicado.

1. Considere una placa de lados 1x1 como en la figura, donde tres lados están conectados a tierra y el lado superior está a un potencial $f(x)$.



- Describa las condiciones de frontera
- Encuentre el potencial eléctrico dentro del cuadrado si:

$a)\;\; f_1(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} \leq x \leq \frac{1}{3} \end{cases}$

Confirme que el coeficiente de la solución del problema del potencial será

$$A_n = \frac{2}{n\pi senh(n\pi)} \left(1 - (-1)^n + cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) - cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right) \tag{5}$$

2. Resuelva la ecuación de Laplace en una placa rectangular con las siguientes condiciones de frontera:

$$\begin{array}{ll} u(0,y) = 0, & u(a,y) = 0 \\ u(x,0) = x, & u(x,b) = 0 \end{array} \tag{6}$$

Dibuje e interprete físicamente el problema. Grafique la solución $u(x,y)$ con una computadora (a colores).

3. Resuelva la ecuación de Laplace en una placa con las siguientes condiciones de frontera:

$$\begin{array}{ll} u(0,y) = 0, & u(1,y) = 1 - y \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0, & \frac{\partial u}{\partial y}(x,1) = 0 \end{array} \tag{7}$$

Dibuje e interprete físicamente el problema. Grafique la solución $u(x,y)$ con una computadora (a colores).

4. Utilice el principio de superposición para resolver la ecuación de Laplace con las siguientes condiciones:

$$\begin{array}{ll} u(0,y)=1, & u(\pi,y)=1 \\ u(x,0)=0, & u(x,\pi)=1 \end{array} \tag{8}$$

Dibuje e interprese físicamente el problema. Grafique la solución $u(x, y)$ con una computadora (a colores).

5. Suponga un paralelepípedo que se extiende al infinito en el eje z. Al encontrarnos con una situación así se puede considerar al problema del potencial independiente de dicha coordenada z y, por lo tanto, tratarlo como un problema en 2D.

   Resuelva el problema del potencial

$$\nabla^2 V(x,y) = 0 \tag{9}$$

   con las siguientes condiciones de frontera (puede jugar con la geometría del problema)

$$\begin{aligned} V(x,0) &= 0 \\ V(x,a) &= 0 \\ V(b,y) &= V_o \\ V(-b,y) &= V_o \end{aligned} \tag{10}$$

   Confirme que la solución cumpla las condiciones de frontera.

6. Resuelva la ecuación de Laplace en 3D con las condiciones

$$\begin{array}{rcl} V(x,0,z) & = & 0 \\ V(x,a,z) & = & 0 \\ V(x,y,0) & = & 0 \\ V(x,y,b) & = & 0 \\ V(x,y,z) \to 0 & si & x \to \infty \\ V(0,y,z) & = & V_o \end{array} \tag{11}$$