1. Considere una observación con ruido $\overline{y}_i = \overline{x} + \overline{v}_i$, donde $\overline{x}$ y $\overline{v}_i$ son variables aleatorias independientes. $\overline{v}_i$ es un ruido Gaussiano blanco con media 0 y varianza $\sigma_v^2$, donde $\overline{x}$ toma valores de $\pm 1$ con igual probabilidad, es decir, el 50% para $+1$ ó $-1$ para todas las mediciones de $\overline{y}_i$. Con $\overline{v}_i$ siendo ruido blanco, se asume que $\mathbb{E}[v_i v_j] = 0$ para todo $i \neq j$

a. Estimación de $\overline{x}$ dadas $N$ observaciones:

*Solution.*
Se tiene que:

$$\mathbb{E}[\overline{x}|\overline{y} = y_0, ..., y_N] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{x|y_0,...,y_N}(x|y_0, ..., y_N) \tag{1}$$

Con:

$$f_{\overline{v}}(v) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_x^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-v^2}{2}} \tag{2}$$

Ahora, el valor de $f_v(y_i - x)$ debe de expresarse como un producto de la forma

$$f_v = \prod_{i=0}^{n} f_{\overline{v}}(y_i \pm 1) \tag{3}$$

esto xq para cada $y_i$, la funcion $f_v$ toma un valor en específico, el cual es la multiplicación de los valores anteriores.

Así, se tiene la solución descrita en las siguientes páginas:

■

Ahora, sabemos por propiedad de Bayes:

$$f_{\bar{x}|\bar{y}}(x,y) = \frac{f_{\bar{x},\bar{y}}(x,y)}{f_{\bar{y}}}$$

Entonces se tiene que:

$$f_{\bar{x}|y_0,\ldots,y_n} = \frac{f(x, y_0 \ldots, y_n)\ (*)}{f(y_0,\ldots,y_n)\ (**)} \qquad (i)$$

$*)$ $f(x|y_0,\ldots,y_n) = f(x) \cdot f(y_0,\ldots,y_n|x)$ por notas de clase

$$= f(x) \cdot \prod_{i=0}^{n} f_v(y_i - x)$$

Ahora $f(x) = \frac{1}{2}\delta(x-1) + \frac{1}{2}\delta(x+1)$, también por notas de clase

entonces:

$$\boxed{f(x|y_0,\ldots,y_n) = \frac{1}{2}\left[\delta(x-1)\prod_{i=0}^{n} f_v(y_i-1) + \delta(x+1)\prod_{i=0}^{n} f_v(y_i+1)\right]}$$

$**)$ Por notas de clase : $f_{\bar{y}}(y) = \frac{1}{2} f_{\bar{v}}(y+1) + \frac{1}{2} f_{\bar{v}}(y-1)$, entonces

$$\boxed{f(y_0,\ldots,y_n) = \frac{1}{2}\left[\prod_{i=0}^{n} f_v(y_i+1) + \prod_{i=0}^{n} f_v(y_i-1)\right]}$$

Ahora sustituyendo en $(i)$

$$f_{\bar{x}|y_0,\ldots,y_n} = \frac{\cancel{1/2}\left[\delta(x-1)\prod_{i=0}^{n} f_v(y_i-1) + \delta(x+1)\prod_{i=0}^{n} f_v(y_i+1)\right]}{\cancel{1/2}\left[\prod_{i=0}^{n} f_v(y_i+1) + \prod_{i=0}^{n} f_v(y_i-1)\right]}$$

$$f_{\bar{x}|y_0,\dots,y_n} = \frac{\delta(x-1)\prod_{i=0}^{n} f_v(y_i-1)}{\prod_{i=0}^{n} f_v(y_i+1)+\prod_{i=0}^{n} f_v(y_i-1)} + \frac{\delta(x+1)\prod_{i=0}^{n} f_v(y_i+1)}{\prod_{i=0}^{n} f_v(y_i+1)+\prod_{i=0}^{n} f_v(y_i-1)}$$

Ahora integrando y simplificando igual que en clase:

$$= \frac{1}{1+\dfrac{\prod_{i=0}^{n} f_v(y_i+1)}{\prod_{i=0}^{n} f_v(y_i-1)}} - \frac{1}{1+\dfrac{\prod_{i=0}^{n} f_v(y_i-1)}{\prod_{i=0}^{n} f_v(y_i+1)}} = E\left[\bar{x}|y_0,\dots,y_n\right]$$

y $f_v = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-v^2/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma_x^2}}$ por lo tanto:

$$E\left[\bar{x}|y_0,\dots,y_n\right] = \frac{1}{1+\dfrac{\cancel{\frac{1}{\sqrt{\sigma_x^2}}}\prod_{i=0}^{n} \cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}} e^{-(y_i+1)^2/2\sigma_v^2}}{\cancel{\frac{1}{\sqrt{\sigma_x^2}}}\prod_{i=0}^{n} \cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}} e^{-(y_i-1)^2/2\sigma_v^2}}} - \frac{1}{1+\dfrac{\cancel{\frac{1}{\sqrt{\sigma_x^2}}}\prod_{i=0}^{n} e^{-(y_i-1)^2/2\sigma_v^2}\cdot\cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}}{\cancel{\frac{1}{\sqrt{\sigma_x^2}}}\prod_{i=0}^{n} \cancel{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}} e^{-(y_i+1)^2/2\sigma_v^2}}}$$

por por propiedad de $\frac{e^{-x/y}}{e^{-x/+y}} = e^{-x/y + x/y}$:

$$E\left[\bar{x}|y_0,\dots,y_n\right] = \frac{1}{1+\prod_{i=0}^{n} e^{-(y_i+1)^2/2\sigma_v^2 + (y_i-1)^2/2\sigma_v^2}} - \frac{1}{1+\prod_{i=0}^{n} e^{\frac{-(y_i-1)^2}{2\sigma_v^2} + \frac{(y_i+1)^2}{2\sigma_v^2}}}$$

Simplificando los cuadráticos queda:

$$E[\bar{x}|y_0,\dots,y_n] = \frac{1}{1+\prod_{i=0}^{n} e^{\frac{2y_i}{\sigma_v^2}}} + \frac{1}{1+\prod_{i=0}^{n} e^{\frac{-2y_i}{\sigma_v^2}}}$$

si $A = \frac{2y_i}{\sigma_v^2}$ : $\frac{\prod_{i=0}^{n} e^{\frac{A}{2}} - \prod_{i=0}^{n} e^{-\frac{A}{2}}}{\prod_{i=0}^{n} e^{\frac{A}{2}} + \prod_{i=0}^{n} e^{-\frac{A}{2}}} = \tanh\left[\sum_{i=0}^{n} \frac{A}{2}\right]$

si $\hat{x}$ es el valor de $E[\bar{x}|y_0,\dots y_n] =$

$$\boxed{\hat{x} = \tanh\left[\sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{\sigma_v^2}\right]}$$

b) Del inciso a) se tiene que:

$$f_{\bar{x}|y_0,\dots,y_n} = \frac{\delta(x-1)\prod_{i=0}^{n} f_v(y_i-1)}{\prod_{i=0}^{n} f_v(y_i+1) + \prod_{i=0}^{n} f_v(y_i-1)} + \frac{\delta(x+1)\prod_{i=0}^{n} f_v(y_i+1)}{\prod_{i=0}^{n} f_v(y_i+1) + \prod_{i=0}^{n} f_v(y_i-1)}$$

pero el $\delta(x\pm 1)$ venía de tener una probabilidad = 50%.
Si ahora la probabilidad es $p$ para 1 y $1-p$ para $-1$, entonces

$$E[\bar{x}|y_0,\dots,y_n] = \frac{1}{1 + \dfrac{\prod_{i=0}^{n} e^{-\frac{(y_i+1)^2}{2\sigma_v^2}} \cdot p}{\prod_{i=0}^{n} e^{-\frac{(y_i-1)^2}{2\sigma_v^2}}(1-p)}} - \frac{1}{1 + \dfrac{\prod_{i=0}^{n} e^{-\frac{(y_i-1)^2}{2\sigma_v^2}} \cdot (1-p)}{\prod_{i=0}^{n} e^{-\frac{(y_i+1)^2}{2\sigma_v^2}} \cdot p}}$$

Ahora dado que $e^{\ln(A)} = A$ entonces $p = e^{\ln(p)}$ y $(1-p) = e^{\ln(1-p)}$
entonces sustituyendo en $(***)$:

$$E[\bar{x}|y_0,\dots,y_n] = \frac{\prod_{i=0}^{n} e^{\frac{y_i}{\sigma_v^2}} \cdot e^{\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)} - \prod_{i=0}^{n} e^{-\frac{y_i}{\sigma_v^2}} \cdot e^{-\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)}}{\prod_{i=0}^{n} e^{\frac{y_i}{\sigma_v^2}} \cdot e^{\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)} + \prod_{i=0}^{n} e^{-\frac{y_i}{\sigma_v^2}} \cdot e^{-\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)}}$$

Ahora, sumo los exponentes de $e$:

$$E[\bar{x}|y_0,\dots,y_n] = \frac{\prod_{i=0}^{n}\left[e^{\left(\frac{y_i}{\sigma_v^2} + \ln\left(\frac{p}{1-p}\right)\right)} - e^{-\left(\frac{y_i}{\sigma_v^2} + \ln\left(\frac{p}{1-p}\right)\right)}\right]}{\prod_{i=0}^{n}\left[e^{\left(\frac{y_i}{\sigma_v^2} + \ln\left(\frac{p}{1-p}\right)\right)} + e^{-\left(\frac{y_i}{\sigma_v^2} + \ln\left(\frac{p}{1-p}\right)\right)}\right]}$$

Así entonces:

$$\boxed{\hat{x} = \tanh\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{1-p}\right) + \sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{\sigma_v^2}\right]}$$

c) Ahora si el ruido está correlacionado y $\bar{V} = \text{col}\{V_0, V_1, \dots, V_N\}$ y $R_v = E[\bar{v}\bar{v}^*]$, entonces el ruido Gaussiano se vuelve en la ecuación (3) de la siguiente forma:

$$f_v = f_{\bar{v}}(y_i \pm 1) \quad \text{Note que no hay producto } \left(\prod_{i=0}^{n}\right)$$

con una distribución:

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma_x^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{y^T \cdot R_v^{-1} \cdot h} \quad \text{con } h = \text{col}\{1, 1, \dots 1\}$$

$$y = \text{col}\{y(0), y(1), \dots, y(N)\}$$

Usando el resultado parcial del inciso b), entonces:

$$\hat{x} = \tanh\left[\frac{1}{2} \ln\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right) + \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \frac{y_i}{\sigma_v^2}}_{}\right]$$

esta parte va a cambiar a la parte del exponente de $y^T \cdot R_v^{-1} \cdot h$

y sin la sumatoria, que viene de los productos, se tiene:

$$\boxed{\hat{x} = \tanh\left[\frac{1}{2} \ln\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right) + y^T R_v^{-1} \cdot h\right]}$$