FUNDATEC
Maestría en Electrónica
Puntaje Total: 100 puntos

MP-6124: Procesamiento Adaptivo
Cuatrimestre: III - 2019
Valor Porcentual: 10 %

# Tarea 1

## 1 Instrucciones generales

- Esta tarea se realizará individual o en grupos de 2 personas
- Los documentos y archivos necesarios para resolver la tarea se encuentran en el TEC Digital, especificamente en la sección `Documento->Tareas->Tarea 1`.
- Los archivos de programación deben ser realizados en GNU Octave, MATLAB ó Python.
- La parte escrita puede ser realizada en papel. Realice un escaneo de la solución de cada uno de los ejercicios asigandos.
- Los archivos de esta tarea deben ser enviados al correo `jusoto@tec.ac.cr`, en un archivo con extensión `.zip` con nombre `tarea1_pa`. En el correo se debe indicar el nombre de los miembros del grupo.
- El nombre de todos los archivos deben coincidir con los nombres mencionados en este documento. En caso de no seguir esta instrucción, **perderán 2 puntos por cada nombre que no coincida con el nombre establecido en este documento (incluyendo mayúsculas y minúsculas).**
- **Fecha y Hora de Entrega:** Lunes 28 de Octubre del 2019 a las 6:00 p.m.

## 2 Preguntas

1. [**40 puntos**]: Del libro *"Fundamentals of Adaptive Filtering"* de Ali Sayed, realizar el Problema 1.11 de la página 35.
2. Basandose en la Sección 2.6 *Linear Models* del libro *"Fundamentals of Adaptive Filtering"* de Ali Sayed, páginas 66-68, se dará solución al siguiente problema:

**Problema A**: Considere un vector aleatorio $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ con media $\mathbb{E}[\mathbf{x}] = \mathbf{0}_m$ y matriz de covarianza $R_{\mathbf{xx}} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, la cual está dada por una matriz de covarianza constante con parámetro $\rho \in ]0,1[$. Considere el vector de observación $\mathbf{y} = A\mathbf{x} + \mathbf{n}$, donde $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ es una matriz tridiagonal de de la forma

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & & & \\ 1 & 3 & 1 & & \\ & 1 & 3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

y $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^m$ es un vector aleatorio con media $\mathbb{E}[\mathbf{n}] = \mathbf{0}_m$ y matriz de covarianza $R_{\mathbf{vv}} = \sigma^2 I_m$ ($I_m$ es la matriz identidad de orden $m$). Los vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{n}$ son ortogonales. Calcular el estimador lineal de $\mathbf{x}$ dado $\mathbf{y}$.

Para dar solución al **Problema A**, debe resolver las siguientes preguntas:

(a) [**10 puntos**]: Del artículo *A family of iterative methods for computing the approximate inverse of a square matrix and inner inverse of a non-square matrix*, implemente computacionalmente la ecuación (2.1) en una función con nombre `aprox_inv`, la cual recibe como parametros una matriz $A$ y una tolerancia $tol > 0$, y la salida es una matriz $X$, tal que cumple la condición $\|AX^{(k)} - I_m\|_{fr} < tol$. Acá, $\|\cdot\|_{fr}$ representa la norma de Frobenius. Esta función debe estar documentada correctamente documentada en el código, con su ayuda respectiva.

(b) [**35 puntos**]: Implemente computacionalmente una función con nombre `solucion_problA`, el cual da solución al **Problema A**. Esta función recibe como parámetros de entrada los valores $m$, $\rho$, $\sigma$, $tol$ y los parámetros de la salida son la matriz $K \in \mathbb{R}^{m\times m}$ del estimador lineal $\widehat{\mathbf{x}} = K\mathbf{y}$ y el error general $e_K \geq 0$, el cual está dado por

$$e_K = \min_K \mathbb{E}[\|\mathbf{x} - K\mathbf{y}\|_2^2].$$

Además, para el cálculo de la inversa, la función `solucion_problA` utilizará la función `aprox_inv` implementada en la parte (a), para el cálculo de la matriz inversa. Esta función debe estar documentada correctamente documentada en el código, con su ayuda respectiva.

(c) [**15 puntos**]: Implemente computacionalmente un *script* que muestre las siguientes gráficas

- Dimensión $m$ versus error general $e_K$, para el caso $\rho = 0.5$, $\sigma = 1$ y $tol = 10^{-4}$. Tomar valores de $m$ en el intervalo $[2, 100]$.
- Sigma $\sigma$ versus error general $e_K$, para el caso $\rho = 0.5$, $m = 25$ y $tol = 10^{-4}$. Tomar valores de $\sigma$ en el intervalo $[0.1, 5]$.
- Constante $\rho$ versus error general $e_K$, para el caso $\sigma = 1$, $m = 50$ y $tol = 10^{-4}$. Tomar valores de $\rho$ en el intervalo $[0.01, 0.99]$.

Este *script* debe estar documentada correctamente documentada en el código, con su ayuda respectiva.