Erik Dalsryd, Patrick Henning
2018-11-20

SF1511, Numeriska metoder och grundläggande programmering – Laboration 5 –

Begynnelse-, randvärdesproblem och stora ekvationssystem

Deadline - 2019-03-01

Efter den här laborationen ska du känna igen problemtyperna randvärdes- och begynnelsevärdesproblem för ordinära differentialekvationer och kunna lösa dessa med differensmetoder. Du ska kunna analysera noggrannhetsordning och bestämma stabilitetsegenskaper både teoretiskt och experimentellt. Du ska också lära dig att lösa stora linjära ekvationssystem och ickelinjära ekvationssystem.

1. Begynnelsevärdesproblem

Läsanvisning: Kap 6.1 – 6.2 i *GNM*
Givet är följande differentialekvation

$$\frac{dy}{dt} = \sin(t) - 2y, \quad y(0) = 0, \quad t \in [0, 20].$$

I denna deluppgift ska ovanstående differentialekvation lösas numeriskt med Eulers framåtmetod och Crank-Nicolson-metoden. Uppgiften går ut på att undersöka

- hur trunkeringsfelet avtar med steglängden h (för små värden på h), dvs noggrannheten
- hur den numeriska lösningen uppför sig för 'stora' h-värden (stabilitet)

(1) Lös först differentialekvationen exakt (analytiskt), dvs med metoder som du lärt dig i matematik. Denna lösning betecknas $y(t)$.

(2) Dela in tidsintervallet $[0, 20]$ i n ekvidistanta steg h. Eulerlösningen i en punkt t betecknas $y(t, h)$. Skriv ett Matlabprogram som beräknar Eulerlösningarna för $n = 100$, $n = 500$ och $n = 1000$. Plotta i samma graf den exakta lösningen $y(t)$ samt de de tre Eulerlösningarna. Plotta även i ett loglog-diagram felet $|y(20) - y(20, h)|$ som funktion av h. Vilken ordning hos Eulers framåtmetod kan utläsas ur diagrammet?

Gör samma beräkningar, grafer och diagram för Crank-Nicolson-metoden.

(3) Dela in tidsintervallet $[0, 20]$ i $n = 40, 20, 10$ och 5 ekvidistanta steg. Beräkna de fyra Eulerlösningarna och plotta dem tillsammans med den exakta lösningen i samma graf.

Gör samma sak med Crank-Nicolson-metoden. Vilken slutsats kan du dra beträffande den numeriska stabiliteten för de två metoderna genom att titta på graferna?

2. Begynnelsevärdesproblem (högre ordningens differentialekvation)-Pendel

Läsanvisning: Kap 6.1C och 4.1E i GNM
Följande andra ordningens differentialekvation beskriver en pendels rörelse.

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin(\phi) = 0, \quad \phi(0) = \frac{\pi}{3}, \quad \frac{d\phi}{dt}(0) = 0, \quad t = [0, T]$$

Här är ϕ vinkeln och ϕ' vinkelhastigheten. Längden på snöret är $L = 4\ m$ och tyngdkraften $g = 9.81\ m/s^2$.

(a) Skriv om differentialekvationen som ett system av första ordningens differentialekvationer. Systemet skall redovisas på papper.

(b) Lös systemet med egenskriven Runge-Kutta4. Välj ett tidsintervall, $[0, T]$, som gör att pendeln hinner svänga ungefär två hela perioder. Plotta vinkel och vinkelhastighet som funktion av tiden.

(c) Animera pendelns gång.

Animeringen kan göras tex med ett anrop av följande MATLAB kod:

```
function anim(tout, fi, L)
for i=1:length(tout)-1
   x0=L*sin(fi(i));y0=-L*cos(fi(i));
   plot([0,x0],[0,y0],'-o')
   axis('equal')
   axis([-1 1 -1 0]*1.2*L)
   drawnow
   pause(tout(i+1)-tout(i))
end;
end
```

där `tout` är tidpunkterna vid vilka du, med Runge-Kutta4, har räknat ut lösningen och `fi` är den uträknade vinkeln vid motsvarande tidpunkt. L är pendelns längd.

(d) Bestäm pendelns svängningstid (dvs period) med minst 1 decimal genom att göra interpolation i den beräknade pendelrörelsen och bestämma interpolationspolynomets nollställe. (Ledning: Välj ett lämpligt interpolationspolynom, i det relevanta intervallet).

(e) Beror svängningstiden av L?

3. Randvärdesproblem

Läsanvisning: **PP kap 6:3C**

Följande differentialekvationsproblem beskriver temperaturfördelningen $T(x)$ i en cylindrisk stav av längden L och med tvärsnittsarean A.

$$-\frac{d}{dx}(k\frac{dT}{dx}) = Q(x), \quad T(0) = T_0, \quad T(L) = T_L \tag{1}$$

Vänster och höger ändpunkt på staven har den konstanta temperaturen T_0 resp T_L. Konstanten k är stavens värmeledningsförmåga och $Q(x)$ är den värmemängd som per tidsenhet och volymnsenhet genereras i staven, t ex genom radioaktivitet.

Värme kommer att läcka in eller ut genom ändpunkterna beroende på vilken temperatur som omgivningen har och vilken värmemängd som utvecklas i staven. Värmeflödet i vänster och höger ändpunkt ges av uttrycken

$$-Ak\frac{dT}{dx}(0), \qquad -Ak\frac{dT}{dx}(L) \tag{2}$$

Antag att $L = 2$ $[m]$, $A = 0.01$ $[m^2]$, $k = 2.5$ $[J/(K \cdot m \cdot s]$, $T_0 = 300$ $[K]$, $T_L = 400$ $[K]$ och $Q(x)$ $[J/(s \cdot m^3)]$ är funktionen

$$Q(x) = 300e^{-(x-\frac{L}{2})^2}, \qquad 0 \le x \le L$$

Differentialekvation och randvillkor (1) kan lösas numeriskt med hjälp av finita differensmetoden. Om vi diskretiserar intervallet $[0, L]$ enligt $x_i = ih, i = 0, 1, 2, \ldots, n, n+1$, där $h(n+1) = L$ och approximerar andraderivatan med centraldifferens erhålles

$$\frac{-T_{i-1} + 2T_i - T_{i+1}}{h^2} = \frac{1}{k}Q(x_i), i = 1, 2, \ldots, n \tag{3}$$

Diskretiseringen leder till ett linjärt ekvationssystem

$$AT = b \tag{4}$$

där A är en $n \times n$-matris, T är en $n \times 1$-vektor med temperaturvärden i det inre av intervallet och b är en $n \times 1$-vektor som beror av bl a randvärdena T_0 och T_L samt $Q(x_i)$-värdena.

a) Skriv ner matrisen A med **papper och penna** med N=3, där N är antalet inre punkter. Vilken struktur och vilka värden får matrisen A ?

b) Skriv ett Matlab-program som löser randvärdesproblemet. Matrisen A kommer endast att ha ett fåtal nollskilda element. Matrisen kan du skapa i Matlab med kommandot diag.
Kommandona `spdiags, sparse, full` är ett kommandon för att skapa glesa matriser. Gör (`help spdiags`) för mer information.

Räkna ut temperaturen T för fallet $N = 249$. Lösningen får du genom att lösa det linjära ekvationssystemet $AT = b$ i Matlab med \. Lösningen T kommer att innehålla temperaturen i alla punkter x_i utom i randpunkterna.
Plotta temperaturen som funktion av x på hela itervallet $0 \le x \le L$.

Hur stor är den maximala temperaturen ?

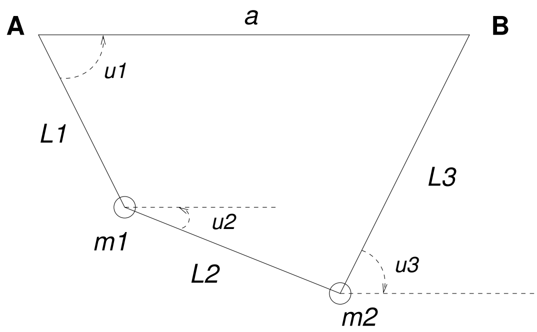
Beräkna även värmeflödet genom ändpunkterna genom att approximera derivatauttrycken (2) på lämpligt sätt. En första ordningens approximation är godtagbar, men ännu bättre är att använda den andra ordningens approximation som anges i Exempelsamlingen, Ex 1.3b, nämligen

$$\frac{dT}{dx}(0) = \frac{-T_2 + 4T_1 - 3T_0}{2h} + O(h^2) \tag{5}$$

Hur ser den ut i höger ändpunkt?

4. Ett icke-linjärt ekvationssystem: Vikter på en lina

Läsanvisning: extramaterial



Två kulor är fästade på ett snöre som hänger mellan två punkter, A och B. Linjen AB mellan punkterna är horisontell och avståndet mellan punkterna är a. Kulornas massa är m_1 resp m_2. Kulorna delar upp snöret i tre delar med längderna L_1, L_2 och L_3. Uppgiften är att räkna ut vilka vinklar de tre snörena bildar med horisontalplanet samt att rita upp snörets form i en graf. Beteckna de tre sökta vinklarna u_1, u_2 och u_3. De uppfyller villkoret $\pi/2 > u_1 \geq u_2 \geq u_3 > -\pi/2$ (se figuren). Observera att vridning i motsols riktning ger en positiv vinkel. Rent geometriskt gäller de två sambanden:

$$L_1 \cos u_1 + L_2 \cos u_2 + L_3 \cos u_3 = a, \qquad L_1 \sin u_1 + L_2 \sin u_2 + L_3 \sin u_3 = 0$$

Dessutom gäller vid jämvikt följande samband:

$$m_2 \tan u_1 - (m_1 + m_2) \tan u_2 + m_1 \tan u_3 = 0$$

De tre sambanden utgör tillsammans ett *icke-linjärt ekvationssystem* för de tre vinklarna u_1, u_2 och u_3. Lös detta ekvationssystem med Newtons metod för följande värden på parametrarna $a = 2$, $L_1 = 1$, $L_2 = 1$, $L_3 = 1$, $m_1 = 1$ samt $m_2 = 3$
Rita in snörets form i en graf.
Gör en tabell som visar hur iterationerna konvergerar mot lösningen.

Hur många timmar ungefär har den här laborationen tagit?

En fråga på kursutvärderingen i slutet av kursen kommer att gälla tidsåtgång och laborationsomfång. Tänk redan nu igenom vad som är bra och vad som kan förbättras!