



## Modul 5: Integraler

Denna modul handlar om integraler. Det slås fast i en precis definition vad som menas med att en funktion är integrerbar på ett intervall och vad i så fall integralen av  $f$  över det intervallet är. Men det är inte definitionen man normalt använder för att räkna ut integraler, utan andra metoder som bygger på definitionen. Den viktigaste satsen är **integralkalkylens huvudsats** (the fundamental theorem of calculus) som säger att derivata och integral i någon mening är inversa operationer. En följd av detta är att man kan använda primitiv funktion (på engelska anti-derivative) för att räkna ut integraler. Eftersom det ofta är svårt att hitta primitiva funktioner, så har ett antal tekniker utvecklats för detta ändamål. De viktigaste är variabelsubstitution och partiell integration. För rationella funktioner kan partialbråksuppdelning (på engelska partial fractions) användas. I praktiken är förstås också numeriska metoder och programvara viktiga verktyg.

Det är viktigt att du blir bra på att integrera, så träna mycket.

KAN DU DET HÄR TILLRÄCKLIGT BRA? TESTA DIG SJÄLV!

**Uppgift 1.** Beräkna nedanstående integraler (när ska svaret innehålla en godtycklig konstant och när ska det inte göra det?)

$$\int \frac{dx}{1+x^2}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+x}}, \quad \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int \frac{dx}{x}, \quad \int \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) dx.$$

**Uppgift 2.** Beräkna nedanstående integraler med hjälp av angiven substitution.

- (a)  $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{1+4x^2}$  (sätt  $u = 2x$ ).
- (b)  $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$  (sätt  $t = 1+x^2$ ).
- (c)  $\int_{-1}^0 x e^{-x^2} dx$  (sätt  $t = x^2$ ).

- (d)  $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$  (sätt  $t = \ln x$ ).
- (e)  $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$  (sätt  $u = \sin x$ ).

**Uppgift 3.** Beräkna nedanstående integraler med hjälp av partiell integration.

$$\int_0^1 x e^{-x} dx, \quad \int_1^{\sqrt{e}} x \ln x dx, \quad \int_0^{\pi/2} x \sin x dx, \quad \int_0^{\pi/2} x^2 \sin x dx.$$

**Uppgift 4.** Finns det några symmetrier som gör dessa integraler lättare att beräkna? Beräkna dem!

$$i) \int_{-1}^1 \sin x dx, \quad ii) \int_{-1}^1 e^{|x|} dx, \quad iii) \int_{-1}^1 \arctan x dx.$$

**Uppgift 5.** Beräkna nedanstående integraler med hjälp av partialbråksuppdelning

$$i) \int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 9}, \quad ii) \int_0^2 \frac{dx}{x^2 + 4x + 3}, \quad iii) \int_0^2 \frac{x^2}{x^2 + 4x + 3} dx.$$

**Uppgift 6.** Beräkna följande integraler. Du kan behöva kombinera flera metoder.

$$i) \int_0^1 \arctan x dx, \quad ii) \int_0^{1/2} \arcsin t dt, \quad iii) \int_1^e (\ln u)^2 du.$$

**Uppgift 7.** Derivera nedanstående uttryck med avseende på  $x$ .

$$i) \int_0^x \sqrt{1+t} dt, \quad ii) \int_x^0 \sqrt{1+t} dt, \quad iii) \int_0^{x^2} \sqrt{1+t} dt.$$

**Uppgift 8.** Låt  $F(x) = \int_0^x \cos(t^2) dt$ . Beräkna  $F(0)$ ,  $F'(0)$  och  $F''(x)$  och beräkna sedan  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x}$ .

**Uppgift 9.** Bevisa följande olikheter med hjälp av de grundläggande egenskaperna för integraler.

- (a)  $\int_a^b \sin^2 x dx < \int_a^b |\sin x| dx$  om  $a < b$ .
- (b)  $\int_{-1}^1 e^{-|x|} dx < 2$

(c)  $\int_0^1 e^{-x^2} dx < 1$

**Uppgift 10.** Vi ska approximera integralen  $\int_1^2 \frac{dx}{x}$  med Riemannsummor.

- (a) Ange en Riemannsumma med två termer som är en undersumma till integralen.
- (b) Ange en Riemannsumma med fyra termer som är en undersumma till integralen.
- (c) Använd svaret i uppgift b) för att ge ett närmevärde till  $\ln 2$ . Förklara!

**Uppgift 11.** Här är en uppgift om Riemannsummor.

- (a) Ange en integral som  $\sum_{k=1}^{10} \left(\frac{k}{10}\right)^3 \cdot \frac{1}{10}$  är en Riemannsumma till.
- (b) Beräkna (med hjälp av en integral) gränsvärdet  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{n}$ .

## FACIT OCH LÖSNINGSTIPS

Svar till Uppgift 1:

- (a)  $\arctan x + C$  där  $C$  är en godtycklig konstant.
- (b)  $2\sqrt{1+x} + C$  där  $C$  är en godtycklig konstant.
- (c)  $\pi/6$  (obs ingen konstant  $C$  här!)
- (d)  $\ln|x| + C$  där  $C$  är en godtycklig konstant.
- (e)  $\frac{x^4}{4} - \frac{1}{2x^2} + C$  där  $C$  är en godtycklig konstant.

Svar till Uppgift 2:

- (a)  $\pi/24$
- (b)  $1$
- (c)  $\frac{1-e}{2e}$
- (d)  $1/2$
- (e)  $3/2$

Svar till Uppgift 3:

- (a)  $1 - \frac{2}{e}$
- (b)  $\frac{1}{4}$
- (c)  $1$
- (d)  $\pi - 2$
- (e)  $4/15$

Svar till Uppgift 4:

- (a)  $0$
- (b)  $2e - 2$  (integranden är jämn och integralen  $= 2 \int_0^1 e^x dx$ .)
- (c)  $0$  (integranden är udda och intervallet symmetriskt runt origo.)
- (d)  $-\frac{1}{6} \ln 5$
- (e)  $\frac{1}{2} \ln \frac{9}{5}$

Svar till Uppgift 5:  $2 + 5 \ln 3 - \frac{9}{2} \ln 5$  (utför polynomdivision först.)

Svar till Uppgift 6:

- (a)  $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$
- (b)  $\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$
- (c)  $e - 2$

Svar till Uppgift 7:

- (a)  $\sqrt{1+x}$
- (b)  $-\sqrt{1+x}$
- (c)  $2x\sqrt{1+x^2}$

Svar till Uppgift 8: Vi har  $F(0) = 0$ ,  $F'(0) = 1$  och  $F''(x) = 2x \sin x^2$  som är begränsat nära origo så det sökta gränsvärdet fås med Taylorutveckling eller l'Hopitals regel till 1.

Svar till Uppgift 9: Tips: om en funktion är mindre än en annan i ett helt intervall så är integralen över det intervallet mindre än motsvarande integral för den andra funktionen.

Svar till Uppgift 10:

(a)  $\frac{1}{3/2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 7/12$

(b)  $\frac{1}{5/4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3/2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{7/4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = 533/840 \approx 0.6345$

(c) Eftersom integralen är exakt  $\ln 2$  approximerar Riemannsumman i B (och A) detta tal. Så  $\ln 2 \approx 0.6345$ . Felet i approximationen har vi nu inte analyserat så vi vet inte hur bra den är.

Svar till Uppgift 11:

(a)  $\int_0^1 x^3 dx$

(b)  $1/4$