Institutionen för Matematik

SF1625
Envariabelanalys
Läsåret 2018-2019

Modul 6: Båglängd och tillämpningar

Denna modul handlar om kurvor i planet och integraltillämpningar. Kurvorna i planet kommer att vara viktiga hjälpmedel i kursen i flervariabelanalys som kommer senare. Tillämpningar är interessanta i sig själva, men är också ett sätt för oss att ytterligare träna integrationsteknikerna.

KAN DU DET HÄR TILLRÄCKLIGT BRA? TESTA DIG SJÄLV!

Uppgift 1. Ange en ekvation för en ellips runt origo med halvaxlar 3 och 4. Finns det mer än ett alternativ?

Uppgift 2. Rita dessa kurvor.

(a) $x^2 + 2y^2 = 4$.
(b) $x + y^2 = 1$.
(c) $x^2 = 1 + y^2$.

Uppgift 3. Parametrisera dessa kurvor.

(a) $x^2 + y^2 = 2$.
(b) $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$.
(c) $y^2 = x + 1$.

Uppgift 4. Beräkna längden av kurvan $y = \ln(1 - x^2), \;\; 0 \leq x \leq 1/2$.

Uppgift 5 (Kursboken 7.3: 1, 3 och 8.4: 1, 5)**.** Rita kurvorna, och bestäm deras båglängder.

(a) $y = 2x - 1, (1 \leq x \leq 3)$.
(b) $3y = 2x^{3/2}, (0 \leq x \leq 8)$.
(c) $x = 3t^2, y = 2t^3, (0 \leq t \leq 1)$.
(d) $x = t^2 \sin t, y = t^2 \cos t, (0 \leq t \leq 2\pi)$.

Uppgift 6. Betrakta integralen $I = \displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

(a) Är e^{-x^2} integrerbar på intervallet $[0,1]$? Varför?
(b) Kan du beräkna I exakt med hjälp av primitiv funktion?
(c) Kan du approximera I? Gör det!

Uppgift 7. Ange på vilket sätt dessa integraler är generaliserade och beräkna dem.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int_1^\infty xe^{-x}\,dx, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}, \quad \int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx.$$

Uppgift 8. Avgör om nedanstående generaliserade integraler är konvergenta eller divergenta.

$$i) \quad \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx, \quad ii) \quad \int_{10}^\infty \frac{x+\ln x}{x^2}\,dx, \quad iii) \quad \int_0^\infty x\sin x\,dx.$$

$$iv) \quad \int_2^\infty \frac{x^2+1+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x^3}\,dx, \quad v) \quad \int_{30}^\infty \frac{x\sqrt{x}+x}{1-x^3}\,dx, \quad vi) \quad \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx.$$

Uppgift 9. Avgör om det obegränsade område som ligger mellan kurvorna $y = 1$ och $y = \dfrac{x^2+4x+4}{x^2+4x+3}$, när $0 \le x < \infty$, har ändlig area.

Uppgift 10. Härled med hjälp av Riemannsummor formlerna för rotationsvolym runt $x-$ resp y-axeln och beräkna sedan den rotationsvolym som genereras när området mellan kurvan $y = x^3$ och x-axeln på intervallet $0 \le x \le 1$ roteras ett varv runt

(a) x-axeln.
(b) y-axeln.

Uppgift 11. Härled följande formler med hjälp av rotationsvolymsteknik.

(a) Volymen V av ett klot med radie r ges av $V = \dfrac{4\pi r^3}{3}$.
(b) Volymen V av en kon med basradie r och höjd h ges av $V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$.

Tips för B: snegla vid behov på nästa uppgift.

Uppgift 12. Härled formeln $A = \pi r\sqrt{r^2+h^2}$ för mantelytans area A av en kon med basradie r och höjd h genom att betrakta den som den rotationsarea som genereras när $y = rx/h$ på intervallet $0 \le x \le h$ roteras runt x-axeln.

Uppgift 13. En cylindrisk silo med radie 2 meter och höjd 6 meter är fullpackad. Densiteten ρ av innehållet varierar med höjden h enligt formeln

$$\rho(h) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{h}{2}}} \quad \text{ton/m}^3.$$

Beräkna massan av innehållet i silon.

Uppgift 14. Ett fordon startar från stillastående och kör 30 minuter rakt framåt med accelerationen $2 + 60t$ km/h^2. Vad är fordonets hastighet efter 30 minuter? Hur långt hinner fordonet?

Uppgift 15. För en viss fjäder gäller att kraften som krävs för att trycka ihop fjädern x meter är $F(x) = x/2$ N. Hur stort arbete krävs för att trycka ihop denna fjäder $1/10$ meter?

Uppgift 16. Vi ska beräkna tyngdpunkten av en homogen halvcirkelskiva. Låt halvcirkelskivan ges av olikheterna

$$x^2 + y^2 \le R^2, \qquad y \ge 0.$$

Det är klart av symmetriskäl att x-koordinaten för tyngdpunkten måste vara 0. Vad blir y-koordinaten? Tips: kolla vid behov upp formeln för tyngdpunkt i boken.

Uppgift 17. Beräkna integralen $\displaystyle\int \frac{dt}{\sin t}$ med hjälp av substitutionen $x = \tan(t/2)$. Tips: vid denna substitution gäller sambanden

$$\cos t = \frac{1-x^2}{1+x^2}, \quad \sin t = \frac{2x}{1+x^2}, \quad dt = \frac{2dx}{1+x^2}.$$

(Kan du räkna ut denna integral på något annat sätt?)

Facit och lösningstips

Svar till Uppgift 1: $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ (Det finns fler alternativ.)

Svar till Uppgift 2: Det är en ellips, en parabel och en hyperbel

Svar till Uppgift 3:

(a) Tex: $x = \sqrt{2}\cos t,\ y = \sqrt{2}\sin t,\ t \in \mathbb{R}$.

(b) $x = 1 + 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ 0 \le t < 2\pi$.

(c) $x = t^2 - 1,\ y = t,\ t \in \mathbb{R}$.

Svar till Uppgift 4: $\ln 3 - \frac{1}{2}$.

Svar till Uppgift 5:

(a) $2\sqrt{5}$

(b) $52/3$
(c) $4\sqrt{2}-2$
(d) $\frac{8}{3}((1+\pi^2)^{3/2}-1)$.

Svar till Uppgift 6:

(a) Ja! Funktionen är kontinuerlig på det slutna begränsade intervallet. Därför är den integrerbar.
(b) Nej! Det går inte att skriva upp en primitiv funktion med hjälp av elementära uttryck.
(c) Det finns flera sätt. Ett sätt är med hjälp av Riemannsummor (eller trapetsregeln om man känner till den). Ett annat sätt är att Taylorutveckla. Om man Taylorutvecklar integranden upp till grad 4 så får man att $I \approx \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2}\right) dx = 23/30 \approx 0.77$. Felet i denna approximation är mindre än $1/42$.

Svar till Uppgift 7:

(a) Obegränsat intervall. $\pi/2$.
(b) Integranden obegränsad när $x \to 1$. $\pi/2$.
(c) Obegränsat intervall. $2/e$.
(d) Integranden obegränsad när $x \to 1$. 2.
(e) Obegränat intervall. 2.

Svar till Uppgift 8:

(a) Konvergent.
(b) Divergent.
(c) Divergent.
(d) Divergent.
(e) Konvergent.
(f) Divergent.

Svar till Uppgift 9: Arean är $\frac{\ln 3}{2}$.
Svar till Uppgift 11: Svar på a) är $\pi/7$, och på b) är det $2\pi/5$.
Svar till Uppgift 13: 16π ton.
Svar till Uppgift 14: Sluthastigheten är 8.5 km/h och fordonet hinner 1.5 km.
Svar till Uppgift 15: Svar: $1/400$ Nm. Lösning: Arbete är kraft gånger väg, om kraften är konstant och i vägens riktning. Problemet här är att kraften inte är konstant. Då får man göra så här: Dela in intervallet från 0 till $1/10$ i många små delintervall. På ett litet sådant delintervall av längd Δx vid en punkt x är kraften ungefär konstant (om delintervallet är litet så hinner inte kraften ändra sig så mycket under det lilla intervallet eftersom kraften varierar kontinuerligt). Arbetet för att göra den lilla längdändringen Δx vid punkten x blir därför ungefär $F(x)\Delta x$. Arbetet för att göra hela längdändringen blir summan av arbetena på alla dessa små delintervall, vilket är en Riemannsumma som när delintervallens längd går mot 0 konvergerar mot integralen

$$\int_0^{1/10} F(x)\,dx = \int_0^{1/10} \frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{400} \text{ Nm}$$

som alltså är det arbete som krävs för att längdändra fjädern 0.1 meter.

Ibland skriver man i tillämpningar ovanstående resonemang betydligt mer kortfattat ungefär så här:

Arbetet för att göra en liten längdändring dx vid punkten x är $F(x)\,dx$. Hela arbetet fås genom summation till

$$\int_0^{1/10} F(x)\,dx = \int_0^{1/10} \frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{400} \text{ Nm}$$

som alltså är det arbete som krävs för att längdändra fjädern 0.1 meter.

Svar till Uppgift 16: $\dfrac{4R}{3\pi}$.

Svar till Uppgift 17: $\ln\tan\dfrac{t}{2} + C$, med C godt konstant. Ja.