Institutionen för Matematik

SF1625
Envariabelanalys
Läsåret 2018-2019
Lars Filipsson

Modul 3: Transcendenta funktioner och ODE

I denna modul introduceras begreppet **invers** funktion och som exempel på det några nya klasser av funktioner: exponentialfunktioner, logaritmfunktioner och inversa trigonometriska funktioner. Dessutom introduceras en viss sorts differentialekvationer, nämligen linjära ordinära differentialekvationer med konstanta koefficienter.

Det är viktigt att du lär dig de grundläggande egenskaperna hos de funktioner du möter i det här kapitlet. Du mste behärska potenslagar och loglagar bra. Samma sak gäller för egenskaperna hos arcus-funktionerna. Du måste också bli bra på att derivera dessa funktioner och mer komplicerade funktioner där dessa ingår.

Differentialekvationerna i denna modul kan lösas med en speciell metodik. Med hjälp av karaktäristiska ekvationen hittar man den allmänna homogena lösningen y_h. Med hjälp av ansättning hittar man sedan någon partikulärlösning y_p. Sedan får man lösningen $y_h + y_p = y$. Om initialvillkor är givna så använder man dem för att bestämma konstanterna i lösningen y.

KAN DU DET HÄR TILLRÄCKLIGT BRA? TESTA DIG SJÄLV!

Uppgift 1. Låt $f(x) = \dfrac{e^{kx}}{1+e^{kx}}$.

(a) Bestäm definitionsmängden till f.
(b) I vilka punkter r̈ f kontinuerlig?
(c) Bestäm $f'(x)$.
(d) I vilka punkter är f deriverbar?

Uppgift 2. Låt $g(x) = x \ln x - x$.

(a) Bestäm definitionsmängden till g.
(b) I vilka punkter är g kontinuerlig?
(c) Bestäm $g'(x)$.
(d) I vilka punkter är g deriverbar?

Uppgift 3. Låt $h(t) = \arctan t + \arctan \frac{1}{t}$.

(a) Bestäm definitionsmängden till h.
(b) I vilka punkter är h kontinuerlig?
(c) Bestäm $h'(t)$.
(d) I vilka punkter är h deriverbar?
(e) Rita funktionsgrafen $y = h(t)$.

Uppgift 4. Derivera nedanstående uttryck med avseende på x och ange i vilka punkter derivatan existerar.

$$xe^{-x}, \quad xe^{-x^2}, \quad \ln\sqrt{1+x^2}, \quad e^{-|x|}, \quad e^{2x}\sin 3x, \quad \arcsin\sqrt{x}.$$

Uppgift 5. Bestäm en ekvation för tangentlinjen till kurvan $y = \ln x$ i den punkt på kurvan som har x-koordinat 1. Kan du med hjälp av tangenten ge ett närmevärde till $\ln 1.1$?

Uppgift 6. Bestäm en ekvation för tangentlinjen till kurvan $y = e^{-x^2}$ i den punkt på kurvan som har x-koordinat -1.

Uppgift 7. På vilka intervall är funktionen $f(x) = xe^{-x^2/2}$ strängt vxande?

Uppgift 8. Förenkla nedanstående uttryck så långt som möjligt.

$$i) \quad 2\ln 6 - \ln 4 - \ln 9, \quad ii) \quad \ln(e^{2x}\cdot e^{-x}), \quad iii) \quad \arccos\frac{1}{2}.$$

$$iv) \quad \sin(\arccos x), \quad v) \quad \arctan\sqrt{3}.$$

Uppgift 9. Här är en uppgift om inverser.

(a) Bestäm inversen till funktionen $f(x) = 1 + e^{3x}$. Ange också inversens definitionsmängd och värdemängd.
(b) Hur kan du med hjälp av derivata visa att funktionen $g(x) = x + e^{3x}$ är inverterbar utan att räkna ut inversen?

Uppgift 10. Lös följande differentialekvationer.

(a) $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0$.
(b) $y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 10$.
(c) $y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = 0$.
(d) $y''(t) - 4y'(t) + 5y(t) = t + 1$.

Uppgift 11. Lös initialvärdesproblemet

$$\begin{cases} y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = 18 \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

Uppgift 12. Lös initialvärdesproblemet

$$\begin{cases} y''(t) + y(t) = \sin t \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases}$$

FACIT OCH LÖSNINGSTIPS

Svar till Uppgift 1:

(a) Funktionen är definierad för alla reella tal x.
(b) Funktonen är kontinuerlig överallt.
(c) $f'(x) = \dfrac{ke^{kx}}{(1+e^{kx})^2}$.
(d) Funktionen är deriverbar överallt.

Svar till Uppgift 2:

(a) Alla $x > 0$.
(b) Samma svar som i 2a).
(c) $g'(x) = \ln x$.
(d) Samma svar som a) och b).

Svar till Uppgift 3:

(a) Definitionsmängden är alla reella tal $t \neq 0$.
(b) Funktionen är kontinuerlig överallt utom i origo.
(c) h är deriverbar verallt utom i origo och för alla $t \neq 0$ gäller att $h'(t) = 0$
(d) Som c).
(e) $h(t) = \pi/2$ för alla $t > 0$ och $h(t) = -\pi/2$ för alla $t < 0$. Nu är det lätt att rita grafen.

Svar till Uppgift 4:

(a) $e^{-x}(1-x)$, existerar fr alla x.
(b) $e^{-x^2}(1-2x^2)$, existerar för alla x.
(c) $\dfrac{x}{1+x^2}$ definierat för alla x.
(d) $-e^{-x}$ om x är positivt och e^x om x är negativt. Existerar för alla $x \neq 0$.
(e) $2e^{2x}\sin 3x + 3e^{2x}\cos 3x$, existerar för alla x.
(f) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$, existerar när $0 < x < 1$.

Svar till Uppgift 5: Tangent: $y = x - 1$. Och $\ln 1.1 \approx 0.1$

Svar till Uppgift 6: $y - \frac{1}{e} = \frac{2}{e}(x+1)$.

Svar till Uppgift 7: Funktionen är strängt växande på intervallet $-1 \leq x \leq 1$.

Svar till Uppgift 8:

(a) 0
(b) x
(c) $\pi/3$
(d) $\sqrt{1-x^2}$ om $-1 \leq x \leq 1$ (annars är uttrycket inte definierat).
(e) $\pi/3$

Svar till Uppgift 9:

(a) $f^{-1}(x) = \dfrac{\ln(x-1)}{3}$. Definitionsmängden för f^{-1} är alla $x > 1$. Värdemängden är alla reella tal.
(b) Eftersom $g'(x) = 1 + 3e^{3x} > 0$ för alla x så är g strängt växande och därmed inverterbar.

Svar till Uppgift 10:

(a) $y(t) = Ce^t + De^{2t}$, där C och D är godtyckliga konstanter.
(b) $y(t) = Ce^t + De^{2t} + 5$, där C och D är godtyckliga konstanter.
(c) $y(t) = e^{2t}(A\cos t + B\sin t)$, där A och B är godtyckliga konstanter.
(d) $y(t) = e^{2t}(A\cos t + B\sin t) + \dfrac{1}{5}t + \dfrac{9}{25}$, där A och B är godtyckliga konstanter.

Svar till Uppgift 11: $y(t) = te^{3t} + 2$.

Svar till Uppgift 12: $y(t) = \dfrac{1}{2}\sin t - \dfrac{t}{2}\cos t$.