

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
ODDELEK ZA FIZIKO
UNIVERZITETNI ŠTUDIJ, NARAVOSLOVNA SMER

Rok Mihevc

Kraške vrtače Dinarskega krasa

DIPLOMSKO DELO

MENTOR: prof. dr. Rudolf Podgornik

Ljubljana, 2014

IZJAVA O AVTORSTVU DIPLOMSKEGA DELA

Spodaj podpisani Rok Mihevc, z vpisno številko **28030017**, sem avtor diplomskega dela z naslovom:

Kraške vrtače Dinarskega krasa

S svojim podpisom zagotavljam, da:

- sem diplomsko delo izdelal samostojno pod mentorstvom prof. dr. Rudolfa Podgornika,
- so elektronska oblika diplomskega dela, naslov (slov., angl.), povzetek (slov., angl.) ter ključne besede (slov., angl.) identični s tiskano obliko diplomskega dela

V Ljubljani, dne . februarja 2014

Podpis avtorja:

Kazalo

Povzetek

Abstract

1	Uvod	1
2	Preučevanje realnih vrtač	5
3	Analitično modeliranje vrtač	13
3.1	Stohastična rast površin	13
3.2	Merjenje eksponenta hrapavosti	15
3.3	Model Kardar-Parisi-Zhang	16
3.4	Deterministično modeliranje dinamike vrtač	19
4	Zaključek	24

Povzetek

Z numeričnimi metodami obdelamo 60km^2 velik digitalni model reliefsa Menišije ločljivosti 1m^2 in identificiramo veliko število kraških vrtač. Iz oblik velikega števila vrtač izračunamo povprečno obliko vrtače in jo analitično opišemo z gaussovo funkcijo. Odkrite realne vrtače nato prilegamo na gaussovo funkcijo ter pogledamo porazdelitev parametrov le-te na našem vzorcu.

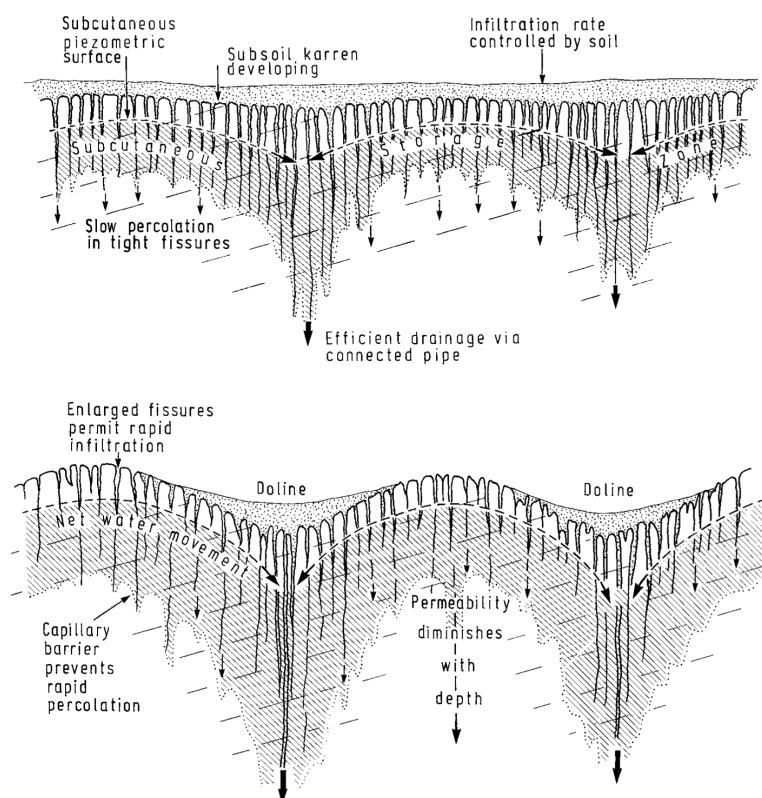
Zaradi geološke zgodovine področja Menišije in medsebojne podobnosti vrtač na tem območju postavimo tezo, da jih je oblikoval isti geomorfološki proces, ki vodi do vsem skupne stabilne oblike, ki so jo vrtače na tem območju že dosegle. S pomočjo podatkov pridobljenih v prvem delu naloge predlagamo časovno statičen nastavek, ki analitično opiše najdene vrtače. Postavimo tezo, da vrtače oblikuje stohastično priraščanje površja, ter primerjamo teoretično pričakovan eksponent hrapavosti z izmerjenim. Pogledamo še nekaj determinističnih difuzijsko-reakcijskih sistemov, ki bi lahko služili kot dinamični model nastanka vrtač.

Abstract

Abstract

Poglavlje 1

Uvod



Slika 1.1: Priljubljena geomorfološka shema za razlago vrtač. Vir: [FW07]

Namen tega dela je na podlagi digitalnega modela reliefa dokumentirati in statistično preučiti velik vzorec realnih kraških vrtač na slovenskem Dinarskem krasu, predlagati analitično funkcijo, ki bi opisala idealno vrtačo, ter na podlagi le-te poiskusiti modelirati naravne procese, ki povzročajo nastanek in obliko vrtač.

Vrtače so zaobljene lijakaste globeli, globine nekaj metrov in premera nekaj deset metrov. Obstaja več geomorfoloških modelov njihovega nastanka.

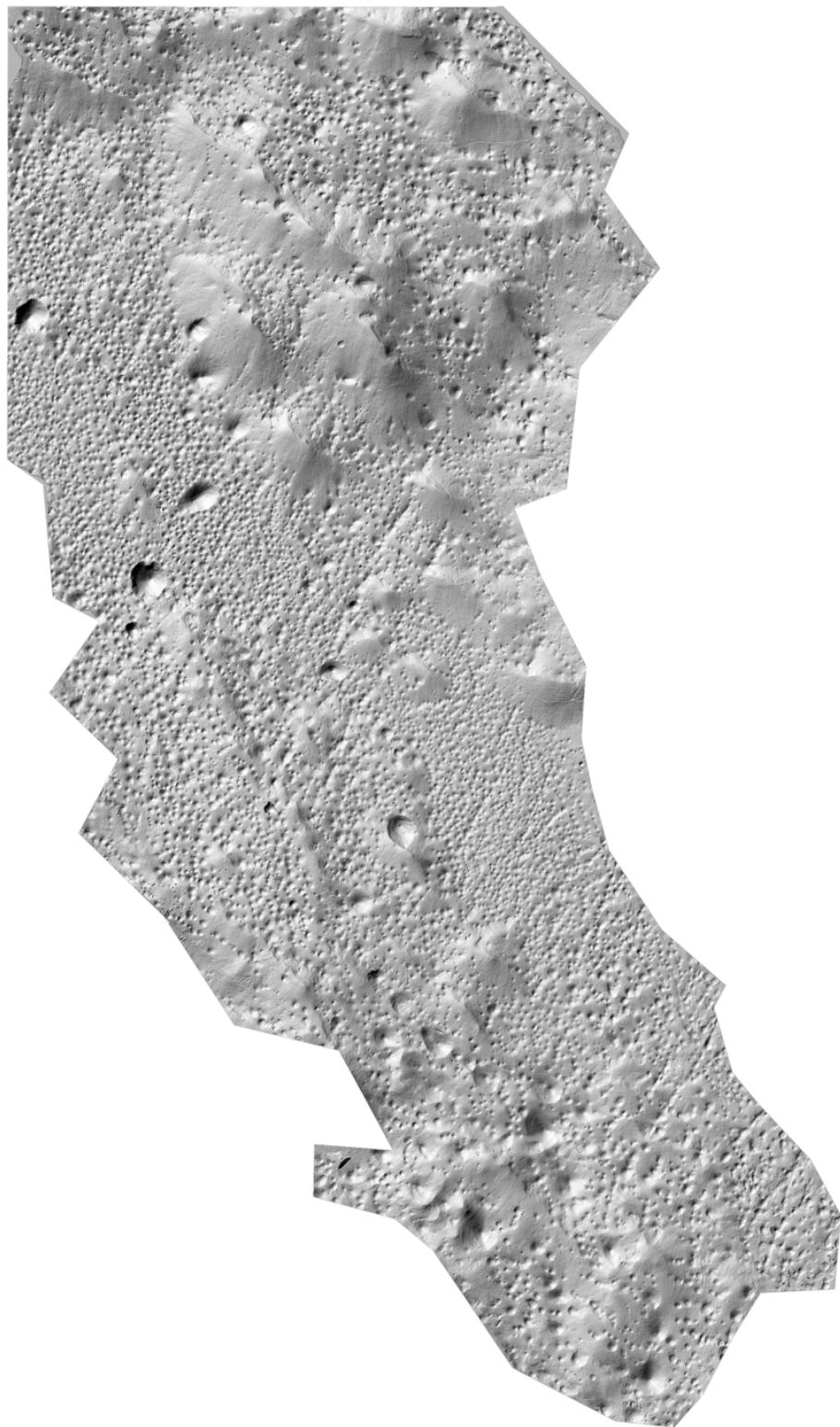
Za študij realnih vrtač uporabimo digitalni model reliefa Menišije (Slika 1.2) ločljivosti 1m, ki omogoča zanesljivo identifikacijo in študij vrtač ter udornic (Slika 1.3).



Slika 1.2: Menišija, 60km² veliko območje med Cerknico in Logatcem, vsebuje nekaj tisoč vrtač in več udornic in predstavlja približno odstotek slovenskega krasa. Vir: Geopedia, Geodetski inštitut Slovenije

Površje Menišije sestavlja plasti krednega apnenca (starost nastanka 135-65 miljonov let), ki so na površje prišli zaradi dogodkov povezanih s podrivanjem Adriatske plošče (17-7 miljonov let). Menišija je bila uravnano

kraško polje do 3.5 miljona let pred sedanjostjo, ko se je zaradi tektonske aktivnosti dvignila nad okolico in vzpostavljeni so bili hidrološki pogoji za nastanek vrtač. Hitrost zniževanja (denudacije) kraškega površja se ocenjuje na 20-50 m / miljon let, torej se je površje Menišije v času od nastanka znižalo za 70-175m, hkrati pa so se v njem pojavile vrtače, udornice in brezstrope jame. [VMFL06] [PCV10]

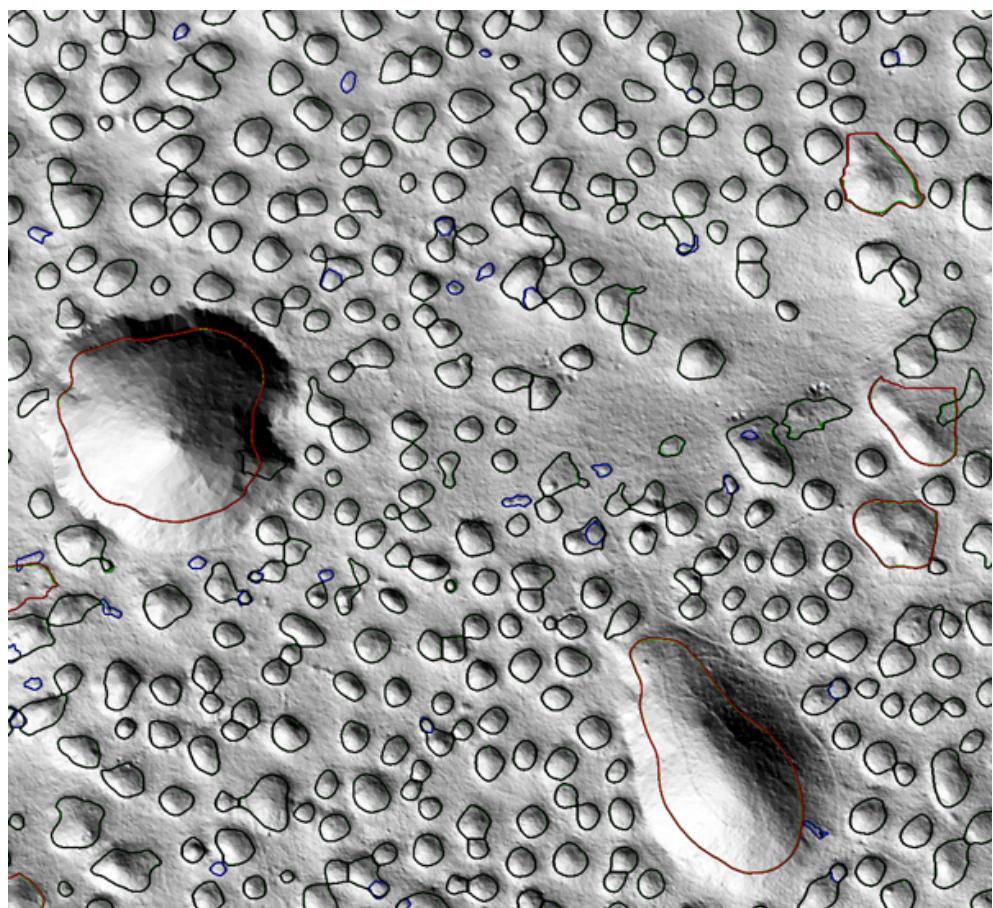


Slika 1.3: Senčen 3D relief dela Menišije uporabljen v tej nalogi. Vir: Geodetski inštitut Slovenije [LAK] po metodi [KPO⁺07].

Poglavlje 2

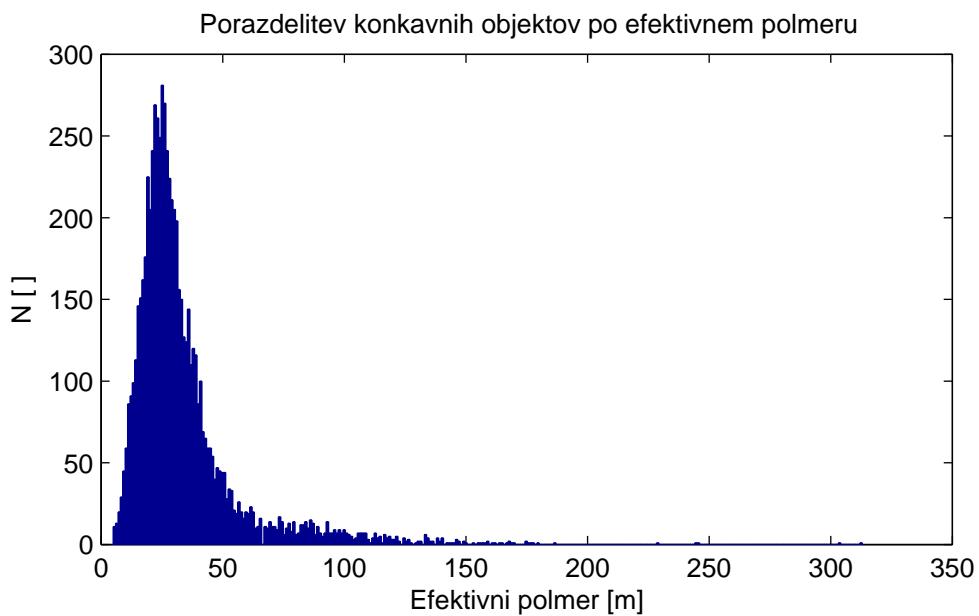
Preučevanje realnih vrtač

Identifikacijo velike količine objektov se lotimo s segmentacijo po konkavnosti, kot predlaga [DY13]. Točke, ki so nižje od svoje okolice, imajo nižji indeks konkavnosti, točke višje od svoje okolice pa višjega. Pri tem je pomembna tudi pametna izbiro okolice - od nje je odvisno kako velike konkavnosti bomo zaznali. Končno zavrzemo konveksne dele površja in konkavne odberemo kot vrtače. Rezultat vidimo na (Slika 2.1). Opaziti velja, da izbrana metoda segmentacije del robov konkavnih objektov klasificira kot konveksne in zato podcenii radij. Za naše namene to ni pretirano moteče, saj to podcenitev zlahka kompenziramo kasneje.



Slika 2.1: Del od 8687 zaznanih konkavnih objektov na območju Menišije.
Poleg vrtač so na sliki vidne tudi udornice.

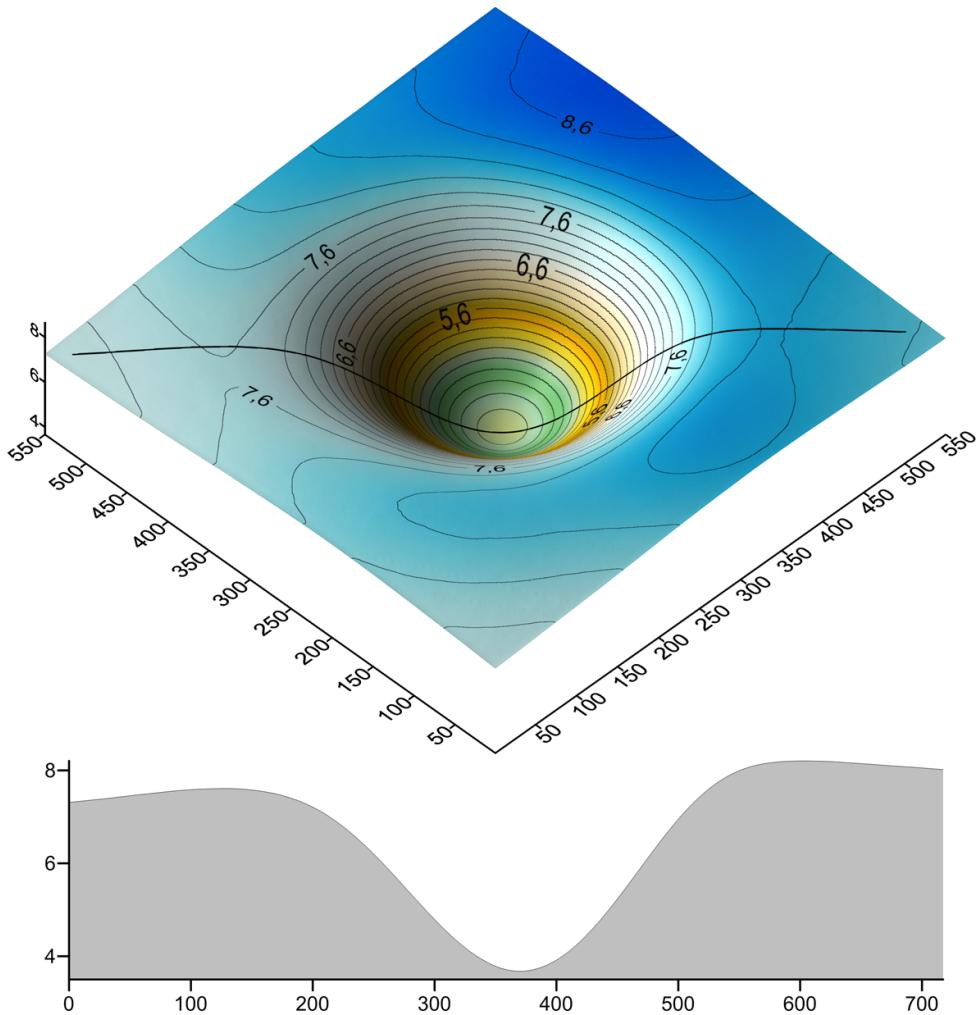
Najdeni konkavni objekti imajo porazdelitev efektivnih polmerov ($r_{eff} = \sqrt{\frac{A_{eff}}{\pi}}$),
kot vidno na (Slika 2.2).



Slika 2.2: Polmeri konkavnih objektov v Menišiji, vrh pade v razred od 24m do 25m.

To daje slutiti, da bodisi obstaja ravnovesna velikost vrtače, h kateri konvergirajo vse konkavne oblike v območju ne glede na njihov nastanek, bodisi da so vsi konkavni objekti v tem območju nastali v kratkem časovnem obdobju in se razvijali z enako hitrostjo. Odločimo se za raziskovanje prve možnosti. Predvidevamo torej, da obstaja ravnovesna oblika vrtače, ki bi se pojavila na idelani podlagi, če bi preteklo dovolj časa.

Posamezne realne vrtače zaradi lokalnih pogojev in zgodovine razvoja reliefa niso simetrične, a zdi se, da so si med seboj podobne. Da bi ugotovili idealno obliko vrtače, izračunamo povprečje velikega števila realnih vrtač. Uporabimo dva pristopa - pri prvem (Slika 2.3) vrtače različnih velikosti raztegnemo in povprečimo, pri drugem (Slika 2.4) pa jih razdelimo v velikostne razrede in jih povprečimo znotraj le-teh.

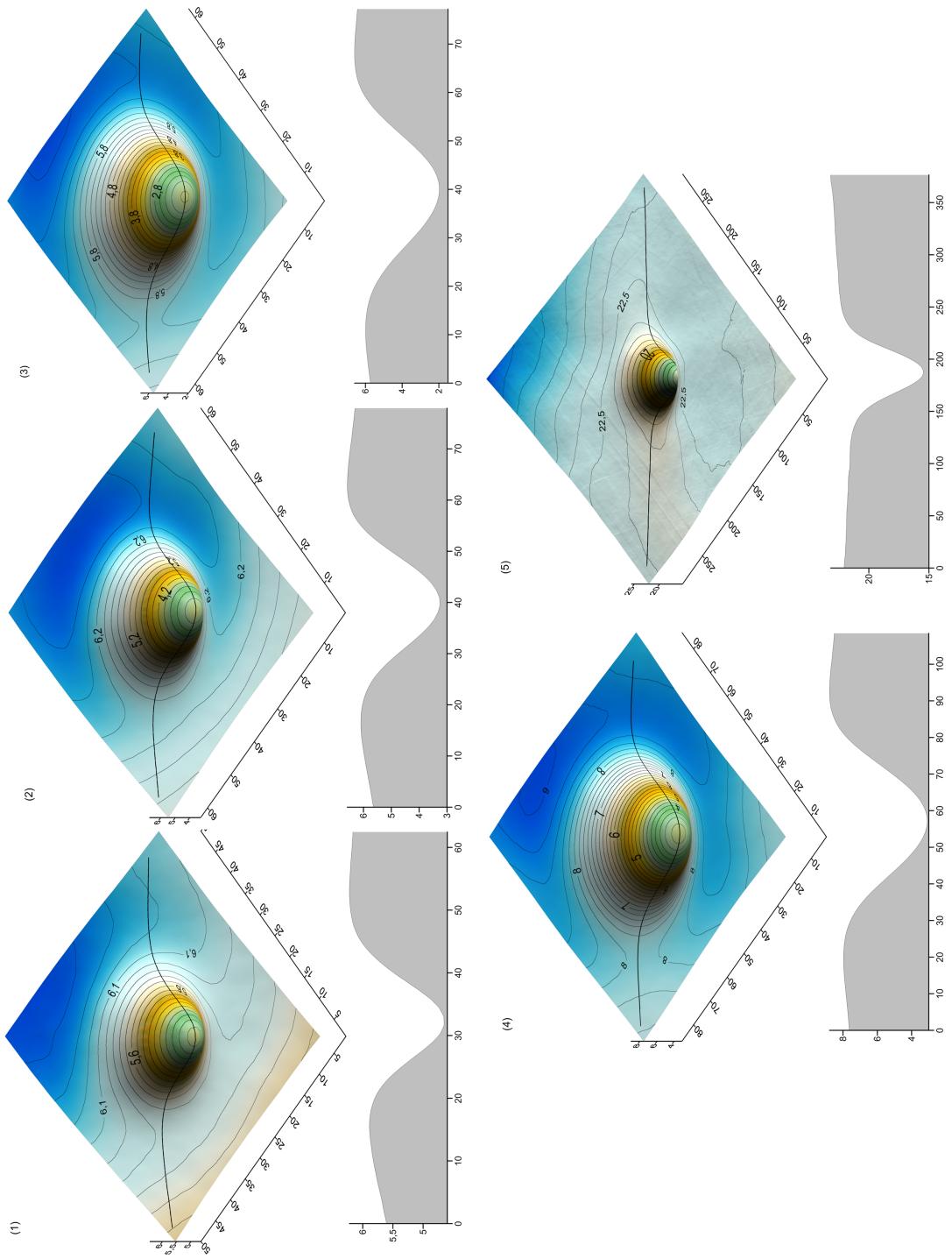


Slika 2.3: Povprečje 8687 realnih vrtač z območja Menišije, pred povprečjem so bile vrtače raztegnjene na velikost največje v setu.

Na prvi pogled se zdijo dobljeni profili gaussove oblike (2.1), kar ne zbuja nujno zaupanja v metodo. Zdi pa se, da so oblike simetrične po kotu, torej lahko problem reduciramo na študij njihovih profilov.

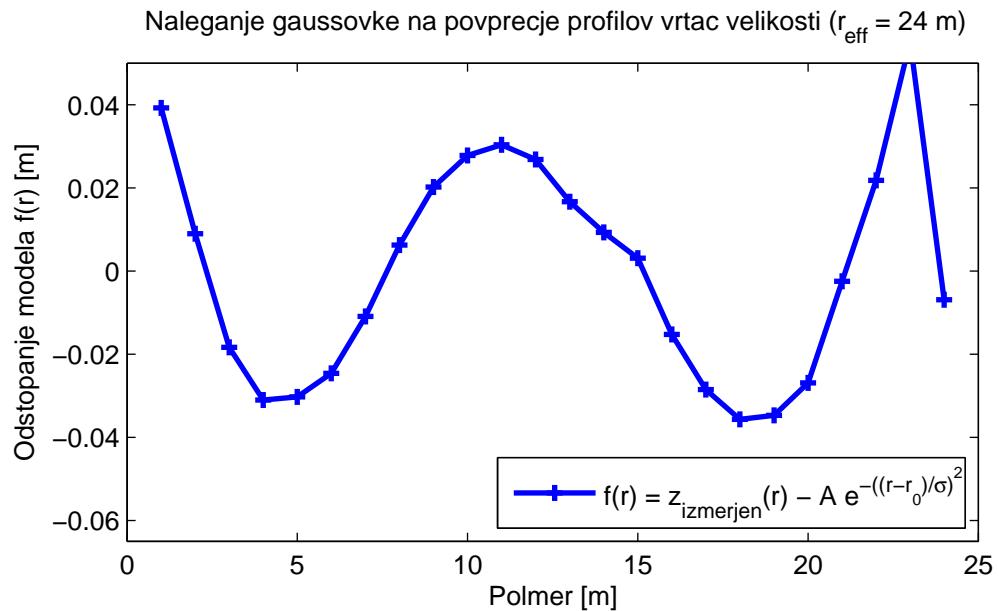
$$f(x, y) = A \cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\sigma_x^2} - \frac{(y-y_0)^2}{\sigma_y^2}} + B \cdot x + C \cdot y + D \quad (2.1)$$

Rezultat uporabimo tako, da gaussovo funkcijo nalegamo na realne vrtače in tako dobimo dobre lokacije njihovih najnižjih točk, ter njihove σ_x in σ_y .



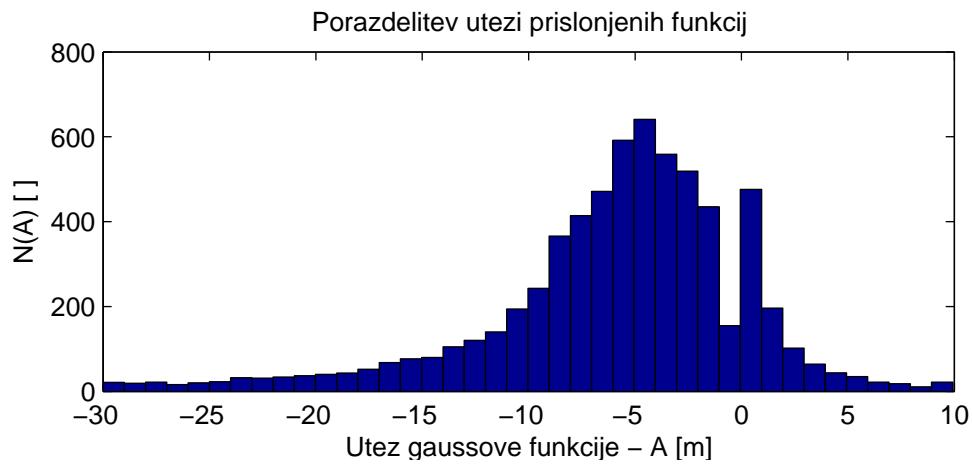
Slika 2.4: Vrtače po velikosti razdelimo v pet razredov (najmanjša petina gre v prvi razred, itn.) in jih znotraj razredov povprečimo.

Z lokacijami najnižjih točk lahko izračunamo povprečne profile vrtač ($z(r)$), ki imajo enake efektivne polmere, npr. (Slika 2.5).

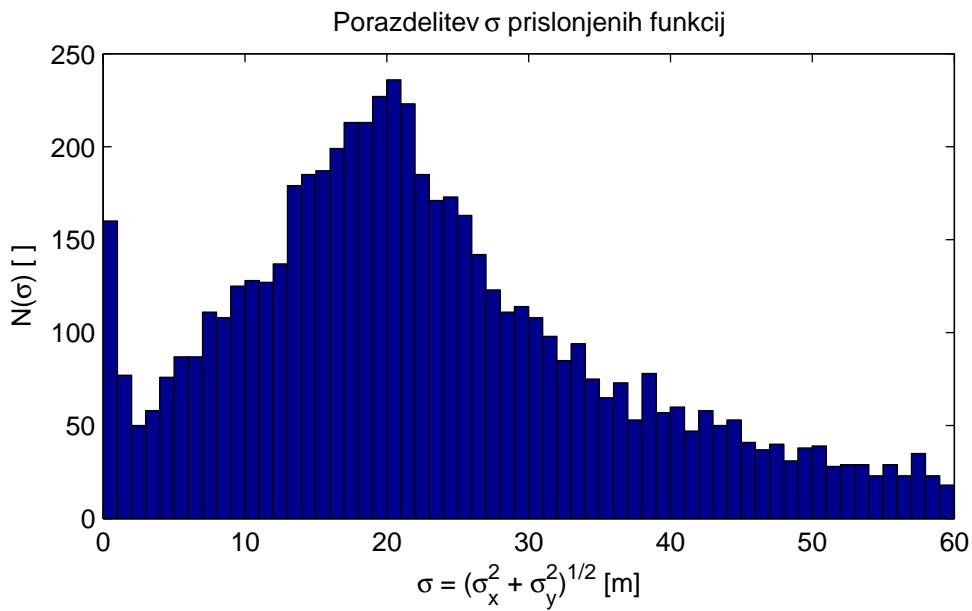


Slika 2.5: Povprečje profilov vrtač z efektivnimi polmeri med 23,5m in 24,5m. Prilegamo gaussovko (2.2). Graf prikazuje razliko med povprečnim profilom in prilegano gausovko.

Pri tem pa je porazdelitev uteži gaussove funkcije (Slika 2.6), porazdelitev σ pa (Slika 2.7).



Slika 2.6: Porazdelitev uteži A za gaussovo funkcijo prilegano na vrtače v Menišiji



Slika 2.7: Porazdelitev uteži σ za gaussovo funkcijo prilegano na vrtače v Menišiji

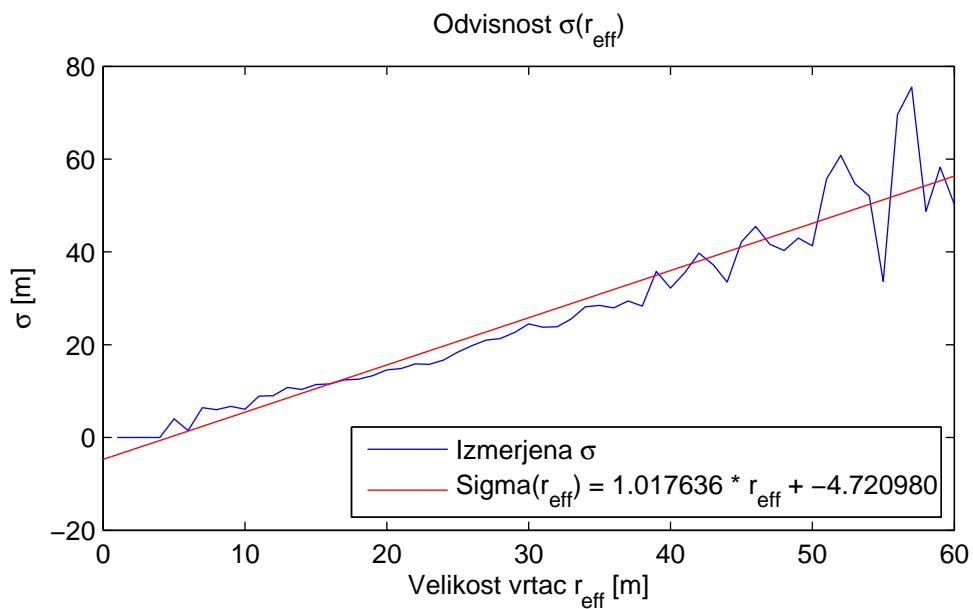
Če na dobljene profile nalegamo eksponentno krivuljo (2.2) in izrišemo

odvisnost $\sigma_x(r_{eff})$, vidimo (Slika 2.8).

$$f(r) = A \cdot e^{-\frac{(r-r_0)^2}{\sigma^2}} + C \quad (2.2)$$

Odvisnost $\sigma_x(r_{eff})$ je iz naših podatkov težko določiti, zaenkrat poskusimo z linearno funkcijo (2.3)

$$\sigma(r_{eff}) = k \cdot r_{eff} + C \quad (2.3)$$



Slika 2.8: σ s polmerom narašča

Na podlagi teh podatkov bi težko sklenili, da (2.2) opiše profil idealne vrtače, a ujemanje je dobro in ga bomo uporabili za analitično modeliranje.

Poglavlje 3

Analitično modeliranje vrtač

3.1 Stohastična rast površin

Za opis področja vrtač uporabimo analogijo z rastjo vmesnikov - npr. nabiranjem vodnega kamna - le da tu nebo raste v apnenčasto podlago. Po [Bar95] v poglavju (3.1) povzamemo definicije potrebne za opis takega procesa. Povprečna višina površja je definirana kot 3.1, kjer je $h(i, t)$ višina stolpca i ob času t .

$$\bar{h} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L h(i, t) \quad (3.1)$$

Če je hitrost usedanja delcev konstantna, se povprečna višina povečuje linearno s časom $\bar{h}(t) \sim t$.

Širino vmesnika, ki poda hrapavost vmesnika, definiramo s standardnim odklonom višine vmesnika od povprečne višine:

$$w(L, t) = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (h(i, t) - \bar{h}(t))^2} \quad (3.2)$$

(3.2) spremljamo v času, da lahko kvantitativno podamo hrapavost površine. Po definiciji začnemo z ravnim vmesnikom in širino 0. V začetku ($t \ll t_x$) se nam širina povečuje eksponentno s časom:

$$w(L, t) \sim t^\beta \quad (3.3)$$

kjer je β eksponent rasti, ki poda časovno dinamiko hrapavosti. Po dolgem času ($t \gg t_x$) širina vmesnika preide v zasičeni režim, v katerem se eksponentna rast ustavi in doseže zasičeno vrednost w_{sat} , ki je odvisna od velikosti sistema L takole:

$$w_{sat}(L) \sim L^\alpha \quad (3.4)$$

Eksponent α imenujemo eksponent hrapavosti, in nam poda hrapavost nasičenega vmesnika.

Prehodni čas t_x , okoli katerega vmesnik preide iz nezasičenega v zasičen režim, je odvisen od velikosti sistema in je približno:

$$t_x \sim L^z \quad (3.5)$$

kjer je z dinamični eksponent. Eksponenti α , β in z med seboj niso neodvisni. Izkaže se, da z izrisom $w(L, t)/w_{sat}(L)$ kot funkcije časa, dobimo krivulje, ki se zasitijo ob istem času, ne glede na velikost sistema L . Če izrišemo širino vmesnika kot funkcijo t/t_x , se bodo vse krivulje zasitile v isti točki. Zato sklepamo, da je $w(L, t)/w_{sat}(L)$ funkcija t/t_x , torej:

$$\frac{w(L, t)}{w_{sat}(L)} \sim f\left(\frac{t}{t_x}\right) \quad (3.6)$$

kjer je $f(u)$ funkcija skaliranja in če nadomestimo w_{sat} in t_x , dobimo Family-Vicsek skalirno relacijo:

$$w(L, t) \sim L^\alpha f\left(\frac{t}{L^z}\right) \quad (3.7)$$

Za $f(u)$ velja:

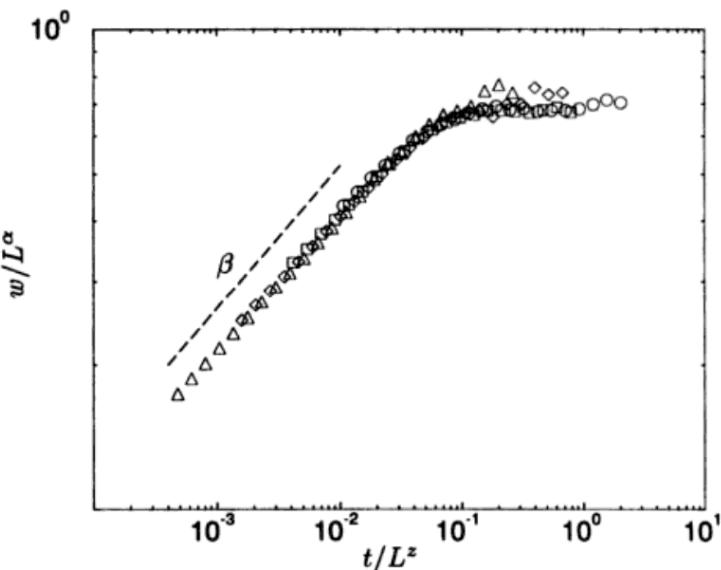
$$f(u) \propto \begin{cases} u^\beta & u \ll 1 \\ 1 & u \gg 1 \end{cases}$$

Če sedaj izrišemo več različnih razvojev površja na en graf ((Slika 3.1) iz [Bar95]), dobimo jasnejšo predstavo o funkciji skaliranja. Če se točki

$(t_x, w(t_x))$ približamo z leve, vidimo, da po (3.3) velja $w(t_x) \sim t_x^\beta$. Hkrati pa, da če se isti točki približujemo z desne po (3.4) velja $w(t_x) \sim L^\alpha$. Torej $t_x^\beta \sim L^\alpha$ in po (3.5) sledi zakon o skaliranju:

$$z = \frac{\alpha}{\beta} \quad (3.8)$$

Figure 2.6 The BD simulations of Fig. 2.4 rescaled according to (2.8). The obtained curve is in fact the scaling function $f(u)$, with the properties (2.9) and (2.10). The different symbols correspond to runs with different system sizes $L = 100$ (\circ), $L = 200$ (\square), $L = 400$ (\diamond), and $L = 800$ (\triangle). The slope of the dashed line is β .



Slika 3.1: Simulirane vrednosti širine vmesnika pri naključnem usedanju, za različne velikosti vmesnika [Bar95]

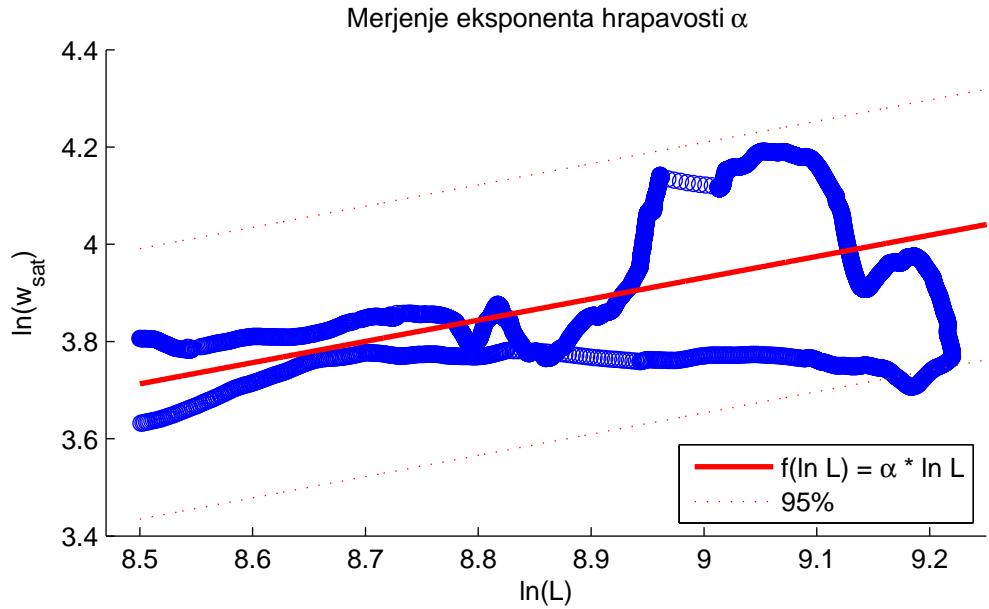
3.2 Merjenje eksponenta hrapavosti

Zvezo (3.4) predelamo v $w_{sat} = C \cdot L^\alpha$ in dobimo:

$$\alpha = \frac{\partial(\ln(w_{sat}))}{\partial(\ln L)} \quad (3.9)$$

Na Lidar modelu Menišije uporabljenem v (Poglavlje 2) izračunamo \bar{w}_{sat} za vmesnike, kjer je L med 5 in 10 km. Širine vmesnikov w nato narišemo v odvisnosti od velikosti vmesnika L .

Dobimo graf (Slika 3.2) s katega odberemo, da je $\alpha = 0.4368 \pm 0.0005$.



Slika 3.2: Prileganje premice $f(\ln(L)) = \alpha \cdot x$ h krivulji $\ln(w_{sat}(\ln(L)))$ nam poda eksponent hrapavosti

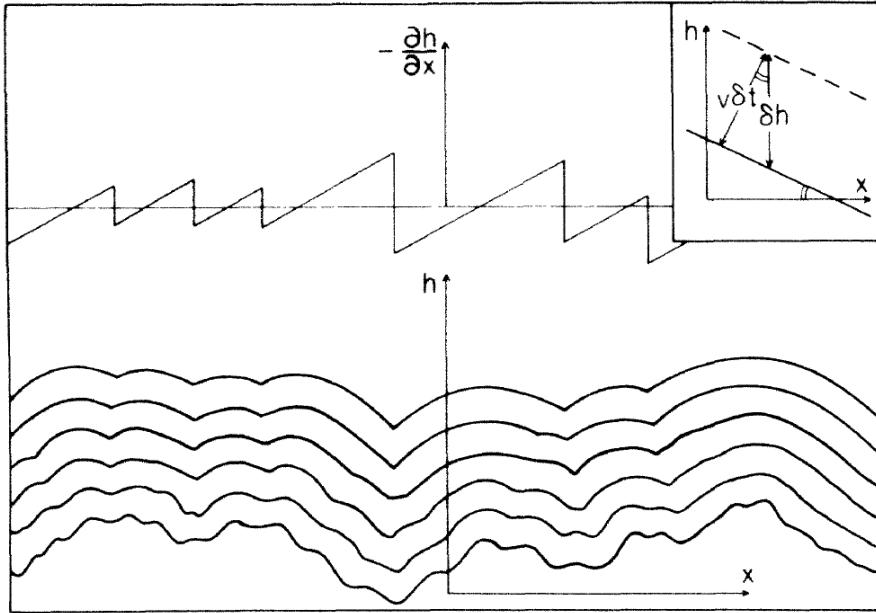
3.3 Model Kardar-Parisi-Zhang

Za modeliranje procesa nastanka vrtač lahko vzamemo, da kamnina razpada stohastično kot $\eta(\mathbf{x}, t)$, ki je bel Gaussov šum, za katerega velja: $\langle \eta(\mathbf{x}, t) \rangle = 0$ in

$$\langle \eta(\mathbf{x}, t) \eta(\mathbf{x}', t') \rangle = 2D\delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{x}')(t - t')$$

Ko se del kamnine raztopi, pomaknemo površino površja v smeri normalne (Slika 3.3), torej se površje v smeri osi h v času δt pomakne za $\delta h = \sqrt{(v\delta t)^2 + (v\delta t \nabla h)^2}$. Če je $|\nabla h| \ll 1$, dobimo:

$$\dot{h} = v\sqrt{1 + (\nabla h)^2} \simeq v + \frac{v}{2}(\nabla h)^2 + \dots$$



Slika 3.3: Zapooredni profili deterministične rasti, priraščanje v smeri normale površja je prikazano desno zgoraj

To nam da člen $\frac{\lambda}{2}(\nabla h)^2$.

Vzamemo, da zaradi počasnosti procesa prihaja do difuzije površja in dodamo člen $\nu\nabla^2 h$.

Sestavljeni nam ti členi dajo Kardar-Parisi-Zhang enačbo ([KPZ86]):

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nu\nabla^2 h + \frac{\lambda}{2}(\nabla h)^2 + \eta(\mathbf{x}, t) \quad (3.10)$$

Vzamemo nastavek:

$$h(\mathbf{x}, t) = \frac{2\nu}{\lambda} \log(Z(\mathbf{x}, t))$$

in dobimo stohastično difuzijsko enačbo:

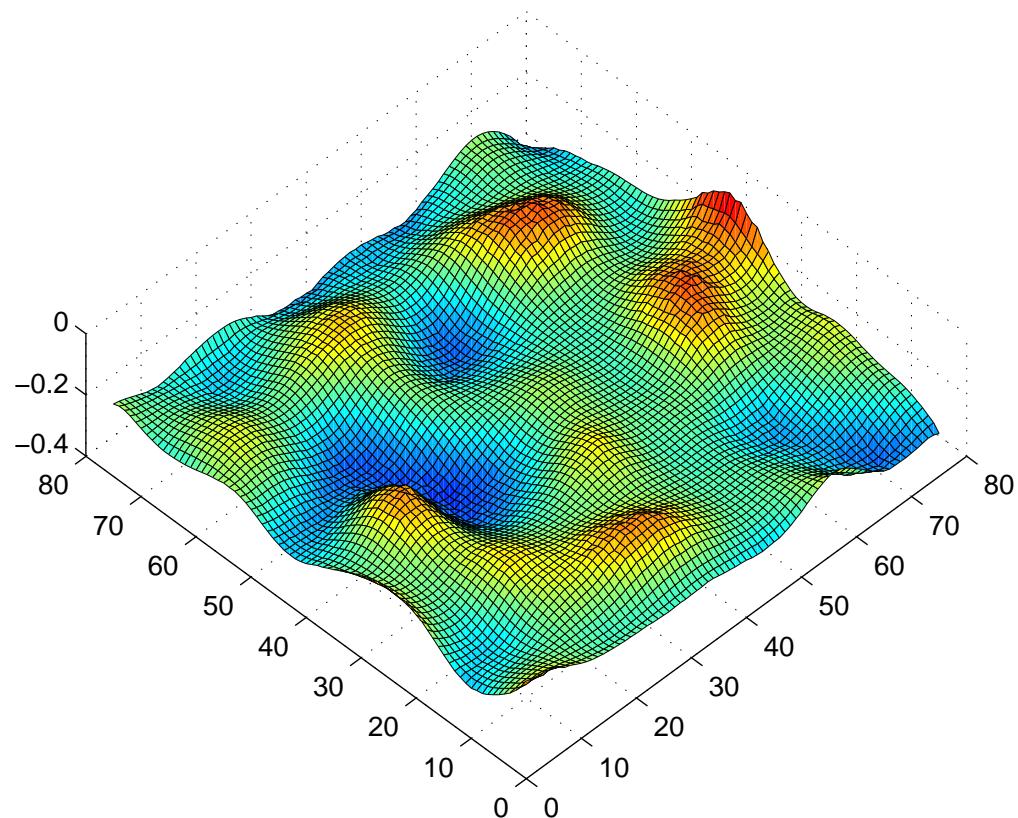
$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \nu\nabla^2 Z + \frac{\lambda}{2\nu}\eta(\mathbf{x}, t)Z$$

katere rešitev je:

$$h(\mathbf{x}, t) = \frac{2\nu}{\lambda} \ln \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^d\xi}{(4\pi\nu t)^{d/2}} \cdot \exp\left[-\frac{(x - \xi)^2}{4\nu t} + \frac{\lambda}{2\nu}h_0(\xi)\right] \right)$$

[KPZ86] nato v fourierovem prostoru s prostim propagatorjem in pogojem za beli šum perturbativno rešijo (3.10). Končno pokažejo, da za stohastično priraščanje površja velja: $z = \frac{3}{2}$ in $\alpha = \frac{1}{2}$. To se relativno dobro ujema z $\alpha = 0.4368 \pm 0.0005$ namerjenim v (Poglavlje 3.2).

Če simuliramo stohastično rast površja, opazimo, da je končno stanje površja modela precej stabilno, a ne ravnovesno in precej odvisno od začetnih pogojev. Oblike, ki na površju nastanejo, so si med seboj podobne po obliki in velikosti. (Slika 3.4) je primer tako simuliranega površja.



Slika 3.4: Numerična simulacija po Kardar-Parisi-Zhang enačbi razvijajočega se površja po 10^5 korakih

3.4 Deterministično modeliranje dinamike vrtač

Za modeliranje posamezne vrtače stohastični procesi niso primerni, zato si za opis pogledamo difuzijsko enačbo (3.11) z različnimi variacijami člena za rast $F(h)$ (3.12). Izbor enačb je povzet po [KU10].

$$\frac{\partial h(t, x)}{\partial t} = D\Delta h(t, x) + F(h) \quad (3.11)$$

$$F(h) = \begin{cases} a \cdot h \\ h \cdot (1 - \frac{h}{K}) \\ (K - h) \\ h \cdot a_0 e^{-at} \end{cases} \quad (3.12)$$

Predpostavimo torej, da se model difuzijsko izravnava, hkrati pa nanj deluje nek proces, ki višinsko razliko povečuje. Poiskali bomo rešitve teh enačb in komentirali njihovo časovno dinamiko. Vzeli bomo sledeče robne pogoje:

$$h(0, x) = u_0, x \in D$$

$$h(t, x) = 0, x \in \partial D$$

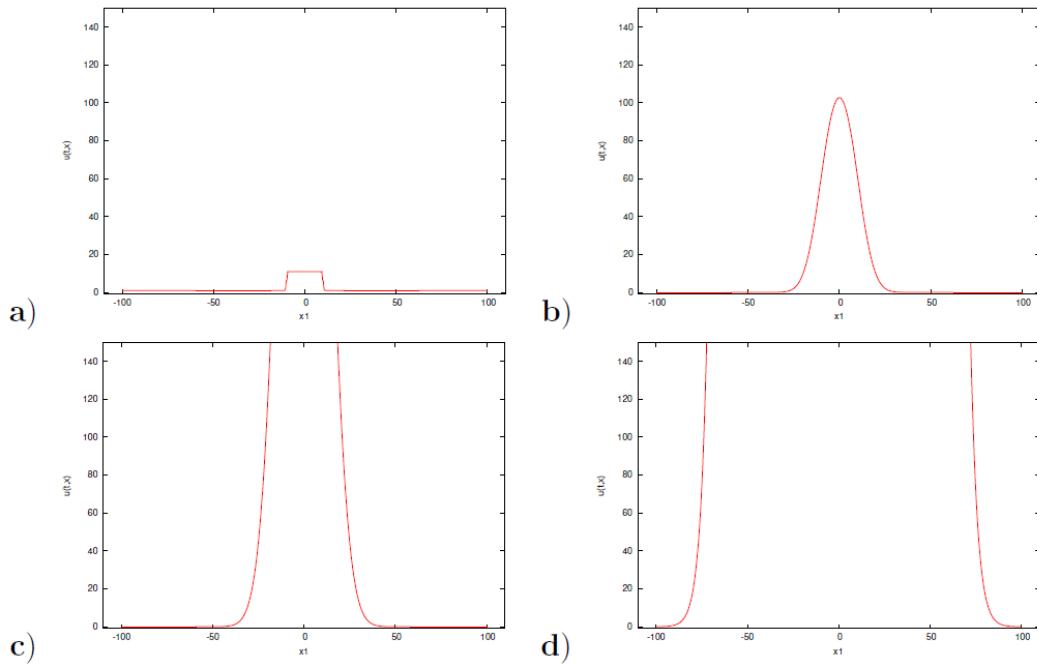
$$\frac{\partial h(t, x)}{\partial n} = 0, x \in \partial D$$

3.4.1 Eksponentna rast

Če izberemo $F(h) = a \cdot h$, dobimo:

$$\frac{\partial h(t, x)}{\partial t} = D\Delta h(t, x) + a \cdot h(t, x) \quad (3.13)$$

Tak sistem nam da eksponentno rast, kot prikazano na (Slika 3.13).



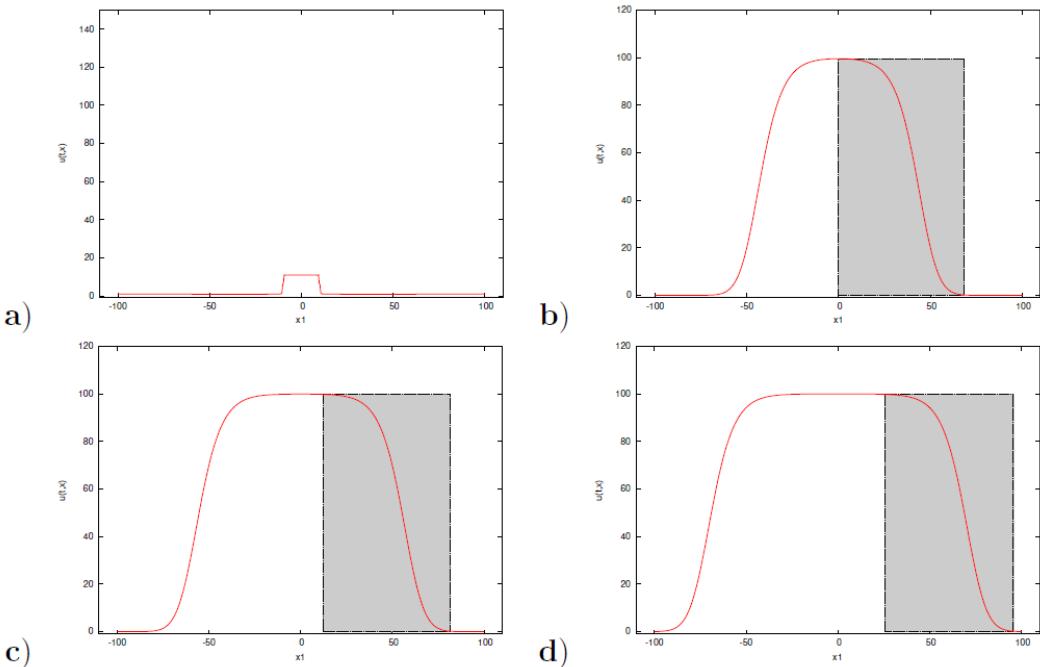
Slika 3.5: Vzeli smo $D = 10$, $a = 1$ in majno začetno porazdelitev, ki povzroči začetek rasti - slika a) [KU10]

Eksponentna rast za vrtače ni primeren model, saj je v naravi ne opazimo.

3.4.2 Logistična rast

Če izberemo $F(h) = h \cdot (1 - \frac{h}{K})$, dobimo:

$$\frac{\partial h(t, x)}{\partial t} = D\Delta h(t, x) + h(t, x) \cdot \left(1 - \frac{h(t, x)}{K}\right) \quad (3.14)$$



Slika 3.6: Vzeli smo $D = 10$, $a = 1$, $K = 100$ in majno začetno porazdelitev, ki povzroči začetek rasti - slika a) [KU10]

Difuzivna logistična rast se zdi pri primerno izbranem faktorju K zanimiv model za dinamiko vrtač. Vidimo, da ko se pobočje vrtače enkrat oblikuje, ne spreminja več oblike, ampak potuje kot valovna fronta navzven (sivo območje na (Slika 3.6)). Pokažemo lahko, da je dolžina vala odvisna od difuzijske konstante D in faktorja rasti a , ter da velja:

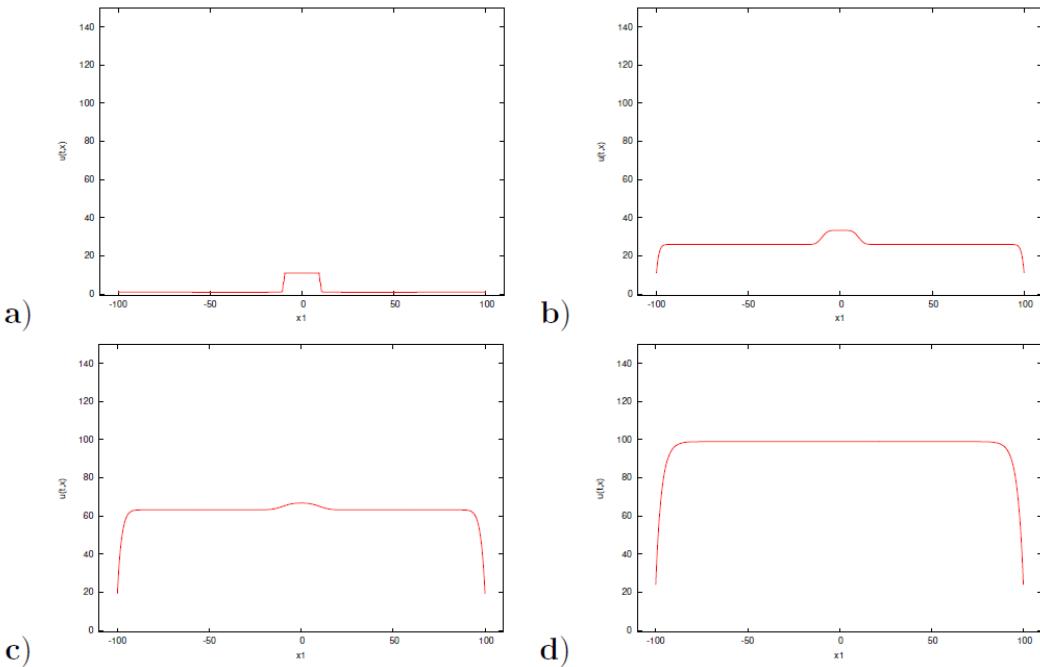
$$\lambda \sim \sqrt{D/a}$$

Iz te zveze lahko pokažemo tudi, da je hitrost takega vala $v = 2\sqrt{Da}$.

3.4.3 Omejena eksponentna rast

Če izberemo $F(h) = (K - h)$, dobimo:

$$\frac{\partial h(t, x)}{\partial t} = D\Delta h(t, x) + (K - h(t, x)) \quad (3.15)$$



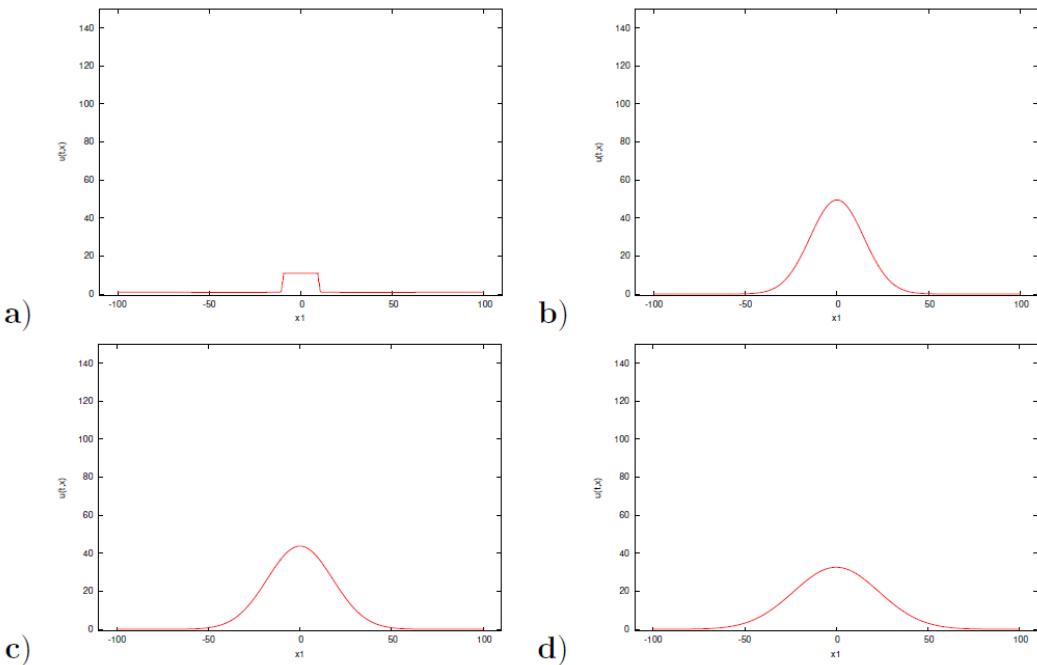
Slika 3.7: Vzeli smo $D = 10$, $a = 1$, $K = 100$ in majno začetno porazdelitev, ki povzroči začetek rasti - slika a) [KU10]

Tako dobljena rast eksponentno raste do praga K , kjer se zasiti. Rast v poljubni točki je neodvisna od stanja v sosednjih. Ta model se ne zdi najbolj primeren kandidat za dinamiko vrtač.

3.4.4 Gompertzova rast

Če izberemo $F(h) = h \cdot a_0 e^{-at}$, dobimo:

$$\frac{\partial h(t, x)}{\partial t} = D\Delta h(t, x) + h(t, x) \cdot a_0 e^{-at} \quad (3.16)$$



Slika 3.8: Vzeli smo $D = 10$, $a = 1$ in majno začetno porazdelitev, ki povzroči začetek rasti - slika a) [KU10]

Vidimo, da rast tokrat s časom upada. Tako profil najprej zraste, nato pa se difuzijsko izravna, ko difuzija prevlada. Model se zdi primeren, dopolniti pa bi ga bilo treba tako, da faktor za rast s časom ne bi popolnoma izginil.

Poglavlje 4

Zaključek

Izkaže se, da je zaznava in segmentacija vrtač na digitalnem modelu reliefa relativno enostavna naloga, izvedljiva na osebnem računalniku. Kodo, ki sem jo za ta postopek spisal, sem dokumentirano objavil na spletu in bo morda služila za obsežnejšo katalogizacijo vrtač. Za nekoliko težjo nalogo se izkaže določanje idealne oblike vrtače, saj le-ta ne obstaja. Pravo vprašanje bi se moralno glasiti, kakšna je idealna oblika vrtače na izotropni podlagi po dolgem času. Vseeno sem se odločil, da za idealno vrtačo vzamem povprečje velike količine vrtač. Precej zahtevnejša naloga je bila izbira fizikalnega modela in dinamičnega opisa vrtače zaradi omejene količine podatkov o časovni dinamiki (domnevali smo, da so vse vrtače že v ravnovesnem stanju) in nepoznavanja dejanskega procesa, ki znižuje površje.

Kardar-Parisi-Zhangova rast vmesnika nam da rezultat presenetljivo podoben kraškemu površju z vrtačami. Teoretično napovedan eksponent hrapavosti pa se relativno dobro ujema z izmerjenim na področju Menišije. Teh rezultatov ne moremo obravnavati kot dokaz, morda le vzpodbudo za nadaljni študij. V kolikor pa se model izkaže za pravilnega, pomeni spremembu v geomorfološkem kanonu, ki pravi, da se večina raztopljanja zgodi dlje od površja.

Za popolnejši študij in dober model vrtač bi verjetno potrebovali bolj poglobljene informacije o prsti, geoloških in bioloških dejavnikih, ki lahko

vplivajo na časovno dinamiko terena. Zanimiva ideja bi bila z geološkim študijem najti in datirati vrtače v različnih stopnjah razvoja ter s pomočjo te informacije oblikovati dinamičen nastavek, na podlagi katerega bi potem morda bolj osvetlili dinamično enačbo.

Literatura

- [Bar95] A-L Barabási. *Fractal concepts in surface growth.* Cambridge university press, 1995.
- [DY13] Daniel H. Doctor and John A. Young. An evaluation of automated gis tools for delineating karst sinkholes and closed depressions from 1-meter lidar-derived digital elevation data. *Proceedings of the Thirteenth Multidisciplinary Conference on Sinkholes and the Engineering and Environmental Impacts of Karst*, pages 449–458, 2013.
- [FW07] D.C. Ford and P.W. Williams. *Karst Hydrogeology and Geomorphology.* Wiley, 2007.
- [Gam66] Ivan Gams. Faktorji in dinamika korozije na karbonatnih kameninah slovenskega dinarskega in alpskega kraša. *Geografski vestnik*, 38:11–68, 1966.
- [KK94] Ivan Kuščer and Alojz Kodre. *Matematika v fiziki in tehniki.* Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana, 1994.
- [KPO⁺07] Andrej Kobler, Norbert Pfeifer, Peter Ogrinc, Ljupčo Todorovski, Krištof Oštir, and Sašo Džeroski. Repetitive interpolation: A robust algorithm for dtm generation from aerial laser scanner data in forested terrain. *Remote Sensing of Environment*, 2007.

- [KPZ86] Mehran Kardar, Giorgio Parisi, and Yi-Cheng Zhang. Dynamic scaling of growing interfaces. *Physical Review Letters*, 56(9):889, 1986.
- [KU10] A. Kandler and R. Unger. *Population Dispersal Via Diffusion-reaction Equations*. Preprint. Techn. Univ., Fak. für Mathematik, 2010.
- [LAK] Lidarski digitalni model reliefsa Menišije, izdelal Andrej Kobler, Gozdarski inštitut Slovenije.
- [PCV10] Placer, Celarc, and Vrabec. Osnove razumevanja tektonske zgradbe nw dinaridov in polotoka istre. *Geologija*, 53/1, 2010.
- [VMFL06] Vrabec, Marko, Fodor, and László. Late cenozoic tectonics of slovenia: Structural styles at the northeastern corner of the adriatic microplate. *The Adria Microplate: GPS Geodesy, Tectonics and Hazards*, 61:151–168, 2006.
- [ZF97] L. Zambo and D. C. Ford. Limestone dissolution processes in beke doline aggtelek national park, hungary. *Earth Surface Processes and Landforms*, 22(6):531–543, 1997.