

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
ODDELEK ZA FIZIKO
UNIVERZITETNI ŠTUDIJ, NARAVOSLOVNA SMER

Rok Mihevc

Kraške vrtače Dinarskega krasa

DIPLOMSKO DELO

MENTOR: prof. dr. Rudolf Podgornik

Ljubljana, 2014

IZJAVA O AVTORSTVU DIPLOMSKEGA DELA

Spodaj podpisani Rok Mihevc, z vpisno številko **28030017**, sem avtor diplomskega dela z naslovom:

Kraške vrtače Dinarskega krasa

S svojim podpisom zagotavljam, da:

- sem diplomsko delo izdelal samostojno pod mentorstvom prof. dr. Rudolfa Podgornika,
- so elektronska oblika diplomskega dela, naslov (slov., angl.), povzetek (slov., angl.) ter ključne besede (slov., angl.) identični s tiskano obliko diplomskega dela

V Ljubljani, dne . februarja 2014

Podpis avtorja:

Kazalo

Povzetek

Abstract

1	Uvod	1
2	Preučevanje realnih vrtač	5
3	Analitično modeliranje vrtač	13
3.1	Rast površin	13
3.2	Deterministično modeliranje dinamike vrtač	18
4	Zaključek	21

Povzetek

Z numeričnimi metodami obdelamo 60km^2 velik digitalni model reliefsa Menišije ločljivosti 1m^2 in identificiramo veliko število kraških vrtač. Iz oblik velikega števila vrtač izračunamo povprečno obliko vrtače in jo analitično opišemo z gaussovo funkcijo. Odkrite realne vrtače nato prilegamo na gaussovo funkcijo, ter pogledamo porazdelitev parametrov le-te na našem vzorcu.

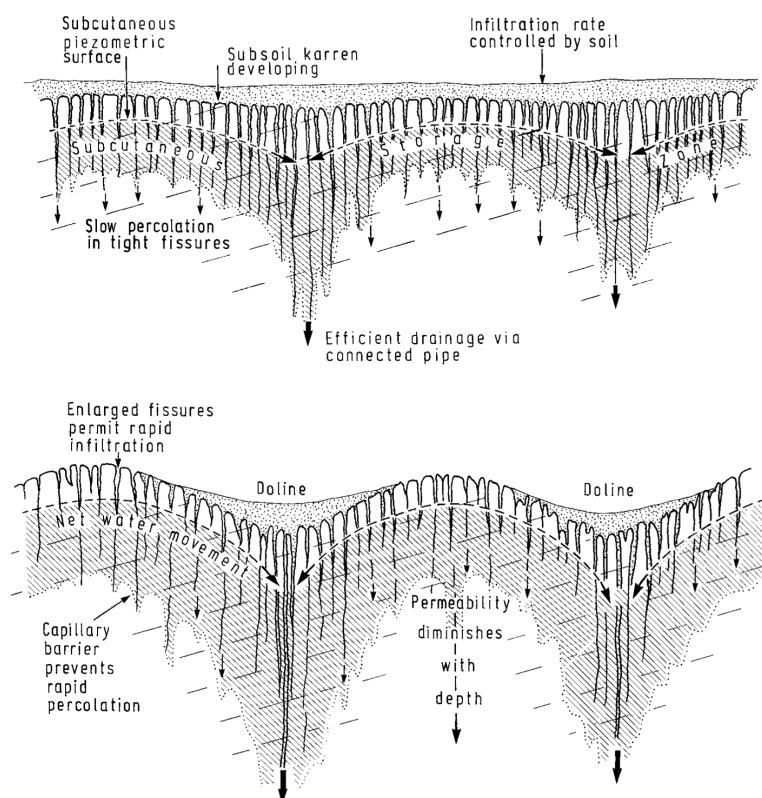
Zaradi geološke zgodovine področja Menišije in medsebojne podobnosti vrtač na tem območju, postavimo tezo da jih je oblikoval isti geomorfološki proces, ki vodi do iste stabilne oblike, ki so jo vrtače na tem območju že dosegle. S pomočjo podatkov pridobljenih v prvem delu naloge predlagamo časovno statičen nastavek, ki analitično opisuje najdene vrtače. Postavimo tezo, da vrtače nastanejo z difuzijo in predlagamo dinamičen nastavek za obliko vrtače in difuzijsko konstanto, ki rešita difuzijsko enačbo.

Abstract

Abstract

Poglavlje 1

Uvod



Slika 1.1: Priljubljena geomorfološka shema za razlago vrtač. Vir: [FW07]

Namen tega dela je na podlagi digitalnega modela reliefa dokumentirati in statistično preučiti velik vzorec realnih kraških vrtač na slovenskem Dinarskem krasu, predlagati analitično funkcijo, ki bi opisala idealno vrtačo, ter na podlagi le-te poiskusiti modelirati naravne procese, ki povzročajo nastanek in obliko vrtač.

Vrtače so zaobljene lijakaste globeli, globine nekaj metrov in premera nekaj deset metrov. Obstaja več geomorfoloških modelov njihovega nastanka.

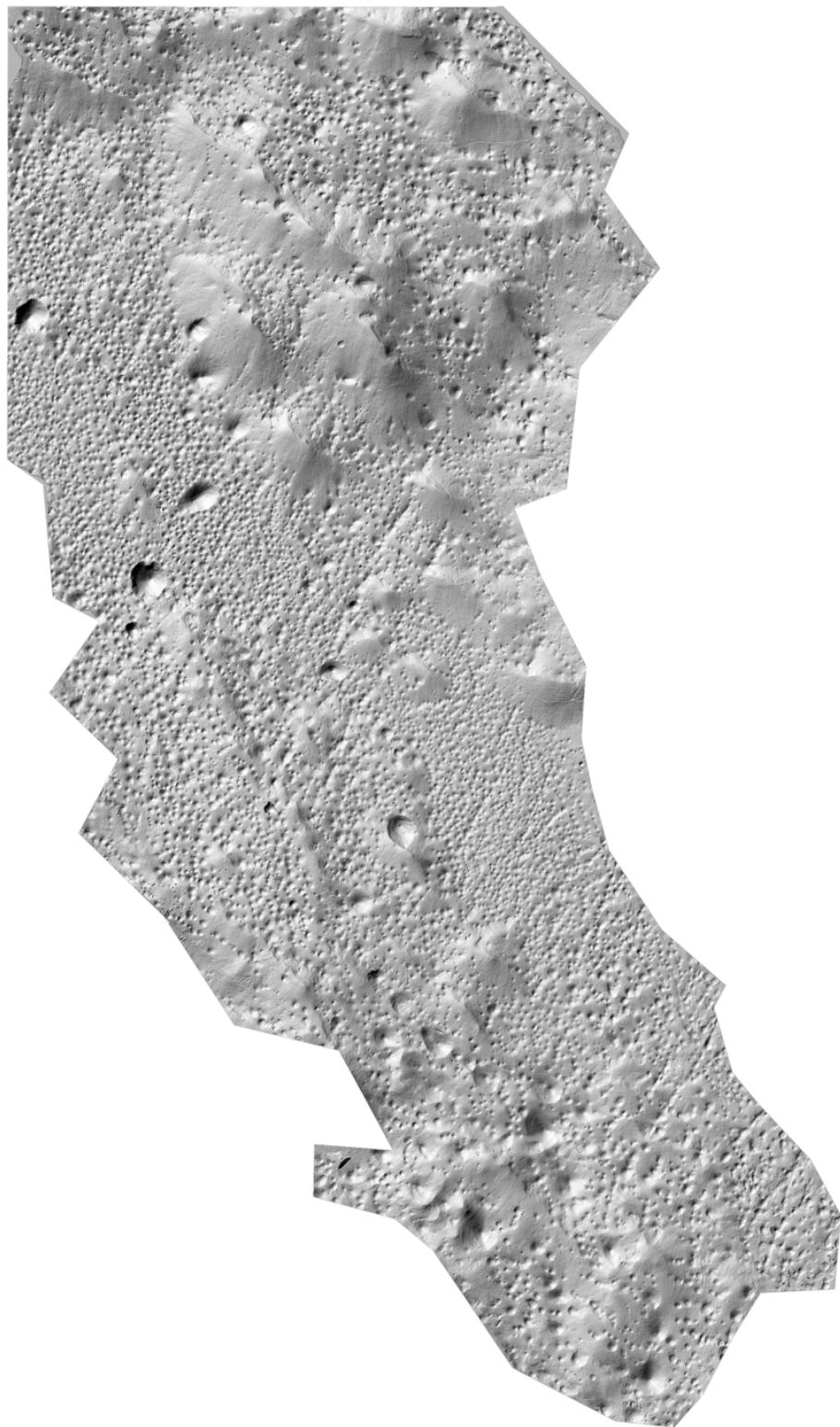
Za študij realnih vrtač uporabimo digitalni model reliefa Menišije (Slika 1.2) ločljivosti 1m, ki omogoča zanesljivo identifikacijo in študij vrtač ter udornic (Slika 1.3).



Slika 1.2: Menišija, 60km^2 veliko območje med Cerknicico in Logatcem vsebuje nekaj tisoč vrtač in več udornic in predstavlja približno odstotek slovenskega krasa. Vir: Geopedia, Geodetski inštitut Slovenije

Površje Menišije sestavlja plasti krednega apnenca (starost nastanka 135-65 miljonov let), ki so na površje prišli zaradi dogodkov povezanih s podrivanjem Adriatske plošče (17-7 miljonov let). Menišija je bila uravnano

kraško polje do 3.5 miljona let pred sedanjostjo, ko se je zaradi tektonske aktivnosti dvignila nad okolico in vzpostavljeni so bili hidrološki pogoji za nastanek vrtač. Hitrost zniževanja (denudacije) kraškega površja se ocenjuje na 20-50 m / miljon let, torej se je površje Menišije v času od nastanka znižalo za 70-175m, hkrati pa so se v njem pojavile vrtače, udornice in brezstrope jame. [VMFL06] [PCV10]

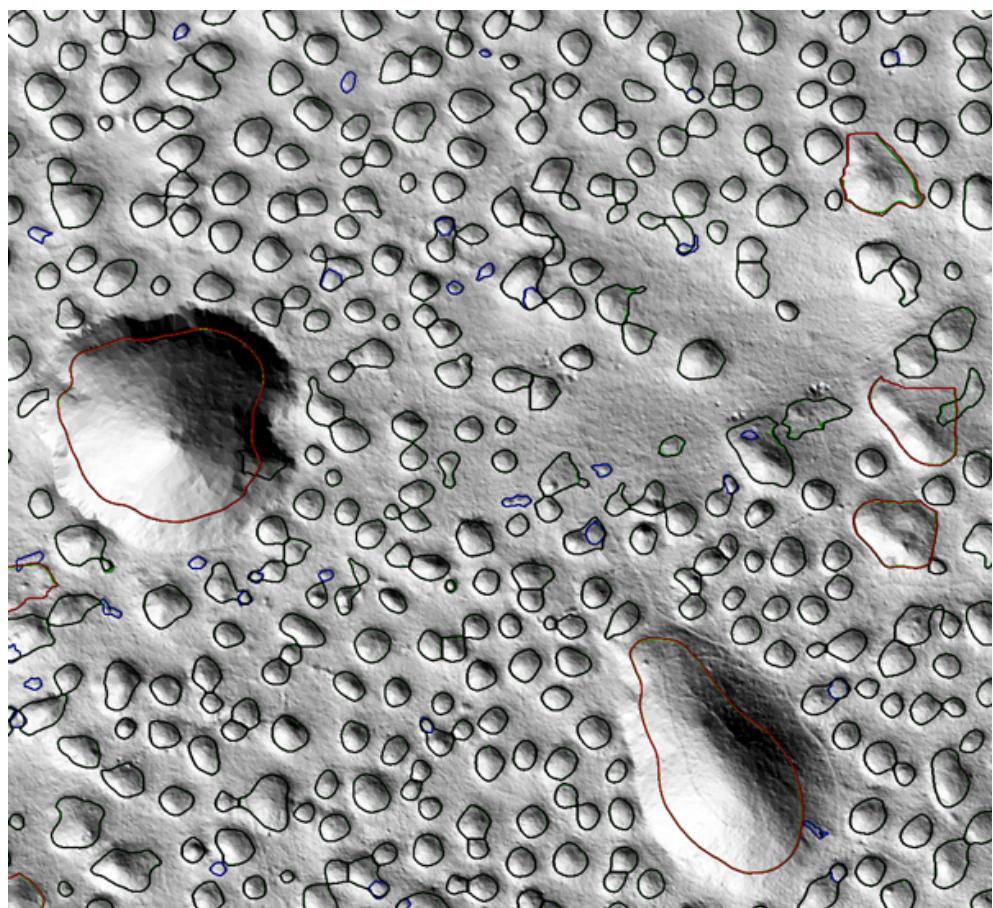


Slika 1.3: Senčen 3D relief dela Menišije uporabljen v tej nalogi. Vir: Geodetski inštitut Slovenije [LAK] po metodi [KPO⁺07].

Poglavlje 2

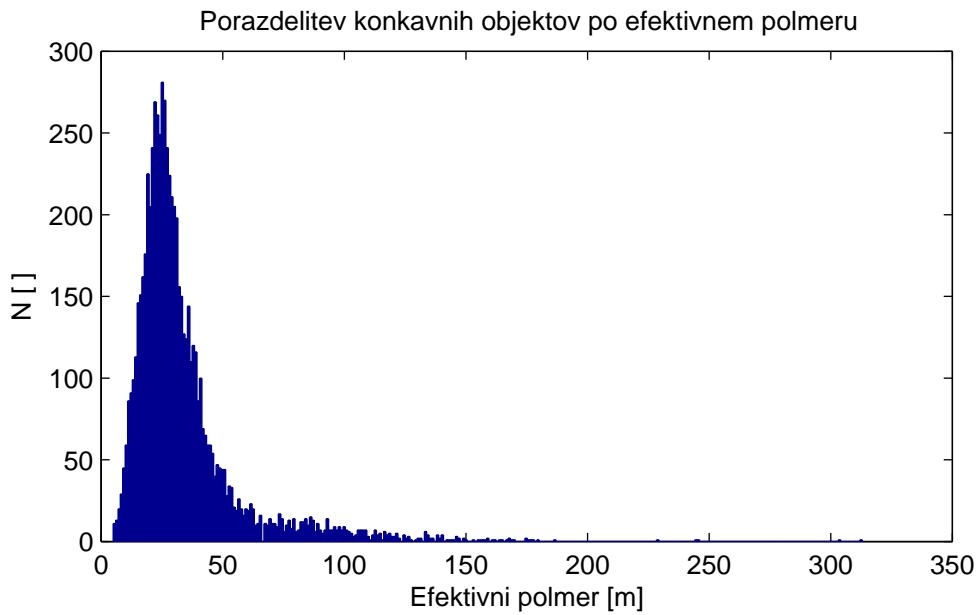
Preučevanje realnih vrtač

Identifikacijo velike količine objektov se lotimo s segmentacijo po konkavnosti, kot predlaga [DY13]. Točke, ki so nižje od svoje okolice imajo nižji indeks konkavnosti, točke višje od svoje okolice pa višjega. Pri tem je pomembna tudi pametna izbiro okolice - od nje je odvisno kako velike konkavnosti bomo zaznali. Končno zavržemo konveksne dele površja in konkavne odberemo kot vrtače. Rezultat vidimo na sliki 2.1. Opaziti velja, da izbrana metoda segmentacije del robov konkavnih objektov klasificira kot konkavne in zato podcenii radij. Za naše namene to ni pretirano moteče, saj to podcenitev zlahka kompenziramo kasneje.



Slika 2.1: Del od 8687 zaznanih konkavnih objektov na območju Menišije.
Poleg vrtač so na sliki vidne tudi udornice.

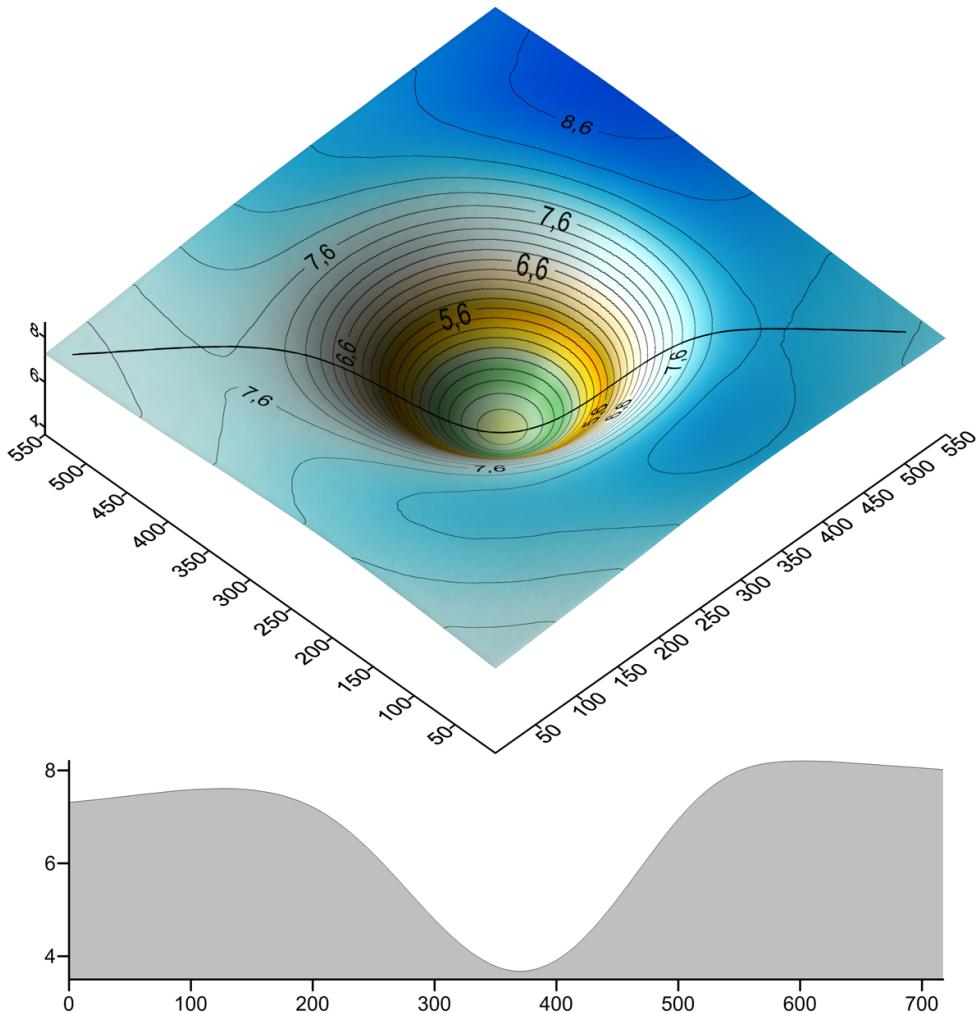
Najdeni konkavni objekti imajo porazdelitev efektivnih polmerov ($r_{eff} = \sqrt{\frac{A_{eff}}{\pi}}$),
kot vidno na sliki 2.2.



Slika 2.2: Polmeri konkavnih objektov v Menišiji, vrh pade v razred od 24m do 25m

To daje slutiti, da bodisi obstaja ravnovesna velikost vrtače, h kateri konvergirajo vse konkavne oblike v območju ne glede na njihov nastanek, bodisi da so vsi konkavni objekti v tem območju nastali v kratkem časovnem obdobju in se razvijali z enako hitrostjo. Odločimo se za raziskovanje prve možnosti. Predvidevamo torej, da obstaja ravnovesna oblika vrtače, ki bi se pojavila na idelani podlagi, če bi preteklo dovolj časa.

Posamezne realne vrtače zaradi lokalnih pogojev in zgodovine razvoja reliefa niso simetrične, a zdi se, da so si med seboj podobne. Da bi ugotovili idealno obliko vrtače, izračunamo povprečje velikega števila realnih vrtač. Uporabimo dva pristopa - pri prvem (Slika 2.3) vrtače različnih velikosti raztegnemo in povprečimo, pri drugem (Slika 2.4) pa jih razdelimo v velikostne razrede in jih povprečimo znotraj le-teh.

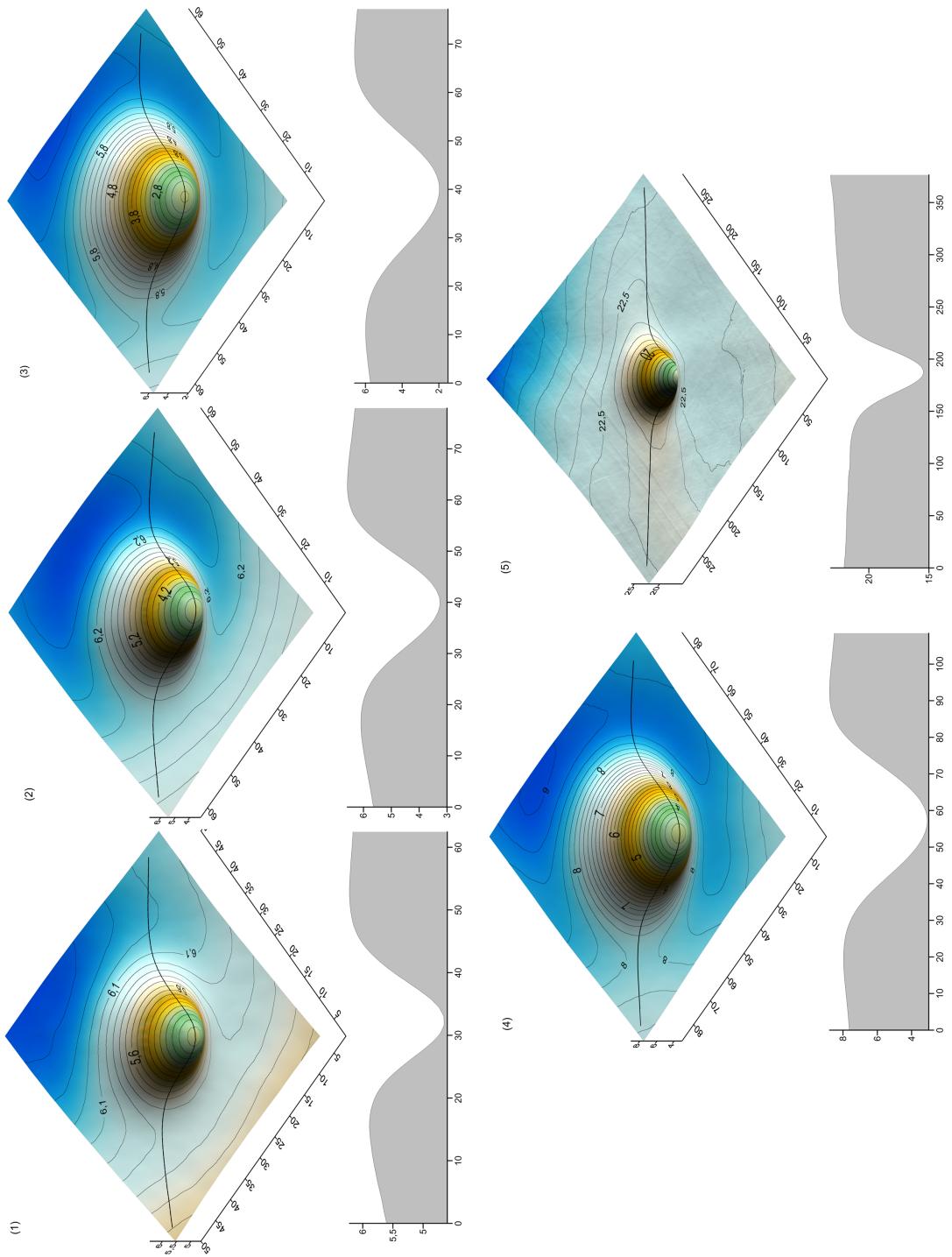


Slika 2.3: Povprečje 8687 realnih vrtač z območja Menišije, pred povprečjem so bile vrtače raztegnjene na velikost največje v setu.

Na prvi pogled se zdijo dobljeni profili gaussove oblike (2.1), kar ne zbuja nujno zaupanja v metodo. Zdi pa se, da so oblike simetrične po kotu, torej lahko problem reduciramo na študij njihovih profilov.

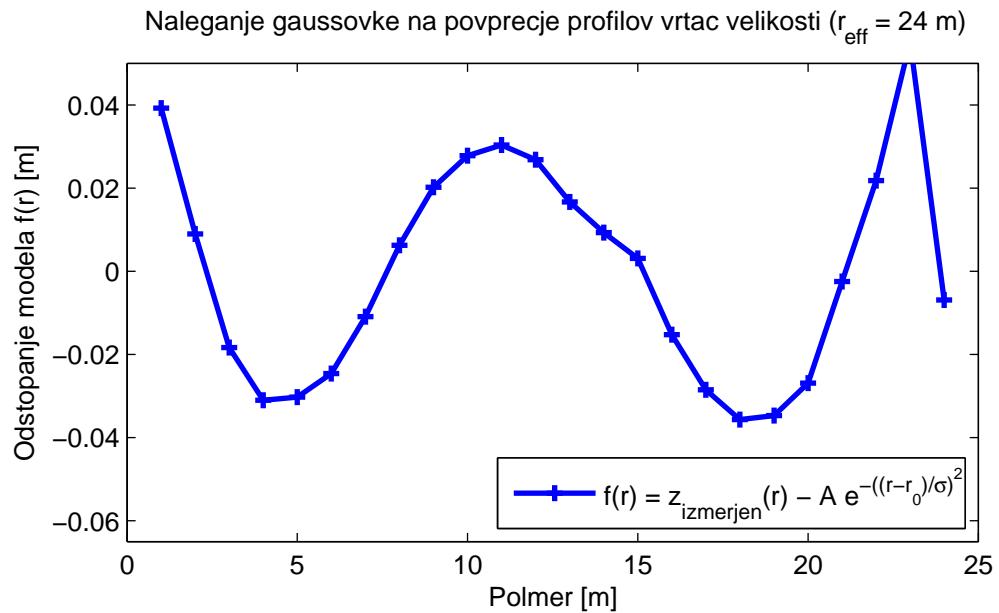
$$f(x, y) = A \cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\sigma_x^2} - \frac{(y-y_0)^2}{\sigma_y^2}} + B \cdot x + C \cdot y + D \quad (2.1)$$

Rezultat uporabimo tako, da gaussovo funkcijo nalegamo na realne vrtače in tako dobimo dobre lokacije njihovih najnižjih točk, ter njihove σ_x in σ_y .



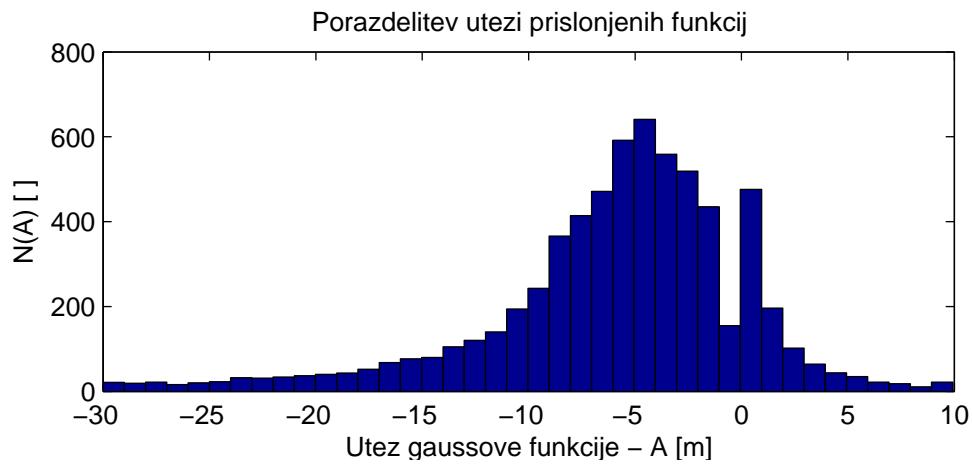
Slika 2.4: Vrtače po velikosti razdelimo v pet razredov (najmanjša petina gre v prvi razred, itn.), in jih znotraj razredov povprečimo.

Z lokacijami najnižjih točk lahko izračunamo povprečne profile vrtač ($z(r)$), ki imajo enake efektivne polmere, naprimer: Slika 2.5

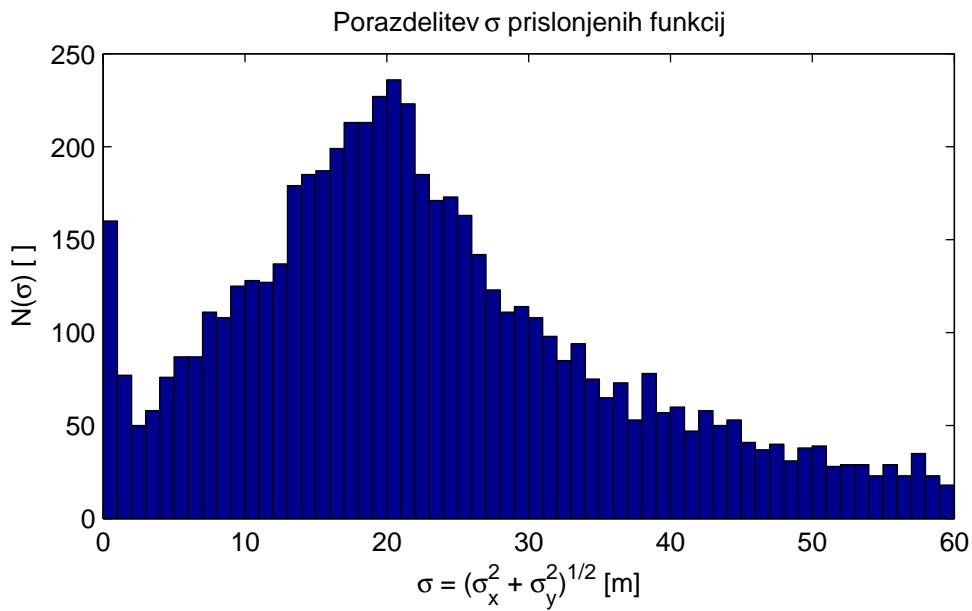


Slika 2.5: Povprecje profilov vrtač z efektivnimi polmeri med 23,5m in 24,5m. Prilegamo gaussovko (2.2). Graf prikazuje razliko med povprečnim profilom in prilegano gaussovko.

Pri tem pa je porazdelitev uteži gaussove funkcije Slika (2.6), porazdelitev σ pa Slika (2.7).



Slika 2.6: Porazdelitev uteži A za gaussovo funkcijo prilegano na vrtače v Menišiji



Slika 2.7: Porazdelitev uteži σ za gaussovo funkcijo prilegano na vrtače v Menišiji

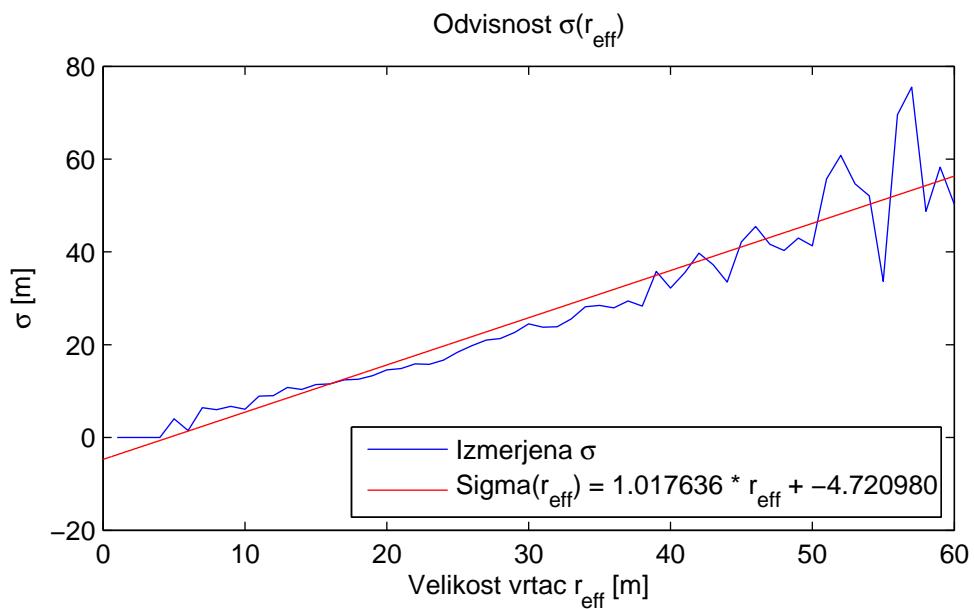
Če na dobljene profile nalegamo eksponentno krivuljo (2.2) in izrišemo

odvisnost $\sigma_x(r_{eff})$, vidimo (Slika 2.8).

$$f(r) = A \cdot e^{-\frac{(r-r_0)^2}{\sigma^2}} + C \quad (2.2)$$

Odvisnost $\sigma_x(r_{eff})$ je iz naših podatkov težko določiti, zaenkrat poskusimo z linearno funkcijo (2.3)

$$\sigma(r_{eff}) = k \cdot r_{eff} + C \quad (2.3)$$



Slika 2.8: σ s polmerom narašča

Na podlagi teh podatkov bi težko skleniti, da (2.2) opiše profil idealne vrtače, a ujemanje je dobro in ga bomo uporabili za analitično modeliranje.

Poglavlje 3

Analitično modeliranje vrtač

3.1 Rast površin

Za opis področja vrtač uporabimo analogijo z rastjo vmesnikov - npr. nabiranjem vodnega kamna - le da tu nebo raste v apnenčasto podlago. Po [Bar95] v poglavju (3.1.1) povzamemo definicije potrebne za opis takega procesa.

3.1.1 Definicije

Povprečna višina površja je definirana kot 3.1, kjer je $h(i, t)$ višina stolpca i ob času t .

$$\bar{h} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L h(i, t) \quad (3.1)$$

Če je hitrost usedanja delcev konstantna, se povprečna višina povečuje linearno s časom $\bar{h}(t) \sim t$

Širino vmesnika, ki poda hrapavost vmesnika definiramo s standardnim odklonom višine vmesnika od povprečne višine:

$$w(L, t) = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (h(i, t) - \bar{h}(t))^2} \quad (3.2)$$

(3.2) spremljamo v času, da lahko kvantitativno podamo hrapavost površine. Po definiciji začnemo z ravnim vmesnikom in širino 0. V začetku ($t \ll t_x$) se nam širina povečuje eksponentno s časom:

$$w(L, t) \sim t^\beta \quad (3.3)$$

Kjer je β eksponent rasti, ki poda časovno dinamiko hrapavosti. Po dolgem času ($t \gg t_x$) širina vmesnika preide v zasičeni režim, v katerem se eksponentna rast ustavi in doseže zasičeno vrednost w_{sat} , ki je odvisna od velikosti sistema L takole:

$$w_{sat}(L) \sim L^\alpha \quad (3.4)$$

Eksponent α imenujemo eksponent hrapavosti, in nam poda hrapavost nasičenega vmesnika.

Prehodni čas t_x , okoli katerega vmesnik preide iz nezasičenega v zasičen režim, je odvisen od velikosti sistema in je približno:

$$t_x \sim L^z \quad (3.5)$$

Kjer je z dinamični eksponent. Eksponenti α , β in z medseboj niso neodvisni. Izkaže se, da će izrišemo $w(L, t)/w_{sat}(L)$ kot funkcije časa, bomo dobili krivulje, ki se zasitijo ob istem času, neglede na velikost sistema L . In da će izrišemo širino vmesnika, kot funkcijo t/t_x , se bodo vse krivulje zasitile v isti točki. Zato sklepamo, da je $w(L, t)/w_{sat}(L)$ funkcija t/t_x , torej:

$$\frac{w(L, t)}{w_{sat}(L)} \sim f\left(\frac{t}{t_x}\right) \quad (3.6)$$

kjer je $f(u)$ funkcija skaliranja in će nadomestimo w_{sat} in t_x , dobimo Family-Vicsek skalirno relacijo:

$$w(L, t) \sim L^\alpha f\left(\frac{t}{L^z}\right) \quad (3.7)$$

Kjer za $f(u)$ velja:

$$f(u) \propto \begin{cases} u^\beta & u \ll 1 \\ 1 & u \gg 1 \end{cases}$$

Če sedaj izrišemo več različnih razvojev površja na en graf (SLIKA 2.6 iz [Bar95]), dobimo jasnejšo predstavo o funkciji skaliranja. Če se točki $(t_x, w(t_x))$ približamo z leve, vidimo, da po (3.3) velja $w(t_x) \sim t_x^\beta$. Hkrati pa, da če se isti točki približujemo z desne po (3.4) velja $w(t_x) \sim L^\alpha$. Torej $t_x^\beta \sim L^\alpha$ in po (3.5) sledi zakon o skaliraju:

$$z = \frac{\alpha}{\beta} \quad (3.8)$$

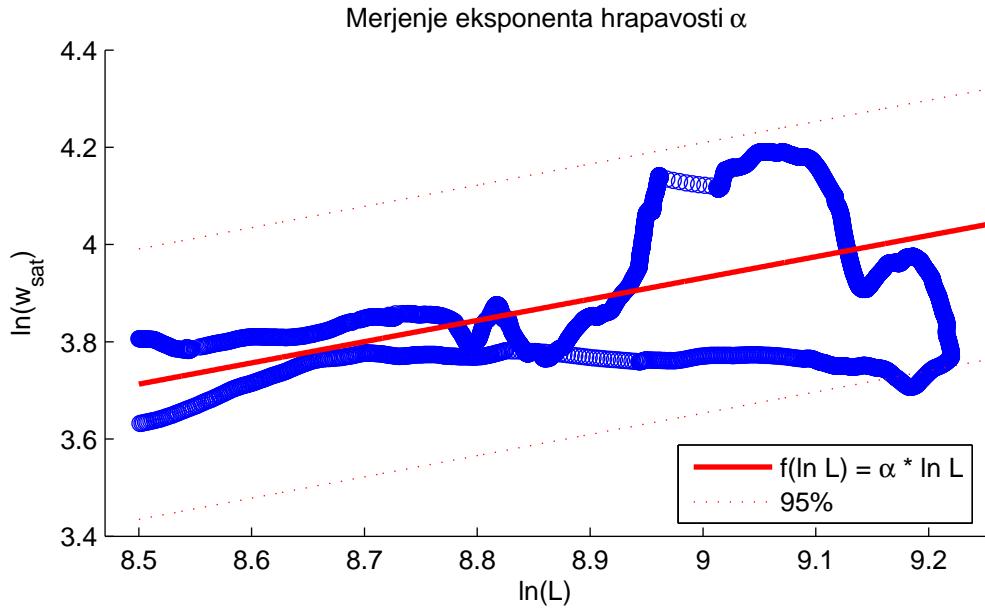
3.1.2 Merjenje eksponenta hrapavosti

Zvezo (3.4) predelamo v $w_{sat} = C \cdot L^\alpha$ in dobimo:

$$\alpha = \frac{\partial(\ln(w_{sat}))}{\partial(\ln L)} \quad (3.9)$$

Na Lidar modelu Menišije uporabljenem v (Poglavlje 2), izračunamo \bar{w}_{sat} za vmesnike, kjer je L med 5 in 10 km in jih narišemo v odvisnosti od velikosti vmesnika.

Dobimo graf (Slika 3.1), s katega odberemo, da je $\alpha = 0.4368 \pm 0.0005$



Slika 3.1: Prileganje premice $f(\ln(L)) = \alpha \cdot x$, k krivulji $\ln(w_{sat}(\ln(L)))$ nam da eksponent hrapavosti

3.1.3 Model Kardar-Parisi-Zhang

Za modeliranje procesa nastanka vrtač lahko vzamemo, da kamnina razpada stohastično, kot $\eta(\mathbf{x}, t)$, ki je bel Gaussov šum, za katerega velja: $\langle \eta(\mathbf{x}, t) \rangle = 0$ in

$$\langle \eta(\mathbf{x}, t)\eta(\mathbf{x}', t') \rangle = 2D\delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{x}')(t - t')$$

Ko se del kamnine raztopi, pomaknemo površino površja v smeri normalne (SLIKA), torej se površje v smeri osi h v času δt pomakne za $\delta h = \sqrt{(v\delta t)^2 + (v\delta t \nabla h)^2}$, če je $|\nabla h| \ll 1$ dobimo:

$$\dot{h} = v\sqrt{1 + (\nabla h)^2} \simeq v + \frac{v}{2}(\nabla h)^2 + \dots$$

To nam da člen $\frac{\lambda}{2}(\nabla h)^2$.

Vzamemo, da zaradi počasnosti procesa prihaja do difuzije površja in dodamo člen $\nu\nabla^2 h$.

Sestavljeni nam ti členi dajo Kardar-Parisi-Zhang enačbo ([KPZ86]):

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nu \nabla^2 h + \frac{\lambda}{2} (\nabla h)^2 + \eta(\mathbf{x}, t) \quad (3.10)$$

Vzamemo nastavek:

$$h(\mathbf{x}, t) = \frac{2\nu}{\lambda} \log(Z(\mathbf{x}, t))$$

in dobimo stohastično difuzijsko enačbo:

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \nu \nabla^2 Z + \frac{\lambda}{2\nu} \eta(\mathbf{x}, t) Z$$

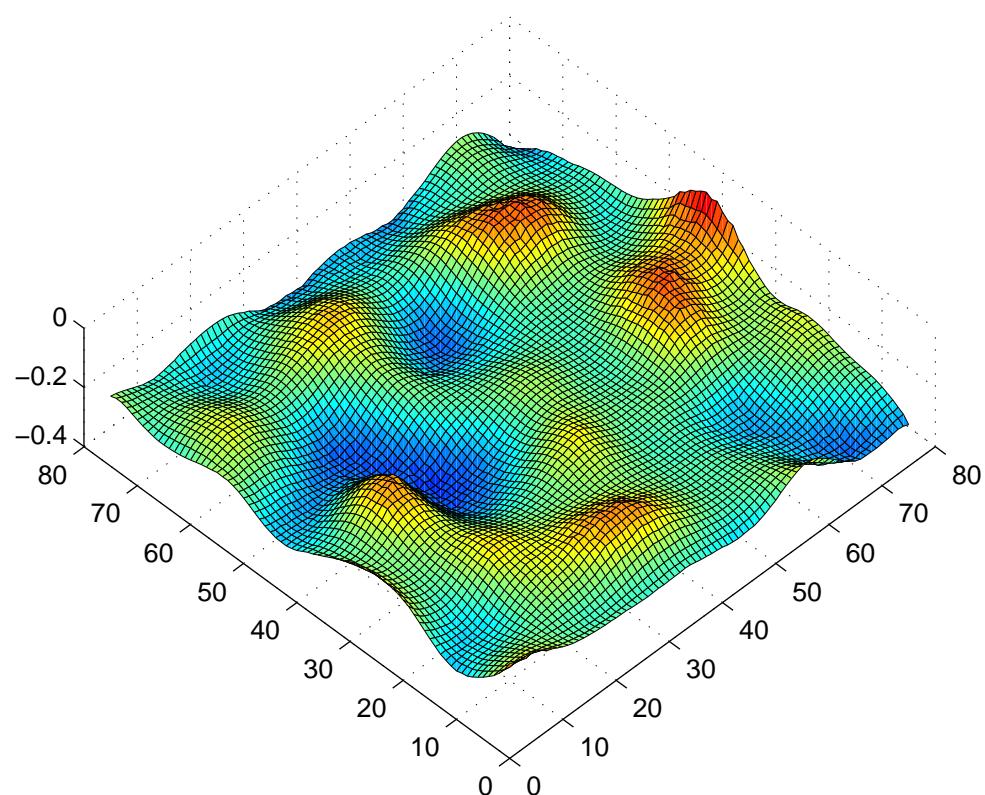
katere rešitev je:

$$h(\mathbf{x}, t) = \frac{2\nu}{\lambda} \ln \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^d \xi}{(4\pi\nu t)^{d/2}} \cdot \exp \left[-\frac{(x - \xi)^2}{4\nu t} + \frac{\lambda}{2\nu} h_0(\xi) \right] \right)$$

To nato zapišemo v furierovem prostoru in s prostim propagatorjem, ter pogojem za beli šum perturbativno rešimo (3.10). Od tod [KPZ86] pokažejo, da za velja: $z = \frac{3}{2}$ in $\alpha = \frac{1}{2}$. To se relativno dobro ujema z v (Poglavlje 3.1.2) namerjenim $\alpha = 0.4368 \pm 0.0005$.

3.1.4 Simulacija stohastične rasti površja

Če poskusimo simulirati stohastično rast površja, opazimo, da je končno stanje površja modela precej stabilno, a ne ravnovesno in precej odvisno od začetnih pogojev. Oblike, ki na površju nastanejo so si med seboj podobne po obliki in velikosti. Slika 3.2 je primer tako simuliranega površja.



Slika 3.2: Numerična simulacija po Kardar-Parisi-Zhang enačbi razvijajočega se površja po 10^5 korakih

3.2 Deterministično modeliranje dinamike vrtač

Za modeliranje posamezne vrtače stohastični procesi niso primerni, zato si za opis pogledamo difuzijsko enačbo (3.11) z različnimi variacijami člena za rast $F(h)$ (3.12). Izbor enačb povzet po [KU10].

$$\frac{\partial h(t, x)}{\partial t} = D \Delta h(t, x) + F(h) \quad (3.11)$$

$$F(h) = \begin{cases} a \cdot h \\ h \cdot (1 - \frac{h}{K}) \\ (K - h) \\ h \cdot a_0 e^{-at} \end{cases} \quad (3.12)$$

Predpostavimo torej, da se model difuzijsko izravnava, hkrati pa nanj deluje nek proces ki višinsko razliko povečuje. Poiskali bomo rešitve teh enačb in komentirali njihovo časovno dinamiko. Vzeli bomo sledeče robne pogoje:

$$h(0, x) = u_0, x \in D$$

$$h(t, x) = 0, x \in \partial D$$

$$\frac{\partial h(t, x)}{\partial n} = 0, x \in \partial D$$

3.2.1 Eksponentna rast

Če izberemo nastavek $F(h) = a \cdot h$ dobimo:

$$\frac{\partial h(t, x)}{\partial t} = D\Delta h(t, x) + a \cdot h(t, x) \quad (3.13)$$

3.2.2 Logistična rast

Če izberemo nastavek $F(h) = h \cdot (1 - \frac{h}{K})$ dobimo:

$$\frac{\partial h(t, x)}{\partial t} = D\Delta h(t, x) + h(t, x) \cdot (1 - \frac{h(t, x)}{K}) \quad (3.14)$$

3.2.3 Omejena eksponentna rast

Če izberemo nastavek $F(h) = (K - h)$ dobimo:

$$\frac{\partial h(t, x)}{\partial t} = D\Delta h(t, x) + (K - h(t, x)) \quad (3.15)$$

3.2.4 Gompertzova rast

Če izberemo nastavek $F(h) = h \cdot a_0 e^{-at}$ dobimo:

$$\frac{\partial h(t, x)}{\partial t} = D\Delta h(t, x) + h(t, x) \cdot a_0 e^{-at} \quad (3.16)$$

Poglavlje 4

Zaključek

Izkaže se, da je zaznava in segmentacija vrtač na digitalnem modelu reliefu relativno enostavna naloga, izvedljiva na osebnem računalniku. Kodo, ki sem jo za ta postopek spisal, sem dokumentirano objavil na spletu in bo morda še služila za obsežnejšo katalogizacijo vrtač. Za nekoliko težjo nalogo se izkaže določanje idealne oblike vrtače, saj le-ta ne obstaja, in bi se moralo pravo vprašanje glasiti, kakšna je idealna oblika vrtače na izotropni podlagi po dolgem času. Vseeno sem se odločil, da za idealno vrtačo vzamem povprečje velike količine vrtač.

Precej zahtevnejša naloga je bila izbira fizikalnega modela in dinamičnega opisa vrtače. Najbolj primeren model se je zdela nelinearna difuzijska enačba s primerno izbrano difuzijsko konstanto, ki je omogočila rešitev z previdno izbranim dinamičnim nastavkom. Treba je priznati, da je taka rešitev krhka in verjetno vsaj delno napačna, a nam nakaže možnost, da je originalna teza o tem da so vrtače ravnovesne reštive lahko pravilna. Za popolnejši študij in dober model vrtač bi verjetno potrebovali bolj poglobljene informacije o prsti, geoloških in bioloških dejavnikih, ki lahko vplivajo na časovno dinamiko terena. Zanimiva ideja bi bila z geološkim študijem najti vrtače v različnih stopnjah razvoja in s pomočjo te informacije oblikovati dinamičen nastavek, na podlagi katerega bi potem morda bolj osvetlili dinamično enačbo.

Literatura

- [Bar95] A-L Barabási. *Fractal concepts in surface growth.* Cambridge university press, 1995.
- [DY13] Daniel H. Doctor and John A. Young. An evaluation of automated gis tools for delineating karst sinkholes and closed depressions from 1-meter lidar-derived digital elevation data. *Proceedings of the Thirteenth Multidisciplinary Conference on Sinkholes and the Engineering and Environmental Impacts of Karst*, pages 449–458, 2013.
- [FTV08] Cyril Fleurant, GE Tucker, and HA Viles. Modelling cockpit karst landforms. *Geological Society, London, Special Publications*, 296(1):47–62, 2008.
- [FW07] D.C. Ford and P.W. Williams. *Karst Hydrogeology and Geomorphology.* Wiley, 2007.
- [Gam66] Ivan Gams. Faktorji in dinamika korozije na karbonatnih kameninah slovenskega dinarskega in alpskega kraša. *Geografski vestnik*, 38:11–68, 1966.
- [HDNF01] Arjun M. Heimsath, William E. Dietrich, Kunihiko Nishiizumi, and Robert C. Finkel. Stochastic processes of soil production and transport: erosion rates, topographic variation and cosmogenic nuclides in the oregon coast range. *Earth Surface Processes and Landforms*, 26:531–552, 2001.

- [KK94] Ivan Kuščer and Alojz Kodre. *Matematika v fiziki in tehniki*. Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana, 1994.
- [KPO⁺07] Andrej Kobler, Norbert Pfeifer, Peter Ogrinc, Ljupčo Todorovski, Krištof Oštir, and Sašo Džeroski. Repetitive interpolation: A robust algorithm for dtm generation from aerial laser scanner data in forested terrain. *Remote Sensing of Environment*, 2007.
- [KPZ86] Mehran Kardar, Giorgio Parisi, and Yi-Cheng Zhang. Dynamic scaling of growing interfaces. *Physical Review Letters*, 56(9):889, 1986.
- [KU10] A. Kandler and R. Unger. *Population Dispersal Via Diffusion-reaction Equations*. Preprint. Techn. Univ., Fak. für Mathematik, 2010.
- [LAK] Lidarski digitalni model reliefsa Menišije, izdelal Andrej Kobler, Gozdarski inštitut Slovenije.
- [PCV10] Placer, Celarc, and Vrabec. Osnove razumevanja tektonske zgradbe nw dinaridov in polotoka istre. *Geologija*, 53/1, 2010.
- [VMFL06] Vrabec, Marko, Fodor, and László. Late cenozoic tectonics of slovenia: Structural styles at the northeastern corner of the adriatic microplate. *The Adria Microplate: GPS Geodesy, Tectonics and Hazards*, 61:151–168, 2006.
- [ZF97] L. Zambo and D. C. Ford. Limestone dissolution processes in beke doline aggtelek national park, hungary. *Earth Surface Processes and Landforms*, 22(6):531–543, 1997.