

Vrtače Dinarskega krasa

Rok Mihevc

Mentor: prof. Rudolf Podgornik

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za *matematiko in fiziko*



Ljubljana, 2014

Pregled

Preučevanje realnih vrtač

Realne vrtače

LiDAR

Rast površin

Definicije

Rezultati

Modeliranje

Kardar-Parisi-Zhang

Dinamične enačbe

Difuzijsko dinamične enačbe

Kraške vrtače

So zaprte depresije



Jurišče, Slovenija (vir: A.M.)

Kraške vrtače

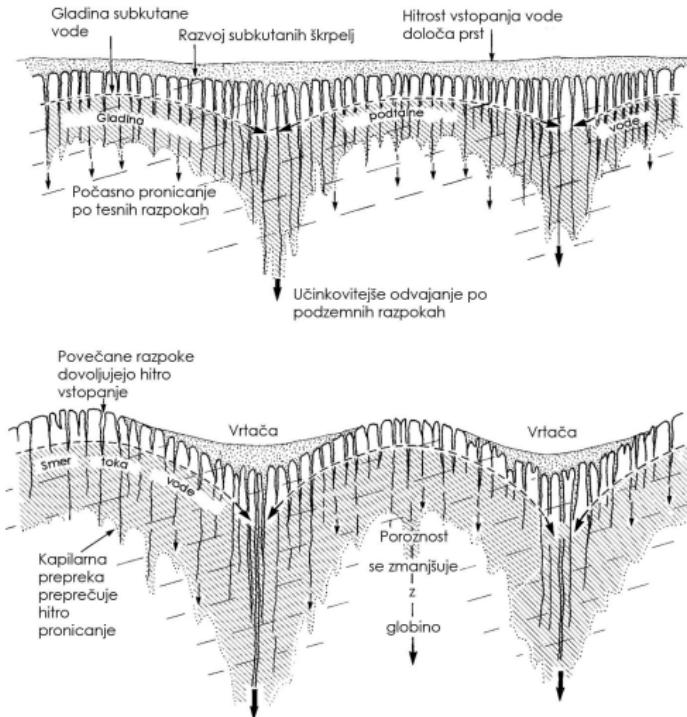
Najdemo jih na starih kraških poljih in planotah



Kapljuh, BiH (vir: A.M.)

Kraške vrtače

Ni podrobnejših študij procesov, ki jih oblikujejo



Vir: Ford, Williams, Karst Hydrogeology and Geomorphology



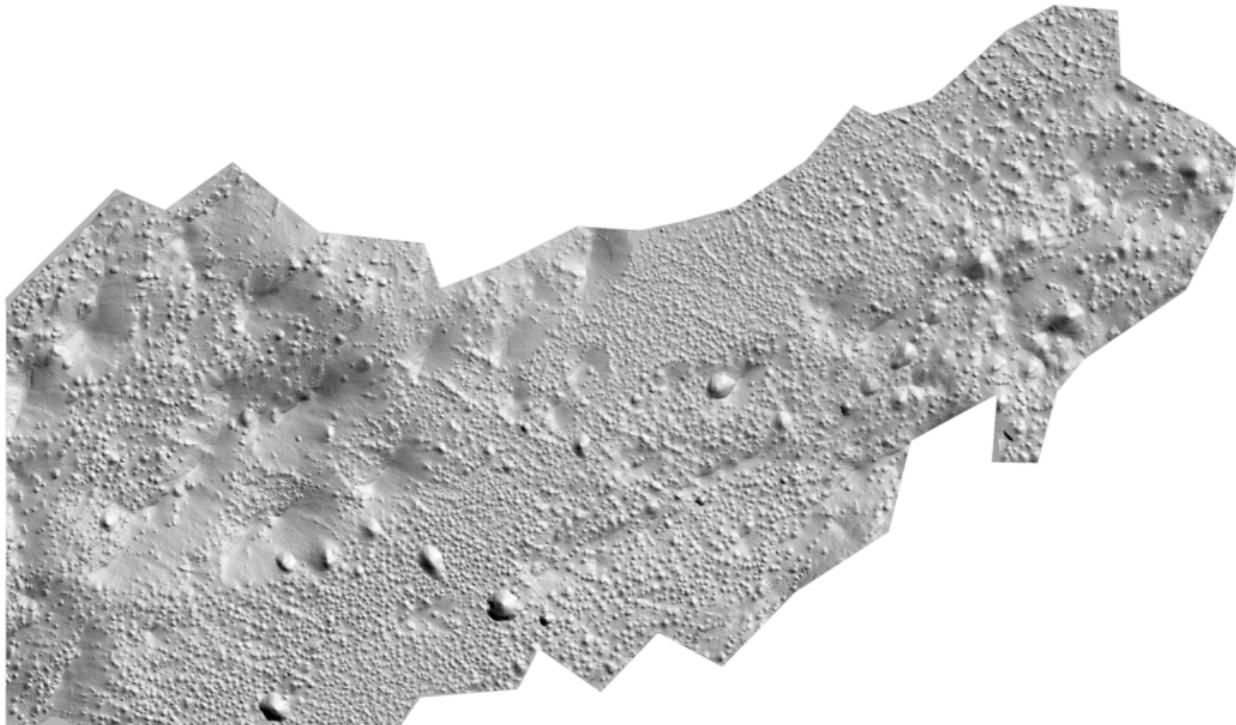
Vir: A.M

LiDAR

Posnetek območja Menišije, ločljivost $1m^2$

Površina $\approx 7km \times 14km$

Število vrtač ≈ 8700



Računalniški vid

Merjenje konkavnosti

617 616,8 616,7 616,5 616,4 616,3 616,1 615,9 615,7

616,7 616,5 616,3 616,1 616 615,8 615,6 615,4 615,2

616,4 616,1 615,9 615,7 615,5 615,3 615,1 614,9 614,8

616,1 615,8 615,6 615,3 615,1 615 614,7 614,4 614,2

615,8 615,6 615,4 615,1 614,8 614,6 614,3 614 613,7

615,6 615,3 615,1 614,8 614,5 614,2 614 613,6 613,3

615,4 615,1 614,8 614,7 614,3 613,8 613,6 613,3 612,9

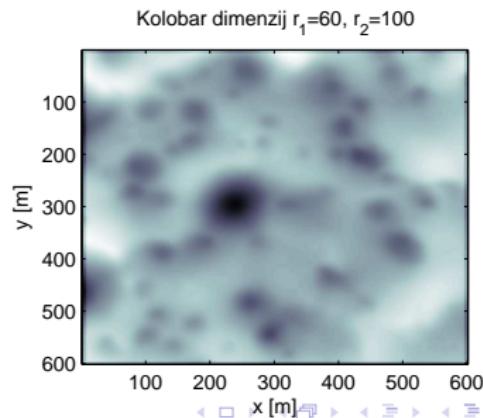
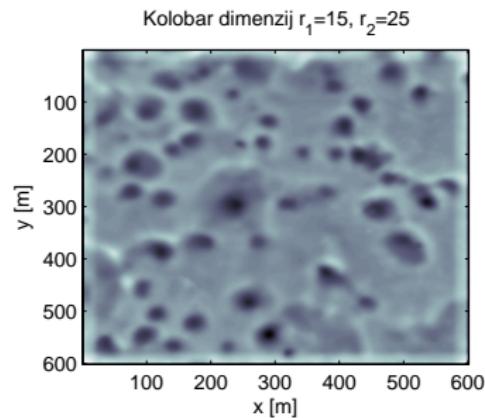
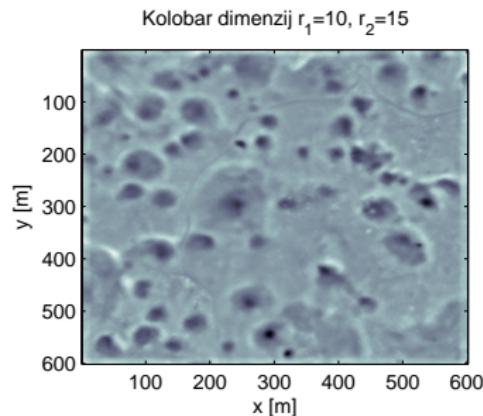
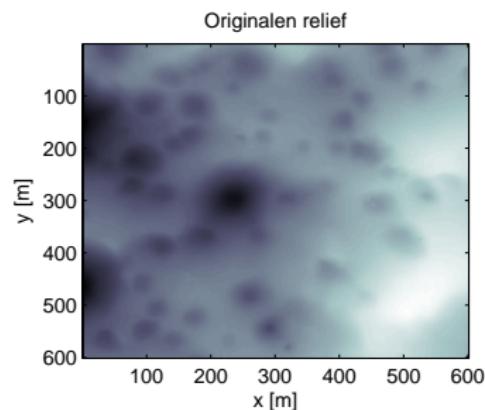
615,1 614,9 614,7 614,3 614 613,7 613,3 613 612,7

615 614,7 614,4 614 613,8 613,4 613,2 612,9 612,6

$$I_k(r_0, r_1, r_2) = h(r_0) - \frac{1}{N} \sum_{r_1 < r < r_2} h(r). \quad (1)$$

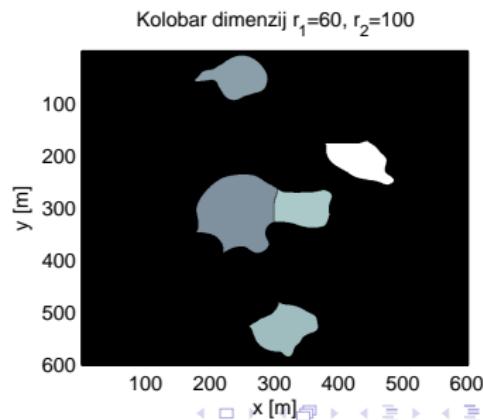
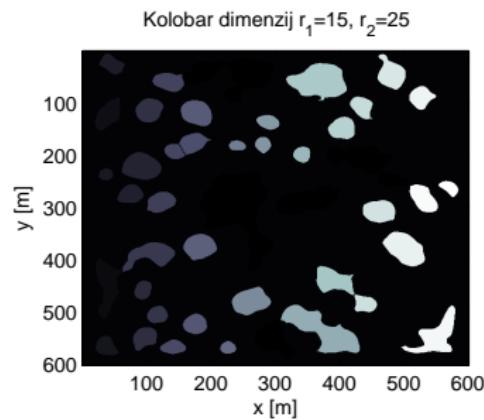
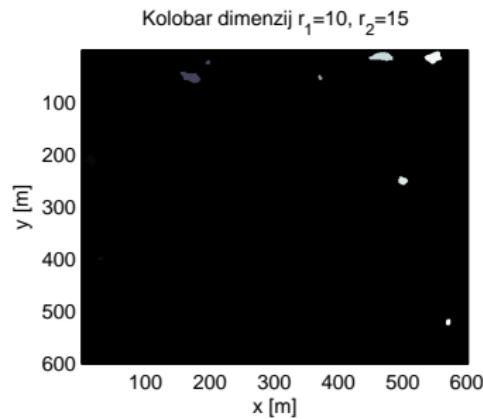
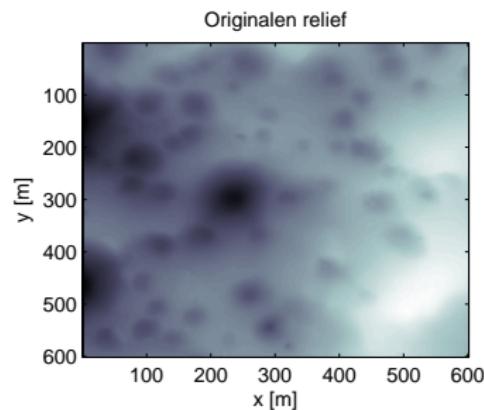
Računalniški vid

Izračunamo indeks konkavnosti



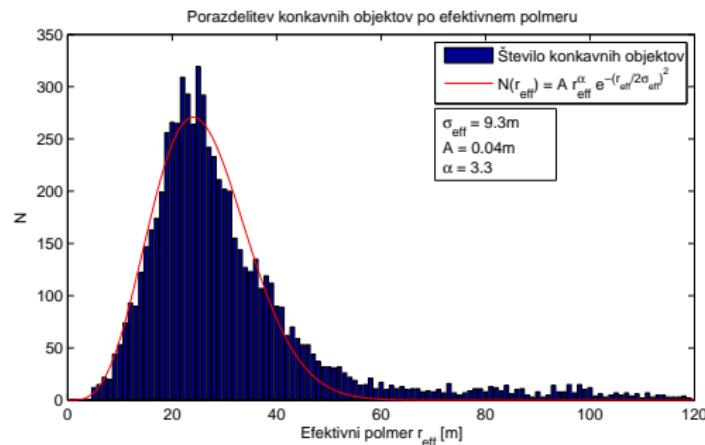
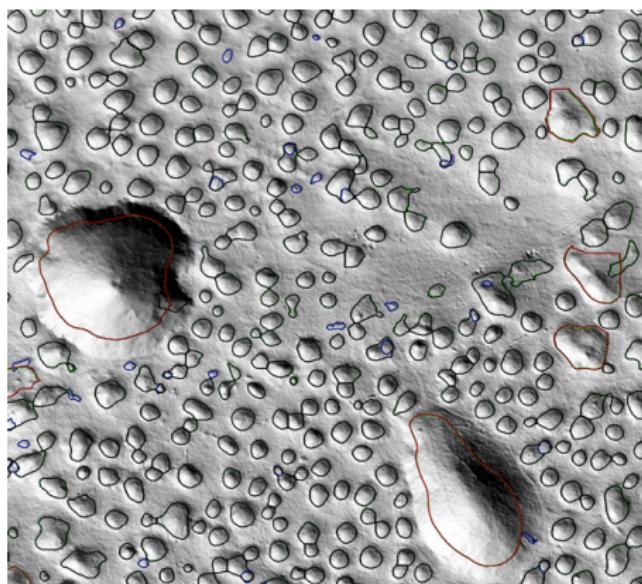
Računalniški vid

Odberemo površje kjer $I_x > \sigma I_k$



Računalniški vid

Identificiramo konkavnosti v reliefu in jih označimo

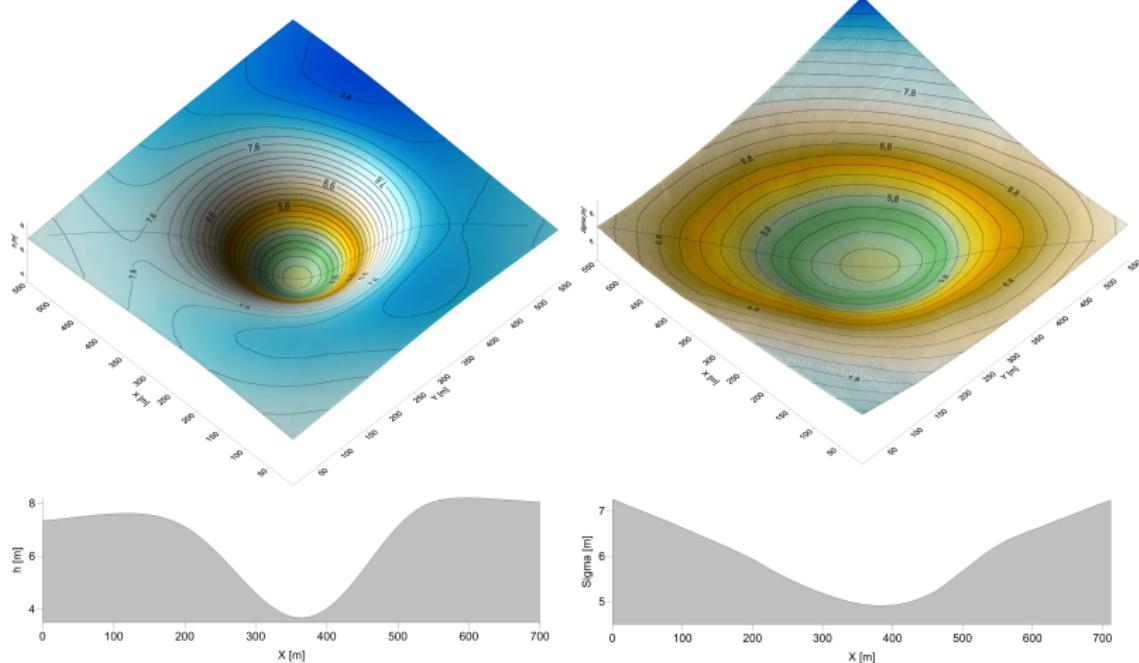


$$A = \sum \text{piksli}$$

$$r_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

Povprečimo konkavnosti

Dobimo 'povprečno vrtačo' in standardno deviacijo od povprečja

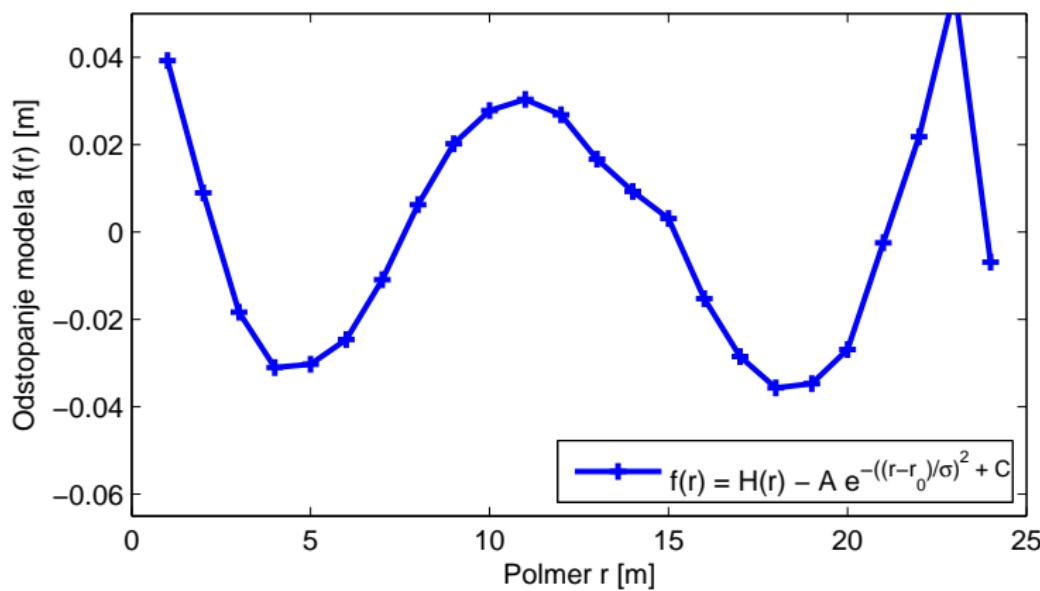


Povprečimo konkavnosti

Dobimo 'povprečno vrtačo', prilegamo gaussovko na vse najdene konkavnosti

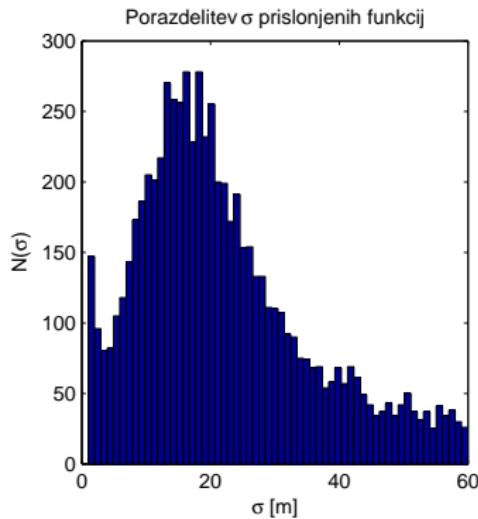
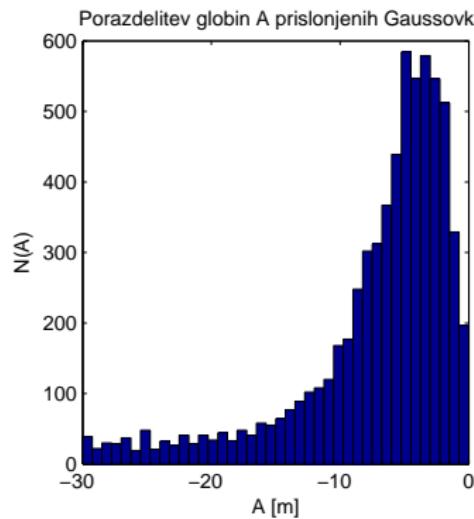
$$h(r) = A \cdot e^{-\frac{(r-r_0)^2}{\sigma^2}} + C \quad (4)$$

Odstopanje Gaussovske od povprečja profilov vrtac velikosti ($r_{\text{eff}} = 24 \text{ m}$)



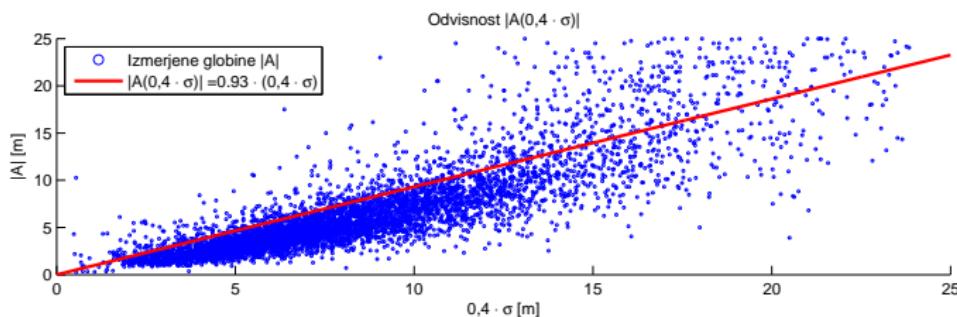
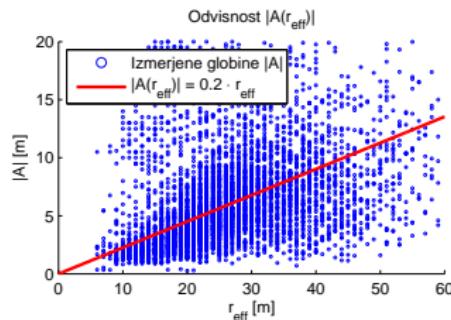
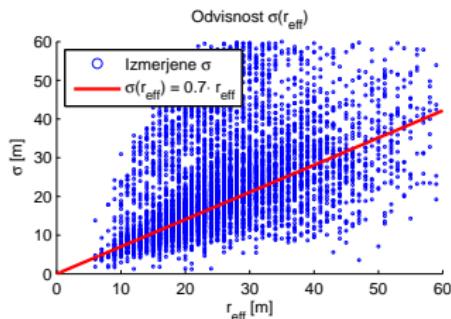
Povprečimo konkavnosti

Dobimo 'povprečno vrtačo', prilegamo gaussovko na vse najdene konkavnosti



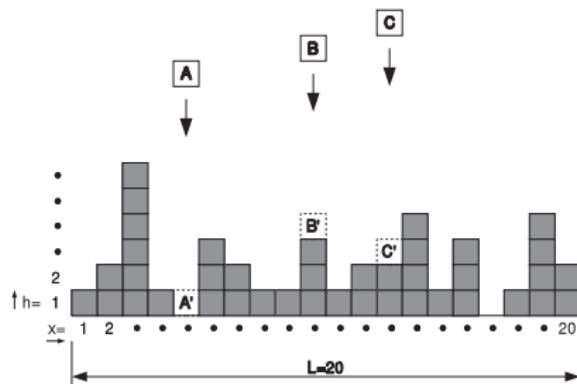
Povprečimo konkavnosti

Dobimo 'povprečno vrtačo', prilegamo gaussovko na vse najdene konkavnosti



Rast površin

Širina površine, priraščanje



Vir: A. Schwettmann, Ballistic deposition: Global scaling and local time series

(V primeru vrtač material odvzemamo. Problem je matematično enak.)

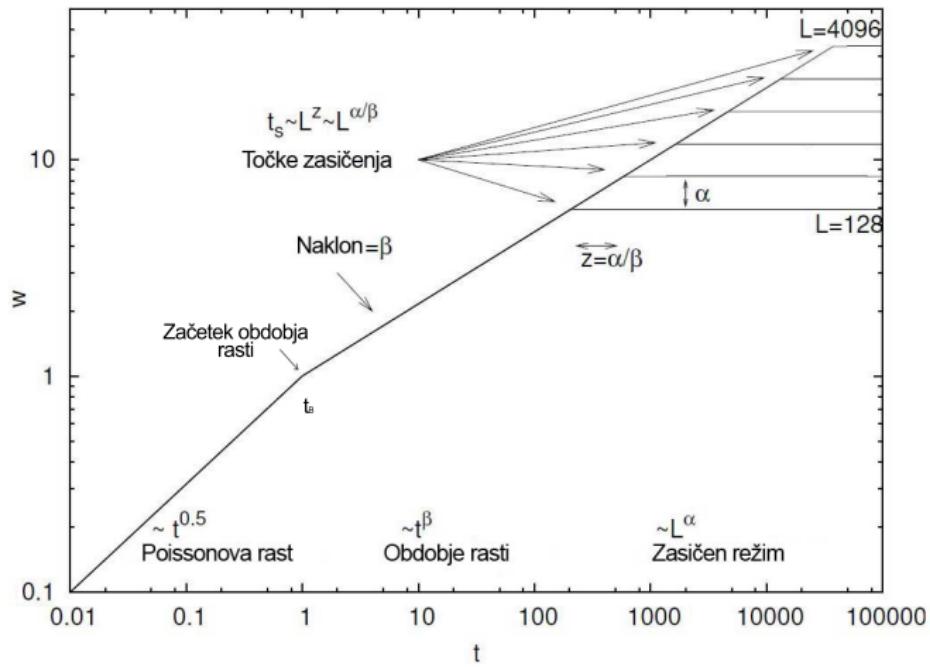
$$\bar{h} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L h(i, t) \quad (5)$$

$$w(L, t) = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (h(i, t) - \bar{h}(t))^2} \quad (6)$$

$$\bar{h}(t) \sim t \quad (7)$$

Rast površin

Povprečna širina površine v času, eksponent hrapavosti



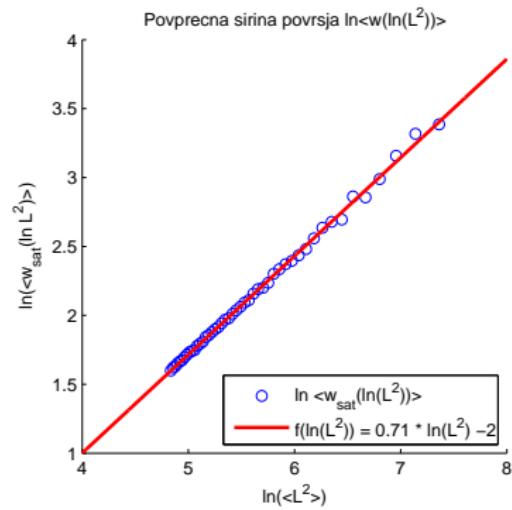
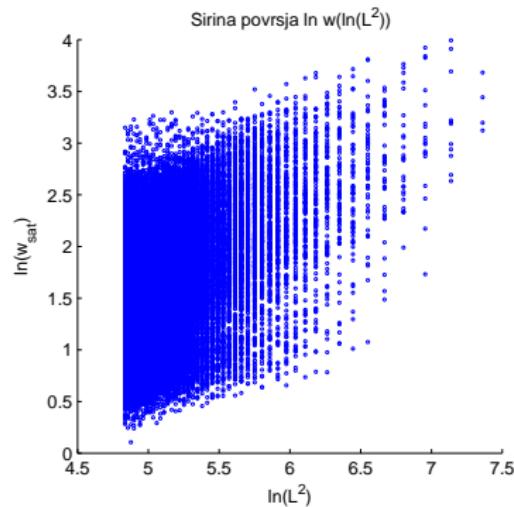
Vir: A. Schwettmann, Ballistic deposition: Global scaling and local time series

$$w(L, t) = \sqrt{\left\langle \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (h(i, t) - \bar{h}(t))^2 \right\rangle} \quad (8)$$

$$w_{sat}(L) \sim L^\alpha \quad (9)$$

Rast površin

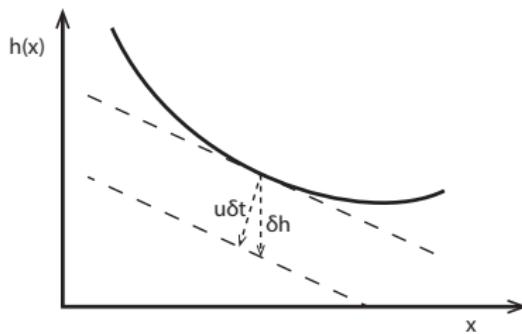
Zasičeni režim, hrapavost Menišije



$$\alpha = \frac{\partial(\ln(w_{\text{sat}}))}{\partial(\ln L)} = 0.4368 \pm 0.0005 \quad (10)$$

Kardar-Parisi-Zhang

Stohastična difuzijska enačba, teoretično napovedana hrapavost



Vir: Kardar-Parisi-Zhang, Dynamic Scaling of Growing Interfaces

Površje prirašča v smeri normale:

$$\delta h = \sqrt{(u\delta t)^2 + (u\delta t \nabla h)^2} \quad (11)$$

Če $|\nabla h| \ll 1$ dobimo:

$$\dot{h} = u\sqrt{1 + (\nabla h)^2} \simeq u + \frac{u}{2}(\nabla h)^2 + \dots \quad (12)$$

Postavimo se v potupoč sistem $\dot{h} \rightarrow \dot{h} - u$

Predpostavimo, da je poces dovolj počasen, da je difuzija pomembna in še dodamo difuzijski člen:

$$D\nabla^2 h \quad (13)$$

Rezultat je Kardar-Parisi-Zhangova enačba

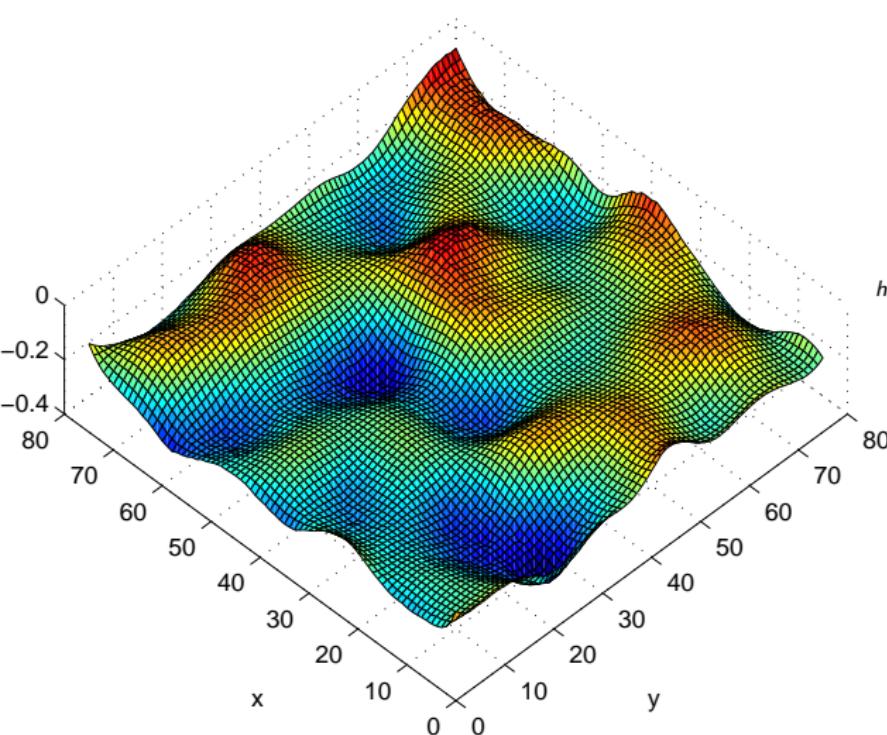
$$\frac{\partial h}{\partial t} = D\nabla^2 h + \frac{u}{2}(\nabla h)^2 + \eta(x, t) \quad (14)$$

Kardar-Parisi-Zhang pokažejo, da ob pogoju da je $\eta(x, t)$ beli šum velja:

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad (15)$$

Kardar-Parisi-Zhang

Simulacija

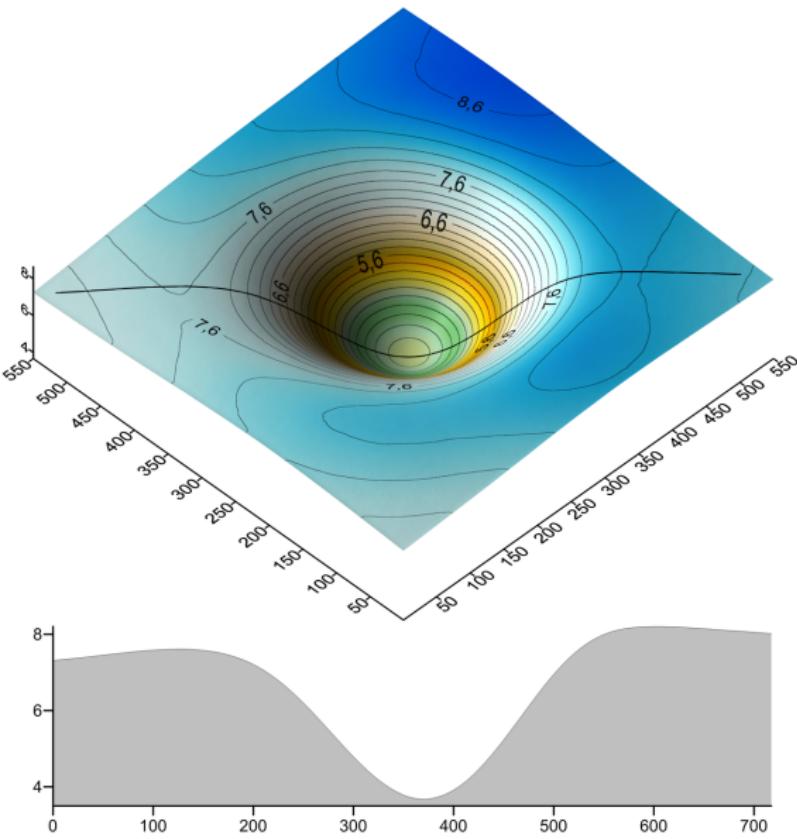


$$h_{i+1} = h_i + dt(\nu \nabla^2 h + \frac{\lambda}{2} (\nabla h)^2 + \eta(x, t)) \quad (16)$$

- ▶ Časovni korak $dt = 10^{-3}$
- ▶ Ponovimo 10^6 krat
- ▶ Površina ni v ravnovesju.
- ▶ Širina površine se ne spreminja več

Dinamične enačbe

Priraščanje površin ni primeren model za opis dinamike posameznih vrtač



Vir: A.M.



Vir: A.M

Dinamične enačbe

Prehod na determinističen opis

Stohastične enačbe

- ▶ Kardar-Parisi-Zhang-ova rast površja nam ne da determinističnega modela rasti posamezne vrtače
- ▶ Možen je le izračun verjetnosti, da bomo pri izbrani začetni površini dobili določeno končno

Dinamične enačbe

- ▶ Opišemo nekaj modelov rasti, ki ustvarijo vrtačam podobne oblike

Dinamične enačbe

Primer: Omejena eksponentna rast

Model

Rast v času je odvisna od višine in razdalje do nosilne kapacitete.
Odziv je odvisen od razdalje do nosilne kapacitete.

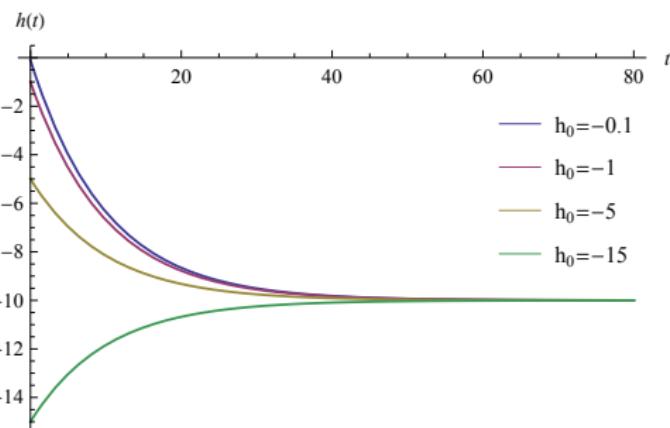
$$\frac{\partial h(t)}{\partial t} = a \cdot (K - h(t)) = aK - ah(t) \quad (17)$$

Rešitev

$$h(t) = K - (K - h_0)e^{-at} \quad (18)$$

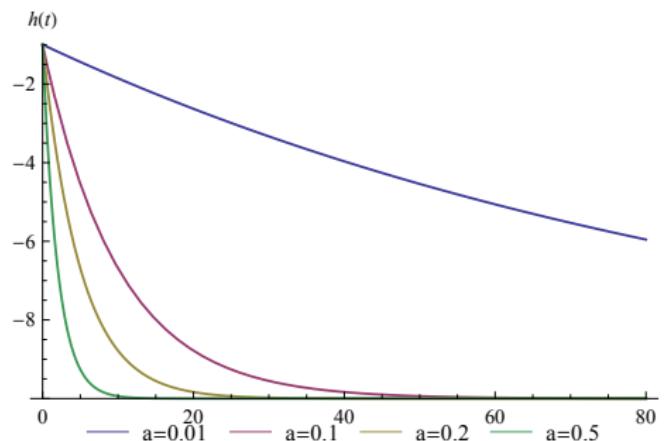
Dinamične enačbe

Primer: Omejena eksponentna rast



$$K = -10$$

$$a = 0.1$$



$$K = -10$$

$$h_0 = -1$$

Dinamične enačbe

Primer: Logistična rast

Model

Rast v času je odvisna od višine in razdalje do nosilne kapacitete.

Odziv je manj skokovit kot pri omejeni eksponentni rasti.

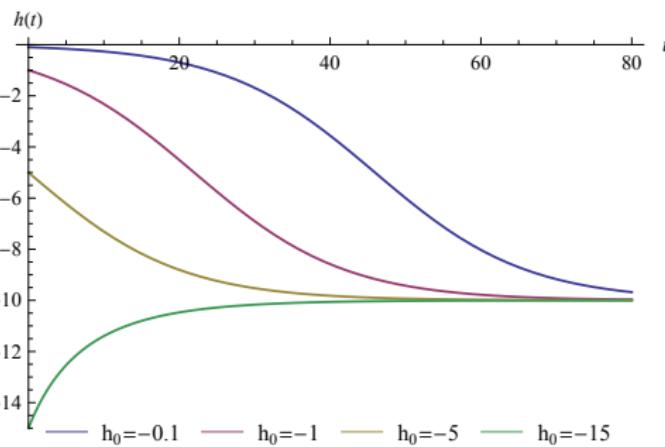
$$\frac{\partial h(t)}{\partial t} = a \cdot \left(1 - \frac{h(t)}{K}\right) h(t) \quad (19)$$

Rešitev

$$h(t) = \frac{h_0 K e^{at}}{K + h_0(e^{at} - 1)} \quad (20)$$

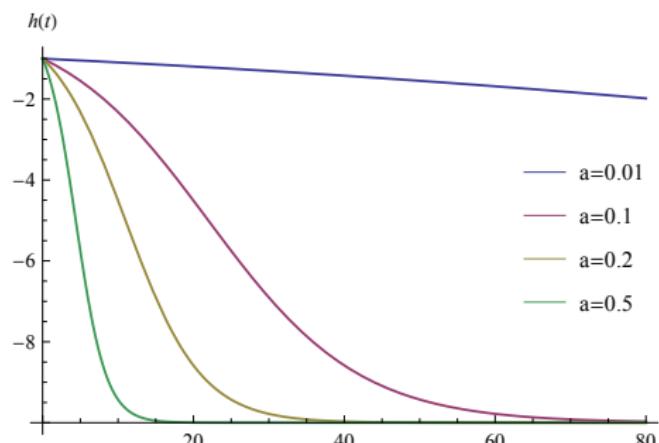
Dinamične enačbe

Primer: Logistična rast



$$K = 10$$

$$a = 0.1$$



$$K = 10$$

$$h_0 = 0.1$$

Difuzijsko dinamične enačbe

Dodamo difuzijski člen

Dinamične enačbe

- ▶ Nam dajo modele rasti
- ▶ Iz modela rasti bi lahko sklepali proti procesom, ki oblikujejo vrtače
- ▶ So oblike

$$\frac{\partial h(t)}{\partial t} = F(h(t)) \quad (21)$$

Difuzijske dinamične enačbe

- ▶ Modele rasti dopolnimo z difuzijo, ki jo pričakujemo zaradi časovnega okvira procesa nastanka vrtač
- ▶ So oblike

$$\frac{\partial h(t, x)}{\partial t} = -\nabla j(t, x) + F(h(t)) = D\Delta h(t, x) + F(h(t)) \quad (22)$$

Difuzijsko dinamične enačbe

Primer: Omejena eksponentna rast

Model

Rešitev iščemo numerično

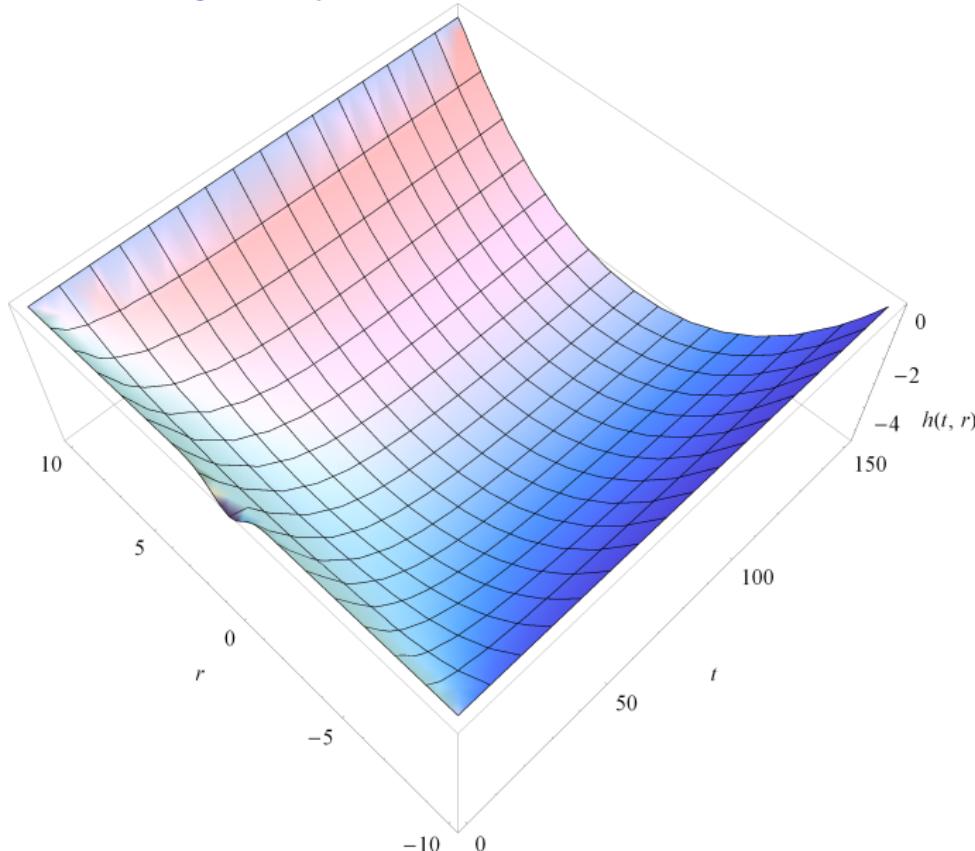
$$\frac{\partial h(t, x)}{\partial t} = D \Delta h(t, x) + a \cdot (K - h(t, x)) \quad (23)$$

Robni pogoji

$$\begin{aligned} h(0, x) &= -e^{-x^2}, x \in D \\ h(t, x) &= 0, x \in \partial D \\ \frac{\partial h(t, x)}{\partial n} &= 0, x \in \partial D \end{aligned} \quad (24)$$

Difuzijsko dinamične enačbe

Primer: Omejena eksponentna rast



$$D = 1$$

$$a = \frac{1}{50}$$

$$K = -10$$

Difuzijsko dinamične enačbe

Primer: Difuzijska logistična rast

Model

Fisher-Kolmogorov-a enačba, rešitev iščemo numerično

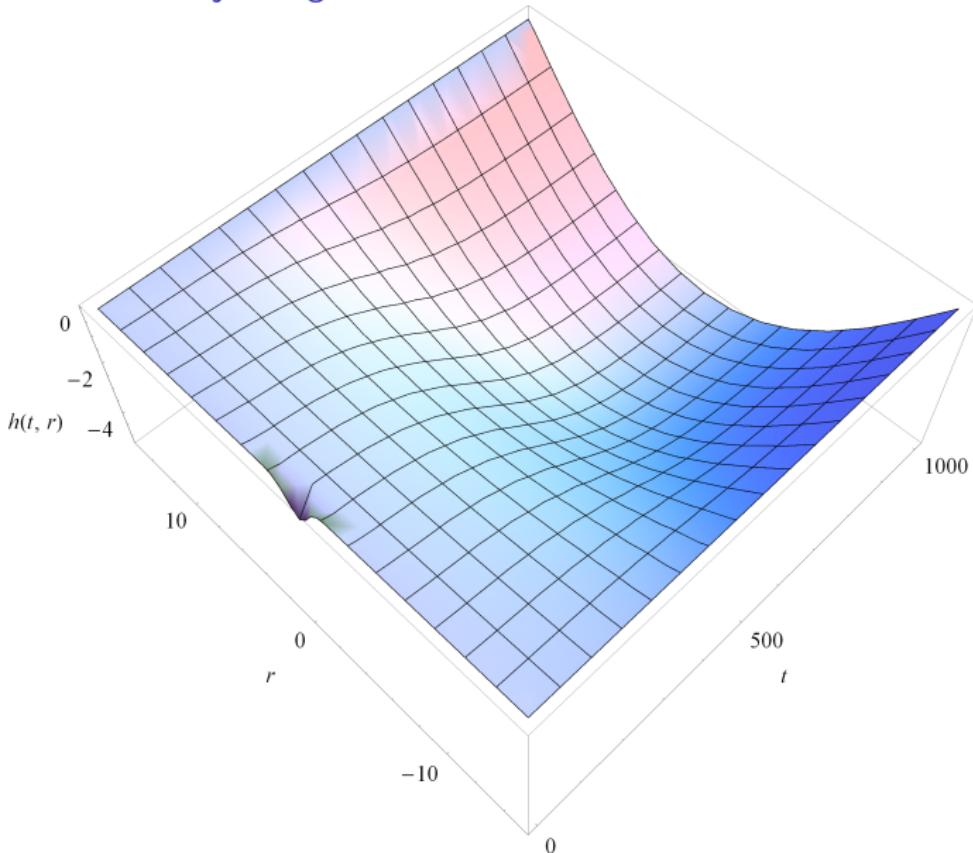
$$\frac{\partial h(t, x)}{\partial t} = D \Delta h(t, x) + a \cdot h(t, x) \cdot \left(1 - \frac{h(t, x)}{K}\right) \quad (25)$$

Robni pogoji

$$\begin{aligned} h(0, x) &= -e^{-x^2}, x \in D \\ h(t, x) &= 0, x \in \partial D \\ \frac{\partial h(t, x)}{\partial n} &= 0, x \in \partial D \end{aligned} \quad (26)$$

Difuzijsko dinamične enačbe

Primer: Difuzijska logistična rast



$$D = 1$$

$$a = \frac{1}{50}$$

$$K = -10$$

Povzetek

- ▶ Segmentacija in analiza vrtač na digitalnem reliefu je relativno enostavna naloga

Povzetek

- ▶ Segmentacija in analiza vrtač na digitalnem reliefu je relativno enostavna naloga
- ▶ Vrtače so približno Gaussove oblike

Povzetek

- ▶ Segmentacija in analiza vrtač na digitalnem reliefu je relativno enostavna naloga
- ▶ Vrtače so približno Gaussove oblike
- ▶ Kardar-Parisi-Zhang-ova rast površin napove podobno hrapavost, kot jo opazimo v Menišiji

Povzetek

- ▶ Segmentacija in analiza vrtač na digitalnem reliefu je relativno enostavna naloga
- ▶ Vrtače so približno Gaussove oblike
- ▶ Kardar-Parisi-Zhang-ova rast površin napove podobno hrapavost, kot jo opazimo v Menišiji
- ▶ Izbera fizikalnega modela je zaradi pomanjkanja informacij o dinamiki težka

Povzetek

- ▶ Segmentacija in analiza vrtač na digitalnem reliefu je relativno enostavna naloga
- ▶ Vrtače so približno Gaussove oblike
- ▶ Kardar-Parisi-Zhang-ova rast površin napove podobno hrapavost, kot jo opazimo v Menišiji
- ▶ Izberi fizikalnega modela je zaradi pomanjkanja informacij o dinamiki težka
 - ▶ Vsi predlagani modeli dajo konkavne ravnovesne oblike

Povzetek

- ▶ Segmentacija in analiza vrtač na digitalnem reliefu je relativno enostavna naloga
- ▶ Vrtače so približno Gaussove oblike
- ▶ Kardar-Parisi-Zhang-ova rast površin napove podobno hrapavost, kot jo opazimo v Menišiji
- ▶ Izberi fizikalnega modela je zaradi pomanjkanja informacij o dinamiki težka
 - ▶ Vsi predlagani modeli dajo konkavne ravnovesne oblike
 - ▶ Najmanj napačen se zdi model logistične difuzijske rasti

Povzetek

- ▶ Segmentacija in analiza vrtač na digitalnem reliefu je relativno enostavna naloga
- ▶ Vrtače so približno Gaussove oblike
- ▶ Kardar-Parisi-Zhang-ova rast površin napove podobno hrapavost, kot jo opazimo v Menišiji
- ▶ Izberi fizikalnega modela je zaradi pomanjkanja informacij o dinamiki težka
 - ▶ Vsi predlagani modeli dajo konkavne ravnovesne oblike
 - ▶ Najmanj napačen se zdi model logistične difuzijske rasti
- ▶ Natančnejši geološki študij dinamike reliefsa bi bil v pomoč