

# Vrtače Dinarskega krasa

Rok Mihevc

Mentor: prof. Rudolf Podgornik

Univerza v Ljubljani  
Fakulteta za *matematiko in fiziko*



Ljubljana, 2014

# Pregled

## Preučevanje realnih vrtač

Realne vrtače

LiDAR

## Rast površin

Definicije

Rezultati

## Modeliranje

Kardar-Parisi-Zhang

Dinamične enačbe

Difuzijsko dinamične enačbe

# Kraške vrtače

So zaprte depresije



Jurišče, Slovenija (vir: A.M.)

# Kraške vrtače

Najdemo jih na starih kraških poljih in planotah

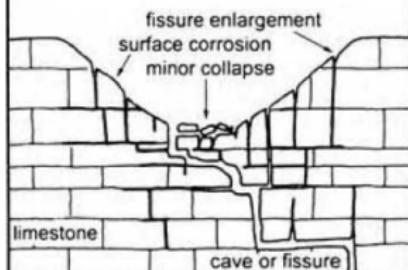


Kapljuh, BiH (vir: A.M.)

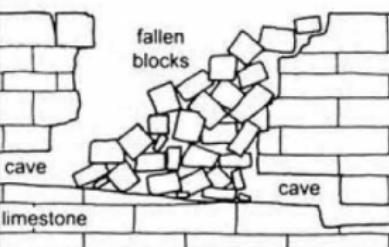
# Kraške vrtače

Več predlaganih modelov nastanka

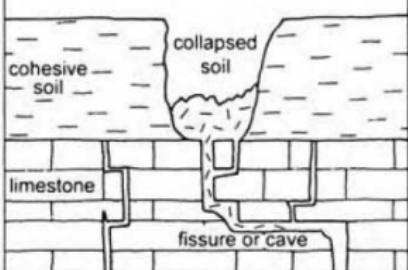
**Solution doline**



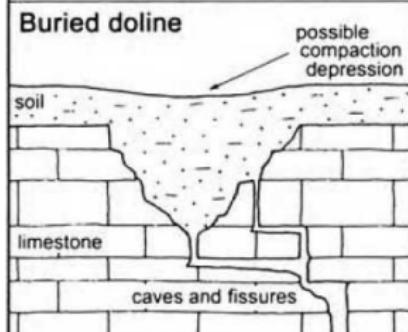
**Collapse doline**



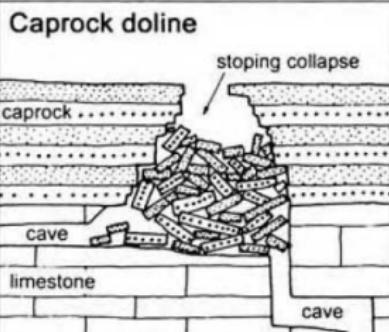
**Dropout doline**



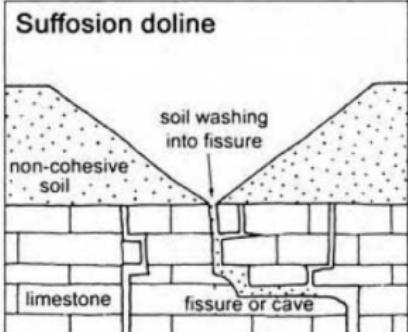
**Buried doline**



**Caprock doline**



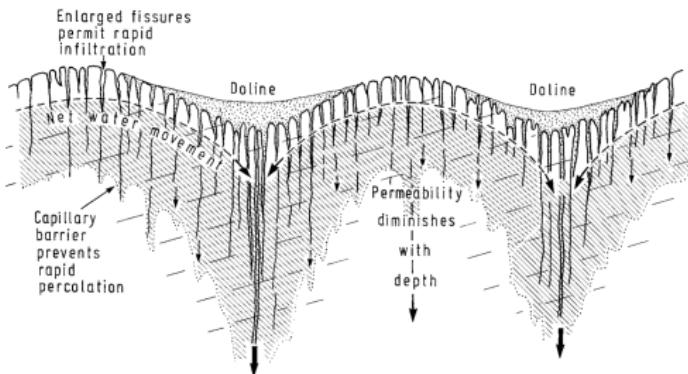
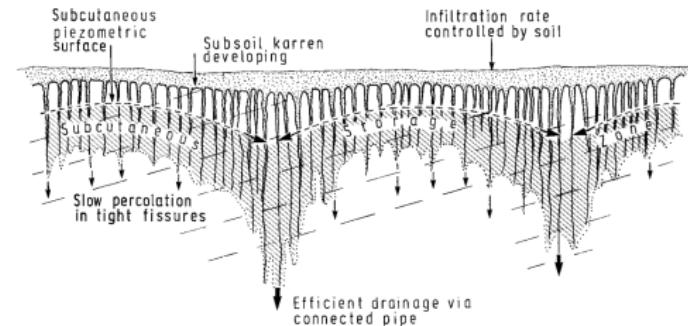
**Suffusion doline**



Vir: Ford, Williams, Karst Hydrogeology and Geomorphology

# Kraške vrtače

Ni podrobnejših študij procesov, ki jih oblikujejo



Vir: Ford, Williams, Karst Hydrogeology and Geomorphology



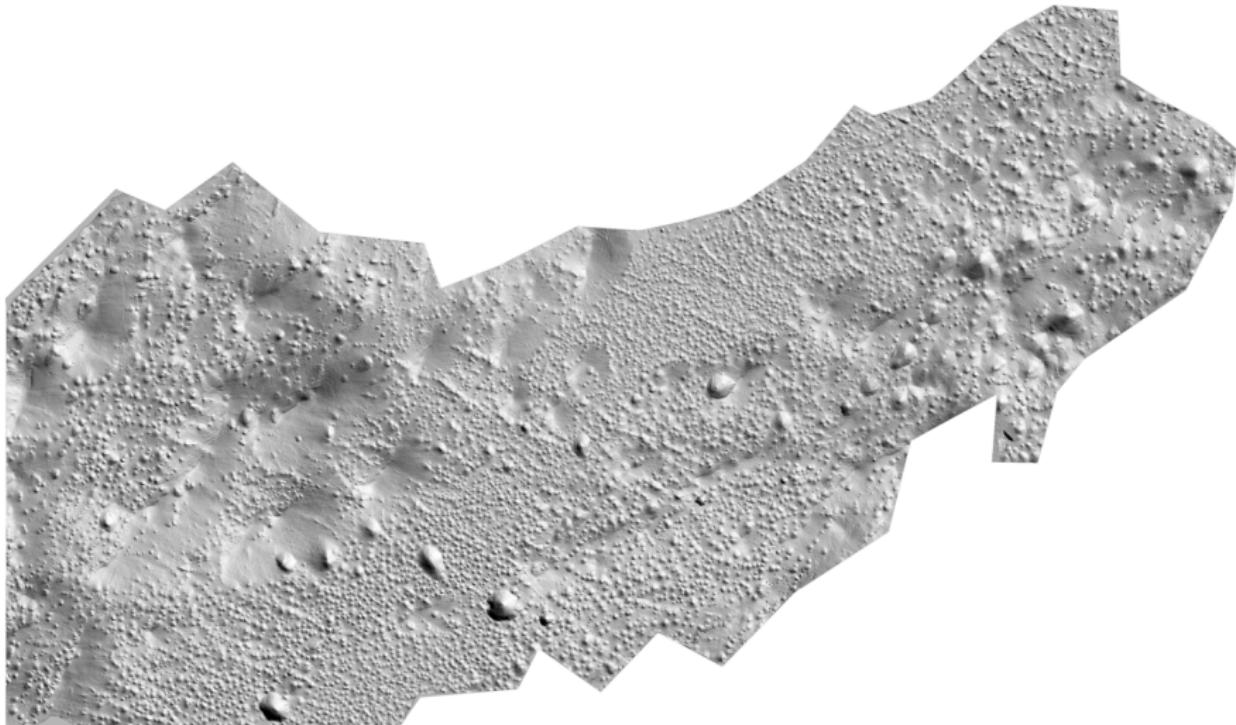
Vir: A.M

# LiDAR

Posnetek območja Menišije, ločljivost  $1m^2$

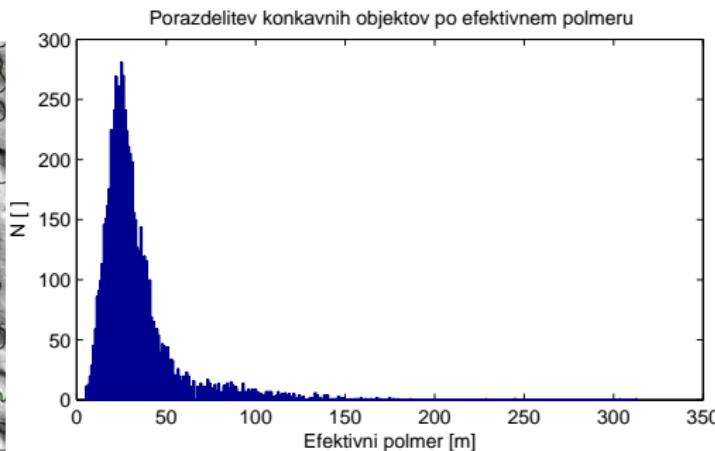
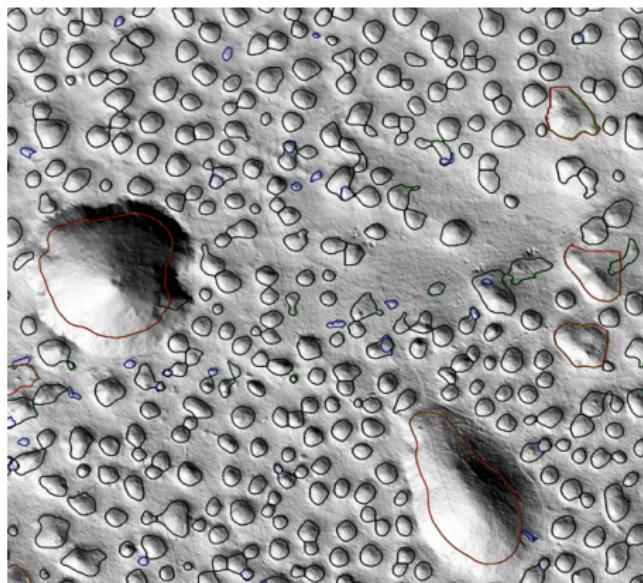
Površina  $\approx 7km \times 14km$

Število vrtač  $\approx 8700$



# Računalniški vid

Identificiramo konkavnosti v reliefu in jih označimo

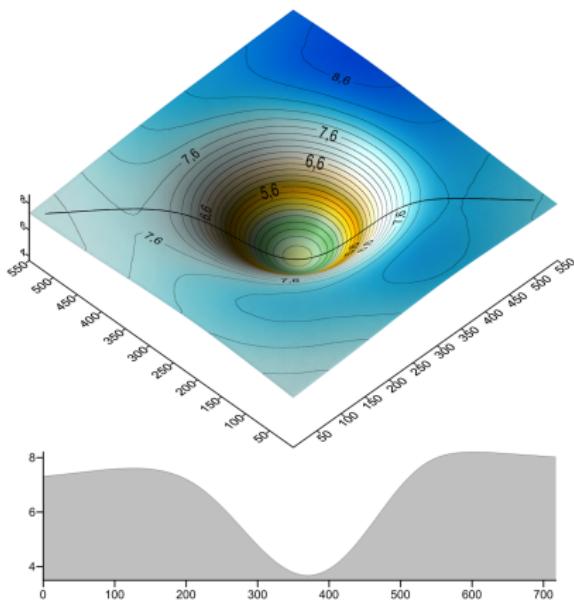


$$A = \sum \text{pixli}$$

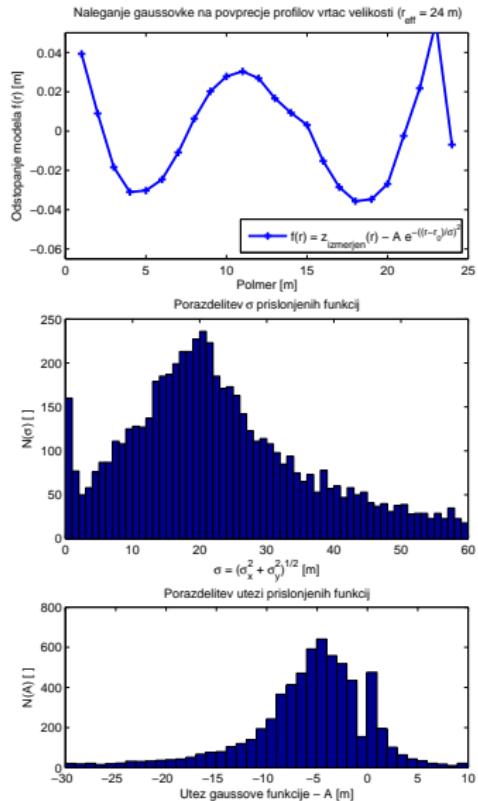
$$r_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

# Povprečimo konkavnosti

Dobimo 'povprečno vrtačo', prilegamo gaussovko na vse najdene konkavnosti

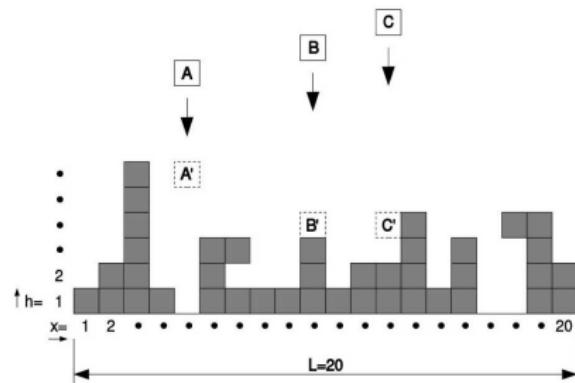


$$f(r) = A \cdot e^{-\frac{(r-r_0)^2}{\sigma^2}} + C \quad (1)$$



# Rast površin

Širina površine, priraščanje



Vir: A. Schwettmann, Ballistic deposition: Global scaling and local time series

(V primeru vrtač material odvzemamo. Problem je matematično enak.)

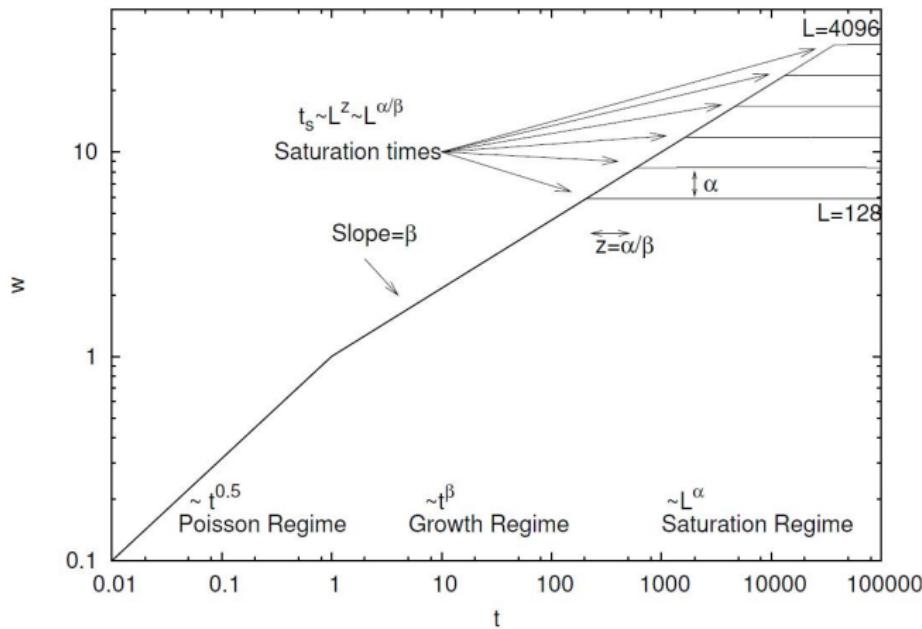
$$\bar{h} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L h(i, t) \quad (2)$$

$$w(L, t) = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (h(i, t) - \bar{h}(t))^2} \quad (3)$$

$$\bar{h}(t) \sim t \quad (4)$$

# Rast površin

Povprečna širina površine v času, eksponent hrapavosti



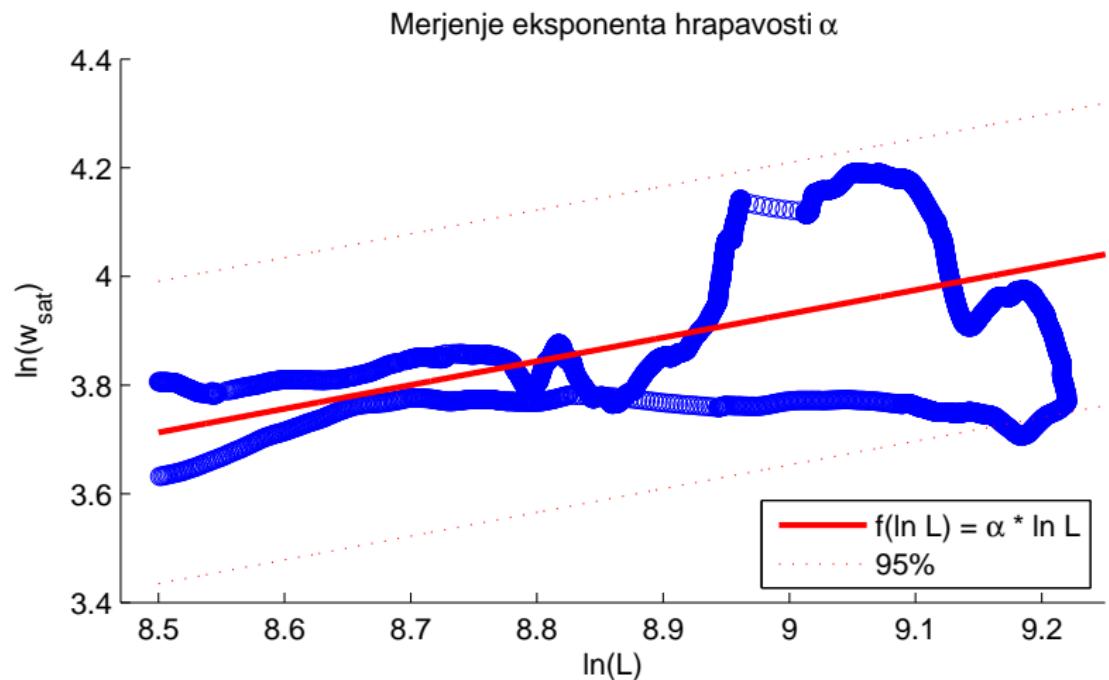
Vir: A. Schwettmann, Ballistic deposition: Global scaling and local time series

$$w(L, t) = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (h(i, t) - \bar{h}(t))^2} \quad (5)$$

$$w_{\text{sat}}(L) \sim L^\alpha \quad (6)$$

# Rast površin

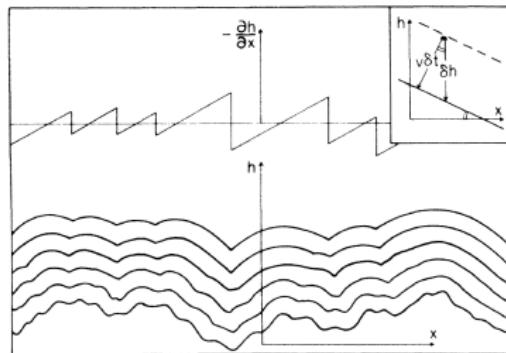
Zasičeni režim, hrapavost Menišije



$$\alpha = \frac{\partial(\ln(w_{sat}))}{\partial(\ln L)} = 0.4368 \pm 0.0005 \quad (7)$$

# Kardar-Parisi-Zhang

Stohastična difuzijska enačba, teoretično napovedana hrapavost



Vir: Kardar-Parisi-Zhang, Dynamic Scaling of Growing Interfaces

Površje prirašča v smeri normale:

$$\delta h = \sqrt{(v\delta t)^2 + (v\delta t \nabla h)^2} \quad (8)$$

Če  $|\nabla h| \ll 1$  dobimo:

$$\dot{h} = v \sqrt{1 + (\nabla h)^2} \simeq v + \frac{v}{2} (\nabla h)^2 + \dots \quad (9)$$

Postavimo se v potupoč sistem  $\dot{h} \rightarrow \dot{h} - v$

Predpostavimo, da je poces dovolj počasen, da je difuzija pomembna in še dodamo difuzijski člen:

$$\nu \nabla^2 h \quad (10)$$

Rezultat je Kardar-Parisi-Zhangova enačba

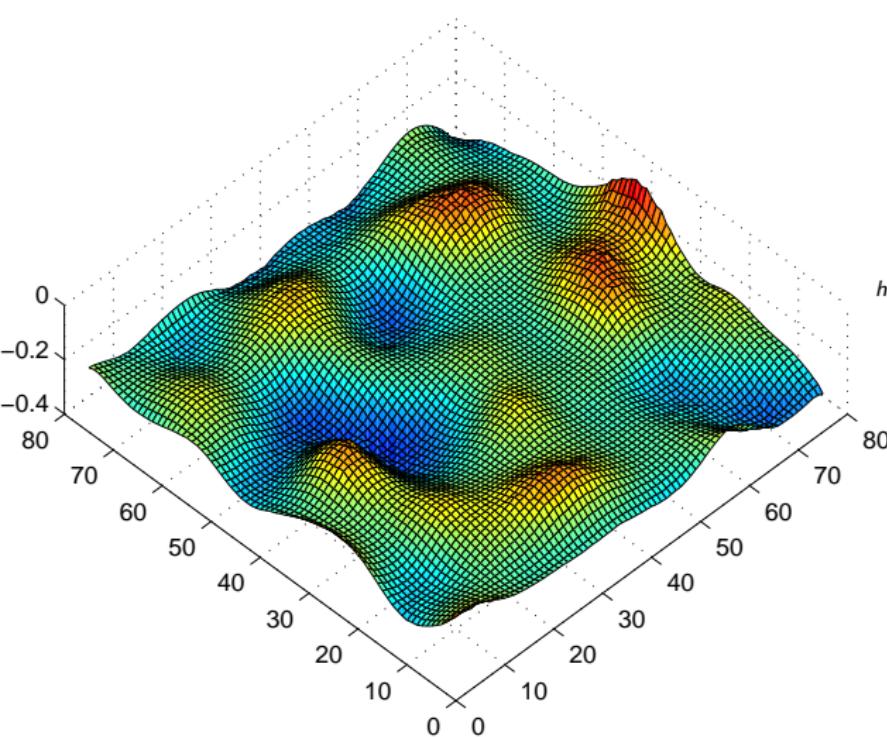
$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nu \nabla^2 h + \frac{\lambda}{2} (\nabla h)^2 + \eta(x, t) \quad (11)$$

Kardar-Parisi-Zhang pokažejo, da ob pogoju da je  $\eta(x, t)$  beli šum velja:

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad (12)$$

# Kardar-Parisi-Zhang

## Simulacija

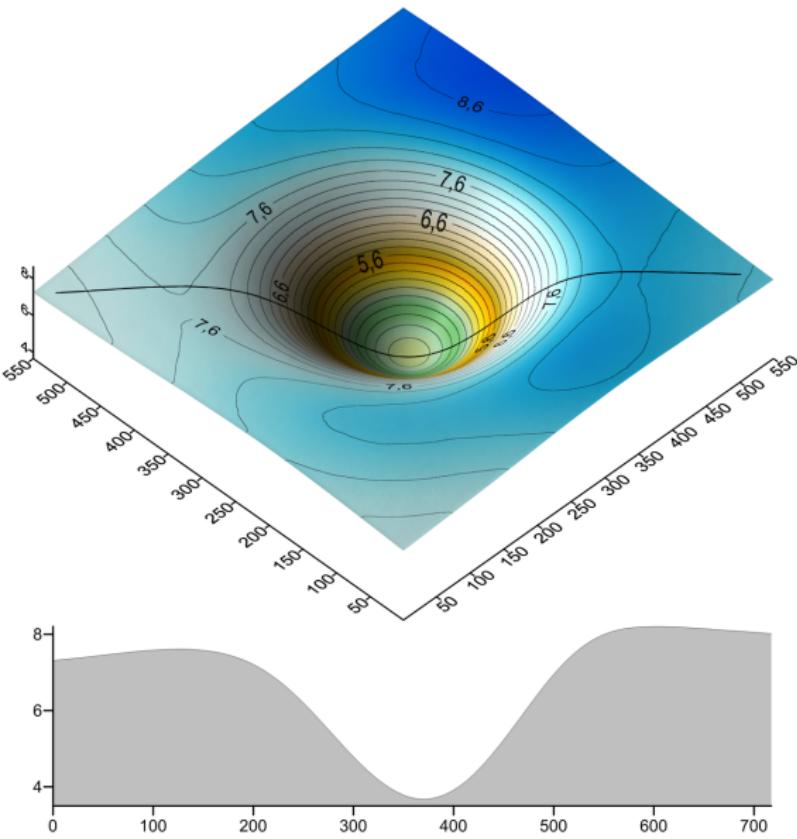


$$h_{i+1} = h_i + dt(\nu \nabla^2 h + \frac{\lambda}{2} (\nabla h)^2 + \eta(x, t)) \quad (13)$$

- ▶ Časovni korak  $dt = 10^{-3}$
- ▶ Ponovimo  $10^6$  krat
- ▶ Površina ni v ravnovesju.
- ▶ Širina površine se ne spreminja več

# Dinamične enačbe

Priraščanje površin ni primeren model za opis dinamike posameznih vrtač



Vir: A.M.



Vir: A.M

# Dinamične enačbe

Prehod na determinističen opis

## Stohastične enačbe

- ▶ Kardar-Parisi-Zhang-ova rast površja nam ne da determinističnega modela rasti posamezne vrtače
- ▶ Možen je le izračun verjetnosti, da bomo pri izbrani začetni površini dobili določeno končno

## Dinamične enačbe

- ▶ Opišemo nekaj modelov rasti, ki ustvarijo vrtačam podobne oblike

# Dinamične enačbe

Primer: Omejena eksponentna rast

## Model

Rast v času je odvisna od višine in razdalje do nosilne kapacitete.  
Odziv je odvisen od razdalje do nosilne kapacitete.

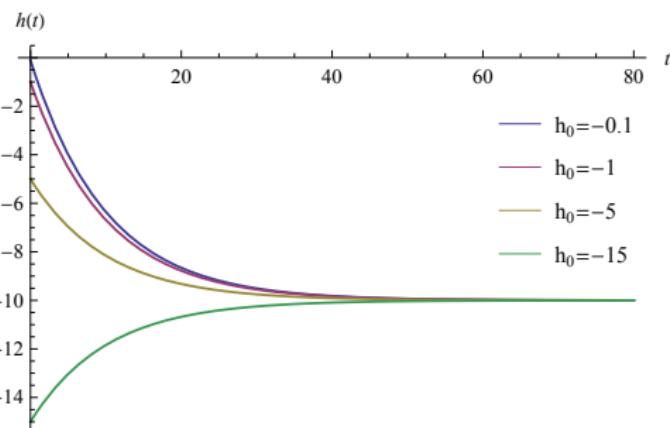
$$\frac{\partial h(t)}{\partial t} = a \cdot (K - h(t)) = aK - ah(t) \quad (14)$$

## Rešitev

$$h(t) = K - (K - h_0)e^{-at} \quad (15)$$

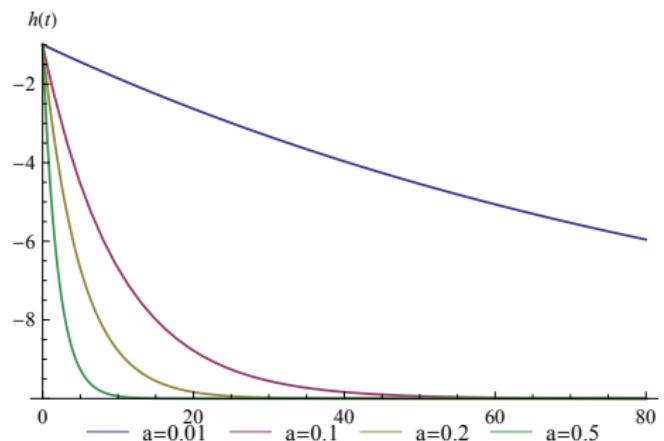
# Dinamične enačbe

Primer: Omejena eksponentna rast



$$K = -10$$

$$a = 0.1$$



$$K = -10$$

$$h_0 = -1$$

# Dinamične enačbe

Primer: Logistična rast

## Model

Rast v času je odvisna od višine in razdalje do nosilne kapacitete.

Odziv je manj skokovit kot pri omejeni eksponentni rasti.

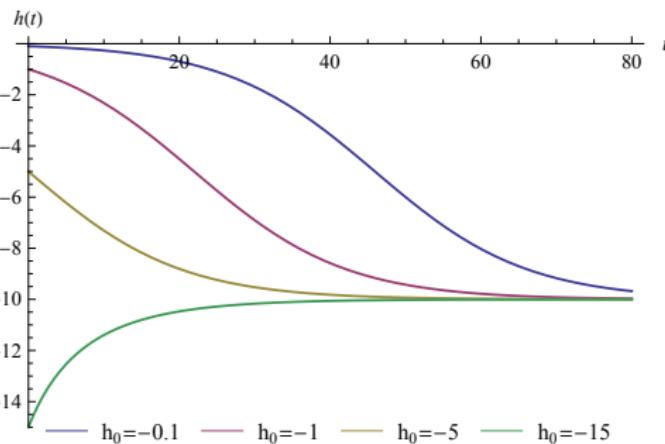
$$\frac{\partial h(t)}{\partial t} = a \cdot \left(1 - \frac{h(t)}{K}\right) h(t) \quad (16)$$

## Rešitev

$$h(t) = \frac{h_0 K e^{at}}{K + h_0(e^{at} - 1)} \quad (17)$$

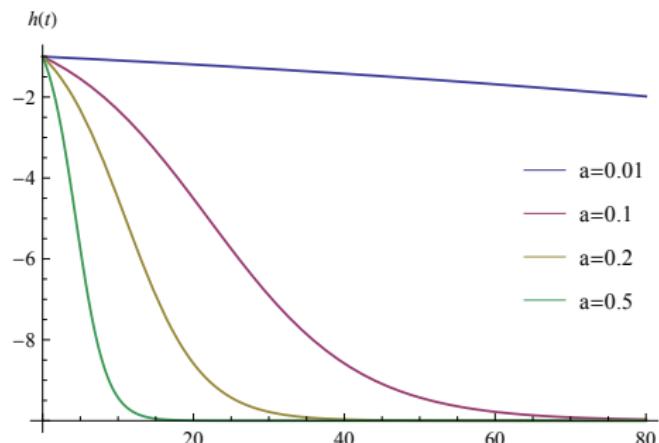
# Dinamične enačbe

Primer: Logistična rast



$$K = 10$$

$$a = 0.1$$



$$K = 10$$

$$h_0 = 0.1$$

# Difuzijsko dinamične enačbe

Dodamo difuzijski člen

## Dinamične enačbe

- ▶ Nam dajo modele rasti
- ▶ Iz modela rasti bi lahko sklepali proti procesom, ki oblikujejo vrtače
- ▶ So oblike

$$\frac{\partial h(t)}{\partial t} = F(h(t)) \quad (18)$$

## Difuzijske dinamične enačbe

- ▶ Modele rasti dopolnimo z difuzijo, ki jo pričakujemo zaradi časovnega okvira procesa nastanka vrtač
- ▶ So oblike

$$\frac{\partial h(t, x)}{\partial t} = -\nabla j(t, x) + F(h(t)) = D\Delta h(t, x) + F(h(t)) \quad (19)$$

# Difuzijsko dinamične enačbe

Primer: Omejena eksponentna rast

## Model

Rešitev iščemo numerično

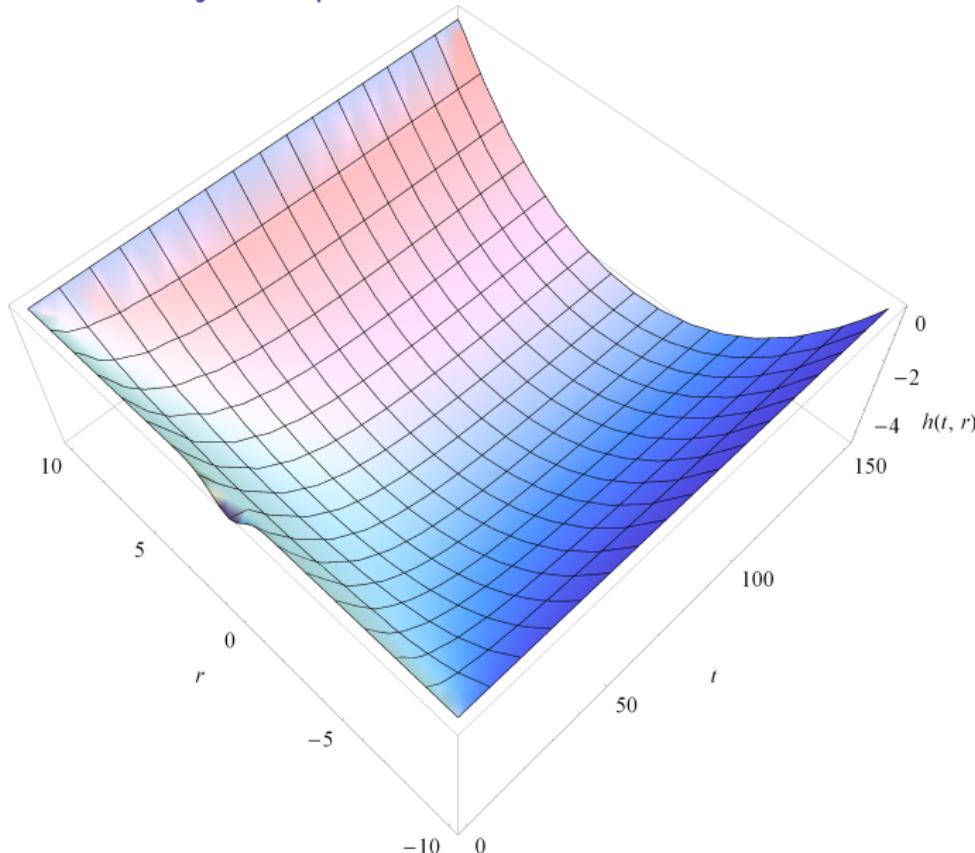
$$\frac{\partial h(t, x)}{\partial t} = D \Delta h(t, x) + a \cdot (K - h(t, x)) \quad (20)$$

## Robni pogoji

$$\begin{aligned} h(0, x) &= -e^{-x^2}, x \in D \\ h(t, x) &= 0, x \in \partial D \\ \frac{\partial h(t, x)}{\partial n} &= 0, x \in \partial D \end{aligned} \quad (21)$$

# Difuzijsko dinamične enačbe

Primer: Omejena eksponentna rast



$$D = 1$$

$$a = \frac{1}{50}$$

$$K = -10$$

# Difuzijsko dinamične enačbe

Primer: Difuzijska logistična rast

## Model

Fisher-Kolmogorov-a enačba, rešitev iščemo numerično

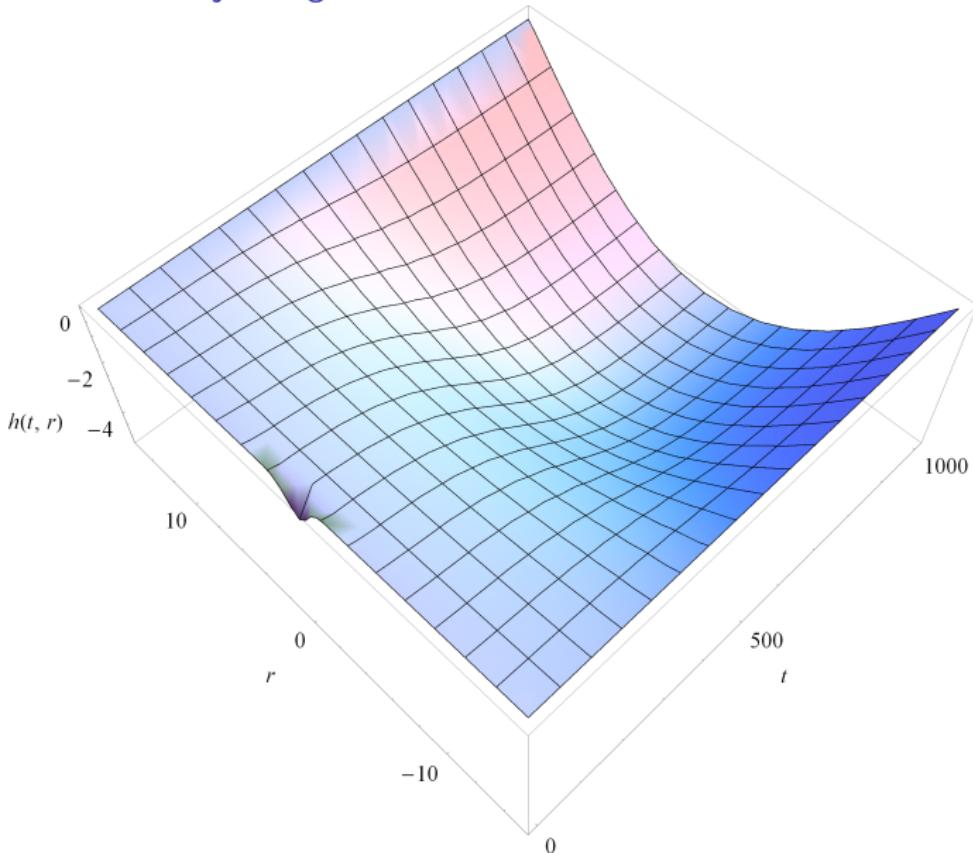
$$\frac{\partial h(t, x)}{\partial t} = D \Delta h(t, x) + a \cdot h(t, x) \cdot \left(1 - \frac{h(t, x)}{K}\right) \quad (22)$$

## Robni pogoji

$$\begin{aligned} h(0, x) &= -e^{-x^2}, x \in D \\ h(t, x) &= 0, x \in \partial D \\ \frac{\partial h(t, x)}{\partial n} &= 0, x \in \partial D \end{aligned} \quad (23)$$

# Difuzijsko dinamične enačbe

Primer: Difuzijska logistična rast



$$D = 1$$

$$a = \frac{1}{50}$$

$$K = -10$$

# Povzetek

- ▶ Segmentacija in analiza vrtač na digitalnem reliefu je relativno enostavna naloga

# Povzetek

- ▶ Segmentacija in analiza vrtač na digitalnem reliefu je relativno enostavna naloga
- ▶ Vrtače so približno Gaussove oblike

# Povzetek

- ▶ Segmentacija in analiza vrtač na digitalnem reliefu je relativno enostavna naloga
- ▶ Vrtače so približno Gaussove oblike
- ▶ Kardar-Parisi-Zhang-ova rast površin napove podobno hrapavost, kot jo opazimo v Menišiji

# Povzetek

- ▶ Segmentacija in analiza vrtač na digitalnem reliefu je relativno enostavna naloga
- ▶ Vrtače so približno Gaussove oblike
- ▶ Kardar-Parisi-Zhang-ova rast površin napove podobno hrapavost, kot jo opazimo v Menišiji
- ▶ Izbera fizikalnega modela je zaradi pomanjkanja informacij o dinamiki težka

# Povzetek

- ▶ Segmentacija in analiza vrtač na digitalnem reliefu je relativno enostavna naloga
- ▶ Vrtače so približno Gaussove oblike
- ▶ Kardar-Parisi-Zhang-ova rast površin napove podobno hrapavost, kot jo opazimo v Menišiji
- ▶ Izberi fizikalnega modela je zaradi pomanjkanja informacij o dinamiki težka
  - ▶ Vsi predlagani modeli dajo konkavne ravnovesne oblike

# Povzetek

- ▶ Segmentacija in analiza vrtač na digitalnem reliefu je relativno enostavna naloga
- ▶ Vrtače so približno Gaussove oblike
- ▶ Kardar-Parisi-Zhang-ova rast površin napove podobno hrapavost, kot jo opazimo v Menišiji
- ▶ Izberi fizikalnega modela je zaradi pomanjkanja informacij o dinamiki težka
  - ▶ Vsi predlagani modeli dajo konkavne ravnovesne oblike
  - ▶ Najmanj napačen se zdi model logistične difuzijske rasti

# Povzetek

- ▶ Segmentacija in analiza vrtač na digitalnem reliefu je relativno enostavna naloga
- ▶ Vrtače so približno Gaussove oblike
- ▶ Kardar-Parisi-Zhang-ova rast površin napove podobno hrapavost, kot jo opazimo v Menišiji
- ▶ Izberi fizikalnega modela je zaradi pomanjkanja informacij o dinamiki težka
  - ▶ Vsi predlagani modeli dajo konkavne ravnovesne oblike
  - ▶ Najmanj napačen se zdi model logistične difuzijske rasti
- ▶ Natančnejši geološki študij dinamike reliefsa bi bil v pomoč