

# Vrtače Dinarskega krasa

Rok Mihevc

Mentor: prof. Rudolf Podgornik

Univerza v Ljubljani  
Fakulteta za *matematiko in fiziko*



Ljubljana, 2014

# Pregled

## Preučevanje realnih vrtač

Kraške vrtače

Indeks konkavnosti

Oblika vrtače

## Rast površin

Opis rasti površin

Kardar-Parisi-Zhang

## Modeliranje

Reakcijsko-difuzijski nastavki

Reakcijsko-difuzijske enačbe

# Kraške vrtače

So zaobljene lijakaste globeli



Jurišče, Slovenija (vir: A.M.)

# Kraške vrtače

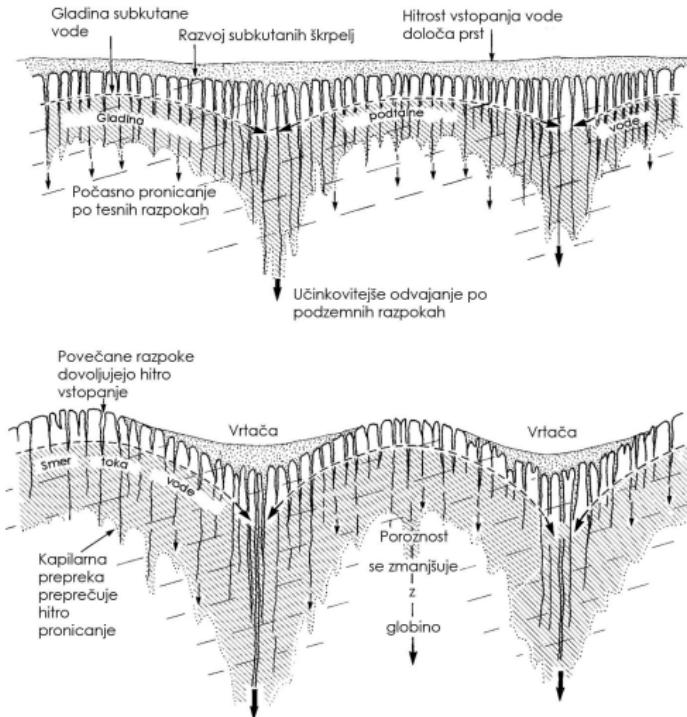
Najdemo jih na starih kraških poljih in planotah



Kapljuh, BiH (vir: A.M.)

# Kraške vrtače

Ni podrobnejših študij procesov, ki jih oblikujejo



Vir: Ford, Williams, Karst Hydrogeology and Geomorphology



Vir: A.M

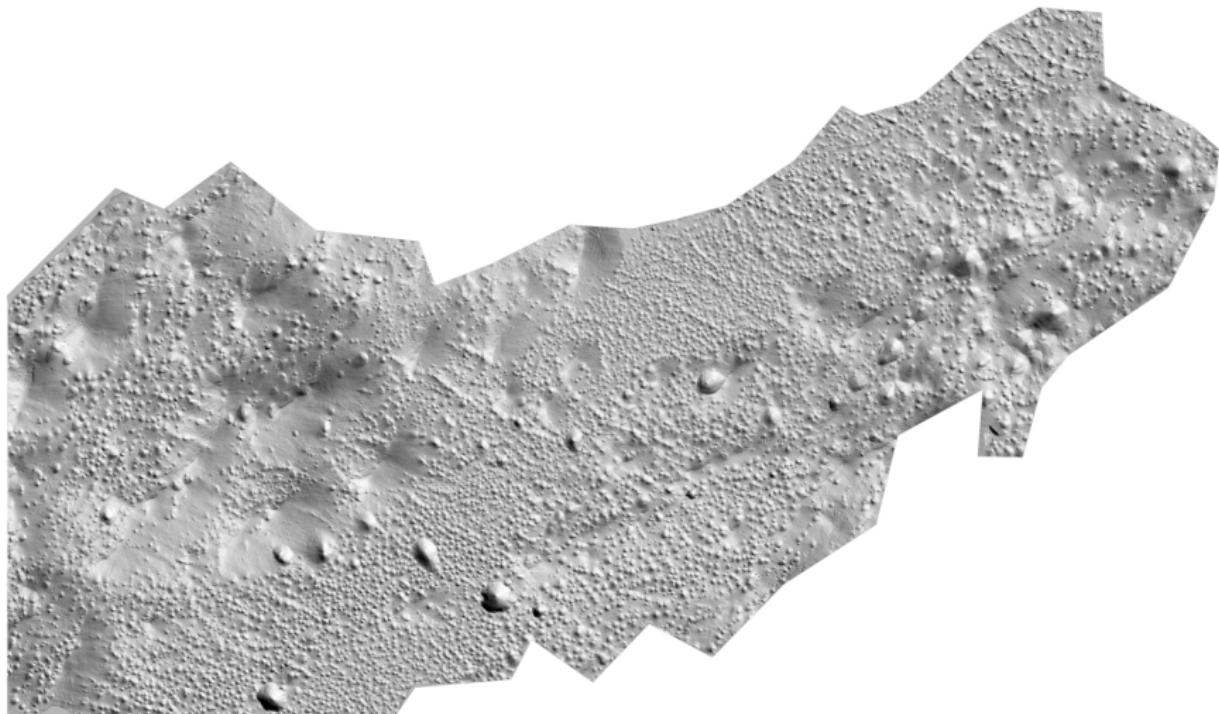
# Kraške vrtače

LiDARski posnetek območja Menišije, ločljivost  $1m^2$

Površina  $\approx 7km \times 14km$

Število vrtač  $\approx 8700$

Starost površja = 0,5 – 3,5 milijonov let



# Indeks konkavnosti

Definicija  $I_k$

617 616,8 616,7 616,5 616,4 616,3 616,1 615,9 615,7

616,7 616,5 616,3 616,1 616 615,8 615,6 615,4 615,2

616,4 616,1 615,9 615,7 615,5 615,3 615,1 614,9 614,8

616,1 615,8 615,6 615,3 615,1 615 614,7 614,4 614,2

615,8 615,6 615,4 615,1 614,8 614,6 614,3 614 613,7

615,6 615,3 615,1 614,8 614,5 614,2 614 613,6 613,3

615,4 615,1 614,8 614,7 614,3 613,8 613,6 613,3 612,9

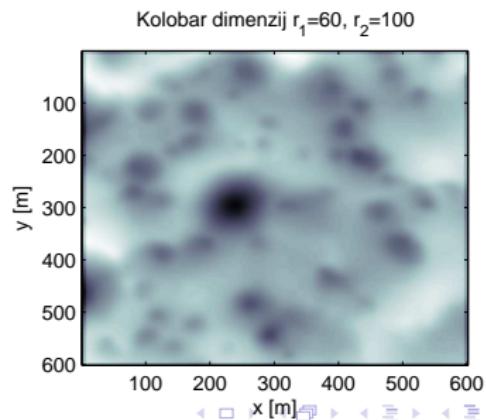
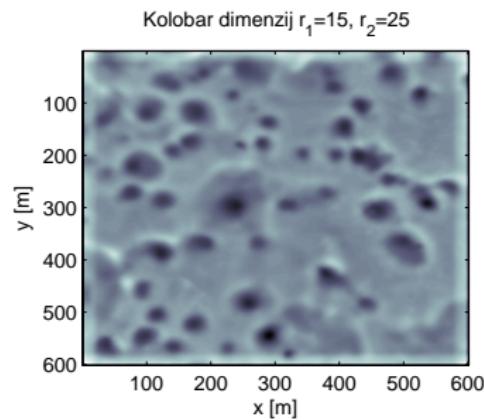
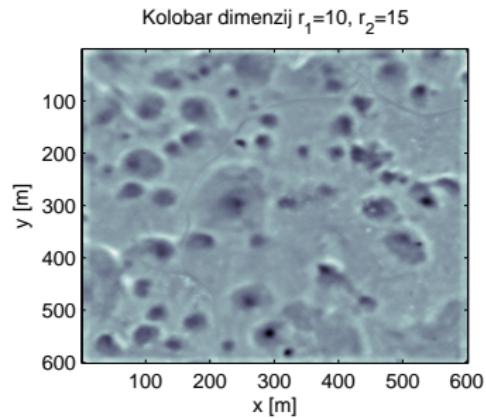
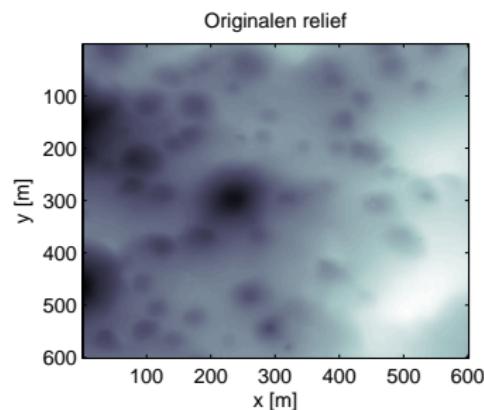
615,1 614,9 614,7 614,3 614 613,7 613,3 613 612,7

615 614,7 614,4 614 613,8 613,4 613,2 612,9 612,6

$$I_k(r_0, r_1, r_2) = h(r_0) - \frac{1}{N} \sum_{r_1 < r < r_2} h(r) \quad (1)$$

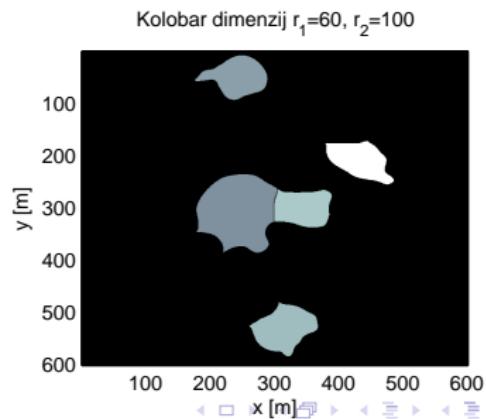
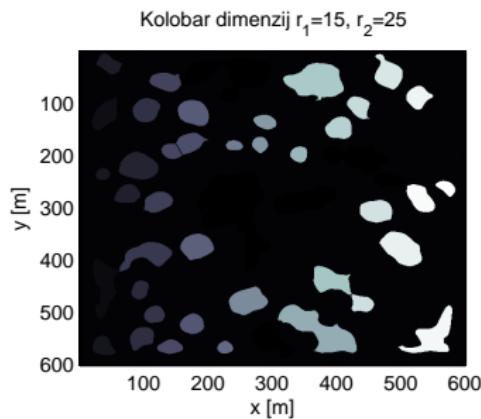
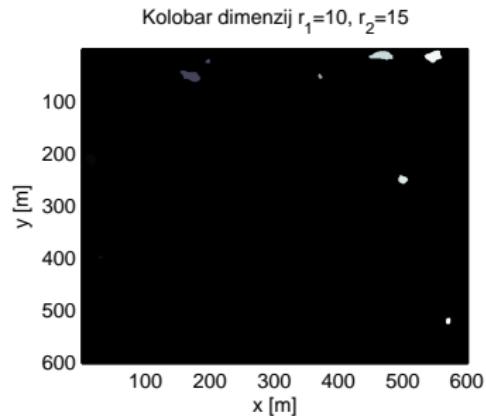
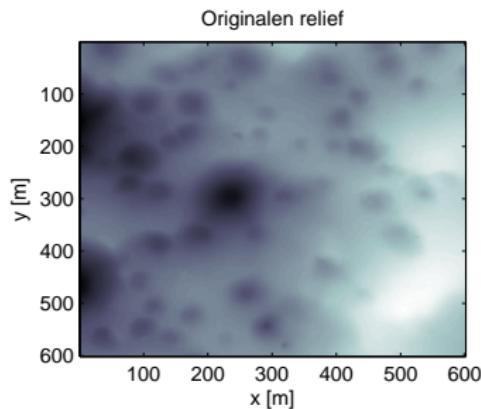
# Indeks konkavnosti

Indeks konkavnosti za različne dimenzije kolobarja ( $r_1, r_2$ )



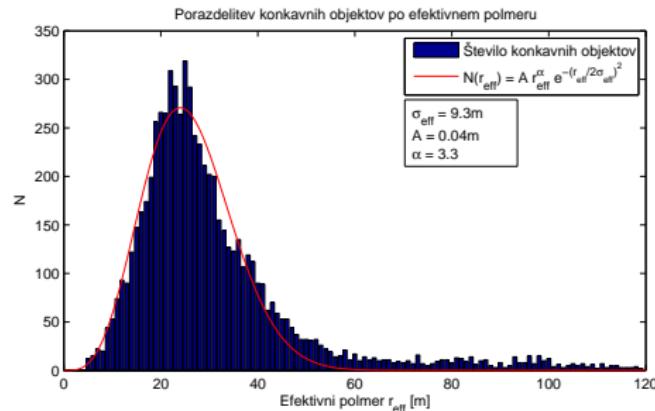
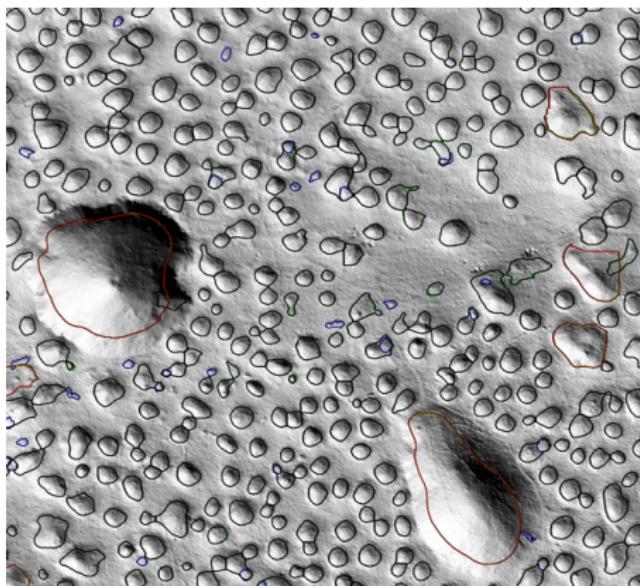
# Indeks konkavnosti

Za vrtače odberemo površje kjer  $I_k > \frac{\sigma_{I_k}}{2}$



# Indeks konkavnosti

## Rezultat odbiranja konkavnosti

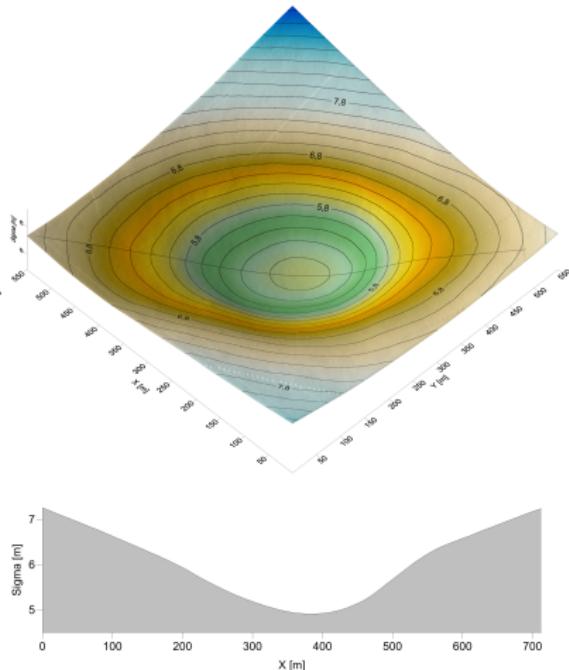
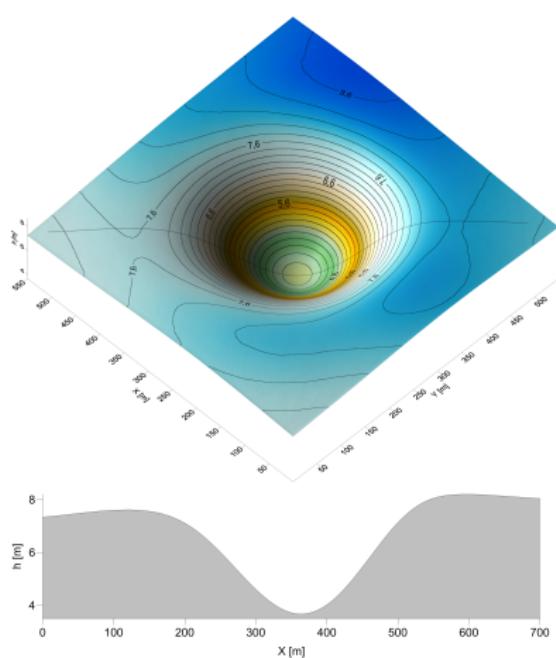


$$A = \sum \text{piksli} \quad (2)$$

$$r_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{A}{\pi}} \quad (3)$$

# Oblika vrtače

Izračunamo povprečno vrtačo (levo) in standardno deviacijo najdenih vrtač (desno)  
Uporabimo Gaussovo funkcijo za njihov opis



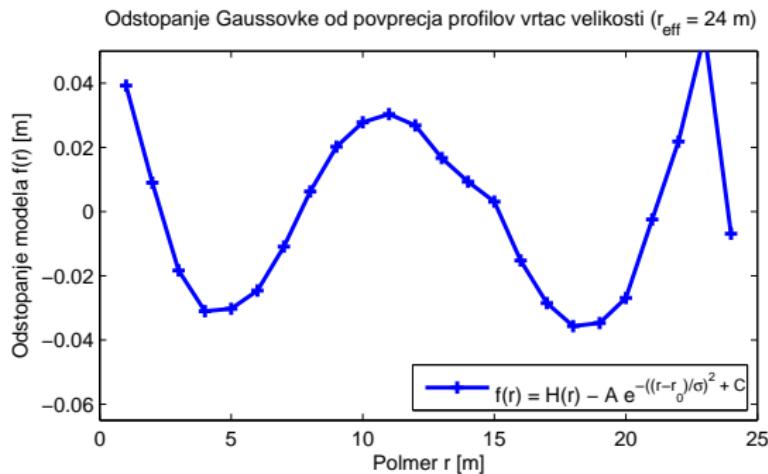
$$h(r) = A \cdot e^{-\frac{(r-r_0)^2}{\sigma^2}} + C \quad (4)$$

# Oblika vrtače

Odberemo vrtače za katere  $23,5m < r_{eff} < 24,5m$

izračunamo njihove profile  $\bar{h}_i(r)$

izračunamo povprečen profil  $\bar{H}(r)$  in odstopanje prilegane Gausovke  $f(r)$



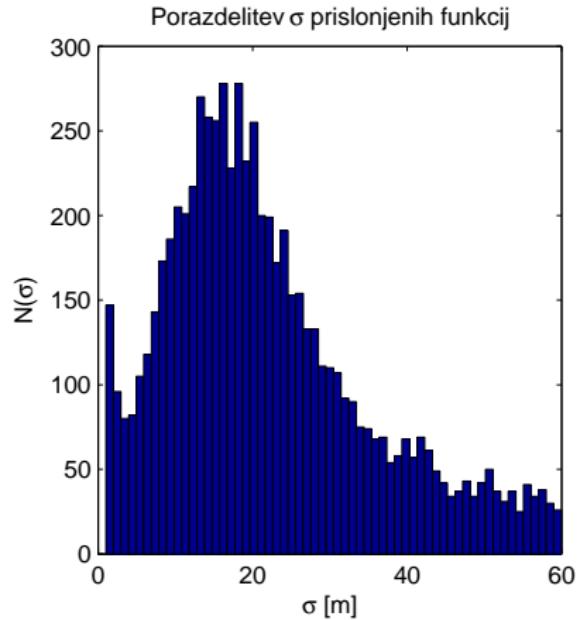
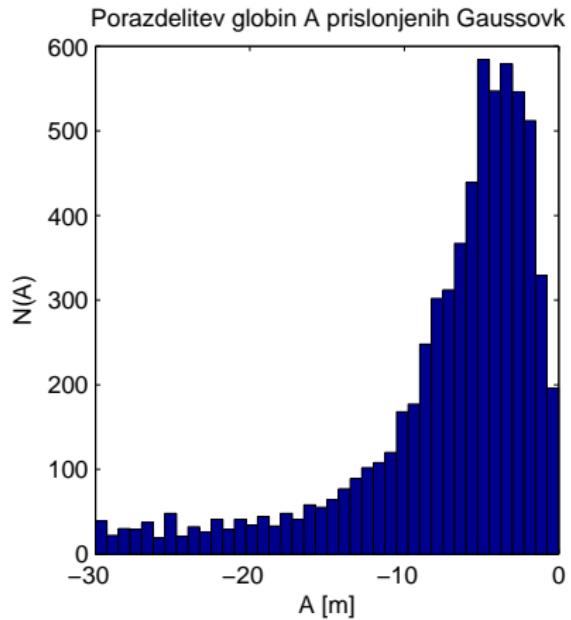
$$\bar{h}_i(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_i(r, \phi) d\phi \quad (5)$$

$$\bar{H}(r) = \frac{1}{N} \sum_i \bar{h}_i(r) \quad (6)$$

$$f(r) = \bar{H}(r) - A \cdot e^{-\frac{(r-r_0)^2}{\sigma^2}} + C \quad (7)$$

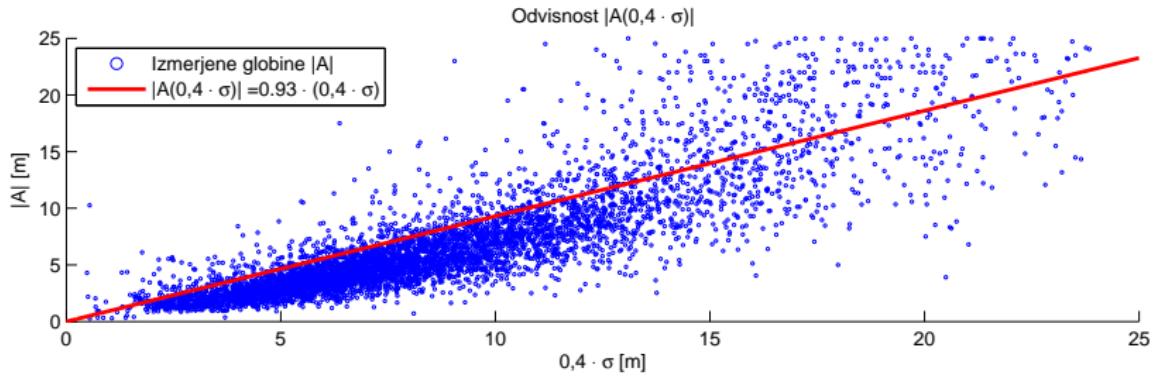
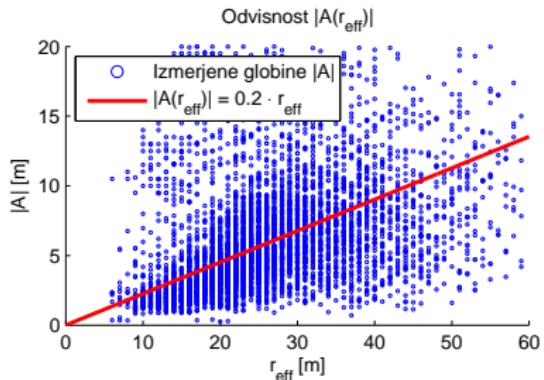
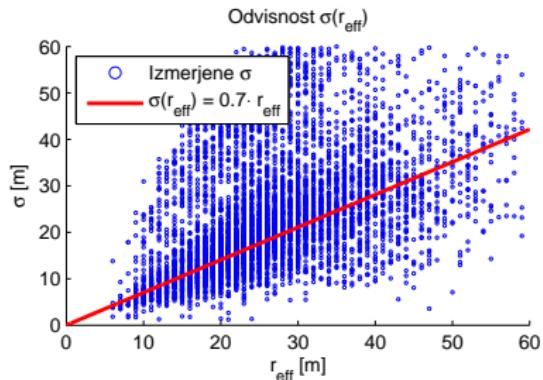
# Oblika vrtače

Vsem vrtačam prilegamo Gaussovko in prikažemo histograma za  $A$  in  $\sigma$



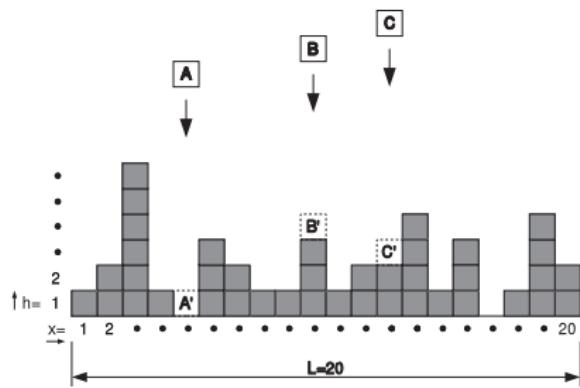
# Oblika vrtače

Vsem vrtačam prilegamo Gaussovko in prikažemo odvisnosti za  $\sigma(r_{\text{eff}})$ ,  $|A(r_{\text{eff}})|$  in  $|A(\sigma)|$



# Opis rasti površin

Hrapavost površine  $w(L, t)$ , priraščanje  $\langle h(t) \rangle$



Vir: A. Schwettmann, Ballistic deposition: Global scaling and local time series

(V primeru vrtač material odvzemamo. Problem je matematično enak.)

$$p(x) = \frac{1}{L} \quad (8)$$

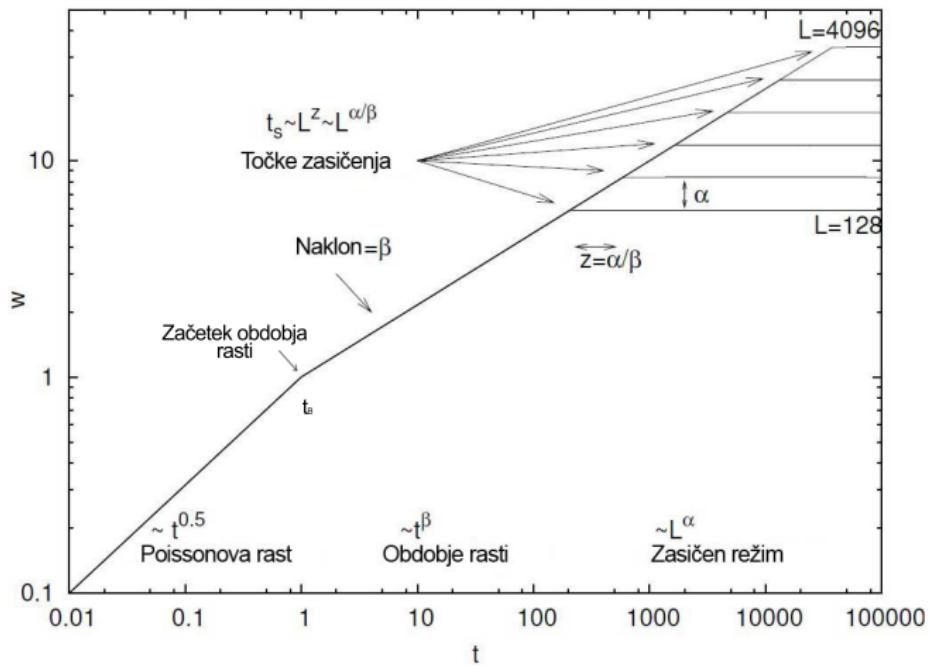
$$\langle h(t) \rangle = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L h(x, t) \quad (9)$$

$$w(L, t) = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (h(x, t) - \bar{h}(t))^2} \quad (10)$$

$$\langle h(t) \rangle \sim t \quad (11)$$

# Opis rasti površin

Pričakovana hrapavost površine  $\langle w(L, t) \rangle$ , eksponent hrapavosti  $\alpha$



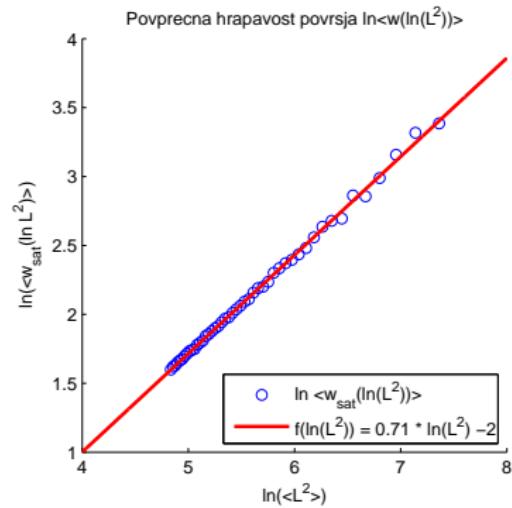
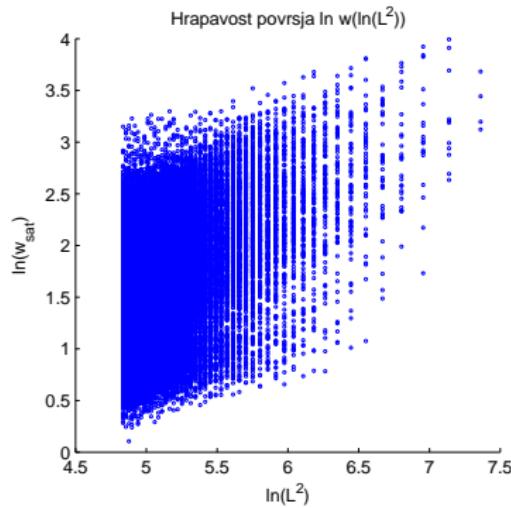
Vir: A. Schwettmann, Ballistic deposition: Global scaling and local time series

$$w(L, t) = \sqrt{\left\langle \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (h(x_i, t) - \bar{h}(t))^2 \right\rangle} \quad (12)$$

$$w_{sat}(L) \sim L^\alpha \quad t \gg t_s \quad (13)$$

# Opis rasti površin

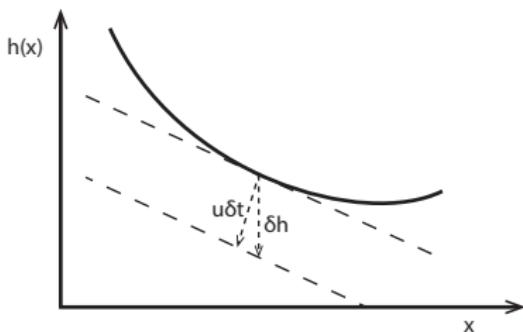
Izmerjen eksponent hrapavosti Menišije



$$\alpha = \frac{\partial(\ln(w_{sat}))}{\partial(\ln(L^2))} = 0,71 \pm 0,01 \quad (14)$$

# Kardar-Parisi-Zhang

## Konstrukcija enačbe



Vir: Kardar-Parisi-Zhang, Dynamic Scaling of Growing Interfaces

Hitrost mikroskopske denudacije kamnine je obrnjena v kamnino:

$$\delta h = \sqrt{(u\delta t)^2 + (u\delta t \nabla h)^2} \quad (15)$$

Če  $|\nabla h| \ll 1$  dobimo:

$$\frac{\partial h}{\partial t} \Big|_{nelinearno} \simeq u + \frac{u}{2} (\nabla h)^2 + \dots \quad (16)$$

Privzamemo, da ima proces poleg stalne hitrosti denudacije kamnine v še stohastično komponento  $\eta(x, t)$ :

$$\frac{dh}{dt} \Big|_{denudacija} = v + \eta(x, t) \quad (17)$$

Razpadanje kamnine je počasen proces, iz podlage odkrušeni kamni in prst se lahko premikajo, privzamemo v model še difuzijski člen:

$$\frac{dh}{dt} \Big|_{difuzija} = D \nabla^2 h \quad (18)$$

Pripravljene člene združimo v enačbo:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} \Big|_{denudacija} + \frac{\partial h}{\partial t} \Big|_{difuzija} + \frac{\partial h}{\partial t} \Big|_{nelinearno} \quad (19)$$

Postavimo se premikajoč se koordinatni sistem s hitrostjo  $v + u$  v smeri osi  $h$  in dobimo Kardar-Parisi-Zhangovo enačbo:

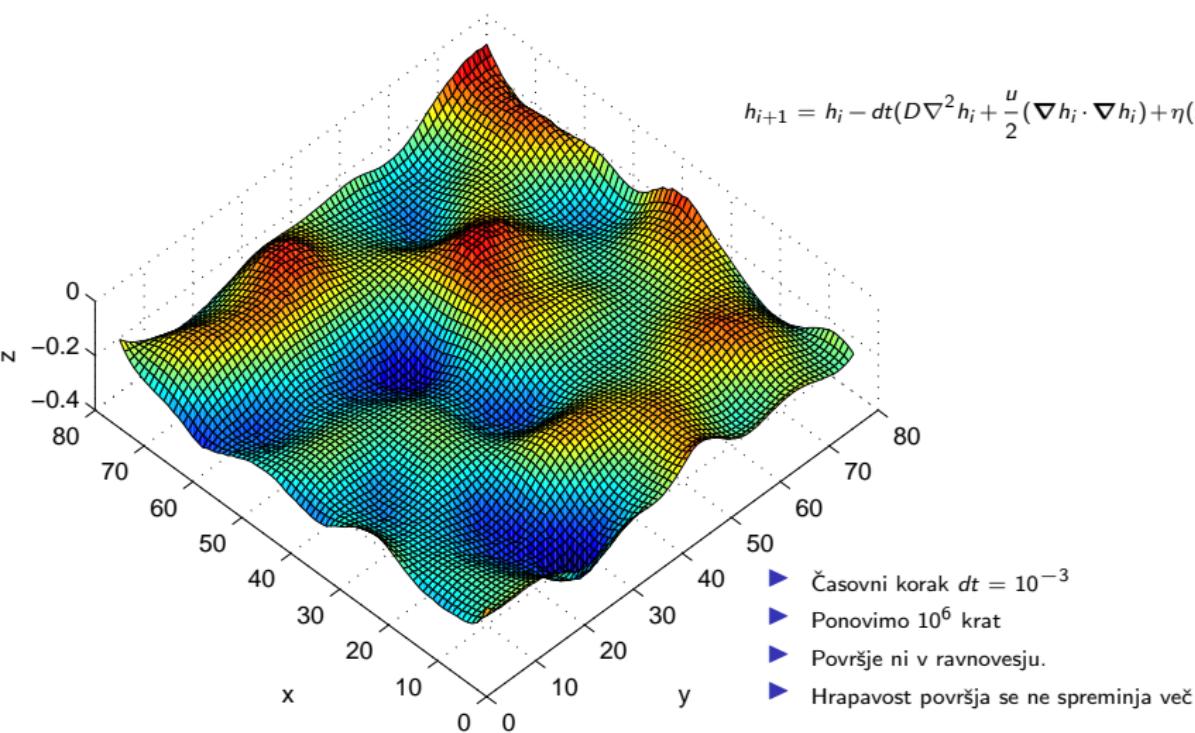
$$\frac{\partial h}{\partial t} = D \nabla^2 h + \frac{u}{2} (\nabla h)^2 + \eta(x, t) \quad (20)$$

Kardar-Parisi-Zhang pokažejo, da ob pogoju da je  $\eta(x, t)$  Gaussov šum velja:

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad (21)$$

# Kardar-Parisi-Zhang

## Simulacija



# Reakcijsko-difuzijski nastavki

## Prehod na determinističen opis

### Stohastične enačbe

- ▶ Kardar-Parisi-Zhang-ova rast površja nam ne da determinističnega modela rasti posamezne vrtače
- ▶ Možen je le izračun verjetnosti, da bomo pri danem površju dobili določeno končno površje

### Reakcijsko-difuzijske enačbe

- ▶ Zapišemo Kardar-Parisi-Zhangovo enačbo v obliko:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = D \nabla^2 h + F(h), \quad (23)$$

za člen  $F(h)$  namesto linearne stohastične funkcije vstavimo različne fenomenološke modele rasti

- ▶ Najprej ločeno pogledamo deterministične nastavke

# Reakcijsko-difuzijski nastavki

Primer determinističnega nastavka: Omejena eksponentna rast

## Model

Rast v času je odvisna od višine in razdalje do nosilne kapacitete.  
Odziv je odvisen od razdalje do nosilne kapacitete.

$$\frac{\partial h(t)}{\partial t} = a \cdot (K - h(t)) = aK - ah(t) \quad (24)$$

## Rešitev

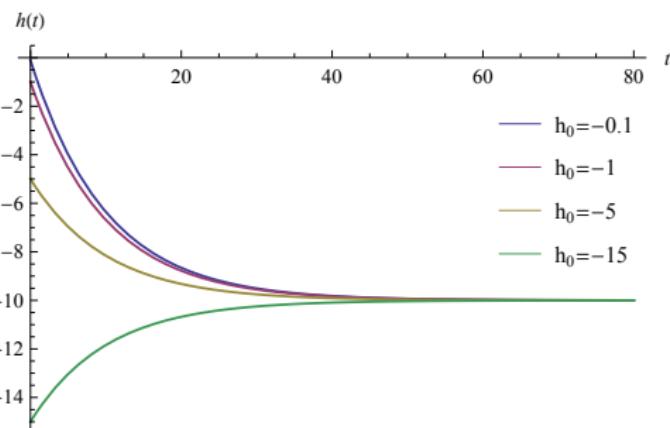
$$h(t) = K - (K - h_0)e^{-at} \quad (25)$$

## Uporaba

Sistemi brez notranjih interakcij, kjer dinamiko poganjajo zunanji dejavniki. Na primer: širjenje informacij v družbi preko medijev.

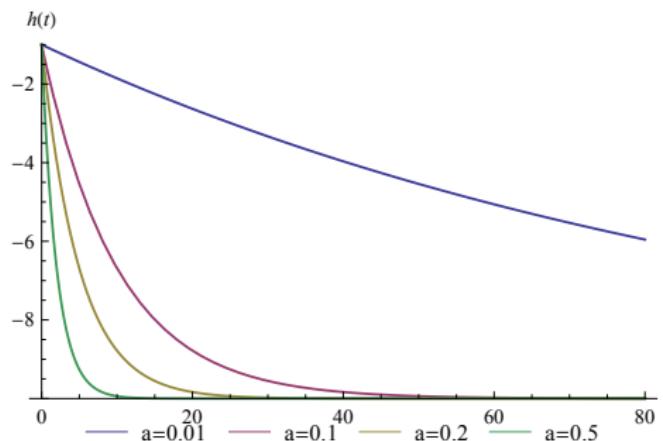
# Reakcijsko-difuzijski nastavki

Primer determinističnega nastavka: Omejena eksponentna rast



$$K = -10$$

$$a = 0.1$$



$$K = -10$$

$$h_0 = -1$$

# Reakcijsko-difuzijski nastavki

Primer determinističnega nastavka: Logistična rast

## Model

Rast v času je odvisna od višine in razdalje do nosilne kapacitete.  
Odziv je manj skokovit kot pri omejeni eksponentni rasti.

$$\frac{\partial h(t)}{\partial t} = a \cdot \left(1 - \frac{h(t)}{K}\right) h(t) \quad (26)$$

## Rešitev

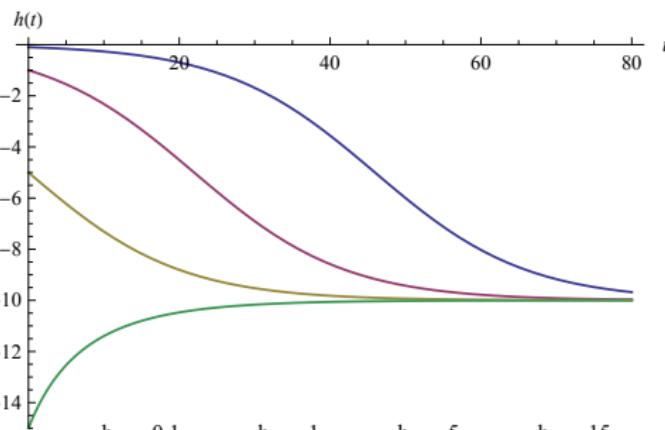
$$h(t) = \frac{h_0 K e^{at}}{K + h_0(e^{at} - 1)} \quad (27)$$

## Uporaba

Sistemi ki jih omejuje nosilna kapaciteta okolja, na primer: živalske populacije, rast tumorjev.

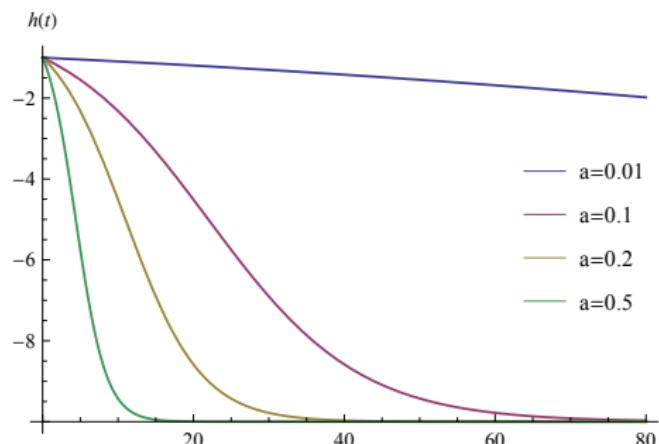
# Reakcijsko-difuzijski nastavki

Primer determinističnega nastavka: Logistična rast



$$K = 10$$

$$a = 0.1$$



$$K = 10$$

$$h_0 = 0.1$$

# Reakcijsko-difuzijske enačbe

## Dodamo difuzijski člen

### Dinamični nastavki

- ▶ Nam dajo modele rasti
- ▶ Nastavke rasti izberemo tako, da so smiselnii za rast vrtače

### Reakcijsko-difuzijske enačbe

- ▶ So oblike:

$$\frac{\partial h(t, x)}{\partial t} = -\nabla j(t, x) + F(h(t)) = D \Delta h(t, x) + F(h(t)) \quad (28)$$

- ▶ Izberemo smiselne robne pogoje, rešujemo numerično v dveh dimenzijah in času

# Reakcijsko-difuzijske enačbe

Primer: Omejena eksponentna rast

## Model

Omejena eksponentna rast:

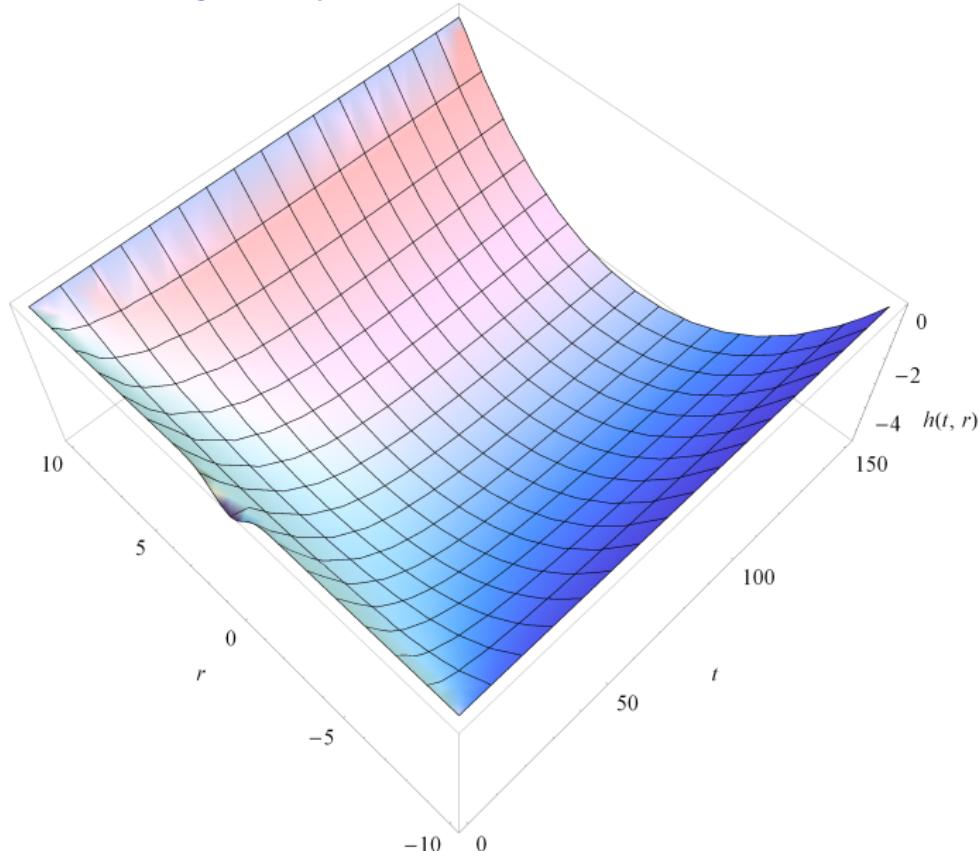
$$\frac{\partial h(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} h(\mathbf{x}, t) + a \cdot (K - h(\mathbf{x}, t)) \quad (29)$$

## Robni pogoji

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}, 0) &= -e^{-\mathbf{x}^2}, \mathbf{x} \in D \\ h(\mathbf{x}, t) &= 0, \mathbf{x} \in \partial D \\ \mathbf{n} \cdot \nabla h(\mathbf{x}, t) &= 0, \mathbf{x} \in \partial D, \end{aligned} \quad (30)$$

# Reakcijsko-difuzijske enačbe

Primer: Omejena eksponentna rast



$$D = 1$$

$$a = \frac{1}{50}$$

$$K = -10$$

# Reakcijsko-difuzijske enačbe

Primer: Logistična rast

## Model

Logistična rast z difuzijo ali Fisher-Kolmogorov-a enačba:

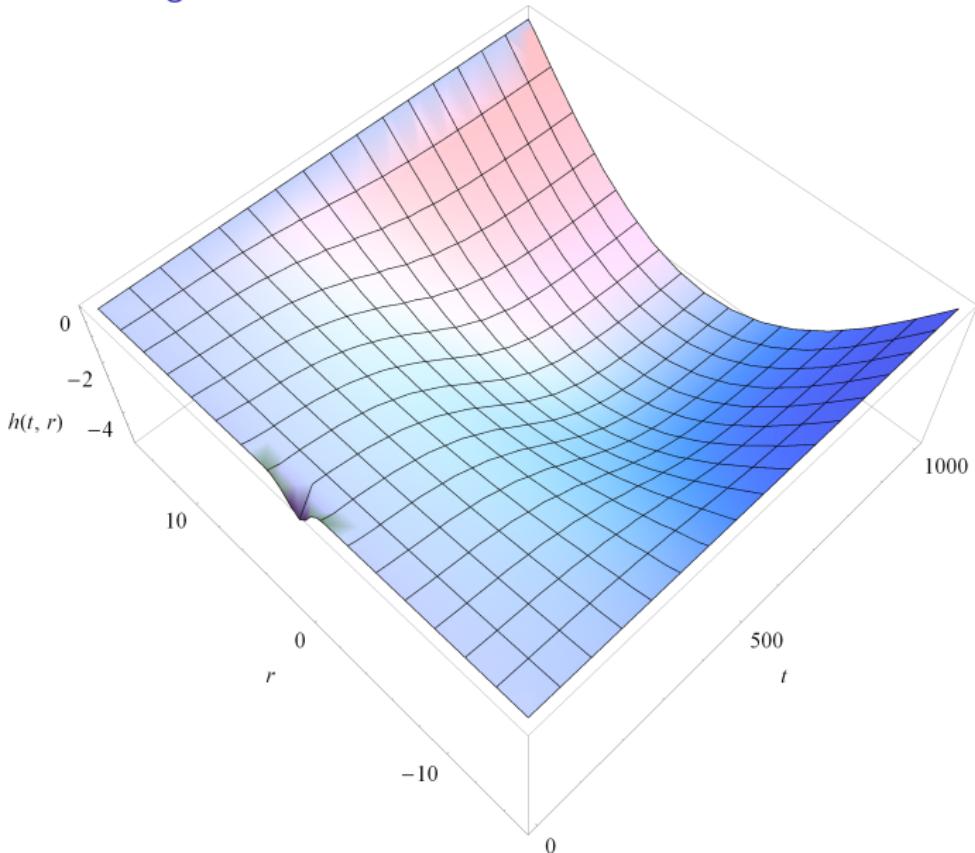
$$\frac{\partial h(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} h(\mathbf{x}, t) + a \cdot h(\mathbf{x}, t) \cdot \left(1 - \frac{h(\mathbf{x}, t)}{K}\right) \quad (31)$$

## Robni pogoji

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}, 0) &= -e^{-\mathbf{x}^2}, \mathbf{x} \in D \\ h(\mathbf{x}, t) &= 0, \mathbf{x} \in \partial D \\ \mathbf{n} \cdot \nabla h(\mathbf{x}, t) &= 0, \mathbf{x} \in \partial D, \end{aligned} \quad (32)$$

# Reakcijsko-difuzijske enačbe

Primer: Logistična rast



$$D = 1$$

$$a = \frac{1}{50}$$

$$K = -10$$

# Povzetek

- ▶ Segmentacija in analiza vrtač na digitalnem reliefu je relativno enostavna naloga

# Povzetek

- ▶ Segmentacija in analiza vrtač na digitalnem reliefu je relativno enostavna naloga
- ▶ Vrtače so približno Gaussove oblike

# Povzetek

- ▶ Segmentacija in analiza vrtač na digitalnem reliefu je relativno enostavna naloga
- ▶ Vrtače so približno Gaussove oblike
- ▶ Kardar-Parisi-Zhang-ova rast površin napove podobno hrapavost, kot jo opazimo v Menišiji

# Povzetek

- ▶ Segmentacija in analiza vrtač na digitalnem reliefu je relativno enostavna naloga
- ▶ Vrtače so približno Gaussove oblike
- ▶ Kardar-Parisi-Zhang-ova rast površin napove podobno hrapavost, kot jo opazimo v Menišiji
- ▶ Izberite fizikalnega modela je zaradi pomanjkanja informacij o časovni dinamiki težka, natančnejši geološki študij dinamike reliefsa bi bil v pomoč

# Povzetek

- ▶ Segmentacija in analiza vrtač na digitalnem reliefu je relativno enostavna naloga
- ▶ Vrtače so približno Gaussove oblike
- ▶ Kardar-Parisi-Zhang-ova rast površin napove podobno hrapavost, kot jo opazimo v Menišiji
- ▶ Izbera fizikalnega modela je zaradi pomanjkanja informacij o časovni dinamiki težka, natančnejši geološki študij dinamike reliefsa bi bil v pomoč
- ▶ Najbolj pravilen model se zdi Fisher-Kolmogorova enačba zaradi:

# Povzetek

- ▶ Segmentacija in analiza vrtač na digitalnem reliefu je relativno enostavna naloga
- ▶ Vrtače so približno Gaussove oblike
- ▶ Kardar-Parisi-Zhang-ova rast površin napove podobno hrapavost, kot jo opazimo v Menišiji
- ▶ Izbera fizikalnega modela je zaradi pomanjkanja informacij o časovni dinamiki težka, natančnejši geološki študij dinamike reliefsa bi bil v pomoč
- ▶ Najbolj pravilen model se zdi Fisher-Kolmogorova enačba zaradi:
  - ▶ časovnega razvoja oblike profila

# Povzetek

- ▶ Segmentacija in analiza vrtač na digitalnem reliefu je relativno enostavna naloga
- ▶ Vrtače so približno Gaussove oblike
- ▶ Kardar-Parisi-Zhang-ova rast površin napove podobno hrapavost, kot jo opazimo v Menišiji
- ▶ Izberite fizikalnega modela je zaradi pomanjkanja informacij o časovni dinamiki težka, natančnejši geološki študij dinamike reliefsa bi bil v pomoč
- ▶ Najbolj pravilen model se zdi Fisher-Kolmogorova enačba zaradi:
  - ▶ časovnega razvoja oblike profila
  - ▶ končne oblike pobočja profila