

# Vrtače dinarskega krasa

Rok Mihevc

Mentor: prof. Rudolf Podgornik

Univerza v Ljubljani  
Fakulteta za *matematiko in fiziko*



Ljubljana, 2014

# Pregled

## Preučevanje realnih vrtač

Realne vrtače

LiDAR

## Rast površin

Definicije

Rezultati

## Modeliranje

Kardar-Parisi-Zhang

Dinamične enačbe

Difuzijsko dinamične enačbe

# Kraške vrtače

So zaprte koncentrične depresije



Jurišče, Slovenija

## Kraške vrtače

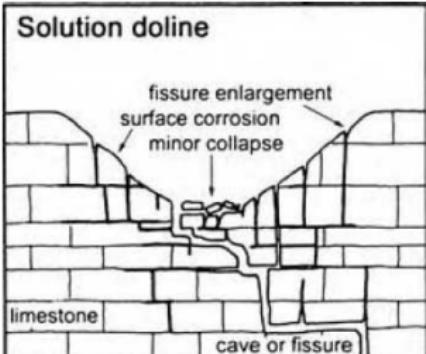
Najdemo jih na starih kraških poljih in planotah



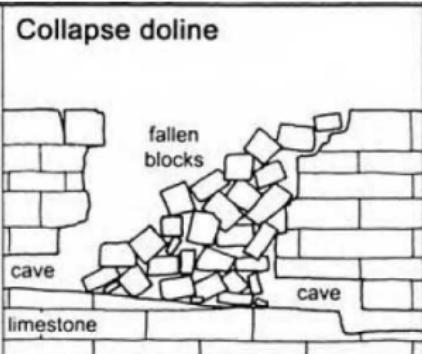
Kapljuh, BiH

## Kraške vrtače

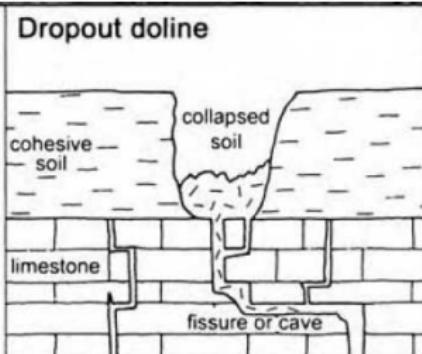
## **Več predlaganih modelov nastanka**



The diagram illustrates a cross-section of a buried doline. At the top, the label "Buried doline" is positioned above a layer of "soil". A dashed line separates the soil from the underlying rock. The rock layer is labeled "limestone" and shows a complex network of "caves and fissures". An arrow points from the text "possible compaction depression" to a specific feature in the limestone layer.



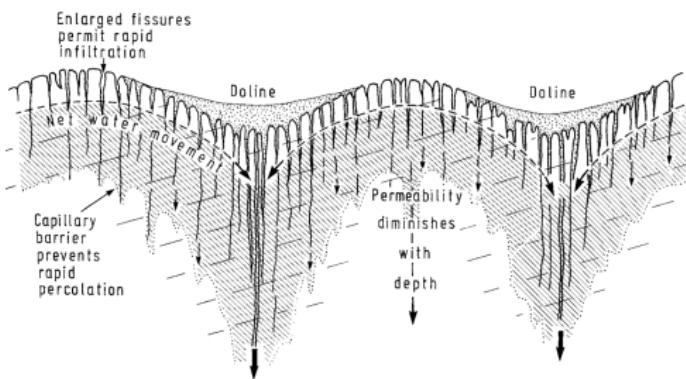
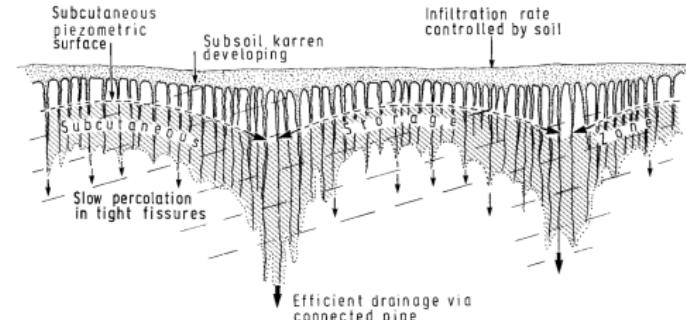
The diagram illustrates the formation of a caprock doline. It shows a cross-section of rock layers. At the top, a layer labeled 'caprock' rests on a bedrock layer. A large, irregularly shaped depression has developed in the caprock, labeled 'caprock doline'. Within this depression, numerous small, rectangular blocks representing talus or collapse material are shown falling or scattered. Two specific locations within the depression are labeled 'cave'. The bedrock layer below the caprock is also labeled 'cave' at its base. The overall process depicted is the gradual collapse of the caprock into the underlying limestone bedrock, creating a depression.



The diagram illustrates the process of suffusion doline formation. It shows a cross-section of a limestone bed (labeled 'limestone') beneath a layer of non-cohesive soil (labeled 'non-cohesive soil'). A fissure or cave (labeled 'fissure or cave') has developed in the limestone. An arrow labeled 'soil washing into fissure' points from the surface down into the fissure, indicating how soil erodes into the rock.

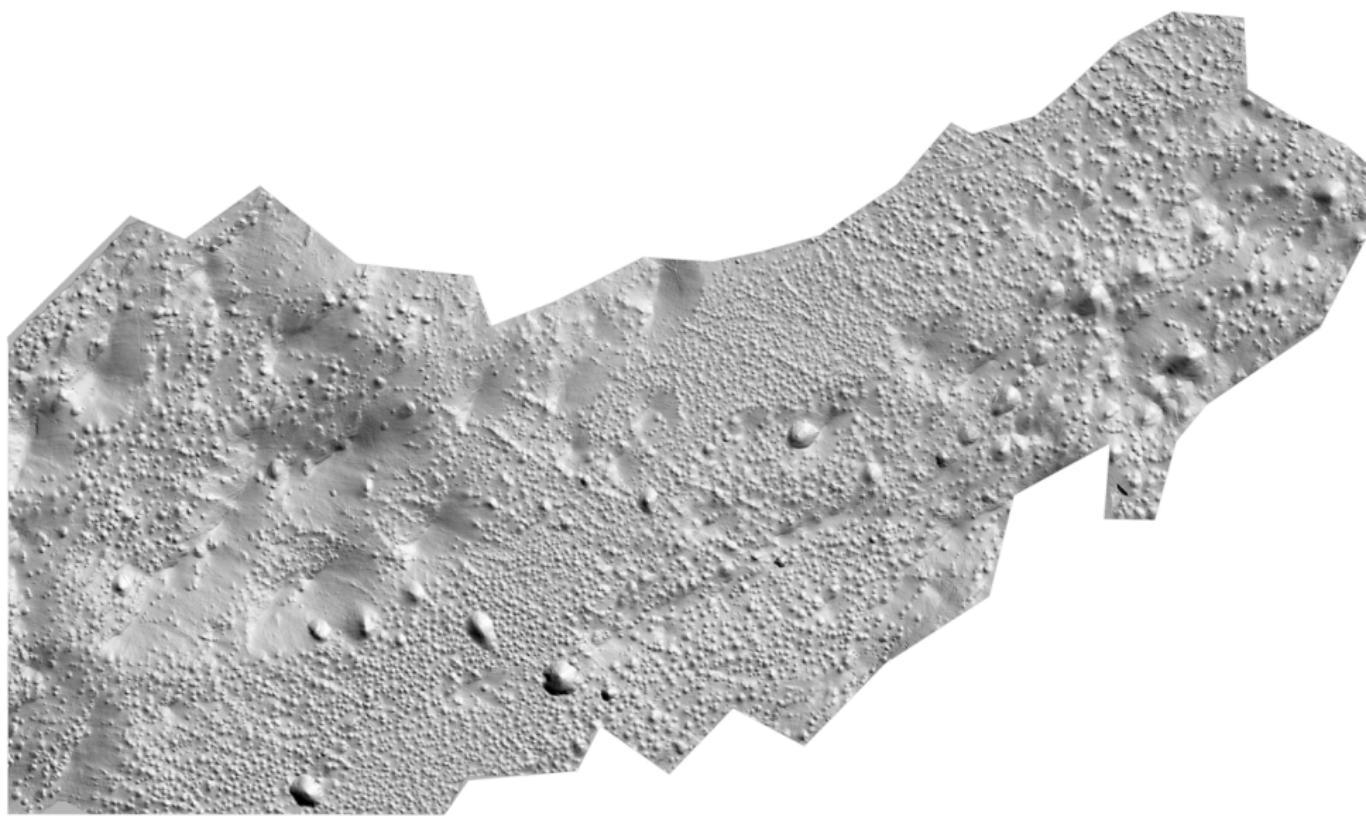
# Kraške vrtače

Ni podrobnejših študij procesov, ki jih oblikujejo



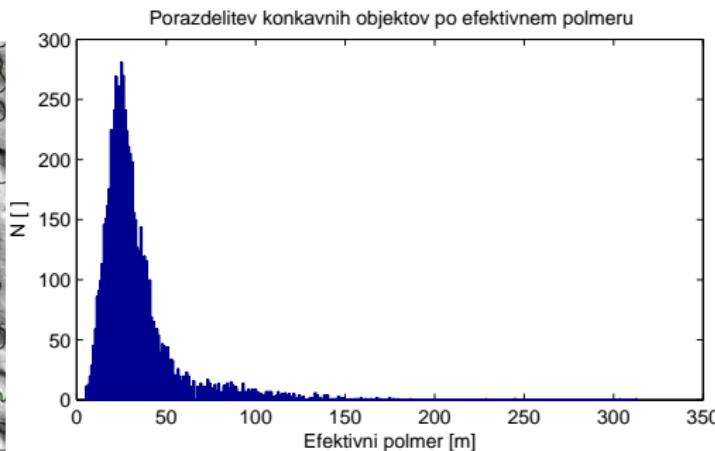
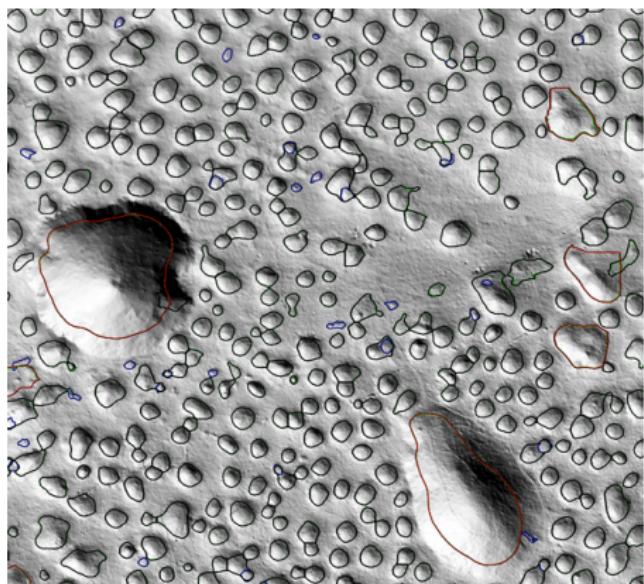
# LiDAR

Posnetek območja Menišije, ločljivost  $1m^2$



# Računalniški vid

Identificiramo konkavnosti v reliefu in jih označimo

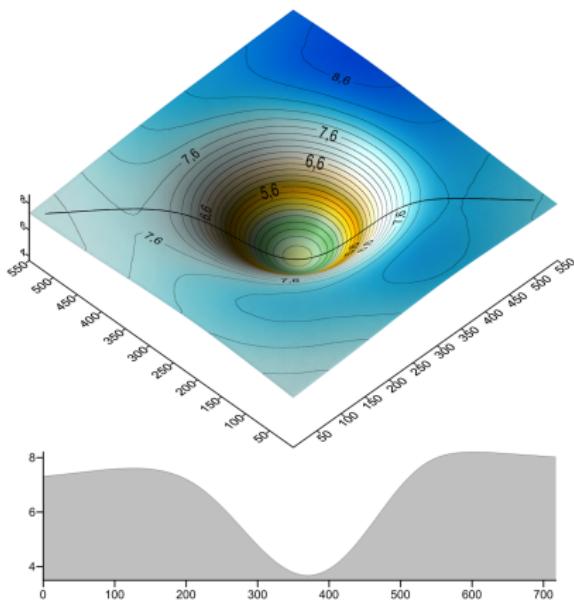


$$A = \sum \text{pixli}$$

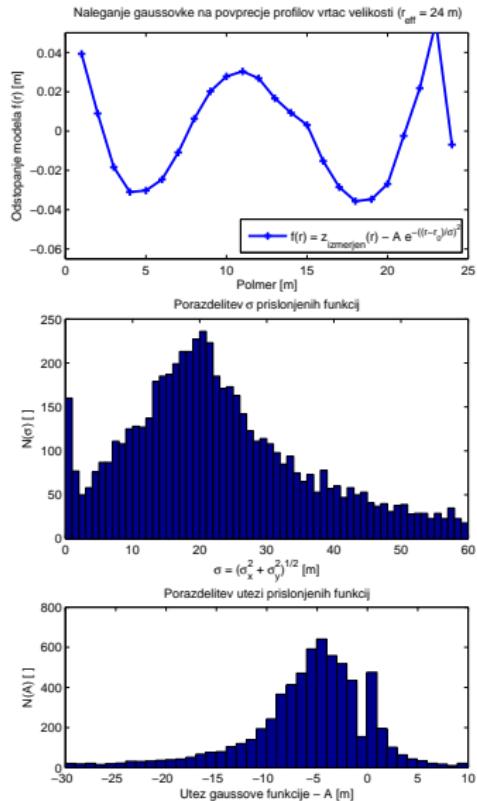
$$r_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

# Povprečimo konkavnosti

Dobimo 'povprečno vrtačo', prilegamo gaussovko na vse najdene konkavnosti

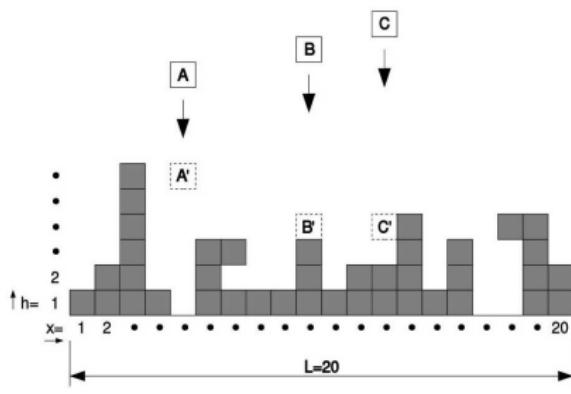


$$f(r) = A \cdot e^{-\frac{(r-r_0)^2}{\sigma^2}} + C \quad (1)$$



# Rast površin

Širina površine, priraščanje



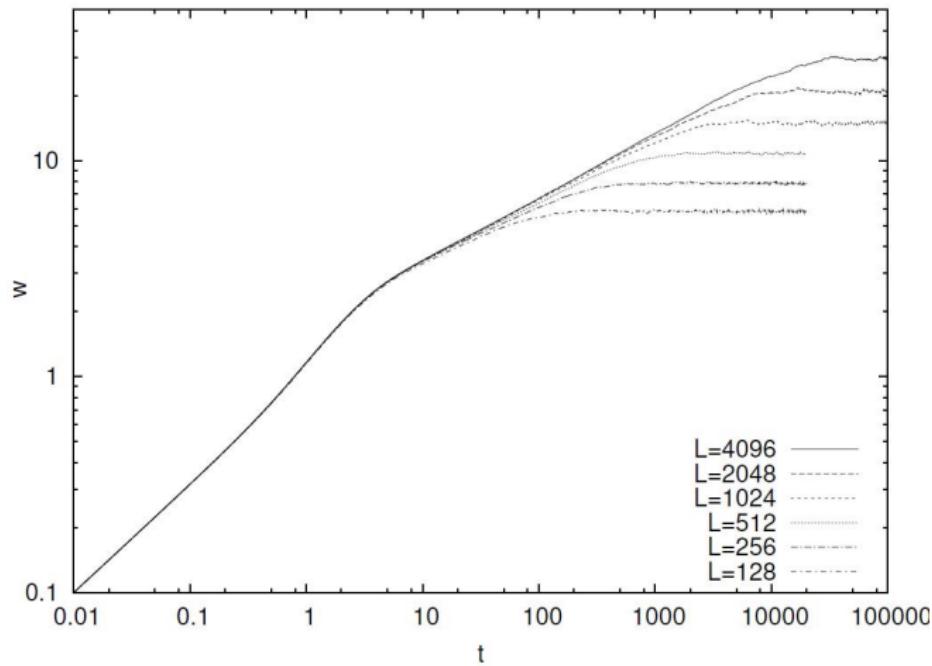
$$\bar{h} = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L h(i, t) \quad (2)$$

$$w(L, t) = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (h(i, t) - \bar{h}(t))^2} \quad (3)$$

$$\bar{h}(t) \sim t \quad (4)$$

# Rast površin

Povprečna širina površine v času, eksponent hrapavosti

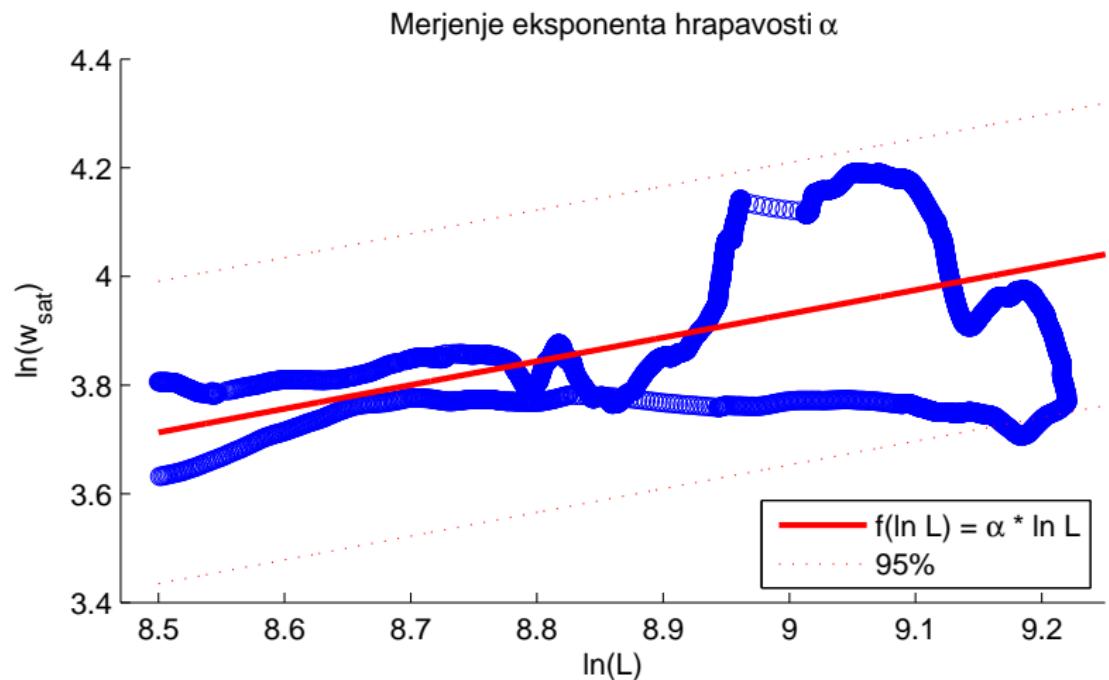


$$w(L, t) = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (h(i, t) - \bar{h}(t))^2} \quad (5)$$

$$w_{sat}(L) \sim L^\alpha \quad (6)$$

# Rast površin

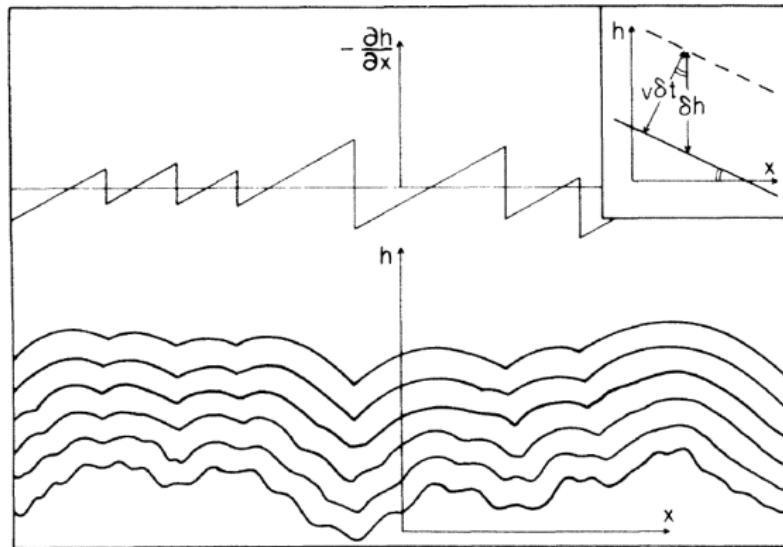
Zasičeni režim, hrapavost Menišije



$$\alpha = \frac{\partial(\ln(w_{sat}))}{\partial(\ln L)} = 0.4368 \pm 0.0005 \quad (7)$$

# Kardar-Parisi-Zhang

Stohastična difuzijska enačba, teoretično napovedana hrapavost



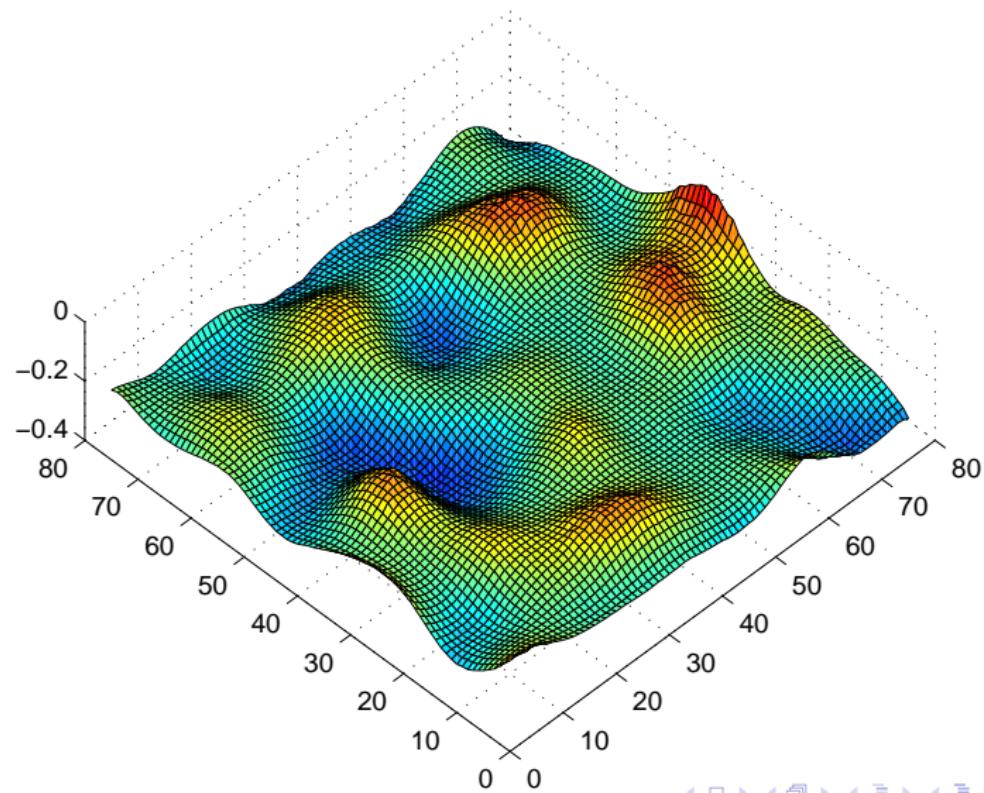
$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nu \nabla^2 h + \frac{\lambda}{2} (\nabla h)^2 + \eta(\mathbf{x}, t) \quad (8)$$

$$\langle \eta(\mathbf{x}, t) \eta(\mathbf{x}', t') \rangle = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') (t - t') \quad (9)$$

Napove:  $\alpha = \frac{1}{2}$

# Kardar-Parisi-Zhang

## Simulacija



# Dinamične enačbe

Prehod na determinističen opis

## Stohastične enačbe

- ▶ Kardar-Parisi-Zhang-ova rast površja nam ne da determinističnega modela rasti posamezne vrtače
- ▶ Možen je le izračun verjetnosti, da bomo pri izbrani začetni površini dobili določeno končno

## Dinamične enačbe

- ▶ Opišemo nekaj modelov rasti, ki ustvarijo vrtačam podobne oblike

# Dinamične enačbe

Primer: Omejena eksponentna rast

## Model

Rast v času je odvisna od višine in razdalje do nosilne kapacitete.  
Odziv je bolj skokovit kot pri logistični rasti.

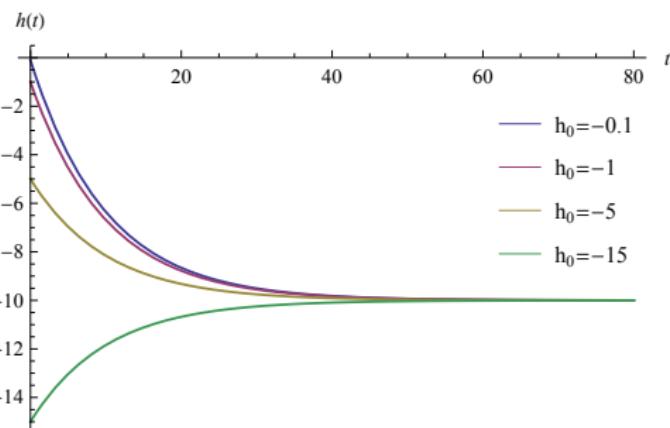
$$\frac{\partial h(t)}{\partial t} = a \cdot (K - h(t)) = aK - ah(t) \quad (10)$$

## Rešitev

$$h(t) = K - (K - h_0)e^{-at} \quad (11)$$

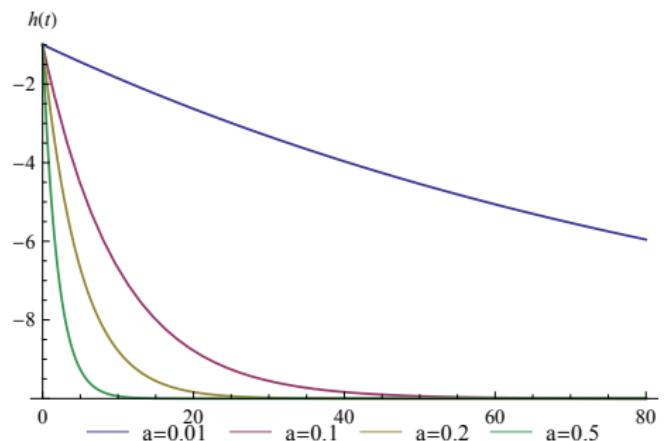
# Dinamične enačbe

Primer: Omejena eksponentna rast



$$K = -10$$

$$a = 0.1$$



$$K = -10$$

$$h_0 = -1$$

# Dinamične enačbe

Primer: Logistična rast

## Model

Rast v času je odvisna od višine in razdalje do nosilne kapacitete

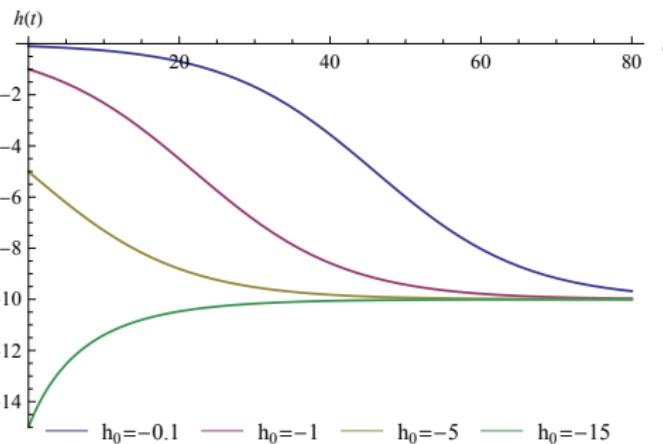
$$\frac{\partial h(t)}{\partial t} = a \cdot \left(1 - \frac{h(t)}{K}\right) h(t) \quad (12)$$

## Rešitev

$$h(t) = \frac{h_0 K e^{at}}{K + h_0(e^{at} - 1)} \quad (13)$$

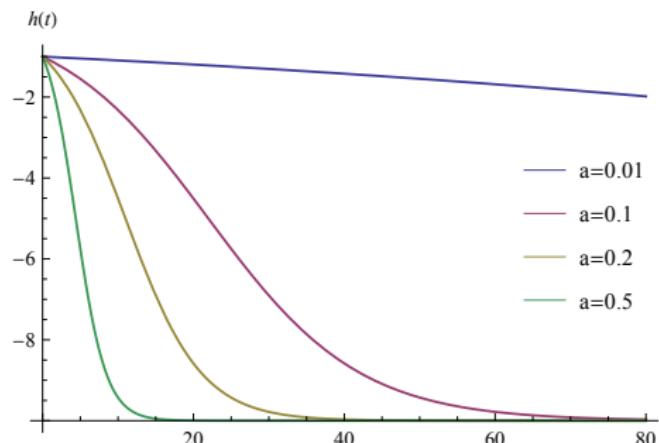
# Dinamične enačbe

Primer: Logistična rast



$$K = 10$$

$$a = 0.1$$



$$K = 10$$

$$h_0 = 0.1$$

# Difuzijsko dinamične enačbe

Dodamo difuzijski člen

## Dinamične enačbe

- ▶ Nam dajo modele rasti
- ▶ Iz modela rasti bi lahko sklepali proti procesom, ki oblikujejo vrtače
- ▶ So oblike

$$\frac{\partial h(t)}{\partial t} = F(h(t)) \quad (14)$$

## Difuzijske dinamične enačbe

- ▶ Modele rasti dopolnimo z difuzijo, ki jo pričakujemo zaradi časovnega okvira procesa nastanka vrtač
- ▶ So oblike

$$\frac{\partial h(t, x)}{\partial t} = D\Delta h(t, x) + F(h(t)) \quad (15)$$

# Difuzijsko dinamične enačbe

Primer: Omejena eksponentna rast

## Model

Rešitev iščemo numerično

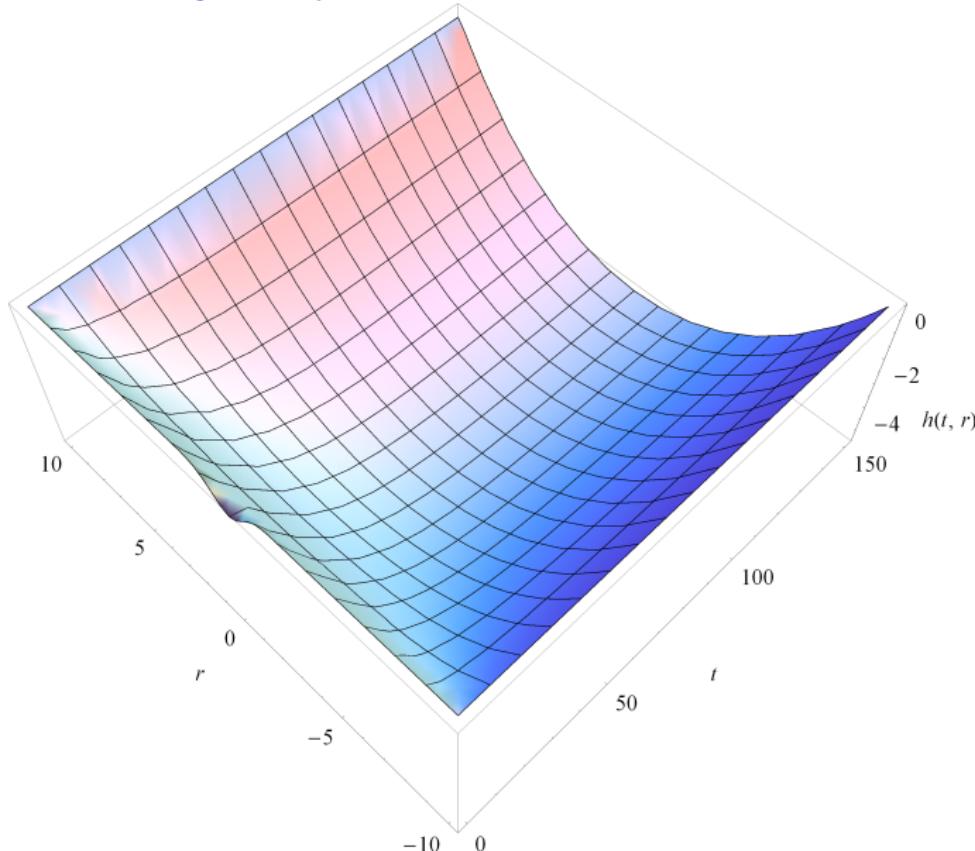
$$\frac{\partial h(t, x)}{\partial t} = D \Delta h(t, x) + a \cdot (K - h(t, x)) \quad (16)$$

## Robni pogoji

$$\begin{aligned} h(0, x) &= -e^{-x^2}, x \in D \\ h(t, x) &= 0, x \in \partial D \\ \frac{\partial h(t, x)}{\partial n} &= 0, x \in \partial D \end{aligned} \quad (17)$$

# Difuzijsko dinamične enačbe

Primer: Omejena eksponentna rast



$$D = 1$$

$$a = \frac{1}{50}$$

$$K = -10$$

# Difuzijsko dinamične enačbe

Primer: Difuzijska logistična rast

## Model

Fisher-Kolmogorov-a enačba, rešitev iščemo numerično

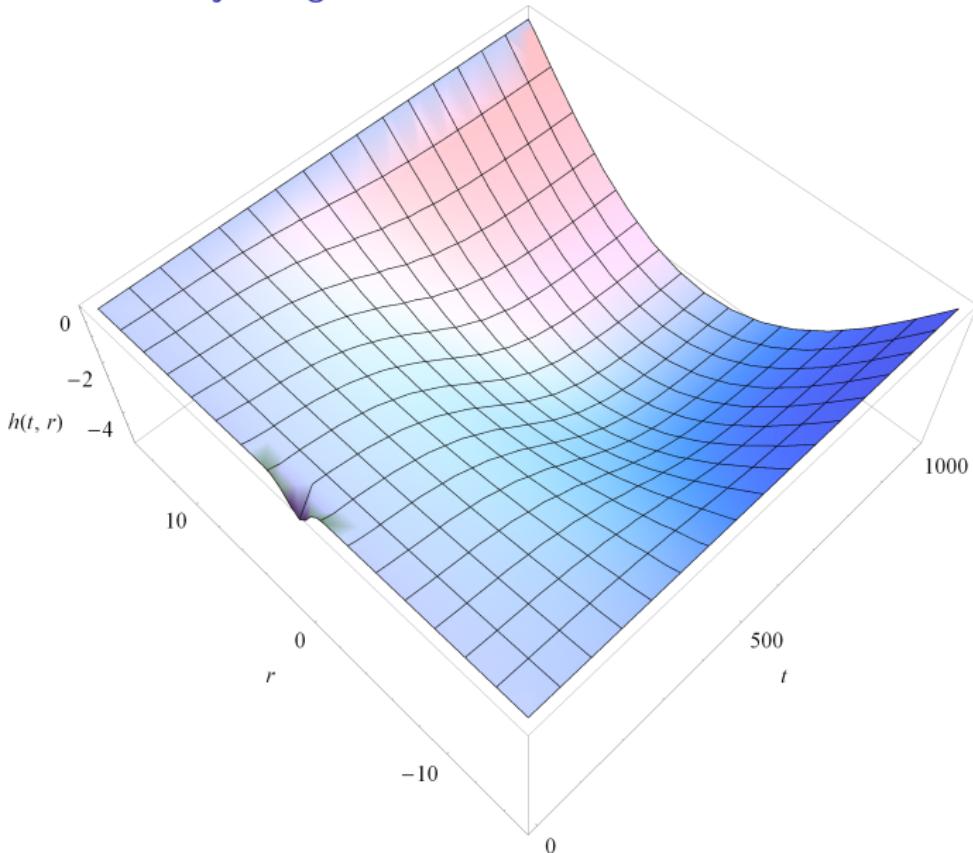
$$\frac{\partial h(t, x)}{\partial t} = D \Delta h(t, x) + a \cdot h(t, x) \cdot \left(1 - \frac{h(t, x)}{K}\right) \quad (18)$$

## Robni pogoji

$$\begin{aligned} h(0, x) &= -e^{-x^2}, x \in D \\ h(t, x) &= 0, x \in \partial D \\ \frac{\partial h(t, x)}{\partial n} &= 0, x \in \partial D \end{aligned} \quad (19)$$

# Difuzijsko dinamične enačbe

Primer: Difuzijska logistična rast



$$D = 1$$

$$a = \frac{1}{50}$$

$$K = -10$$

# Povzetek

- ▶ Segmentacija in analiza vrtač na digitalnem reliefu je relativno enostavna naloga

# Povzetek

- ▶ Segmentacija in analiza vrtač na digitalnem reliefu je relativno enostavna naloga
- ▶ Vrtače so približno Gaussove oblike

# Povzetek

- ▶ Segmentacija in analiza vrtač na digitalnem reliefu je relativno enostavna naloga
- ▶ Vrtače so približno Gaussove oblike
- ▶ Kardar-Parisi-Zhang-ova rast površin napove podobno hrapavost, kot jo opazimo v Menišiji

# Povzetek

- ▶ Segmentacija in analiza vrtač na digitalnem reliefu je relativno enostavna naloga
- ▶ Vrtače so približno Gaussove oblike
- ▶ Kardar-Parisi-Zhang-ova rast površin napove podobno hrapavost, kot jo opazimo v Menišiji
- ▶ Izbera fizikalnega modela je zaradi pomanjkanja informacij o dinamiki težka

# Povzetek

- ▶ Segmentacija in analiza vrtač na digitalnem reliefu je relativno enostavna naloga
- ▶ Vrtače so približno Gaussove oblike
- ▶ Kardar-Parisi-Zhang-ova rast površin napove podobno hrapavost, kot jo opazimo v Menišiji
- ▶ Izberite fizikalnega modela je zaradi pomanjkanja informacij o dinamiki težka
  - ▶ Najmanj napačen se zdi model logistične difuzijske rasti

# Povzetek

- ▶ Segmentacija in analiza vrtač na digitalnem reliefu je relativno enostavna naloga
- ▶ Vrtače so približno Gaussove oblike
- ▶ Kardar-Parisi-Zhang-ova rast površin napove podobno hrapavost, kot jo opazimo v Menišiji
- ▶ Izberite fizikalnega modela je zaradi pomanjkanja informacij o dinamiki težka
  - ▶ Najmanj napačen se zdi model logistične difuzijske rasti
- ▶ Natančnejši geološki študij dinamike reliefa bi bil v pomoč