

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO  
ODDELEK ZA FIZIKO  
UNIVERZITETNI ŠTUDIJ, NARAVOSLOVNA SMER

Rok Mihevc

## **Kraške vrtače Dinarskega krasa**

DIPLOMSKO DELO

MENTOR: prof. dr. Rudolf Podgornik

Ljubljana, 2014

## IZJAVA O AVTORSTVU DIPLOMSKEGA DELA

Spodaj podpisani Rok Mihevc, z vpisno številko **28030017**, sem avtor diplomskega dela z naslovom:

*Kraške vrtače Dinarskega krasa*

S svojim podpisom zagotavljam, da:

- sem diplomsko delo izdelal samostojno pod mentorstvom prof. dr. Rudolfa Podgornika,
- so elektronska oblika diplomskega dela, naslov (slov., angl.), povzetek (slov., angl.) ter ključne besede (slov., angl.) identični s tiskano obliko diplomskega dela

V Ljubljani, dne . februarja 2014

Podpis avtorja:

# Kazalo

## Povzetek

## Abstract

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Preučevanje realnih vrtač</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Analitično modeliranje vrtač</b>	<b>13</b>
3.1	Model z Darcyevim tokom . . . . .	13
3.2	Difuzijski model . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Zaključek</b>	<b>18</b>

# Povzetek

Z numeričnimi metodami obdelamo  $60\text{km}^2$  velik digitalni model reliefsa Menišije ločljivosti  $1\text{m}^2$  in identificiramo veliko število kraških vrtač. Iz oblik velikega števila vrtač izračunamo povprečno obliko vrtače in jo analitično opišemo z gaussovo funkcijo. Odkrite realne vrtače nato prilegamo na gaussovo funkcijo, ter pogledamo porazdelitev parametrov le-te na našem vzorcu.

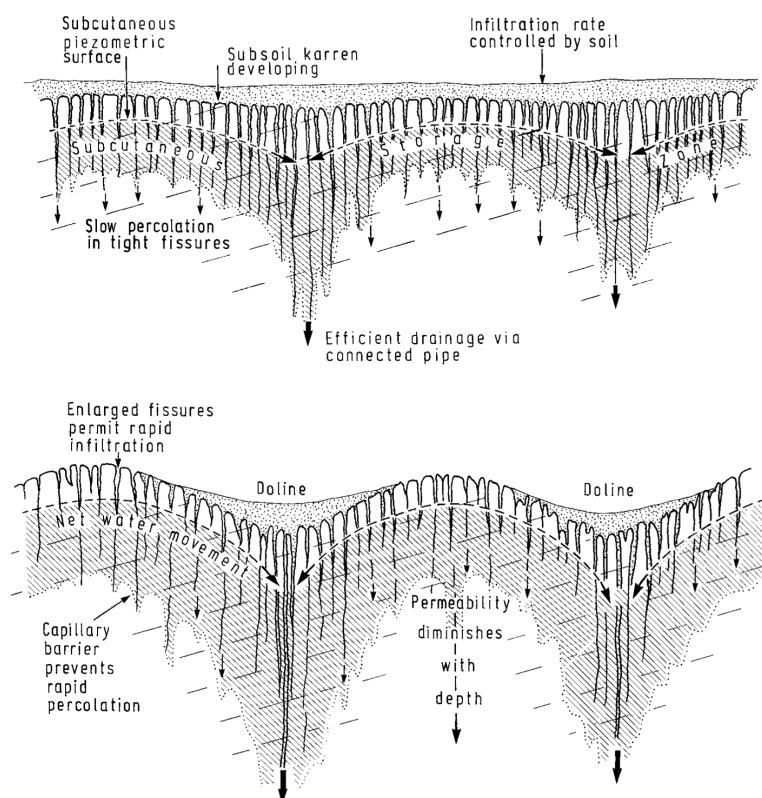
Zaradi geološke zgodovine področja Menišije in medsebojne podobnosti vrtač na tem območju, postavimo tezo da jih je oblikoval isti geomorfološki proces, ki vodi do iste stabilne oblike, ki so jo vrtače na tem območju že dosegle. S pomočjo podatkov pridobljenih v prvem delu naloge predlagamo časovno statičen nastavek, ki analitično opisuje najdene vrtače. Postavimo tezo, da vrtače nastanejo z difuzijo in predlagamo dinamičen nastavek za obliko vrtače in difuzijsko konstanto, ki rešita difuzijsko enačbo.

# **Abstract**

Abstract

# Poglavlje 1

## Uvod



Slika 1.1: Priljubljena geomorfološka shema za razlago vrtač. Vir: [FW07]

Namen tega dela je na podlagi digitalnega modela reliefa dokumentirati in statistično preučiti velik vzorec realnih kraških vrtač na slovenskem Dinarskem krasu, predlagati analitično funkcijo, ki bi opisala idealno vrtačo, ter na podlagi le-te poiskusiti modelirati naravne procese, ki povzročajo nastanek in obliko vrtač.

Vrtače so zaobljene lijakaste globeli, globine nekaj metrov in premera nekaj deset metrov. Obstaja več geomorfoloških modelov njihovega nastanka.

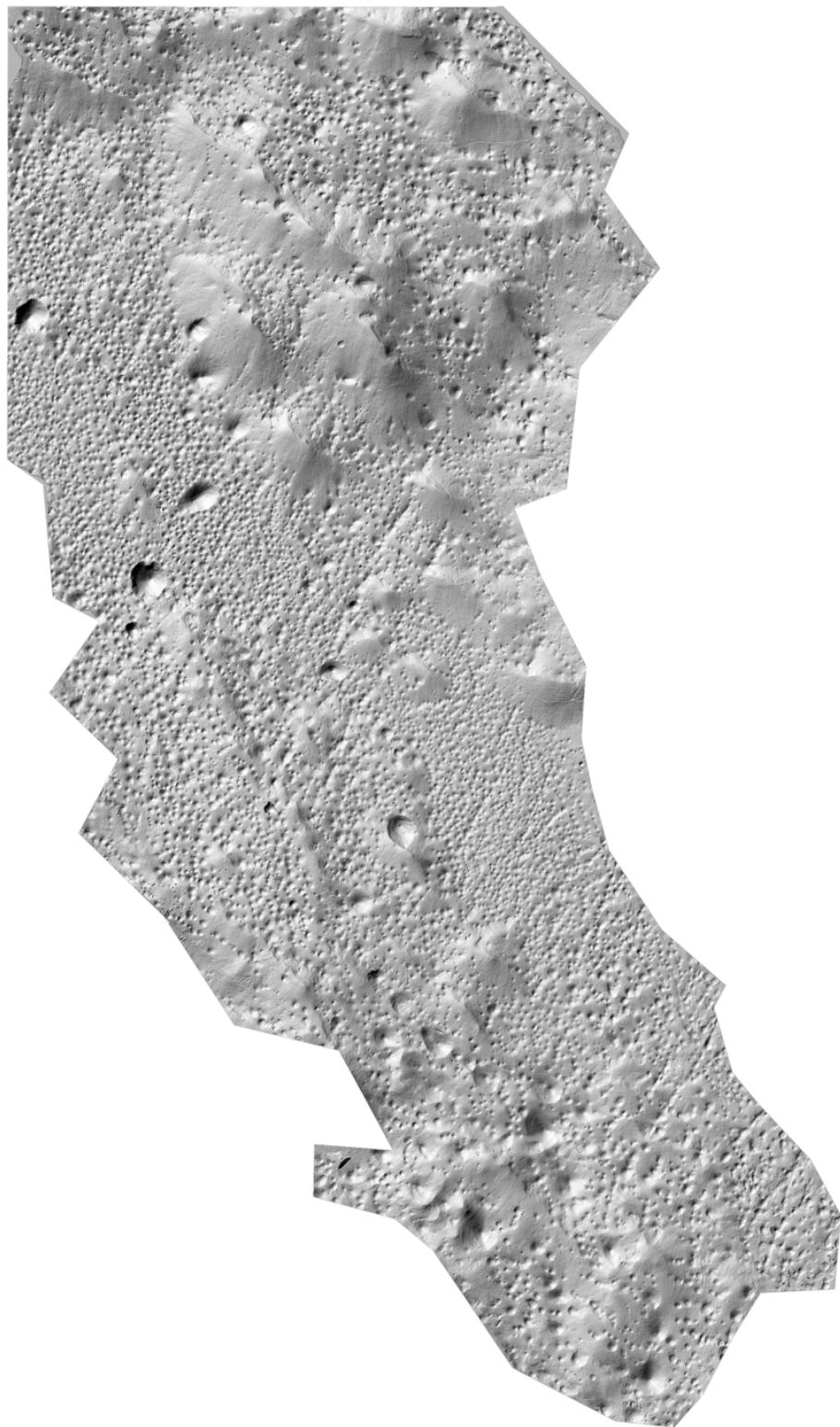
Za študij realnih vrtač uporabimo digitalni model reliefa Menišije (Slika 1.2) ločljivosti 1m, ki omogoča zanesljivo identifikacijo in študij vrtač ter udornic (Slika 1.3).



Slika 1.2: Menišija,  $60\text{km}^2$  veliko območje med Cerknicico in Logatcem vsebuje nekaj tisoč vrtač in več udornic in predstavlja približno odstotek slovenskega krasa. Vir: Geopedia, Geodetski inštitut Slovenije

Površje Menišije sestavlja plasti krednega apnenca (starost nastanka 135-65 miljonov let), ki so na površje prišli zaradi dogodkov povezanih s podrivanjem Adriatske plošče (17-7 miljonov let). Menišija je bila uravnano

kraško polje do 3.5 miljona let pred sedanjostjo, ko se je zaradi tektonske aktivnosti dvignila nad okolico in vzpostavljeni so bili hidrološki pogoji za nastanek vrtač. Hitrost zniževanja (denudacije) kraškega površja se ocenjuje na 20-50 m / miljon let, torej se je površje Menišije v času od nastanka znižalo za 70-175m, hkrati pa so se v njem pojavile vrtače, udornice in brezstrope jame. [VF06] [PCV10]

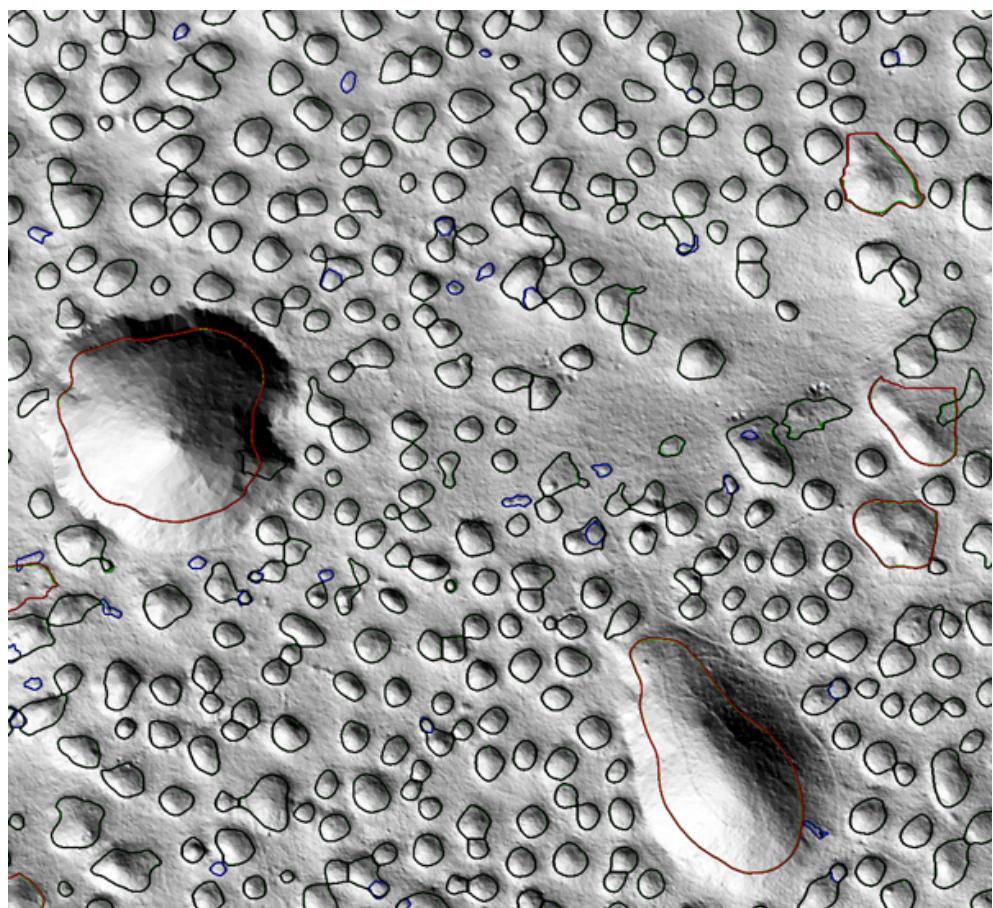


Slika 1.3: Senčen 3D relief dela Menišije uporabljen v tej nalogi. Vir: Geodetski inštitut Slovenije [LAK] po metodi [KPO<sup>+</sup>07].

## Poglavlje 2

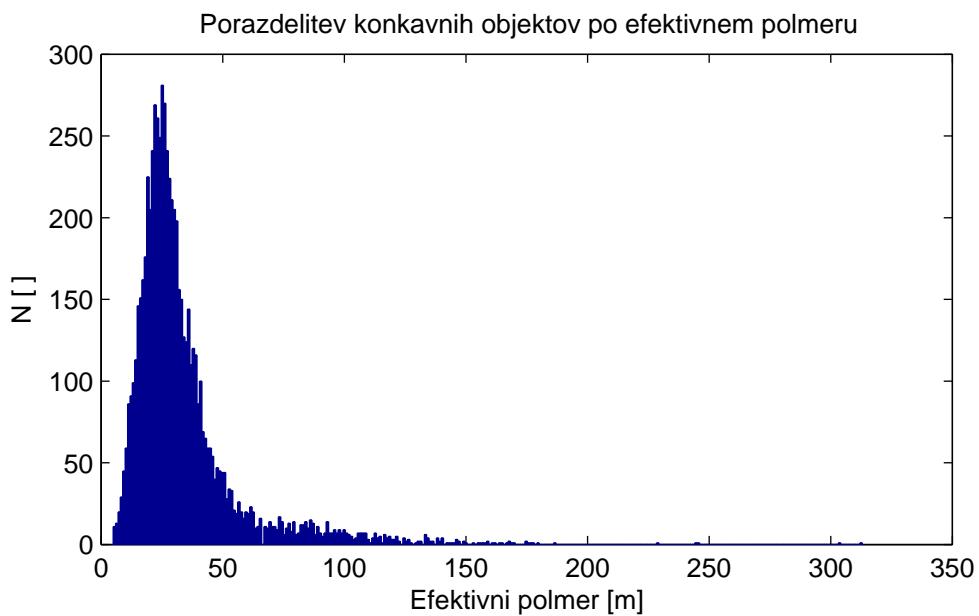
### Preučevanje realnih vrtač

Identifikacijo velike količine objektov se lotimo s segmentacijo po konkavnosti, kot predlaga [DY13]. Točke, ki so nižje od svoje okolice imajo nižji indeks konkavnosti, točke višje od svoje okolice pa višjega. Pri tem je pomembna tudi pametna izbiro okolice - od nje je odvisno kako velike konkavnosti bomo zaznali. Končno zavržemo konveksne dele površja in konkavne odberemo kot vrtače. Rezultat vidimo na sliki 2.1. Opaziti velja, da izbrana metoda segmentacije del robov konkavnih objektov klasificira kot konkavne in zato podcenii radij. Za naše namene to ni pretirano moteče, saj to podcenitev zlahka kompenziramo kasneje.



Slika 2.1: Del od 8687 zaznanih konkavnih objektov na območju Menišije.  
Poleg vrtač so na sliki vidne tudi udornice.

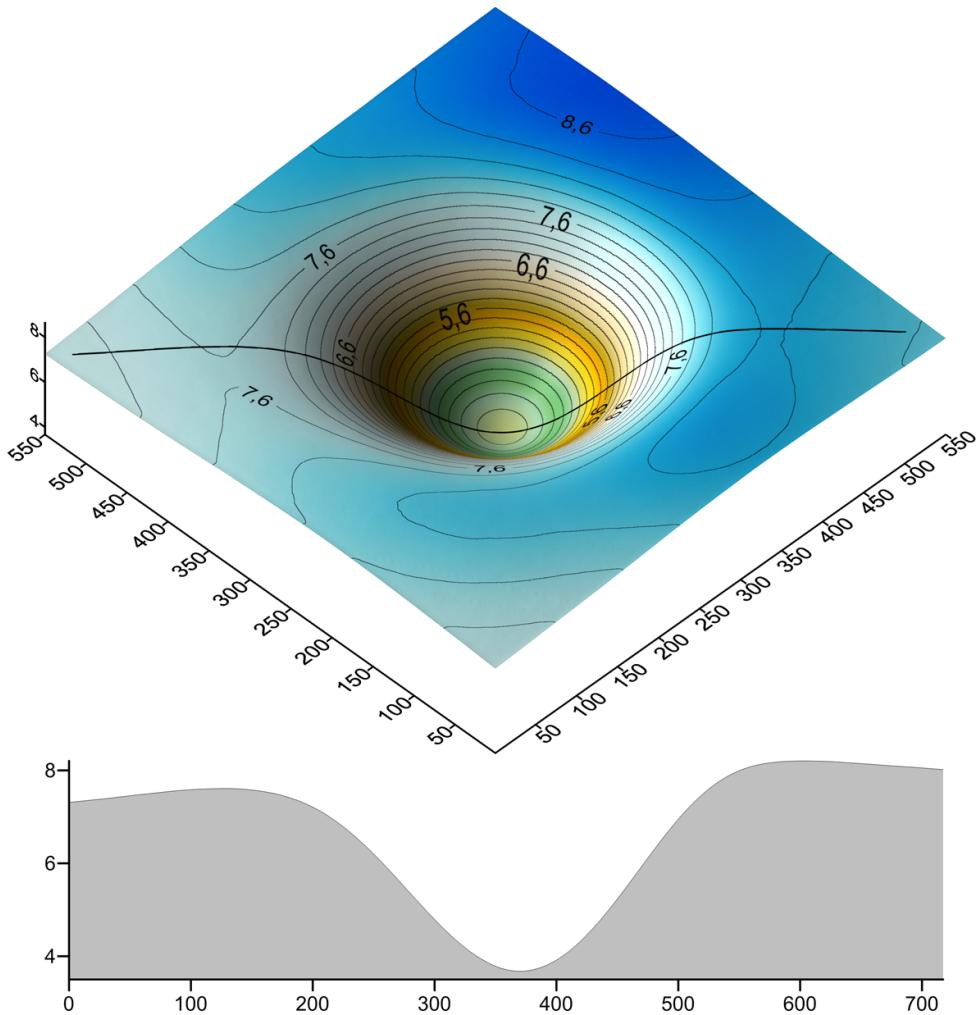
Najdeni konkavni objekti imajo porazdelitev efektivnih polmerov ( $r_{eff} = \sqrt{\frac{A_{eff}}{\pi}}$ ),  
kot vidno na sliki 2.2.



Slika 2.2: Polmeri konkavnih objektov v Menišiji, vrh pade v razred od 24m do 25m

To daje slutiti, da bodisi obstaja ravnovesna velikost vrtače, h kateri konvergirajo vse konkavne oblike v območju ne glede na njihov nastanek, bodisi da so vsi konkavni objekti v tem območju nastali v kratkem časovnem obdobju in se razvijali z enako hitrostjo. Odločimo se za raziskovanje prve možnosti. Predvidevamo torej, da obstaja ravnovesna oblika vrtače, ki bi se pojavila na idelani podlagi, če bi preteklo dovolj časa.

Posamezne realne vrtače zaradi lokalnih pogojev in zgodovine razvoja reliefa niso simetrične, a zdi se, da so si med seboj podobne. Da bi ugotovili idealno obliko vrtače, izračunamo povprečje velikega števila realnih vrtač. Uporabimo dva pristopa - pri prvem (Slika 2.3) vrtače različnih velikosti raztegnemo in povprečimo, pri drugem (Slika 2.4) pa jih razdelimo v velikostne razrede in jih povprečimo znotraj le-teh.

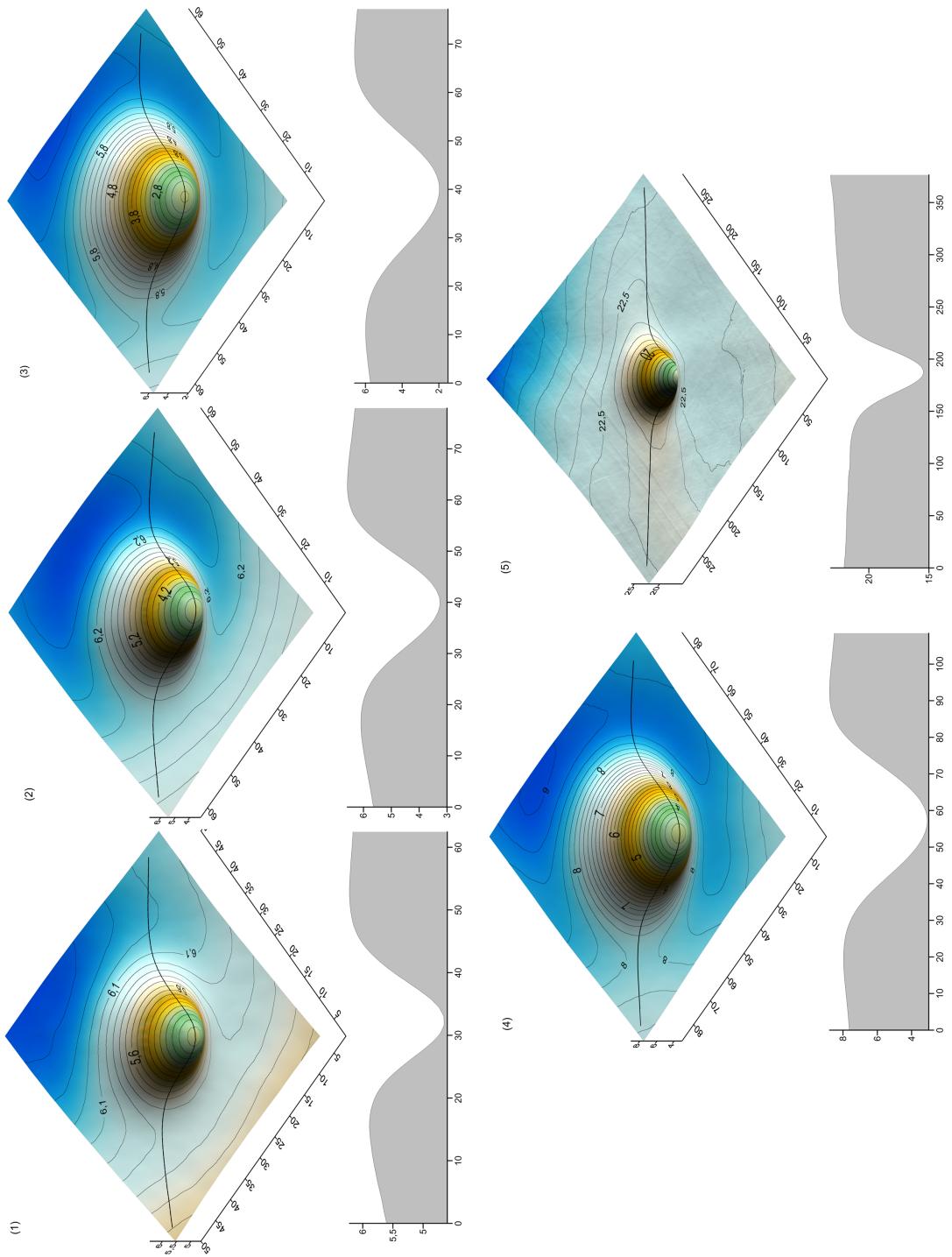


Slika 2.3: Povprečje 8687 realnih vrtač z območja Menišije, pred povprečjem so bile vrtače raztegnjene na velikost največje v setu.

Na prvi pogled se zdijo dobljeni profili gaussove oblike (2.1), kar ne zbuja nujno zaupanja v metodo. Zdi pa se, da so oblike simetrične po kotu, torej lahko problem reduciramo na študij njihovih profilov.

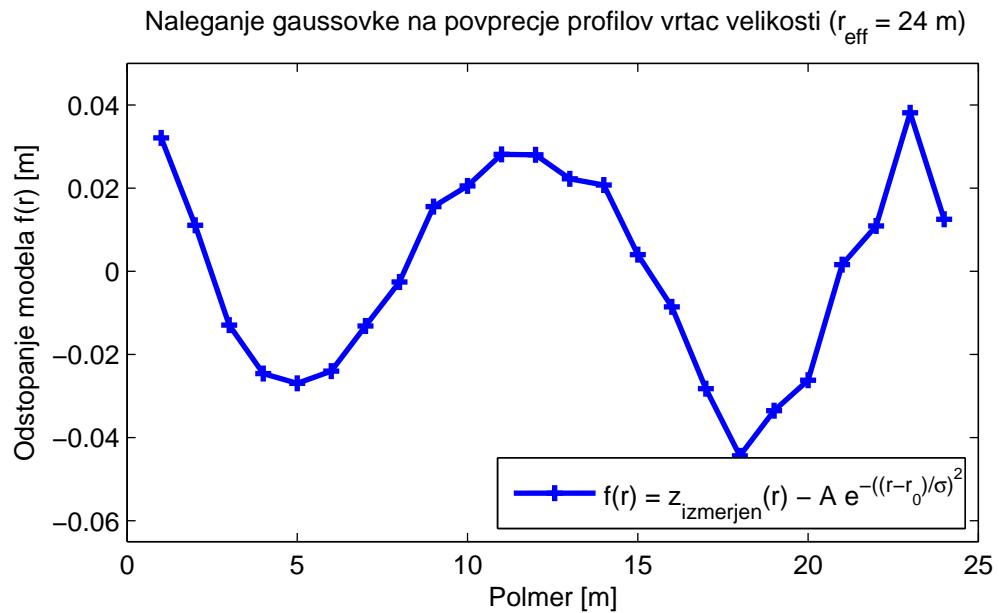
$$f(x, y) = A \cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\sigma_x^2} - \frac{(y-y_0)^2}{\sigma_y^2}} + B \cdot x + C \cdot y + D \quad (2.1)$$

Rezultat uporabimo tako, da gaussovo funkcijo nalegamo na realne vrtače in tako dobimo dobre lokacije njihovih najnižjih točk, ter njihove  $\sigma_x$  in  $\sigma_y$ .



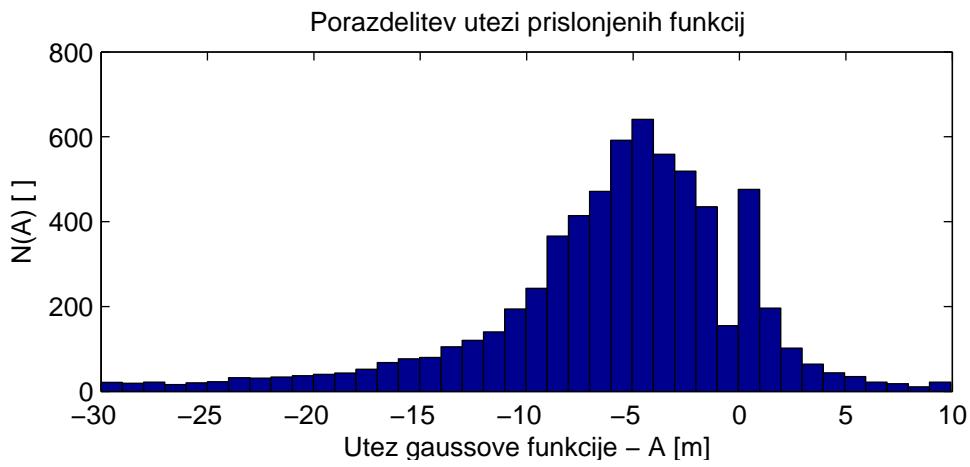
Slika 2.4: Vrtače po velikosti razdelimo v pet razredov (najmanjša petina gre v prvi razred, itn.), in jih znotraj razredov povprečimo.

Z lokacijami najnižjih točk lahko izračunamo povprečne profile vrtač ( $z(r)$ ), ki imajo enake efektivne polmere, naprimer: Slika 2.5

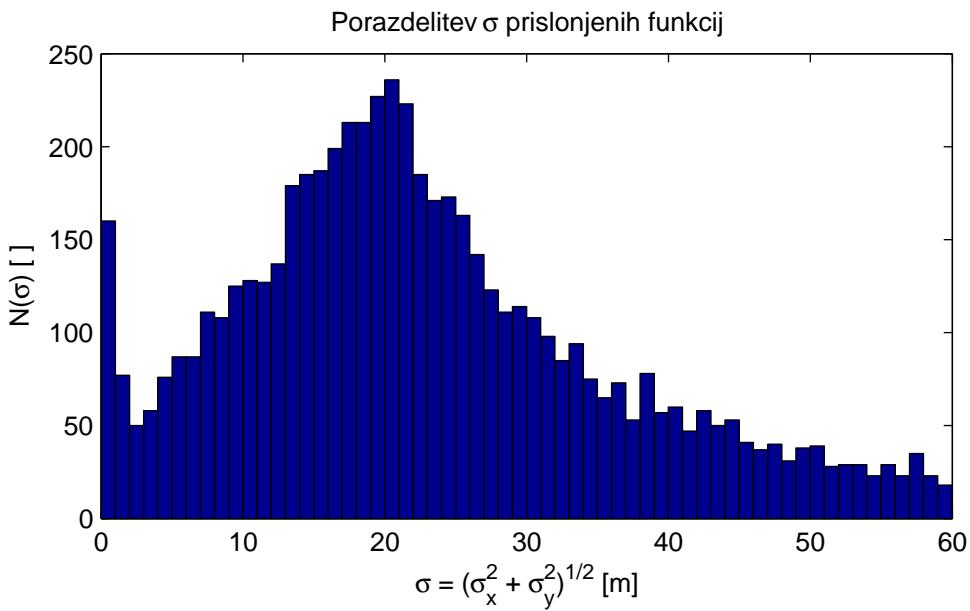


Slika 2.5: Povprecje profilov vrtač z efektivnimi polmeri med 23,5m in 24,5m. Prilegamo gaussovko (2.2). Graf prikazuje razliko med povprečnim profilom in prilegano gaussovko.

Pri tem pa je porazdelitev uteži gaussove funkcije Slika (2.6), porazdelitev  $\sigma$  pa Slika (2.7).



Slika 2.6: Porazdelitev uteži  $A$  za gaussovo funkcijo prilegano na vrtače v Menišiji



Slika 2.7: Porazdelitev uteži  $\sigma$  za gaussovo funkcijo prilegano na vrtače v Menišiji

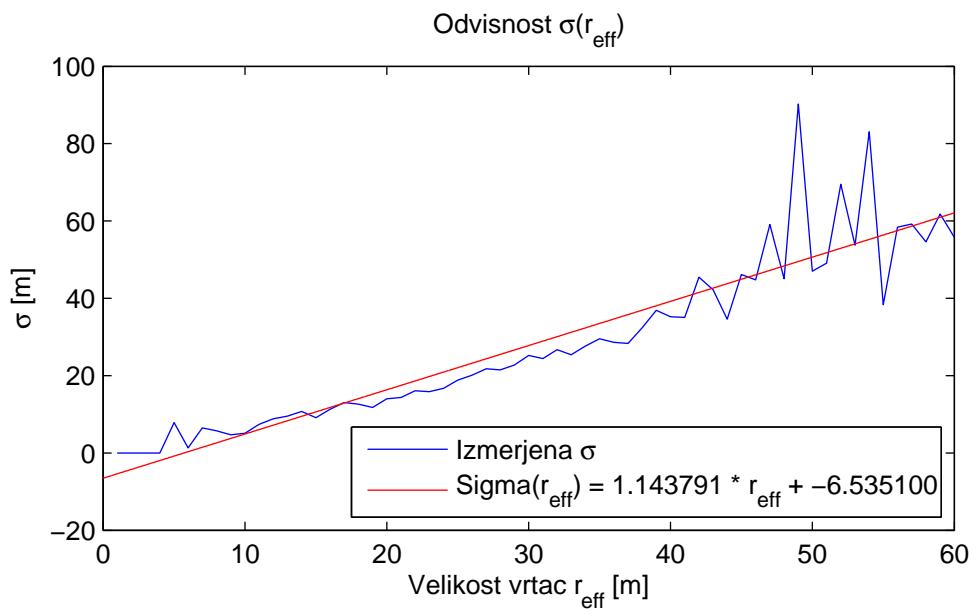
Če na dobljene profile nalegamo eksponentno krivuljo (2.2) in izrišemo

odvisnost  $\sigma_x(r_{eff})$ , vidimo (Slika 2.8).

$$f(r) = A \cdot e^{-\frac{(r-r_0)^2}{\sigma^2}} + C \quad (2.2)$$

Odvisnost  $\sigma_x(r_{eff})$  je iz naših podatkov težko določiti, zaenkrat poskusimo z linearno funkcijo (2.3)

$$\sigma(r_{eff}) = k \cdot r_{eff} + C \quad (2.3)$$



Slika 2.8:  $\sigma$  s polmerom narašča

Na podlagi teh podatkov bi težko skleniti, da (2.2) opiše profil idealne vrtače, a ujemanje je dobro in ga bomo uporabili za analitično modeliranje.

## Poglavlje 3

# Analitično modeliranje vrtač

### 3.1 Model z Darcyevim tokom

Vzamemo, da ob deževju voda napolni porozno prst do višine  $h$  in da je hitrost toka vode v prsti sorazmerna z gradientom višine -  $\nabla h$ . Uporabimo Darcyev zakon ( $k$  je permeabilnost prsti,  $g$  pa gravitacijski pospešek). (Ideja povzeta po [KK94])

$$\mathbf{v} = -k\rho g \nabla h \quad (3.1)$$

Vzamemo približek, da v centru vrtače ponikne ves tok, ki priteče v vanjo:

$$\Phi_v = 2\pi r h v \quad (3.2)$$

Enačbi združimo v:

$$h \nabla h = \frac{\Phi_v}{2\pi r v} \frac{v}{k \rho g} \quad (3.3)$$

Dobimo rezultat:

$$h(r_0)^2 = h(r_1)^2 - \frac{\Phi_v}{\pi k \rho g} \ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right) \quad (3.4)$$

Postavimo, da je raztopljanje sorazmerno s pretokom vode:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = C\mathbf{v} = -Ck\rho g \nabla h \quad (3.5)$$

Dobimo rezultat za  $z(r,t)$ :

$$z(r,t) = z_0 - \frac{t}{2r\sqrt{1 - \ln(\frac{1}{r})}} \quad (3.6)$$

Rezultat seveda ni pravilen, saj neskočnih brezen na krasu ne opazimo, je pa zanimiv, kot premislek, ki pravi, da se bo še tako drobna vrtača poglabljala.

## 3.2 Difuzijski model

Dinamiko vrtače poskusimo opisati z nelinearnim difuzijskim modelom, v prejšnjem poglavju najdenim in dimamično opremljenim nastavkom za stacionarno obliko vrtače (3.7), ter predpostavljeni difuzijsko konstanto (3.10). Privzamemo radialno simetričnost in računamo v cilindričnih koordinatah.

$$z(r,t) = A \left( 1 - e^{-\left(\frac{r}{\sigma}\right)^2} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right) \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j} \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \nabla(K(z)\nabla z) \quad (3.9)$$

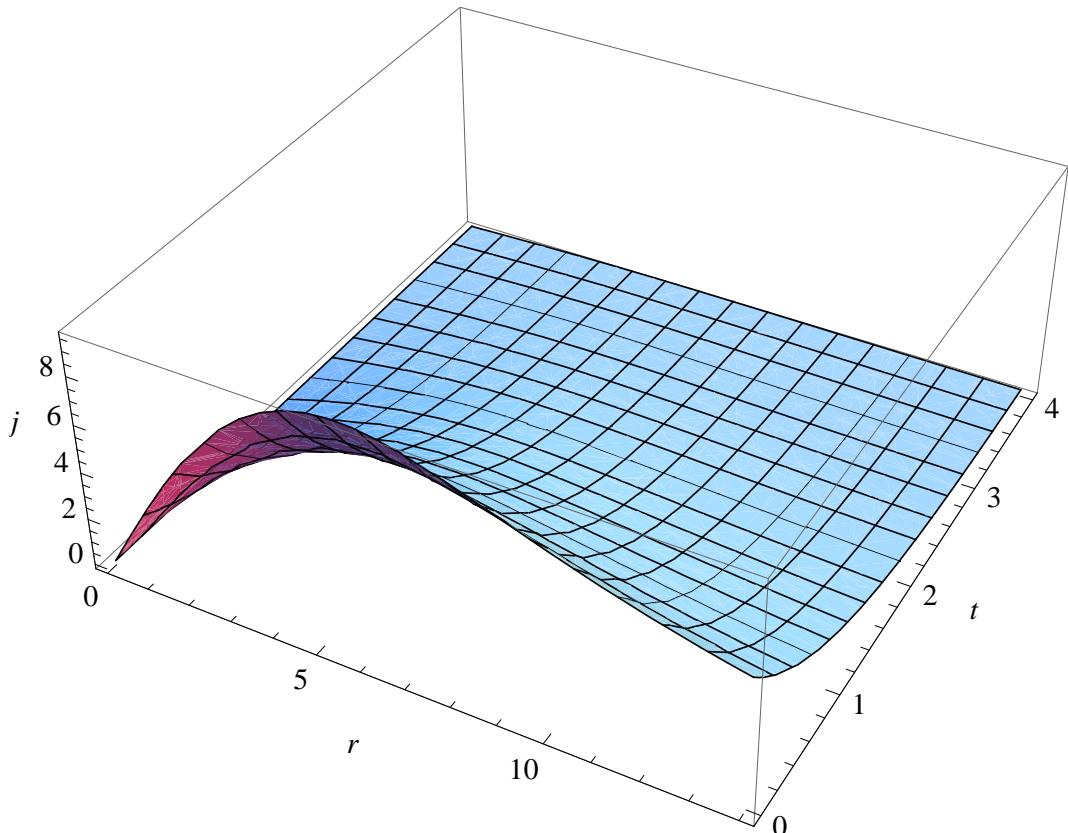
$$K(z) = -\frac{\left(-1 + e^{\frac{r^2}{\sigma^2}}\right) \sigma^4}{4(-1 + e^{t/\tau}) r^2 \tau} \quad (3.10)$$

$$\mathbf{j} = \frac{A\sigma^2}{2\tau} \frac{e^{-\left(\frac{r}{\sigma}\right)^2} - 1}{r} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.11)$$

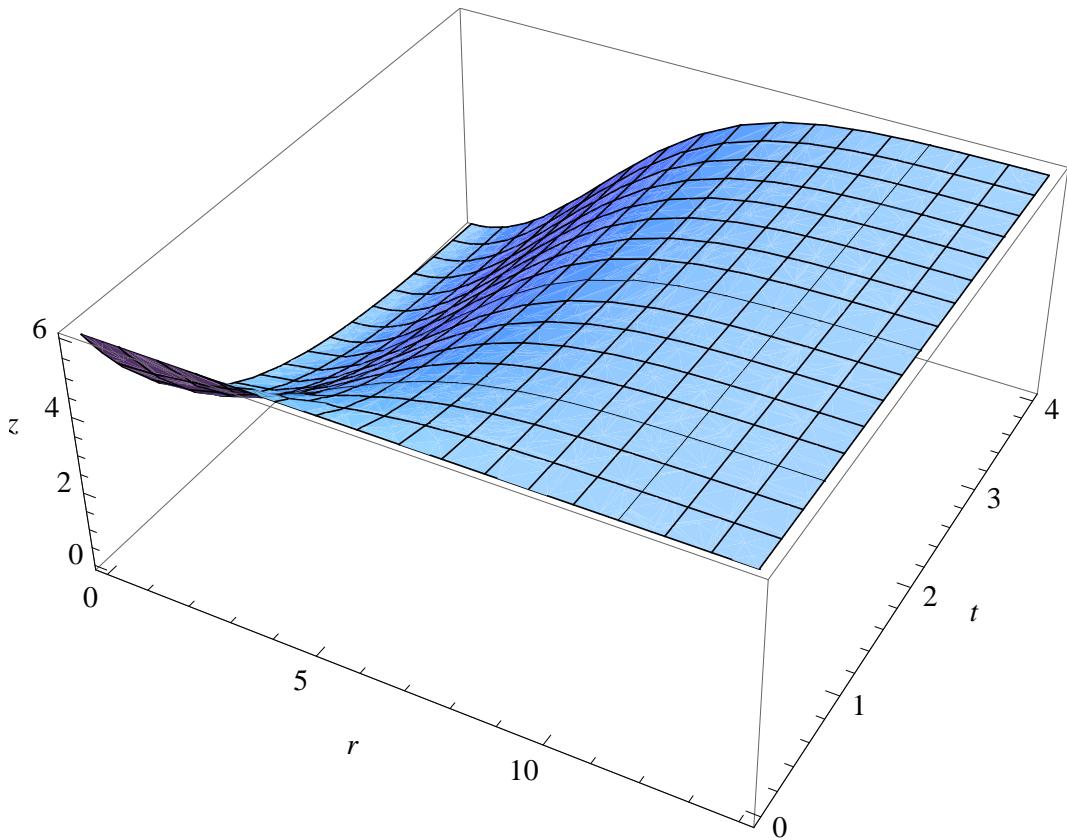
$$\mathbf{j} = \frac{A\sigma^2}{2\tau} \frac{\left(1 - \frac{r^2}{\sigma^2} + O[r]^4\right) - 1}{r} e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{A\sigma^2}{2\tau} \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{t}{\tau}} + O[r^3] \quad (3.12)$$

Časovni odvod dinamičnega nastavka za vrtačo (3.7) se pri difuzijski konstanti (3.10) ujema z rezultatom difuzijske enačbe (3.9).

Izrišemo časovno dinamiko profila vrtače (3.7) in toka (3.11) - sliki (3.2) in (3.1) (določimo  $A = 6, \sigma = 5, \tau = 1$ ).



Slika 3.1: Časovni razvoj toka  $\mathbf{j}$ , enačba (3.11)



Slika 3.2: Časovni razvoj vrtače, po nastavku (3.7)

Sedaj se postavimo daleč stran od centra vrtače, kjer po dolgem času velja:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{Ae^{-(r \rightarrow \infty)^2 / \sigma^2} - t \rightarrow \infty}{\tau} = -\frac{A}{\tau} = v_{denudacije} \quad (3.13)$$

Ocenimo  $\tau$  vrtač.

$$\tau = \frac{-A}{v_{denudacije}} = \frac{-5m}{-50 \cdot 10^{-6} m/let} = 10^5 let \quad (3.14)$$

$\rho_r$	$2700 \text{ kg/m}^3$	Gostota apnenca
$\rho_s$	$1000 \text{ kg/m}^3$	Gostota delno preperete kamnine
$C$	$50 \cdot 10^{-6} \text{ m/leto}$	Hitrost preperevanja apnenca na ravnini
$K$	$1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{leto}$	Difuzijska konstanta za delno preperelo kamnino
$\sigma$	$4.5 \text{ m}$	$\sigma$ vrtače po nastavku (2.2)
$A$	$6 \text{ m}$	Globina vrtače $A$ po nastavku (2.2)

Tabela 3.1: Vrednosti iz literature [Gam66] [FW07] [FTV08] in 2. poglavja

# Poglavlje 4

## Zaključek

Izkaže se, da je zaznava in segmentacija vrtač na digitalnem modelu reliefu relativno enostavna naloga, izvedljiva na osebnem računalniku. Kodo, ki sem jo za ta postopek spisal, sem dokumentirano objavil na spletu in bo morda še služila za obsežnejšo katalogizacijo vrtač. Za nekoliko težjo nalogo se izkaže določanje idealne oblike vrtače, saj le-ta ne obstaja, in bi se moralo pravo vprašanje glasiti, kakšna je idealna oblika vrtače na izotropni podlagi po dolgem času. Vseeno sem se odločil, da za idealno vrtačo vzamem povprečje velike količine vrtač.

Precej zahtevnejša naloga je bila izbira fizikalnega modela in dinamičnega opisa vrtače. Najbolj primeren model se je zdela nelinearna difuzijska enačba s primerno izbrano difuzijsko konstanto, ki je omogočila rešitev z previdno izbranim dinamičnim nastavkom. Treba je priznati, da je taka rešitev krhkva in verjetno vsaj delno napačna, a nam nakaže možnost, da je originalna teza o tem da so vrtače ravnovesne reštive lahko pravilna. Za popolnejši študij in dober model vrtač bi verjetno potrebovali bolj poglobljene informacije o prsti, geoloških in bioloških dejavnikih, ki lahko vplivajo na časovno dinamiko terena. Zanimiva ideja bi bila z geološkim študijem najti vrtače v različnih stopnjah razvoja in s pomočjo te informacije oblikovati dinamičen nastavek, na podlagi katerega bi potem morda bolj osvetlili dinamično enačbo.

# Literatura

- [DY13] Daniel H. Doctor and John A. Young. An evaluation of automated gis tools for delineating karst sinkholes and closed depressions from 1-meter lidar-derived digital elevation data. *Proceedings of the Thirteenth Multidisciplinary Conference on Sinkholes and the Engineering and Environmental Impacts of Karst*, pages 449–458, 2013.
- [FTV08] Cyril Fleurant, GE Tucker, and HA Viles. Modelling cockpit karst landforms. *Geological Society, London, Special Publications*, 296(1):47–62, 2008.
- [FW07] D.C. Ford and P.W. Williams. *Karst Hydrogeology and Geomorphology*. Wiley, 2007.
- [Gam66] Ivan Gams. Faktorji in dinamika korozije na karbonatnih kameninah slovenskega dinarskega in alpskega kraša. *Geografski vestnik*, 38:11–68, 1966.
- [HDNF01] Arjun M. Heimsath, William E. Dietrich, Kunihiko Nishiizumi, and Robert C. Finkel. Stochastic processes of soil production and transport: erosion rates, topographic variation and cosmogenic nuclides in the oregon coast range. *Earth Surface Processes and Landforms*, 26:531–552, 2001.

- [KK94] Ivan Kuščer and Alojz Kodre. *Matematika v fiziki in tehniki*. Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana, 1994.
- [KPO<sup>+</sup>07] Andrej Kobler, Norbert Pfeifer, Peter Ogrinc, Ljupčo Todorovski, Krištof Oštir, and Sašo Džeroski. Repetitive interpolation: A robust algorithm for dtm generation from aerial laser scanner data in forested terrain. *Remote Sensing of Environment*, 2007.
- [LAK] Lidarski digitalni model reliefa Menišije, izdelal Andrej Kobler, Gozdarski inštitut Slovenije.
- [PCV10] Placer, Celarc, and Vrabec. Osnove razumevanja tektonske zgradbe nw dinaridov in polotoka istre. *Geologija*, 53/1, 2010.
- [VF06] Marko Vrabec and László Fodor. Late cenozoic tectonics of slovenia: Structural styles at the northeastern corner of the adriatic microplate. *The Adria Microplate: GPS Geodesy, Tectonics and Hazards*, 61:151–168, 2006.
- [ZF97] L. Zambo and D. C. Ford. Limestone dissolution processes in beke doline aggtelek national park, hungary. *Earth Surface Processes and Landforms*, 22(6):531–543, 1997.