

# Kazalo

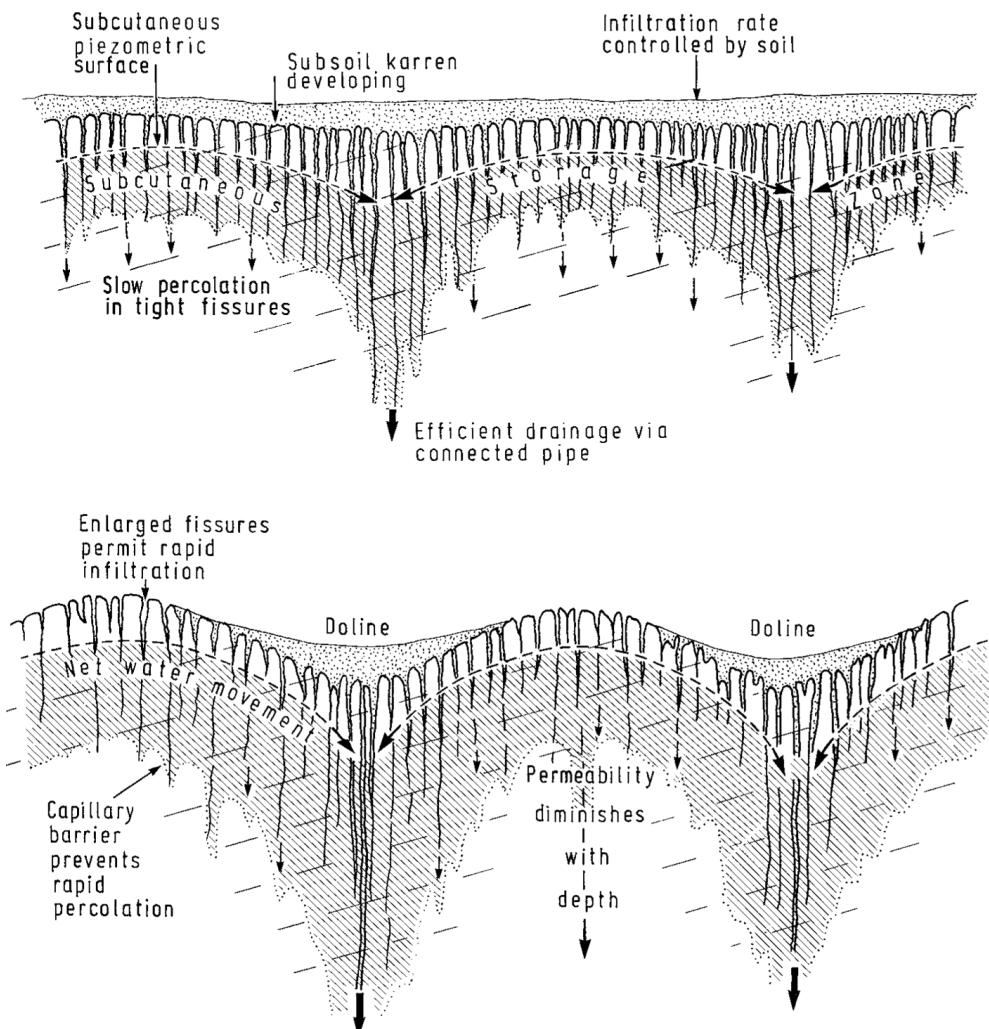
<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Preučevanje realnih vrtač</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Analitično modeliranje vrtač</b>	<b>14</b>
3.1	Difuzijski model . . . . .	14
3.2	Dvofazni difuzijski model . . . . .	17

# Poglavlje 1

## Uvod

Namen tega dela je na podlagi digitalnega modela reliefa dokumentirati in statistično preučiti velik vzorec realnih kraških vrtač na slovenskem Dinarškem krasu, predlagati analitično funkcijo, ki bi opisala idealno vrtačo, ter na podlagi le-te poiskusiti modelirati naravne procese, ki povzročajo nastanek in obliko vrtač.

Vrtače so zaobljene lijakaste globeli, globine nekaj metrov in premera nekaj deset metrov. Obstaja več geomorfoloških modelov njihovega nastanka.



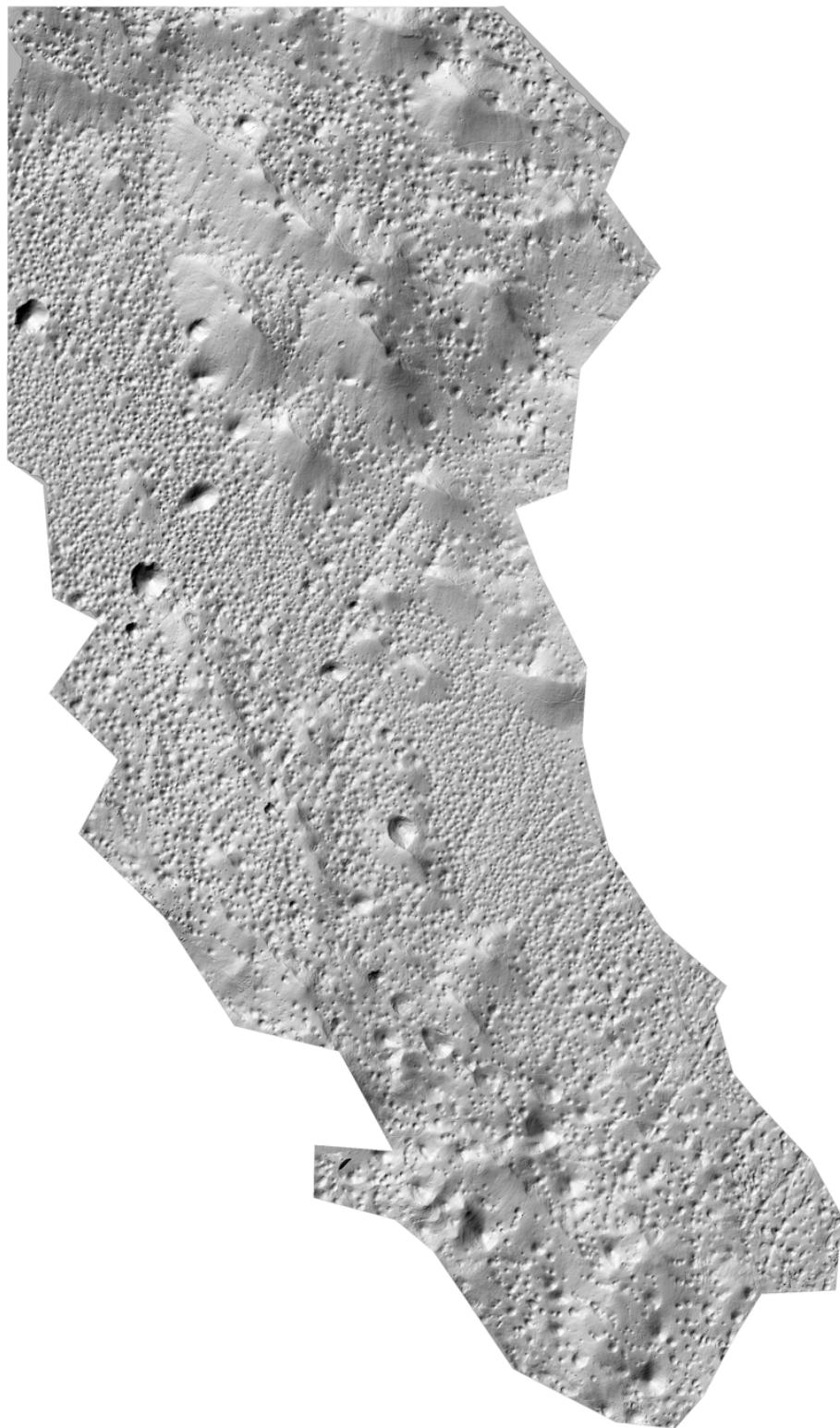
Slika 1.1: Priljubljena geomorfološka shema za razlago vrtač. Vir: [FW07]

Za študij realnih vrtač uporabimo digitalni model reliefsa Menišije (Slika 1.2) ločljivosti 1m, ki omogoča zanesljivo identifikacijo in študij vrtač ter udornic (Slika 1.3).



Slika 1.2: Menišija,  $60\text{km}^2$  veliko območje med Cerknico in Logatcem vsebuje nekaj tisoč vrtač in več udornic in predstavlja približno odstotek slovenskega kraša. Vir: Geopedia, Geodetski inštitut Slovenije

Površje Menišije sestavlja plasti krednega apnenca (starost nastanka 135-65 miljonov let), ki so na površje prišli zaradi dogodkov povezanih s podirvanjem Adriatske plošče (17-7 miljonov let). Menišija je bila uravnano kraško polje do 3.5 miljona let pred sedanostjo, ko se je zaradi tektonske aktivnosti dvignila nad okolico in vzpostavljeni so bili hidrološki pogoji za nastanek vrtač. Hitrost zniževanja (denudacije) kraškega površja se ocenjuje na 20-50 m / miljon let, torej se je površje Menišije v času od nastanka znižalo za 70-175m, hkrati pa so se v njem pojavile vrtače, udornice in brezstrope jame. [VF06] [PCV10]

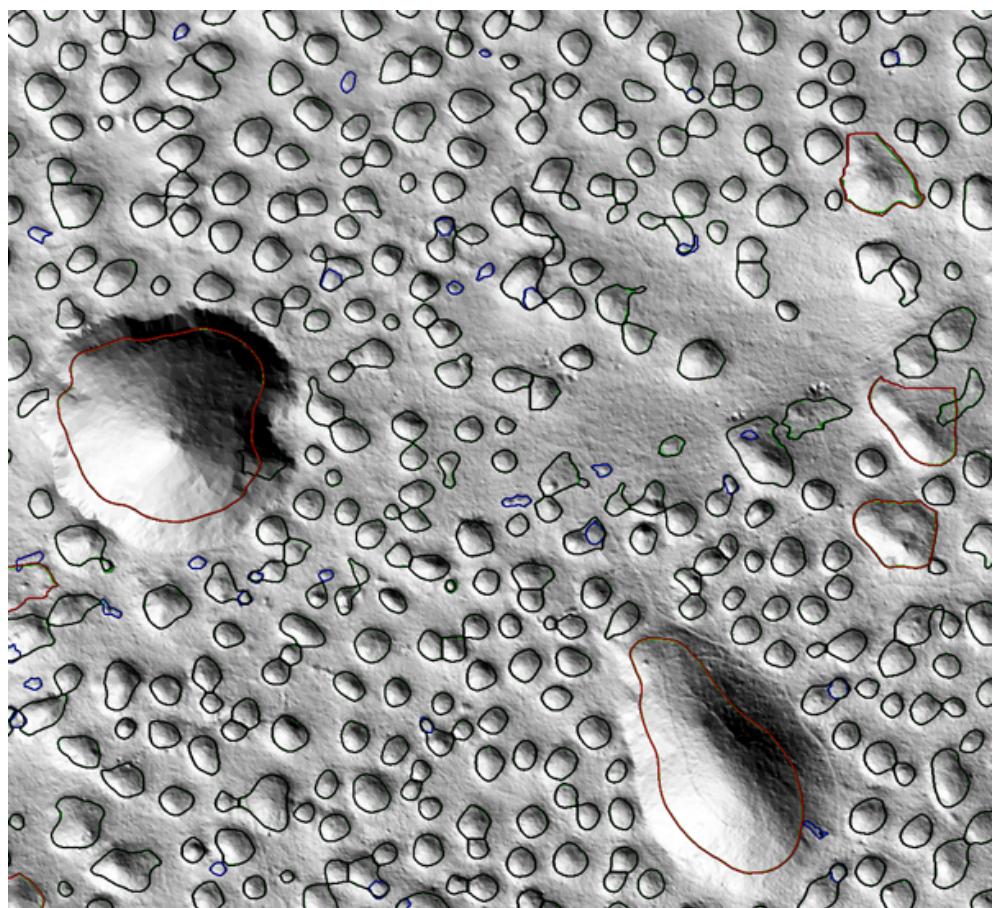


Slika 1.3: Senčen 3D relief dela Menišije uporabljen v tej nalogi. Vir: Geodetski inštitut Slovenije [LAK] po metodi [KPO<sup>+</sup>07].

## Poglavlje 2

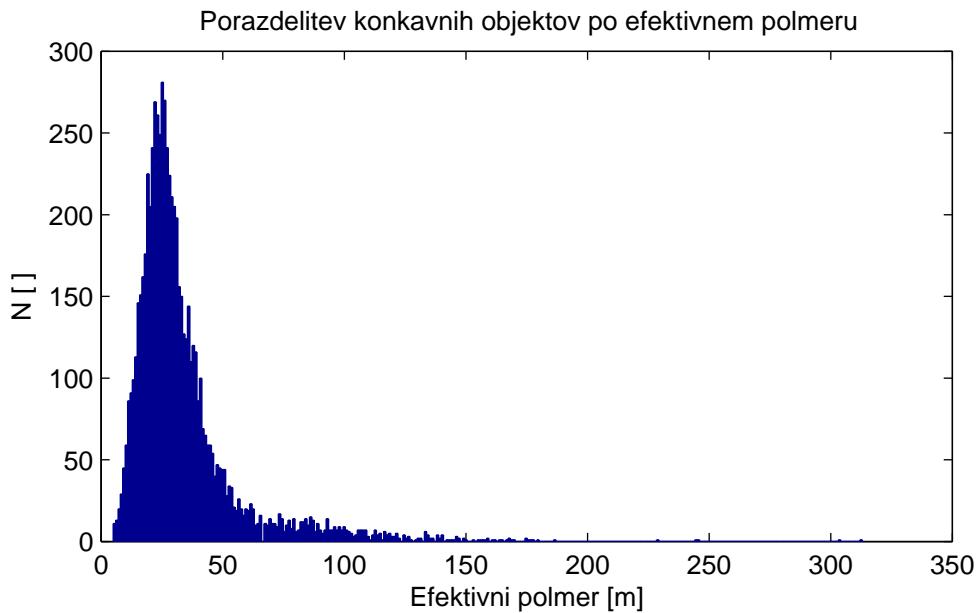
# Preučevanje realnih vrtač

Identifikacijo velike količine se lotimo s segmentacijo po konkavnosti, kot predлага [DY13]. Točke, ki so nižje od svoje okolice imajo nižji indeks konkavnosti, točke višje od svoje okolice pa višjega. Pri tem je pomembna tudi pametna izbiro okolice - od nje je odvisno kako velike konkavnosti bomo zaznali. Končno zavržemo konveksne dele površja in konkavne odberemo kot vrtače. Rezultat vidimo na sliki 2.1. Opaziti velja, da izbrana metoda segmentacije del robov konkavnih objektov klasificira kot konkavne in zato podceniti radij. Za naše namene to ni pretirano moteče, saj to podcenitev zlahka kompenziramo kasneje.



Slika 2.1: Del od 8687 zaznanih konkavnih objektov na območju Menišije.  
Poleg vrtač so na sliki vidne tudi udornice.

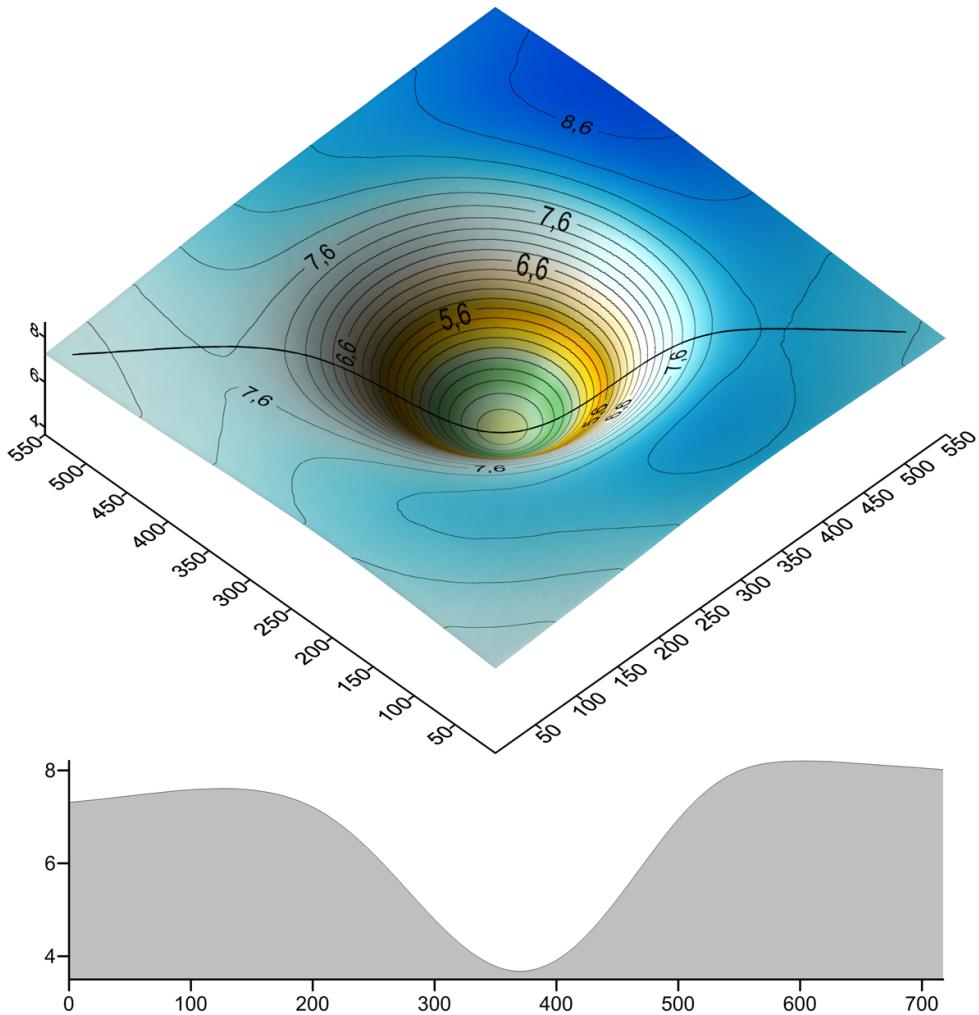
Najdeni konkavni objekti imajo porazdelitev efektivnih polmerov ( $r_{eff} = \sqrt{\frac{A_{eff}}{\pi}}$ ),  
kot vidno na sliki 2.2.



Slika 2.2: Polmeri konkavnih objektov v Menišiji, vrh pade v razred od 24m do 25m

To daje slutiti, da obstaja ravnovesna velikost vrtače, h kateri konvergirajo vse konkavne oblike v območju ne glede na njihov nastanek. To nas napelje na misel, da obstaja tudi ravnovesna oblika vrtače, ki bi se pojavila na idelani podlagi, če bi preteklo dovolj časa.

Posamezne realne vrtače zaradi lokalnih pogojev in zgodovine razvoja reliefa niso simetrične, a zdi se, da so si med seboj podobne. Da bi ugotovili idealno obliko vrtače, izračunamo povprečje velikega števila realnih vrtač. Uporabimo dva pristopa - pri prvem (Slika 2.3) vrtače različnih velikosti raztegnemo, pri drugem (Slika 2.4) pa jih razdelimo v velikostne razrede in jih povprečimo znotraj le-teh.

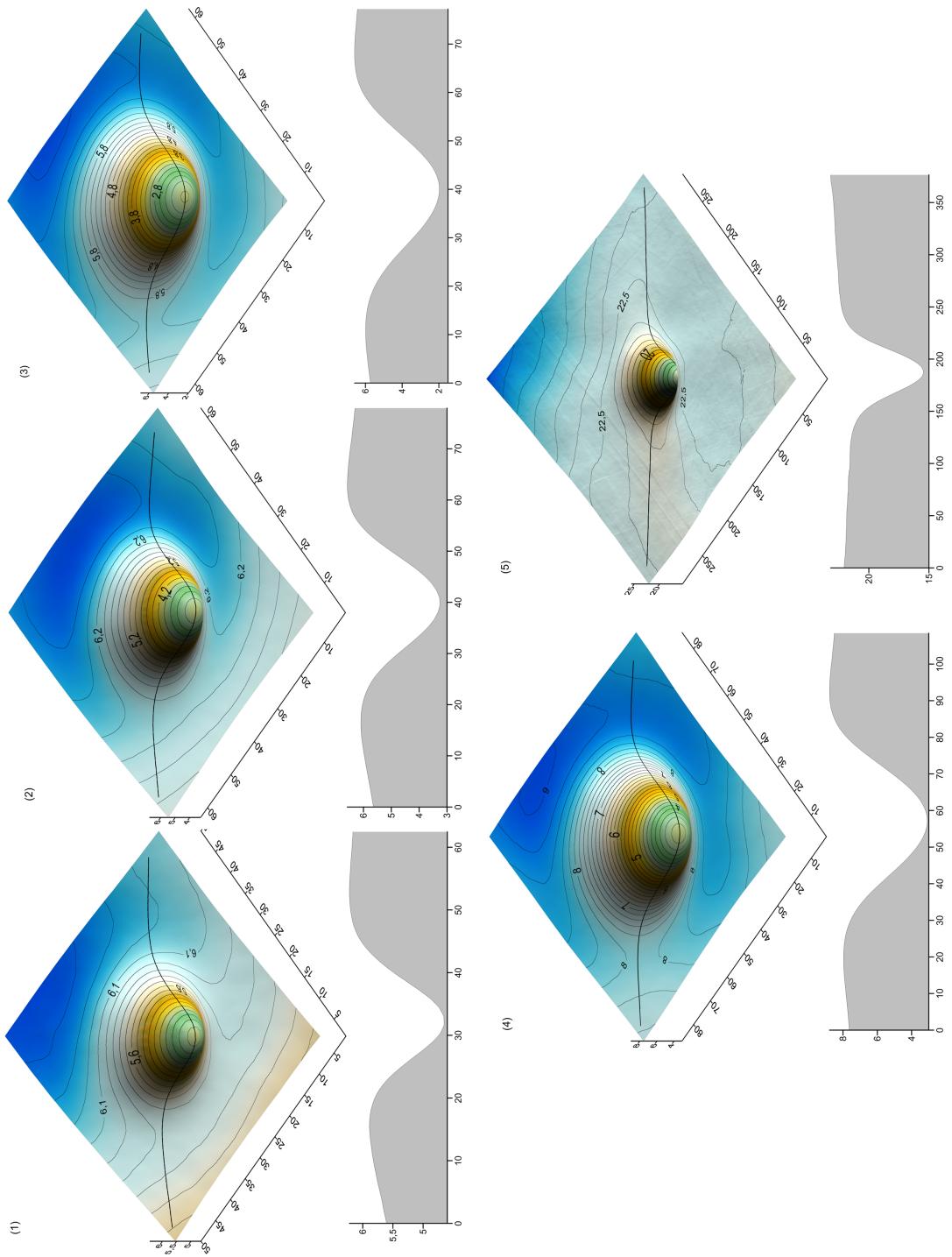


Slika 2.3: Povprečje 8687 realnih vrtač z območja Menišije, pred povprečjem so bile vrtače raztegnjene na velikost največje v setu.

Na prvi pogled se zdijo dobljeni profili gaussove oblike (2.1), kar ne zbuja nujno zaupanja v metodo. Zdi pa se, da so oblike simetrične po kotu, torej lahko problem reduciramo na študij njihovih profilov.

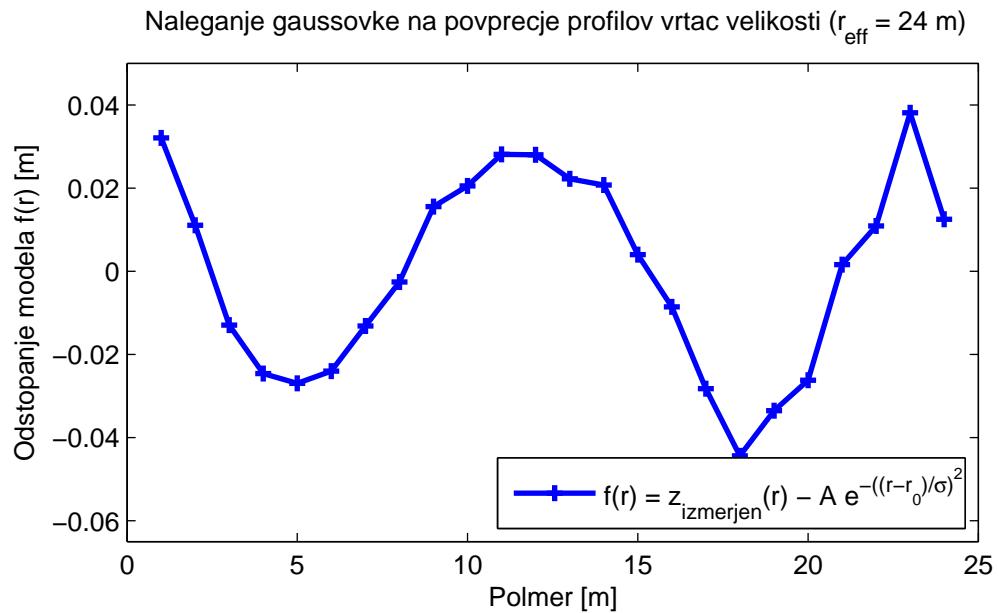
$$f(x, y) = A \cdot e^{-\frac{(x-x_0)^2}{\sigma_x^2} - \frac{(y-y_0)^2}{\sigma_y^2}} + B \cdot x + C \cdot y + D \quad (2.1)$$

Rezultat uporabimo tako, da gaussovo funkcijo nalegamo na realne vrtače in tako dobimo dobre lokacije njihovih najnižjih točk, ter njihove  $\sigma_x$  in  $\sigma_y$ .



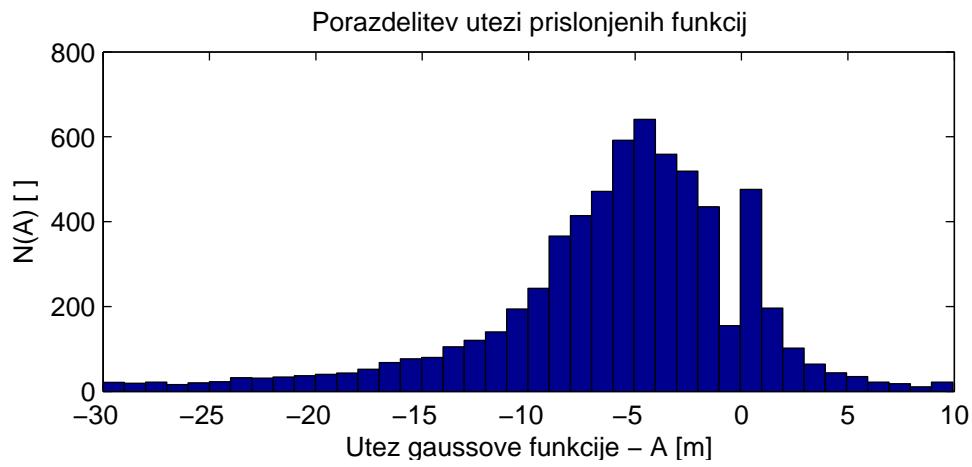
Slika 2.4: Vrtače po velikosti razdelimo v pet razredov (najmanjša petina gre v prvi razred, itn.), in jih znotraj razredov povprečimo.

Z lokacijami najnižjih točk lahko izračunamo povprečne profile vrtač ( $z(r)$ ), ki imajo enake efektivne polmere, naprimer: Slika 2.5

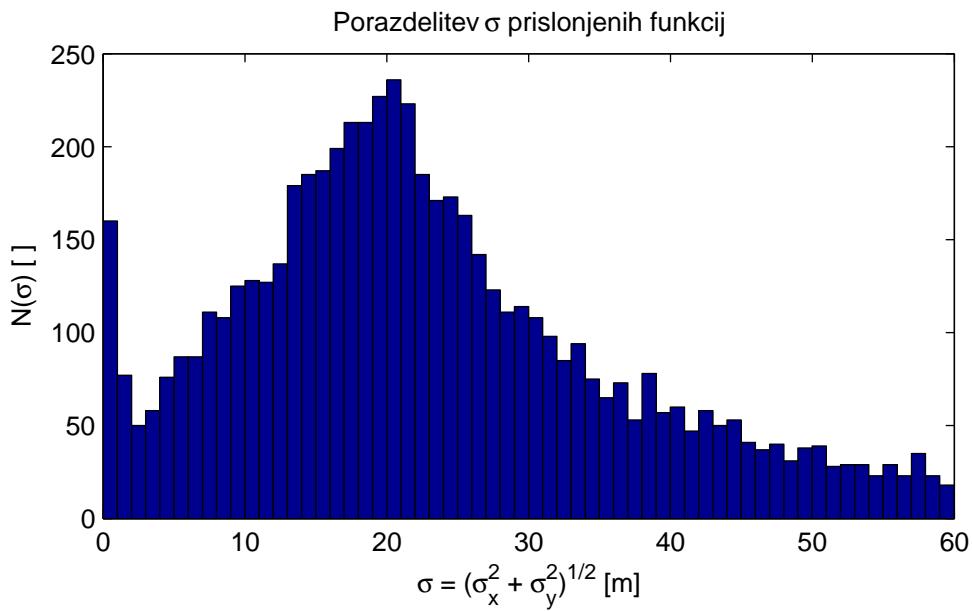


Slika 2.5: Povprecje profilov vrtač z efektivnimi polmeri med 23,5m in 24,5m. Prilegamo gaussovko (2.2). Graf prikazuje razliko med povprečnim profilom in prilegano gaussovko.

Pri tem pa je porazdelitev uteži gaussove funkcije Slika (2.6), porazdelitev  $\sigma$  pa Slika (2.7).



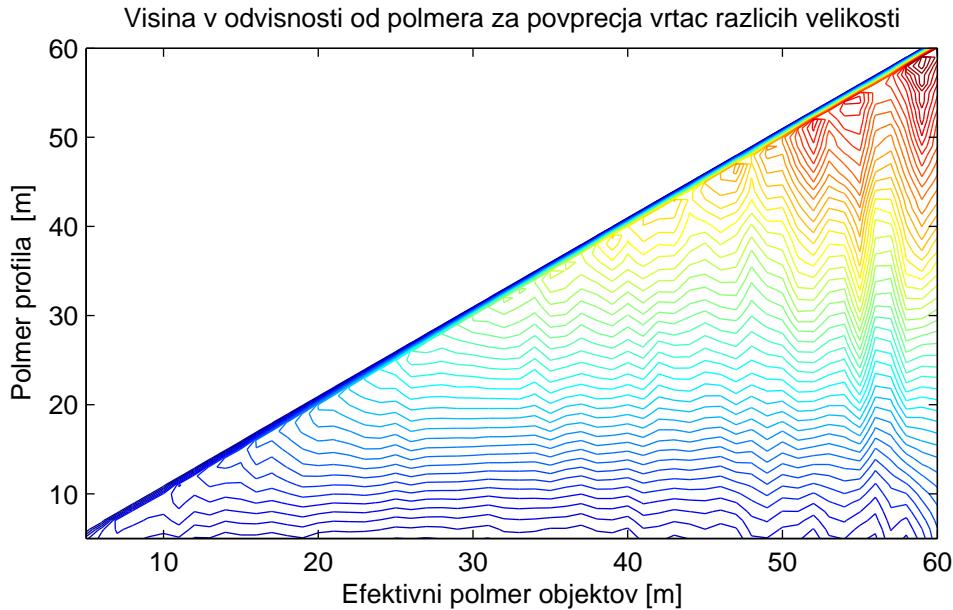
Slika 2.6: Porazdelitev uteži  $A$  za gaussovo funkcijo prilegano na vrtače v Menišiji



Slika 2.7: Porazdelitev uteži  $\sigma$  za gaussovo funkcijo prilegano na vrtače v Menišiji

Če pa vse profile združimo v eno sliko, tako da polmer postavimo v smeri

osi  $y$  in efektivni polmer v smeri  $x$  osi, dobimo sledečo sliko 2.8



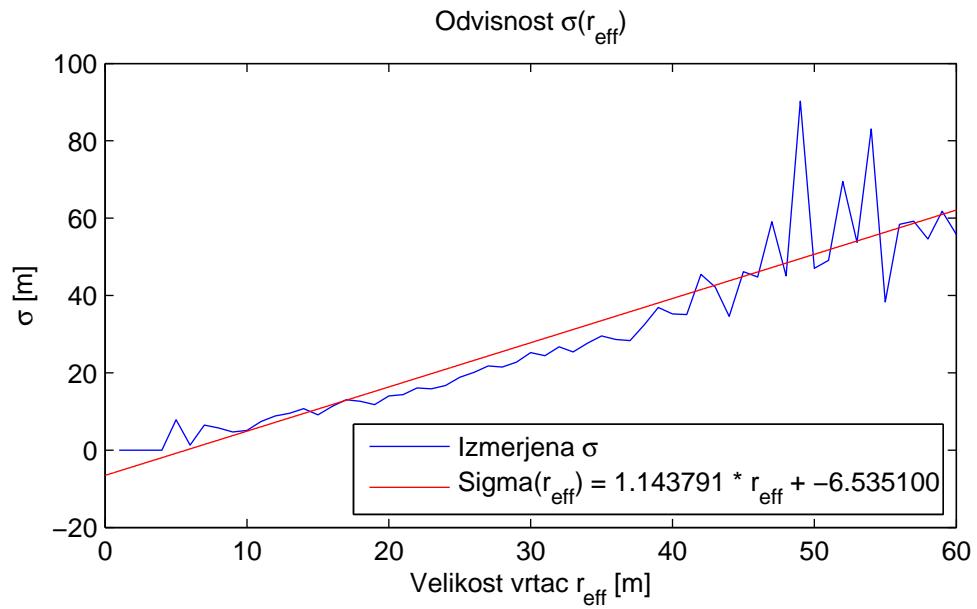
Slika 2.8: Odvisnost profila vrtace od velikosti vrtace

Zdi se torej, da so vrtače enake oblike ne glede na velikost in to po celi njihovi površini, le v okoliško površje se iztečejo prej ali kasneje, a zopet na podoben način. Če na dobljene profile ponovno nalegamo gaussovko (2.2) in izrišemo odvisnost  $\sigma_x(r_{eff})$ , vidimo, da to ne drži (Slika 2.9).

$$f(r) = A \cdot e^{-\frac{(r-r_0)^2}{\sigma^2}} + C \quad (2.2)$$

Odvisnost  $\sigma_x(r_{eff})$  je iz naših podatkov težko določiti, zaenkrat poskusimo z linearno funkcijo (2.3)

$$\sigma(r_{eff}) = k \cdot r_{eff} + C \quad (2.3)$$



Slika 2.9:  $\sigma$  s polmerom narašča, torej večje kot so vrtače, bolj položna so njihova pobočja.

Na podlagi teh podatkov bi težko skleniti, da (2.2) opiše profil idealne vrtače, a ujemanje je dobro in ga bomo uporabili za analitično modeliranje.

## Poglavlje 3

# Analitično modeliranje vrtač

### 3.1 Difuzijski model

Dinamiko vrtače poskusimo opisati s preprostim difuzijskim modelom in predpostavljeno difuzijsko konstanto (3.3):

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\rho \frac{\partial z}{\partial t} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{j} = -\rho k(r) \nabla z \quad (3.2)$$

$$k(r) = k_0 + \alpha z \quad (3.3)$$

Privzamemo radialno simetričnost in v cilindričnih koordinatah računamo  $k_0$  v ravnovesnem stanju.

$$z(r, t \rightarrow \infty) = z(r) = -A e^{-(\frac{r}{\sigma})^2} \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( (k_0 + \alpha z(r)) \cdot r \frac{\partial}{\partial r} z(r) \right) = 0 \quad (3.5)$$

$$k_0 = C \frac{e^{(\frac{r}{\sigma})^2}}{r^2} + A e^{-(\frac{r}{\sigma})^2} \alpha = -C \frac{A}{z(r)r^2} - z(r)\alpha \quad (3.6)$$

Nato za dinamični nastavek uporabimo (3.7) in poskusimo ugotoviti  $\alpha$ .

$$z(r, t) = -Ae^{-(\frac{r}{\sigma})^2} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (3.7)$$

Računamo:

$$\begin{aligned} \alpha(r, t) &= -\frac{\rho\sigma^4}{4A\tau r^2(1 - e^{\frac{t}{\tau}})} \cdot e^{(\frac{r}{\sigma})^2 + \frac{t}{\tau}} + \frac{De^{\frac{2r^2}{\sigma^2}}}{r^2} \\ \alpha(r, t) &= \frac{\rho\sigma^4}{4A\tau r^2(1 - e^{\frac{t}{\tau}})} \cdot \frac{1}{e^{-(\frac{r}{\sigma})^2 - \frac{t}{\tau}}} - \frac{DA}{z^2(r)r^2} \\ \alpha(r, t) &= -\frac{\rho\sigma^4}{4\tau r^2} \cdot \frac{1}{-A(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})e^{-(\frac{r}{\sigma})^2}} - \frac{DA}{z^2(r)r^2} \\ \alpha(r, t) &= -\frac{\rho\sigma^4}{4\tau r^2} \cdot \frac{1}{z(r, t)} - \frac{DA}{z^2(r)r^2} \end{aligned} \quad (3.8)$$

V (3.3) vstavimo nastavek (3.7) in rezultat (3.8), sledi:

$$\begin{aligned} k(r) &= -C \frac{A}{z(r)r^2} + \left( -\frac{\rho\sigma^4}{4\tau r^2} \cdot \frac{1}{z(r, t)} - \frac{DA}{z^2(r)r^2} \right) (z(r, t) - z(r)) \\ k(r) &= -C \frac{A}{z(r)r^2} - \frac{\rho\sigma^4}{4\tau r^2} - \frac{DA}{z(r)r^2}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + \frac{\rho\sigma^4}{4\tau r^2} \frac{1}{(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})} + \frac{DA}{z(r)r^2} \\ k(r) &= -C \frac{A}{z(r)r^2} - \frac{\rho\sigma^4}{4\tau r^2} + \frac{DA}{z(r)r^2} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\rho\sigma^4}{4\tau r^2} \frac{1}{(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})} \\ k(r) &= \frac{A}{z(r)r^2} (De^{-\frac{t}{\tau}} - C) + \frac{\rho\sigma^4}{4\tau r^2} \left( \frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{t}{\tau}}} \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Rezultat (3.9) vstavimo v splošno difuzijsko enačbo (3.10):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( (k_0 + \alpha z(r, t)) \cdot r \frac{\partial}{\partial r} z(r, t) \right) = -\rho \frac{\partial z(r, t)}{\partial t} \quad (3.10)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \left( \frac{A}{z(r)r^2} (De^{-\frac{t}{\tau}} - C) + \frac{\rho\sigma^4}{4\tau r^2} \left( \frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{t}{\tau}}} \right) \right) \cdot r \frac{\partial}{\partial r} z(r, t) \right) = -\rho \frac{\partial z(r, t)}{\partial t}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \left( \frac{A}{z(r)r} (De^{-\frac{t}{\tau}} - C) + \frac{\rho\sigma^4}{4\tau r} \left( \frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{t}{\tau}}} \right) \right) \cdot \frac{-2r}{\sigma^2} z(r, t) \right) = -\rho \frac{\partial z(r, t)}{\partial t} \\
& \frac{2}{\sigma^2 r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \left( \frac{A}{z(r)} (De^{-\frac{t}{\tau}} - C) + \frac{\rho\sigma^4}{4\tau} \left( \frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{t}{\tau}}} \right) \right) \cdot z(r, t) \right) = \rho \frac{\partial z(r, t)}{\partial t} \\
& \frac{2}{\sigma^2 r} \frac{\partial}{\partial r} \left( A(De^{-\frac{t}{\tau}} - C) + \frac{\rho\sigma^4}{4\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot z(r) \right) = \rho \frac{\partial z(r, t)}{\partial t} \\
& \frac{2}{\sigma^2 r} \frac{\rho\sigma^4}{4\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot \frac{-2r}{\sigma^2} z(r) = \rho \frac{\partial z(r, t)}{\partial t} \\
& \frac{\partial z(r, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot z(r)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Časovni odvod dinamičnega nastavka za vrtačo (3.7) se torej pri difuzijski konstanti (3.9) ujema z rezultatom difuzijske enačbe (3.11). Minimalen nastavek za  $k(z)$  pa je (3.12).

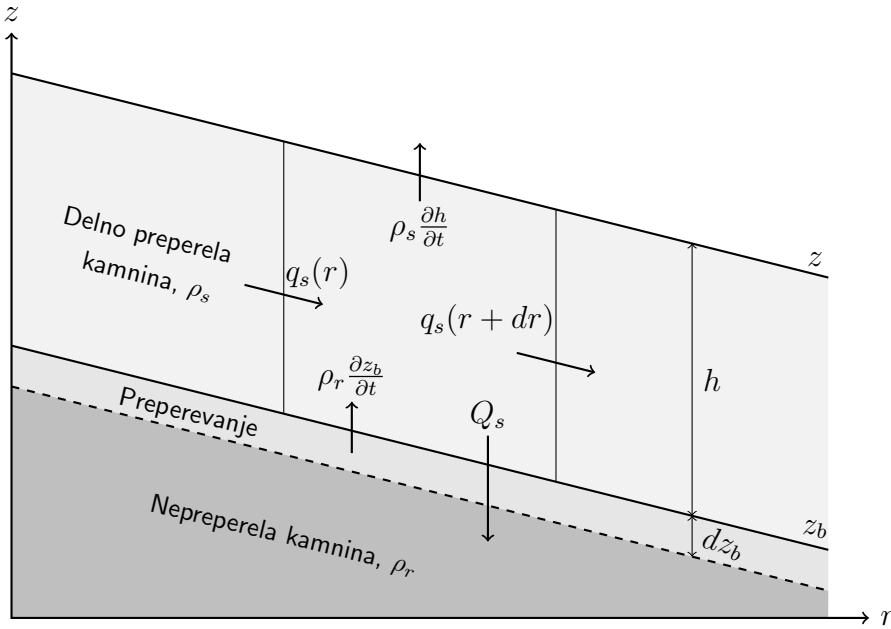
$$k(z) = \frac{\rho\sigma^4}{4\tau r^2} \left( \frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{t}{\tau}}} \right) \tag{3.12}$$

Tok pa je:

$$\begin{aligned}
\mathbf{j} &= -\rho k(r) \nabla z = \rho \frac{\rho\sigma^4}{4\tau r^2} \left( \frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{t}{\tau}}} \right) r \frac{-2r}{\sigma^2} z(r, t) \\
\mathbf{j} &= -\frac{\rho^2\sigma^2}{2\tau} \left( \frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{1 - e^{-\frac{t}{\tau}}} \right) z(r, t) \\
\mathbf{j} &= -\frac{\rho^2\sigma^2}{2\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} z(r) = \frac{A\rho^2\sigma^2}{2\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} e^{-(\frac{r}{\sigma})^2}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

## 3.2 Dvofazni difuzijski model

Za izhodišče privzamemo difuzijski model, kot ga predлага Heimsath [HDNF01].



Slika 3.1: Skica difuzijskega modela nastajanja vrtače

$$\rho_s \frac{\partial h}{\partial t} = -\rho_r \frac{\partial z_b}{\partial t} - \nabla q_s \quad (3.14)$$

Kjer je  $h$  višina stolca sedimenta,  $z_b$  višina skalne podlage,  $z$  višina površja,  $\rho_r$  in  $\rho_s$  gostoti skalne podlage in sedimenta,  $q_s$  pa gostota toka sedimenta. Za gostoto toka sedimenta vzamemo, da je sorazmeren z naklonom površja:

$$q_s = -\rho_s K \nabla z \quad (3.15)$$

Kjer je  $K$  analogna konstanta difuzijski. Model dopolnimo z raztopljalnjem in izpiranjem delno raztopljene kamnine v podzemlje - to pospravimo v člen  $Q_s$  in vstavimo 3.15.

$$\rho_s \frac{\partial h}{\partial t} = -\rho_r \frac{\partial z_b}{\partial t} + K \rho_s \Delta z - Q_s \quad (3.16)$$

Dobljen model skiciramo na Sliko 3.1.

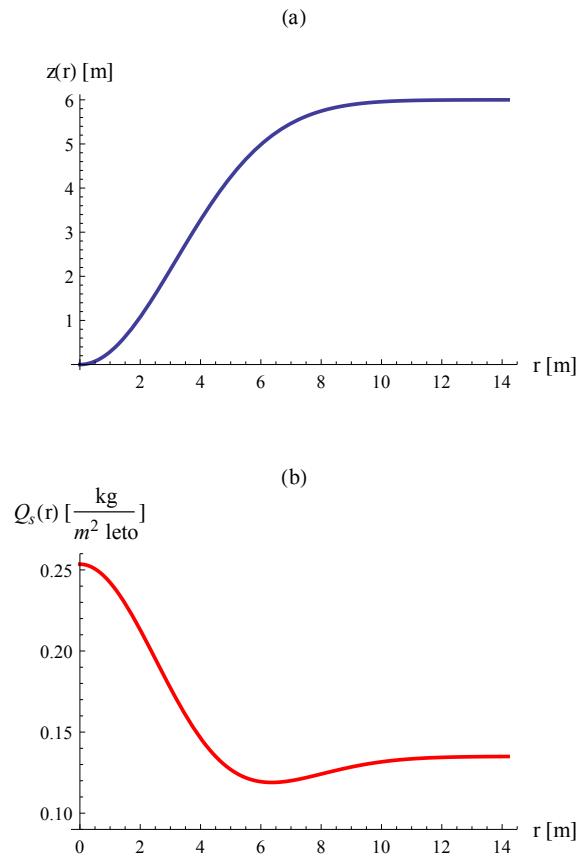
V ravnovesnem stanju vrtače, ki smo ga domnevno našli v 2. poglavju (enačba 2.2) zahtevamo, da velja  $\frac{\partial h}{\partial t} = 0$  in  $\frac{\partial z_b}{\partial t} = C$ , kjer  $C < 0$ , saj se meja preperelosti znižuje. Dobimo:

$$Q_s = -\rho_r C + \rho_s K \Delta z \quad (3.17)$$

Vstavimo ravnovesni profil vrtače (enačba 2.2) in vrednosti iz tabele (3.1), da dobimo profil  $Q_s$  profil raztapljanja apnenca v na površju (Slika (3.2)).

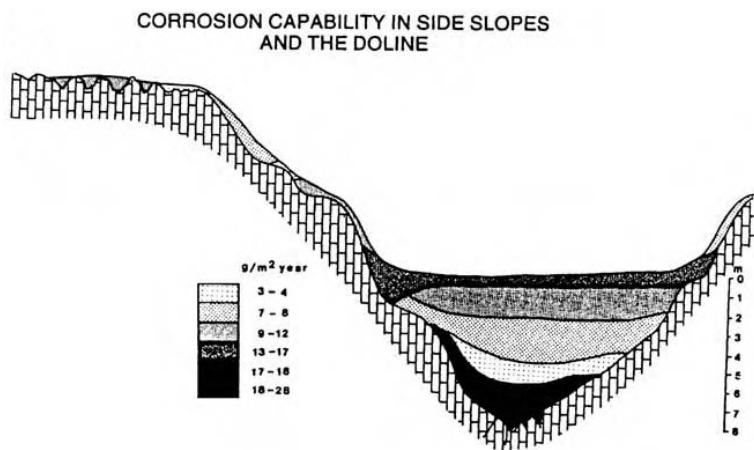
$\rho_r$	2700 kg/m <sup>3</sup>	Gostota apnenca
$\rho_s$	1000 kg/m <sup>3</sup>	Gostota delno preperelo kamnine
$C$	$50 \cdot 10^{-6} m/let$	Hitrost preperevanja apnenca na ravnini
$K$	$1 \cdot 10^{-4} m^2/let$	Difuzijska konstanta za delno preperelo kamnino
$\sigma$	4.5m	$\sigma$ vrtače po nastavku (2.2)
$A$	6m	Globina vrtače $A$ po nastavku (2.2)

Tabela 3.1: Vrednosti iz literature [Gam66] [FW07] [FTV08] in 2. poglavja



Slika 3.2: (a) Profil vrtače (b) modeliran profil raztpljanja delno preperele kamnine

Dobljeni profil raztpljanja nakazuje kvalitativno podobnost meritvam, ki jih je opravil Zambo ([ZF97]) v osemdesetih (Slika 3.3).



Slika 3.3: Meritve raztopljanja apnenca v realni vrtači - dolina Beke, nacionalni park Aggtelek na Madžarskem [ZF97]

Profil vrtače blizu ravnovesja zmotimo s sprememboto vrednosti oblike profila ( $z(r)$ ), vstavimo nastavek za  $\frac{\partial z_b}{\partial t} = \frac{1}{|h_0-h|}$  in ...

# Literatura

- [DY13] Daniel H. Doctor and John A. Young. An evaluation of automated gis tools for delineating karst sinkholes and closed depressions from 1-meter lidar-derived digital elevation data. *Proceedings of the Thirteenth Multidisciplinary Conference on Sinkholes and the Engineering and Environmental Impacts of Karst*, pages 449–458, 2013.
- [FTV08] Cyril Fleurant, GE Tucker, and HA Viles. Modelling cockpit karst landforms. *Geological Society, London, Special Publications*, 296(1):47–62, 2008.
- [FW07] D.C. Ford and P.W. Williams. *Karst Hydrogeology and Geomorphology*. Wiley, 2007.
- [Gam66] Ivan Gams. Faktorji in dinamika korozije na karbonatnih kameninah slovenskega dinarskega in alpskega kraša. *Geografski vestnik*, 38:11–68, 1966.
- [HDNF01] Arjun M. Heimsath, William E. Dietrich, Kunihiko Nishiizumi, and Robert C. Finkel. Stochastic processes of soil production and transport: erosion rates, topographic variation and cosmogenic nuclides in the oregon coast range. *Earth Surface Processes and Landforms*, 26:531–552, 2001.
- [KPO<sup>+</sup>07] Andrej Kobler, Norbert Pfeifer, Peter Ogrinc, Ljupčo Todorovski, Krištof Oštir, and Sašo Džeroski. Repetitive interpolation: A

- robust algorithm for dtm generation from aerial laser scanner data in forested terrain. *Remote Sensing of Environment*, 2007.
- [LAK] Lidarski digitalni model reliefsa Menišije, izdelal Andrej Kobler, Gozdarski inštitut Slovenije.
- [PCV10] Placer, Celarc, and Vrabec. Osnove razumevanja tektonske zgradbe nw dinaridov in polotoka istre. *Geologija*, 53/1, 2010.
- [VF06] Marko Vrabec and László Fodor. Late cenozoic tectonics of slovenia: Structural styles at the northeastern corner of the adriatic microplate. *The Adria Microplate: GPS Geodesy, Tectonics and Hazards*, 61:151–168, 2006.
- [ZF97] L. Zambo and D. C. Ford. Limestone dissolution processes in beke doline aggtelek national park, hungary. *Earth Surface Processes and Landforms*, 22(6):531–543, 1997.