Univerza v Ljubljani
Fakulteta za Matematiko in Fiziko
Oddelek za Fiziko
Univerzitetni študij, naravoslovna smer

Rok Mihevc

Kraške vrtače Dinarskega krasa

diplomsko delo

Mentor: prof. dr. Rudolf Podgornik

Ljubljana, 2014

Kazalo

Povzetek

Z numeričnimi metodami obdelamo $60km^2$ velik digitalni model reliefa Menišije ločljivosti $1m^2$ in identificiramo veliko število kraških vrtač. Iz oblik velikega števila vrtač izračunamo povprečno obliko vrtače in jo analitično opišemo z Gaussovo funkcijo. Odkrite realne vrtače nato prilegamo na Gaussovo funkcijo ter pogledamo porazdelitev parametrov le-te na našem vzorcu.

Zaradi geološke zgodovine področja Menišije in medsebojne podobnosti vrtač na tem območju postavimo tezo, da jih je oblikoval isti geomorfološki proces, ki vodi do vsem skupne stabilne oblike, ki so jo vrtače na tem območju že dosegle. S pomočjo podatkov, pridobljenih v prvem delu naloge, predlagamo statičen nastavek, ki analitično opiše najdene vrtače. Postavimo tezo, da vrtače oblikuje stohastično priraščanje površja, ter primerjamo teoretično pričakovan eksponent hrapavosti z izmerjenim. Pogledamo še nekaj determinističnih difuzijsko-reakcijskih sistemov, ki bi lahko služili kot dinamični model nastanka vrtač.

Ključne besede: Digitalni model reliefa, obdelava slik, vrtača, kras, razvoj reliefa, stohastične diferencialne enačbe, dinamične enačbe

PACS: 95.75.Mn, 02.50.Ey 02.60.Cb, 02.60.Ed, 68.35.Ct, 68.35.Fx

Abstract

Using numerical methods we analyzed $60km^2$ of $1m^2$ resolution digital terrain model of Menišija and identified a large number of karst Dolines. We calculated average shape of a large number of Dolines and analytically described it by a Gaussian function. We then fitted the real sinkholes to a Gaussian function and studied the distribution of parameters in our sample from Menišija.

Due to the geological history of Menišija and similarity of Dolines in the area we propose that they were shaped by the same geomorphological process, that ultimately leads to a common stable form that was already reached by the sinkholes in this area. Using the data acquired in the second chapter we propose a static Ansatz that describes found Dolines. We propose a thesis that Dolines are formed by stochastic surface growth, and compare the theoretically derived roughness exponent with the one measured on relief data from Menišija. Then we study several diffusion-reaction systems, which could serve as dynamic models of Dolines.

Keywords: Digital relief model, image processing, dolines, karst relief evolution, stochastic differential equations, dynamic equations

PACS: 95.75.Mn, 02.50.Ey 02.60.Cb, 02.60.Ed, 68.35.Ct, 68.35.Fx

Poglavje 1

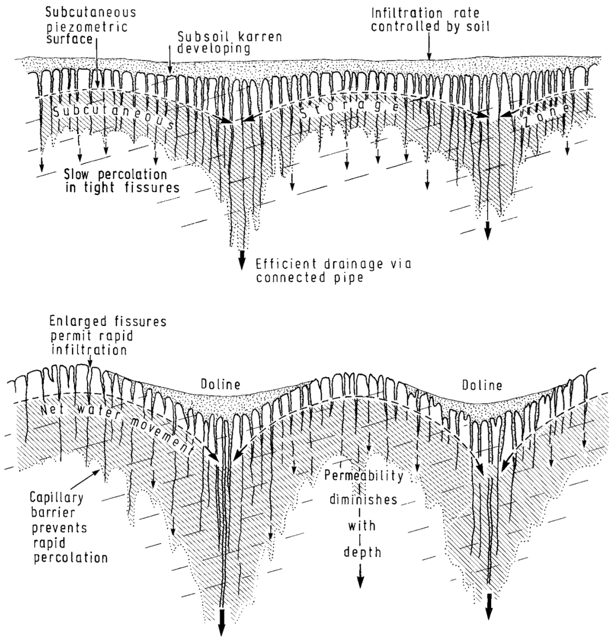
Uvod

Namen tega dela je na podlagi digitalnega modela reliefa dokumentirati in statistično preučiti velik vzorec kraških vrtač na slovenskem Dinarskem krasu, predlagati analitično funkcijo, ki bi opisala idealno vrtačo, ter na podlagi le-te poskusiti modelirati dejavnike, ki povzročajo nastanek in obliko vrtač.

Vrtače so zaobljene lijakaste globeli, globine nekaj metrov in premera nekaj deset metrov. Najdemo jih na starih kraških poljih in planotah po celotnem Dinarskem krasu. Primer starega polja z razvitimi vrtačami: (Slika 1.1).

Slika 1.1: Skupina vrtač v bližini Bosanskega Petrovca, BiH [Mih].

Obstaja več geomorfoloških modelov njihovega nastanka, najbolj sprejetega v geomorfološki literaturi pa [FW07] poda s skico: (Slika 1.2). K tej se bomo vrnili, ko bomo poskusili modelirati dinamiko vrtač.



Slika 1.2: Geomorfološka shema nastanka vrtač. Na sprva ravnem površju neka začetna točka malenkost bolje odvaja vodo. Zaradi večjega pretoka vode se tam na stiku prsti in kamnine poveča raztapljanje apnenca. Raztapljanje in odnašanje apnenca v podtalnico poglobi površje in s tem zaradi spremenjenega naklona poveča odvajanje vode v začetno točko. Dobimo pozitivno povratno zanko in oblikujejo se vrtače. Vir: [FW07].

Za študij realnih vrtač uporabimo digitalni model reliefa Menišije (Slika 1.3) ločljivosti 1m, ki nam da natančno višinsko karto velike količine vrtač, ter omogoči zanesljivo identifikacijo in študij tega pojava (Slika 5.1).

Površje Menišije sestavljajo plasti krednega apnenca (starost nastanka 135-65 milijonov let), ki so bili zaradi dogodkov, povezanih s podrivanjem Adriatske plošče v Miocenu (17-7 milijonov let) prišli na površje. Območje Menišije je bilo do 3.5 milijona let pred sedanjostjo s poplavami uravnavano kraško polje, nato pa se je zaradi tektonske aktivnosti dvignilo nad okolico. S tem se je uravnavanje prenehalo in vzpostavljeni so bili geomorfološki pogoji za nastanek vrtač. Hitrost zniževanja (denudacije) kraškega površja zaradi kemičnega preperevanja apnenca, se ocenjuje na 20-50 m / milijon let, torej se je površje Menišije v času od prenehanja uravnavanja znižalo za 70-175m, hkrati pa so se v njem pojavile vrtače, udornice in brezstrope jame. [VMFL06] [PCV10]

Iz geologije torej izvemo, da se je sprva uravnano kraško površje, v obdo-

Slika 1.3: Menišija, $60km^2$ veliko območje med Cerknico in Logatcem, vsebuje nekaj tisoč vrtač ter nekaj udornic in predstavlja približno odstotek slovenskega krasa. Osenčen del zemljevida označuje področje digitalnega modela reliefa uporabljenega v tej nalogi (Slika 5.1). Vira: Geopedia, Geodetski inštitut Slovenije.

bju 3.5 milijonih let zaradi raztapljanja kamnine stalno zniževalo, hkrati pa se je na njem pojavilo veliko število vrtač. Vrtače take velikosti in oblike najdemo tudi v drugih delih Dinarskega krasa, na področjih kjer so bili pogoji za nastanek vrtač vzpostavljeni prej ali kasneje kot v Menišiji.

Iz tega sklepamo, da se bodo pri določenih pogojih na ravnem kraškem površju sčasoma oblikovale vrtače. Če so vrtače, po dolgem času, podobnih si dimenzij, sklepamo da konvergirajo proti stabilni obliki, ki je po dolgem času odvisna le od lokalnih pogojev.

Poglavje 2

Realne vrtače

2.1 Segmentacija

Identifikacijo velike količine objektov se lotimo s segmentacijo po konkavnosti, kot predlaga [DY13]. Za ta namen uvedemo indeks konkavnosti, ki ga izračunamo tako, da od izbrane točke v matriki višinskih točk odštejemo povprečno vrednost vseh točk, iz koncentričnega kolobarja:

$$I_k(r_0, r_1, r_2) = h(r_0) - \frac{1}{N} \sum_{r_1 < r < r_2} h(r). \tag{2.1}$$

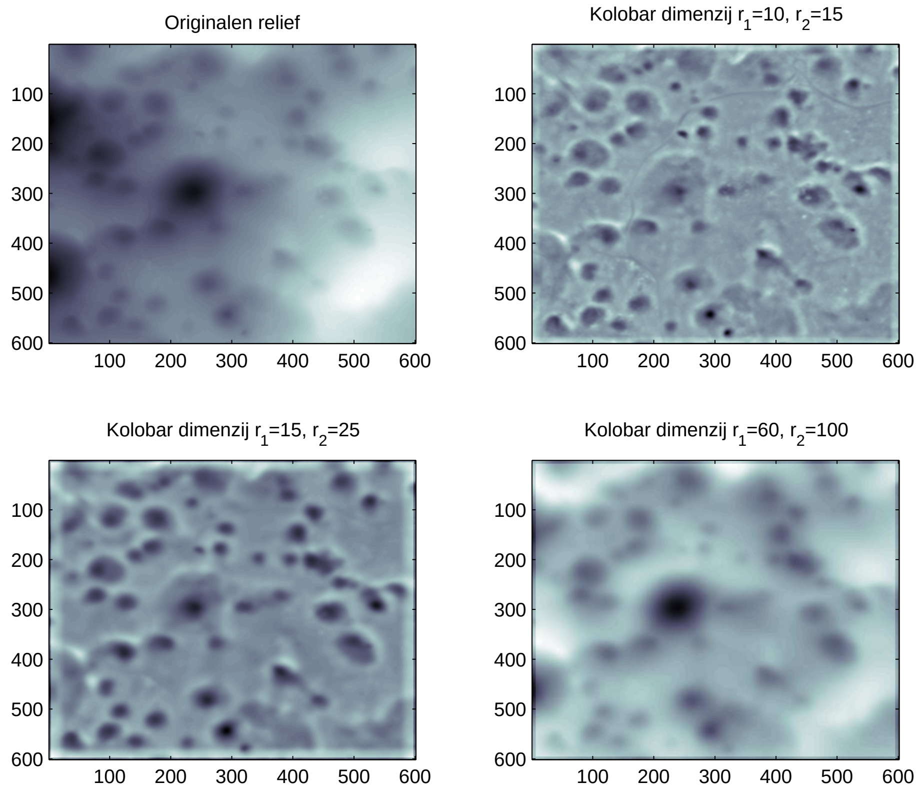
Center kolobarja postavimo v točko katere indeks konkavnosti računamo, r_1 in r_2 pa sta notranji ter zunanji radij kolobarja. Primer računa indeksa konkavnosti na (Slika 2.1).

617	616,8	616,7	616,5	616,4	616,3	616,1	615,9	615,7
616,7	616,5	616,3	616,1	616	615,8	615,6	615,4	615,2
616,4	616,1	615,9	615,7	615,5	615,3	615,1	614,9	614,8
616,1	615,8	615,6	615,3	615,1	615	614,7	614,4	614,2
615,8	615,6	615,4	615,1	614,8	614,6	614,3	614	613,7
615,6	615,3	615,1	614,8	614,5	614,2	614	613,6	613,3
615,4	615,1	614,8	614,7	614,3	613,8	613,6	613,3	612,9
615,1	614,9	614,7	614,3	614	613,7	613,3	613	612,7
615	614,7	614,4	614	613,8	613,4	613,2	612,9	612,6

Slika 2.1: V prikazanem primeru je indeks konkavnosti, $I_k = 614,8 - 19676,2/32 = -8,125 \cdot 10^{-2}$.

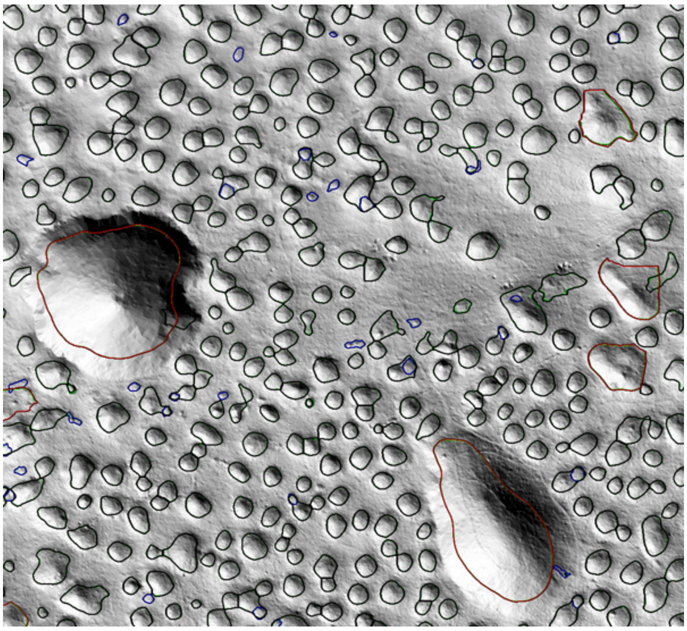
Postopek ponovimo po celotni matriki višinskih točk. Rezultat je matrika indeksa konkavnosti.

Od dimenzij, ki jih izberemo za kolobar je odvisno, ali bodo določene točke v reliefu imele pozitven ali negativen indeks konkavnosti. Empirično se odločimo za tri različne kolobarje, za katere ocenimo da z njimi najdemo največ vrtač. Z njimi izračunamo indeks konkavnosti, dobimo (Slika 2.2).



Slika 2.2: Indeks konkavnosti reliefa, pri različno izbranih dimenzijah kolobarja ($r_1 = 10, r_2 = 15; r_1 = 15, r_2 = 25; r_1 = 60, r_2 = 100$).

Nato konveksne dele površja (svetlejši odtenki) zavržemo in konkavne (temnejši odtenki) odberemo kot vrtače. Vidimo, da pri izbiri manjšega kolobarja najdemo več vrtač, a podcenimo njihovo velikost. Pri izbiri večjega kolobarja pa se zgodi, da več manjših vrtač določimo za eno veliko. Zato vse tri rezultate primerjamo in v primeru, da večja vrtača prekriva eno manjšo izberemo večjo vrtačo. V primeru da velika vrtača prekrije več manjših izberemo manjše. Rezultat vidimo na (Slika 2.3). Vrtače, ki smo jih zaznali pri izbiri manjšega kolobarja so obkrožene z modro barvo, vrtače srednjega kolobarja z črno in vrtače velikega z rdečo. Opazimo, da kljub trudu nekoliko podcenimo velikost vrtač. Za statistično analizo to ni moteče, saj podcenitev napravimo na vseh vrtačah in na enak način.



Slika 2.3: Del od 8687 zaznanih konkavnih objektov na območju Menišije. Poleg vrtač so na sliki vidni tudi dve udornici.

2.2 Analiza

Površino vrtač definiramo s številom višinskih točk (pikslov), ki jo sestavljajo:

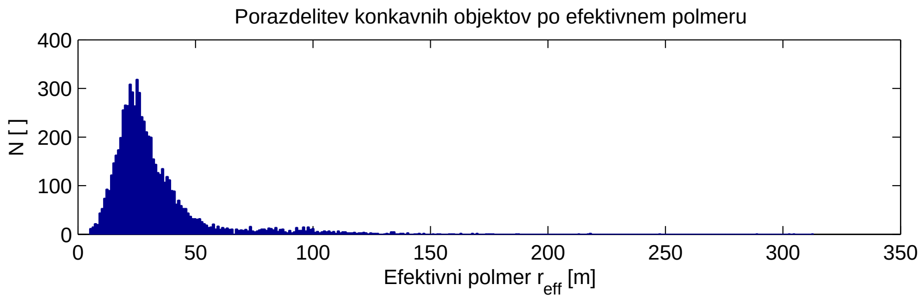
$$A = \sum pikslov. \tag{2.2}$$

S to količino nato definiramo efektivni polmer objektov:

$$r_{eff} = \sqrt{\frac{A}{\pi}}. \tag{2.3}$$

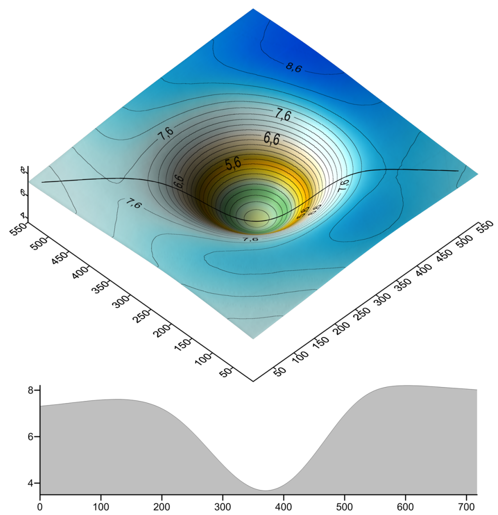
Porazdelitev efektivnih polmerov pokažemo na histogramu (Slika 2.4).

Vidimo, da največ vrtač pade v razred z efektivnim polmerom 24-25m. Večina preostalih pa ima nekaj metrov večji ali manjši polmer. Po velikosti objektov in vizualizaciji segmentacije (Slika 2.3) sklepamo, da so najdeni objekti res vrtače.



Slika 2.4: Polmeri konkavnih objektov v Menišiji, vrh pade v razred od 24m do 25m.

Posamezne realne vrtače zaradi lokalnih pogojev in zgodovine razvoja reliefa niso simetrične, a zdi se, da so si med seboj podobne. Da bi ugotovili idealno obliko vrtače, izračunamo povprečje velikega števila realnih vrtač. Uporabimo dva pristopa - pri prvem (Slika 2.5) vrtače različnih velikosti raztegnemo na isto velikost in povprečimo, pri drugem (Slika 2.9) pa jih razdelimo v velikostne razrede in jih povprečimo znotraj le-teh.



Slika 2.5: Povprečje 8687 realnih vrtač z območja Menišije, pred povprečjem so bile vrtače raztegnjene na velikost največje v setu.

Na prvi pogled se zdijo dobljeni profili cilindično simetrični in Gaussove oblike:

$$h(r,\phi) = A \cdot e^{-\frac{(r-r_0)^2}{\sigma^2}} + C. \tag{2.4}$$

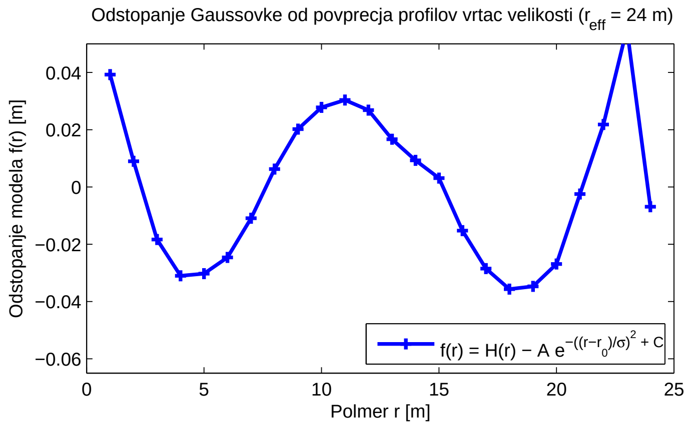
Zato preidemo v cilindrične koordinate in povprečimo $h(r, \phi)$ po ϕ:

$$\bar{h}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(r, \phi) \mathrm{d}\phi. \tag{2.5}$$

Tako problem reduciramo na študij profilov. Po (Slika 2.4) vemo, da obstaja velika skupina vrtač z $r_{eff} = 24m$. Povprečimo jih po kotu z (2.5) in nato izračunamo še povprečje njihovih profilov:

$$\bar{H}(r) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \bar{h}(r). \tag{2.6}$$

Na (Slika 2.6) prikažemo ujemanje $\bar{H}(r)$ za profile z $r_{eff} = 24m$, s predlagano Gaussovo funkcijo (2.4). Ujemanje ocenimo za dovolj dobro in nadaljujemo.

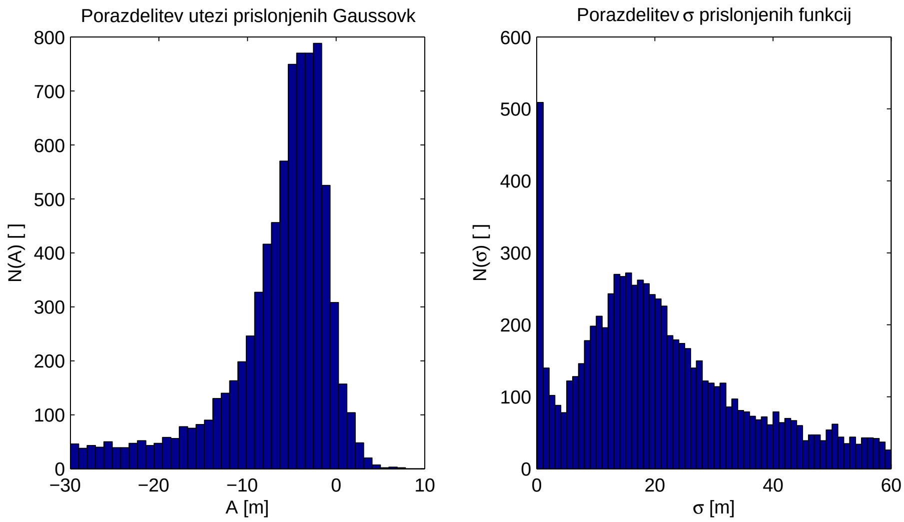


Slika 2.6: Povprečimo profile vrtač z $r_{eff} = 24m$ po (2.6), jim prilegamo Gaussovko (2.4) in izrišemo ujemanje prileganja.

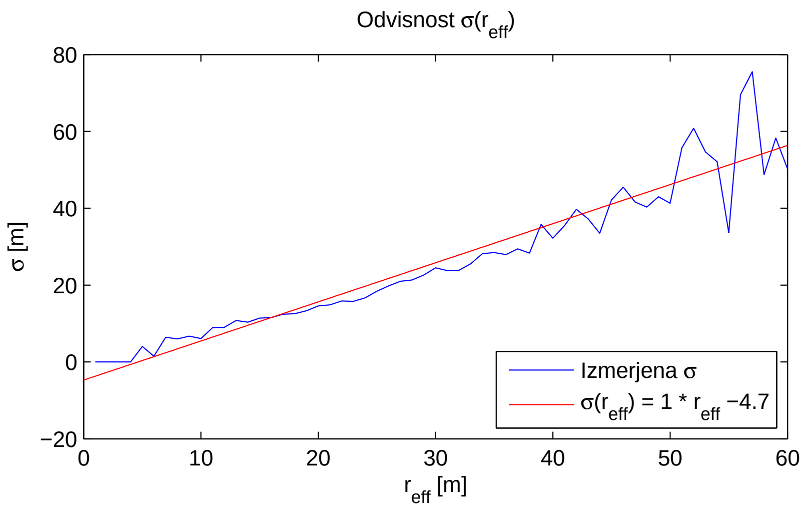
Ker nam povprečna vrtača (Slika 2.5) ne pove veliko, nadaljujemo tako, da Gaussovo funkcijo (2.4) nalegamo na prej po (2.5) izračunanih profilih realnih vrtač in tako izluščimo parametre σ in A realnih vrtač. Rezultata sta histograma (Slika 2.7).

Če izrišemo odvisnost $\sigma(r_{eff})$, dobimo (Slika 2.8). Krivulji prilegamo linearno funkcijo (2.7) in za tipične dimenzije vrtač ($10m < r_{eff} < 100m$) dobimo dobro ujemanje:

$$\sigma(r_{eff}) = k \cdot r_{eff} + C = r_{eff} - 4,7m. \tag{2.7}$$

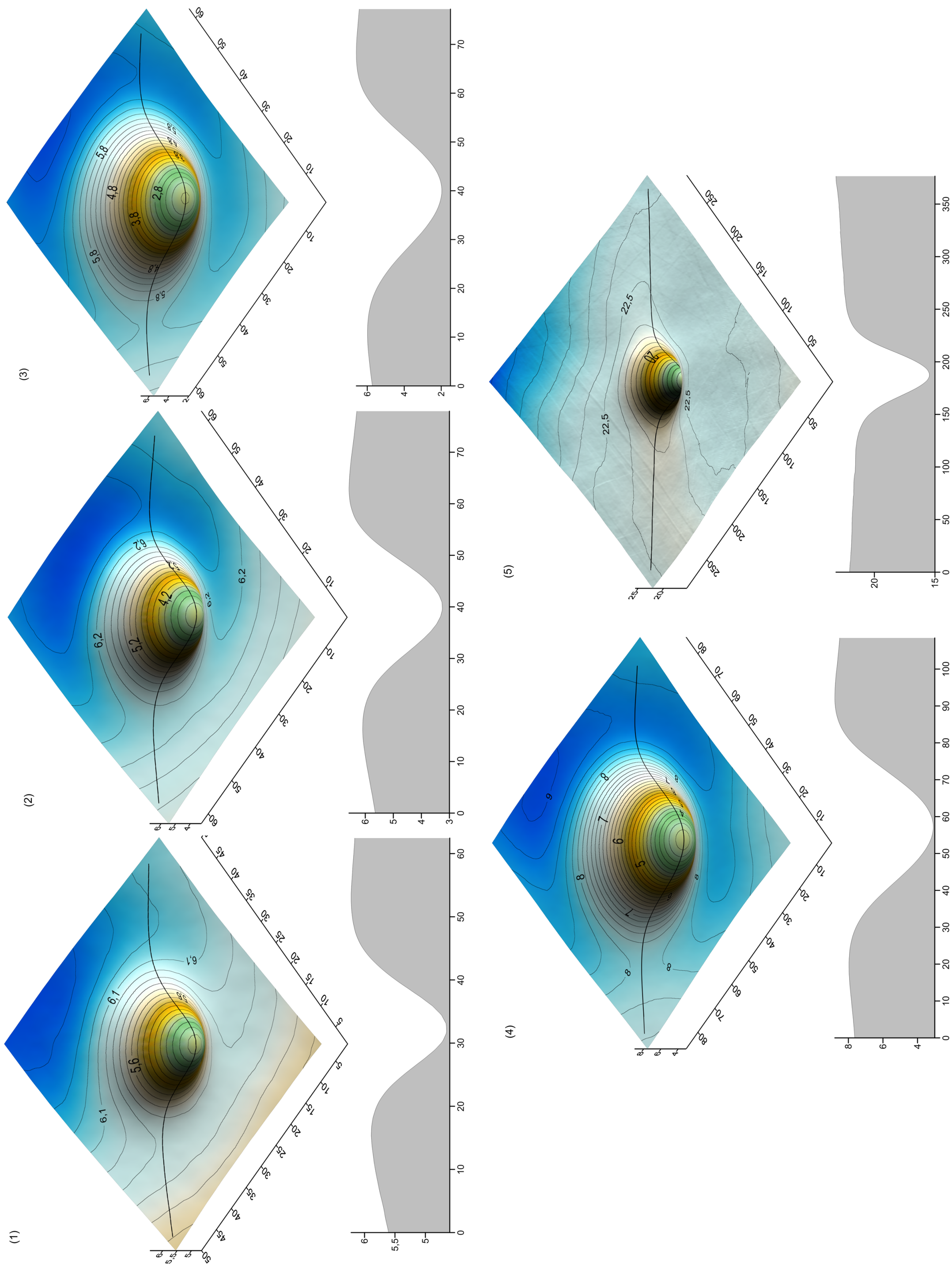


Slika 2.7: Porazdelitev A in σ za Gaussovo funkcijo prilegano na vrtače v Menišiji.



Slika 2.8: σ s polmerom narašča.

Na podlagi teh podatkov bi težko sklenili, da (2.4) opiše profil idealne vrtače, a ujemanje je dobro in ga bomo uporabili za analitično modeliranje.



Slika 2.9: Vrtače po velikosti razdelimo v pet razredov (najmanjša petina gre v prvi razred, itn.) in jih znotraj razredov povprečimo.

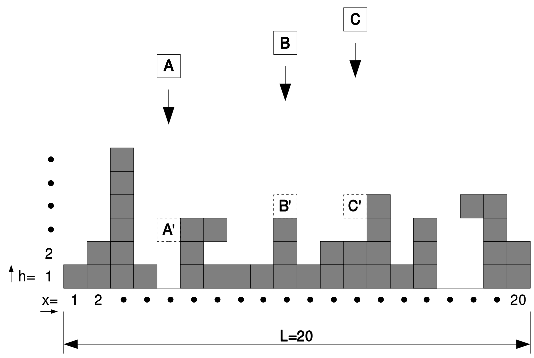
Poglavje 3

Analitično modeliranje vrtač

3.1 Rast površin

V prvem poskusu opisa dinamike vrtač uporabimo definicije s področja rasti površin. Na primeru balističnega usedanja uvedemo potrebne definicije. Delno povzeto po [Bar95].

Balistično usedanje preučuje model, kjer začnemo z ravnim površjem velikosti L. Na površje z razdalje večje od najvišje točke na površju in z naključne horizonalne pozicije x, padajo kvadratni delčki. Ti navpično padejo na povšje, ter se tam prilepijo. Tak proces pikazuje (Slika 3.1). Površje je meja med praznino in naloženimi delčki ter originalnim površjem.



Slika 3.1: Skica balističnega nalaganja v eni dimenziji. Delčki A, B in C ob različnih časih t padejo poti površju in se prilepijo na lokacije A', B' in C'.

Povprečno višino površja definiramo kot:

$$\bar{h} = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} h(i,t), \tag{3.1}$$

kjer je $h(i,t)$ višina stolpca i ob času t.

Če je usedanje delcev enakomerno porazdeljeno po x in konstantno, se povprečna višina povečuje linearno s časom:

$$\bar{h}(t) \sim t. \tag{3.2}$$

Širino površja, definiramo s standardnim odklonom višine površja od povprečne višine:

$$w(L,t) = \sqrt{\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}(h(i,t) - \bar{h}(t))^2}. \tag{3.3}$$

Po definiciji začnemo z ravno površino širine $w(L, t = 0) = 0$. Kratko prehodno obdobje, ko se delčki lepijo še na ravno podlago imenujemo obdobje Poissonove rasti. V tem obdobju velja:

$$w(L,t) \sim t^{1/2}. \tag{3.4}$$

Za tem nastopi obdobje rasti, v katerem velja:

$$w(L,t) \sim t^{\beta} \quad t \ll t_s, \tag{3.5}$$

kjer je β eksponent rasti, ki poda časovno dinamiko hrapavosti površja, t_s pa čas zasičenja.

Po dolgem času rast površja preide v zasičeni režim, v katerem se eksponentna rast širine ustavi in doseže zasičeno vrednost $w_{sat}(L)$, ki je od velikosti sistema L odvisna takole:

$$w(L,t_s) = w_{sat}(L) \sim L^{\alpha} \quad (t \gg t_s). \tag{3.6}$$

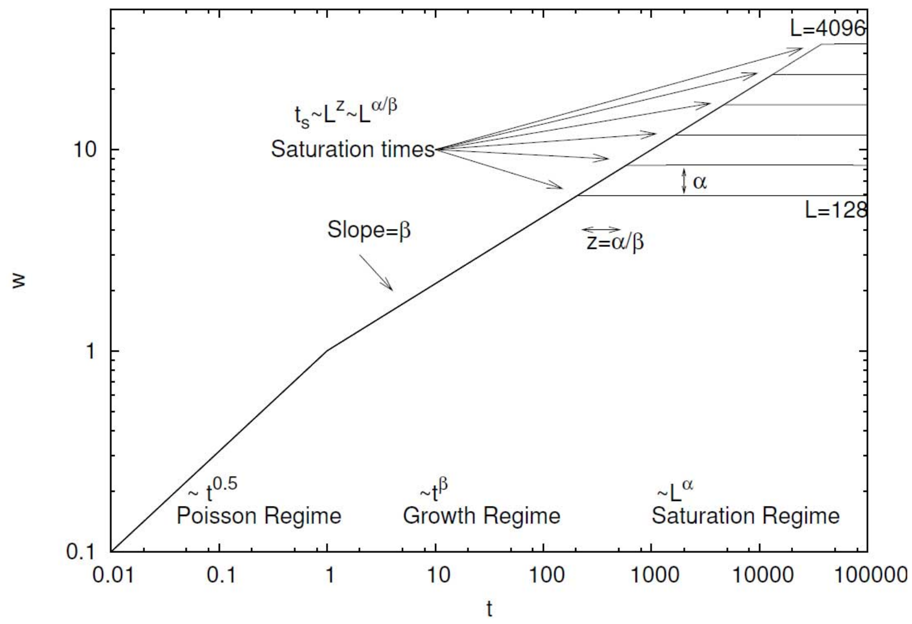
Eksponent hrapavosti α nam pove kako je hrapavosti zasičenega površja odvisna od njegove velikosti.

Čas zasičenja t_s, ob katerem rast površja preide iz nenasičenega v nasičen režim, je odvisen od velikosti površja in je:

$$t_s \sim L^z, \tag{3.7}$$

kjer je z dinamični eksponent, ki je povezan z dinamiko širjenja površja.

Celotna dinamika širine pri balističnem naleganju je za različne velikosti površja prikazana na (Slika 3.2).



Slika 3.2: Idealni potek širine površja pri balističnem naleganju, za različne velikosti sistema L [Sch03].

Eksponenti α, β in z med seboj niso neodvisni.

Iz (Slika 3.2) in zveze (3.6) vidimo, da se krivulje $w(L,t)/w_{sat}(L)$ zasičijo pri isti konstantni vrednosti, ne glede na velikost sistema L.
Iz zveze (3.7) pa vidimo, da se bodo širine površij zasitile o istem karakterističnem času t/t_s.
Sklepamo, da je $w(L,t)/w_{sat}(L)$ funkcija t/t_s, torej:

$$\frac{w(L,t)}{w_{sat}(L)} \sim f(\frac{t}{t_x}), \tag{3.8}$$

kjer je $f(t/t_s)$ funkcija lestvičenja. Vstavimo w_{sat} in t_s, po zvezah (3.6), (3.7) in dobimo Family-Vicsek relacijo lestvičenja:

$$w(L,t) \sim L^\alpha f(\frac{t}{L^z}). \tag{3.9}$$

Za $f(u)$ velja:

$$f(u) \propto \left\{ \begin{array}{ll} u^\beta & u \ll 1 \\ 1 & u \gg 1 \end{array} \right. . \tag{3.10}$$

Sedaj si ogledamo (Slika 3.2). Če se točki zasičenja $(t_s, w(t_s))$ približamo z leve, vidimo, da po (3.5) velja $w(t_s) \sim t_s^\beta$. Hkrati pa, da če se isti točki približamo z desne po (3.6) velja $w(t_s) \sim L^{\alpha}$. Torej $t_s^{\beta} \sim L^{\alpha}$ in po (3.7) sledi zakon o lestvičenju:

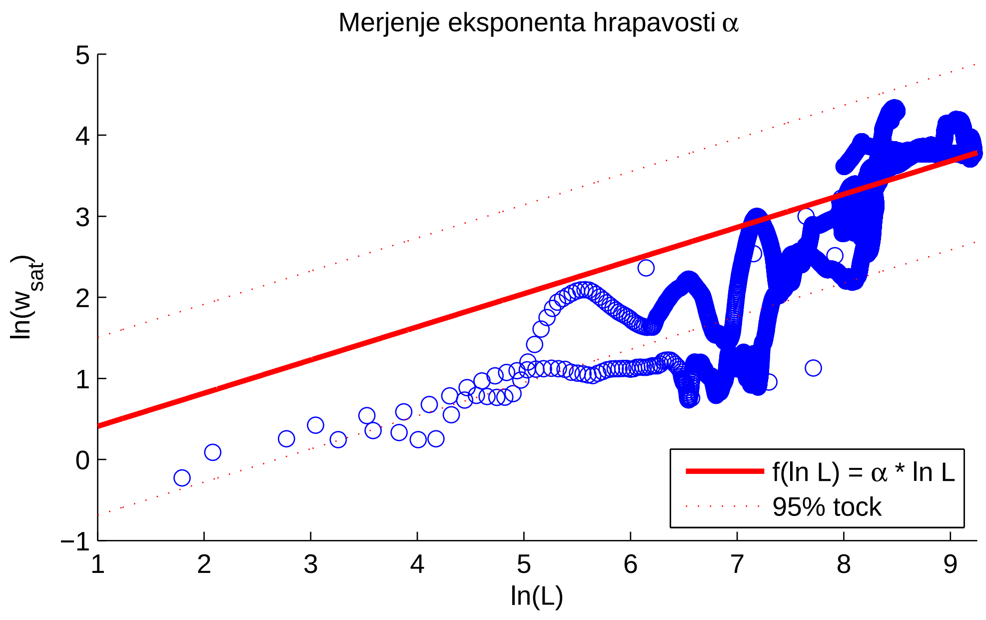
$$z = \frac{\alpha}{\beta}. \tag{3.11}$$

3.2 Merjenje hrapavosti Menišije

V uvodu smo postavili tezo, da so vse vrtače stare, stabilne oblike. Ko jih opišemo z definicijami rasti površin, domnevamo da so starejše od časa zasičenja in lahko zvezo (3.6) predelamo v $w_{sat} = C \cdot L^{\alpha}$ in dobimo:

$$\alpha = \frac{\partial(ln(w_{sat}))}{\partial(lnL)}. \tag{3.12}$$

Na LiDARskem modelu Menišije izračunamo w_{sat} za vse mogoče za prereze v smereh sever-jug in vzhod-zahod. Širine površij prerezov w_{sat} nato narišemo v odvisnosti od velikosti prerezov površij L.
Dobimo graf (Slika 3.3), s katerega odberemo, da je $\alpha = 0.409 \pm 0.02$.



Slika 3.3: Prileganje premice $f(ln(L)) = \alpha \cdot x$ h krivulji $ln(w_{sat}(ln(L)))$ nam poda eksponent hrapavosti α.

3.3 Model Kardar-Parisi-Zhang

Za modeliranje procesa nastanka vrtač lahko vzamemo, da kamnina razpada stohastično kot $\eta(\mathbf{x}, t)$, ki je bel Gaussov šum, za katerega velja: $\langle \eta(\mathbf{x}, t) \rangle = 0$ in

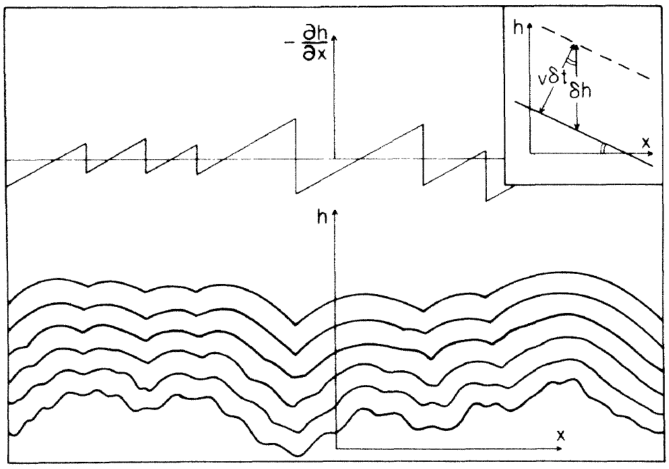
$$\langle \eta(\mathbf{x}, t)\eta(\mathbf{x}', t') \rangle = 2D\delta^d(\mathbf{x} - \mathbf{x}')(t - t'). \tag{3.13}$$

Ko se del kamnine raztopi, pomaknemo površino površja v smeri normale (Slika 3.4), torej se površje v smeri osi h v času δt pomakne za

$$\delta h = \sqrt{(v\delta t)^2 + (v\delta t \nabla h)^2}. \tag{3.14}$$

Če je $|\nabla h| \ll 1$, dobimo:

$$\dot{h} = v\sqrt{1 + (\nabla h)^2} \simeq v + \frac{v}{2}(\nabla h)^2 + \dots . \tag{3.15}$$



Slika 3.4: Zaporedni profili deterministične rasti, priraščanje v smeri normale površja je prikazano desno zgoraj.

To nam da člen $\frac{\lambda}{2}(\nabla h)^2$.

Vzamemo, da zaradi počasnosti procesa prihaja do difuzije površja in dodamo člen $\nu\nabla^2 h$.

Sestavljeni nam ti členi dajo Kardar-Parisi-Zhang enačbo ([KPZ86]):

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nu\nabla^2 h + \frac{\lambda}{2}(\nabla h)^2 + \eta(\mathbf{x}, t). \tag{3.16}$$

Vzamemo nastavek:

$$h(\mathbf{x},t) = \frac{2\nu}{\lambda} log(Z(\mathbf{x},t)) \tag{3.17}$$

in dobimo stohastično difuzijsko enačbo:

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = \nu \nabla^2 Z + \frac{\lambda}{2\nu}\eta(\mathbf{x},t)Z, \tag{3.18}$$

katere rešitev je:

$$h(\mathbf{x},t) = \frac{2\nu}{\lambda} ln \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^d\xi}{(4\pi\nu t)^{d/2}} \cdot exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\nu t} + \frac{\lambda}{2\nu} h(\xi,0) \right] \right). \tag{3.19}$$

Avtorji [KPZ86] nato v Fourierovem prostoru s prostim propagatorjem in pogojem za beli šum perturbativno rešijo (3.16). Končno pokažejo, da za stohastično priraščanje površja velja: $z = \frac{3}{2}$ in $\alpha = \frac{1}{2}$. To se relativno dobro ujema z $\alpha = 0.409 \pm 0.02$ namerjenim v (Poglavje 3.2).

Če simuliramo stohastično rast površja, opazimo, da je končno stanje površja modela precej stabilno, a ne ravnovesno in precej odvisno od začetnih pogojev. Oblike, ki na površju nastanejo, so si med seboj podobne po obliki in velikosti. (Slika 3.5) je primer tako simuliranega površja.

3.4 Modeliranje dinamike vrtač

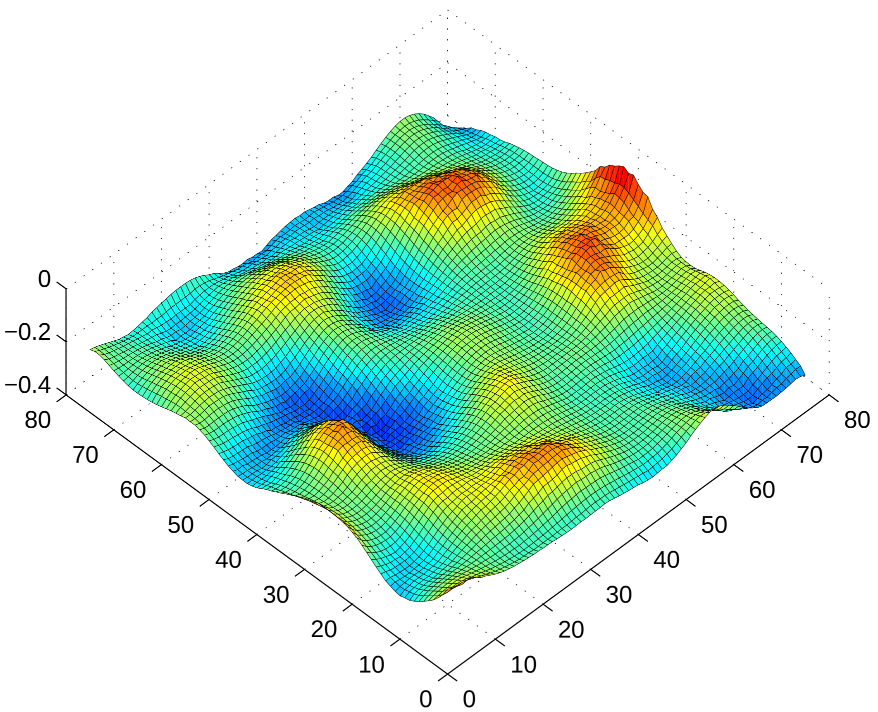
Za modeliranje dinamike posamezne vrtače stohastični procesi niso primerni, zato si za opis pogledamo dinamično enačbo (3.20) z različnimi variacijami člena rasti $F(h)$ (3.21). Izbor enačb je povzet po [KU10].

$$\frac{\partial h(t,x)}{\partial t} = F(h). \tag{3.20}$$

$$F(h) = \begin{cases} a \cdot h \\ a \cdot h \cdot (1 - \frac{h}{K}) \\ a \cdot (K - h) \\ -h \cdot e^{-at} \end{cases}. \tag{3.21}$$

3.4.1 Eksponentna rast

V modelu eksponentne rasti predpostavimo, da je rast sorazmerna z vrednostjo ($h(t)$) v izbrani točki. Dobimo enačbo (3.22), ki jo reši funkcija (3.23), in jo pri variaciji parametra a narišemo (Slika 3.6).

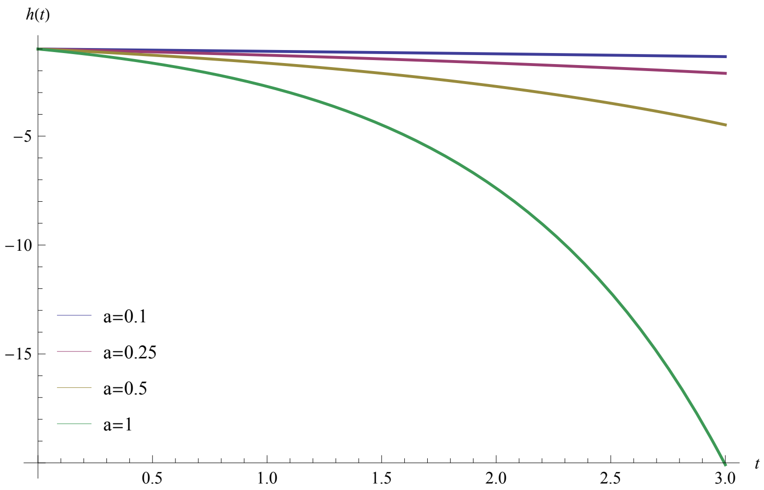


Slika 3.5: Numerična simulacija po Kardar-Parisi-Zhang enačbi razvijajočega se površja po 10^5 korakih.

$$\frac{\partial h(t)}{\partial t} = a \cdot h(t). \tag{3.22}$$

$$h(t) = h_0 e^{at}. \tag{3.23}$$

Če je parameter $a > 0$, bomo vedno dobili neomejeno rast, kar zmanjšuje splošnost tega modela. Vseeno pa je v omejenih intervalih uporaben za npr. opis rasti populacij držav, širjenje virusov, jedrskih verižnih reakcij, itn. Uporabnost modela se konča, ko se sistem zasiti - to je, ko zmanjka virov, ki rast poganjajo (če gledamo dane primere - ko zmanjka hrane, celic, jeder). Pri vrtačah je možno, da imamo eksponentno rast v začetku, a tega ne moremo ne dokazati ne ovreči. Vsekakor pa je ni v ravnovesni fazi, saj zelo globokih vrtač ne opazimo.



Slika 3.6: Vzeli smo začetno vrednost $h_0 = -1$ in variirali vrednost a. $a = 0,1; 0,25; 0,5; 1$.

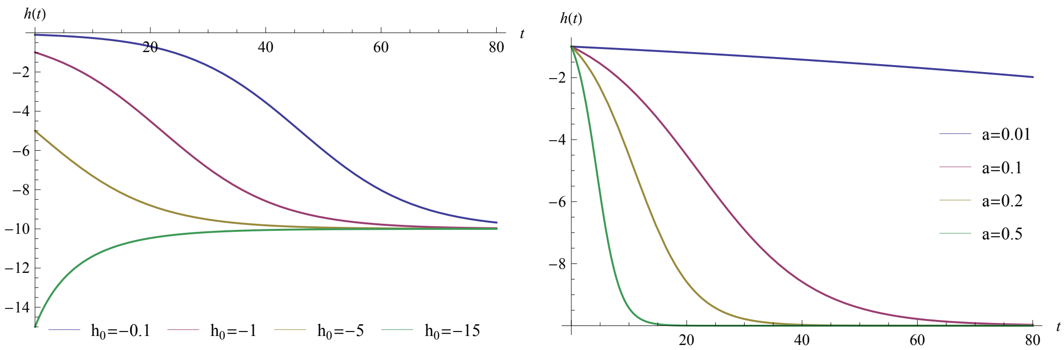
3.4.2 Logistična rast

V model logistične rasti predpostavimo, da je rast sorazmerna z višino v izbrani točki, ter da se zmanjšuje, ko se približujemo fizikalnim omejitvam sistema (npr. pomanjkanju hrane, življenjskega prostora, itn). To zapišemo v enačbo (3.24), ki jo reši funkcija (3.25).

$$\frac{\partial h(t)}{\partial t} = a \cdot \left(1 - \frac{h(t)}{K}\right) h(t). \tag{3.24}$$

$$h(t) = \frac{h_0 K e^{at}}{K + h_0(e^{at} - 1)}. \tag{3.25}$$

Vidimo, da ne glede na izbiro začetne točke h_0, vrednost h(t) konvergira proti vrednosti K. Torej je rast omejena s kapaciteto sistema K. Če funkcijo (3.25) Taylorjevo razvijemo, vidimo, da je rast, kjer $h(t) \ll K$, približno $ah(t)$. V območju, kjer je $h(t)$ bližji K, pa postane drugi člen v razvoju $-ah(t)^2/K$ pomembnejši in rast se po dolgem času ustavi. Model logistične rasti se uporablja za modeliranje človeških in živalskih populacij, rasti tumorjev, širjenje inovacij v družbi in sprememb v jeziku. Zaradi omejene rasti pa se zdi tudi zanimiv kandidat za modeliranje dinamike vrtač.



Slika 3.7: Logistična rast po (3.25). Vzeli smo $K = -10$ in variirali ostale parametre. V prvem primeru smo pri $a = 0,1$ vzeli $h_0 = -0,1; -1; -5; -15$. V drugem pa pri $h_0 = -1$, $a = 0.01; 0.1; 0.2; 0,5$.

3.4.3 Omejena eksponentna rast

Model omejene eksponentne rasti pravi, da je rast tem večja, čim dlje smo od omejitve sistema K in vedno v smeri proti vrednosti K. To zapišemo v enačbo (3.26) in rešimo z (3.27).

$$\frac{\partial h(t)}{\partial t} = a \cdot (K - h(t)) = aK - ah(t). \tag{3.26}$$

Rešitev pa je

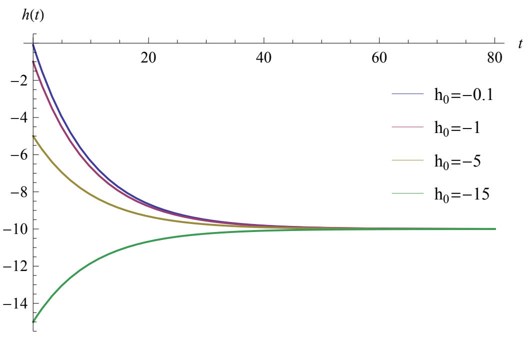
$$h(t) = K - (K - h_0)e^{-at}. \tag{3.27}$$

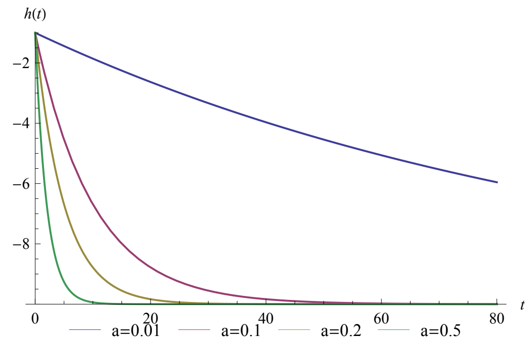
Medtem ko je omejena eksponentna rast podobna logistični, pa ima logistična v začetku položnejšo rast. Omejena eksponentna rast se uporablja za modeliranje sistemov, v katerih dinamiko poganjajo zunanji dejavniki in znotraj katerih ni interakcij. Naprimer pri širjenju inovacij v družbi.

3.4.4 Gompertzova rast

Pri modelu Gompertzove rasti vzamemo, da se faktor rasti s časom spreminja po enačbi (3.28), kar nam da enačbo (3.29) in rešitev (3.30), iz katere lahko dobimo še asimptotsko rešitev (3.28), ki je podobna zasičenosti modela pri prejšnjih dveh primerih, a nastopi zaradi postopnega prenehanja rasti, in ne zaradi povratne zanke (kot v primeru logistične in omejene eksponentne rasti).

$$a(t) = a_0 \cdot e^{-kt}. \tag{3.28}$$



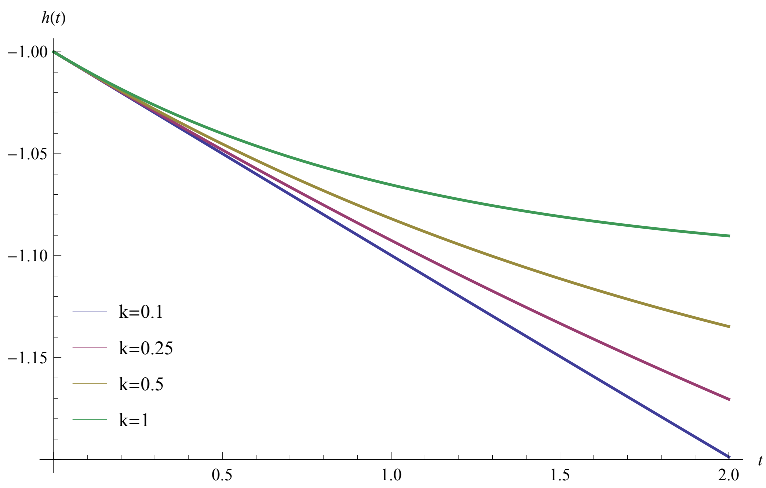


Slika 3.8: Omejena eksponentna rast po (3.27). Vzeli smo $K = -10$ in variirali ostale parametre. V prvem primeru smo pri $a = 0,1$ vzeli $h_0 = -0,1; -1; -5; -15$. V drugem pa pri $h_0 = -1$, $a = 0.01; 0.1; 0.2; 0,5$.

$$\frac{\partial h(t)}{\partial t} = a(t) \cdot h(t) = a_0 e^{-kt} h(t). \tag{3.29}$$

$$h(t) = h_0 \cdot e^{\frac{a_0}{k}(1-e^{-kt})}. \tag{3.30}$$

$$h(t) = h_0 \cdot e^{\frac{a_0}{k}} \quad \text{pri} \quad t \to \infty. \tag{3.31}$$



Slika 3.9: Vzeli smo $h_0 = -1$ in $a_0 = 0,1$ in variirali $k = 0,1; 0,25; 0,5; 1$.

3.5 Difuzijsko modeliranje dinamike vrtač

Zaradi počasnosti procesa, ki oblikuje vrtače, domnevamo, da difuzija ni nepomembna, in dodamo dinamičnim modelom iz prejšnjega podpoglavja (3.33) še difuzijski člen (3.32).

$$\frac{\partial h(t,x)}{\partial t} = D\Delta h(t,x) + F(h). \tag{3.32}$$

$$F(h) = \begin{cases} a \cdot h \\ a \cdot h \cdot (1 - \frac{h}{K}) \\ a \cdot (K - h) \\ -h \cdot e^{-at} \end{cases}. \tag{3.33}$$

Rešitve teh enačb bomo iskali numerično in komentirali njihovo časovno dinamiko. Vzeli bomo naslednje robne pogoje:

$$\begin{aligned} h(0,x) &= -e^{-x^2}, x \in D \\ h(t,x) &= 0, x \in \partial D \\ \frac{\partial h(t,x)}{\partial n} &= 0, x \in \partial D. \end{aligned} \tag{3.34}$$

3.5.1 Eksponentna rast

$$\frac{\partial h(t,x)}{\partial t} = D\Delta h(t,x) + a \cdot h(t,x). \tag{3.35}$$

Sistem nam da eksponentno rast, kot je prikazano na (Slika 3.10).

Eksponentna rast za vrtače ni primeren model, saj zelo velikih vrtač v naravi ne opazimo.

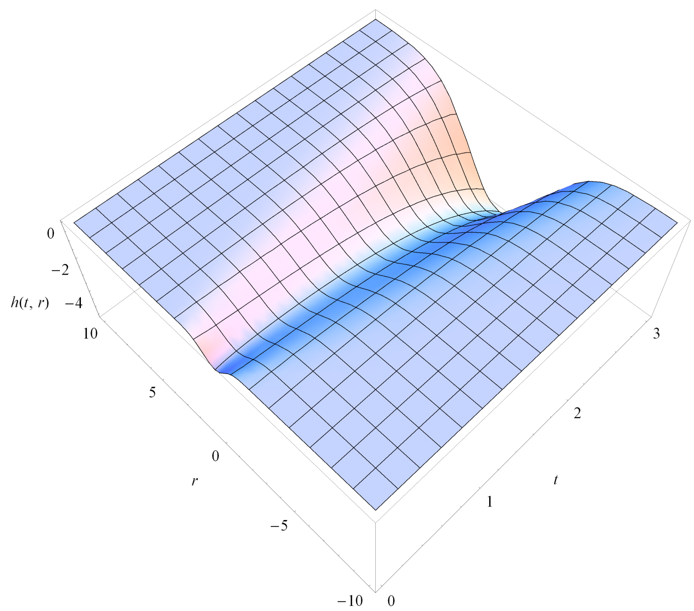
3.5.2 Logistična rast

Dobimo t.i. Fisher-Kolmogorovo enačbo:

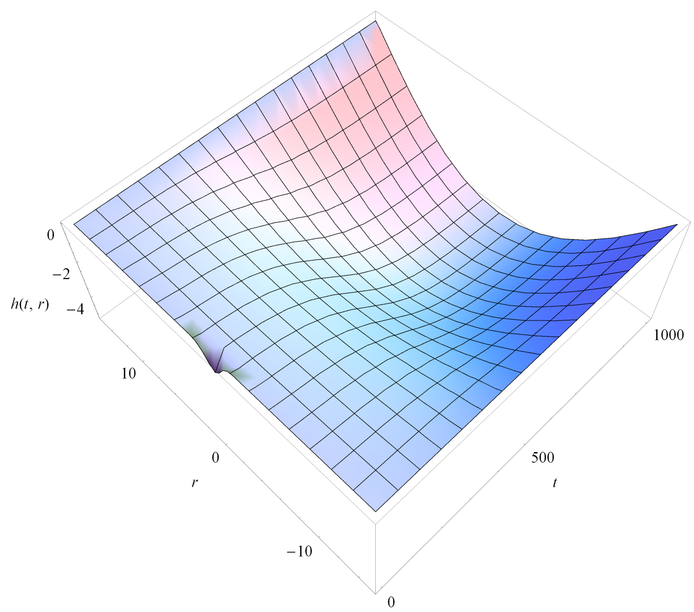
$$\frac{\partial h(t,x)}{\partial t} = D\Delta h(t,x) + a \cdot h(t,x) \cdot (1 - \frac{h(t,x)}{K}). \tag{3.36}$$

Vidimo, da ko se pobočje enkrat oblikuje, ne spreminja več oblike, ampak potuje kot valovna fronta navzven (Slika 3.11). Pokažemo lahko, da je dolžina vala odvisna od difuzijske konstante D in faktorja rasti a, ter da velja:

$$\lambda \sim \sqrt{D/a}.$$



Slika 3.10: Vzeli smo $D = 1$, $a = 1$.



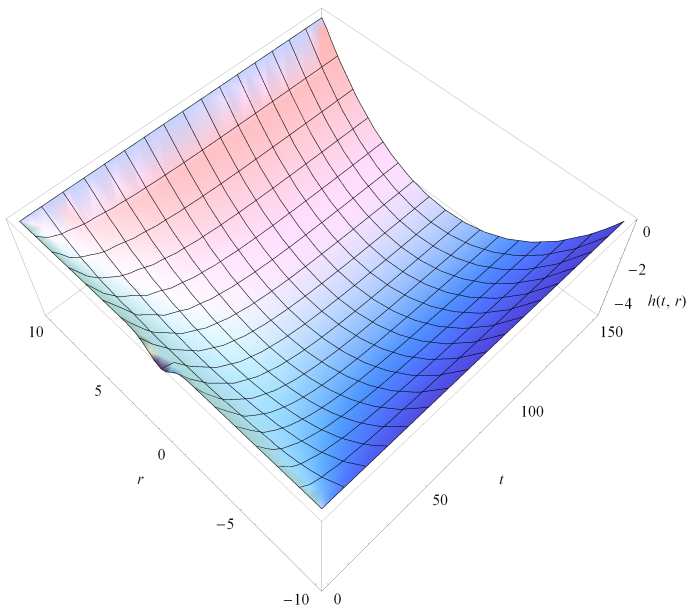
Slika 3.11: Vzeli smo $D = 1$, $a = \frac{1}{50}$, $K = -10$.

Iz te zveze lahko pokažemo tudi, da je hitrost takega vala $v = 2\sqrt{Da}$. Enačba (3.36) se uporablja za opis zaželenih genov v populaciji, širjenje populacije v neposeljenem teritoriju, itn. Difuzivna logistična rast se zdi pri primerno izbranem faktorju K zanimiv model za dinamiko vrtač.

3.5.3 Omejena eksponentna rast

Če izberemo $F(h) = a \cdot (K - h)$, dobimo:

$$\frac{\partial h(t,x)}{\partial t} = D\Delta h(t,x) + a \cdot (K - h(t,x)). \tag{3.37}$$



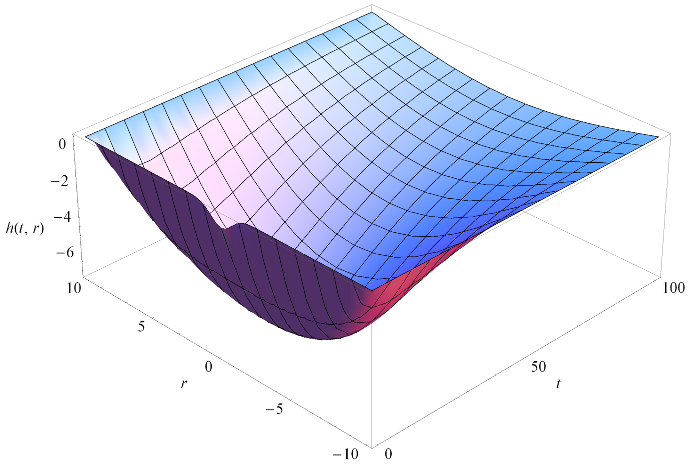
Slika 3.12: Vzeli smo $D = 1$, $a = \frac{1}{50}$, $K = -10$.

Tako dobljena rast (Slika 3.12) eksponentno raste do praga K, kjer se zasiti. Rast v poljubni točki je neodvisna od stanja v sosednjih. Ta model se ne zdi najbolj verjeten kandidat za dinamiko vrtač.

3.5.4 Gompertzova rast

Če izberemo $F(h) = -h \cdot e^{-at}$, dobimo:

$$\frac{\partial h(t,x)}{\partial t} = D\Delta h(t,x) - h(t,x) \cdot e^{-at}. \tag{3.38}$$



Slika 3.13: Vzeli smo $D = 1$, $a = \frac{1}{10}$.

Vidimo, da rast tokrat s časom upada (Slika 3.13). Tako profil najprej zraste, nato pa se difuzijsko izravna, ko difuzija prevlada. Model se zdi za modeliranje vrtač neprimeren, saj nimamo jasne razlage, kaj bi povzročilo faktor rasti, ki bi nato eksponentno zamrl.

Poglavje 4

Zaključek

Izkaže se, da je zaznava in segmentacija vrtač na digitalnem modelu reliefa relativno enostavna naloga, izvedljiva na osebnem računalniku. Kodo, ki sem jo za ta postopek spisal, sem dokumentirano objavil na spletu in bo morda služila za obsežnejšo katalogizacijo vrtač. Za nekoliko težjo nalogo se izkaže določanje idealne oblike vrtače, saj le-ta ne obstaja. Pravo vprašanje bi se moralo glasiti, kakšna je idealna oblika vrtače na izotropni podlagi po dolgem času. Vseeno sem se odločil, da za idealno vrtačo vzamem povprečje velike količine vrtač. Precej zahtevnejša naloga je bila izbira fizikalnega modela in dinamičnega opisa vrtače zaradi omejene količine podatkov o časovni dinamiki (domnevali smo, da so vse vrtače že v ravnovesnem stanju) in nepoznavanja dejanskega procesa, ki znižuje površje.

Kardar-Parisi-Zhangova rast površin nam da rezultat podoben kraškemu površju z vrtačami. Teoretično napovedan eksponent hrapavosti pa se relativno dobro ujema z izmerjenim na področju Menišije. Teh rezultatov ne moremo obravnavati kot dokaz, morda le spodbudo za nadaljnji študij.

Za nepopoln model dinamike rasti vrtač predlagajmo model difuzijsko logistične rasti (3.11), ki se zdi fizikalno najbolj smiseln.

Za popolnejši študij in dober model vrtač bi verjetno potrebovali bolj poglobljene informacije o prsti, geoloških in bioloških dejavnikih, ki lahko vplivajo na časovno dinamiko terena. Zanimiva ideja bi bila z geološkim študijem najti in datirati vrtače v različnih stopnjah razvoja ter s pomočjo te informacije oblikovati dinamičen nastavek, na podlagi katerega bi potem morda bolj osvetlili dinamično enačbo.

Poglavje 5

Priloge

Slika 5.1: Senčen digitalni model reliefa dela Menišije uporabljen v tej nalogi. Vir: Geodetski inštitut Slovenije [LAK] po metodi [KPO+07].

Literatura

[Bar95] A-L Barabási. *Fractal concepts in surface growth.* Cambridge university press, 1995.

[DY13] Daniel H. Doctor and John A. Young. An evaluation of automated gis tools for delineating karst sinkholes and closed depressions from 1-meter lidar-derived digital elevation data. *Proceedings of the Thirteenth Multidisciplinary Conference on Sinkholes and the Engineering and Environmental Impacts of Karst*, pages 449–458, 2013.

[FTV08] Cyril Fleurant, GE Tucker, and HA Viles. Modelling cockpit karst landforms. *Geological Society, London, Special Publications*, 296(1):47–62, 2008.

[FW07] D.C. Ford and P.W. Williams. *Karst Hydrogeology and Geomorphology.* Wiley, 2007.

[Gam66] Ivan Gams. Faktorji in dinamika korozije na karbonatnih kameninah slovenskega dinarskega in alpskega krasa. *Geografski vestnik*, 38:11–68, 1966.

[HDNF01] Arjun M. Heimsath, William E. Dietrich, Kunihiko Nishiizumi, and Robert C. Finkel. Stochastic processes of soil production and transport: erosion rates, topographic variation and cosmogenic nuclides in the oregon coast range. *Earth Surface Processes and Landforms*, 26:531–552, 2001.

[KK94] Ivan Kuščer and Alojz Kodre. *Matematika v fiziki in tehniki.* Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije, Ljubljana, 1994.

[KPO+07] Andrej Kobler, Norbert Pfeifer, Peter Ogrinc, Ljupčo Todorovski, Krištof Oštir, and Sašo Džeroski. Repetitive interpolation: A robust algorithm for dtm generation from aerial laser scanner data in forested terrain. *Remote Sensing of Environment*, 2007.

[KPZ86] Mehran Kardar, Giorgio Parisi, and Yi-Cheng Zhang. Dynamic scaling of growing interfaces. *Physical Review Letters*, 56(9):889, 1986.

[KU10] A. Kandler and R. Unger. *Population Dispersal Via Diffusion-reaction Equations*. Preprint. Techn. Univ., Fak. für Mathematik, 2010.

[LAK] Lidarski digitalni model reliefa Menišije, izdelal Andrej Kobler, Gozdarski inštitut Slovenije.

[Mih] Andrej Mihevc. Fotografija vrtač pri bosanskem petrovcu.

[PCV10] Placer, Celarc, and Vrabec. Osnove razumevanja tektonske zgradbe nw dinaridov in polotoka istre. *Geologija*, 53/1, 2010.

[Sch03] Arne Schwettmann. *Ballistic deposition: global scaling and local time series*. 2003.

[VMFL06] Vrabec, Marko, Fodor, and László. Late cenozoic tectonics of slovenia: Structural styles at the northeastern corner of the adriatic microplate. *The Adria Microplate: GPS Geodesy, Tectonics and Hazards*, 61:151–168, 2006.

[ZF97] L. Zambo and D. C. Ford. Limestone dissolution processes in beke doline aggtelek national park, hungary. *Earth Surface Processes and Landforms*, 22(6):531–543, 1997.

Izjava o avtorstvu in objavi elektronske oblike zaključnega dela:

Podpisani Rok Mihevc izjavljam:

- da sem diplomsko delo z naslovom *Kraške vrtače Dinarskega krasa* izdelal samostojno pod mentorstvom prof. dr. Rudolfa Podgornika in
- da Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani dovoljujem objavo elektronske oblike svojega dela na spletnih straneh.

Ljubljana, 18. april 2014 Podpis avtorja: