Matematična Fizika 2, domača naloga:
Polje gnezda nanocevk v valjasto omejenem prostoru

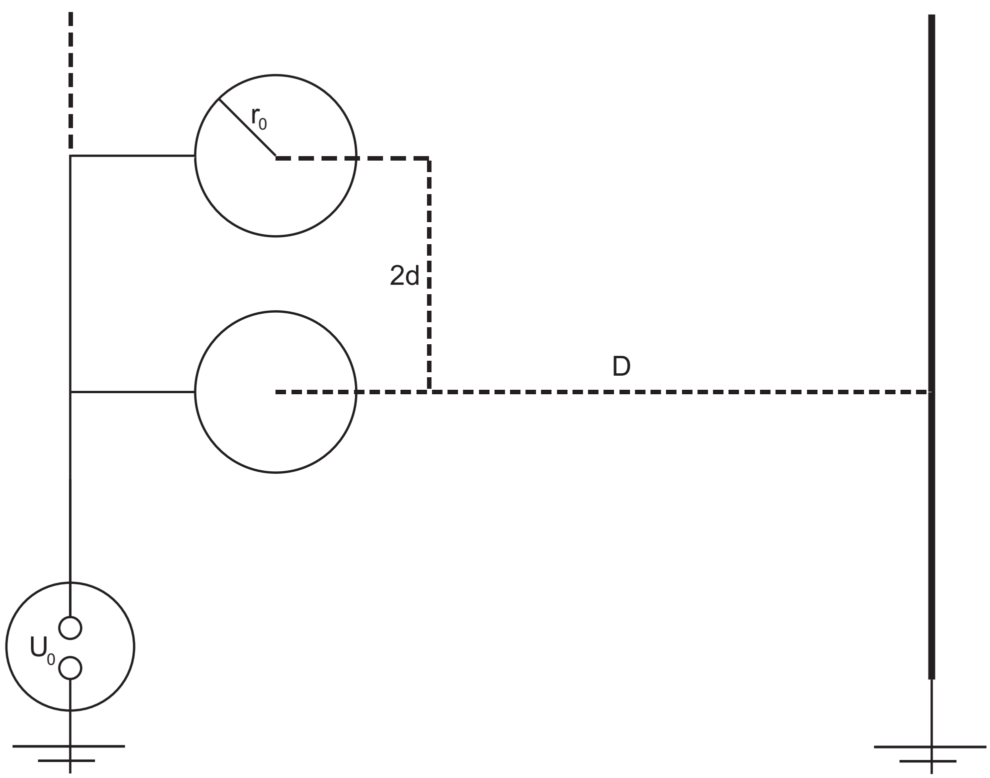
Rok Mihevc

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani
rok@mihevc.org

7. oktober 2012

1 Uvod

Nanocevke so zelo uporabne kot izviri za hladno emisijo elektronov, ker ob njihovi površini že z majhno napetostjo dosežemo velike jakosti električnega polja. Ker je težko izolirati posamezno nanocevko, dostikrat uporabijo kar celo gnezdo cevk, kakor same zrastejo.
Kako se zaradi sosed polje med cevko in oddaljeno ploščato anodo oslabi? Vzemi poenostavljen primer, v katerem obravnavamo samo vrh polkroglasto zaključene cevke – torej kot majhno kroglo proti ravnini. Sosedne cevke predstavimo z mrežo krogel, tako da z zrcaljenjem nastane problem krogle v valjasto omejenem prostoru (z robnim pogojem II. vrste na mejnih ploskvah - Slika 1).



Slika 1: Shema približka polja nanocevk

2 Postopek

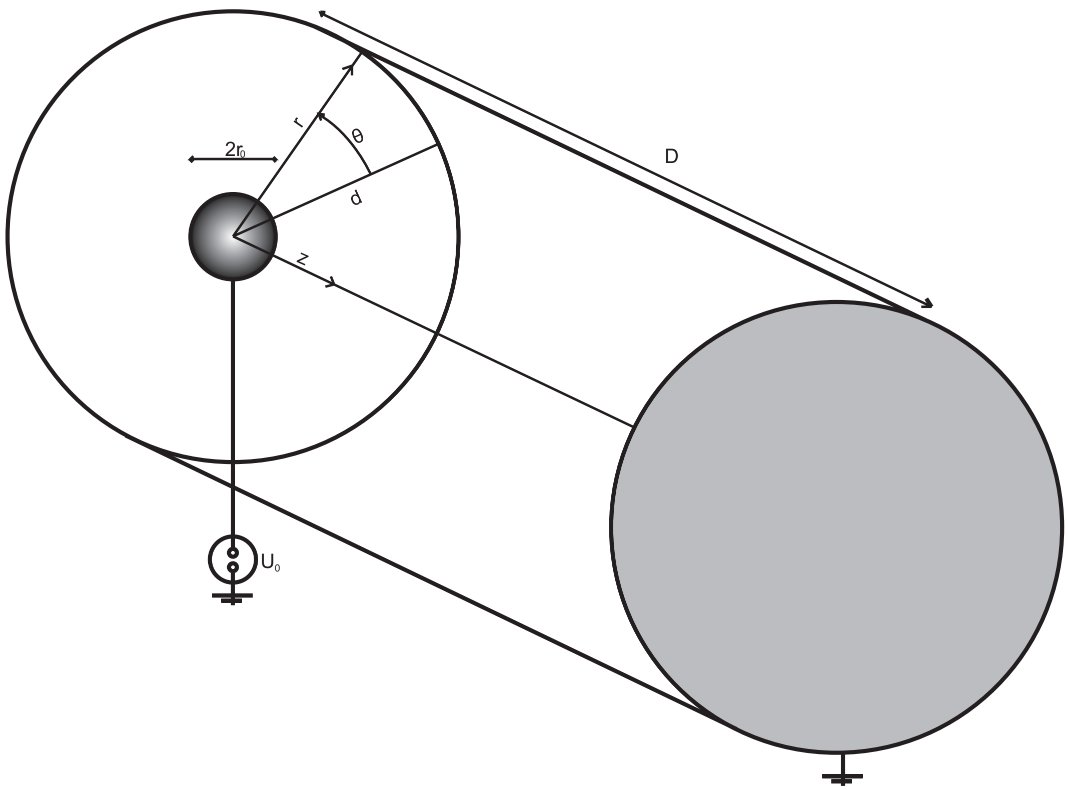
2.1 Opis fizikalnega problema

Nalogo zastavimo kot reševanje parcialne diferencialne enačbe z robnimi pogoji prvega (Dirichletov problem) in drugega reda (von Neumannov problem) ter jo lahko rešujemo numerično. Zaradi izbrane poenostavitve problema se poslužimo cilindričnih koordinat.

Naelektreno kroglo in ozemljeno ploščo (Slika 2) opišemo z *Robnimi pogoji 1.*:

$\phi(z = D) = 0$
$\phi(r^2 + z^2 = r_o^2) = U_0$
$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}}(r^2 + z^2 = r_0^2) = k$

Na ozemljeni plošči je potencial enak 0, a pričakujemo inducirano napetost. Kroglo postavimo na potencial U_0. Slinice se ozemljene plošče in nabite krogle dotikajo pravokotno.

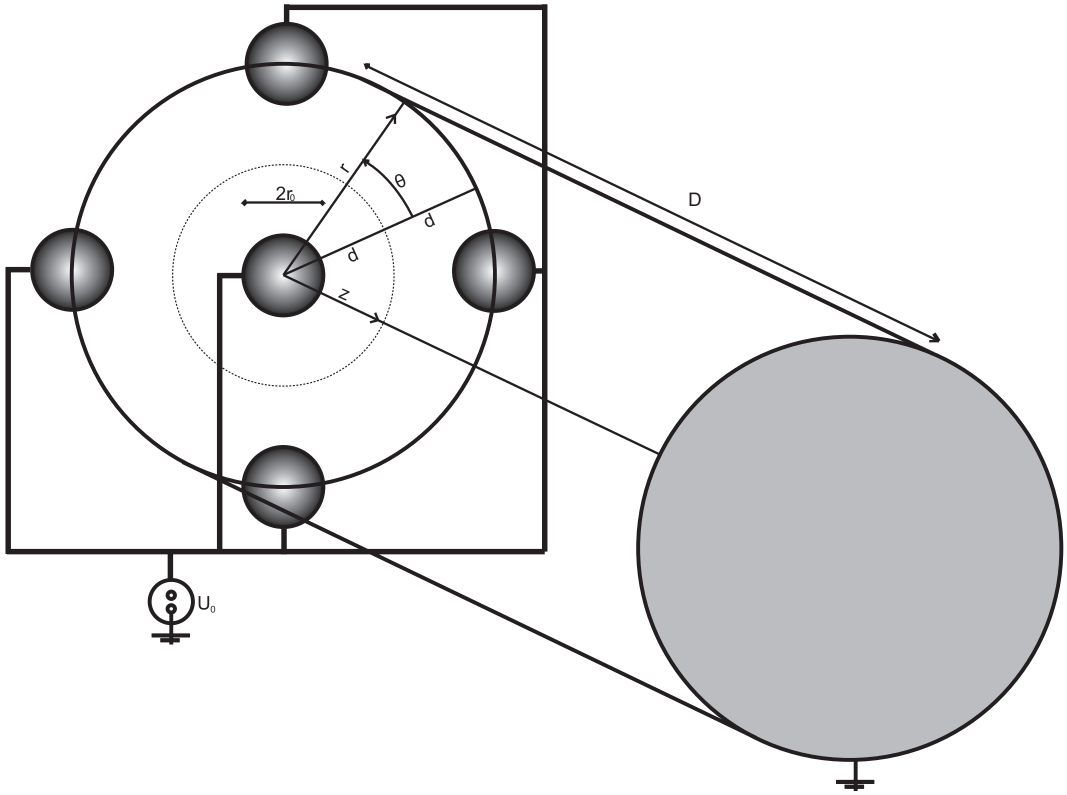


Slika 2: Krogla na potencialu U_0 in ozemljena plošča

Poenostavljen sistem naelektrene krogle s sosedami (Slika 3) pa opišemo z *Robnimi pogoji 2.*:

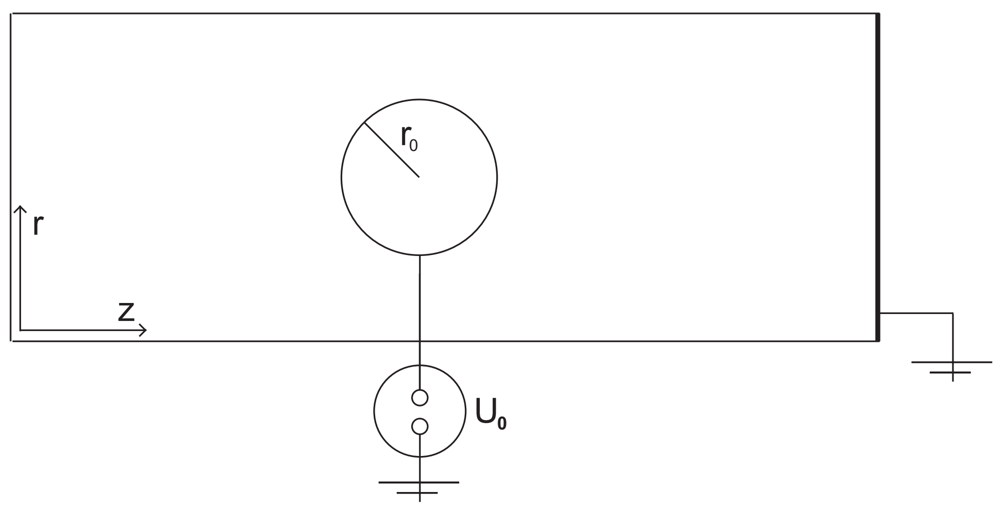
$\phi(z = D) = 0$
$\phi(r^2 + z^2 = r_o^2) = U_0$
$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}}(r^2 + z^2 = r_0^2) = k$
$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}}(r = d) = 0$

Na ozemljeni plošči je potencial enak 0, a pričakujemo inducirano napetost. Kroglo postavimo na potencial U_0. Slinice se ozemljene plošče in nabite krogle dotikajo pravokotno. Na obodu valjasto omejenega prostora pa so vzporedne z mejno ploskvijo.



Slika 3: Množica krogel na potencialu U_0 in ozemljena plošča

Zaradi simetrije cilindrične koordinate θ, problem lahko rešujemo v ravnini, ki jo oklepata cilindrična vektorja $\vec{z}$ in $\vec{r}$ (Slika 4).



Slika 4: Končna poenostavitev problema

2.2 Numerično reševanje problema

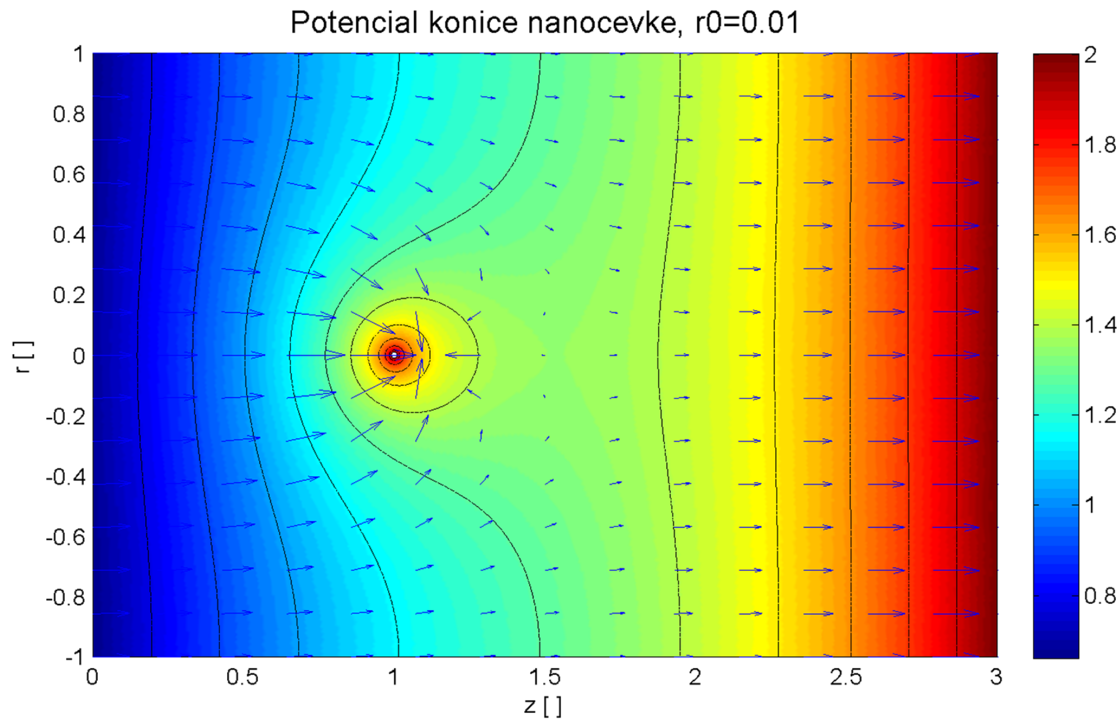
Ker se je analitični pristop izkazal za netrivialnega, sem se problema lotil numerično. Izbral sem orodje *assempde* (iz zbirke orodij Matlab), ki ob dani geometriji in robnih pogojih z metodo končnih elementov numerično izračuna rešitev parcialne diferencialne enačbe. Zaradi fizikalne smiselnosti sem v numeričen postopek dodal še dva robna pogoja:

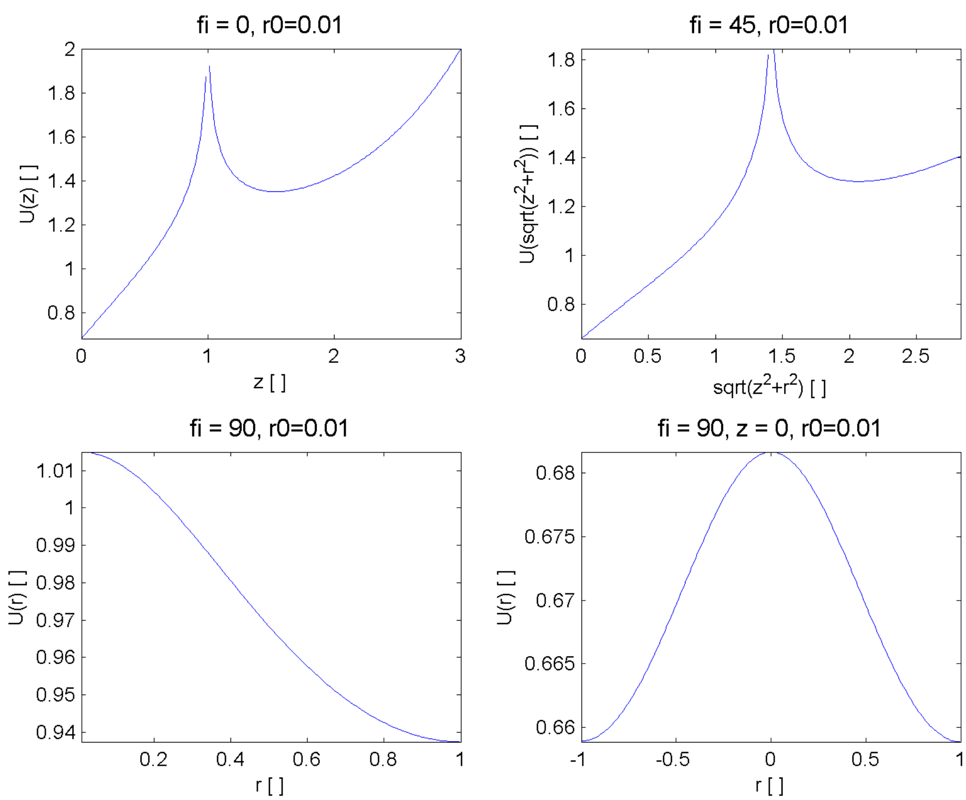
$\phi(z \to \inf) = U_0$ - cevke so pritrjene na nekakšno elektrodo, ki jo uporabimo za vzdrževanje potenciala

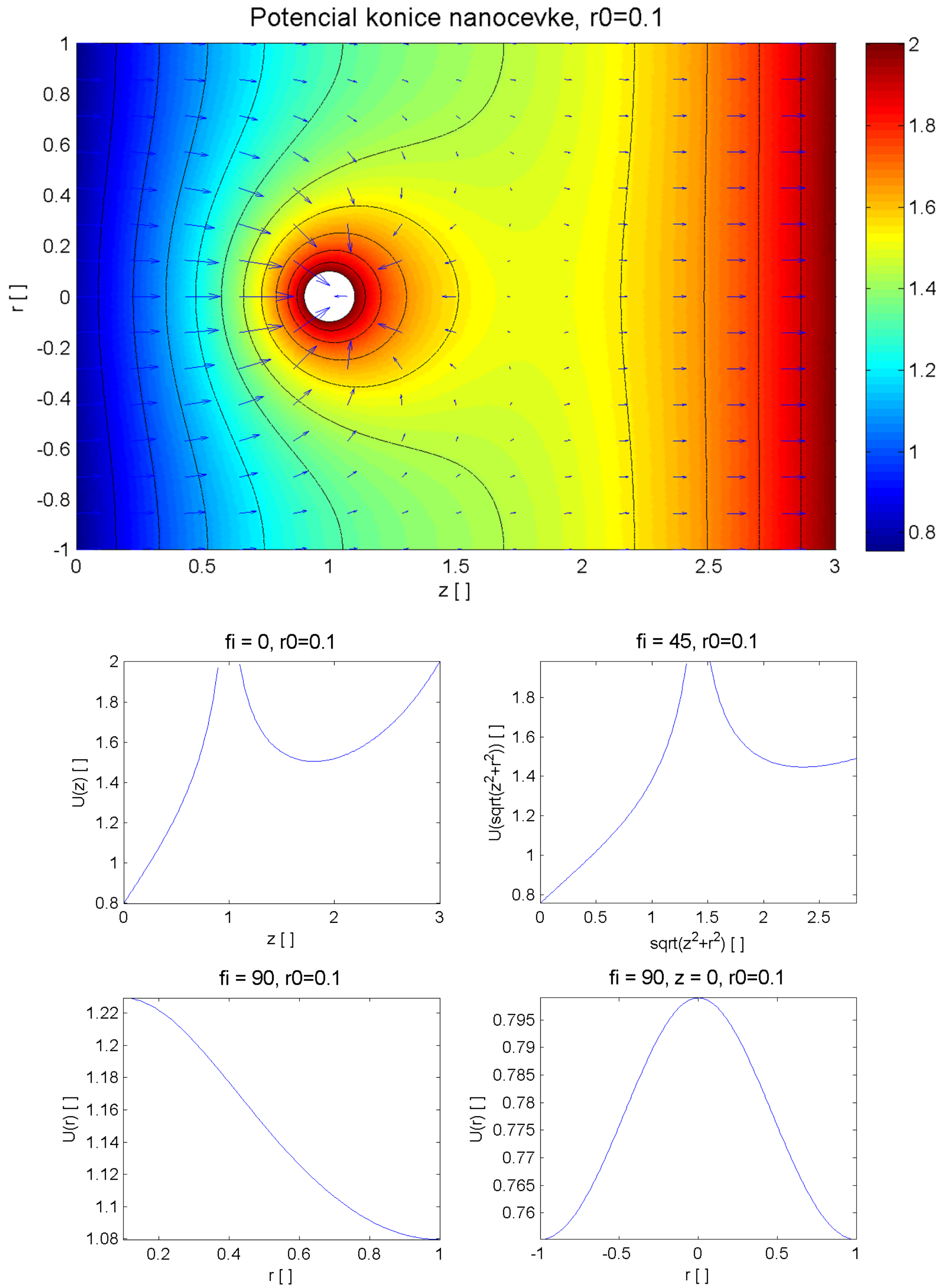
$\frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}}(z \to \inf) = k$ - elektroda je prevodnik

3 Rezultati

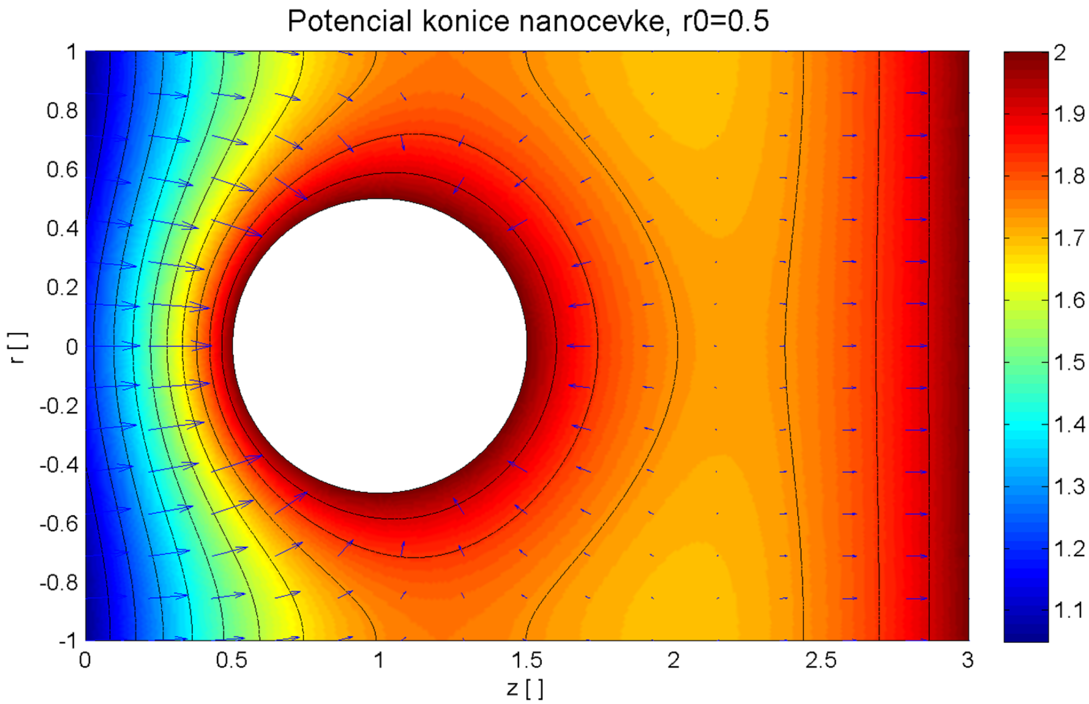
Rezultat so grafi prereza električnega polja fizikalnega sistema pod različnimi koti (Slika: 5) in slike jakosti električnega polja celotnega sistema. Pri izračunih sem variiral premer sfere proti premeru valja.



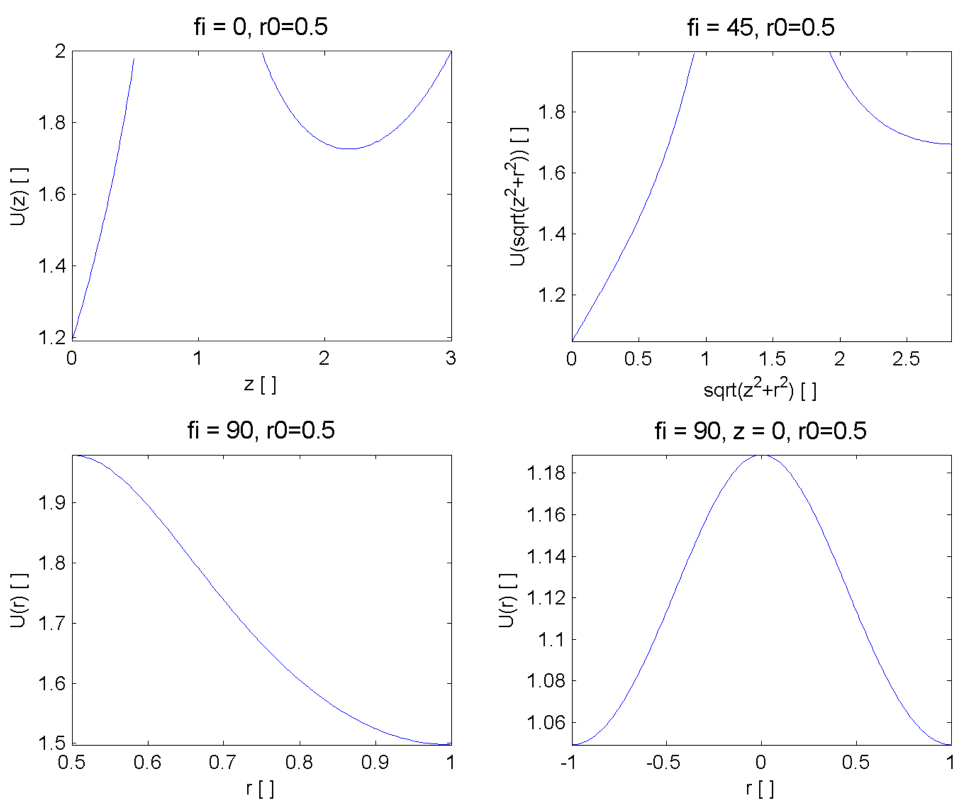




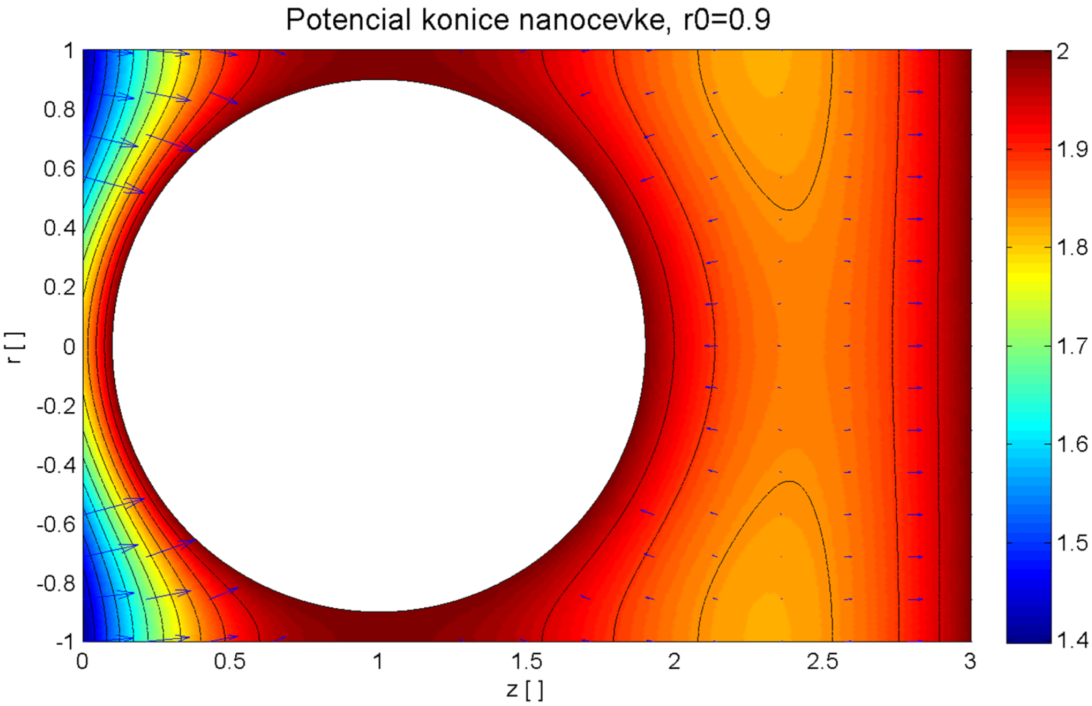
Potencial konice nanocevke, r0=0.1
r [ ]
z [ ]
fi = 0, r0=0.1
U(z) [ ]
z [ ]
fi = 45, r0=0.1
U(sqrt(z^2+r^2)) [ ]
sqrt(z^2+r^2) [ ]
fi = 90, r0=0.1
U(r) [ ]
r [ ]
fi = 90, z = 0, r0=0.1
U(r) [ ]
r [ ]

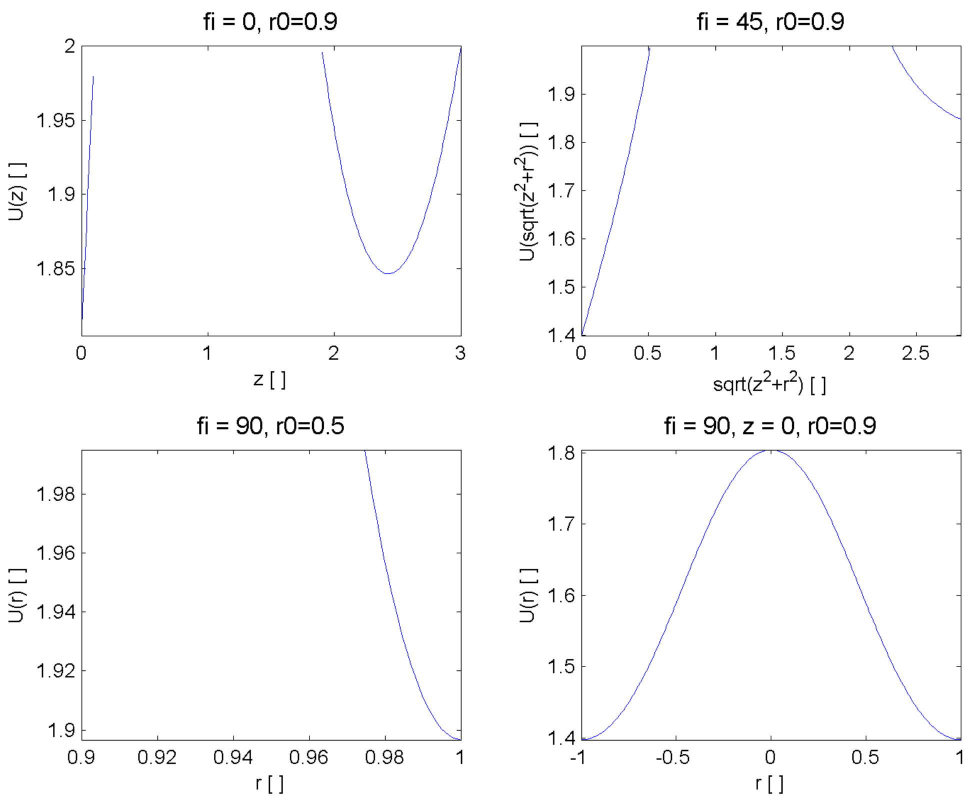


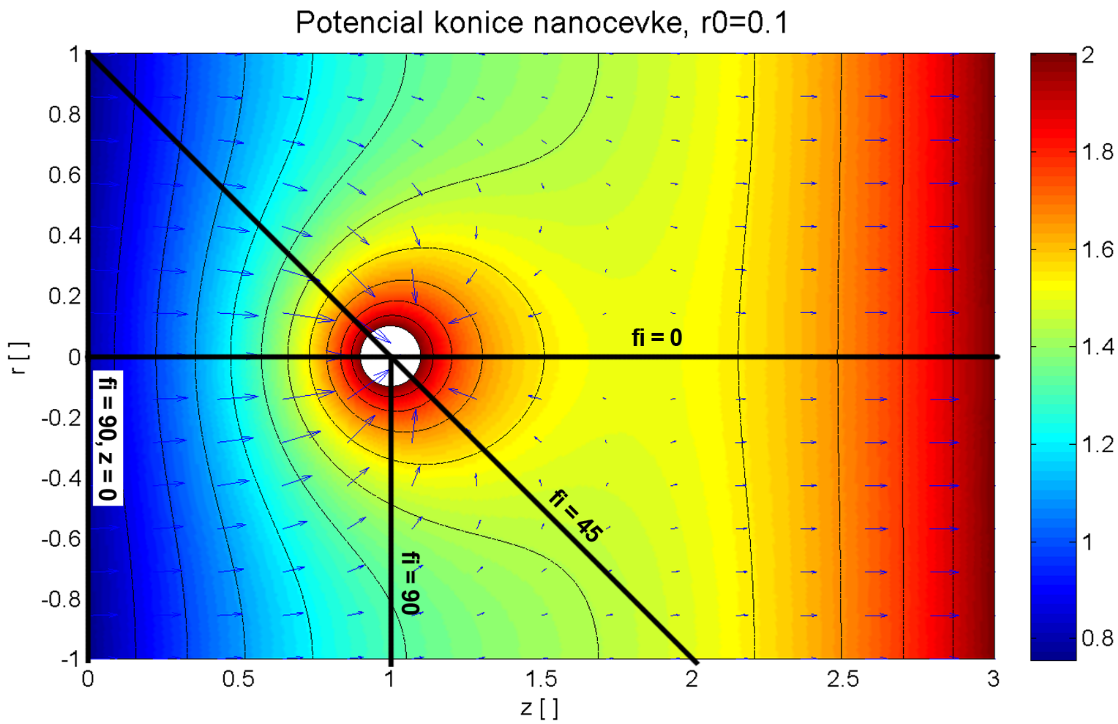
Potencial konice nanocevke, r0=0.5
r [ ]
z [ ]



fi = 0, r0=0.5
U(z) [ ]
z [ ]
fi = 45, r0=0.5
U(sqrt(z^2+r^2)) [ ]
sqrt(z^2+r^2) [ ]
fi = 90, r0=0.5
U(r) [ ]
r [ ]
fi = 90, z = 0, r0=0.5
U(r) [ ]
r [ ]


Potencial konice nanocevke, r0=0.9
r [ ]
z [ ]
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
2
1.9
1.8
1.7
1.6
1.5
1.4


fi = 0, r0=0.9
U(z) [ ]
z [ ]
fi = 45, r0=0.9
U(sqrt(z^2+r^2)) [ ]
sqrt(z^2+r^2) [ ]
fi = 90, r0=0.5
U(r) [ ]
r [ ]
fi = 90, z = 0, r0=0.9
U(r) [ ]
r [ ]



Slika 5: Primer slike polja, z oznakami prikazanih prerezov

4 Zaključek

Ko je konica nanocevke velika napram razdalji do svojih sosed, je polje precej manj homogeno kot če je konica majhna napram razdalji do svojih sosed. Iz grafov prereza polja lahko vidimo tudi, da prerez polja ob elektrodi ohranja obliko, a se njegov gradient s povečevanjem sfere veča.

Literatura

[1] I. Kuščer in A. Kodre: Matematika v fiziki in tehniki, DMFA, Ljubljana, 1994

[2] Dokumentacija programa Matlab - http://www.mathworks.com/help/techdoc/