

Multiparametrische exponentieel gefitte Runge-Kutta-methodes

Robin Keppens

Promotor: Prof. dr. Marnix Van Daele

2020-2021

Overzicht

Situering

Tweetrapsmethode

Drietrapsmethode

Viertrapsmethode

Numerieke resultaten

Besluit

Situering

- ▶ Problemen vertonen vaak een oscillatorisch of exponentieel karakter.
- ▶ Doel EF methodes: gebruik maken van goed gekende frequenties voor optimale oplossing.
- ▶ Opbouwen via fitting space S : verzameling functies die exact geïntegreerd worden.
- ▶ Tot hertoe vooral functies met één frequentie, wat bij meerdere?

Situering

Van den Berghe et al.:

$$S_{k,l} = \{1, x, \dots, x^k\} \cup \{\exp(\pm\mu x), x \exp(\pm\mu x), \dots, x^l \exp(\pm\mu x)\}$$

Calvo et al.:

$$S_{k,l} = \{1, x, \dots, x^k\} \cup \{\exp(\pm\mu x), \exp(\pm 2\mu x), \dots, \exp(\pm l\mu x)\}$$

Veralgemening met meerdere frequenties:

$$S_{k,l} = \{1, x, \dots, x^k\} \cup \{\exp(\pm\mu_1 x), \exp(\pm\mu_2 x), \dots, \exp(\pm\mu_l x)\}$$

Situering

Opzet:

- ▶ Vertrek van gemodificeerde RK-methode.
- ▶ Leg ze vast met een zo ruim mogelijke fitting space.
- ▶ Probeer aan symmetrie en symplecticiteit te voldoen.

Vragen:

- ▶ Leidt dit tot een goed werkbare methode?
- ▶ Welke frequenties dienen gekozen te worden?
 - ▶ Valt er iets af te leiden uit de foutterm?
 - ▶ Wat is het resultaat bij numerieke methodes?
- ▶ Wat met de stabiliteit?
 - ▶ Veralgemeningen van Gaussische methodes.
 - ▶ Wordt de exacte A-stabiliteit bewaard?

Tweetrapsmethode: bepaling

Symmetrie en symplecticiteit opleggen:

$$\begin{array}{c|c|cc} \frac{1}{2} - \theta & \gamma & \frac{\gamma b}{2} & \frac{\gamma b}{2} + \lambda \\ \frac{1}{2} + \theta & \gamma & \frac{\gamma b}{2} - \lambda & \frac{\gamma b}{2} \\ \hline & & b & b \end{array}$$

Verdere bepaling via fitting space:

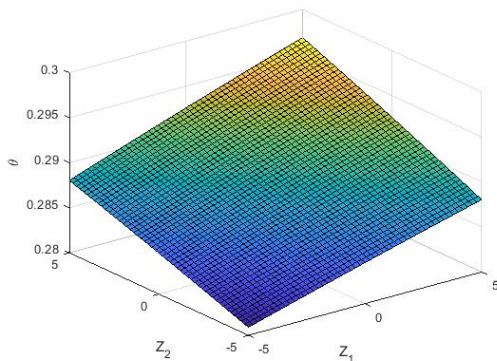
$$S_{\text{int}} = \{\exp(\pm\mu_1 x)\} \quad S_{\text{ext}} = \{1, \exp(\pm\mu_1 x)\}$$

$$b = \frac{\sinh(\frac{z_1}{2})}{\cosh(z_1\theta)z_1} \quad \gamma = \frac{\cosh(2z_1\theta)}{\cosh(\frac{z_1}{2})\cosh(z_1\theta)} \quad \lambda = -\frac{\sinh(z_1\theta)}{\cosh(z_1\theta)z_1}$$

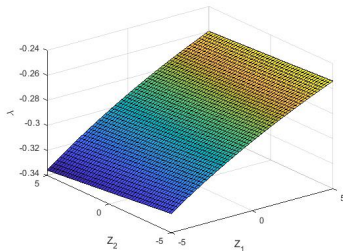
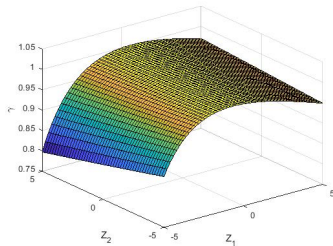
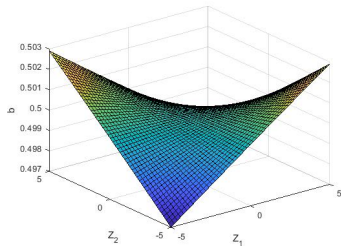
Tweetrapsmethode: bepaling

$$S_{\text{int}} = \{\exp(\pm\mu_1 x)\} \quad S_{\text{ext}} = \{1, \exp(\pm\mu_1 x), \exp(\pm\mu_2 x)\}$$

$$\frac{\sinh(\frac{z_1}{2})}{\cosh(z_1\theta)z_1} = \frac{\sinh(\frac{z_2}{2})}{\cosh(z_2\theta)z_2}$$

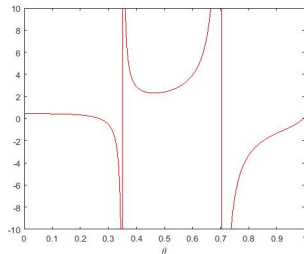
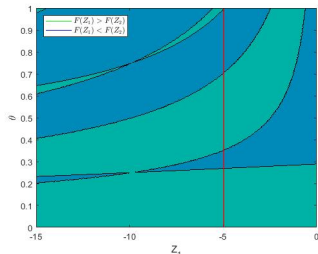


Tweetrapsmethode: coefficients



Tweetrapsmethode: coëfficiënten

Coëfficiënten lijken redelijk constant, maar imaginaire frequenties μ_i geven problemen.



Ook aandacht nodig bij polen andere coëfficiënten en kleine waarden van Z_i .

Tweetrapsmethode: foutterm

Bepaling is moeilijker dan klassiek:

- ▶ EF zorgt voor stapafhankelijke coëfficiënten.
- ▶ Modificatie brengt spooktermen met zich mee.
- ▶ Herschrijven in functie van totale afgeleiden is lastig.

Uiteindelijk resultaat:

$$l_{te} = \frac{h^5}{4320} \left((12\mu_1^4 - 2\mu_1^2\mu_2^2)y^{(1)} + (9\mu_1^2 - \mu_2^2)(y^{(3)} - 3Jy^{(2)}) \right. \\ \left. + 10J^2y^{(3)} - 5Jy^{(4)} + y^{(5)} - 10f(y^{(1)}, y^{(3)}) \right)$$

Tweetrapsmethode

Klassieke exacte A-stabiliteit: stabiliteitsgebied is \mathbb{C}^- .

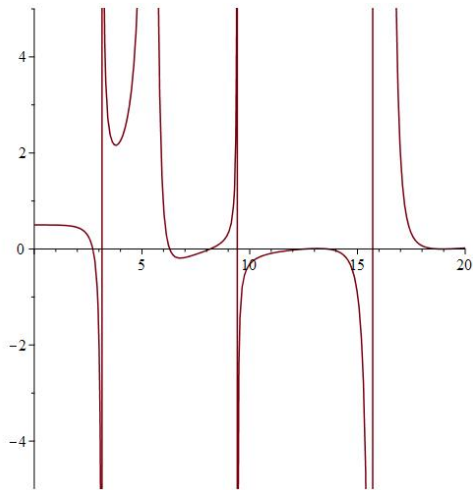
EFRK: grens van stabiliteitsgebied is nog steeds imaginaire as:

$$|R(z)| = 1 \Leftrightarrow \gamma b x (1 + \lambda^2 (x^2 + y^2)) = 0$$

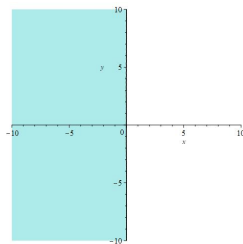
MAAR: ligging van gebied afhankelijk van teken γb :

$$\mathcal{R}_A = \mathbb{C}^- \Leftrightarrow \gamma b > 0$$

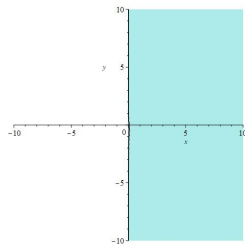
Tweetrapsmethode: stabiliteit



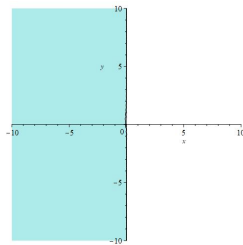
Tweetrapsmethode: stabiliteit



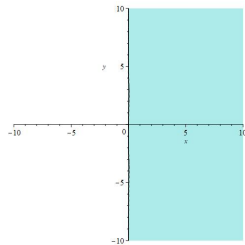
$$z_1 = 2i$$



$$z_1 = 3i$$



$$z_1 = 4i$$



$$z_1 = 7i$$

Drietrapsmethode: bepaling

Symmetrie en symplecticiteit opleggen:

$\frac{1}{2} - \theta$	γ_1	$\frac{\gamma_1 b_1}{2}$	$\frac{\gamma_1 b_2}{2} - \alpha_2$	$\frac{\gamma_1 b_1}{2} - \alpha_3$
$\frac{1}{2}$	γ_2	$\frac{\gamma_2 b_1}{2} + \frac{b_1 \alpha_2 \gamma_2}{\gamma_1 b_2}$	$\frac{\gamma_2 b_2}{2}$	$\frac{\gamma_2 b_1}{2} - \frac{b_1 \alpha_2 \gamma_2}{\gamma_1 b_2}$
$\frac{1}{2} + \theta$	γ_1	$\frac{\gamma_1 b_1}{2} + \alpha_3$	$\frac{\gamma_1 b_2}{2} + \alpha_2$	$\frac{\gamma_1 b_1}{2}$
		b_1	b_2	b_1

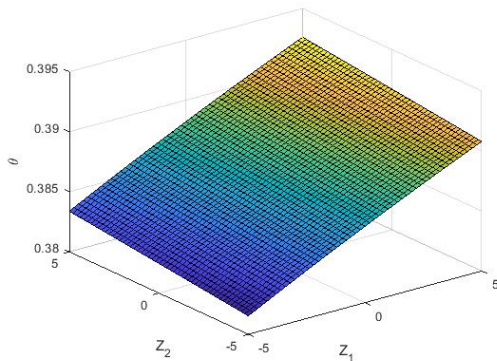
Verdere bepaling via fitting space:

$$S_{\text{int}} = \{1, \exp(\pm \mu_1 x)\} \quad S_{\text{ext}} = \{1, \exp(\pm \mu_1 x)\}$$

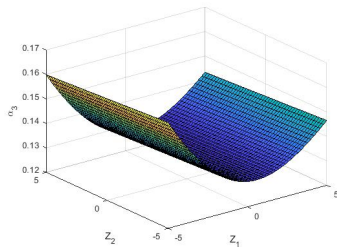
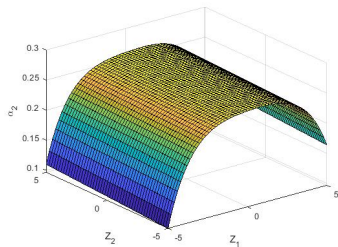
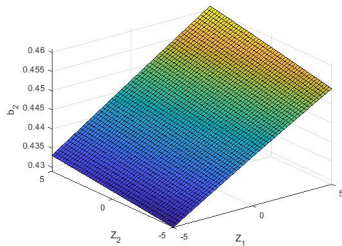
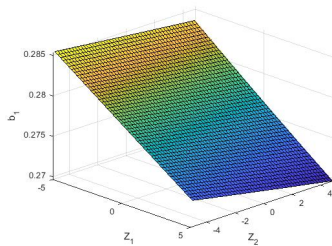
Drietrapsmethode: bepaling

$$S_{\text{int}} = \{1, \exp(\pm\mu_1 x)\} \quad S_{\text{ext}} = \{1, \exp(\pm\mu_1 x), \exp(\pm\mu_2 x)\}$$

$$G(z_1, z_2) = G(z_1, 2z_1)$$

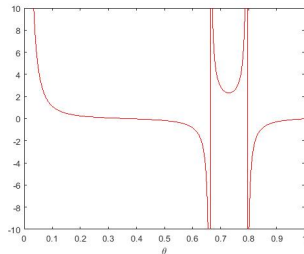
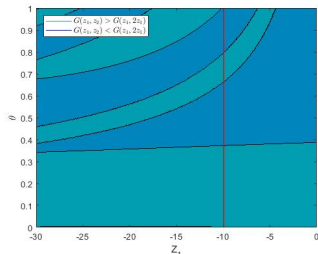


Drietrasmethode: coefficients



Drietrapsmethode: coëfficiënten

Opnieuw problemen bij bepaling indien frequenties μ_i imaginair zijn.



Bovendien zijn coëfficiënten lijviger, dus ook daar meer polen en sneller afrondingsfouten.

Drietrapsmethode: stabiliteit

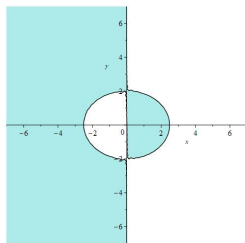
Grens van stabiliteitsgebied is niet langer alleen imaginaire as:

$$|R(z)| = 1$$

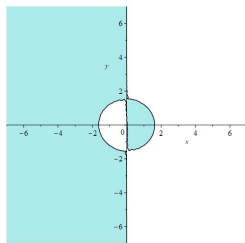
$$\Leftrightarrow x(((x^2 + y^2)^2 b + d(x^2 - 3y^2))a + c((x^2 + y^2)b + d)) = 0$$

Ligging van het gebied verandert ook bij imaginaire frequenties.

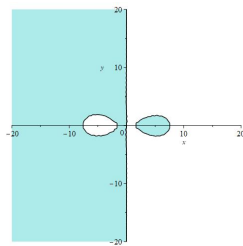
Drietrapsmethode: stabilität



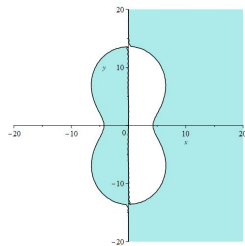
$$z_1 = 8$$



$$z_1 = 9$$



$$z_1 = 9i$$



$$z_1 = 10i$$

Viertrapsmethode: bepaling

Symmetrische en symplectische aanzet geeft geen oplossing:

$$\begin{array}{c|c|cccc} \frac{1}{2} - \theta_1 & \gamma_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \frac{1}{2} - \theta_2 & \gamma_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \frac{1}{2} + \theta_2 & \gamma_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \frac{1}{2} + \theta_1 & \gamma_4 & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ \hline & & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{array}$$

Bepaling coëfficiënten via

$$S_{\text{int}} = \{1, \exp(\pm\mu_1 x), \exp(\pm\mu_2 x)\}$$

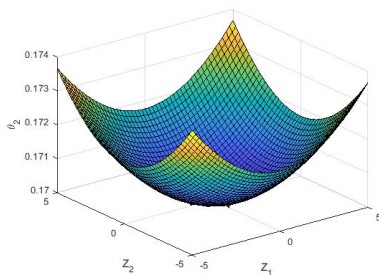
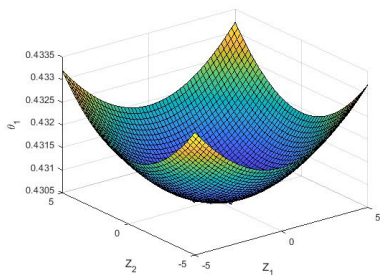
$$S_{\text{ext}} = \{1, \exp(\pm\mu_1 x), \exp(\pm\mu_2 x)\}$$

Viertrapsmethode: bepaling

$$S_{\text{ext}} = \{1, x, x^2, x^3, x^4, \exp(\pm\mu_1 x), \exp(\pm\mu_2 x)\}$$

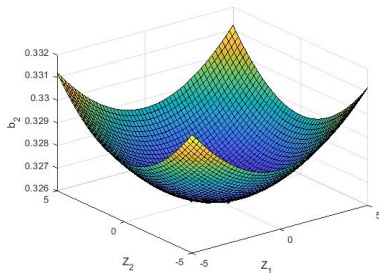
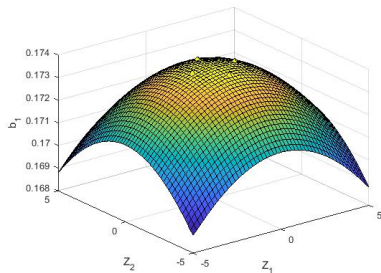
$$2b_1 + 2b_2 - 1 = 0$$

$$24b_1\theta_1^2 + 24b_2\theta_2^2 - 1 = 0$$



Viertrapsmethode: coëfficiënten

De a_{ij} 's zijn zeer uitgebreid, enkel onderzoek van b_i 's.



Numerieke resultaten

- ▶ Vier standaardproblemen met goed gekende oplossingen.
- ▶ Numeriek en exact oplossen over $[0, 100]$.
- ▶ Verschillende stapgroottes: $h = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ en $\frac{1}{8}$.

Dit telkens voor verschillende verhoudingen α van de fitting frequenties:

$$\alpha = \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2}.$$

Numerieke resultaten: geperturbeerd keplerprobleem

Probleem uit volgende hamiltoniaan:

$$H(p, q) = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} - \frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} - \frac{\epsilon}{2\sqrt{(q_1^2 + q_2^2)^3}}.$$

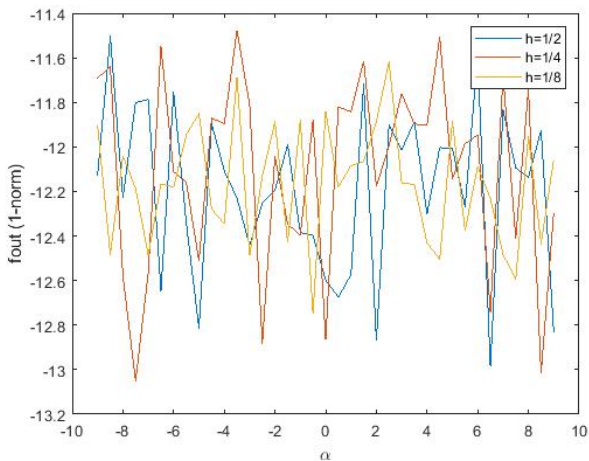
Vertaling naar stelsel:

$$\begin{cases} Y_1^{(2)} &= -\frac{Y_1}{\sqrt{(Y_1^2 + Y_2^2)^3}} - \frac{Y_1(2\epsilon + \epsilon^2)}{\sqrt{(Y_1^2 + Y_2^2)^5}} \\ Y_2^{(2)} &= -\frac{Y_2}{\sqrt{(Y_1^2 + Y_2^2)^3}} - \frac{Y_2(2\epsilon + \epsilon^2)}{\sqrt{(Y_1^2 + Y_2^2)^5}} \end{cases}$$

Exacte oplossing: $Y(x) = (-\delta \sin(\delta x), \delta \cos(\delta x))$, met $\delta = 1 + \epsilon$.

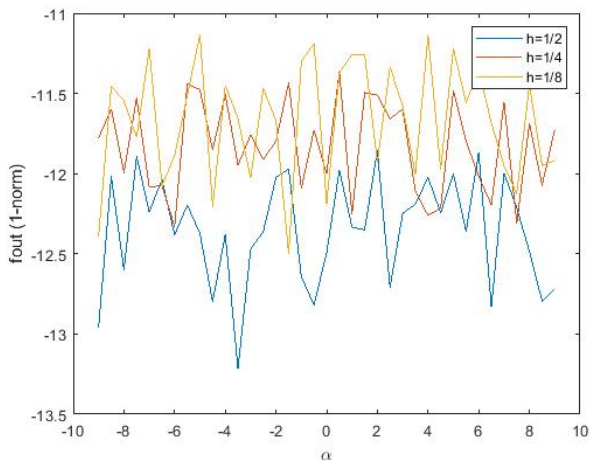
$$\Rightarrow z_1 = i\delta$$

Numerieke resultaten: geperturbeerd keplerprobleem



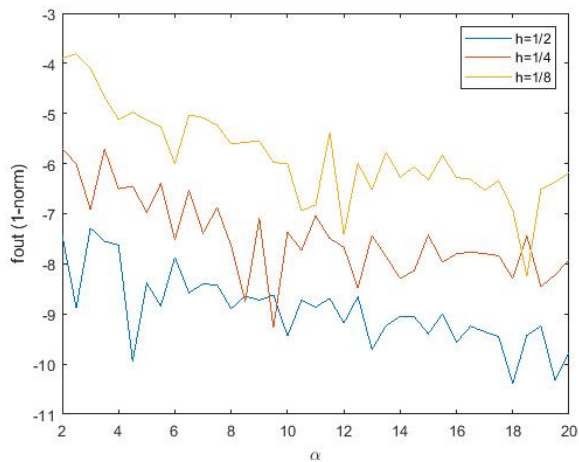
Twestrapsmethode

Numerieke resultaten: geperturbeerd keplerprobleem



Drietrapsmethode

Numerieke resultaten: geperturbeerd keplerprobleem



Viertrapsmethode

Numerieke resultaten: autonoom en lineair probleem

Gegeven het volgende stelsel:

$$\begin{cases} Y_1^{(2)} &= -k_1^2 Y_1 \\ Y_2^{(2)} &= -k_2^2 Y_2 \end{cases}$$

Exacte oplossing: $Y(x) = (\sin(k_1 x), \sin(k_2 x))$.

$$\Rightarrow z_1 = ik_1$$

$$\Rightarrow z_2 = ik_2?$$

Numerieke resultaten: autonoom en lineair probleem

Tweetrapsmethode: schatting uit leidende foutterm, gegeven door

$$\frac{h^5}{2160} J \begin{bmatrix} (3k_1^2 - \mu_2^2 + 6\mu_1^2)(k_1^2 + \mu_1^2) \\ (3k_1^2 - \mu_2^2 + 6\mu_1^2)(k_1^2 + \mu_1^2) \\ (3k_2^2 - \mu_2^2 + 6\mu_1^2)(k_2^2 + \mu_1^2) \\ (3k_2^2 - \mu_2^2 + 6\mu_1^2)(k_2^2 + \mu_1^2) \end{bmatrix}.$$

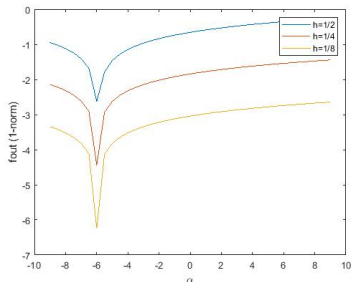
Nulpunten:

$$\left\{ \mu_1 = \pm ik_1, \mu_2 = \pm \sqrt{3k_2^2 - 6k_1^2} \right\}$$

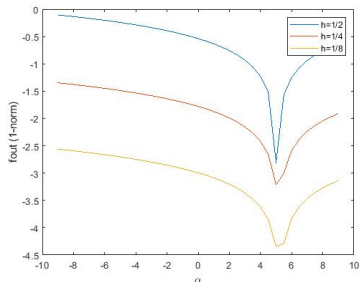
$$\left\{ \mu_1 = \pm ik_2, \mu_2 = \pm \sqrt{3k_1^2 - 6k_2^2} \right\}$$

Numerieke resultaten: autonoom en lineair probleem

Resultaat met $(k_1, k_2) = (1, 2)$:



$$\mu_1 = i \Rightarrow \mu_2 = \sqrt{6}$$



$$\mu_1 = 2i \Rightarrow \mu_2 = \sqrt{21}i$$

Numerieke resultaten: autonoom en lineair probleem

Drietrapsmethode: schatting uit leidende foutterm, gegeven door

$$\frac{h^7}{10080} J \begin{bmatrix} 10(k_1^2 + \mu_1^2)(10k_1^4 - 3k_1^2\mu_2^2 + 10k_1^2\mu_1^2 - 2\mu_2^2\mu_1^2) \\ -(k_1^2 + \mu_1^2)(10k_1^4 - 3\mu_2^2k_1^2 + 10\mu_1^2k_1^2 - 2\mu_2^2\mu_1^2)k_1^2 \\ 10(k_2^2 + \mu_1^2)(10k_2^4 - 3k_2^2\mu_2^2 + 10k_2^2\mu_1^2 - 2\mu_2^2\mu_1^2) \\ -(k_2^2 + \mu_1^2)(10k_2^4 - 3\mu_2k_2^2 + 10\mu_1^2k_2^2 - 2\mu_2^2\mu_1^2)k_2^2 \end{bmatrix}.$$

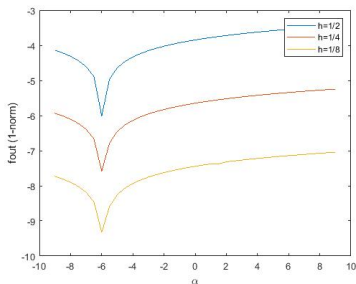
Nulpunten:

$$\left\{ \mu_1 = \pm ik_1, \mu_2 = \pm \sqrt{\frac{10(k_1^2k_2^2 - k_2^4)}{2k_1^2 - 3k_2^2}} \right\}$$

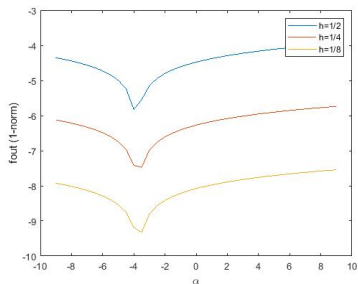
$$\left\{ \mu_1 = \pm ik_2, \mu_2 = \pm \sqrt{\frac{10(k_1^2k_2^2 - k_1^4)}{2k_2^2 - 3k_1^2}} \right\}$$

Numerieke resultaten: autonoom en lineair probleem

Resultaat met $(k_1, k_2) = (1, 1.5)$:



$$\mu_1 = i \Rightarrow \mu_2 = \sqrt{\frac{225}{38}}$$



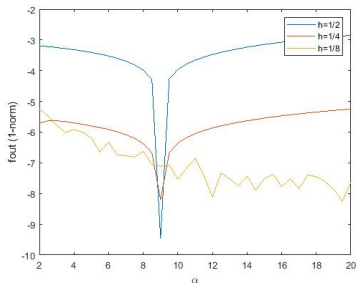
$$\mu_1 = 1.5i \Rightarrow \mu_2 = \sqrt{\frac{50}{6}}$$

Numerieke resultaten: autonoom en lineair probleem

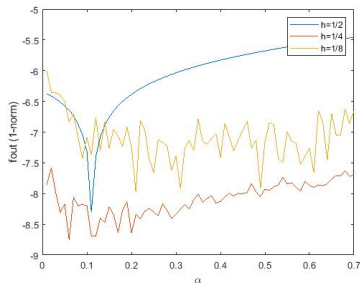
Viertrapsmethode: geen schatting, want beide frequenties exact.

\Rightarrow Keuze (k_1, k_2) leidt tot optimum $(\mu_1, \mu_2) = (ik_1, ik_2)$.

Resultaat met $(k_1, k_2) = (1, 3)$:



(a) $\mu_1 = i$



(b) $\mu_1 = 3i$

Numerieke resultaten: keplerprobleem

Probleem uit volgende hamiltoniaan:

$$H(p, q) = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} - \frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}.$$

Vertaling naar stelsel:

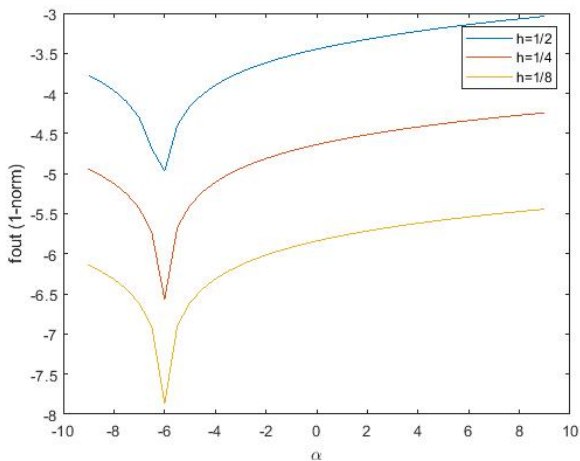
$$\begin{cases} Y_1^{(2)} &= -\frac{Y_1}{\sqrt{(Y_1^2 + Y_2^2)^3}} \\ Y_2^{(2)} &= -\frac{Y_2}{\sqrt{(Y_1^2 + Y_2^2)^3}} \end{cases}$$

Enkel impliciete oplossing gekend met machinenauwkeurigheid, primaire frequenties zijn i en 0 .

$$\Rightarrow z_1 = i$$

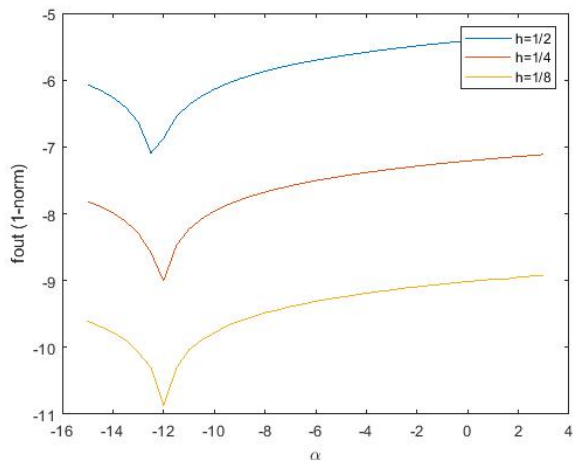
$$\Rightarrow z_2 = 0?$$

Numerieke resultaten: keplerprobleem



Tweetrapsmethode

Numerieke resultaten: keplerprobleem



Diertrapsmethode

Numerieke resultaten: eulerprobleem

Probleem beschreven door het volgende stelsel:

$$\begin{cases} y_1^{(1)} &= (\alpha - \beta)y_2y_3 \\ y_2^{(1)} &= (1 - \alpha)y_1y_3 \\ y_3^{(1)} &= (\beta - 1)y_1y_2 \end{cases}$$

Exacte oplossing indien $\alpha = 1 + \frac{1}{\sqrt{1.51}}$ en $\beta = 1 - \frac{0.51}{\sqrt{1.51}}$:

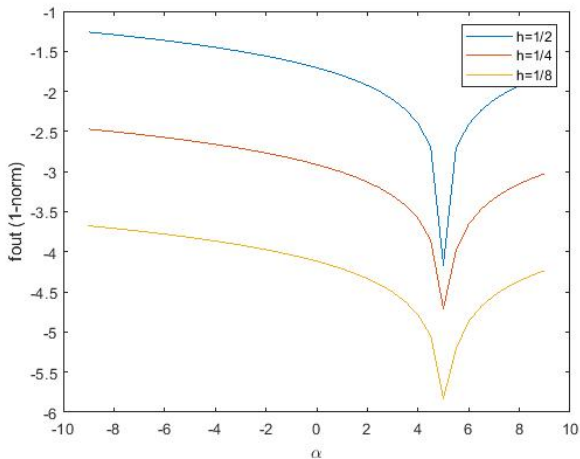
$$y(t) = (\sqrt{1.51} \operatorname{sn}(t, 0.51), \operatorname{cn}(t, 0.51), \operatorname{dn}(t, 0.51)).$$

Primaire frequenties zijn $\approx 0.84i$ en 0 .

$$\Rightarrow z_1 = 0.84i$$

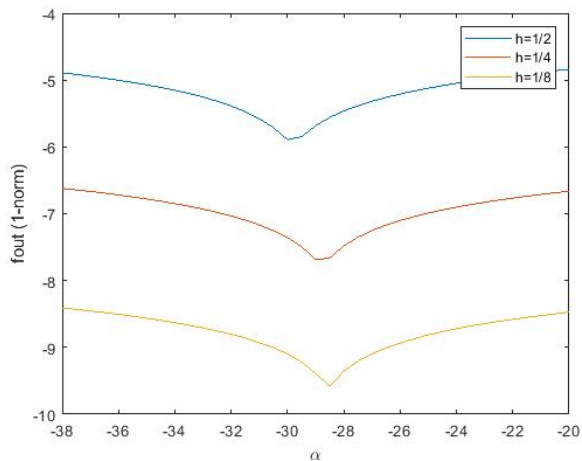
$$\Rightarrow z_2 = 0?$$

Numerieke resultaten: eulerprobleem



Tweetrapsmethode

Numerieke resultaten: eulerprobleem



Dierckxmethode

Besluit

- ▶ Uitdrukkingen voor coëfficiënten zwaar en lastig te bepalen.
- ▶ Asymmetrie in fitting space maakt interpreteren moeilijk.
- ▶ Duidelijke verbetering in precisie.
- ▶ Goeie schattingen nodig van werkelijke frequenties.
- ▶ Stabiliteit is niet steeds gewaarborgd.