

0.1 $s = 2$

uit Marnix_s2.mws

inwendige en uitwendige trap : $\exp(\pm \lambda x)$

$z = \lambda h$

$$\left\{ b1 = \frac{\sinh(1/2 z)}{\cosh(z\theta) z}, b2 = \frac{\sinh(1/2 z)}{\cosh(z\theta) z}, \gamma1 = 2 \frac{\cosh(z\theta)}{\cosh(1/2 z)} - \frac{1}{\cosh(1/2 z) \cosh(z\theta)}, \gamma2 = 2 \frac{\cosh(z\theta)}{\cosh(1/2 z) \cosh(z\theta)} \right.$$

uitwendige trap : eis dat ook $\exp(\pm \lambda_2 x)$.

dan voldoet θ aan $F(z) = F(z_2)$ waarbij $F(z) = \frac{\cosh(z\theta)}{\sinh(z/2)/(z/2)}$

$$\begin{aligned} \theta = & 1/6 \sqrt{3} + \frac{1}{2160} \sqrt{3} (z^2 + z^2) - \frac{1}{403200} \sqrt{3} (z^4 + z^2) + \frac{53}{5443200} \sqrt{3} z^2 z^2 \\ & + \frac{1}{145152000} \sqrt{3} (z^6 + z^2) - \frac{31}{435456000} \sqrt{3} z^2 z^2 (z^2 + z^2) \\ & + \frac{533}{9656672256000} \sqrt{3} (z^8 + z^2) - \frac{227}{2414168064000} \sqrt{3} z^2 z^2 (z^4 + z^2) - \frac{10723}{14485008384000} \sqrt{3} z^2 z^2 (z^6 + z^2) \\ & - \frac{2599}{2789705318400000} \sqrt{3} (z^{10} + z^2) + \frac{363257}{45193226158080000} \sqrt{3} z^2 z^2 (z^6 + z^2) - \frac{10723}{81347} \sqrt{3} z^2 z^2 (z^6 + z^2) \end{aligned}$$

Speciaal geval 1 : $z2 = z$: Guido

in dat geval volgt θ uit $F'(z) = 0$ of

$$\theta = -\frac{\cosh(z\theta)}{\sinh(z\theta) z} + 1/2 \frac{\cosh(1/2 z) \cosh(z\theta)}{\sinh(1/2 z) \sinh(z\theta)}$$

$$\theta = 1/6 \sqrt{3} + \frac{1}{1080} \sqrt{3} z^2 + \frac{13}{2721600} \sqrt{3} z^4 - \frac{1}{7776000} \sqrt{3} z^6 - \frac{1481}{1810626048000} \sqrt{3} z^8 + \frac{573509}{6355297428480} \sqrt{3} z^{10}$$

Speciaal geval 2 : $z2 = 2 z$ Calvo

$$\theta = 1/6 \sqrt{3} + \frac{1}{432} \sqrt{3} z^2 - \frac{1}{311040} \sqrt{3} z^4 - \frac{17}{17418240} \sqrt{3} z^6 - \frac{61}{15049359360} \sqrt{3} z^8 + \frac{15073}{16253308108800} \sqrt{3} z^{10}$$

0.2 $s = 3$

0.2.1 wijziging aanpak van Calvo

uit Marnix_s3.mws

inwendige en uitwendige trap : $1, \exp(\pm \lambda x)$

zelfde oplossing als bij Calvo

uitwendige trap : eis dat ook $\exp(\pm \lambda_2 x)$

Dan volgt enerzijds dat

$$b_1 = \frac{1}{2} \frac{\frac{\sinh(z)}{z} - \frac{\sinh(z/2)}{z/2}}{\cosh(2z\theta) - \cosh(z\theta)}$$

en anderzijds, uit de eis voor uitwendige trap, dat ook

$$b_1 = \frac{1}{2} \frac{\frac{\sinh(z2)}{z2} - \frac{\sinh(z/2)}{z/2}}{\cosh(z2\theta) - \cosh(z\theta)}$$

De tweede betrekking is door expliciet te eisen dat het lukt voor z en $z2$. De eerste betrekking is van dezelfde gedaante en drukt uit dat het lukt voor z en, toevallig, ook voor $2z$.

Uitdrukken dat de rechterleden van beide vergelijkingen aan elkaar gelijk zijn, levert (na het op gelijke noemer brengen en het hergroeperen van termen)

$$\left(\frac{\sinh(z2/2)}{z2/2} - \frac{\sinh(z/2)}{z/2} \right) \cosh(2z\theta) + \left(\frac{\sinh(z/2)}{z/2} - \frac{\sinh(z)}{z} \right) \cosh(z2\theta) + \left(\frac{\sinh(z)}{z} - \frac{\sinh(z2/2)}{z2/2} \right) \cosh(z\theta) = 0$$

wat kan uitgedrukt worden als

$$G(z, 2z, z2) + G(2z, z2, z) + G(z2, z, 2z) = 0$$

met

$$G(a, b, c) := \left(\frac{\sinh(a/2)}{a/2} - \frac{\sinh(b/2)}{b/2} \right) \cosh(c\theta)$$

$$\theta = \frac{\sqrt{15}}{10} \times$$

$$-\frac{43658273}{25630417612800000000} z^4 z2^6 - \frac{21517}{16019011008000000} z^2 z2^6 - \frac{8992463}{1708694507520000000} z^6 z2^4 - \frac{1025}{1025} z^6 z2^4$$

speciaal geval : stel $z2 = 3z$, dan bekom je de reeksontwikkeling van

Calvo :

$$\theta = \frac{\sqrt{15}}{10} \times$$

$$1 + \frac{1}{150} z^2 - \frac{31}{240000} z^4 + \frac{89}{144000000} z^6 + \frac{45539}{725760000000} z^8 - \frac{3085681}{1451520000000000} z^{10}$$

0.2.2 wijziging aanpak van Guido

uit Marnix_s3_aanpakGuido.mws

$K'=1$, $P'=1$ maar met verschillende lambda's, maw in zowel inwendige als uitwendige trappen

$\cosh(\lambda x), \sinh(\lambda x)$ en $\cosh(\lambda^2 x), \sinh(\lambda^2 x)$

$$b_1 = \frac{\frac{1}{2} \frac{\sinh(z^2)}{\cosh(\frac{1}{2} z^2) z^2} - \frac{1}{2} \frac{\sinh(z)}{\cosh(\frac{1}{2} z) z}}{\cosh(z^2 \theta) - \cosh(z \theta)}$$

$$b_2 = \frac{-\frac{\cosh(z \theta) \sinh(z^2)}{\cosh(\frac{1}{2} z^2) z^2} + \frac{\sinh(z) \cosh(z^2 \theta)}{\cosh(\frac{1}{2} z) z}}{\cosh(z^2 \theta) - \cosh(z \theta)}$$

Uit $1 - b_2 - 2 * b_1 = 0$ volgt dan een vgl voor θ : $F(z_2) = F(z)$ met

$$F(z) = -\frac{z - 2 \sinh(\frac{1}{2} z)}{(\sinh(\frac{1}{2} z \theta))^2 z}$$

In het geval $z_2 = z$ volgt θ uit $F'(z) = 0$, wat leidt tot

$$\theta = -\frac{(\cosh(\frac{1}{2} z) z - 2 \sinh(\frac{1}{2} z)) \sinh(\frac{1}{2} z \theta)}{\cosh(\frac{1}{2} z \theta) z (z - 2 \sinh(\frac{1}{2} z))}$$

Dit is een resultaat dat ook Guido vond.

$$\theta = \frac{\sqrt{15}}{10} \times$$

$$-\frac{158009}{106793406720000000} z^4 z^2 - \frac{17}{105840000} z^2 z^2 + 1 + \frac{1}{2100} z^2 + \frac{173843}{14239120896000000000} z^6 z^2 + \frac{1}{106793406720000000}$$

Bijzonder geval : $z^2 = z$, dan vinden we resultaat van Guido

$$\theta = \frac{\sqrt{15}}{10} \times$$

$$-\frac{332933}{35597802240000000} z^8 - \frac{31}{11760000} z^4 + 1 + \frac{1}{1050} z^2 + \frac{1792783}{71195604480000000000} z^{10} + \frac{2869}{543312000000}$$

$K' = -1$, $P' = 2$ maar met verschillende lambda's, maw in zowel inwendige als uitwendige trappen

$\cosh(\lambda x), \sinh(\lambda x)$ en $\cosh(\lambda^2 x), \sinh(\lambda^2 x)$ en $\cosh(\lambda^3 x), \sinh(\lambda^3 x)$

De drie vergelijkingen van de vorm (vervang z door z_2 en z_3)

$$\sinh(z) - 2b_1 z \cosh(1/2 z) \cosh(z\theta) - b_2 \cosh(1/2 z) z = 0$$

leiden tot

$$2 \frac{(-\cosh(z_2 \theta) + \cosh(z\theta)) \sinh(1/2 z_3)}{z_3} + 2 \frac{(\cosh(z_2 \theta) - \cosh(z_3 \theta)) \sinh(1/2 z)}{z} + 2 \frac{(\cosh(z_3 \theta) - \cosh(z\theta)) \sinh(1/2 z_2)}{z_2} = 0$$

wat kan herschreven worden als $K(z, z_2) = K(z, z_3)$ met

$$K(z, z_2) = \frac{\left(-2 \frac{\sinh(1/2 z)}{z} + 2 \frac{\sinh(1/2 z_2)}{z_2}\right)}{(-\cosh(z\theta) + \cosh(z_2 \theta))}$$

$$\theta = 1/10 \sqrt{15} + \frac{1}{21000} \sqrt{15} (z^2 + z_2^2 + z_3^2) - \frac{131}{1058400000} \sqrt{15} (z^4 + z_2^4 + z_3^4) - \frac{17}{1058400000} \sqrt{15} (z^6 + z_2^6 + z_3^6)$$

speciaal geval : $z_3 = z_2$, dan volgt θ uit de vergelijking $\frac{\partial K(z, z_2)}{\partial z_2} = 0$,

of

$M(z_2) = Z(z)$ met

$$M(u) = \cosh(u\theta) \cosh(1/2 z_2) - 2 \frac{\cosh(u\theta) \sinh(1/2 z_2)}{z_2} - 2 \frac{\sinh(z_2 \theta) \sinh(1/2 u) \theta z_2}{u}$$

Wat nog een probleem is : stel nu dat $z_2 = z$ (of is het $z = z_2$). Wat wordt dan de vergelijking voor theta ?

Volgens Guido is dat

$$\theta = -1/2 \frac{\sinh(z\theta) (-z^2 \sinh(1/2 z) - 8 \sinh(1/2 z) + 4 \cosh(1/2 z) z)}{z \cosh(z\theta) (\cosh(1/2 z) z - 2 \sinh(1/2 z))}$$