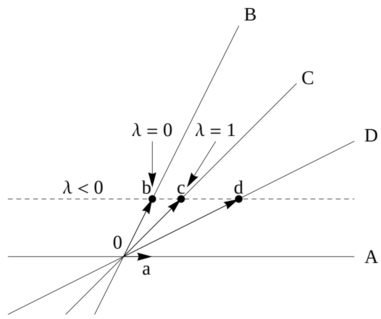
Afina in projektivna geometrija

Dvorazmerje

(1) Naj bodo $A = [a : 1]$, $B = [b : 1]$, $C = [c : 1]$ in $D = [d : 1]$ točke na projektivni premici $P(\mathbb{R}^2)$. Izračunaj dvorazmerje $\mathcal{D}(A, B, C, D)$.

Rešitev: Dvorazmerje $\mathcal{D}(A, B, C, D)$ štirih točk na projektivni premici nam pove, kakšne so koordinate točke D glede na projektivno ogrodje, ki ga določajo točke A, B in C.



Formalno ga lahko definiramo takole. Izberimo nek vektor $c \in \mathbb{R}^2$, ki leži na premici, ki določa točko C. Potem lahko izberemo vektorja a in b, ki ležita na premicah, ki določata točki A in B in ki zadoščata pogoju

$$c = a + b.$$

Ker tvorita vektorja a in b bazo prostora $\mathbb{R}^2$, obstaja enolično določen $\lambda \in \mathbb{R}$, da vektor

$$d = \lambda a + b$$

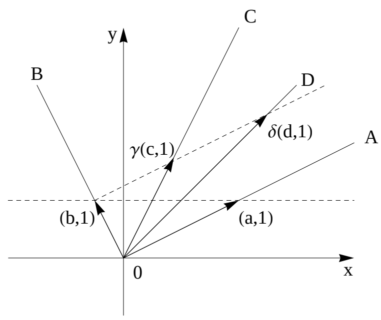
leži na premici v $\mathbb{R}^2$, ki je določena s točko D. Pri tem moramo predpostaviti, da $D \neq A$. Parametru λ rečemo dvorazmerje točk A, B, C in D ter ga označimo z

$$\mathcal{D}(A, B, C, D) = \lambda.$$

Geometrijsko lahko točke A, B in C interpretiramo takole:

- točka A določa smer zaslona,
- točka B določa smer gledanja,
- točka C določa enoto na zaslonu.

Pri računanju dvorazmerja moramo seveda najprej poiskati vektorje, ki zadoščajo zgornjim pogojem.



To lahko storimo tako, da izberemo kar vektorje $(a,1),(b,1),(c,1)$ in $(d,1)$ ter jih ustrezno skaliramo. Skalarji morajo zadoščati sistemu enačb:

$$\begin{aligned}\gamma(c,1) &= \alpha_1(a,1)+(b,1),\\ \delta(d,1) &= \alpha_2(a,1)+(b,1).\end{aligned}$$

Potem je

$$\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

Če zgornji vektorski enačbi zapišemo po komponentah, dobimo sistem:

$$\begin{aligned}\gamma c &= \alpha_1 a + b,\\ \delta d &= \alpha_2 a + b,\\ \gamma &= \alpha_1 + 1,\\ \delta &= \alpha_2 + 1.\end{aligned}$$

Prva in tretja oziroma druga in četrta enačba nam skupaj dajo:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{b-c}{c-a},\\ \alpha_2 &= \frac{b-d}{d-a},\end{aligned}$$

od koder sledi

$$\lambda = \frac{c-a}{d-a}\cdot\frac{d-b}{c-b}.$$

Če je $A=[1:0]$ točka v neskončnosti, pa dobimo

$$\mathcal{D}(A,B,C,D) = \frac{d-b}{c-b}.$$

<u>Opomba</u>: Dvorazmerje $\mathcal{D}(A,B,C,D)$ točk A,B,C,D na projektivni premici p določa koordinate točke D glede na projektivno ogrodje, ki ga definirajo točke A,B in C. Če namreč označimo s $\theta : P(\mathbb{R}^2)\to p$ projektivnost, ki je določena s pogoji:

$$\begin{aligned}\theta([1:0]) &= A,\\ \theta([0:1]) &= B,\\ \theta([1:1]) &= C,\end{aligned}$$

je točka D slika točke $[\lambda:1]$, kjer je $\lambda=\mathcal{D}(A,B,C,D)$. Z uporabo formule

$$\lambda = \frac{c-a}{d-a}\cdot\frac{d-b}{c-b}$$

lahko izpeljemo naslednji lastnosti dvorazmerja:

(1) $\mathcal{D}(B,A,C,D)=\mathcal{D}(A,B,D,C)=\mathcal{D}(A,B,C,D)^{-1}$,

(2) $\mathcal{D}(A,C,B,D)=\mathcal{D}(D,B,C,A)=1-\mathcal{D}(A,B,C,D)$.

$\square$

(2) Dane so točke $A = [3 : 6 : 0]$, $B = [0 : 3 : 1]$, $C = [1 : 5 : 1]$ in $D = [4 : -7 : -5]$ v projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$.

(a) Pokaži, da so točke A, B, C in D kolinearne in poišči enačbo premice p, ki jih vsebuje.

(b) Izračunaj dvorazmerje $\mathcal{D}(A, B, C, D)$.

Rešitev: (a) Kolinearnost točk A, B, C in D bomo dokazali tako, da bomo najprej poiskali premico p skozi A in B ter nato pokazali, da točki C in D ležita na njej. Premica skozi točki A in B je predstavljena z ravnino skozi izhodišče v $\mathbb{R}^3$, ki ima smer normale

$$\vec{n} = \vec{s}_A \times \vec{s}_B = (3, 6, 0) \times (0, 3, 1) = (6, -3, 9).$$

Torej velja

$$p = \{[x : y : z] \,|\, 2x - y + 3z = 0\}.$$

Hitro se lahko prepričamo, da točki C in D ležita na p.

(b) Dvorazmerje $\mathcal{D}(A, B, C, D)$ bomo izračunali na dva načina.

1. način (z uporabo parametrizacije):

Vzemimo parametrizacijo $i_p : P(\mathbb{R}^2) \to p$, ki je dana s predpisom

$$i_p([x : z]) = [x : 2x + 3z : z].$$

Potem velja:

$$\begin{aligned} A &= i([1 : 0]), \\ B &= i([0 : 1]), \\ C &= i([1 : 1]), \\ D &= i([-4/5 : 1]). \end{aligned}$$

Ker projektivnosti ohranjajo dvorazmerja, velja

$$\mathcal{D}(A, B, C, D) = \mathcal{D}([1 : 0], [0 : 1], [1 : 1], [-4/5 : 1]).$$

Z uporabo prejšnje naloge tako dobimo

$$\mathcal{D}(A, B, C, D) = \frac{-4/5 - 0}{1 - 0} = -\frac{4}{5}.$$

Do rezultata bi lahko prišli tudi direktno z upoštevanjem dejstva, da je dvorazmerje v bistvu koordinata točke D glede na projektivno ogrodje A, B, C.

2. način (po definiciji):

Izberimo $c = (1, 5, 1)$ in $a' = (3, 6, 0)$, $b' = (0, 3, 1)$. Najprej moramo vektor c zapisati kot vsoto vektorjev, ki ležita na premicah, ki določata točki A in B. Pišimo:

$$\begin{aligned} c &= \alpha a' + \beta b', \\ (1, 5, 1) &= \alpha(3, 6, 0) + \beta(0, 3, 1), \\ (1, 5, 1) &= (1, 2, 0) + (0, 3, 1). \end{aligned}$$

Označimo torej $a = (1,2,0)$ in $b = (0,3,1)$. Če označimo $d' = (4,-7,-5)$, je dvorazmerje $\lambda = \mathcal{D}(A,B,C,D)$ natanko določeno s pogojem:

$$\delta d' = \lambda a + b,$$
$$\delta(4,-7,-5) = \lambda(1,2,0) + (0,3,1).$$

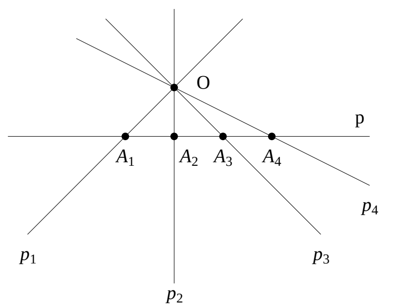
Rešitev tega sistema je $\delta = -1/5$ in $\lambda = -4/5$, od koder sledi

$$\mathcal{D}(A,B,C,D) = -\frac{4}{5}.$$

□

(3) Dane so premice $p_1 = \{[x:y:z] \mid x - y - z = 0\}$, $p_2 = \{[x:y:z] \mid 3x - y - z = 0\}$ in $p_3 = \{[x:y:z] \mid y + z = 0\}$ v projektivni ravnini $P(\mathbb{R}^3)$. Poišči premico p_4, za katero velja $\mathcal{D}(p_1,p_2,p_3,p_4) = -1$.

Rešitev: Imejmo šop premic p_1, p_2, p_3 in p_4 v projektivni ravnini, ki potekajo skozi točko O in naj bo p premica, ki ne poteka skozi O. Označimo preseke premice p s premicami p_i z $A_i = p_i \cap p$.



Dvorazmerje šopa premic je potem definirano s predpisom

$$\mathcal{D}(p_1,p_2,p_3,p_4) = \mathcal{D}(A_1,A_2,A_3,A_4).$$

Najprej izračunajmo točko O. To je točka, v kateri se sekajo premice p_1, p_2 in p_3. Velja

$$\vec{s}_O = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (1,-1,-1) \times (3,-1,-1) = (0,-2,2),$$

od koder sledi

$$O = [0 : -1 : 1].$$

Za premico p lahko sedaj izberemo katerokoli premico, ki ne vsebuje točke O. Pametno je izbrati čimbolj preprosto premico, da si poenostavimo računanje. Takšna je na primer premica $p = \{[x:y:z] \mid z = 0\}$. Njene preseke s premicami p_1, p_2 in p_3 lahko izračunamo kar na pamet:

$$A_1 = [1:1:0],$$
$$A_2 = [1:3:0],$$
$$A_3 = [1:0:0].$$

Sedaj bomo poiskali točko A_4 na premici p, da bo veljalo $\mathcal{D}(A_1,A_2,A_3,A_4) = -1$.

Naj bo $c = (1, 0, 0)$, $a' = (1, 1, 0)$ in $b' = (1, 3, 0)$. Potem je:

$$\begin{aligned} c &= \alpha a' + \beta b', \\ (1,0,0) &= \alpha(1,1,0) + \beta(1,3,0), \\ (1,0,0) &= (3/2, 3/2, 0) + (-1/2, -3/2, 0). \end{aligned}$$

Vzemimo torej $a = (3/2, 3/2, 0)$ in $b = (-1/2, -3/2, 0)$. Od tod sledi

$$d = -a + b = (-2, -3, 0)$$

Oziroma

$$A_4 = [-2 : -3 : 0].$$

Premica p_4 je potem premica skozi točki O in p_4. Velja

$$\vec{n}_4 = \vec{s}_O \times \vec{s}_4 = (0, -1, 1) \times (2, 3, 0) = (-3, 2, 2).$$

Iskana premica je torej

$$p_4 = \{[x : y : z] \mid -3x + 2y + 2z = 0\}.$$

Opomba: Kolinearnim točkam A, B, C, D, ki zadoščajo pogoju

$$\mathcal{D}(A, B, C, D) = -1,$$

rečemo harmonična četverka. Podobno ime uporabljamo tudi za šop štirih premic, ki zadoščajo analognemu pogoju. $\square$