Odabrana poglavlja matematike, ispit - Modeliranje

Roko Čubrić

Lipanj 7, 2025

a) Određivanje Egzaktnog Rješenja

Zadan je Poissonov problem:

$$
\begin{aligned}
u''(x) &= x(1-x), \quad x \in (0,1) \\
u(0) &= 0 \\
u(1) &= 0
\end{aligned}
$$

Prvo, zapišimo diferencijalnu jednadžbu kao:

$$u''(x) = x - x^2$$

Integriramo jednom da bismo dobili $u'(x)$:

$$
\begin{aligned}
u'(x) &= \int (x - x^2) dx \\
&= \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C_1
\end{aligned}
$$

Gdje je C_1 prva konstanta integracije.

Integriramo drugi put da bismo dobili $u(x)$:

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \int \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C_1 \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^4}{4} + C_1 x + C_2 \\
&= \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + C_1 x + C_2
\end{aligned}
$$

Gdje je C_2 druga konstanta integracije.

Sada koristimo rubne uvjete da bismo odredili konstante C_1 i C_2.

Prvi rubni uvjet, $u(0) = 0$:

$$
\begin{aligned}
u(0) &= \frac{0^3}{6} - \frac{0^4}{12} + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \\
0 &- 0 + 0 + C_2 = 0 \\
C_2 &= 0
\end{aligned}
$$

Sada znamo da je $u(x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + C_1 x$.

Drugi rubni uvjet, $u(1) = 0$:

$$
\begin{aligned}
u(1) &= \frac{1^3}{6} - \frac{1^4}{12} + C_1 \cdot 1 = 0 \\
&= \frac{1}{6} - \frac{1}{12} + C_1 = 0 \\
&= \frac{2}{12} - \frac{1}{12} + C_1 = 0 \\
&= \frac{1}{12} + C_1 = 0 \\
C_1 &= -\frac{1}{12}
\end{aligned}
$$

Uvrštavanjem vrijednosti konstanti $C_1 = -\frac{1}{12}$ i $C_2 = 0$ u izraz za $u(x)$, dobivamo egzaktno rješenje:

$$u(x) = -\frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} - \frac{x}{12}$$

Sobolev Prostor

Sobolev prostor je vektorski prostor funkcija koje imaju dovoljno derivacija koje su integrabilne. Sobolev prostori se koriste u matematičkoj analizi, parcijalnim diferencijalnim jednadžbama i numeričkoj analizi.

Za cijeli broj $k \geq 0$ i realni broj $p \geq 1$, Sobolev prostor $W^{k,p}(\Omega)$ definiran je kao:

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq k\}$$

gdje je:

- Ω otvoreni podskup od $\mathbb{R}^n$ (domena).
- $L^p(\Omega)$ je Lebesgueov prostor funkcija koje su p-integrabilne na Ω.
- $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ je multi-indeks, gdje su α_i nenegativni cijeli brojevi.
- $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ je red multi-indeksa.
- $D^\alpha u$ je slaba derivacija funkcije u reda α.

Norma u Sobolev prostoru $W^{k,p}(\Omega)$ definira se kao:

$$||u||_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} ||D^\alpha u||_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

Kada je $p = 2$, Sobolev prostor se označava kao $H^k(\Omega)$ i naziva se Hilbertov prostor. Norma u $H^k(\Omega)$ je:

$$||u||_{H^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} ||D^\alpha u||_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

U našem slučaju, koristimo Sobolev prostor $H_0^1(0,1)$. Indeks 0 označava da funkcije u ovom prostoru zadovoljavaju homogene Dirichletove rubne uvjete, tj. $u(0) = u(1) = 0$. Prostor $H_0^1(0,1)$ sadrži funkcije koje su nula na rubu intervala $(0,1)$ i imaju slabu derivaciju prvog reda koja je kvadratno integrabilna.

b) Izvođenje Slabe Formulacije

Zadan je Poissonov problem:

$$\begin{aligned} u''(x) &= x(1-x), \quad x \in (0,1) \\ u(0) &= 0 \\ u(1) &= 0 \end{aligned}$$

Da bismo izveli slabu formulaciju, prvo pomnožimo diferencijalnu jednadžbu s proizvoljnom testnom funkcijom $v(x)$. Testna funkcija v mora pripadati prostoru funkcija u kojem tražimo rješenje u, i mora zadovoljavati homogene Dirichletove rubne uvjete, tj. $v(0) = v(1) = 0$. Prostor za u i v je tipično Sobolevov prostor $H_0^1(0,1)$.

Jednadžbu možemo napisati kao:

$$-u''(x) = -x(1-x) = x^2 - x$$

Množimo s $v(x)$ i integriramo po domeni $\Omega = (0,1)$:

$$\int_0^1 -u''(x)v(x)dx = \int_0^1 (x^2 - x)v(x)dx$$

Sada primjenjujemo parcijalnu integraciju (integraciju po dijelovima) na lijevu stranu. Sjetimo se formule $\int_a^b fg'dx = [fg]_a^b - \int_a^b f'gdx$. U našem slučaju, neka $f = v(x)$ i $g' = -u''(x)$, pa je $f' = v'(x)$ i $g = -u'(x)$.

$$\int_0^1 -u''(x)v(x)dx = [-u'(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 (-u'(x))v'(x)dx$$
$$= [-u'(x)v(x)]_0^1 + \int_0^1 u'(x)v'(x)dx$$

Rubni član $[-u'(x)v(x)]_0^1 = -u'(1)v(1) - (-u'(0)v(0))$. Budući da testna funkcija v zadovoljava $v(0) = 0$ i $v(1) = 0$ (jer pripada $H_0^1(0,1)$), ovaj rubni član postaje nula:

$$-u'(1) \cdot 0 + u'(0) \cdot 0 = 0$$

Stoga, lijeva strana postaje:

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx$$

Izjednačavanjem s desnom stranom dobivamo slabu formulaciju problema: Naći $u \in H_0^1(0,1)$ tako da za svaku $v \in H_0^1(0,1)$ vrijedi:

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 (x^2 - x)v(x)dx$$

Ovo je slaba formulacija koja se koristi za metodu konačnih elemenata. U terminologiji koja se često koristi:

- $a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)dx$ je bilinearna forma.
- $L(v) = \int_0^1 (x^2 - x)v(x)dx$ je linearni funkcional.

Tada slaba formulacija glasi: naći $u \in H_0^1(0,1)$ tako da je $a(u,v) = L(v)$ za sve $v \in H_0^1(0,1)$.

Što je Slaba Formulacija?

Slaba formulacija je preoblikovanje originalne diferencijalne jednadžbe u integralni oblik. Umjesto da tražimo funkciju u koja zadovoljava diferencijalnu jednadžbu u svakoj točki domene, tražimo funkciju u koja zadovoljava integralnu jednadžbu u "slabijem" smislu. To znači da jednadžba ne mora biti zadovoljena točno u svakoj točki, već samo u prosjeku, nakon integracije s testnom funkcijom.

Glavni koraci u izvođenju slabe formulacije su:

1. Pomnožiti diferencijalnu jednadžbu s testnom funkcijom v.
2. Integrirati rezultirajuću jednadžbu po domeni.
3. Primijeniti parcijalnu integraciju na članove koji sadrže derivacije višeg reda, kako bi se derivacije prebacile s trial funkcije u na testnu funkciju v.
4. Iskoristiti rubne uvjete za pojednostavljenje rubnih integrala koji se pojavljuju nakon parcijalne integracije.

Prednosti slabe formulacije:

- Smanjuje zahtjeve za glatkoćom rješenja. U jakoj formulaciji, rješenje mora imati derivacije koje se pojavljuju u jednadžbi. U slaboj formulaciji, derivacije se prebacuju na testnu funkciju, pa rješenje može biti manje glatko.
- Omogućuje korištenje metode konačnih elemenata (FEM) za numeričko rješavanje problema. FEM se temelji na traženju približnog rješenja u konačno-dimenzionalnom prostoru funkcija, a slaba formulacija daje prirodan način za definirati taj prostor i postaviti jednadžbe za određivanje približnog rješenja.

U našem slučaju, slaba formulacija Poissonovog problema je:
Naći $u \in H_0^1(0,1)$ tako da za svaku $v \in H_0^1(0,1)$ vrijedi:

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

gdje je $f(x)$ poznata funkcija (izvor), a $H_0^1(0,1)$ je Sobolev prostor funkcija koje su nula na rubu intervala $(0,1)$.

Diskretizacija i određivanje koeficijenata

Rješenje u aproksimiramo funkcijom u_h iz konačnodimenzionalnog prostora V_h, koji je razapet baznim (pilastim) funkcijama φ_i, $i = 1, \ldots, N$. Dakle:

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \varphi_i(x),$$

gdje su α_i nepoznati koeficijenti koje želimo odrediti. Funkcije φ_i su definirane tako da vrijedi $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$, tj. imaju vrijednost 1 u točki x_i, a nulu u ostalim čvorovima.
Slabu formulaciju problema zapisujemo u obliku: nađi $u_h \in V_h$ takav da za sve $v_h \in V_h$ vrijedi:

$$a(u_h, v_h) = \ell(v_h),$$

gdje je

$$a(u_h, v_h) = \int_0^1 u_h'(x)v_h'(x)\,dx, \quad \ell(v_h) = \int_0^1 f(x)v_h(x)\,dx.$$

Uvrštavanjem aproksimacije $u_h = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \varphi_j$ dobivamo:

$$\int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \varphi_j'(x) \right) \varphi_i'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)\,dx, \quad \text{za svaki } i = 1, \ldots, N.$$

Zbog linearnosti integrala, možemo izvući koeficijente iz sume:

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j \int_0^1 \varphi_j'(x)\varphi_i'(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)\,dx.$$

To možemo zapisati u matričnom obliku:

$$A\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{b},$$

gdje je

$$A_{ij} = \int_0^1 \varphi_j'(x)\varphi_i'(x)\,dx, \quad b_i = \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)\,dx, \quad \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)^T.$$

Na taj način svaki element matrice A i vektora $\mathbf{b}$ dobivamo integracijom proizvoda baznih funkcija (i njihovih derivacija), a rješenje sustava daje aproksimaciju $u_h(x)$.

L2 Norma

L2 norma funkcije f na domeni Ω definirana je kao:

$$||f||_{L_2} = \sqrt{\int_\Omega |f(x)|^2 dx}$$

Ona mjeri "veličinu" ili "energiju" funkcije.

Mjerenje Pogreške u L2 Normi

Kada mjerimo pogrešku numeričkog rješenja u_h u odnosu na egzaktno rješenje u u L2 normi, računamo L2 normu njihove razlike:

$$E_{L_2} = ||u - u_h||_{L_2} = \sqrt{\int_\Omega |u(x) - u_h(x)|^2 dx}$$

Ova vrijednost nam govori koliko numeričko rješenje odstupa od egzaktnog rješenja u prosjeku preko cijele domene, dajući veći značaj većim odstupanjima (zbog kvadriranja).