

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Rok Kuk

## **Precesija Lunine orbite**

Zaključna naloga v sklopu predmeta  
Računalniška orodja v fiziki

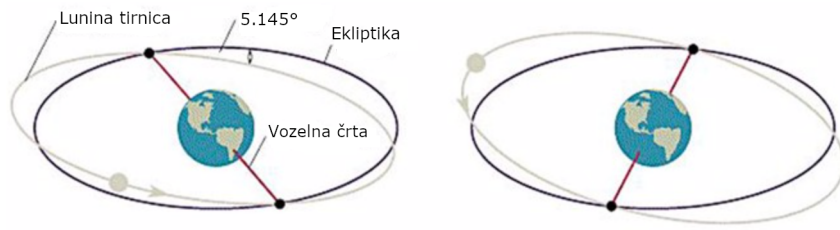
AKADEMSKO LETO 2018/2019

# 1 Uvod

Z izračunom dinamike Sonca, Zemlje in Lune želimo določiti periodo precesije vozelnih črt Lуне tirnice in njene dolge osi ter ugotoviti, kaj vpliva na hitrost precesije.

## 1.1 Precesija vozelnih črt

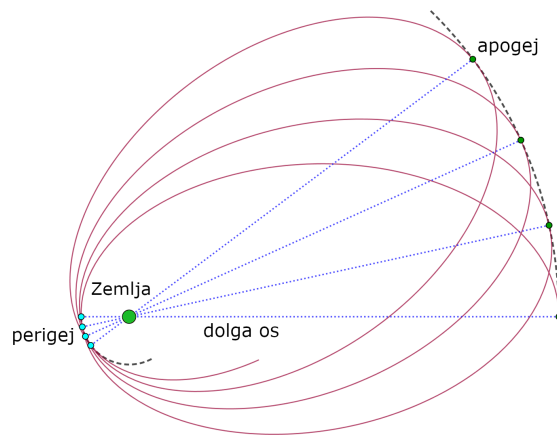
Vozelna črta je zveznica presečišč LUNE tirnice z ekliptiko. Precesija vozelnih črt pomeni rotacijo vozelnih črt v ekliptiki in s tem rotacijo ravnine LUNE tirnice. Njena perioda je 6798.38 dni [2].



Slika 1: Precesija vozelnih črt. Slika na desni prikazuje stanje dve leti pozneje. Ni v merilu. Na shemi je predpostavljeno, da je Lunina tirnica elipsa, čeprav zaradi precesije ni povsem eliptična (slika 2). [3]

## 1.2 Precesija dolge osi

Apogej je točka v kateri je Luna v svoji tirnici najbolj oddaljena od Zemlje, perigej pa točka v kateri je najbližje Zemlji. Dolga os je zveznica med apogejem in perigejem. Precesija dolge osi pomeni rotacijo dolge osi v ravnini LUNE tirnice. Njena perioda je 3231.50 dni [2].



Slika 2: Lunina tirnica. Shema ni v merilu, precesija in ekscentričnost sta pretirani. Apogej, Zemlja in perigej ne ležijo na isti premici, saj se zaradi precesije apogej rahlo zamakne glede na apogej, ki bi ga dobili, če bi narisali elipso, ko je Luna v perigeju.

### 1.3 Predpostavke modela

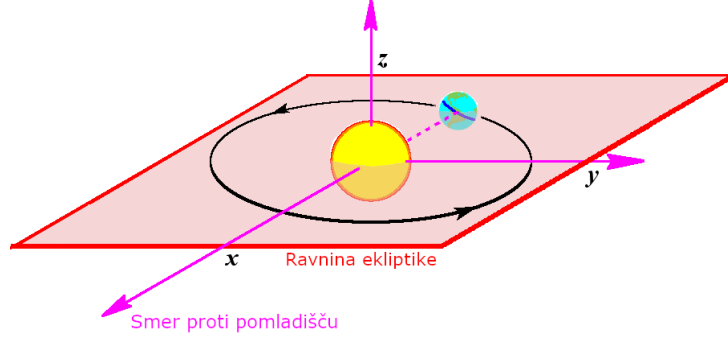
Do precesije Lunine tirnice pride zaradi gravitacijskega vpliva Sonca in drugih planetov na Luno, izbočenosti Zemlje ob ekvatorju ter relativističnih efektov [1]. Glavni vzrok za precesijo Lune je gravitacijska sila Sonca, ki povzroča navor na Lunino tirnico, saj je glede na ekliptiko nagnjena za  $\approx 5.145^\circ$  [2].

Da bo izračun dinamike sistema lažji, bomo uporabili sledeče predpostavke:

- Edina sila, ki jo bomo upoštevali, je gravitacijska.
- Obravnavali bomo sistem Sonca, Zemlje in Lune. Vpliv ostalih teles v Osončju bomo zanemarili.
- Sonce, Zemlja in Luna bodo točkasta telesa. S tem zanemarimo vpliv oblike Zemlje in Lune.
- Sonce bo mirovalo v izhodišču koordinatnega sistema. Ker ima Sonce veliko večjo maso od sistema Zemlja-Luna (333 000-krat), bomo zanemarili vpliva Zemlje in Lune na Sonce.

## 2 Izračun dinamike sistema

Pri izračunih uporabimo kartezični **koordinatni sistem ICRF**. Postavljen je tako, da je Sonce v izhodišču in da je XY-ravnina enaka ekliptiki ob času J2000 TDB. Osi so pozitivno orientirane. Os X je usmerjena proti pomladišču, os Z pa je pravokotna na XY-ravnino in ima pozitivno stran obrnjeno v smer Zemljinega severnega pola.



Slika 3: Postavitev osi koordinatnega sistema.

Lego Sonca, Zemlje in Lune predstavimo s krajevnimi vektorji

$$\mathbf{r}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_Z = \begin{bmatrix} x_Z \\ y_Z \\ z_Z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}_L = \begin{bmatrix} x_L \\ y_L \\ z_L \end{bmatrix}.$$

Telo z maso  $m_1$  in krajevnim vektorjem  $\mathbf{r}_1$  deluje na telo z maso  $m_2$  in krajevnim vektorjem  $\mathbf{r}_2$  s silo

$$\mathbf{F}_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\frac{Gm_1m_2}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|}.$$

Z uporabo drugega Newtonovega zakona in deljenjem z maso dobimo enačbe gibanja Zemlje in Lune

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_Z &= -Gm_S \frac{\mathbf{r}_Z}{\|\mathbf{r}_Z\|^3} - Gm_L \frac{\mathbf{r}_Z - \mathbf{r}_L}{\|\mathbf{r}_Z - \mathbf{r}_L\|^3}, \\ \ddot{\mathbf{r}}_L &= -Gm_S \frac{\mathbf{r}_L}{\|\mathbf{r}_L\|^3} - Gm_Z \frac{\mathbf{r}_L - \mathbf{r}_Z}{\|\mathbf{r}_L - \mathbf{r}_Z\|^3}. \end{aligned}$$

Označimo  $\mathbf{v}_Z = \dot{\mathbf{r}}_Z$  in  $\mathbf{v}_L = \dot{\mathbf{r}}_L$ . Stanje sistema lahko opišemo s koordinatami in komponentami hitrosti Zemlje in Lune

$$[x_Z, y_Z, z_Z, x_L, y_L, z_L, v_{Zx}, v_{Zy}, v_{Zz}, v_{Lx}, v_{Ly}, v_{Lz}].$$

Za reševanje diferencialnih enačb bomo uporabili `scipy.integrate.odeint` iz Pythonove knjižnice SciPy [4]. Tej funkciji moramo kot parameter podati funkcijo, ki izračuna odvod vsake spremenljivke stanja.

Odvide izračunamo po komponentah

$$\begin{aligned}
\dot{x}_Z &= v_{Zx} & \dot{x}_L &= v_{Lx} \\
\dot{y}_Z &= v_{Zy} & \dot{y}_L &= v_{Ly} \\
\dot{z}_Z &= v_{Zz} & \dot{z}_L &= v_{Lz} \\
\dot{v}_{Zx} &= -\frac{Gm_S x_Z}{\|\mathbf{r}_Z\|^3} - \frac{Gm_L(x_Z - x_L)}{\|\mathbf{r}_Z - \mathbf{r}_L\|^3} & \dot{v}_{Lx} &= -\frac{Gm_S x_L}{\|\mathbf{r}_L\|^3} - \frac{Gm_Z(x_L - x_Z)}{\|\mathbf{r}_L - \mathbf{r}_Z\|^3} \\
\dot{v}_{Zy} &= -\frac{Gm_S y_Z}{\|\mathbf{r}_Z\|^3} - \frac{Gm_L(y_Z - y_L)}{\|\mathbf{r}_Z - \mathbf{r}_L\|^3} & \dot{v}_{Ly} &= -\frac{Gm_S y_L}{\|\mathbf{r}_L\|^3} - \frac{Gm_Z(y_L - y_Z)}{\|\mathbf{r}_L - \mathbf{r}_Z\|^3} \\
\dot{v}_{Zz} &= -\frac{Gm_S z_Z}{\|\mathbf{r}_Z\|^3} - \frac{Gm_L(z_Z - z_L)}{\|\mathbf{r}_Z - \mathbf{r}_L\|^3} & \dot{v}_{Lz} &= -\frac{Gm_S z_L}{\|\mathbf{r}_L\|^3} - \frac{Gm_Z(z_L - z_Z)}{\|\mathbf{r}_L - \mathbf{r}_Z\|^3}
\end{aligned}$$

Funkciji `odeint` podamo funkcijo, ki je definirana s predpisom

$$\begin{aligned}
& [x_Z, y_Z, z_Z, x_L, y_L, z_L, v_{Zx}, v_{Zy}, v_{Zz}, v_{Lx}, v_{Ly}, v_{Lz}]' = \\
& [v_{Zx}, v_{Zy}, v_{Zz}, v_{Lx}, v_{Ly}, v_{Lz}, \dot{v}_{Zx}, \dot{v}_{Zy}, \dot{v}_{Zz}, \dot{v}_{Lx}, \dot{v}_{Ly}, \dot{v}_{Lz}].
\end{aligned}$$

Funkcija `odeint` vrne seznam koordinat in komponent hitrosti Zemlje in Lune ob željenih časovnih intervalih. Programska koda je na voljo na portalu GitLab [5].

Za reševanje diferencialnih enačb potrebujemo začetne pogoje, ki jih pridobimo iz sistema Horizons [2] in so zbrani v spodnji tabeli.

	Zemlja	Luna
$x$ [au]	$2.499\,646\,121\,224\,160 \times 10^{-1}$	$2.476\,511\,762\,731\,858 \times 10^{-1}$
$y$ [au]	$-9.773\,336\,829\,448\,052 \times 10^{-1}$	$-9.765\,652\,528\,404\,914 \times 10^{-1}$
$z$ [au]	$2.463\,574\,436\,805\,279 \times 10^{-5}$	$2.077\,343\,737\,630\,762 \times 10^{-4}$
$v_x$ [au/dan]	$1.638\,044\,451\,748\,829 \times 10^{-2}$	$1.617\,465\,022\,148\,979 \times 10^{-2}$
$v_y$ [au/dan]	$4.210\,082\,689\,617\,622 \times 10^{-3}$	$3.626\,725\,674\,604\,836 \times 10^{-3}$
$v_z$ [au/dan]	$-4.284\,581\,571\,560\,084 \times 10^{-7}$	$3.388\,411\,287\,849\,449 \times 10^{-5}$

Tabela 1: Koordinate in komponente hitrosti Zemlje in Lune ob času JD 2458671.5 TDB (7. julij 2019 00:00:00 TT). Referenčna epoha: J2000

dan	86 400 s
leto	365.25 dni
au	149 597 870 700 m
$G$	$6.674\,08 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
$Gm_S$	$0.295\,912\,208\,285\,591\,100 \times 10^{-3} \text{ au}^3/\text{dan}^2$
$Gm_Z$	$0.888\,769\,244\,512\,563\,400 \times 10^{-9} \text{ au}^3/\text{dan}^2$
$Gm_L$	$0.109\,318\,945\,074\,237\,400 \times 10^{-10} \text{ au}^3/\text{dan}^2$

Tabela 2: Vrednosti konstant uporabljenih pri izračunih. [6, 7]

## 2.1 Precesija vozalne črte

Ekliptika v poljubnem trenutku ni povsem enaka ravnini XY, saj smo ravnino XY definirali kot ekliptiko ob času J2000, ekliptika pa se s časom spreminja. Da bi lahko poiskali presečišča Lunine tirnice s trenutno ekliptiko, jo moramo najprej določiti. Dovolj je, da izračunamo njeno normalo, saj poteka skozi izhodišče.

S funkcijo `odeint` izračunamo krajevni vektor Zemlje in Lune ter z njima krajevni vektor težišča sistema Zemlja-Luna ob časovnih intervalih z razmikom ene ure. Normalo ekliptike ob poljubnem času določimo tako, da prilagodimo ravnino točkam, ki jih določajo krajevni vektorji težišča 180 dni pred danim časom in 180 dni po danem času. Namesto krajevnih vektorjev Zemlje uporabimo krajevne vektorje težišča, ker zaradi vpliva Lune Zemlja niha v smeri osi Z s periodo približno 27 dni. Ravnina, ki bi jo prilagodili Zemljini tirnici, bi zato bila odvisna od faze Lune v začetnih in končnih točkah. Temu se izognemo tako, da uporabimo vektorje težišča, ki ima periodo nihanja v smeri osi Z eno leto.

Da bi ugotovili kdaj Luna prečka ekliptiko, moramo vedeti, ali je Luna v danem trenutku nad ali pod ravnino. Če je  $\theta$  kot med normalo ekliptike  $\mathbf{n}$  in krajevnim vektorjem Lune  $\mathbf{r}_L$ , velja

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_L = \|\mathbf{n}\| \|\mathbf{r}_L\| \cos \theta,$$

$$\text{sgn}(\cos(\theta)) = \begin{cases} 1 & ; 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ -1 & ; \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \end{cases}$$

Ker je  $\|\mathbf{n}\| > 0$  in  $\|\mathbf{r}_L\| > 0$ , velja  $\text{sgn}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_L) = \text{sgn}(\cos \theta)$ . Dobili smo funkcijo, ki nam pove, ali je točka nad ali pod ravnino.

Točka je nad ravnino (v smeri normale) natanko tedaj, ko je  $\theta$  med 0 in  $\frac{\pi}{2}$  ter je  $\text{sgn}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_L) = 1$ . Točka je pod ravnino (v smeri nasprotni normali) natanko tedaj, ko je  $\theta$  med  $\frac{\pi}{2}$  in  $\pi$  ter je  $\text{sgn}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_L) = -1$ . Da ugotovimo, ali je poljubna točka nad ravnino ali pod njo, moramo preveriti le, kakšen je predznak skalarnega produkta njenega krajevnega vektorja z normalo ekliptike.

Za vsak časovni interval izračunamo skalarni produkt normale ekliptike s krajevnim vektorjem Lune. Nato določimo točke, pri katerih se predznak skalarnega produkta spremeni. To so točke, v katerih Luna prečka ekliptiko – dvižni in spustni vozli.

Vsakemu vozlu priredimo vektor  $\mathbf{e}_i$  z izhodiščem v težišču sistema Zemlja-Luna, ki predstavlja smer vozalne črte. Vsakemu dvižnemu vozlu priredimo vektor v smeri proti vozlu, vsakemu spustnemu vozlu pa vektor v smeri, ki je nasprotna smeri od težišča do vozla (slika 4). Zaradi precesije se bo vektor vozalne črte vrtel okrog težišča. Definiramo i-ti kot vozalne črte  $\phi_i$  s kotom med prvim vektorjem vozalne črte  $\mathbf{e}_1$  in i-tim vektorjem vozalne črte  $\mathbf{e}_i$  v pozitivni smeri glede na trenutno normalo ekliptike

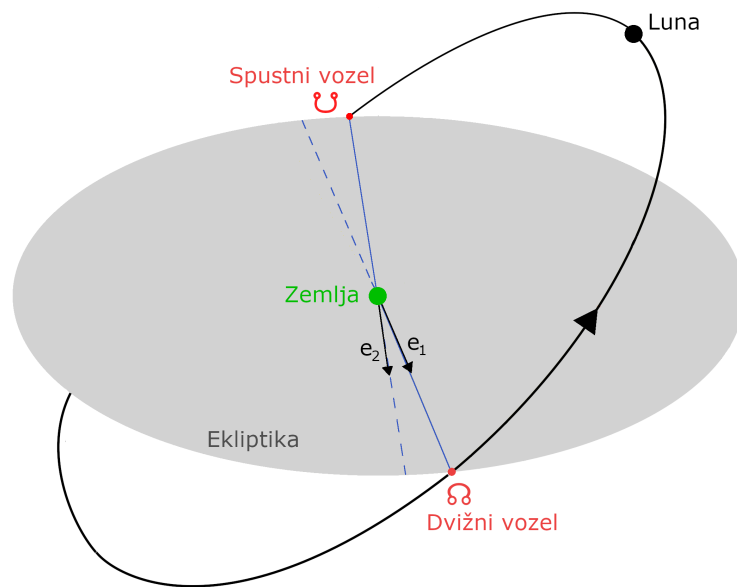
$$\cos \phi_i = \frac{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_i}{\|\mathbf{e}_1\| \|\mathbf{e}_i\|}.$$

Želimo rešitve od 0 do 360°. V prvem in drugem kvadrantu nam arccos da pravo rešitev za kot, v tretjem in četrtem pa moramo rešitev odšteti od  $2\pi$ , da dobimo željeni kot. Da ugotovimo, v katerem kvadrantu se vektor  $\mathbf{e}_i$  nahaja, si pomagamo

z vektorskim produktom. Če je vektorski produkt  $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_i$  v smeri normale ekliptike, je  $\mathbf{e}_i$  v prvem ali drugem kvadrantu, če pa je vektorski produkt v nasprotni smeri normale ekliptike, je  $\mathbf{e}_i$  v tretjem ali četrtem kvadrantu. Kot prej določimo smer vektorskega produkta s skalarnim produktom. Rešitev je torej

$$\phi_i = \begin{cases} \arccos \frac{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_i}{\|\mathbf{e}_1\| \|\mathbf{e}_i\|} & ; (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{n} \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_i}{\|\mathbf{e}_1\| \|\mathbf{e}_i\|} & ; (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{n} < 0 \end{cases} \quad (1)$$

Gledano iz smeri Zemljinega severnega pola, se vozelná črta vrtil v smeri urinega kazalca, zato se bo kot  $\phi_i$  zmanjševal.



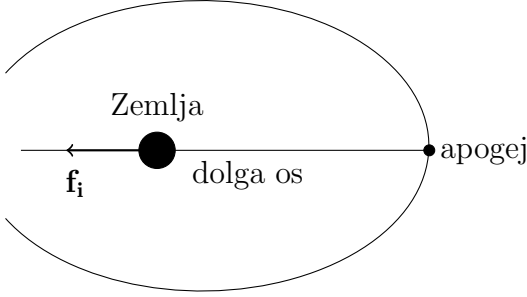
Slika 4: Lunina tirnica in smerna vektorja. Prvi smerni vektor vozelné črte kaže od težišča sistema Zemlja-Luna do dvižnega vozla, drugi pa od težišča v nasprotno smer spustnega vozla. Težišče sistema je zelo blizu Zemlje.

## 2.2 Precesija dolge osi

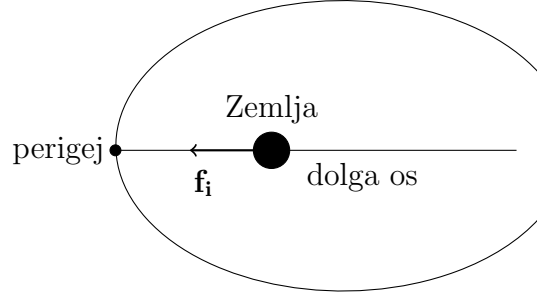
Najprej moramo določiti točke, v katerih je Luna v apogeju in perigeju. S funkcijo `odeint` izračunamo krajevna vektorja Zemlje in Lune ob časovnih intervalih z razmikom ene ure. S krajevnima vektorjema izračunamo razdaljo med telesoma. Določimo minimume in maksimume razdalje med Zemljo in Luno pri vsakem obhodu. Dobimo časovne intervale, pri katerih je Luna v apogeju in perigeju vsakega obhoda

$$\begin{aligned}\text{apogej:} & \quad \max \|\mathbf{r}_Z - \mathbf{r}_L\|, \\ \text{perigej:} & \quad \min \|\mathbf{r}_Z - \mathbf{r}_L\|.\end{aligned}$$

Vsakemu perigeju in apogeju priredimo vektor  $\mathbf{f}_i$  z izhodiščem v težišču sistema Zemlja-Luna, ki predstavlja smer dolge osi. Vsakemu perigeju priredimo vektor v smeri proti perigeju, vsakemu apogeju pa priredimo vektor v smeri, ki je nasprotna smeri od težišča do apogeja.



Slika 5: Lunina tirnica in smerni vektor, ko je Luna v apogeju.



Slika 6: Lunina tirnica in smerni vektor, ko je Luna v perigeju.

Zaradi precesije se bo vektor dolge osi vrtel okrog težišča. Definiramo  $i$ -ti kot dolge osi  $\gamma_i$  merjen v pozitivni smeri glede na trenutno normalo Lunine tirnice. Merimo ga od prvega vektorja dolge osi  $\mathbf{f}_1$  do trenutnega vektorja dolge osi  $\mathbf{f}_i$ . Uporabimo podobno formulo kot za vektor vozalne črte (1)

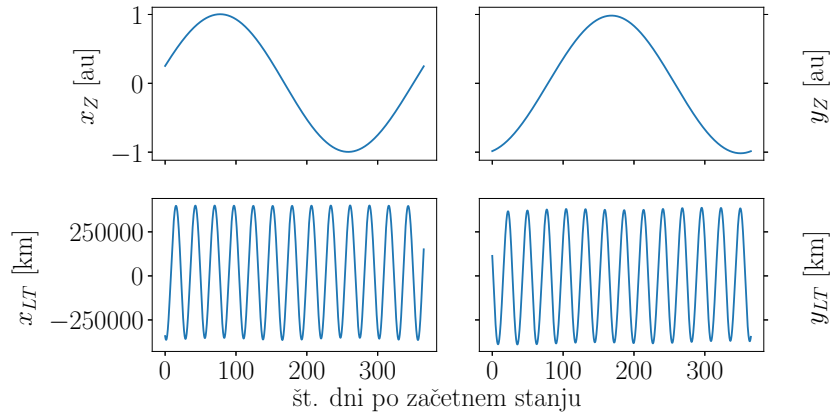
$$\gamma_i = \begin{cases} \arccos \frac{\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_i}{\|\mathbf{f}_1\| \|\mathbf{f}_i\|} & ; (\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_i) \cdot \mathbf{n}_L \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_i}{\|\mathbf{f}_1\| \|\mathbf{f}_i\|} & ; (\mathbf{f}_1 \times \mathbf{f}_i) \cdot \mathbf{n}_L < 0 \end{cases}$$

Za izračun kota  $\gamma_i$  potrebujemo normalo Lunine tirnice  $\mathbf{n}_L$ . Za vsak vektor  $\mathbf{f}_i$  jo izračunamo z vektorskim produktom med vektorjem, ki kaže od težišča sistema Zemlja-Luna proti Luni in vektorjem, ki kaže od težišča sistema do lege Lune pred sedmimi dnevi.

Gledano iz smeri Zemljinega severnega pola, se vozalna črta vrtil v nasprotni smeri urinega kazalca, zato se bo kot večal.



### 3 Rezultati

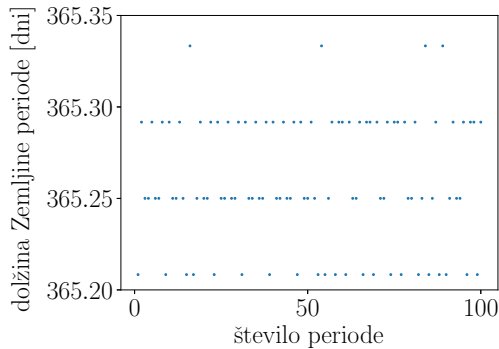


Graf 7: Zgoraj: Zemljini koordinati  $x$  in  $y$  tekom enega leta. Spodaj: Lunini koordinati  $x$  in  $y$  v koordinatnem sistemu z izhodiščem v težišču sistema Zemlja-Luna tekom enega leta.

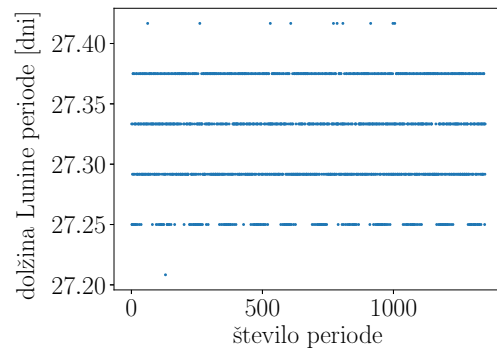
Iz grafa 7 vidimo, da je gibanje Zemlje in Lune periodično. Natančnost modela lahko ocenimo s primerjavo obhodnih časov Zemlje in Lune. Ker se v 100 letih dolžini period ne spremenita bistveno (grafa 8, 9), izračunamo obhodna časa tako, da izračunamo povprečni periodi koordinate  $x$  v 100 letih. Za koordinati  $y$  in  $z$  sta periodi v okviru napake enaki.

**Za 100 obhodov Zemlje** je potrebnih  $36\,525.96 \text{ dni} \pm 0.04 \text{ dneva}$ , torej je Zemljin povprečen obhodni čas  $365 \text{ dni } 6 \text{ h } 14 \text{ min} \pm 1 \text{ min}$ . To je blizu, a ne v okviru napake, referenčni vrednosti  $365 \text{ dni } 6 \text{ h } 9 \text{ min}$  [2]. Razlika med rezultatom in referenčno vrednostjo najverjetneje izvira iz neupoštevanja ostalih teles v Osončju.

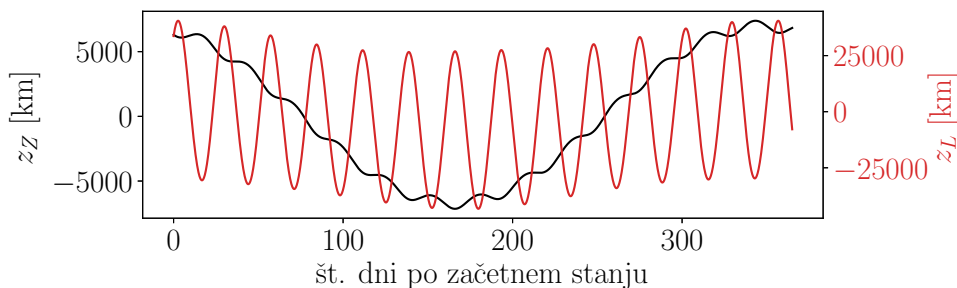
Za 1350 obhodov Lune okrog težišča je potrebnih  $36\,883.88 \text{ dni} \pm 0.04 \text{ dneva}$ , torej je Lunin povprečen obhodni čas  $27 \text{ dni } 7 \text{ h } 43 \text{ min} \pm 1 \text{ min}$ . To je v okviru napake enako referenčni vrednosti  $27 \text{ dni } 7 \text{ h } 43 \text{ min } 5 \text{ s}$  [2].



Graf 8: Dolžina posamezne periode Zemljine koordinate  $x$ .



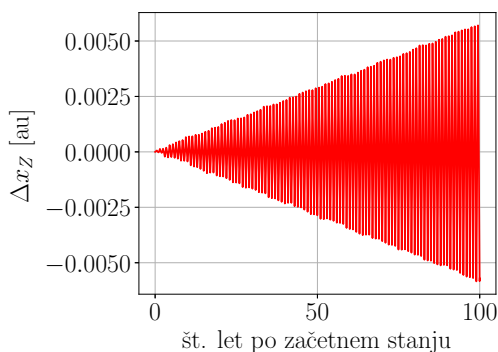
Graf 9: Dolžina posamezne periode Lunine koordinate  $x$  v težiščnem koordinatnem sistemu.



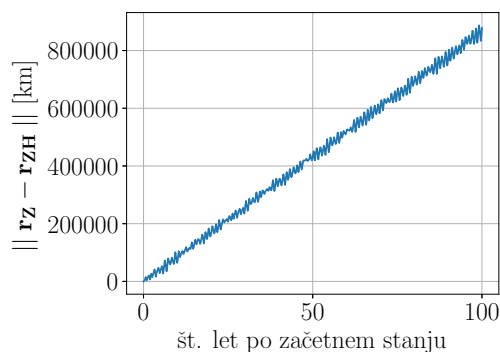
Graf 10: Zemljina in Lunina koordinata  $z$  tekom enega leta.

Na grafu 10 opazimo, da ima nihanje Zemljine koordinate  $z$  znotraj enega leta enako periodo kot nihanje Lunine koordinate  $z$  znotraj enega leta in nasprotno fazo. To je posledica tega, da Zemlja in Luna (v prvem približku) krožita po elipsi okrog težišča sistema.

Natančnost modela preverimo tudi tako, da primerjamo odstopanje napovedi modela od napovedi sistema Horizons, ki upošteva tudi vplive drugih teles v Osončju.



Graf 11: Razlika med napovedjo modela in sistema Horizons za Zemljino koordinato  $x$ .



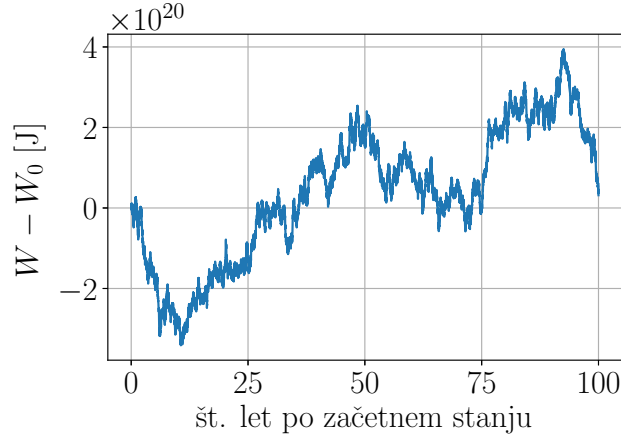
Graf 12: Razdalja med lego Zemlje kot jo napove model in lego Zemlje kot jo napove sistem Horizons.

Na grafih 11 in 12 vidimo, da maksimalno odstopanje narašča približno linearno. Podobno je za ostale koordinate Zemlje in Lune. Znotraj ovojnice, ki jo določajo ekstrema, je odstopanje podobno sinusoidi s periodo enega leta, kar pomeni, da je pol leta koordinata  $x$  modela manjša od napovedane s sistemom Horizons, pol leta pa večja. Enako velja tudi za koordinati  $y$  in  $z$ . Če odstopanja koordinat med sabo primerjamo, ugotovimo, da lega Zemlje napovedana z modelom rahlo zaostaja za lego napovedano s Horizons.

Zaostajanje modela se ujema s tem, da je obhodni čas Zemlje v našem modelu nekaj minut daljši od referenčne vrednosti. Odstopanje najverjetneje izhaja iz tega, da v modelu nismo upoštevali vpliva ostalih teles v Osončju, ki vplivajo na Zemljino tirnico. Vpliva na Lunin obhodni čas najverjetneje nismo opazili zaradi premajhne natančnosti pri določanju Lunine lege, saj je obhodni čas določen le na 1 min natančno.

V modelu upoštevamo le gravitacijsko silo, ki je konservativna, zato bi se morala energija sistema ohranjati. Numerično napako lahko ocenimo z odstopanjem energije sistema od začetne energije. Skupna energija Sonca, Zemlje in Lune je

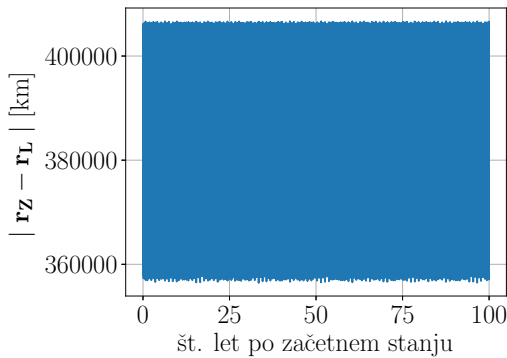
$$W = \frac{1}{2}m_Z\|\mathbf{v}_Z\|^2 + \frac{1}{2}m_L\|\mathbf{v}_L\|^2 - \frac{Gm_Sm_Z}{\|\mathbf{r}_Z\|} - \frac{Gm_Sm_L}{\|\mathbf{r}_L\|} - \frac{Gm_Zm_L}{\|\mathbf{r}_Z - \mathbf{r}_L\|}.$$



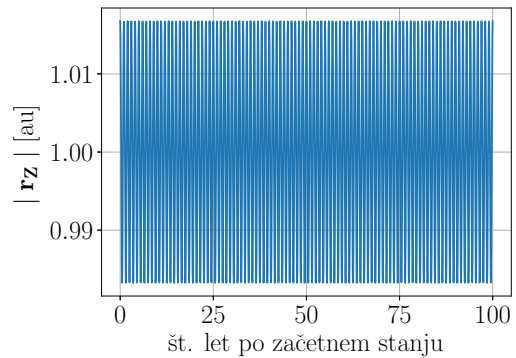
Graf 13: Odstopanje energije sistema od začetne energije  $W_0 = -2.7 \times 10^{33}$  J.

Pri uporabi funkcije `odeint` je bilo potrebno omejiti maksimalni korak integracije, sicer je sistem opazno pridobival energijo in se je Luna preveč oddaljila od Zemlje.

Odstopanje energije sistema je 13 redov velikosti manjše od energije sistema, zato sklepamo, da je vpliv numerične napake na rezultate zanemarljiv. Na spodnjih grafih vidimo, da sta tirnici Zemlje in Lune stabilni in da ostajajo ekstremi razdalj Zemlja-Luna in Zemlja-Sonca približno enaki.

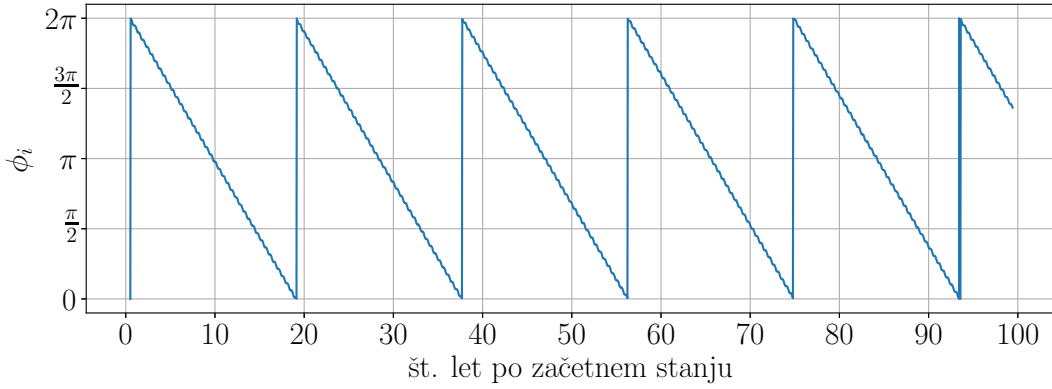


Graf 14: Razdalja med Zemljo in Luno.



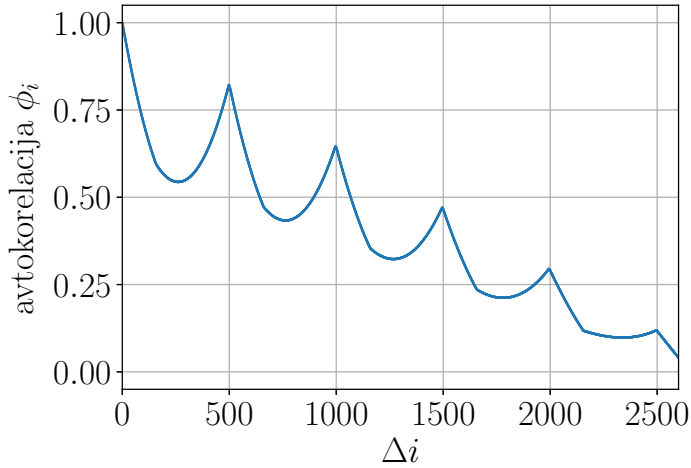
Graf 15: Razdalja med Soncem in Zemljo.

### 3.1 Precesija vozne črte



Graf 16: Kot vozne črte glede na začetno lego vozne črte.

Periodo določimo tako, da poiščemo maksimume korelacije funkcije same s sabo pri različnih zamikih začetnega kota.



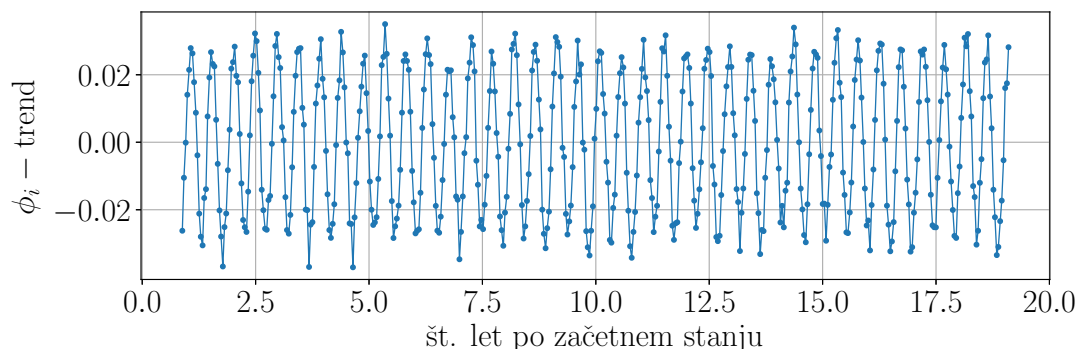
$\Delta \max$	$\Delta t$ [dni]
498	6775.88
498	6775.75
500	6802.62
498	6775.46
500	6802.96

Graf 17: Avtokorelacija kota vozne črte v odvisnosti od zamika za  $\Delta i$  kotov.

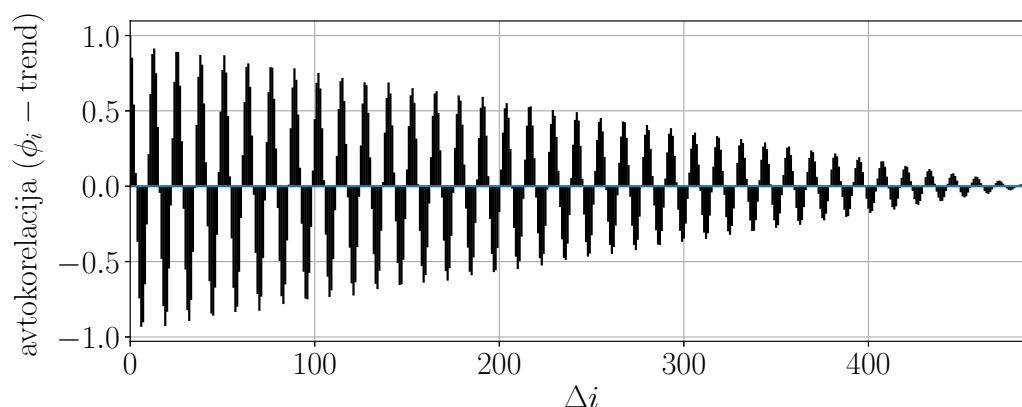
Tabela 3: Razdalje med maksimumi grafa in časovni intervali med njimi.

Časovni intervali med maksimumi grafa 17 so približno enako dolgi, zato izračunamo periodo kot povprečje petih period. Časovni interval petih period je dolg  $33\,933 \text{ dni} \pm 7 \text{ dni}$ . Povprečna perioda je torej  $6786 \text{ dni} \pm 2 \text{ dneva}$ , kar je blizu referenčne vrednosti  $6798.38 \text{ dni}$  [2]. Del napake izvira iz tega, da smo izračunali kot vozne črte le, ko je Luna prečkala ekliptiko, torej približno vsakih 14 dni. Časovni intervali so zato določeni z natančnostjo 7 dni, povprečna perioda pa na 2 dneva, kar še ne pojasni odstopanja rezultata od referenčne vrednosti v celoti. Najverjetneje izhaja iz tega, da nismo upoštevali oblike Zemlje in vpliva drugih teles v Osončju.

Zanimivo je, da se kot vozalne črte ne spreminja povsem linearno. Če točkam iz grafa 16 znotraj prve periode **odštejemo linearno funkcijo, ki se jim najbolj prilega, dobimo graf podoben sinusni funkciji. Periodo nihanja hitrosti precesije vozalne črte poiščemo z avtokorelacijo.**



Graf 18: Odstopanje kota vozalne črte od linearne funkcije, ki se točkam najbolj prilega znotraj prve periode precesije.

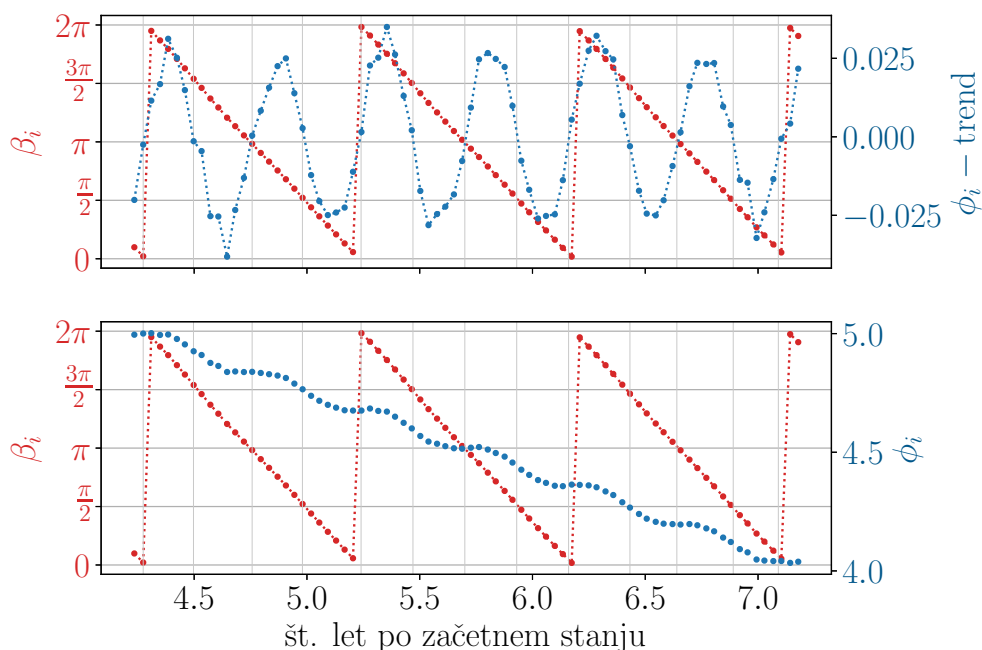


Graf 19: Avtokorelacija odstopanja kota vozalne črte od prilagojene linearne funkcije v odvisnosti od zamika za  $\Delta i$  kotov.

Po 38 periodah je  $\Delta i = 483$ , kar je  $6586 \text{ dni} \pm 7 \text{ dni}$ . Povprečna perioda je torej  $173.3 \text{ dni} \pm 0.2 \text{ dneva}$ . **To je približno pol leta, zato sklepamo, da je nihanje hitrosti precesije vozalne črte posledica spreminjanja smeri vozalne črte glede na Sonce.**

Izračunamo kot  $\beta_i$  med vsakim vektorjem vozalne črte  $\mathbf{e}_i$  in krajevnim vektorjem težišča sistema Zemlja-Luna  $\mathbf{r}_T$  ob istem času. Uporabimo podobno formulo kot za kot vozalne črte (1)

$$\beta_i = \begin{cases} \arccos \frac{\mathbf{r}_T \cdot \mathbf{e}_i}{\|\mathbf{r}_T\| \|\mathbf{e}_i\|} & ; (\mathbf{r}_T \times \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{n} \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{\mathbf{r}_T \cdot \mathbf{e}_i}{\|\mathbf{r}_T\| \|\mathbf{e}_i\|} & ; (\mathbf{r}_T \times \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{n} < 0 \end{cases}$$



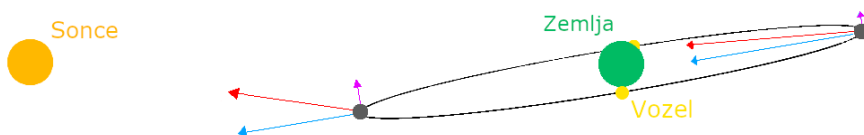
Graf 20: Zgoraj: Z rdečo kot med vektorjem vozelné črte in krajevnim vektorjem težišča sistema Zemlja-Luna in z modro razlika med kotom vozelné črte in prilagojeno premico. Spodaj: Z rdečo kot med vektorjem vozelné črte in krajevnim vektorjem težišča sistema Zemlja-Luna in z modro kot vozelné črte.

Na zgornjem grafu na grafu 20 opazimo, da je perioda  $\beta_i$  ravno dvakrat daljša od periode  $\phi_i - \text{trend}$ , kar kaže, da je hitrost precesije vozelné črte povezana s smerjo vozelné črte glede na Sonce.

Ko je kot  $\beta_i$  blizu 0 ali  $\pi$ , je eden od vozlov med Soncem in Zemljo. Na spodnjem grafu vidimo, da se takrat kot vozelné črte ne spreminja opazno. Ko je kot  $\beta$  enak  $\frac{\pi}{2}$  ali  $\frac{3\pi}{2}$  je vozelná črta pravokotna na krajevni vektor težišča. **Tedaj je naklon grafa  $\phi_i$  največji in se smer vozelné črte najhitreje spreminja.**

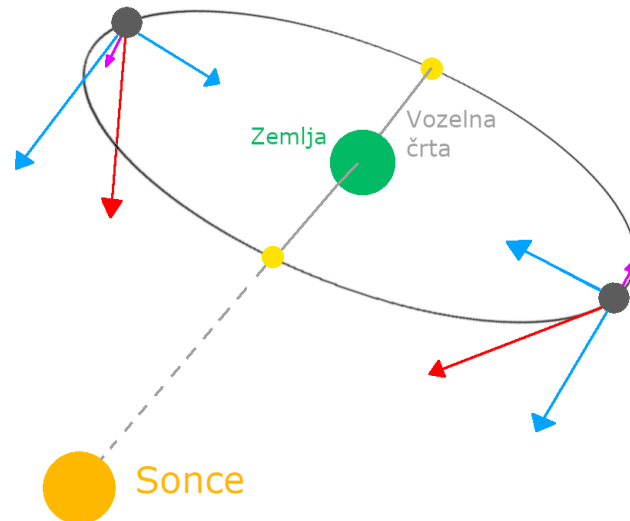
Poskusimo razložiti opaženo odvisnost na grafu. Do precesije vozelné črte pride zaradi navora tiste komponente gravitacijske sile Sonca, ki je pravokotna na ravnino Lunine tirnice.

Ko je kot  $\beta$  blizu  $\frac{\pi}{2}$  ali  $\frac{3\pi}{2}$  (slika 21), kaže **pravokotna komponenta** v obeh delih tirnice (nad in pod ekliptiko) v isto smer. Zato se v bližini teh kotov učinka sil v obeh delih seštejeta in je hitrost precesije največja.



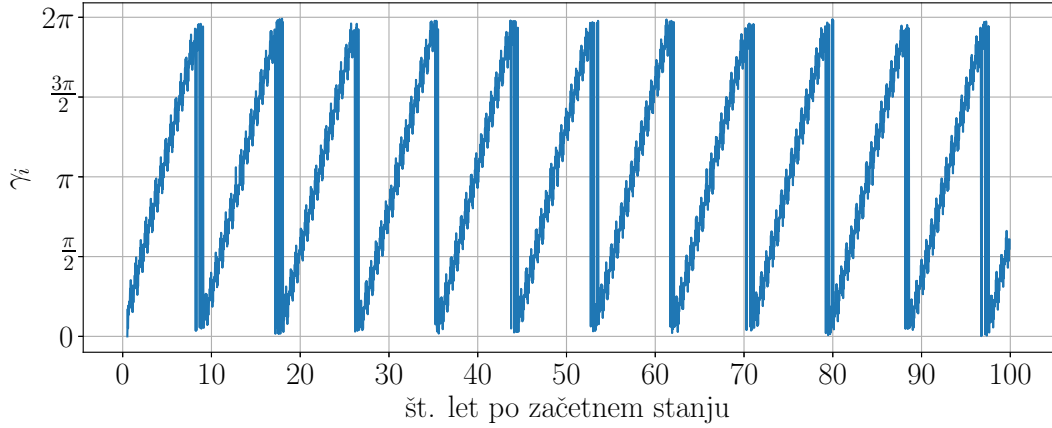
Slika 21: Sile na Luno pri kotu vozelné črte  $\frac{\pi}{2}$  in  $\frac{3\pi}{2}$  v obeh delih orbite. Z rdečo barvo sili na Luno, z vijolično barvo komponenti, ki sta pravokotni na ravnino Lunine tirnice, z modro pa ostali komponenti. Ni v merilu.

Ko je kot  $\beta$  blizu 0 ali  $\pi$  (slika 22), kaže pravokotna komponenta v delu tirnice pod ekliptiko v eno smer, v delu tirnice nad ekliptiko pa v nasprotno smer. Zato v bližini teh kotov učinek sile na enem delu tirnice skoraj povsem izniči učinek sile na drugem delu in je hitrost precesije najmanjša.



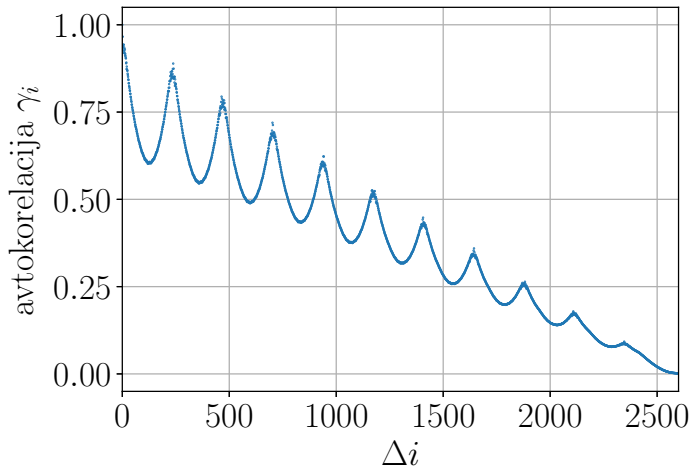
Slika 22: Sile na Luno pri kotu vozelné črte 0 in  $\pi$  v obeh delih orbite. Z rdečo barvo sili na Luno, z vijolično barvo komponenti, ki sta pravokotni na ravnino Lunine tirnice, z modro pa ostale komponente. Ni v merilu.

### 3.2 Precesija dolge osi



Graf 23: Kot dolge osi glede na začetno lego dolge osi.

Graf kota dolge osi je podoben grafu kota vozalne črte, le da je perioda krajša in se dolga os vrti v drugo smer. Periodo določimo z avtokorelacijo.



Graf 24: Avtokorelacija kota dolge osi od v odvisnosti od zamika za  $\Delta i$  kotov.

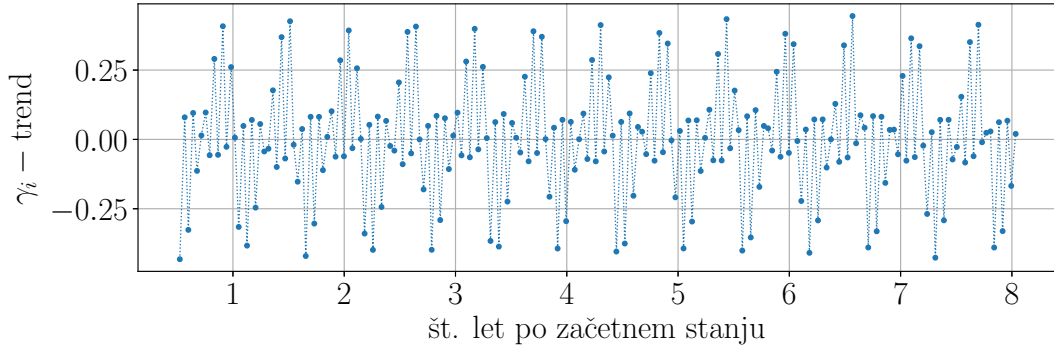
$\Delta \max$	$\Delta t$ [dni]
236	3254.71
235	3235.79
233	3209.04
235	3239.17
235	3239.04
235	3236.58
235	3235.50
234	3227.46
234	3221.83
235	3238.29

Tabela 4: Razdalje med maksimumi grafa in časovni intervali med njimi.

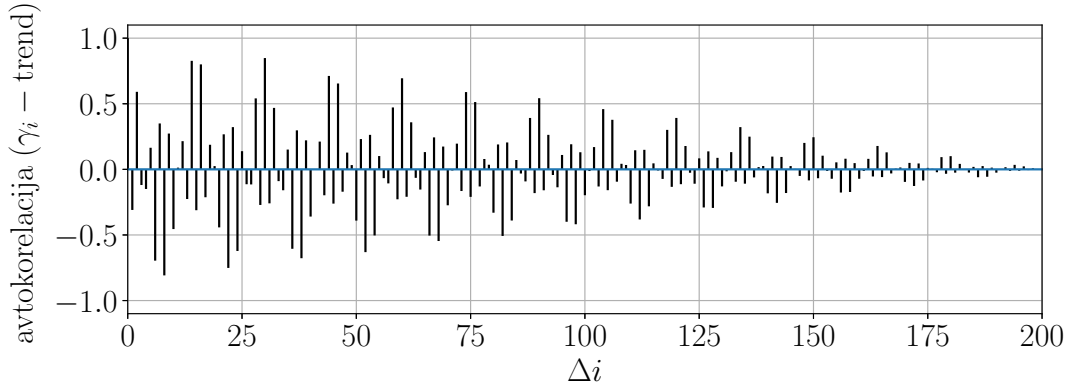
Časovni intervali med maksimumi grafa 24 so približno enako dolgi, zato izračunamo periodo kot povprečje desetih period. Časovni interval desetih period je  $32\,322 \text{ dni} \pm 7 \text{ dni}$ . Povprečna perioda je torej  $3232 \text{ dni} \pm 1 \text{ dan}$ , kar je v okviru napake enako referenčni vrednosti  $3231.50 \text{ dni}$  [2].

Tako kot kot vozalne črte, se tudi kot dolge osi ne spreminja povsem linearno. Če točkam iz grafa 23 znotraj prve periode odštejemo linearno funkcijo, ki se jim najbolj prilega, dobimo graf podoben sinusni funkciji. Periodo nihanja hitrosti precesije dolge osi določimo z avtokorelacijo.





Graf 25: Odstopanje kota dolge osi od linearne funkcije, ki se točkam na grafu 23 najbolj prilega znotraj prve periode precesije.

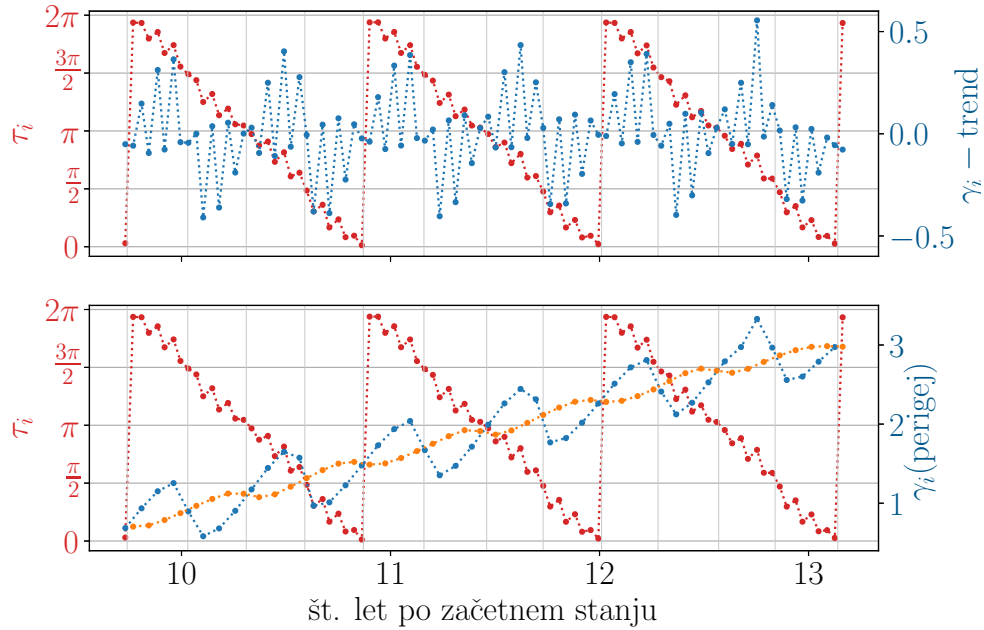


Graf 26: Avtokorelacija odstopanja kota vozne črte od prilagojene linearne funkcije v odvisnosti od zamika za  $\Delta i$  kotov.

Po 13 periodah je  $\Delta i = 194$ , kar je  $2676 \text{ dni} \pm 7 \text{ dni}$ . Povprečna perioda je torej  $205.9 \text{ dni} \pm 0.5 \text{ dneva}$ . To je približno pol leta, zato sklepamo, da je nihanje hitrosti precesije dolge osi posledica spreminjanja smeri dolge osi glede na Sonce.

Izračunamo kot  $\tau_i$  med vsakim vektorjem dolge osi  $\mathbf{f}_i$  in krajevnim vektorjem težišča sistema Zemlja-Luna  $\mathbf{r}_T$  ob istem času. Uporabimo podobno formulo kot za kot vozne črte (1)

$$\tau_i = \begin{cases} \arccos \frac{\mathbf{r}_T \cdot \mathbf{f}_i}{\|\mathbf{r}_T\| \|\mathbf{f}_i\|} & ; (\mathbf{r}_T \times \mathbf{f}_i) \cdot \mathbf{n} \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{\mathbf{r}_T \cdot \mathbf{f}_i}{\|\mathbf{r}_T\| \|\mathbf{f}_i\|} & ; (\mathbf{r}_T \times \mathbf{f}_i) \cdot \mathbf{n} < 0 \end{cases}$$



Graf 27: Zgoraj: Z rdečo kot med vektorjem dolge osi in krajevnim vektorjem težišča sistema Zemlja-Luna in z modro razlika med kotom dolge osi in prilagojeno premico. Spodaj: Z rdečo kot med vektorjem dolge osi in krajevnim vektorjem težišča sistema Zemlja-Luna, z modro kot dolge osi izračunan iz perigejev in z rumeno kot dolge osi izračunan iz apogejev.

Na zgornjem grafu na grafu 27 opazimo, da je perioda  $\tau_i$  ravno dvakrat daljša od periode  $\gamma_i - \text{trend}$ , kar kaže, da je hitrost precesije dolge osi povezana s smerjo dolge osi glede na Sonce.

Ko je kot  $\tau_i = 0$ , je Lunin perigej med Soncem in Zemljo, ko je  $\tau_i = \pi$  pa je med Sonce in Zemljo apogej. Iz spodnjega grafa vidimo, da se pri teh dveh kotih apogej ne spreminja opazno, kot perigeja pa prehitita kot apogeja. Ko je  $\tau_i$  enak  $\frac{\pi}{2}$  ali  $\frac{3\pi}{2}$ , je dolga os pravokotna na krajevni vektor težišča. Tedaj je naklon grafa kota dolge osi, določenega z apogeji, največji in se apogej najhitreje spreminja, kot določen s perigeji pa se manjša. Opazimo, da se kota dolge osi, določena iz apogeja in perigeja, približno ujemata pri  $\tau = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ .

Poskusimo razložiti opaženo odvisnost na grafu. Do precesije dolge osi pride zaradi radialne in tangentne komponente gravitacijske sile Sonca. Na grafu opazimo, da se kot perigeja ob nekaterih trenutkih razlikuje od kota apogejev. To je mogoče, ker se tekom enega obhoda Lune tirnica spreminja zaradi vpliva radialne in tangentne komponente sile Sonca. Na poti Lune od apogeja do perigeja se lahko tirnica zavrti v smeri ure in Luna zato doseže perigej prej kot v prejšnji orbiti. Kot perigeja se zato lahko zmanjša. V drugi polovici orbite se tirnica zasuka nazaj, zato lahko kot apogeja ostane približno enak oz. se celo poveča. To se zgodi, ko je  $\tau_i$  blizu  $\frac{\pi}{2}$  in  $\frac{3\pi}{2}$ . V bližini 0 in  $\pi$  pa se tirnica zavrti v nasprotni smeri ure in Luna doseže perigej pozneje kot v prejšnji orbiti in se kot perigeja večja. Kota dolge osi, določena iz apogeja in perigeja se približno ujemata v bližini večkratnikov  $\frac{\pi}{2}$ , ker se tedaj učinka sile Sonca v posameznih polovicah orbite skoraj povsem izničita.

## Literatura

- [1] Shkelzen Cakaj, Bexhet Kamo, Algenti Lala, Ilir Shinko & Elson Agastra. *The Apsidal Precession for Low Earth Sun Synchronized Orbits*. International Journal of Advanced Computer Science and Applications. 6. 10.14569/IJA-CSA.2015.060909. (2015)
- [2] Solar System Dynamics Group, Horizons On-Line Ephemeris System, <https://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi>. Pridobljeno 7. 7. 2019.
- [3] Sandra Matthews. *Phases of the Moon. Spin and orbital frequencies*. <https://slideplayer.com/slide/6237929/>
- [4] SciPy v1.3.0, `scipy.integrate.odeint`, <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.odeint.html>
- [5] <https://gitlab.com/rokuk/sim-precesija-lune>
- [6] William M. Folkner, James G. Williams, Dale H. Boggs, Ryan S. Park, & Petr Kuchynka. *The Planetary and Lunar Ephemerides DE430 and DE431*. The Interplanetary Network Progress Report, Volume 42-196, (2014). [https://ipnpr.jpl.nasa.gov/progress\\_report/42-196/196C.pdf](https://ipnpr.jpl.nasa.gov/progress_report/42-196/196C.pdf)
- [7] P. J. Mohr, D. B. Newell & B. N. Taylor, *CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2014*. Journal of Physical and Chemical Reference Data 45(4), 043102 (2016). <https://arxiv.org/abs/1507.07956>