Modélisation Stochastique et Approche Bayésienne

Inférence probabiliste

Roland Donat

Université de Bretagne Sud

ENSIBS - Spécialité Cyber Data

https://roland-donat.github.io/cours-rb/ensibs/

Plan de la présentation

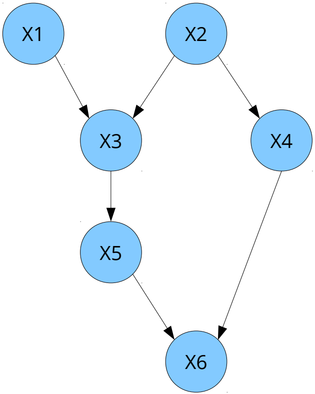
Objectifs pédagogiques

- Comprendre la notion d'inférence probabiliste dans un réseau bayésien
- Maîtriser les calculs effectués par un algorithme d'inférence exacte
- Prendre conscience des avantages et des limites de l'inférence dans les réseaux bayésiens

Plan

Introduction à l'inférence

Exemples

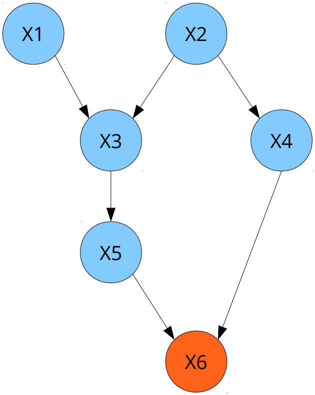


Exemples de requêtes

- $P(X_6)$
- $P(X_4)$
- $P(X_4 | X_5 = x_5)$
- $P(X_2 | X_1 = x_1, X_6 = x_6)$
- $P(X_3, X_5 | X_4 = x_4, X_6 = x_6)$

Introduction à l'inférence

Exemples

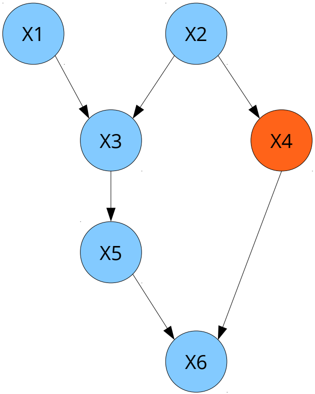


Exemples de requêtes

- $P(X_6)$
- $P(X_4)$
- $P(X_4 | X_5 = x_5)$
- $P(X_2 | X_1 = x_1, X_6 = x_6)$
- $P(X_3, X_5 | X_4 = x_4, X_6 = x_6)$

Introduction à l'inférence

Exemples

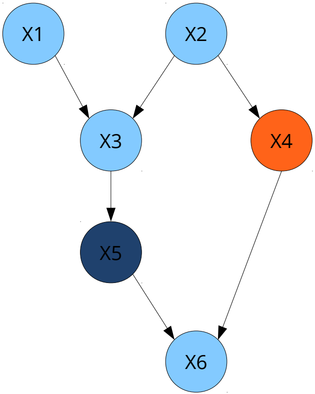


Exemples de requêtes

- $P(X_6)$
- $P(X_4)$
- $P(X_4 | X_5 = x_5)$
- $P(X_2 | X_1 = x_1, X_6 = x_6)$
- $P(X_3, X_5 | X_4 = x_4, X_6 = x_6)$

Introduction à l'inférence

Exemples

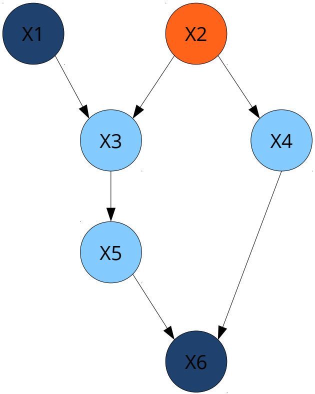


Exemples de requêtes

- $P(X_6)$
- $P(X_4)$
- $P(X_4 | X_5 = x_5)$
- $P(X_2 | X_1 = x_1, X_6 = x_6)$
- $P(X_3, X_5 | X_4 = x_4, X_6 = x_6)$

Introduction à l'inférence

Exemples

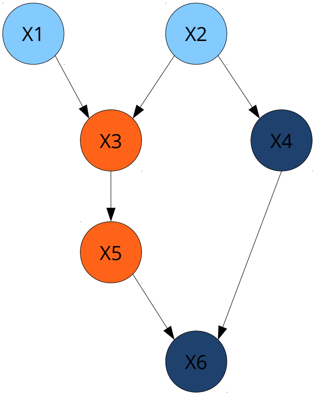


Exemples de requêtes

- $P(X_6)$
- $P(X_4)$
- $P(X_4 | X_5 = x_5)$
- $P(X_2 | X_1 = x_1, X_6 = x_6)$
- $P(X_3, X_5 | X_4 = x_4, X_6 = x_6)$

Introduction à l'inférence

Exemples



Exemples de requêtes

- $P(X_6)$
- $P(X_4)$
- $P(X_4 | X_5 = x_5)$
- $P(X_2 | X_1 = x_1, X_6 = x_6)$
- $P(X_3, X_5 | X_4 = x_4, X_6 = x_6)$

Introduction à l'inférence

Définition

Problématique : comment calculer des probabilités dans un RB ?

- Soit un RB représentant la loi jointe d'une suite de v.a. $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ à valeurs dans $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_n$ respectivement

$\Rightarrow$ Objectif : calculer les lois de la forme

$$P\left(\boldsymbol{Q} | \boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}\right)$$

- $\boldsymbol{Q} = (Q_1, \ldots, Q_\ell) \subseteq \boldsymbol{X}$ est une suite de v.a. appelée "requête" de l'inférence
- $\boldsymbol{E} = (E_1, \ldots, E_m) \subseteq \boldsymbol{X}$ est une suite de v.a., observées aux valeurs $\boldsymbol{e} = (e_1, \ldots, e_m)$, appelée "évidence" de l'inférence
- Contrainte : $\boldsymbol{Q} \cap \boldsymbol{E} = \varnothing$

Introduction à l'inférence

Algorithmes d'inférence

Inférence exacte

- Algorithme *belief propagation* (Pearl 1988) adapté aux structures d'arbres (ou polyarbres)
- Méthodes reposant sur la construction de l'arbre de jonction (Lauritzen et Spiegelhalter 1988)
- **Méthodes d'élimination des variables** (Dechter 1999 ; Cozman 2000)

Inférence approchée déterministe

- Algorithme *loopy belief propagation* (Murphy, Weiss et Jordan 1999) : Utilisation de la méthode *belief propagation* sur un graphe général
- Méthode de raisonnement par pertinence (Lin et Druzdzel 1999)

Inférence approchée stochastique

- Méthode d'échantillonnage type Monte-Carlo

Plan

Notion de potentiel

Exemple

X	*Y*	*Z*	*Φ(x,y,z)*
x1	*y1*	*z1*	-10
x2	*y1*	*z1*	2,25
x1	*y2*	*z1*	0,01
x2	*y2*	*z1*	-90
x1	*y3*	*z1*	0
x2	*y3*	*z1*	0,7
x1	*y1*	*z2*	-4
x2	*y1*	*z2*	1
x1	*y2*	*z2*	-2
x2	*y2*	*z2*	-1,5
x1	*y3*	*z2*	-2
x2	*y3*	*z2*	0,5

Caractéristiques de Φ

- $\mathrm{Dom}(\Phi) = \{\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}\}$ avec :
  - $\mathcal{X} = \{x_1, x_2\}$
  - $\mathcal{Y} = \{y_1, y_2, y_3\}$
  - $\mathcal{Z} = \{z_1, z_2\}$
- Configurations de Φ : $\mathrm{Dom}(\Phi)^* = \{x_1, x_2\} \times \{y_1, y_2, y_3\} \times \{z_1, z_2\}$

$\Rightarrow$ Φ possède $|\mathrm{Dom}(\Phi)^*| = |\mathcal{X}| \times |\mathcal{Y}| \times |\mathcal{Z}| = 2 \times 3 \times 2 = 12$ configurations

- Pour toute configuration $(x, y, z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$, Φ prend la valeur $\Phi(x, y, z)$

Notion de potentiel

Exemple

X	*Y*	*Z*	*Φ(x,y,z)*
x1	*y1*	*z1*	-10
x2	*y1*	*z1*	2,25
x1	*y2*	*z1*	0,01
x2	*y2*	*z1*	-90
x1	*y3*	*z1*	0
x2	*y3*	*z1*	0,7
x1	*y1*	*z2*	-4
x2	*y1*	*z2*	1
x1	*y2*	*z2*	-2
x2	*y2*	*z2*	-1,5
x1	*y3*	*z2*	-2
x2	*y3*	*z2*	0,5

Caractéristiques de Φ

- $\mathrm{Dom}(\Phi) = \{\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}\}$ avec :
  - $\mathcal{X} = \{x_1, x_2\}$
  - $\mathcal{Y} = \{y_1, y_2, y_3\}$
  - $\mathcal{Z} = \{z_1, z_2\}$
- Configurations de Φ : $\mathrm{Dom}(\Phi)^* = \{x_1, x_2\} \times \{y_1, y_2, y_3\} \times \{z_1, z_2\}$

$\Rightarrow$ Φ possède $|\mathrm{Dom}(\Phi)^*| = |\mathcal{X}| \times |\mathcal{Y}| \times |\mathcal{Z}| = 2 \times 3 \times 2 = 12$ configurations

- Pour toute configuration $(x, y, z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$, Φ prend la valeur $\Phi(x, y, z)$

Notion de potentiel

Exemple

X	Y	Z	Φ(x,y,z)
x1	y1	z1	-10
x2	y1	z1	2,25
x1	y2	z1	0,01
x2	y2	z1	-90
x1	y3	z1	0
x2	y3	z1	0,7
x1	y1	z2	-4
x2	y1	z2	1
x1	y2	z2	-2
x2	y2	z2	-1,5
x1	y3	z2	-2
x2	y3	z2	0,5

Caractéristiques de Φ

- $\text{Dom}(\Phi) = \{\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}\}$ avec :
  - $\mathcal{X} = \{x_1, x_2\}$
  - $\mathcal{Y} = \{y_1, y_2, y_3\}$
  - $\mathcal{Z} = \{z_1, z_2\}$
- Configurations de Φ : $\text{Dom}(\Phi)^* = \{x_1, x_2\} \times \{y_1, y_2, y_3\} \times \{z_1, z_2\}$

$\Rightarrow$ Φ possède $|\text{Dom}(\Phi)^*| = |\mathcal{X}| \times |\mathcal{Y}| \times |\mathcal{Z}| = 2 \times 3 \times 2 = 12$ configurations

- Pour toute configuration $(x, y, z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$, Φ prend la valeur $\Phi(x, y, z)$

Notion de potentiel

Exemple

X	Y	Z	Φ(x,y,z)
x1	y1	z1	-10
x2	y1	z1	2,25
x1	y2	z1	0,01
x2	y2	z1	-90
x1	y3	z1	0
x2	y3	z1	0,7
x1	y1	z2	-4
x2	y1	z2	1
x1	y2	z2	-2
x2	y2	z2	-1,5
x1	y3	z2	-2
x2	y3	z2	0,5

Caractéristiques de Φ

- $\mathrm{Dom}(\Phi) = \{\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}\}$ avec :
  - $\mathcal{X} = \{x_1, x_2\}$
  - $\mathcal{Y} = \{y_1, y_2, y_3\}$
  - $\mathcal{Z} = \{z_1, z_2\}$
- Configurations de Φ : $\mathrm{Dom}(\Phi)^* = \{x_1, x_2\} \times \{y_1, y_2, y_3\} \times \{z_1, z_2\}$

$\Rightarrow$ Φ possède $|\mathrm{Dom}(\Phi)^*| = |\mathcal{X}| \times |\mathcal{Y}| \times |\mathcal{Z}| = 2 \times 3 \times 2 = 12$ configurations

- Pour toute configuration $(x, y, z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$, Φ prend la valeur $\Phi(x, y, z)$

Notion de potentiel

Exemple

X	*Y*	*Z*	*Φ(x,y,z)*
x1	*y1*	*z1*	-10
x2	*y1*	*z1*	2,25
x1	*y2*	*z1*	0,01
x2	*y2*	*z1*	-90
x1	*y3*	*z1*	0
x2	*y3*	*z1*	0,7
x1	*y1*	*z2*	-4
x2	*y1*	*z2*	1
x1	*y2*	*z2*	-2
x2	*y2*	*z2*	-1,5
x1	*y3*	*z2*	-2
x2	*y3*	*z2*	0,5

Caractéristiques de Φ

- $\text{Dom}(\Phi) = \{\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}\}$ avec :
  - $\mathcal{X} = \{x_1, x_2\}$
  - $\mathcal{Y} = \{y_1, y_2, y_3\}$
  - $\mathcal{Z} = \{z_1, z_2\}$
- Configurations de Φ : $\text{Dom}(\Phi)^* = \{x_1, x_2\} \times \{y_1, y_2, y_3\} \times \{z_1, z_2\}$

$\Rightarrow$ Φ possède $|\text{Dom}(\Phi)^*| = |\mathcal{X}| \times |\mathcal{Y}| \times |\mathcal{Z}| = 2 \times 3 \times 2 = 12$ configurations

- Pour toute configuration $(x, y, z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$, Φ prend la valeur $\Phi(x, y, z)$

Notion de potentiel

Exemple

X	Y	Z	Φ(x,y,z)
x1	y1	z1	-10
x2	y1	z1	2,25
x1	y2	z1	0,01
x2	y2	z1	-90
x1	y3	z1	0
x2	y3	z1	0,7
x1	y1	z2	-4
x2	y1	z2	1
x1	y2	z2	-2
x2	y2	z2	-1,5
x1	y3	z2	-2
x2	y3	z2	0,5

Caractéristiques de Φ

- $\mathrm{Dom}\,(\Phi) = \{\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}\}$ avec :
  - $\mathcal{X} = \{x_1, x_2\}$
  - $\mathcal{Y} = \{y_1, y_2, y_3\}$
  - $\mathcal{Z} = \{z_1, z_2\}$
- Configurations de Φ : $\mathrm{Dom}\,(\Phi)^* = \{x_1, x_2\} \times \{y_1, y_2, y_3\} \times \{z_1, z_2\}$

$\Rightarrow$ Φ possède $|\mathrm{Dom}\,(\Phi)^*| = |\mathcal{X}| \times |\mathcal{Y}| \times |\mathcal{Z}| = 2 \times 3 \times 2 = 12$ configurations

- Pour toute configuration $(x, y, z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$, Φ prend la valeur $\Phi\,(x, y, z)$

Notion de potentiel

Exemple

X	Y	Z	Φ(x,y,z)
x1	y1	z1	-10
x2	y1	z1	2,25
x1	y2	z1	0,01
x2	y2	z1	-90
x1	y3	z1	0
x2	y3	z1	0,7
x1	y1	z2	-4
x2	y1	z2	1
x1	y2	z2	-2
x2	y2	z2	-1,5
x1	y3	z2	-2
x2	y3	z2	0,5

Caractéristiques de Φ

- $\mathrm{Dom}(\Phi) = \{\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}\}$ avec :
  - $\mathcal{X} = \{x_1, x_2\}$
  - $\mathcal{Y} = \{y_1, y_2, y_3\}$
  - $\mathcal{Z} = \{z_1, z_2\}$
- Configurations de Φ : $\mathrm{Dom}(\Phi)^* = \{x_1, x_2\} \times \{y_1, y_2, y_3\} \times \{z_1, z_2\}$

$\Rightarrow$ Φ possède $|\mathrm{Dom}(\Phi)^*| = |\mathcal{X}| \times |\mathcal{Y}| \times |\mathcal{Z}| = 2 \times 3 \times 2 = 12$ configurations

- Pour toute configuration $(x, y, z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$, Φ prend la valeur $\Phi(x, y, z)$

Notion de potentiel

Définition

Concept général

Un potentiel est une application de plusieurs variables à valeurs dans un ensemble quelconque et muni d'opérations particulières

Potentiel discret et fini réel

Soit $\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_D$ une famille d'ensembles discrets et finis. Φ est un potentiel réel sur le domaine $\{\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_D\}$ si Φ est une application définie par

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{X}_1 \times \ldots \times \mathcal{X}_D & \mapsto & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_D) & \mapsto & \Phi(x_1, \ldots, x_D) \end{cases} .$$

Vocabulaire et notations

- Le domaine du potentiel Φ est noté $\mathrm{Dom}(\Phi) = \{\mathcal{X}_1, \ldots, \mathcal{X}_D\}$
- $\mathrm{Dom}(\Phi)^* = \prod_{d=1}^{D} \mathcal{X}_d = \mathcal{X}_1 \times \ldots \times \mathcal{X}_D$
- Tout élément $(x_1, \ldots, x_D) \in \mathrm{Dom}(\Phi)^*$ est appelé configuration
- Si $|\mathrm{Dom}(\Phi)| = D$, on dit que Φ est un potentiel à D dimensions

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Produit - Exemple

X	*Z*	*Φ1(x,z)*
x1	*z1*	-10
x1	*z2*	2,25
x2	*z1*	0,01
x2	*z2*	-9

Y	*Z*	*Φ2(y,z)*
y1	*z1*	0
y1	*z2*	3.5
y2	*z1*	-1
y2	*z2*	7.25

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Produit - Exemple

X	Z	Φ1(x,z)
x1	z1	-10
x1	z2	2,25
x2	z1	0,01
x2	z2	-9

•

Y	Z	Φ2(y,z)
y1	z1	0
y1	z2	3.5
y2	z1	-1
y2	z2	7.25

=

X	Z	Y	Ψ(x,z,y)
x1	z1	y1	
x1	z1	y2	
x1	z2	y1	
x1	z2	y2	
x2	z1	y1	
x2	z1	y2	
x2	z2	y1	
x2	z2	y2	

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Produit - Exemple

X	Z	Φ1(x,z)
x1	z1	-10
x1	z2	2,25
x2	z1	0,01
x2	z2	-9

•

Y	Z	Φ2(y,z)
y1	z1	0
y1	z2	3.5
y2	z1	-1
y2	z2	7.25

=

X	Z	Y	Ψ(x,z,y)
x1	z1	y1	-10 • 0 = 0
x1	z1	y2	
x1	z2	y1	
x1	z2	y2	
x2	z1	y1	
x2	z1	y2	
x2	z2	y1	
x2	z2	y2	

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Produit - Exemple

X	Z	Φ1(x,z)
x1	z1	-10
x1	z2	2,25
x2	z1	0,01
x2	z2	-9

•

Y	Z	Φ2(y,z)
y1	z1	0
y1	z2	3.5
y2	z1	-1
y2	z2	7.25

=

X	Z	Y	Ψ(x,z,y)
x1	z1	y1	0
x1	z1	y2	-10 • -1 = 10
x1	z2	y1	
x1	z2	y2	
x2	z1	y1	
x2	z1	y2	
x2	z2	y1	
x2	z2	y2	

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Produit - Exemple

X	Z	Φ1(x,z)
x1	z1	-10
x1	z2	2,25
x2	z1	0,01
x2	z2	-9

•

Y	Z	Φ2(y,z)
y1	z1	0
y1	z2	3.5
y2	z1	-1
y2	z2	7.25

=

X	Z	Y	Ψ(x,z,y)
x1	z1	y1	0
x1	z1	y2	10
x1	z2	y1	7.875
x1	z2	y2	
x2	z1	y1	
x2	z1	y2	
x2	z2	y1	
x2	z2	y2	

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Produit - Exemple

X	Z	Φ1(x,z)
x1	z1	-10
x1	z2	2,25
x2	z1	0,01
x2	z2	-9

•

Y	Z	Φ2(y,z)
y1	z1	0
y1	z2	3.5
y2	z1	-1
y2	z2	7.25

=

X	Z	Y	Ψ(x,z,y)
x1	z1	y1	0
x1	z1	y2	10
x1	z2	y1	7.875
x1	z2	y2	16.3125
x2	z1	y1	
x2	z1	y2	
x2	z2	y1	
x2	z2	y2	

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Produit - Exemple

X	Z	Φ1(x,z)
x1	z1	-10
x1	z2	2,25
x2	z1	0,01
x2	z2	-9

•

Y	Z	Φ2(y,z)
y1	z1	0
y1	z2	3.5
y2	z1	-1
y2	z2	7.25

=

X	Z	Y	Ψ(x,z,y)
x1	z1	y1	0
x1	z1	y2	10
x1	z2	y1	7.875
x1	z2	y2	16.3125
x2	z1	y1	0
x2	z1	y2	
x2	z2	y1	
x2	z2	y2	

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Produit - Exemple

X	Z	Φ1(x,z)
x1	z1	-10
x1	z2	2,25
x2	z1	0,01
x2	z2	-9

•

Y	Z	Φ2(y,z)
y1	z1	0
y1	z2	3.5
y2	z1	-1
y2	z2	7.25

=

X	Z	Y	Ψ(x,z,y)
x1	z1	y1	0
x1	z1	y2	10
x1	z2	y1	7.875
x1	z2	y2	16.3125
x2	z1	y1	0
x2	z1	y2	-0.01
x2	z2	y1	
x2	z2	y2	

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Produit - Exemple

X	Z	Φ1(x,z)
x1	z1	-10
x1	z2	2,25
x2	z1	0,01
x2	z2	-9

•

Y	Z	Φ2(y,z)
y1	z1	0
y1	z2	3.5
y2	z1	-1
y2	z2	7.25

=

X	Z	Y	Ψ(x,z,y)
x1	z1	y1	0
x1	z1	y2	10
x1	z2	y1	7.875
x1	z2	y2	16.3125
x2	z1	y1	0
x2	z1	y2	-0.01
x2	z2	y1	-31.5
x2	z2	y2	

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Produit - Exemple

X	Z	Φ1(x,z)
x1	z1	-10
x1	z2	2,25
x2	z1	0,01
x2	z2	-9

•

Y	Z	Φ2(y,z)
y1	z1	0
y1	z2	3.5
y2	z1	-1
y2	z2	7.25

=

X	Z	Y	Ψ(x,z,y)
x1	z1	y1	0
x1	z1	y2	10
x1	z2	y1	7.875
x1	z2	y2	16.3125
x2	z1	y1	0
x2	z1	y2	-0.01
x2	z2	y1	-31.5
x2	z2	y2	-65.25

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Produit - Exemple

X	Z	Φ1(x,z)
x1	z1	-10
x1	z2	2,25
x2	z1	0,01
x2	z2	-9

•

Y	Z	Φ2(y,z)
y1	z1	0
y1	z2	3.5
y2	z1	-1
y2	z2	7.25

=

X	Z	Y	Ψ(x,z,y)
x1	z1	y1	0
x1	z1	y2	10
x1	z2	y1	7.875
x1	z2	y2	16.3125
x2	z1	y1	0
x2	z1	y2	-0.01
x2	z2	y1	-31.5
x2	z2	y2	-65.25

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Produit et somme - Définition

Produit de deux potentiels discrets et finis

- Soient deux potentiels réels discrets et finis Φ_1 et Φ_2
- Notons :
  - $\boldsymbol{\mathcal{X}} = \text{Dom}\,(\Phi_1) \setminus \text{Dom}\,(\Phi_2)$
  - $\boldsymbol{\mathcal{Y}} = \text{Dom}\,(\Phi_2) \setminus \text{Dom}\,(\Phi_1)$
  - $\boldsymbol{\mathcal{Z}} = \text{Dom}\,(\Phi_1) \cap \text{Dom}\,(\Phi_2)$
- Le produit de Φ_1 et Φ_2 est un potentiel $\Psi = \Phi_1 \cdot \Phi_2$ de domaine $\text{Dom}\,(\Psi) = \text{Dom}\,(\Phi_1) \cup \text{Dom}\,(\Phi_2)$ vérifiant pour toute configuration $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{\mathcal{X}}^* \times \boldsymbol{\mathcal{Z}}^* \times \boldsymbol{\mathcal{Y}}^*$:

$$\Psi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}) = \Phi_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \cdot \Phi_2(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$$

Somme de deux potentiels discrets et finis

La somme de deux potentiels réels discrets et finis est définie de manière analogue au produit en remplaçant l'opérateur $\cdot$ par l'opérateur $+$

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Sommation/Marginalisation - Exemple

X	Z	Y	$\Phi(x,z,y)$
$x1$	$z1$	$y1$	0
$x1$	$z1$	$y2$	10
$x1$	$z2$	$y1$	7.875
$x1$	$z2$	$y2$	16.3125
$x2$	$z1$	$y1$	0
$x2$	$z1$	$y2$	-0.01
$x2$	$z2$	$y1$	-31.5
$x2$	$z2$	$y2$	-65.25

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Sommation/Marginalisation - Exemple

$$\sum_{x \in \mathcal{X}}$$

X	*Z*	*Y*	*Φ(x,z,y)*
x1	*z1*	*y1*	0
x1	*z1*	*y2*	10
x1	*z2*	*y1*	7.875
x1	*z2*	*y2*	16.3125
x2	*z1*	*y1*	0
x2	*z1*	*y2*	-0.01
x2	*z2*	*y1*	-31.5
x2	*z2*	*y2*	-65.25

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Sommation/Marginalisation - Exemple

$$\sum_{x \in \mathcal{X}}$$

X	Z	Y	Φ(x,z,y)
x1	z1	y1	0
x1	z1	y2	10
x1	z2	y1	7.875
x1	z2	y2	16.3125
x2	z1	y1	0
x2	z1	y2	-0.01
x2	z2	y1	-31.5
x2	z2	y2	-65.25

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Sommation/Marginalisation - Exemple

$$\sum_{x \in \mathcal{X}}$$

X	Z	Y	Φ(x,z,y)
x1	z1	y1	0
x1	z1	y2	10
x1	z2	y1	7.875
x1	z2	y2	16.3125
x2	z1	y1	0
x2	z1	y2	-0.01
x2	z2	y1	-31.5
x2	z2	y2	-65.25

=

Z	Y	Ψ(z,y)
z1	y1	
z1	y2	
z2	y1	
z2	y2	

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Sommation/Marginalisation - Exemple

$$\sum_{x \in \mathcal{X}}$$

X	Z	Y	Φ(x,z,y)
x1	z1	y1	0
x1	z1	y2	10
x1	z2	y1	7.875
x1	z2	y2	16.3125
x2	z1	y1	0
x2	z1	y2	-0.01
x2	z2	y1	-31.5
x2	z2	y2	-65.25

=

Z	Y	Ψ(z,y)
z1	y1	0
z1	y2	
z2	y1	
z2	y2	

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Sommation/Marginalisation - Exemple

$\sum_{x \in \mathcal{X}}$

X	Z	Y	Φ(x,z,y)
x1	z1	y1	0
x1	z1	y2	10
x1	z2	y1	7.875
x1	z2	y2	16.3125
x2	z1	y1	0
x2	z1	y2	-0.01
x2	z2	y1	-31.5
x2	z2	y2	-65.25

=

Z	Y	Ψ(z,y)
z1	y1	0
z1	y2	9.99
z2	y1	
z2	y2	

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Sommation/Marginalisation - Exemple

$\sum_{x \in \mathcal{X}}$

X	Z	Y	Φ(x,z,y)
x1	z1	y1	0
x1	z1	y2	10
x1	z2	y1	7.875
x1	z2	y2	16.3125
x2	z1	y1	0
x2	z1	y2	-0.01
x2	z2	y1	-31.5
x2	z2	y2	-65.25

=

Z	Y	Ψ(z,y)
z1	y1	0
z1	y2	9.99
z2	y1	-23.625
z2	y2	

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Sommation/Marginalisation - Exemple

$$\sum_{x \in \mathcal{X}}$$

X	Z	Y	Φ(x,z,y)
x1	z1	y1	0
x1	z1	y2	10
x1	z2	y1	7.875
x1	z2	y2	16.3125
x2	z1	y1	0
x2	z1	y2	-0.01
x2	z2	y1	-31.5
x2	z2	y2	-65.25

=

Z	Y	Ψ(z,y)
z1	y1	0
z1	y2	9.99
z2	y1	-23.625
z2	y2	-48.9375

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Sommation/Marginalisation - Exemple

$$\sum_{x \in \mathcal{X}}$$

X	Z	Y	$\Phi(x,z,y)$
$x1$	$z1$	$y1$	0
$x1$	$z1$	$y2$	10
$x1$	$z2$	$y1$	7.875
$x1$	$z2$	$y2$	16.3125
$x2$	$z1$	$y1$	0
$x2$	$z1$	$y2$	-0.01
$x2$	$z2$	$y1$	-31.5
$x2$	$z2$	$y2$	-65.25

=

Z	Y	$\Psi(z,y)$
$z1$	$y1$	0
$z1$	$y2$	9.99
$z2$	$y1$	-23.625
$z2$	$y2$	-48.9375

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Sommation/Marginalisation - Définition

Sommation/Marginalisation d'un potentiel discret et fini

- Soit un potentiel réel discret et fini Φ
- Le résultat de la sommation de Φ sur le domaine $\mathcal{W}$ est un potentiel $\Psi = \sum_{\mathcal{W}} \Phi$ de domaine $\text{Dom}\,(\Psi) = \text{Dom}\,(\Phi) \setminus \mathcal{W}$ vérifiant pour toute configuration $\boldsymbol{x} \in \text{Dom}\,(\Psi)^*$:

$$\Psi(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{w} \in \mathcal{W}} \Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w})$$

- Cette opération est également appelée marginalisation du potentiel Φ sur le domaine $\text{Dom}\,(\Phi) \setminus \mathcal{W}$

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Instanciation - Exemple

X	*Z*	*Y*	$\Phi(x,z,y)$
x1	*z1*	*y1*	0
x1	*z1*	*y2*	10
x1	*z2*	*y1*	7.875
x1	*z2*	*y2*	16.3125
x2	*z1*	*y1*	0
x2	*z1*	*y2*	-0.01
x2	*z2*	*y1*	-31.5
x2	*z2*	*y2*	-65.25

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Instanciation - Exemple

X	Z	Y	$\Phi(x,z,y)$
$x1$	$z1$	$y1$	0
$x1$	$z1$	$y2$	10
$x1$	$z2$	$y1$	7.875
$x1$	$z2$	$y2$	16.3125
$x2$	$z1$	$y1$	0
$x2$	$z1$	$y2$	-0.01
$x2$	$z2$	$y1$	-31.5
$x2$	$z2$	$y2$	-65.25

$\Rightarrow$

X	Z	Y	$\Phi(x2,z,y)$
$x2$	$z1$	$y1$	0
$x2$	$z1$	$y2$	-0.01
$x2$	$z2$	$y1$	-31.5
$x2$	$z2$	$y2$	-65.25

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Instanciation - Exemple

X	Z	Y	Φ(x,z,y)
x1	z1	y1	0
x1	z1	y2	10
x1	z2	y1	7.875
x1	z2	y2	16.3125
x2	z1	y1	0
x2	z1	y2	-0.01
x2	z2	y1	-31.5
x2	z2	y2	-65.25

$\Rightarrow$

X	Z	Y	Φ(x2,z,y)
x2	z1	y1	0
x2	z1	y2	-0.01
x2	z2	y1	-31.5
x2	z2	y2	-65.25

$\Downarrow$

X	Z	Y	Φ(x2,z,y1)
x2	z1	y1	0
x2	z2	y1	-31.5

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Instanciation - Exemple

X	Z	Y	Φ(x,z,y)
x1	z1	y1	0
x1	z1	y2	10
x1	z2	y1	7.875
x1	z2	y2	16.3125
x2	z1	y1	0
x2	z1	y2	-0.01
x2	z2	y1	-31.5
x2	z2	y2	-65.25

$\Rightarrow$

X	Z	Y	Φ(x2,z,y)
x2	z1	y1	0
x2	z1	y2	-0.01
x2	z2	y1	-31.5
x2	z2	y2	-65.25

$\Downarrow$

X	Z	Y	Φ(x2,z,y1)
x2	z1	y1	0
x2	z2	y1	-31.5

$\Rightarrow$

X	Z	Y	Φ(x2,z1,y1)
x2	z1	y1	0

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Instanciation - Exemple

X	Z	Y	$\Phi(x,z,y)$
$x1$	$z1$	$y1$	0
$x1$	$z1$	$y2$	10
$x1$	$z2$	$y1$	7.875
$x1$	$z2$	$y2$	16.3125
$x2$	$z1$	$y1$	0
$x2$	$z1$	$y2$	-0.01
$x2$	$z2$	$y1$	-31.5
$x2$	$z2$	$y2$	-65.25

$\Rightarrow$

X	Z	Y	$\Phi(x2,z,y)$
$x2$	$z1$	$y1$	0
$x2$	$z1$	$y2$	-0.01
$x2$	$z2$	$y1$	-31.5
$x2$	$z2$	$y2$	-65.25

$\Downarrow$

X	Z	Y	$\Phi(x2,z,y1)$
$x2$	$z1$	$y1$	0
$x2$	$z2$	$y1$	-31.5

$\Rightarrow$

X	Z	Y	$\Phi(x2,z1,y1)$
$x2$	$z1$	$y1$	0

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Instanciation - Définition

Instanciation d'un potentiel discret et fini

- Soit un potentiel réel discret et fini Φ
- L'instanciation de Φ sur la configuration $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\mathcal{Y}} \subseteq \text{Dom}\,(\Phi)$ est la projection du potentiel Φ sur le domaine $\text{Dom}\,(\Phi_{\boldsymbol{y}}) = (\text{Dom}\,(\Phi) \setminus \boldsymbol{\mathcal{Y}}) \cup \boldsymbol{y}$

$\Rightarrow$ Φ instancié sur $\boldsymbol{y}$ est un potentiel défini sur toutes les configurations $\boldsymbol{x} \in (\text{Dom}\,(\Phi) \setminus \boldsymbol{\mathcal{Y}})^*$ tel que $\Phi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$

Notion de potentiel

Complexité

Complexité spatiale

- Soit un potentiel réel discret et fini Φ tel que $\text{Dom}(\Phi) = \{\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_D\}$
- La complexité spatiale de Φ, notée $\text{CS}(\Phi)$, correspond au nombre de configurations du domaine de Φ :

$$\text{CS}(\Phi) = |\text{Dom}(\Phi)^*|$$

$\Rightarrow$ $\text{CS}(\Phi) \simeq v^D$ quand v et/ou D sont grands avec :

- D : nombre de variables représenté dans le domaine du potentiel
- $v = \max\{|\mathcal{X}_1|, \dots, |\mathcal{X}_D|\}$: + grand nombre de valeurs prises par une v.a.

Complexité algorithmique (CA) d'une opération algébrique

- Soient deux potentiels réels discrets et finis Φ_1 et Φ_2

$\Rightarrow$ $\text{CA}(\Phi_1 \cdot \Phi_2) = \text{CA}(\Phi_1 + \Phi_2) \simeq |(\text{Dom}(\Phi_1) \cup \text{Dom}(\Phi_2))^*|$

$\Rightarrow$ $\text{CA}(\sum_{\mathcal{W}} \Phi_1) \simeq |(\text{Dom}(\Phi_1) \setminus \mathcal{W})^*|$

$\Rightarrow$ Les complexités algorithmiques et spatiales sont du même ordre

Notion de potentiel

LPC comme potentiel

Potentiel et LPC

- Soit un potentiel réel discret et fini à valeur dans $[0, 1]$ noté p
- S'il existe deux sous-domaines disjoints $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ et $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$ avec $\mathrm{Dom}\,(p) = \boldsymbol{\mathcal{X}} \cup \boldsymbol{\mathcal{Y}}$ tels que pour toute configuration $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\mathcal{Y}}^*$

$$\sum_{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}^*} p(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 1.$$

$\Rightarrow$ Le potentiel p est une Loi de Probabilité Conditionnelle (LPC) sur $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ conditionnellement à $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$

$\Rightarrow$ Les domaines $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ et $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$ étant discrets et finis, la LPC p peut se représenter sous la forme d'une Table de Probabilité Conditionnelle (TPC)

Vocabulaire

- Le domaine $\boldsymbol{\mathcal{Y}}$ est appelé domaine de conditionnement
- Le domaine $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ est appelé domaine normalisé

Notion de potentiel

LPC comme potentiel - Exemple

P(Note | Difficulté, Niveau)			
		Note	
Difficulté	**Niveau**	*mauvaise*	*bonne*
facile	*faible*	0,5	0,5
moyenne	*faible*	0,75	0,25
importante	*faible*	0,99	0,01
facile	*fort*	0,1	0,9
moyenne	*fort*	0,2	0,8
importante	*fort*	0,3	0,7

Exemple

- Variables de conditionnement :
  - Difficulté à valeurs dans $\{$facile, moyenne, importante$\}$
  - Niveau à valeurs dans $\{$faible, fort$\}$
- Variable normalisée :
  - Note à valeurs dans $\{$mauvaise, bonne$\}$

Notion de potentiel

LPC comme potentiel - Exemple

P(Note | **Difficulté**, **Niveau**)			
		Note	
Difficulté	**Niveau**	*mauvaise*	*bonne*
facile	*faible*	0,5	0,5
moyenne	*faible*	0,75	0,25
importante	*faible*	0,99	0,01
facile	*fort*	0,1	0,9
moyenne	*fort*	0,2	0,8
importante	*fort*	0,3	0,7

Exemple

- Variables de conditionnement :
  - Difficulté à valeurs dans {facile, moyenne, importante}
  - Niveau à valeurs dans {faible, fort}
- Variable normalisée :
  - Note à valeurs dans {mauvaise, bonne}

Notion de potentiel

LPC comme potentiel - Exemple

P(Note | Difficulté, Niveau)			
		Note	
Difficulté	**Niveau**	*mauvaise*	*bonne*
facile	*faible*	0,5	0,5
moyenne	*faible*	0,75	0,25
importante	*faible*	0,99	0,01
facile	*fort*	0,1	0,9
moyenne	*fort*	0,2	0,8
importante	*fort*	0,3	0,7

Exemple

- Variables de conditionnement :
  - Difficulté à valeurs dans $\{\text{facile}, \text{moyenne}, \text{importante}\}$
  - Niveau à valeurs dans $\{\text{faible}, \text{fort}\}$
- Variable normalisée :
  - Note à valeurs dans $\{\text{mauvaise}, \text{bonne}\}$

Plan

Élimination des variables

Principe de la méthode - Formalisation

Rappel de l'objectif

- Soit $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ une suite de v.a.
- Calculer $P(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e})$ avec $\boldsymbol{Q} \subseteq \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{E} \subseteq \boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Q} \cap \boldsymbol{E} = \varnothing$

Principe

- Par définition : $P(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}) = \dfrac{P(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{E} = \boldsymbol{e})}{P(\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e})}$
- En posant $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{X} \setminus (\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{E})$, on a

$$P(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}) = \sum_{W \in \boldsymbol{W}} \underbrace{P(X_1, \ldots, X_n)}_{\text{loi jointe de la suite } \boldsymbol{X}} = \sum_{W \in \boldsymbol{W}} P(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{W}, \boldsymbol{E} = \boldsymbol{e})$$

- **Principe :** Simplifier le calcul de $P(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e})$ grâce à la propriété de factorisation dans un RB
- **En pratique :** Toutes les variables hors requête et évidence sont "éliminées" de l'expression de la loi jointe par sommation

Élimination des variables

Principe de la méthode - Formalisation

Rappel de l'objectif

- Soit $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ une suite de v.a.
- Calculer $P(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e})$ avec $\boldsymbol{Q} \subseteq \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{E} \subseteq \boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Q} \cap \boldsymbol{E} = \varnothing$

Principe

- Par définition : $P(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}) = \dfrac{P(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{E} = \boldsymbol{e})}{P(\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e})}$
- En posant $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{X} \setminus (\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{E})$, on a

$$P(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}) = \sum_{W \in \boldsymbol{W}} \underbrace{P(X_1, \ldots, X_n)}_{\text{loi jointe de la suite } \boldsymbol{X}} = \sum_{W \in \boldsymbol{W}} P(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{W}, \boldsymbol{E} = \boldsymbol{e})$$

- **Principe :** Simplifier le calcul de $P(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e})$ grâce à la propriété de factorisation dans un RB
- **En pratique :** Toutes les variables hors requête et évidence sont "éliminées" de l'expression de la loi jointe par sommation

Élimination des variables

Principe de la méthode - Formalisation

Rappel de l'objectif

- Soit $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ une suite de v.a.
- Calculer $P(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e})$ avec $\boldsymbol{Q} \subseteq \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{E} \subseteq \boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Q} \cap \boldsymbol{E} = \varnothing$

Principe

- Par définition : $P(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}) = \dfrac{P(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{E} = \boldsymbol{e})}{P(\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e})}$
- En posant $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{X} \setminus (\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{E})$, on a

$$P(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}) = \sum_{W \in \boldsymbol{W}} \underbrace{P(X_1, \ldots, X_n)}_{\text{loi jointe de la suite } \boldsymbol{X}} = \sum_{W \in \boldsymbol{W}} P(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{W}, \boldsymbol{E} = \boldsymbol{e})$$

- **Principe :** Simplifier le calcul de $P(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e})$ grâce à la propriété de factorisation dans un RB
- **En pratique :** Toutes les variables hors requête et évidence sont "éliminées" de l'expression de la loi jointe par sommation

Élimination des variables

Principe de la méthode - Formalisation

Rappel de l'objectif

- Soit $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ une suite de v.a.
- Calculer $P(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e})$ avec $\boldsymbol{Q} \subseteq \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{E} \subseteq \boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Q} \cap \boldsymbol{E} = \varnothing$

Principe

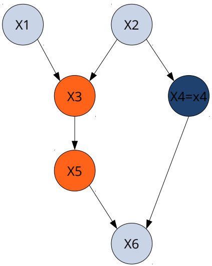
- Par définition : $P(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}) = \dfrac{P(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{E} = \boldsymbol{e})}{P(\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e})}$
- En posant $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{X} \setminus (\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{E})$, on a

$$P(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}) = \sum_{W \in \boldsymbol{W}} \underbrace{P(X_1, \ldots, X_n)}_{\text{loi jointe de la suite } \boldsymbol{X}} = \sum_{W \in \boldsymbol{W}} P(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{W}, \boldsymbol{E} = \boldsymbol{e})$$

- **Principe :** Simplifier le calcul de $P(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e})$ grâce à la propriété de factorisation dans un RB
- **En pratique :** Toutes les variables hors requête et évidence sont "éliminées" de l'expression de la loi jointe par sommation

Élimination des variables

Principe de la méthode - Exemple



Caractéristiques du calcul

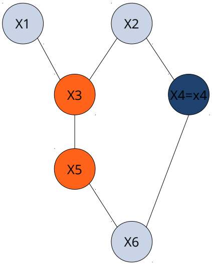
- Suite des v.a. : $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$
- Objectif : calculer $P(X_3, X_5 | X_4 = x_4)$
- Requête : $\boldsymbol{Q} = (X_3, X_5)$
- Évidence : $\boldsymbol{E} = (X_4)$, $\boldsymbol{e} = (x_4)$
- Variables à éliminer : $\boldsymbol{W} = (X_1, X_2, X_6)$

Déroulement du calcul

$P(X_3, X_5, X_4 = x_4) =$

Élimination des variables

Principe de la méthode - Exemple



Caractéristiques du calcul

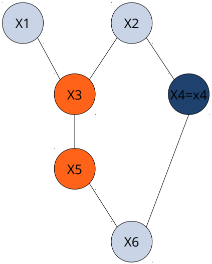
- Suite des v.a. :
  $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$
- Objectif : calculer $P\left(X_3, X_5 | X_4 = x_4\right)$
- Requête : $\boldsymbol{Q} = (X_3, X_5)$
- Évidence : $\boldsymbol{E} = (X_4)$, $\boldsymbol{e} = (x_4)$
- Variables à éliminer : $\boldsymbol{W} = (X_1, X_2, X_6)$

Déroulement du calcul

$$P\left(X_3, X_5, X_4 = x_4\right) = \sum_{X_1} \sum_{X_2} \sum_{X_6} P\left(X_1, X_2, X_3, X_4 = x_4, X_5, X_6\right)$$

Élimination des variables

Principe de la méthode - Exemple



Caractéristiques du calcul

- Suite des v.a. : $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$
- Objectif : calculer $P(X_3, X_5 | X_4 = x_4)$
- Requête : $\boldsymbol{Q} = (X_3, X_5)$
- Évidence : $\boldsymbol{E} = (X_4)$, $\boldsymbol{e} = (x_4)$
- Variables à éliminer : $\boldsymbol{W} = (X_1, X_2, X_6)$

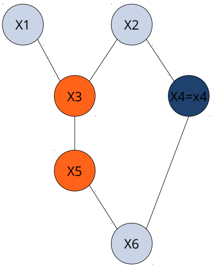
Déroulement du calcul

$$P(X_3, X_5, X_4 = x_4) =$$

$$\sum_{X_1} \sum_{X_2} \sum_{X_6} \underbrace{P(X_1) P(X_2) P(X_3 | X_1, X_2) P(X_4 = x_4 | X_2) P(X_5 | X_3) P(X_6 | X_5, X_4 = x_4)}_{\text{Factorisation loi jointe dans le RB}}$$

Élimination des variables

Principe de la méthode - Exemple



Caractéristiques du calcul

- Suite des v.a. : $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$
- Objectif : calculer $P(X_3, X_5 | X_4 = x_4)$
- Requête : $\boldsymbol{Q} = (X_3, X_5)$
- Évidence : $\boldsymbol{E} = (X_4)$, $\boldsymbol{e} = (x_4)$
- Variables à éliminer : $\boldsymbol{W} = (X_1, X_2, X_6)$

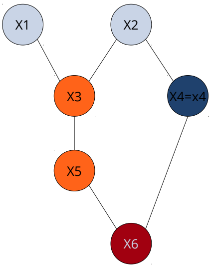
Déroulement du calcul

$$P(X_3, X_5, X_4 = x_4) =$$

$$P(X_5|X_3) \sum_{X_1} P(X_1) \sum_{X_2} P(X_2) P(X_3|X_1, X_2) P(X_4 = x_4|X_2) \sum_{X_6} P(X_6|X_5, X_4 = x_4)$$

Élimination des variables

Principe de la méthode - Exemple



Caractéristiques du calcul

- Suite des v.a. : $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$
- Objectif : calculer $P(X_3, X_5 | X_4 = x_4)$
- Requête : $\boldsymbol{Q} = (X_3, X_5)$
- Évidence : $\boldsymbol{E} = (X_4)$, $\boldsymbol{e} = (x_4)$
- Variables à éliminer : $\boldsymbol{W} = (X_1, X_2, X_6)$

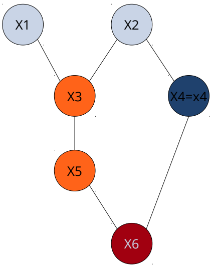
Déroulement du calcul

$$P(X_3, X_5, X_4 = x_4) =$$

$$P(X_5|X_3) \sum_{X_1} P(X_1) \sum_{X_2} P(X_2) P(X_3|X_1, X_2) P(X_4 = x_4|X_2) \sum_{X_6} P(X_6|X_5, X_4 = x_4)$$

Élimination des variables

Principe de la méthode - Exemple



Caractéristiques du calcul

- Suite des v.a. : $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$
- Objectif : calculer $P(X_3, X_5 | X_4 = x_4)$
- Requête : $\boldsymbol{Q} = (X_3, X_5)$
- Évidence : $\boldsymbol{E} = (X_4)$, $\boldsymbol{e} = (x_4)$
- Variables à éliminer : $\boldsymbol{W} = (X_1, X_2, X_6)$

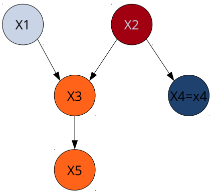
Déroulement du calcul

$$P(X_3, X_5, X_4 = x_4) =$$

$$P(X_5|X_3) \sum_{X_1} P(X_1) \sum_{X_2} P(X_2)\, P(X_3|X_1, X_2)\, P(X_4 = x_4|X_2) \underbrace{\sum_{X_6} P(X_6|X_5, X_4 = x_4)}_{\mathbf{1}}$$

Élimination des variables

Principe de la méthode - Exemple



Caractéristiques du calcul

- Suite des v.a. : $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$
- Objectif : calculer $P(X_3, X_5 | X_4 = x_4)$
- Requête : $\boldsymbol{Q} = (X_3, X_5)$
- Évidence : $\boldsymbol{E} = (X_4)$, $\boldsymbol{e} = (x_4)$
- Variables à éliminer : $\boldsymbol{W} = (X_1, X_2, X_6)$

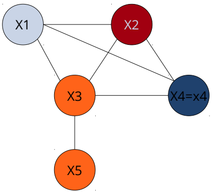
Déroulement du calcul

$P(X_3, X_5, X_4 = x_4) =$

$$P(X_5|X_3) \sum_{X_1} P(X_1) \sum_{X_2} P(X_2) P(X_3|X_1, X_2) P(X_4 = x_4|X_2)$$

Élimination des variables

Principe de la méthode - Exemple



Caractéristiques du calcul

- Suite des v.a. : $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$
- Objectif : calculer $P(X_3, X_5 | X_4 = x_4)$
- Requête : $\boldsymbol{Q} = (X_3, X_5)$
- Évidence : $\boldsymbol{E} = (X_4)$, $\boldsymbol{e} = (x_4)$
- Variables à éliminer : $\boldsymbol{W} = (X_1, X_2, X_6)$

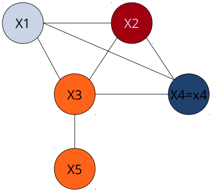
Déroulement du calcul

$P(X_3, X_5, X_4 = x_4) =$

$$P(X_5|X_3) \sum_{X_1} P(X_1) \sum_{X_2} \underbrace{P(X_2)\, P(X_3|X_1, X_2)\, P(X_4 = x_4|X_2)}_{\Phi_2(X_1, X_2, X_3, X_4 = x_4)}$$

Élimination des variables

Principe de la méthode - Exemple



Caractéristiques du calcul

- Suite des v.a. : $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$
- Objectif : calculer $P(X_3, X_5 | X_4 = x_4)$
- Requête : $\boldsymbol{Q} = (X_3, X_5)$
- Évidence : $\boldsymbol{E} = (X_4)$, $\boldsymbol{e} = (x_4)$
- Variables à éliminer : $\boldsymbol{W} = (X_1, X_2, X_6)$

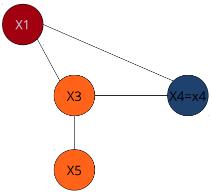
Déroulement du calcul

$P(X_3, X_5, X_4 = x_4) =$

$$P(X_5|X_3) \sum_{X_1} P(X_1) \underbrace{\sum_{X_2} \Phi_{X_2}(X_1, X_2, X_3, X_4 = x_4)}_{\Psi_2(X_1, X_3, X_4 = x_4)}$$

Élimination des variables

Principe de la méthode - Exemple



Caractéristiques du calcul

- Suite des v.a. : $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$
- Objectif : calculer $P(X_3, X_5 | X_4 = x_4)$
- Requête : $\boldsymbol{Q} = (X_3, X_5)$
- Évidence : $\boldsymbol{E} = (X_4)$, $\boldsymbol{e} = (x_4)$
- Variables à éliminer : $\boldsymbol{W} = (X_1, X_2, X_6)$

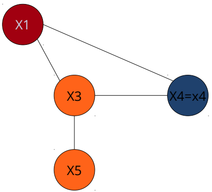
Déroulement du calcul

$$P(X_3, X_5, X_4 = x_4) =$$

$$P(X_5 | X_3) \sum_{X_1} P(X_1) \Psi_2 (X_1, X_3, X_4 = x_4)$$

Élimination des variables

Principe de la méthode - Exemple



Caractéristiques du calcul

- Suite des v.a. : $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$
- Objectif : calculer $P\left(X_3, X_5 | X_4 = x_4\right)$
- Requête : $\boldsymbol{Q} = (X_3, X_5)$
- Évidence : $\boldsymbol{E} = (X_4)$, $\boldsymbol{e} = (x_4)$
- Variables à éliminer : $\boldsymbol{W} = (X_1, X_2, X_6)$

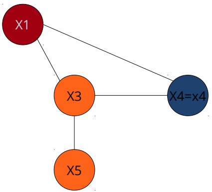
Déroulement du calcul

$$P\left(X_3, X_5, X_4 = x_4\right) =$$

$$P\left(X_5 | X_3\right) \sum_{X_1} \underbrace{P\left(X_1\right) \Psi_2\left(X_1, X_3, X_4 = x_4\right)}_{\Phi_1(X_1, X_3, X_4 = x_4)}$$

Élimination des variables

Principe de la méthode - Exemple



Caractéristiques du calcul

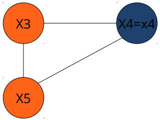
- Suite des v.a. : $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$
- Objectif : calculer $P\left(X_3, X_5 | X_4 = x_4\right)$
- Requête : $\boldsymbol{Q} = (X_3, X_5)$
- Évidence : $\boldsymbol{E} = (X_4)$, $\boldsymbol{e} = (x_4)$
- Variables à éliminer : $\boldsymbol{W} = (X_1, X_2, X_6)$

Déroulement du calcul

$$P\left(X_3, X_5, X_4 = x_4\right) = P\left(X_5 | X_3\right) \underbrace{\sum_{X_1} \Phi_1\left(X_1, X_3, X_4 = x_4\right)}_{\Psi_1(X_3, X_4 = x_4)}$$

Élimination des variables

Principe de la méthode - Exemple



Caractéristiques du calcul

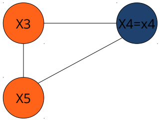
- Suite des v.a. : $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$
- Objectif : calculer $P(X_3, X_5 | X_4 = x_4)$
- Requête : $\boldsymbol{Q} = (X_3, X_5)$
- Évidence : $\boldsymbol{E} = (X_4)$, $\boldsymbol{e} = (x_4)$
- Variables à éliminer : $\boldsymbol{W} = (X_1, X_2, X_6)$

Déroulement du calcul

$P(X_3, X_5, X_4 = x_4) = P(X_5 | X_3)\, \Psi_1(X_3, X_4 = x_4)$

Élimination des variables

Principe de la méthode - Exemple



Caractéristiques du calcul

- Suite des v.a. : $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$
- Objectif : calculer $P(X_3, X_5 | X_4 = x_4)$
- Requête : $\boldsymbol{Q} = (X_3, X_5)$
- Évidence : $\boldsymbol{E} = (X_4)$, $\boldsymbol{e} = (x_4)$
- Variables à éliminer : $\boldsymbol{W} = (X_1, X_2, X_6)$

Déroulement du calcul

$$P(X_3, X_5, X_4 = x_4) = P(X_5 | X_3)\, \Psi_1(X_3, X_4 = x_4)$$

$\Rightarrow$ Déduction de $P(X_3, X_5 | X_4 = x_4)$ en normalisant $P(X_3, X_5, X_4 = x_4)$ sur les v.a. X_3, X_5

Élimination des variables

Algorithme - Remarques

Ordre d'élimination

- L'ordre d'élimination des variables n'influe pas sur le résultat

⇒ Tous les ordres aboutissent au même (bon) résultat

- En revanche, la rapidité des calculs est fortement liée à l'ordre d'élimination (cf. complexité)

Élimination des variables

Algorithme - Complexité (1/2)

Complexité de la méthode d'élimination des variables

- On note $\sigma : \{1, \ldots, D\} \mapsto \{1, \ldots, D\}$ l'ordre des variables à éliminer
- Pire cas : $(n-1)$ variables à éliminer
- Opérations coûteuses : calcul des potentiels $\Phi_{\sigma(i)}$ et $\Psi_{\sigma(i)}$
- Complexité de l'algorithme :

$$\begin{aligned} \text{CA}\,(\text{AEV}) &\simeq \sum_i \text{CS}\left(\Phi_{\sigma(i)}\right) + \text{CS}\left(\Psi_{\sigma(i)}\right) \\ &\simeq n v_\star^{D_\star} \end{aligned}$$

  - $D_\star$: Nombre de dimensions du plus gros potentiel $\Phi_{\sigma(i)}$, noté $\Phi_\star$
  - $v_\star$: Nombre de valeurs dans la plus grande dimension de $\Phi_\star$

$\Rightarrow$ Risque d'explosion exponentielle

Élimination des variables

Algorithme - Complexité (2/2)

Complexité de l'inférence exacte dans un RB

- Il n'existe pas d'algorithme polynomial d'inférence exacte pour un RB quelconque

$\Rightarrow$ Le calcul de probabilité dans un RB est un problème NP-difficile

Attention à l'ordre d'élimination

- Trouver un "bon" ordre consiste à rechercher un ordre qui limite la taille des $\Phi_{\sigma(i)}$ à chaque élimination
- Malheureusement :
  - ☹ Trouver l'ordre optimal est un problème NP-complet
  - ☹ Même l'ordre optimal peut dans certains cas aboutir à une explosion combinatoire

$\Rightarrow$ En pratique, on utilise des heuristiques ou des connaissances sur le graphe pour déterminer l'ordre d'élimination

Élimination des variables

Algorithme - Complexité (2/2)

Complexité de l'inférence exacte dans un RB

- Il n'existe pas d'algorithme polynomial d'inférence exacte pour un RB quelconque

⇒ Le calcul de probabilité dans un RB est un problème NP-difficile

Attention à l'ordre d'élimination

- Trouver un "bon" ordre consiste à rechercher un ordre qui limite la taille des $\Phi_{\sigma(i)}$ à chaque élimination
- Malheureusement :
  - ☹ Trouver l'ordre optimal est un problème NP-complet
  - ☹ Même l'ordre optimal peut dans certains cas aboutir à une explosion combinatoire

⇒ En pratique, on utilise des heuristiques ou des connaissances sur le graphe pour déterminer l'ordre d'élimination

Élimination des variables

Stratégies pour déterminer l'ordre d'élimination

Stratégie 1 : Application d'une heuristique

- Utilisation d'un algorithme glouton muni d'une fonction de coût donnée

$\Rightarrow$ À chaque étape, on élimine la variable qui minimise le coût

- Exemples de fonctions de coût :
  - Nombre de voisins de la v.a. courante
  - Complexité de $\Phi_{\sigma(i)}$ engendré par l'élimination de la v.a. courante

Stratégie 2 : Exploiter sa connaissance du graphe

Exemples de cas où cela peut être profitable :

1. Graphes avec peu de variables mais avec des LPC de tailles très hétérogènes (i.e. piège les méthodes gloutonnes)
2. Graphes très grands mais très structurés (e.g. modèle bayésien naïf)

Élimination des variables

Stratégies pour déterminer l'ordre d'élimination

Stratégie 1 : Application d'une heuristique

- Utilisation d'un algorithme glouton muni d'une fonction de coût donnée

$\Rightarrow$ À chaque étape, on élimine la variable qui minimise le coût

- Exemples de fonctions de coût :
  - Nombre de voisins de la v.a. courante
  - Complexité de $\Phi_{\sigma(i)}$ engendré par l'élimination de la v.a. courante

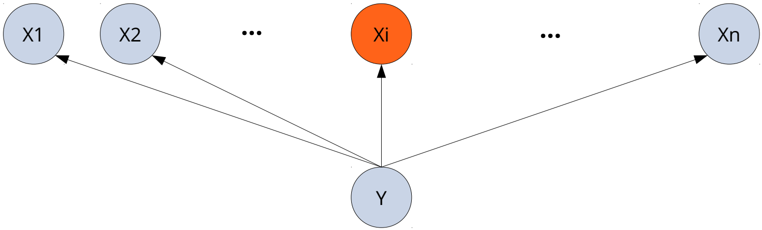
Stratégie 2 : Exploiter sa connaissance du graphe

Exemples de cas où cela peut être profitable :

1. Graphes avec peu de variables mais avec des LPC de tailles très hétérogènes (i.e. piège les méthodes gloutonnes)
2. Graphes très grands mais très structurés (e.g. modèle bayésien naïf)

Élimination des variables

Ordre d'élimination - Illustration

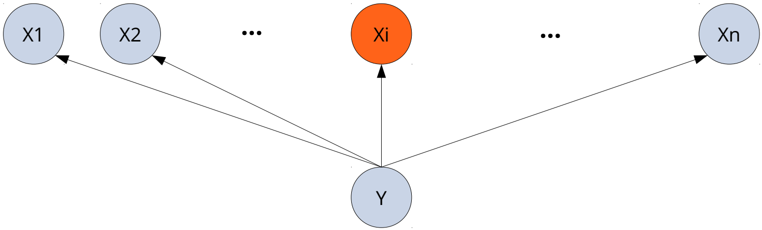


Quel(s) ordre(s) pour calculer $P(X_i)$?

- Élimination des $X_j, j \neq i$ et enfin élimination de Y ?
- ☺ Un seul calcul à réaliser : $P(X_i) = \sum_Y P(Y) P(X_i|Y)$
- Élimination de Y, puis élimination des $X_j, j \neq i$?
- ☹ Explosion combinatoire

Élimination des variables

Ordre d'élimination - Illustration

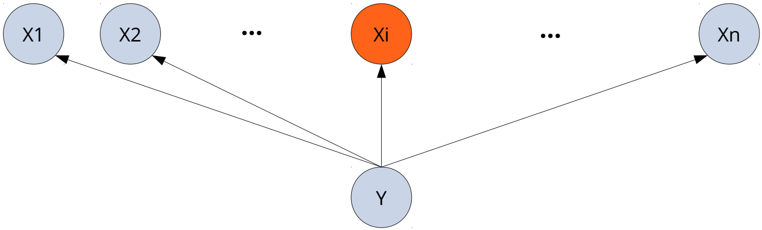


Quel(s) ordre(s) pour calculer $P(X_i)$?

- Élimination des $X_j, j \neq i$ et enfin élimination de Y ?
- ☺ Un seul calcul à réaliser : $P(X_i) = \sum_Y P(Y) P(X_i|Y)$
- Élimination de Y, puis élimination des $X_j, j \neq i$?
- ☹ Explosion combinatoire

Élimination des variables

Ordre d'élimination - Illustration

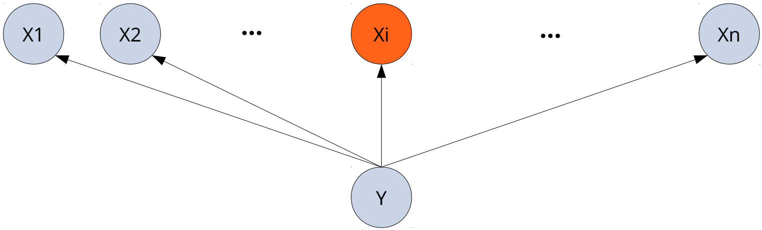


Quel(s) ordre(s) pour calculer $P(X_i)$?

- Élimination des $X_j, j \neq i$ et enfin élimination de Y ?
- ☺ Un seul calcul à réaliser : $P(X_i) = \sum_Y P(Y) P(X_i|Y)$
- Élimination de Y, puis élimination des $X_j, j \neq i$?
- ☹ Explosion combinatoire

Élimination des variables

Ordre d'élimination - Illustration



Quel(s) ordre(s) pour calculer $P(X_i)$?

- Élimination des $X_j, j \neq i$ et enfin élimination de Y ?
- ☺ Un seul calcul à réaliser : $P(X_i) = \sum_Y P(Y)\, P(X_i|Y)$
- Élimination de Y, puis élimination des $X_j, j \neq i$?
- ☹ Explosion combinatoire

Plan

Conclusion

Inférence probabiliste

- Objectif : Calculer des probabilités dans un RB
- Inférence exacte : Problème NP-Difficile

Méthode d'élimination des variables

- Méthode d'inférence exacte
- Méthode simple et intuitive ne reposant pas sur la théorie des graphes
- Principe :
  1. Réduction de la loi jointe en propageant l'évidence
  2. Élimination des variables hors requête et évidence par sommations successives
  3. Multiplication des potentiels restants à la fin de la procédure
  4. Normalisation du potentiel résultant afin d'obtenir la LPC recherchée
- Complexité de l'algorithme fortement dépendante de l'ordre d'élimination des variables

Plan

Références

- Cozman, Fabio G. (2000). "Generalizing Variable Elimination in Bayesian Networks". In : *the IBERAMIA/SBIA Workshops on Probabilistic Reasoning in Artificial Intelligence*. São Paulo : Editora Tec Art, p. 27-32.
- Dechter, R. (1999). "Bucket Elimination : A Unifying Framework for Reasoning". In : *Artificial Intelligence* 113.1-2, p. 41-85.
- Lauritzen, S. L. et D. J. Spiegelhalter (1988). "Local Computations with Probabilities on Graphical Structures and Their Application to Expert Systems". In : *Journal of the Royal Statistical Society* 50.2, p. 157-224.
- Lin, Yan et Marek J. Druzdzel (1999). "Relevance-based Incremental Belief Updating in Bayesian Networks". In : *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence* 13.02, p. 285-295. eprint : `http://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/S0218001499000161`.
- Murphy, K. P., Y. Weiss et M. I. Jordan (1999). "Loopy Belief Propagation for Approximate Inference : An Empirical Study". In : *Proceedings of the 15th on Uncertainty in Artificial Intelligence*, p. 467-475.
- Pearl, J. (sept. 1988). *Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems : Networks of Plausible Inference*. 1re éd. Morgan Kaufmann.

Plan

Élimination des variables

Algorithme

Entrée: LPC $\{P(X_i|\text{pa}(X_i))\}_{1 \leq i \leq n}$ de la loi jointe factorisée des v.a. $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$
Entrée: Une suite de v.a. de requête $\boldsymbol{Q} \subseteq \boldsymbol{X}$
Entrée: Une suite de v.a. $\boldsymbol{E} \subseteq \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Q} \cap \boldsymbol{E} = \varnothing$
Entrée: Une permutation σ des v.a. $(X_1, \ldots, X_n)$ représentant l'ordre d'élimination des v.a
Sortie: La loi $P(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{E})$

```
// Initialisation de la liste des potentiels à considérer
𝒫 ← {P(X_1|pa(X_1)), ..., P(X_n|pa(X_n))}
// Parcours de toutes les variables
Pour chaque i = 1, ..., n Faire
    // Vérification si la variable courante (dans l'ordre d'élimination) est à éliminer
    Si X_σ(i) ∈ W = X \ (Q, E) Alors
        // Ensemble des potentiels cibles, i.e. dont le domaine contient la v.a. à éliminée
        ℬ_σ(i) ← {ψ ∈ 𝒫 | X_σ(i) ∈ Dom(ψ)}
        // Suppression des potentiels cibles de la liste de potentiels courante
        𝒫 ← 𝒫 \ ℬ_σ(d)
        Φ_σ(i) ← ∏_{ψ∈ℬ_σ(i)} ψ // Produit des potentiels cibles
        Ψ_σ(i) ← ∑_{X_σ(i)} Φ_σ(i) // Élimination de la variable
        // Mise à jour de la liste de potentiels qui ne contiennent plus la variable courante
        𝒫 ← 𝒫 ∪ {Ψ_σ(i)}
    Fin Si
Fin Pour
P(Q, E) ← ∏_{ψ∈𝒫} ψ
Déduction de P(Q|E) en normalisant P(Q|E) sur la suite de v.a. Q
```

Élimination des variables

Algorithme

Entrée: LPC $\{P\left(X_i|\mathrm{pa}(X_i)\right)\}_{1\leq i\leq n}$ de la loi jointe factorisée des v.a. $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$
Entrée: Une suite de v.a. de requête $\boldsymbol{Q} \subseteq \boldsymbol{X}$
Entrée: Une suite de v.a. $\boldsymbol{E} \subseteq \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Q} \cap \boldsymbol{E} = \varnothing$
Entrée: Une permutation σ des v.a. $(X_1, \ldots, X_n)$ représentant l'ordre d'élimination des v.a
Sortie: La loi $P(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{E})$

```
// Initialisation de la liste des potentiels à considérer
P ← {P(X_1|pa(X_1)), ..., P(X_n|pa(X_n))}
// Parcours de toutes les variables
Pour chaque i = 1, ..., n Faire
    // Vérification si la variable courante (dans l'ordre d'élimination) est à éliminer
    Si X_σ(i) ∈ W = X \ (Q, E) Alors
        // Ensemble des potentiels cibles, i.e. dont le domaine contient la v.a. à éliminée
        B_σ(i) ← {ψ ∈ P | X_σ(i) ∈ Dom(ψ)}
        // Suppression des potentiels cibles de la liste de potentiels courante
        P ← P \ B_σ(d)
        Φ_σ(i) ← ∏_{ψ ∈ B_σ(i)} ψ // Produit des potentiels cibles
        Ψ_σ(i) ← ∑_{X_σ(i)} Φ_σ(i) // Élimination de la variable
        // Mise à jour de la liste de potentiels qui ne contiennent plus la variable courante
        P ← P ∪ {Ψ_σ(i)}
    Fin Si
Fin Pour
P(Q, E) ← ∏_{ψ ∈ P} ψ
Déduction de P(Q|E) en normalisant P(Q|E) sur la suite de v.a. Q
```

Élimination des variables

Algorithme

Entrée: LPC $\{P\left(X_i|\mathrm{pa}(X_i)\right)\}_{1\leq i\leq n}$ de la loi jointe factorisée des v.a. $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$
Entrée: Une suite de v.a. de requête $\boldsymbol{Q} \subseteq \boldsymbol{X}$
Entrée: Une suite de v.a. $\boldsymbol{E} \subseteq \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Q} \cap \boldsymbol{E} = \varnothing$
Entrée: Une permutation σ des v.a. $(X_1, \ldots, X_n)$ représentant l'ordre d'élimination des v.a
Sortie: La loi $P(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{E})$

```
// Initialisation de la liste des potentiels à considérer
𝒫 ← {P(X_1|pa(X_1)), ..., P(X_n|pa(X_n))}
// Parcours de toutes les variables
Pour chaque i = 1, ..., n Faire
    // Vérification si la variable courante (dans l'ordre d'élimination) est à éliminer
    Si X_σ(i) ∈ W = X \ (Q, E) Alors
        // Ensemble des potentiels cibles, i.e. dont le domaine contient la v.a. à éliminée
        ℬ_σ(i) ← {ψ ∈ 𝒫 | X_σ(i) ∈ Dom(ψ)}
        // Suppression des potentiels cibles de la liste de potentiels courante
        𝒫 ← 𝒫 \ ℬ_σ(d)
        Φ_σ(i) ← ∏_{ψ∈ℬ_σ(i)} ψ // Produit des potentiels cibles
        Ψ_σ(i) ← ∑_{X_σ(i)} Φ_σ(i) // Élimination de la variable
        // Mise à jour de la liste de potentiels qui ne contiennent plus la variable courante
        𝒫 ← 𝒫 ∪ {Ψ_σ(i)}
    Fin Si
Fin Pour
P(Q, E) ← ∏_{ψ∈𝒫} ψ
Déduction de P(Q|E) en normalisant P(Q|E) sur la suite de v.a. Q
```

Élimination des variables

Algorithme

Entrée: LPC $\{P(X_i|\text{pa}(X_i))\}_{1\leq i\leq n}$ de la loi jointe factorisée des v.a. $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)$
Entrée: Une suite de v.a. de requête $\boldsymbol{Q} \subseteq \boldsymbol{X}$
Entrée: Une suite de v.a. $\boldsymbol{E} \subseteq \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Q} \cap \boldsymbol{E} = \varnothing$
Entrée: Une permutation σ des v.a. $(X_1, \dots, X_n)$ représentant l'ordre d'élimination des v.a
Sortie: La loi $P(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{E})$

```
// Initialisation de la liste des potentiels à considérer
𝒫 ← {P(X_1|pa(X_1)), ..., P(X_n|pa(X_n))}
// Parcours de toutes les variables
Pour chaque i = 1, ..., n Faire
    // Vérification si la variable courante (dans l'ordre d'élimination) est à éliminer
    Si X_σ(i) ∈ W = X \ (Q, E) Alors
        // Ensemble des potentiels cibles, i.e. dont le domaine contient la v.a. à éliminée
        ℬ_σ(i) ← {ψ ∈ 𝒫 | X_σ(i) ∈ Dom(ψ)}
        // Suppression des potentiels cibles de la liste de potentiels courante
        𝒫 ← 𝒫 \ ℬ_σ(d)
        Φ_σ(i) ← ∏_{ψ∈ℬ_σ(i)} ψ // Produit des potentiels cibles
        Ψ_σ(i) ← ∑_{X_σ(i)} Φ_σ(i) // Élimination de la variable
        // Mise à jour de la liste de potentiels qui ne contiennent plus la variable courante
        𝒫 ← 𝒫 ∪ {Ψ_σ(i)}
    Fin Si
Fin Pour
P(Q, E) ← ∏_{ψ∈𝒫} ψ
Déduction de P(Q|E) en normalisant P(Q|E) sur la suite de v.a. Q
```

Élimination des variables

Algorithme

Entrée: LPC $\{P(X_i|\mathrm{pa}(X_i))\}_{1\leq i\leq n}$ de la loi jointe factorisée des v.a. $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$
Entrée: Une suite de v.a. de requête $\boldsymbol{Q} \subseteq \boldsymbol{X}$
Entrée: Une suite de v.a. $\boldsymbol{E} \subseteq \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Q} \cap \boldsymbol{E} = \varnothing$
Entrée: Une permutation σ des v.a. $(X_1, \ldots, X_n)$ représentant l'ordre d'élimination des v.a
Sortie: La loi $P(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{E})$

// Initialisation de la liste des potentiels à considérer
$\mathcal{P} \leftarrow \{P(X_1|\mathrm{pa}(X_1)), \ldots, P(X_n|\mathrm{pa}(X_n))\}$
// Parcours de toutes les variables
Pour chaque $i = 1, \ldots, n$ **Faire**
  // Vérification si la variable courante (dans l'ordre d'élimination) est à éliminer
  Si $X_{\sigma(i)} \in \boldsymbol{W} = \boldsymbol{X} \setminus (\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{E})$ **Alors**
    // Ensemble des potentiels cibles, i.e. dont le domaine contient la v.a. à éliminée
    $\mathcal{B}_{\sigma(i)} \leftarrow \{\psi \in \mathcal{P} | X_{\sigma(i)} \in \mathrm{Dom}(\psi)\}$
    // Suppression des potentiels cibles de la liste de potentiels courante
    $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \setminus \mathcal{B}_{\sigma(d)}$
    $\Phi_{\sigma(i)} \leftarrow \prod_{\psi \in \mathcal{B}_{\sigma(i)}} \psi$ // Produit des potentiels cibles
    $\Psi_{\sigma(i)} \leftarrow \sum_{X_{\sigma(i)}} \Phi_{\sigma(i)}$ // Élimination de la variable
    // Mise à jour de la liste de potentiels qui ne contiennent plus la variable courante
    $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \cup \{\Psi_{\sigma(i)}\}$
  Fin Si
Fin Pour
$P(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{E}) \leftarrow \prod_{\psi \in \mathcal{P}} \psi$
Déduction de $P(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{E})$ en normalisant $P(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{E})$ sur la suite de v.a. $\boldsymbol{Q}$

Élimination des variables

Algorithme

Entrée: LPC $\{P(X_i|\mathrm{pa}(X_i))\}_{1\leq i\leq n}$ de la loi jointe factorisée des v.a. $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$
Entrée: Une suite de v.a. de requête $\boldsymbol{Q} \subseteq \boldsymbol{X}$
Entrée: Une suite de v.a. $\boldsymbol{E} \subseteq \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Q} \cap \boldsymbol{E} = \varnothing$
Entrée: Une permutation σ des v.a. $(X_1, \ldots, X_n)$ représentant l'ordre d'élimination des v.a
Sortie: La loi $P(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{E})$

// Initialisation de la liste des potentiels à considérer
$\mathcal{P} \leftarrow \{P(X_1|\mathrm{pa}(X_1)), \ldots, P(X_n|\mathrm{pa}(X_n))\}$
// Parcours de toutes les variables
Pour chaque $i = 1, \ldots, n$ **Faire**
    // Vérification si la variable courante (dans l'ordre d'élimination) est à éliminer
    Si $X_{\sigma(i)} \in \boldsymbol{W} = \boldsymbol{X} \setminus (\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{E})$ **Alors**
        // Ensemble des potentiels cibles, i.e. dont le domaine contient la v.a. à éliminée
        $\mathcal{B}_{\sigma(i)} \leftarrow \{\psi \in \mathcal{P} | X_{\sigma(i)} \in \mathrm{Dom}(\psi)\}$
        // Suppression des potentiels cibles de la liste de potentiels courante
        $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \setminus \mathcal{B}_{\sigma(d)}$
        $\Phi_{\sigma(i)} \leftarrow \prod_{\psi\in\mathcal{B}_{\sigma(i)}} \psi$ // Produit des potentiels cibles
        $\Psi_{\sigma(i)} \leftarrow \sum_{X_{\sigma(i)}} \Phi_{\sigma(i)}$ // Élimination de la variable
        // Mise à jour de la liste de potentiels qui ne contiennent plus la variable courante
        $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \cup \{\Psi_{\sigma(i)}\}$
    Fin Si
Fin Pour
$P(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{E}) \leftarrow \prod_{\psi\in\mathcal{P}} \psi$
Déduction de $P(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{E})$ en normalisant $P(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{E})$ sur la suite de v.a. $\boldsymbol{Q}$

Élimination des variables

Algorithme

Entrée: LPC $\{P(X_i|\text{pa}(X_i))\}_{1 \leq i \leq n}$ de la loi jointe factorisée des v.a. $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$
Entrée: Une suite de v.a. de requête $\boldsymbol{Q} \subseteq \boldsymbol{X}$
Entrée: Une suite de v.a. $\boldsymbol{E} \subseteq \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Q} \cap \boldsymbol{E} = \varnothing$
Entrée: Une permutation σ des v.a. $(X_1, \ldots, X_n)$ représentant l'ordre d'élimination des v.a
Sortie: La loi $P(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{E})$

// Initialisation de la liste des potentiels à considérer
$\mathcal{P} \leftarrow \{P(X_1|\text{pa}(X_1)), \ldots, P(X_n|\text{pa}(X_n))\}$
// Parcours de toutes les variables
Pour chaque $i = 1, \ldots, n$ **Faire**
    // Vérification si la variable courante (dans l'ordre d'élimination) est à éliminer
    Si $X_{\sigma(i)} \in \boldsymbol{W} = \boldsymbol{X} \setminus (\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{E})$ **Alors**
        // Ensemble des potentiels cibles, i.e. dont le domaine contient la v.a. à éliminée
        $\mathcal{B}_{\sigma(i)} \leftarrow \{\psi \in \mathcal{P} | X_{\sigma(i)} \in \text{Dom}(\psi)\}$
        // Suppression des potentiels cibles de la liste de potentiels courante
        $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \setminus \mathcal{B}_{\sigma(d)}$
        $\Phi_{\sigma(i)} \leftarrow \prod_{\psi \in \mathcal{B}_{\sigma(i)}} \psi$ // Produit des potentiels cibles
        $\Psi_{\sigma(i)} \leftarrow \sum_{X_{\sigma(i)}} \Phi_{\sigma(i)}$ // Élimination de la variable
        // Mise à jour de la liste de potentiels qui ne contiennent plus la variable courante
        $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \cup \{\Psi_{\sigma(i)}\}$
    Fin Si
Fin Pour
$P(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{E}) \leftarrow \prod_{\psi \in \mathcal{P}} \psi$
Déduction de $P(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{E})$ en normalisant $P(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{E})$ sur la suite de v.a. $\boldsymbol{Q}$

Élimination des variables

Algorithme

Entrée: LPC $\{P(X_i|\text{pa}(X_i))\}_{1\leq i\leq n}$ de la loi jointe factorisée des v.a. $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$
Entrée: Une suite de v.a. de requête $\boldsymbol{Q} \subseteq \boldsymbol{X}$
Entrée: Une suite de v.a. $\boldsymbol{E} \subseteq \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Q} \cap \boldsymbol{E} = \varnothing$
Entrée: Une permutation σ des v.a. $(X_1, \ldots, X_n)$ représentant l'ordre d'élimination des v.a
Sortie: La loi $P(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{E})$

// Initialisation de la liste des potentiels à considérer
$\mathcal{P} \leftarrow \{P(X_1|\text{pa}(X_1)), \ldots, P(X_n|\text{pa}(X_n))\}$
// Parcours de toutes les variables
Pour chaque $i = 1, \ldots, n$ **Faire**
  // Vérification si la variable courante (dans l'ordre d'élimination) est à éliminer
  Si $X_{\sigma(i)} \in \boldsymbol{W} = \boldsymbol{X} \setminus (\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{E})$ **Alors**
    // Ensemble des potentiels cibles, i.e. dont le domaine contient la v.a. à éliminée
    $\mathcal{B}_{\sigma(i)} \leftarrow \{\psi \in \mathcal{P} | X_{\sigma(i)} \in \text{Dom}(\psi)\}$
    // Suppression des potentiels cibles de la liste de potentiels courante
    $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \setminus \mathcal{B}_{\sigma(d)}$
    $\Phi_{\sigma(i)} \leftarrow \prod_{\psi \in \mathcal{B}_{\sigma(i)}} \psi$ // Produit des potentiels cibles
    $\Psi_{\sigma(i)} \leftarrow \sum_{X_{\sigma(i)}} \Phi_{\sigma(i)}$ // Élimination de la variable
    // Mise à jour de la liste de potentiels qui ne contiennent plus la variable courante
    $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \cup \{\Psi_{\sigma(i)}\}$
  Fin Si
Fin Pour
$P(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{E}) \leftarrow \prod_{\psi \in \mathcal{P}} \psi$
Déduction de $P(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{E})$ en normalisant $P(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{E})$ sur la suite de v.a. $\boldsymbol{Q}$

Élimination des variables

Algorithme

Entrée: LPC $\{P(X_i|\text{pa}(X_i))\}_{1\leq i\leq n}$ de la loi jointe factorisée des v.a. $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$

Entrée: Une suite de v.a. de requête $\boldsymbol{Q} \subseteq \boldsymbol{X}$

Entrée: Une suite de v.a. $\boldsymbol{E} \subseteq \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Q} \cap \boldsymbol{E} = \varnothing$

Entrée: Une permutation σ des v.a. $(X_1, \ldots, X_n)$ représentant l'ordre d'élimination des v.a

Sortie: La loi $P(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{E})$

// Initialisation de la liste des potentiels à considérer

$\mathcal{P} \leftarrow \{P(X_1|\text{pa}(X_1)), \ldots, P(X_n|\text{pa}(X_n))\}$

// Parcours de toutes les variables

Pour chaque $i = 1, \ldots, n$ **Faire**

  // Vérification si la variable courante (dans l'ordre d'élimination) est à éliminer

  Si $X_{\sigma(i)} \in \boldsymbol{W} = \boldsymbol{X} \setminus (\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{E})$ **Alors**

    // Ensemble des potentiels cibles, i.e. dont le domaine contient la v.a. à éliminée

    $\mathcal{B}_{\sigma(i)} \leftarrow \{\psi \in \mathcal{P} | X_{\sigma(i)} \in \text{Dom}(\psi)\}$

    // Suppression des potentiels cibles de la liste de potentiels courante

    $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \setminus \mathcal{B}_{\sigma(d)}$

    $\Phi_{\sigma(i)} \leftarrow \prod_{\psi \in \mathcal{B}_{\sigma(i)}} \psi$ // Produit des potentiels cibles

    $\Psi_{\sigma(i)} \leftarrow \sum_{X_{\sigma(i)}} \Phi_{\sigma(i)}$ // Élimination de la variable

    // Mise à jour de la liste de potentiels qui ne contiennent plus la variable courante

    $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \cup \{\Psi_{\sigma(i)}\}$

  Fin Si

Fin Pour

$P(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{E}) \leftarrow \prod_{\psi \in \mathcal{P}} \psi$

Déduction de $P(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{E})$ en normalisant $P(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{E})$ sur la suite de v.a. $\boldsymbol{Q}$

Élimination des variables

Algorithme

Entrée: LPC $\{P(X_i|\text{pa}(X_i))\}_{1 \leq i \leq n}$ de la loi jointe factorisée des v.a. $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$

Entrée: Une suite de v.a. de requête $\boldsymbol{Q} \subseteq \boldsymbol{X}$

Entrée: Une suite de v.a. $\boldsymbol{E} \subseteq \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Q} \cap \boldsymbol{E} = \varnothing$

Entrée: Une permutation σ des v.a. $(X_1, \ldots, X_n)$ représentant l'ordre d'élimination des v.a

Sortie: La loi $P(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{E})$

// Initialisation de la liste des potentiels à considérer

$\mathcal{P} \leftarrow \{P(X_1|\text{pa}(X_1)), \ldots, P(X_n|\text{pa}(X_n))\}$

// Parcours de toutes les variables

Pour chaque $i = 1, \ldots, n$ **Faire**

  // Vérification si la variable courante (dans l'ordre d'élimination) est à éliminer

  Si $X_{\sigma(i)} \in \boldsymbol{W} = \boldsymbol{X} \setminus (\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{E})$ **Alors**

    // Ensemble des potentiels cibles, i.e. dont le domaine contient la v.a. à éliminée

    $\mathcal{B}_{\sigma(i)} \leftarrow \{\psi \in \mathcal{P} | X_{\sigma(i)} \in \text{Dom}(\psi)\}$

    // Suppression des potentiels cibles de la liste de potentiels courante

    $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \setminus \mathcal{B}_{\sigma(d)}$

    $\Phi_{\sigma(i)} \leftarrow \prod_{\psi \in \mathcal{B}_{\sigma(i)}} \psi$ // Produit des potentiels cibles

    $\Psi_{\sigma(i)} \leftarrow \sum_{X_{\sigma(i)}} \Phi_{\sigma(i)}$ // Élimination de la variable

    // Mise à jour de la liste de potentiels qui ne contiennent plus la variable courante

    $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \cup \{\Psi_{\sigma(i)}\}$

  Fin Si

Fin Pour

$P(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{E}) \leftarrow \prod_{\psi \in \mathcal{P}} \psi$

Déduction de $P(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{E})$ en normalisant $P(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{E})$ sur la suite de v.a. $\boldsymbol{Q}$

Élimination des variables

Algorithme

Entrée: LPC $\{P(X_i|\text{pa}(X_i))\}_{1\leq i\leq n}$ de la loi jointe factorisée des v.a. $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$
Entrée: Une suite de v.a. de requête $\boldsymbol{Q} \subseteq \boldsymbol{X}$
Entrée: Une suite de v.a. $\boldsymbol{E} \subseteq \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Q} \cap \boldsymbol{E} = \varnothing$
Entrée: Une permutation σ des v.a. $(X_1, \ldots, X_n)$ représentant l'ordre d'élimination des v.a
Sortie: La loi $P(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{E})$

// Initialisation de la liste des potentiels à considérer
$\mathcal{P} \leftarrow \{P(X_1|\text{pa}(X_1)), \ldots, P(X_n|\text{pa}(X_n))\}$
// Parcours de toutes les variables
Pour chaque $i = 1, \ldots, n$ **Faire**
    // Vérification si la variable courante (dans l'ordre d'élimination) est à éliminer
    Si $X_{\sigma(i)} \in \boldsymbol{W} = \boldsymbol{X} \setminus (\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{E})$ **Alors**
        // Ensemble des potentiels cibles, i.e. dont le domaine contient la v.a. à éliminée
        $\mathcal{B}_{\sigma(i)} \leftarrow \{\psi \in \mathcal{P} | X_{\sigma(i)} \in \text{Dom}(\psi)\}$
        // Suppression des potentiels cibles de la liste de potentiels courante
        $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \setminus \mathcal{B}_{\sigma(d)}$
        $\Phi_{\sigma(i)} \leftarrow \prod_{\psi \in \mathcal{B}_{\sigma(i)}} \psi$ // Produit des potentiels cibles
        $\Psi_{\sigma(i)} \leftarrow \sum_{X_{\sigma(i)}} \Phi_{\sigma(i)}$ // Élimination de la variable
        // Mise à jour de la liste de potentiels qui ne contiennent plus la variable courante
        $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \cup \{\Psi_{\sigma(i)}\}$
    Fin Si
Fin Pour
$P(\boldsymbol{Q}, \boldsymbol{E}) \leftarrow \prod_{\psi \in \mathcal{P}} \psi$
Déduction de $P(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{E})$ en normalisant $P(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{E})$ sur la suite de v.a. $\boldsymbol{Q}$

Élimination des variables

Algorithme

Entrée: LPC $\{P(X_i|\mathrm{pa}(X_i))\}_{1\leq i\leq n}$ de la loi jointe factorisée des v.a. $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$
Entrée: Une suite de v.a. de requête $\boldsymbol{Q} \subseteq \boldsymbol{X}$
Entrée: Une suite de v.a. $\boldsymbol{E} \subseteq \boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Q} \cap \boldsymbol{E} = \varnothing$
Entrée: Une permutation σ des v.a. $(X_1, \ldots, X_n)$ représentant l'ordre d'élimination des v.a
Sortie: La loi $P(\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{E})$

```
// Initialisation de la liste des potentiels à considérer
P ← {P(X_1|pa(X_1)), ..., P(X_n|pa(X_n))}
// Parcours de toutes les variables
Pour chaque i = 1, ..., n Faire
    // Vérification si la variable courante (dans l'ordre d'élimination) est à éliminer
    Si X_σ(i) ∈ W = X \ (Q, E) Alors
        // Ensemble des potentiels cibles, i.e. dont le domaine contient la v.a. à éliminée
        B_σ(i) ← {ψ ∈ P | X_σ(i) ∈ Dom(ψ)}
        // Suppression des potentiels cibles de la liste de potentiels courante
        P ← P \ B_σ(d)
        Φ_σ(i) ← ∏_{ψ ∈ B_σ(i)} ψ // Produit des potentiels cibles
        Ψ_σ(i) ← ∑_{X_σ(i)} Φ_σ(i) // Élimination de la variable
        // Mise à jour de la liste de potentiels qui ne contiennent plus la variable courante
        P ← P ∪ {Ψ_σ(i)}
    Fin Si
Fin Pour
P(Q, E) ← ∏_{ψ ∈ P} ψ
Déduction de P(Q|E) en normalisant P(Q|E) sur la suite de v.a. Q
```