

Modélisation Stochastique et Approche Bayésienne

Inférence probabiliste

Roland Donat

Université de Bretagne Sud

ENSIBS - Spécialité informatique

<http://www.edgemind.net/teaching/ensibs/mod-stoch-rb/>

Plan de la présentation

- 1 Introduction
- 2 Notion de potentiel
- 3 Méthode d'élimination des variables
- 4 Conclusion
- 5 Références
- 6 Annexes

Objectifs pédagogiques

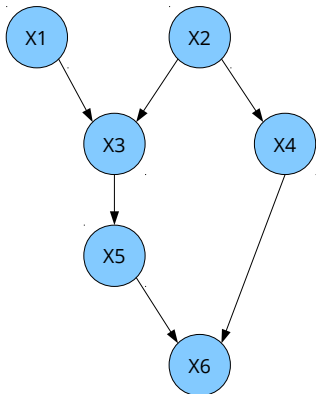
- Comprendre la notion d'inférence probabiliste dans un réseau bayésien
- Maîtriser les calculs effectués par un algorithme d'inférence exacte
- Prendre conscience des avantages et des limites de l'inférence dans les réseaux bayésiens

Plan

- 1 Introduction
 - Objectif et vocabulaire
 - Algorithmes d'inférence
- 2 Notion de potentiel
- 3 Méthode d'élimination des variables
- 4 Conclusion
- 5 Références
- 6 Annexes

Introduction à l'inférence

Exemples

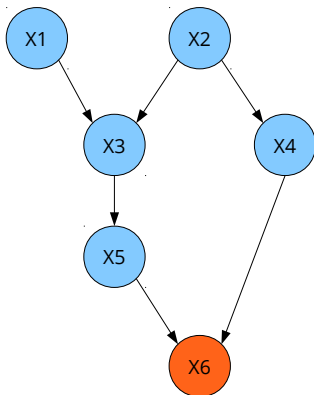


Exemples de requêtes

- $P(X_6)$
- $P(X_4)$
- $P(X_4 | X_5 = x_5)$
- $P(X_2 | X_1 = x_1, X_6 = x_6)$
- $P(X_3, X_5 | X_4 = x_4, X_6 = x_6)$

Introduction à l'inférence

Exemples

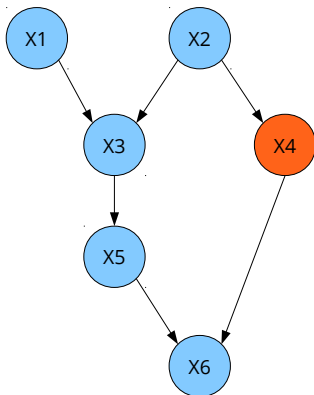


Exemples de requêtes

- $P(X_6)$
- $P(X_4)$
- $P(X_4 | X_5 = x_5)$
- $P(X_2 | X_1 = x_1, X_6 = x_6)$
- $P(X_3, X_5 | X_4 = x_4, X_6 = x_6)$

Introduction à l'inférence

Exemples

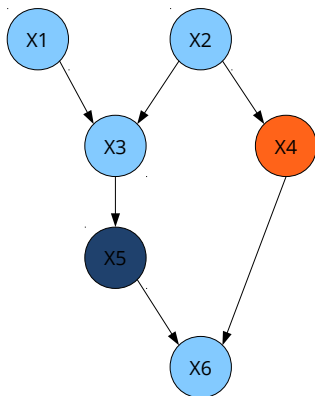


Exemples de requêtes

- $P(X_6)$
- $P(X_4)$
- $P(X_4 | X_5 = x_5)$
- $P(X_2 | X_1 = x_1, X_6 = x_6)$
- $P(X_3, X_5 | X_4 = x_4, X_6 = x_6)$

Introduction à l'inférence

Exemples

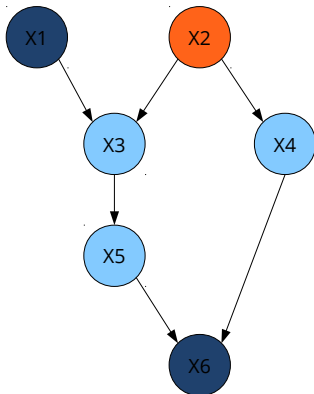


Exemples de requêtes

- $P(X_6)$
- $P(X_4)$
- $P(X_4 | X_5 = x_5)$
- $P(X_2 | X_1 = x_1, X_6 = x_6)$
- $P(X_3, X_5 | X_4 = x_4, X_6 = x_6)$

Introduction à l'inférence

Exemples

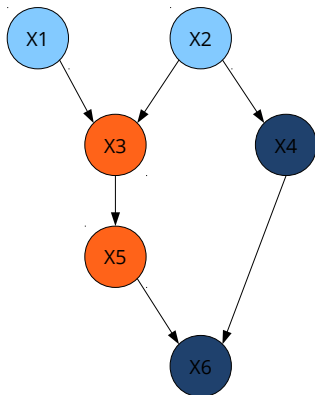


Exemples de requêtes

- $P(X_6)$
- $P(X_4)$
- $P(X_4 | X_5 = x_5)$
- $P(X_2 | X_1 = x_1, X_6 = x_6)$
- $P(X_3, X_5 | X_4 = x_4, X_6 = x_6)$

Introduction à l'inférence

Exemples



Exemples de requêtes

- $P(X_6)$
- $P(X_4)$
- $P(X_4 | X_5 = x_5)$
- $P(X_2 | X_1 = x_1, X_6 = x_6)$
- $P(X_3, X_5 | X_4 = x_4, X_6 = x_6)$

Introduction à l'inférence

Définition

Problématique : comment calculer des probabilités dans un RB?

- Soit un RB représentant la loi jointe d'une suite de v.a. $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ à valeurs dans $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$ respectivement
- ⇒ Objectif : calculer les lois de la forme

$$P(\mathbf{Q} | \mathbf{E} = \mathbf{e})$$

- $\mathbf{Q} = (Q_1, \dots, Q_l) \subseteq \mathbf{X}$ est une suite de v.a. appelée "requête" de l'inférence
- $\mathbf{E} = (E_1, \dots, E_m) \subseteq \mathbf{X}$ est une suite de v.a., observées aux valeurs $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_m)$, appelée "évidence" de l'inférence
- Contrainte : $\mathbf{Q} \cap \mathbf{E} = \emptyset$

Introduction à l'inférence

Algorithmes d'inférence

Inférence exacte

- Algorithme *belief propagation* (Pearl 1988) adapté aux structures d'arbres (ou polyarbres)
- Méthodes reposant sur la construction de l'arbre de jonction (Lauritzen et Spiegelhalter 1988)
- **Méthodes d'élimination des variables** (Dechter 1999; Cozman 2000)

Inférence approchée déterministe

- Algorithme *loopy belief propagation* (Murphy, Weiss et Jordan 1999) : Utilisation de la méthode *belief propagation* sur un graphe général
- Méthode de raisonnement par pertinence (Lin et Druzdzel 1999)

Inférence approchée stochastique

- Méthode d'échantillonnage type Monte-Carlo

Plan

- 1 Introduction
- 2 Notion de potentiel
 - Définition
 - Opérations algébriques
 - Complexité
 - LPC comme potentiel
- 3 Méthode d'élimination des variables
- 4 Conclusion
- 5 Références
- 6 Annexes

Notion de potentiel

Exemple

X	Y	Z	$\Phi(x,y,z)$
$x1$	$y1$	$z1$	-10
$x2$	$y1$	$z1$	2,25
$x1$	$y2$	$z1$	0,01
$x2$	$y2$	$z1$	-90
$x1$	$y3$	$z1$	0
$x2$	$y3$	$z1$	0,7
$x1$	$y1$	$z2$	-4
$x2$	$y1$	$z2$	1
$x1$	$y2$	$z2$	-2
$x2$	$y2$	$z2$	-1,5
$x1$	$y3$	$z2$	-2
$x2$	$y3$	$z2$	0,5

Caractéristiques de Φ

- $\text{Dom}(\Phi) = \{\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}\}$ avec :
 - $\mathcal{X} = \{x_1, x_2\}$
 - $\mathcal{Y} = \{y_1, y_2, y_3\}$
 - $\mathcal{Z} = \{z_1, z_2\}$
 - Configurations de $\Phi : \text{Dom}(\Phi)^* = \{x_1, x_2\} \times \{y_1, y_2, y_3\} \times \{z_1, z_2\}$
- $\Rightarrow \Phi$ possède $|\text{Dom}(\Phi)^*| = |\mathcal{X}| \times |\mathcal{Y}| \times |\mathcal{Z}| = 2 \times 3 \times 2 = 12$ configurations
- Pour toute configuration $(x, y, z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$, Φ prend la valeur $\Phi(x, y, z)$

Notion de potentiel

Exemple

X	Y	Z	$\Phi(x,y,z)$
x1	y1	z1	-10
x2	y1	z1	2,25
x1	y2	z1	0,01
x2	y2	z1	-90
x1	y3	z1	0
x2	y3	z1	0,7
x1	y1	z2	-4
x2	y1	z2	1
x1	y2	z2	-2
x2	y2	z2	-1,5
x1	y3	z2	-2
x2	y3	z2	0,5

Caractéristiques de Φ

- $\text{Dom}(\Phi) = \{\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}\}$ avec :

- $\mathcal{X} = \{x_1, x_2\}$
- $\mathcal{Y} = \{y_1, y_2, y_3\}$
- $\mathcal{Z} = \{z_1, z_2\}$

- Configurations de $\Phi : \text{Dom}(\Phi)^* = \{x_1, x_2\} \times \{y_1, y_2, y_3\} \times \{z_1, z_2\}$

$\Rightarrow \Phi$ possède $|\text{Dom}(\Phi)^*| = |\mathcal{X}| \times |\mathcal{Y}| \times |\mathcal{Z}| = 2 \times 3 \times 2 = 12$ configurations

- Pour toute configuration $(x, y, z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$, Φ prend la valeur $\Phi(x, y, z)$

Notion de potentiel

Exemple

x	y	z	$\Phi(x,y,z)$
x_1	y_1	z_1	-10
x_2	y_1	z_1	2,25
x_1	y_2	z_1	0,01
x_2	y_2	z_1	-90
x_1	y_3	z_1	0
x_2	y_3	z_1	0,7
x_1	y_1	z_2	-4
x_2	y_1	z_2	1
x_1	y_2	z_2	-2
x_2	y_2	z_2	-1,5
x_1	y_3	z_2	-2
x_2	y_3	z_2	0,5

Caractéristiques de Φ

- $\text{Dom}(\Phi) = \{\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}\}$ avec :

- $\mathcal{X} = \{x_1, x_2\}$
- $\mathcal{Y} = \{y_1, y_2, y_3\}$
- $\mathcal{Z} = \{z_1, z_2\}$

- Configurations de $\Phi : \text{Dom}(\Phi)^* = \{x_1, x_2\} \times \{y_1, y_2, y_3\} \times \{z_1, z_2\}$

$\Rightarrow \Phi$ possède $|\text{Dom}(\Phi)^*| = |\mathcal{X}| \times |\mathcal{Y}| \times |\mathcal{Z}| = 2 \times 3 \times 2 = 12$ configurations

- Pour toute configuration $(x, y, z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$, Φ prend la valeur $\Phi(x, y, z)$

Notion de potentiel

Exemple

x	y	z	$\Phi(x,y,z)$
$x1$	$y1$	$z1$	-10
$x2$	$y1$	$z1$	2,25
$x1$	$y2$	$z1$	0,01
$x2$	$y2$	$z1$	-90
$x1$	$y3$	$z1$	0
$x2$	$y3$	$z1$	0,7
$x1$	$y1$	$z2$	-4
$x2$	$y1$	$z2$	1
$x1$	$y2$	$z2$	-2
$x2$	$y2$	$z2$	-1,5
$x1$	$y3$	$z2$	-2
$x2$	$y3$	$z2$	0,5

Caractéristiques de Φ

- $\text{Dom}(\Phi) = \{\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}\}$ avec :

- $\mathcal{X} = \{x_1, x_2\}$
- $\mathcal{Y} = \{y_1, y_2, y_3\}$
- $\mathcal{Z} = \{z_1, z_2\}$

- Configurations de $\Phi : \text{Dom}(\Phi)^* = \{x_1, x_2\} \times \{y_1, y_2, y_3\} \times \{z_1, z_2\}$

$\Rightarrow \Phi$ possède $|\text{Dom}(\Phi)^*| = |\mathcal{X}| \times |\mathcal{Y}| \times |\mathcal{Z}| = 2 \times 3 \times 2 = 12$ configurations

- Pour toute configuration $(x, y, z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$, Φ prend la valeur $\Phi(x, y, z)$

Notion de potentiel

Exemple

X	Y	Z	$\Phi(x,y,z)$
x_1	y_1	z_1	-10
x_2	y_1	z_1	2,25
x_1	y_2	z_1	0,01
x_2	y_2	z_1	-90
x_1	y_3	z_1	0
x_2	y_3	z_1	0,7
x_1	y_1	z_2	-4
x_2	y_1	z_2	1
x_1	y_2	z_2	-2
x_2	y_2	z_2	-1,5
x_1	y_3	z_2	-2
x_2	y_3	z_2	0,5

Caractéristiques de Φ

- $\text{Dom}(\Phi) = \{\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}\}$ avec :

- $\mathcal{X} = \{x_1, x_2\}$
- $\mathcal{Y} = \{y_1, y_2, y_3\}$
- $\mathcal{Z} = \{z_1, z_2\}$

- Configurations de $\Phi : \text{Dom}(\Phi)^* = \{x_1, x_2\} \times \{y_1, y_2, y_3\} \times \{z_1, z_2\}$

$\Rightarrow \Phi$ possède $|\text{Dom}(\Phi)^*| = |\mathcal{X}| \times |\mathcal{Y}| \times |\mathcal{Z}| = 2 \times 3 \times 2 = 12$ configurations

- Pour toute configuration $(x, y, z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$, Φ prend la valeur $\Phi(x, y, z)$

Notion de potentiel

Exemple

X	Y	Z	$\Phi(x,y,z)$
$x1$	$y1$	$z1$	-10
$x2$	$y1$	$z1$	2,25
$x1$	$y2$	$z1$	0,01
$x2$	$y2$	$z1$	-90
$x1$	$y3$	$z1$	0
$x2$	$y3$	$z1$	0,7
$x1$	$y1$	$z2$	-4
$x2$	$y1$	$z2$	1
$x1$	$y2$	$z2$	-2
$x2$	$y2$	$z2$	-1,5
$x1$	$y3$	$z2$	-2
$x2$	$y3$	$z2$	0,5

Caractéristiques de Φ

- $\text{Dom}(\Phi) = \{\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}\}$ avec :

- $\mathcal{X} = \{x_1, x_2\}$
- $\mathcal{Y} = \{y_1, y_2, y_3\}$
- $\mathcal{Z} = \{z_1, z_2\}$

- Configurations de $\Phi : \text{Dom}(\Phi)^* = \{x_1, x_2\} \times \{y_1, y_2, y_3\} \times \{z_1, z_2\}$

$\Rightarrow \Phi$ possède $|\text{Dom}(\Phi)^*| = |\mathcal{X}| \times |\mathcal{Y}| \times |\mathcal{Z}| = 2 \times 3 \times 2 = 12$ configurations

- Pour toute configuration $(x, y, z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$, Φ prend la valeur $\Phi(x, y, z)$

Notion de potentiel

Exemple

X	Y	Z	$\Phi(x,y,z)$
x1	y1	z1	-10
x2	y1	z1	2,25
x1	y2	z1	0,01
x2	y2	z1	-90
x1	y3	z1	0
x2	y3	z1	0,7
x1	y1	z2	-4
x2	y1	z2	1
x1	y2	z2	-2
x2	y2	z2	-1,5
x1	y3	z2	-2
x2	y3	z2	0,5

Caractéristiques de Φ

- $\text{Dom}(\Phi) = \{\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}\}$ avec :

- $\mathcal{X} = \{x_1, x_2\}$
- $\mathcal{Y} = \{y_1, y_2, y_3\}$
- $\mathcal{Z} = \{z_1, z_2\}$

- Configurations de $\Phi : \text{Dom}(\Phi)^* = \{x_1, x_2\} \times \{y_1, y_2, y_3\} \times \{z_1, z_2\}$

$\Rightarrow \Phi$ possède $|\text{Dom}(\Phi)^*| = |\mathcal{X}| \times |\mathcal{Y}| \times |\mathcal{Z}| = 2 \times 3 \times 2 = 12$ configurations

- Pour toute configuration $(x, y, z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$, Φ prend la valeur $\Phi(x, y, z)$

Notion de potentiel

Définition

Concept général

Un potentiel est une application de plusieurs variables à valeurs dans un ensemble quelconque et muni d'opérations particulières

Potentiel discret et fini réel

Soit $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_D$ une famille d'ensembles discrets et finis. Φ est un potentiel réel sur le domaine $\{\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_D\}$ si Φ est une application définie par

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_D & \mapsto \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_D) & \mapsto \Phi(x_1, \dots, x_D) \end{cases} .$$

Vocabulaire et notations

- Le domaine du potentiel Φ est noté $\text{Dom}(\Phi) = \{\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_D\}$
- $\text{Dom}(\Phi)^* = \prod_{d=1}^D \mathcal{X}_d = \mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_D$
- Tout élément $(x_1, \dots, x_D) \in \text{Dom}(\Phi)^*$ est appelé configuration
- Si $|\text{Dom}(\Phi)| = D$, on dit que Φ est un potentiel à D dimensions

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Produit - Exemple

X	Z	$\Phi 1(x,z)$
$x1$	$z1$	-10
$x1$	$z2$	2,25
$x2$	$z1$	0,01
$x2$	$z2$	-9

Y	Z	$\Phi 2(y,z)$
$y1$	$z1$	0
$y1$	$z2$	3.5
$y2$	$z1$	-1
$y2$	$z2$	7.25

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Produit - Exemple

X	Z	$\Phi 1(x,z)$
x1	z1	-10
x1	z2	2,25
x2	z1	0,01
x2	z2	-9

●

=

Y	Z	$\Phi 2(y,z)$
y1	z1	0
y1	z2	3.5
y2	z1	-1
y2	z2	7.25

X	Z	Y	$\Psi(x,z,y)$
x1	z1	y1	
x1	z1	y2	
x1	z2	y1	
x1	z2	y2	
x2	z1	y1	
x2	z1	y2	
x2	z2	y1	
x2	z2	y2	

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Produit - Exemple

X	Z	$\Phi 1(x,z)$
x1	z1	-10
x1	z2	2,25
x2	z1	0,01
x2	z2	-9

●

=

Y	Z	$\Phi 2(y,z)$
y1	z1	0
y1	z2	3.5
y2	z1	-1
y2	z2	7.25

X	Z	Y	$\Psi(x,z,y)$
x1	z1	y1	$-10 \bullet 0 = 0$
x1	z1	y2	
x1	z2	y1	
x1	z2	y2	
x2	z1	y1	
x2	z1	y2	
x2	z2	y1	
x2	z2	y2	

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Produit - Exemple

X	Z	$\Phi 1(x,z)$
$x1$	$z1$	-10
$x1$	$z2$	2,25
$x2$	$z1$	0,01
$x2$	$z2$	-9

•

=

Y	Z	$\Phi 2(y,z)$
$y1$	$z1$	0
$y1$	$z2$	3.5
$y2$	$z1$	-1
$y2$	$z2$	7.25

X	Z	Y	$\Psi(x,z,y)$
$x1$	$z1$	$y1$	0
$x1$	$z1$	$y2$	$-10 \cdot -1 = 10$
$x1$	$z2$	$y1$	
$x1$	$z2$	$y2$	
$x2$	$z1$	$y1$	
$x2$	$z1$	$y2$	
$x2$	$z2$	$y1$	
$x2$	$z2$	$y2$	

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Produit - Exemple

X	Z	$\Phi 1(x,z)$
$x1$	$z1$	-10
$x1$	$z2$	2,25
$x2$	$z1$	0,01
$x2$	$z2$	-9

•

=

Y	Z	$\Phi 2(y,z)$
$y1$	$z1$	0
$y1$	$z2$	3.5
$y2$	$z1$	-1
$y2$	$z2$	7.25

X	Z	Y	$\Psi(x,z,y)$
$x1$	$z1$	$y1$	0
$x1$	$z1$	$y2$	10
$x1$	$z2$	$y1$	7.875
$x1$	$z2$	$y2$	
$x2$	$z1$	$y1$	
$x2$	$z1$	$y2$	
$x2$	$z2$	$y1$	
$x2$	$z2$	$y2$	

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Produit - Exemple

X	Z	$\Phi 1(x,z)$
$x1$	$z1$	-10
$x1$	$z2$	2,25
$x2$	$z1$	0,01
$x2$	$z2$	-9

●

=

Y	Z	$\Phi 2(y,z)$
$y1$	$z1$	0
$y1$	$z2$	3.5
$y2$	$z1$	-1
$y2$	$z2$	7.25

X	Z	Y	$\Psi(x,z,y)$
$x1$	$z1$	$y1$	0
$x1$	$z1$	$y2$	10
$x1$	$z2$	$y1$	7.875
$x1$	$z2$	$y2$	16.3125
$x2$	$z1$	$y1$	
$x2$	$z1$	$y2$	
$x2$	$z2$	$y1$	
$x2$	$z2$	$y2$	

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Produit - Exemple

X	Z	$\Phi_1(x,z)$
x_1	z_1	-10
x_1	z_2	2,25
x_2	z_1	0,01
x_2	z_2	-9

●

=

Y	Z	$\Phi_2(y,z)$
y_1	z_1	0
y_1	z_2	3.5
y_2	z_1	-1
y_2	z_2	7.25

X	Z	Y	$\Psi(x,z,y)$
x_1	z_1	y_1	0
x_1	z_1	y_2	10
x_1	z_2	y_1	7.875
x_1	z_2	y_2	16.3125
x_2	z_1	y_1	0
x_2	z_1	y_2	
x_2	z_2	y_1	
x_2	z_2	y_2	

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Produit - Exemple

X	Z	$\Phi_1(x,z)$
$x1$	$z1$	-10
$x1$	$z2$	2,25
$x2$	$z1$	0,01
$x2$	$z2$	-9

•

=

Y	Z	$\Phi_2(y,z)$
$y1$	$z1$	0
$y1$	$z2$	3.5
$y2$	$z1$	-1
$y2$	$z2$	7.25

X	Z	Y	$\Psi(x,z,y)$
$x1$	$z1$	$y1$	0
$x1$	$z1$	$y2$	10
$x1$	$z2$	$y1$	7.875
$x1$	$z2$	$y2$	16.3125
$x2$	$z1$	$y1$	0
$x2$	$z1$	$y2$	-0.01
$x2$	$z2$	$y1$	
$x2$	$z2$	$y2$	

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Produit - Exemple

X	Z	$\Phi_1(x,z)$
$x1$	$z1$	-10
$x1$	$z2$	2,25
$x2$	$z1$	0,01
$x2$	$z2$	-9

●

=

Y	Z	$\Phi_2(y,z)$
$y1$	$z1$	0
$y1$	$z2$	3.5
$y2$	$z1$	-1
$y2$	$z2$	7.25

X	Z	Y	$\Psi(x,z,y)$
$x1$	$z1$	$y1$	0
$x1$	$z1$	$y2$	10
$x1$	$z2$	$y1$	7.875
$x1$	$z2$	$y2$	16.3125
$x2$	$z1$	$y1$	0
$x2$	$z1$	$y2$	-0.01
$x2$	$z2$	$y1$	-31.5
$x2$	$z2$	$y2$	

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Produit - Exemple

X	Z	$\Phi_1(x,z)$
$x1$	$z1$	-10
$x1$	$z2$	2,25
$x2$	$z1$	0,01
$x2$	$z2$	-9

•

=

Y	Z	$\Phi_2(y,z)$
$y1$	$z1$	0
$y1$	$z2$	3.5
$y2$	$z1$	-1
$y2$	$z2$	7.25

X	Z	Y	$\Psi(x,z,y)$
$x1$	$z1$	$y1$	0
$x1$	$z1$	$y2$	10
$x1$	$z2$	$y1$	7.875
$x1$	$z2$	$y2$	16.3125
$x2$	$z1$	$y1$	0
$x2$	$z1$	$y2$	-0.01
$x2$	$z2$	$y1$	-31.5
$x2$	$z2$	$y2$	-65.25

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Produit - Exemple

X	Z	$\Phi 1(x,z)$
$x1$	$z1$	-10
$x1$	$z2$	2,25
$x2$	$z1$	0,01
$x2$	$z2$	-9

●

=

Y	Z	$\Phi 2(y,z)$
$y1$	$z1$	0
$y1$	$z2$	3.5
$y2$	$z1$	-1
$y2$	$z2$	7.25

X	Z	Y	$\Psi(x,z,y)$
$x1$	$z1$	$y1$	0
$x1$	$z1$	$y2$	10
$x1$	$z2$	$y1$	7.875
$x1$	$z2$	$y2$	16.3125
$x2$	$z1$	$y1$	0
$x2$	$z1$	$y2$	-0.01
$x2$	$z2$	$y1$	-31.5
$x2$	$z2$	$y2$	-65.25

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Produit et somme - Définition

Produit de deux potentiels discrets et finis

- Soient deux potentiels réels discrets et finis Φ_1 et Φ_2
- Notons :
 - $\mathcal{X} = \text{Dom}(\Phi_1) \setminus \text{Dom}(\Phi_2)$
 - $\mathcal{Y} = \text{Dom}(\Phi_2) \setminus \text{Dom}(\Phi_1)$
 - $\mathcal{Z} = \text{Dom}(\Phi_1) \cap \text{Dom}(\Phi_2)$
- Le produit de Φ_1 et Φ_2 est un potentiel $\Psi = \Phi_1 \cdot \Phi_2$ de domaine $\text{Dom}(\Psi) = \text{Dom}(\Phi_1) \cup \text{Dom}(\Phi_2)$ vérifiant pour toute configuration $(x, z, y) \in \mathcal{X}^* \times \mathcal{Z}^* \times \mathcal{Y}^*$:

$$\Psi(x, z, y) = \Phi_1(x, z) \cdot \Phi_2(z, y)$$

Somme de deux potentiels discrets et finis

La somme de deux potentiels réels discrets et finis est définie de manière analogue au produit en remplaçant l'opérateur \cdot par l'opérateur $+$

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Sommation/Marginalisation - Exemple

X	Z	Y	$\Phi(x,z,y)$
$x1$	$z1$	$y1$	0
$x1$	$z1$	$y2$	10
$x1$	$z2$	$y1$	7.875
$x1$	$z2$	$y2$	16.3125
$x2$	$z1$	$y1$	0
$x2$	$z1$	$y2$	-0.01
$x2$	$z2$	$y1$	-31.5
$x2$	$z2$	$y2$	-65.25

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Sommation/Marginalisation - Exemple

$$\sum_{x \in \mathcal{X}}$$

X	Z	Y	$\Phi(x,z,y)$
$x1$	$z1$	$y1$	0
$x1$	$z1$	$y2$	10
$x1$	$z2$	$y1$	7.875
$x1$	$z2$	$y2$	16.3125
$x2$	$z1$	$y1$	0
$x2$	$z1$	$y2$	-0.01
$x2$	$z2$	$y1$	-31.5
$x2$	$z2$	$y2$	-65.25

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Sommation/Marginalisation - Exemple

 $\sum_{x \in \mathcal{X}}$

X	Z	Y	$\Phi(x,z,y)$
$x1$	$z1$	$y1$	0
$x1$	$z1$	$y2$	10
$x1$	$z2$	$y1$	7.875
$x1$	$z2$	$y2$	16.3125
$x2$	$z1$	$y1$	0
$x2$	$z1$	$y2$	-0.01
$x2$	$z2$	$y1$	-31.5
$x2$	$z2$	$y2$	-65.25

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Sommation/Marginalisation - Exemple

$$\sum_{x \in \mathcal{X}}$$

X	Z	Y	$\Phi(x,z,y)$
$x1$	$z1$	$y1$	0
$x1$	$z1$	$y2$	10
$x1$	$z2$	$y1$	7.875
$x1$	$z2$	$y2$	16.3125
$x2$	$z1$	$y1$	0
$x2$	$z1$	$y2$	-0.01
$x2$	$z2$	$y1$	-31.5
$x2$	$z2$	$y2$	-65.25

$$=$$

Z	Y	$\Psi(z,y)$
$z1$	$y1$	
$z1$	$y2$	
$z2$	$y1$	
$z2$	$y2$	

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Sommation/Marginalisation - Exemple

$$\sum_{x \in \mathcal{X}}$$

X	Z	Y	$\Phi(x,z,y)$
$x1$	$z1$	$y1$	0
$x1$	$z1$	$y2$	10
$x1$	$z2$	$y1$	7.875
$x1$	$z2$	$y2$	16.3125
$x2$	$z1$	$y1$	0
$x2$	$z1$	$y2$	-0.01
$x2$	$z2$	$y1$	-31.5
$x2$	$z2$	$y2$	-65.25

$$=$$

Z	Y	$\Psi(z,y)$
$z1$	$y1$	0
$z1$	$y2$	
$z2$	$y1$	
$z2$	$y2$	

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Sommation/Marginalisation - Exemple

$$\sum_{x \in \mathcal{X}}$$

X	Z	Y	$\Phi(x,z,y)$
$x1$	$z1$	$y1$	0
$x1$	$z1$	$y2$	10
$x1$	$z2$	$y1$	7.875
$x1$	$z2$	$y2$	16.3125
$x2$	$z1$	$y1$	0
$x2$	$z1$	$y2$	-0.01
$x2$	$z2$	$y1$	-31.5
$x2$	$z2$	$y2$	-65.25

$$=$$

Z	Y	$\Psi(z,y)$
$z1$	$y1$	0
$z1$	$y2$	9.99
$z2$	$y1$	
$z2$	$y2$	

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Sommation/Marginalisation - Exemple

$$\sum_{x \in \mathcal{X}}$$

X	Z	Y	$\Phi(x,z,y)$
$x1$	$z1$	$y1$	0
$x1$	$z1$	$y2$	10
$x1$	$z2$	$y1$	7.875
$x1$	$z2$	$y2$	16.3125
$x2$	$z1$	$y1$	0
$x2$	$z1$	$y2$	-0.01
$x2$	$z2$	$y1$	-31.5
$x2$	$z2$	$y2$	-65.25

$$=$$

Z	Y	$\Psi(z,y)$
$z1$	$y1$	0
$z1$	$y2$	9.99
$z2$	$y1$	-23.625
$z2$	$y2$	

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Sommation/Marginalisation - Exemple

$$\sum_{x \in \mathcal{X}}$$

X	Z	Y	$\Phi(x,z,y)$
$x1$	$z1$	$y1$	0
$x1$	$z1$	$y2$	10
$x1$	$z2$	$y1$	7.875
$x1$	$z2$	$y2$	16.3125
$x2$	$z1$	$y1$	0
$x2$	$z1$	$y2$	-0.01
$x2$	$z2$	$y1$	-31.5
$x2$	$z2$	$y2$	-65.25

$$=$$

Z	Y	$\Psi(z,y)$
$z1$	$y1$	0
$z1$	$y2$	9.99
$z2$	$y1$	-23.625
$z2$	$y2$	-48.9375

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Sommation/Marginalisation - Exemple

$$\sum_{x \in \mathcal{X}}$$

X	Z	Y	$\Phi(x,z,y)$
$x1$	$z1$	$y1$	0
$x1$	$z1$	$y2$	10
$x1$	$z2$	$y1$	7.875
$x1$	$z2$	$y2$	16.3125
$x2$	$z1$	$y1$	0
$x2$	$z1$	$y2$	-0.01
$x2$	$z2$	$y1$	-31.5
$x2$	$z2$	$y2$	-65.25

$$=$$

Z	Y	$\Psi(z,y)$
$z1$	$y1$	0
$z1$	$y2$	9.99
$z2$	$y1$	-23.625
$z2$	$y2$	-48.9375

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Sommation/Marginalisation - Définition

Sommation/Marginalisation d'un potentiel discret et fini

- Soit un potentiel réel discret et fini Φ
- Le résultat de la sommation de Φ sur le domaine \mathcal{W} est un potentiel $\Psi = \sum_{\mathcal{W}} \Phi$ de domaine $\text{Dom}(\Psi) = \text{Dom}(\Phi) \setminus \mathcal{W}$ vérifiant pour toute configuration $\mathbf{x} \in \text{Dom}(\Psi)^*$:

$$\Psi(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}} \Phi(\mathbf{x}, \mathbf{w})$$

- Cette opération est également appelée marginalisation du potentiel Φ sur le domaine $\text{Dom}(\Phi) \setminus \mathcal{W}$

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Instanciation - Exemple

X	Z	Y	$\Phi(x,z,y)$
$x1$	$z1$	$y1$	0
$x1$	$z1$	$y2$	10
$x1$	$z2$	$y1$	7.875
$x1$	$z2$	$y2$	16.3125
$x2$	$z1$	$y1$	0
$x2$	$z1$	$y2$	-0.01
$x2$	$z2$	$y1$	-31.5
$x2$	$z2$	$y2$	-65.25

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Instanciation - Exemple

X	Z	Y	$\Phi(x,z,y)$
x1	z1	y1	0
x1	z1	y2	10
x1	z2	y1	7.875
x1	z2	y2	16.3125
x2	z1	y1	0
x2	z1	y2	-0.01
x2	z2	y1	-31.5
x2	z2	y2	-65.25

⇒

X	Z	Y	$\Phi(x2,z,y)$
x2	z1	y1	0
x2	z1	y2	-0.01
x2	z2	y1	-31.5
x2	z2	y2	-65.25

Notion de potentiel

Opérations algébriques - Instanciation - Exemple

X	Z	Y	$\Phi(x,z,y)$
x1	z1	y1	0
x1	z1	y2	10
x1	z2	y1	7.875
x1	z2	y2	16.3125
x2	z1	y1	0
x2	z1	y2	-0.01
x2	z2	y1	-31.5
x2	z2	y2	-65.25

⇒

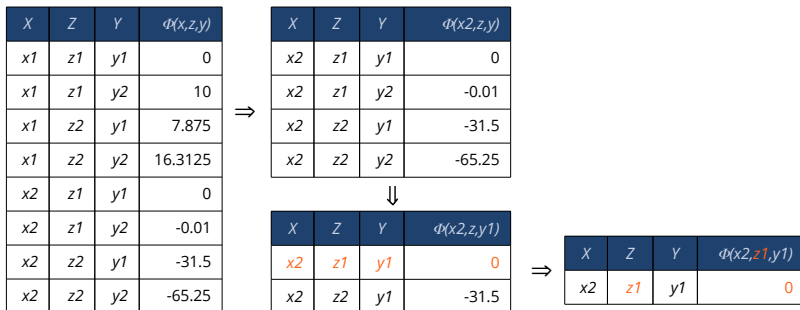
X	Z	Y	$\Phi(x2,z,y)$
x2	z1	y1	0
x2	z1	y2	-0.01
x2	z2	y1	-31.5
x2	z2	y2	-65.25

⇓

X	Z	Y	$\Phi(x2,z,y1)$
x2	z1	y1	0
x2	z2	y1	-31.5

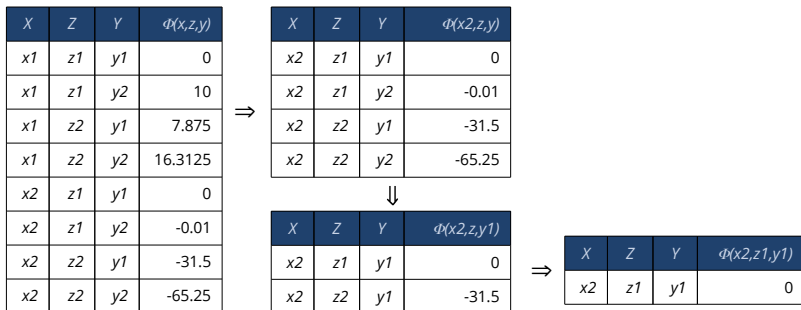
Notion de potentiel

Opérations algébriques - Instanciation - Exemple



Notion de potentiel

Opérations algébriques - Instanciation - Exemple



Notion de potentiel

Opérations algébriques - Instanciation - Définition

Instanciation d'un potentiel discret et fini

- Soit un potentiel réel discret et fini Φ
 - L'instanciation de Φ sur la configuration $\mathbf{y} \in \mathcal{Y} \subseteq \text{Dom}(\Phi)$ est la projection du potentiel Φ sur le domaine $\text{Dom}(\Phi_{\mathbf{y}}) = (\text{Dom}(\Phi) \setminus \mathcal{Y}) \cup \mathbf{y}$
- ⇒ Φ instancié sur \mathbf{y} est un potentiel défini sur toutes les configurations $\mathbf{x} \in (\text{Dom}(\Phi) \setminus \mathcal{Y})^*$ tel que $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

Notion de potentiel

Complexité

Complexité spatiale

- Soit un potentiel réel discret et fini Φ tel que $\text{Dom}(\Phi) = \{\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_D\}$
- La complexité spatiale de Φ , notée $\text{CS}(\Phi)$, correspond au nombre de configurations du domaine de Φ :

$$\text{CS}(\Phi) = |\text{Dom}(\Phi)^*|$$

⇒ $\text{CS}(\Phi) \simeq v^D$ quand v et/ou D sont grands avec :

- D : nombre de variables représenté dans le domaine du potentiel
- $v = \max\{|\mathcal{X}_1|, \dots, |\mathcal{X}_D|\}$: + grand nombre de valeurs prises par une v.a.

Complexité algorithmique (CA) d'une opération algébrique

- Soient deux potentiels réels discrets et finis Φ_1 et Φ_2
- ⇒ $\text{CA}(\Phi_1 \cdot \Phi_2) = \text{CA}(\Phi_1 + \Phi_2) \simeq |(\text{Dom}(\Phi_1) \cup \text{Dom}(\Phi_2))^*|$
- ⇒ $\text{CA}(\sum_{\mathcal{W}} \Phi_1) \simeq |(\text{Dom}(\Phi_1) \setminus \mathcal{W})^*|$
- ⇒ Les complexités algorithmiques et spatiales sont du même ordre

Notion de potentiel

LPC comme potentiel

Potentiel et LPC

- Soit un potentiel réel discret et fini à valeur dans $[0, 1]$ noté p
- S'il existe deux sous-domaines disjoints \mathcal{X} et \mathcal{Y} avec $\text{Dom}(p) = \mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$ tels que pour toute configuration $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}^*$

$$\sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}^*} p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1.$$

- ⇒ Le potentiel p est une Loi de Probabilité Conditionnelle (LPC) sur \mathcal{X} conditionnellement à \mathcal{Y}
- ⇒ Les domaines \mathcal{X} et \mathcal{Y} étant discrets et finis, la LPC p peut se représenter sous la forme d'une Table de Probabilité Conditionnelle (TPC)

Vocabulaire

- Le domaine \mathcal{Y} est appelé domaine de conditionnement
- Le domaine \mathcal{X} est appelé domaine normalisé

Notion de potentiel

LPC comme potentiel - Exemple

P(Note Difficulté, Niveau)			
		Note	
Difficulté	Niveau	mauvaise	bonne
<i>facile</i>	<i>faible</i>	0,5	0,5
<i>moyenne</i>	<i>faible</i>	0,75	0,25
<i>importante</i>	<i>faible</i>	0,99	0,01
<i>facile</i>	<i>fort</i>	0,1	0,9
<i>moyenne</i>	<i>fort</i>	0,2	0,8
<i>importante</i>	<i>fort</i>	0,3	0,7

Exemple

- Variables de conditionnement :
 - Difficulté à valeurs dans { facile, moyenne, importante }
 - Niveau à valeurs dans { faible, fort }
- Variable normalisée :
 - Note à valeurs dans { mauvaise, bonne }

Notion de potentiel

LPC comme potentiel - Exemple

P(Note Difficulté, Niveau)			
		Note	
Difficulté	Niveau	mauvaise	bonne
<i>facile</i>	<i>faible</i>	0,5	0,5
<i>moyenne</i>	<i>faible</i>	0,75	0,25
<i>importante</i>	<i>faible</i>	0,99	0,01
<i>facile</i>	<i>fort</i>	0,1	0,9
<i>moyenne</i>	<i>fort</i>	0,2	0,8
<i>importante</i>	<i>fort</i>	0,3	0,7

Exemple

- Variables de conditionnement :
 - **Difficulté** à valeurs dans {facile, moyenne, importante}
 - **Niveau** à valeurs dans {faible, fort}
- Variable normalisée :
 - Note à valeurs dans {mauvaise, bonne}

Notion de potentiel

LPC comme potentiel - Exemple

P(●Note Difficulté, Niveau)			
		●Note	
Difficulté	Niveau	mauvaise	bonne
facile	faible	0,5	0,5
moyenne	faible	0,75	0,25
importante	faible	0,99	0,01
facile	fort	0,1	0,9
moyenne	fort	0,2	0,8
importante	fort	0,3	0,7

Exemple

- Variables de conditionnement :
 - Difficulté à valeurs dans {facile, moyenne, importante}
 - Niveau à valeurs dans {faible, fort}
- Variable normalisée :
 - ●Note à valeurs dans {mauvaise, bonne}

Plan

- 1 Introduction
- 2 Notion de potentiel
- 3 **Méthode d'élimination des variables**
 - Principe de la méthode
 - Ordre d'élimination
- 4 Conclusion
- 5 Références
- 6 Annexes

Élimination des variables

Principe de la méthode - Formalisation

Rappel de l'objectif

- Soit $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ une suite de v.a.
- Calculer $P(\mathbf{Q}|\mathbf{E} = \mathbf{e})$ avec $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{X}$, $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{X}$ et $\mathbf{Q} \cap \mathbf{E} = \emptyset$

Principe

- Par définition : $P(\mathbf{Q}|\mathbf{E} = \mathbf{e}) = \frac{P(\mathbf{Q}, \mathbf{E} = \mathbf{e})}{P(\mathbf{E} = \mathbf{e})}$
- En posant $\mathbf{W} = \mathbf{X} \setminus (\mathbf{Q}, \mathbf{E})$, on a

$$P(\mathbf{Q}, \mathbf{E} = \mathbf{e}) = \sum_{\mathbf{W} \in \mathcal{W}} \underbrace{P(X_1, \dots, X_n)}_{\text{loi jointe de la suite } \mathbf{X}} = \sum_{\mathbf{W} \in \mathcal{W}} P(\mathbf{Q}, \mathbf{W}, \mathbf{E} = \mathbf{e})$$

- **Principe** : Simplifier le calcul de $P(\mathbf{Q}|\mathbf{E} = \mathbf{e})$ grâce à la propriété de factorisation dans un RB
- **En pratique** : Toutes les variables hors requête et évidence sont "éliminées" de l'expression de la loi jointe par sommation

Élimination des variables

Principe de la méthode - Formalisation

Rappel de l'objectif

- Soit $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ une suite de v.a.
- Calculer $P(\mathbf{Q}|\mathbf{E} = \mathbf{e})$ avec $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{X}$, $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{X}$ et $\mathbf{Q} \cap \mathbf{E} = \emptyset$

Principe

- Par définition : $P(\mathbf{Q}|\mathbf{E} = \mathbf{e}) = \frac{P(\mathbf{Q}, \mathbf{E} = \mathbf{e})}{P(\mathbf{E} = \mathbf{e})}$
- En posant $\mathbf{W} = \mathbf{X} \setminus (\mathbf{Q}, \mathbf{E})$, on a

$$P(\mathbf{Q}, \mathbf{E} = \mathbf{e}) = \sum_{\mathbf{W} \in \mathcal{W}} \underbrace{P(X_1, \dots, X_n)}_{\text{loi jointe de la suite } \mathbf{X}} = \sum_{\mathbf{W} \in \mathcal{W}} P(\mathbf{Q}, \mathbf{W}, \mathbf{E} = \mathbf{e})$$

- **Principe** : Simplifier le calcul de $P(\mathbf{Q}|\mathbf{E} = \mathbf{e})$ grâce à la propriété de factorisation dans un RB
- **En pratique** : Toutes les variables hors requête et évidence sont "éliminées" de l'expression de la loi jointe par sommation

Élimination des variables

Principe de la méthode - Formalisation

Rappel de l'objectif

- Soit $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ une suite de v.a.
- Calculer $P(\mathbf{Q}|\mathbf{E} = \mathbf{e})$ avec $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{X}$, $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{X}$ et $\mathbf{Q} \cap \mathbf{E} = \emptyset$

Principe

- Par définition : $P(\mathbf{Q}|\mathbf{E} = \mathbf{e}) = \frac{P(\mathbf{Q}, \mathbf{E} = \mathbf{e})}{P(\mathbf{E} = \mathbf{e})}$
- En posant $\mathbf{W} = \mathbf{X} \setminus (\mathbf{Q}, \mathbf{E})$, on a

$$P(\mathbf{Q}, \mathbf{E} = \mathbf{e}) = \sum_{\mathbf{W} \in \mathbf{W}} \underbrace{P(X_1, \dots, X_n)}_{\text{loi jointe de la suite } \mathbf{X}} = \sum_{\mathbf{W} \in \mathbf{W}} P(\mathbf{Q}, \mathbf{W}, \mathbf{E} = \mathbf{e})$$

- **Principe** : Simplifier le calcul de $P(\mathbf{Q}|\mathbf{E} = \mathbf{e})$ grâce à la propriété de factorisation dans un RB
- **En pratique** : Toutes les variables hors requête et évidence sont "éliminées" de l'expression de la loi jointe par sommation

Élimination des variables

Principe de la méthode - Formalisation

Rappel de l'objectif

- Soit $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ une suite de v.a.
- Calculer $P(\mathbf{Q}|\mathbf{E} = \mathbf{e})$ avec $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{X}$, $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{X}$ et $\mathbf{Q} \cap \mathbf{E} = \emptyset$

Principe

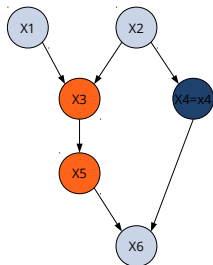
- Par définition : $P(\mathbf{Q}|\mathbf{E} = \mathbf{e}) = \frac{P(\mathbf{Q}, \mathbf{E} = \mathbf{e})}{P(\mathbf{E} = \mathbf{e})}$
- En posant $\mathbf{W} = \mathbf{X} \setminus (\mathbf{Q}, \mathbf{E})$, on a

$$P(\mathbf{Q}, \mathbf{E} = \mathbf{e}) = \sum_{\mathbf{W} \in \mathbf{W}} \underbrace{P(X_1, \dots, X_n)}_{\text{loi jointe de la suite } \mathbf{X}} = \sum_{\mathbf{W} \in \mathbf{W}} P(\mathbf{Q}, \mathbf{W}, \mathbf{E} = \mathbf{e})$$

- **Principe** : Simplifier le calcul de $P(\mathbf{Q}|\mathbf{E} = \mathbf{e})$ grâce à la propriété de factorisation dans un RB
- **En pratique** : Toutes les variables hors requête et évidence sont "éliminées" de l'expression de la loi jointe par sommation

Élimination des variables

Principe de la méthode - Exemple



Caractéristiques du calcul

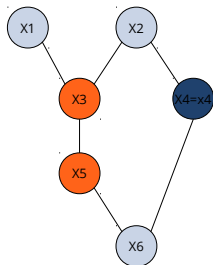
- Suite des v.a. :
 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$
- Objectif : calculer $P(X_3, X_5 | X_4 = x_4)$
- Requête : $\mathbf{Q} = (X_3, X_5)$
- Évidence : $\mathbf{E} = (X_4)$, $\mathbf{e} = (x_4)$
- Variables à éliminer : $\mathbf{W} = (X_1, X_2, X_6)$

Déroulement du calcul

$$P(X_3, X_5, X_4 = x_4) =$$

Élimination des variables

Principe de la méthode - Exemple



Caractéristiques du calcul

- Suite des v.a. :
 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$
- Objectif : calculer $P(\mathbf{X}_3, \mathbf{X}_5 | X_4 = x_4)$
- Requête : $\mathbf{Q} = (X_3, X_5)$
- Évidence : $\mathbf{E} = (X_4)$, $\mathbf{e} = (x_4)$
- Variables à éliminer : $\mathbf{W} = (X_1, X_2, X_6)$

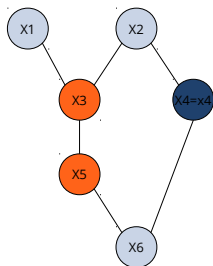
Déroulement du calcul

$$P(\mathbf{X}_3, \mathbf{X}_5, X_4 = x_4) =$$

$$\sum_{X_1} \sum_{X_2} \sum_{X_6} P(X_1, X_2, \mathbf{X}_3, X_4 = x_4, \mathbf{X}_5, X_6)$$

Élimination des variables

Principe de la méthode - Exemple



Caractéristiques du calcul

- Suite des v.a. :
 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$
- Objectif : calculer $P(\mathbf{X}_3, \mathbf{X}_5 | \mathbf{X}_4 = x_4)$
- Requête : $\mathbf{Q} = (X_3, X_5)$
- Évidence : $\mathbf{E} = (X_4)$, $\mathbf{e} = (x_4)$
- Variables à éliminer : $\mathbf{W} = (X_1, X_2, X_6)$

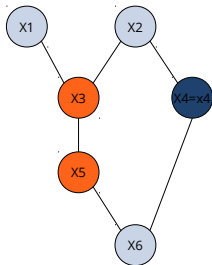
Déroulement du calcul

$$P(\mathbf{X}_3, \mathbf{X}_5, \mathbf{X}_4 = x_4) =$$

$$\sum_{X_1} \sum_{X_2} \sum_{X_6} \underbrace{P(X_1) P(X_2) P(\mathbf{X}_3 | X_1, X_2) P(\mathbf{X}_4 = x_4 | X_2) P(\mathbf{X}_5 | \mathbf{X}_3) P(X_6 | \mathbf{X}_5, \mathbf{X}_4 = x_4)}_{\text{Factorisation loi jointe dans le RB}}$$

Élimination des variables

Principe de la méthode - Exemple



Caractéristiques du calcul

- Suite des v.a. :
 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$
- Objectif : calculer $P(\mathbf{X}_3, \mathbf{X}_5 | \mathbf{X}_4 = x_4)$
- Requête : $\mathbf{Q} = (X_3, X_5)$
- Évidence : $\mathbf{E} = (X_4)$, $\mathbf{e} = (x_4)$
- Variables à éliminer : $\mathbf{W} = (X_1, X_2, X_6)$

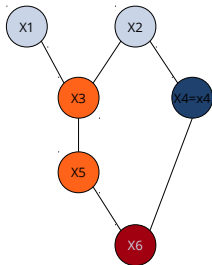
Déroulement du calcul

$$P(\mathbf{X}_3, \mathbf{X}_5, \mathbf{X}_4 = x_4) =$$

$$P(\mathbf{X}_5 | \mathbf{X}_3) \sum_{X_1} P(X_1) \sum_{X_2} P(X_2) P(\mathbf{X}_3 | X_1, X_2) P(\mathbf{X}_4 = x_4 | X_2) \sum_{X_6} P(X_6 | \mathbf{X}_5, \mathbf{X}_4 = x_4)$$

Élimination des variables

Principe de la méthode - Exemple



Caractéristiques du calcul

- Suite des v.a. :
 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$
- Objectif : calculer $P(X_3, X_5 | X_4 = x_4)$
- Requête : $\mathbf{Q} = (X_3, X_5)$
- Évidence : $\mathbf{E} = (X_4)$, $\mathbf{e} = (x_4)$
- Variables à éliminer : $\mathbf{W} = (X_1, X_2, X_6)$

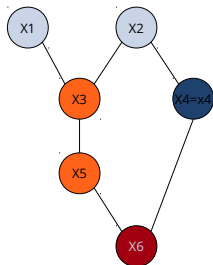
Déroulement du calcul

$$P(X_3, X_5, X_4 = x_4) =$$

$$P(X_5 | X_3) \sum_{X_1} P(X_1) \sum_{X_2} P(X_2) P(X_3 | X_1, X_2) P(X_4 = x_4 | X_2) \sum_{X_6} P(X_6 | X_5, X_4 = x_4)$$

Élimination des variables

Principe de la méthode - Exemple



Caractéristiques du calcul

- Suite des v.a. :
 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$
- Objectif : calculer $P(X_3, X_5 | X_4 = x_4)$
- Requête : $\mathbf{Q} = (X_3, X_5)$
- Évidence : $\mathbf{E} = (X_4)$, $\mathbf{e} = (x_4)$
- Variables à éliminer : $\mathbf{W} = (X_1, X_2, X_6)$

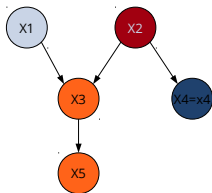
Déroulement du calcul

$$P(X_3, X_5, X_4 = x_4) =$$

$$P(X_5 | X_3) \sum_{X_1} P(X_1) \sum_{X_2} P(X_2) P(X_3 | X_1, X_2) P(X_4 = x_4 | X_2) \underbrace{\sum_{X_6} P(X_6 | X_5, X_4 = x_4)}_1$$

Élimination des variables

Principe de la méthode - Exemple



Caractéristiques du calcul

- Suite des v.a. :
 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$
- Objectif : calculer $P(X_3, X_5 | X_4 = x_4)$
- Requête : $\mathbf{Q} = (X_3, X_5)$
- Évidence : $\mathbf{E} = (X_4)$, $\mathbf{e} = (x_4)$
- Variables à éliminer : $\mathbf{W} = (X_1, X_2, X_6)$

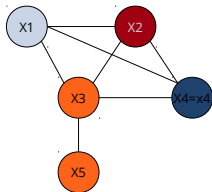
Déroulement du calcul

$$P(X_3, X_5, X_4 = x_4) =$$

$$P(X_5 | X_3) \sum_{X_1} P(X_1) \sum_{X_2} P(X_2) P(X_3 | X_1, X_2) P(X_4 = x_4 | X_2)$$

Élimination des variables

Principe de la méthode - Exemple



Caractéristiques du calcul

- Suite des v.a. :
 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$
- Objectif : calculer $P(\mathbf{X}_3, \mathbf{X}_5 | X_4 = x_4)$
- Requête : $\mathbf{Q} = (X_3, X_5)$
- Évidence : $\mathbf{E} = (X_4)$, $\mathbf{e} = (x_4)$
- Variables à éliminer : $\mathbf{W} = (X_1, X_2, X_6)$

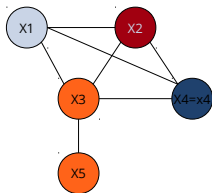
Déroulement du calcul

$$P(\mathbf{X}_3, \mathbf{X}_5, X_4 = x_4) =$$

$$P(\mathbf{X}_5 | \mathbf{X}_3) \sum_{X_1} P(X_1) \sum_{X_2} \underbrace{P(X_2) P(\mathbf{X}_3 | X_1, X_2) P(X_4 = x_4 | X_2)}_{\Phi_2(X_1, X_2, \mathbf{X}_3, X_4 = x_4)}$$

Élimination des variables

Principe de la méthode - Exemple



Caractéristiques du calcul

- Suite des v.a. :
 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$
- Objectif : calculer $P(\mathbf{X}_3, \mathbf{X}_5 | \mathbf{X}_4 = x_4)$
- Requête : $\mathbf{Q} = (X_3, X_5)$
- Évidence : $\mathbf{E} = (X_4)$, $\mathbf{e} = (x_4)$
- Variables à éliminer : $\mathbf{W} = (X_1, X_2, X_6)$

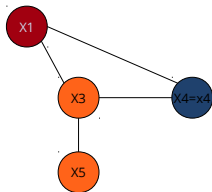
Déroulement du calcul

$$P(\mathbf{X}_3, \mathbf{X}_5, \mathbf{X}_4 = x_4) =$$

$$P(\mathbf{X}_5 | \mathbf{X}_3) \sum_{X_1} P(X_1) \underbrace{\sum_{X_2} \Phi_{X_2}(X_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_4 = x_4)}_{\Psi_2(X_1, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_4 = x_4)}$$

Élimination des variables

Principe de la méthode - Exemple



Caractéristiques du calcul

- Suite des v.a. :
 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$
- Objectif : calculer $P(\mathbf{X}_3, \mathbf{X}_5 | \mathbf{X}_4 = x_4)$
- Requête : $\mathbf{Q} = (X_3, X_5)$
- Évidence : $\mathbf{E} = (X_4)$, $\mathbf{e} = (x_4)$
- Variables à éliminer : $\mathbf{W} = (X_1, X_2, X_6)$

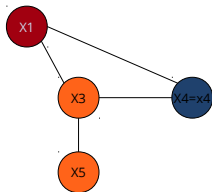
Déroulement du calcul

$$P(\mathbf{X}_3, \mathbf{X}_5, \mathbf{X}_4 = x_4) =$$

$$P(\mathbf{X}_5 | \mathbf{X}_3) \sum_{X_1} P(\mathbf{X}_1) \Psi_2(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_3, \mathbf{X}_4 = x_4)$$

Élimination des variables

Principe de la méthode - Exemple



Caractéristiques du calcul

- Suite des v.a. :
 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$
- Objectif : calculer $P(X_3, X_5 | X_4 = x_4)$
- Requête : $\mathbf{Q} = (X_3, X_5)$
- Évidence : $\mathbf{E} = (X_4)$, $\mathbf{e} = (x_4)$
- Variables à éliminer : $\mathbf{W} = (X_1, X_2, X_6)$

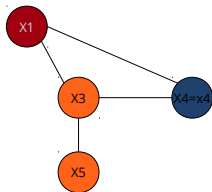
Déroulement du calcul

$$P(X_3, X_5, X_4 = x_4) =$$

$$P(X_5 | X_3) \sum_{X_1} \underbrace{P(X_1) \psi_2(X_1, X_3, X_4 = x_4)}_{\phi_1(X_1, X_3, X_4 = x_4)}$$

Élimination des variables

Principe de la méthode - Exemple



Caractéristiques du calcul

- Suite des v.a. :
 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$
- Objectif : calculer $P(X_3, X_5 | X_4 = x_4)$
- Requête : $\mathbf{Q} = (X_3, X_5)$
- Évidence : $\mathbf{E} = (X_4)$, $\mathbf{e} = (x_4)$
- Variables à éliminer : $\mathbf{W} = (X_1, X_2, X_6)$

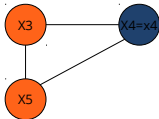
Déroulement du calcul

$$P(X_3, X_5, X_4 = x_4) =$$

$$P(X_5 | X_3) \underbrace{\sum_{X_1} \Phi_1(X_1, X_3, X_4 = x_4)}_{\Psi_1(X_3, X_4 = x_4)}$$

Élimination des variables

Principe de la méthode - Exemple



Caractéristiques du calcul

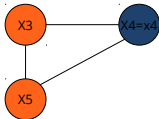
- Suite des v.a. :
 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$
- Objectif : calculer $P(X_3, X_5 | X_4 = x_4)$
- Requête : $\mathbf{Q} = (X_3, X_5)$
- Évidence : $\mathbf{E} = (X_4)$, $\mathbf{e} = (x_4)$
- Variables à éliminer : $\mathbf{W} = (X_1, X_2, X_6)$

Déroulement du calcul

$$P(X_3, X_5, X_4 = x_4) = P(X_5 | X_3) \psi_1(X_3, X_4 = x_4)$$

Élimination des variables

Principe de la méthode - Exemple



Caractéristiques du calcul

- Suite des v.a. :
 $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$
- Objectif : calculer $P(X_3, X_5 | X_4 = x_4)$
- Requête : $\mathbf{Q} = (X_3, X_5)$
- Évidence : $\mathbf{E} = (X_4)$, $\mathbf{e} = (x_4)$
- Variables à éliminer : $\mathbf{W} = (X_1, X_2, X_6)$

Déroulement du calcul

$$P(X_3, X_5, X_4 = x_4) = P(X_5 | X_3) \psi_1(X_3, X_4 = x_4)$$

⇒ Déduction de $P(X_3, X_5 | X_4 = x_4)$ en normalisant $P(X_3, X_5, X_4 = x_4)$ sur les v.a. X_3, X_5

Élimination des variables

Algorithme - Remarques

Ordre d'élimination

- L'ordre d'élimination des variables n'influe pas sur le résultat
- ⇒ Tous les ordres aboutissent au même (bon) résultat
- En revanche, la rapidité des calculs est fortement liée à l'ordre d'élimination (cf. complexité)

Variables instanciées

- En général, les variables **E** sont instanciées à une configuration donnée **e**
- ⇒ En pratique, l'algorithme tient compte de l'instanciation à l'étape 2 en instanciant les potentiels concernés par la suite d'observations **e**
- ⇒ Accélération des calculs car les potentiels à manipuler sont moins volumineux

Élimination des variables

Algorithme - Complexité (1/2)

Complexité de la méthode d'élimination des variables

- Pire cas : $(n - 1)$ variables à éliminer
- Opérations coûteuses : calcul des potentiels $\Phi_{\sigma(i)}$ et $\Psi_{\sigma(i)}$
- Complexité de l'algorithme :

$$\begin{aligned} \text{CA (AEV)} &\simeq \sum_i \text{CS}(\Phi_{\sigma(i)}) + \text{CS}(\Psi_{\sigma(i)}) \\ &\simeq nv_{\star}^{D_{\star}} \end{aligned}$$

- D_{\star} : Nombre de dimensions du plus gros potentiel $\Phi_{\sigma(i)}$, noté Φ_{\star}
- v_{\star} : Nombre de valeurs dans la plus grande dimension de Φ_{\star}

⇒ Risque d'explosion exponentielle

Élimination des variables

Algorithme - Complexité (2/2)

Complexité de l'inférence exacte dans un RB

- Il n'existe pas d'algorithme polynomial d'inférence exacte pour un RB quelconque
- ⇒ Le calcul de probabilité dans un RB est un problème NP-difficile

Attention à l'ordre d'élimination

- Trouver un "bon" ordre consiste à rechercher un ordre qui limite la taille des $\Phi_{\sigma(i)}$ à chaque élimination
- Malheureusement :
 - ☹ Trouver l'ordre optimal est un problème NP-complet
 - ☹ Même l'ordre optimal peut dans certains cas aboutir à une explosion combinatoire
- ⇒ En pratique, on utilise des heuristiques ou des connaissances sur le graphe pour déterminer l'ordre d'élimination

Élimination des variables

Algorithme - Complexité (2/2)

Complexité de l'inférence exacte dans un RB

- Il n'existe pas d'algorithme polynomial d'inférence exacte pour un RB quelconque
- ⇒ Le calcul de probabilité dans un RB est un problème NP-difficile

Attention à l'ordre d'élimination

- Trouver un "bon" ordre consiste à rechercher un ordre qui limite la taille des $\Phi_{\sigma(i)}$ à chaque élimination
 - Malheureusement :
 - ☹ Trouver l'ordre optimal est un problème NP-complet
 - ☹ Même l'ordre optimal peut dans certains cas aboutir à une explosion combinatoire
- ⇒ En pratique, on utilise des heuristiques ou des connaissances sur le graphe pour déterminer l'ordre d'élimination

Élimination des variables

Stratégies pour déterminer l'ordre d'élimination

Stratégie 1 : Application d'une heuristique

- Utilisation d'un algorithme glouton muni d'une fonction de coût donnée
- ⇒ À chaque étape, on élimine la variable qui minimise le coût
- Exemples de fonctions de coût :
 - Nombre de voisins de la v.a. courante
 - Complexité de $\Phi_{\sigma(i)}$ engendré par l'élimination de la v.a. courante

Stratégie 2 : Exploiter sa connaissance du graphe

Exemples de cas où cela peut être profitable :

- 1 Graphes avec peu de variables mais avec des LPC de tailles très hétérogènes (i.e. piège les méthodes gloutonnes)
- 2 Graphes très grands mais très structurés (e.g. modèle bayésien naïf)

Élimination des variables

Stratégies pour déterminer l'ordre d'élimination

Stratégie 1 : Application d'une heuristique

- Utilisation d'un algorithme glouton muni d'une fonction de coût donnée
⇒ À chaque étape, on élimine la variable qui minimise le coût
- Exemples de fonctions de coût :
 - Nombre de voisins de la v.a. courante
 - Complexité de $\Phi_{\sigma(i)}$ engendré par l'élimination de la v.a. courante

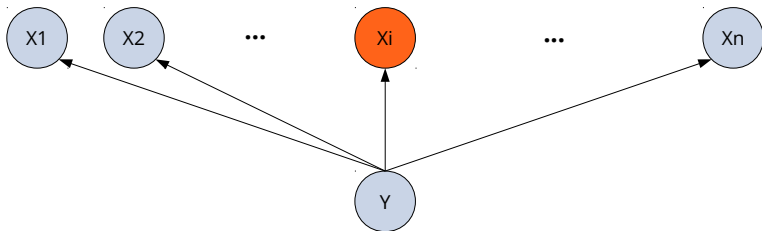
Stratégie 2 : Exploiter sa connaissance du graphe

Exemples de cas où cela peut être profitable :

- 1 Graphes avec peu de variables mais avec des LPC de tailles très hétérogènes (i.e. piège les méthodes gloutonnes)
- 2 Graphes très grands mais très structurés (e.g. modèle bayésien naïf)

Élimination des variables

Ordre d'élimination - Illustration

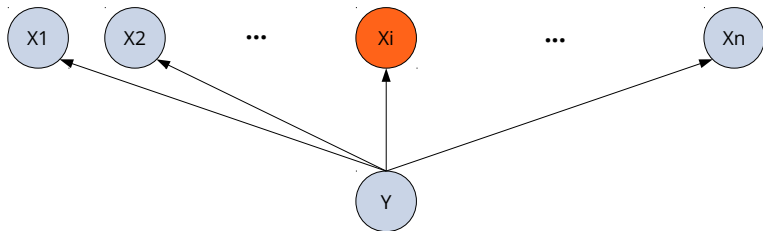


Quel(s) ordre(s) pour calculer $P(X_i)$?

- Élimination des $X_j, j \neq i$ et enfin élimination de Y ?
- ⊖ Un seul calcul à réaliser : $P(X_i) = \sum_Y P(Y) P(X_i|Y)$
- Élimination de Y , puis élimination des $X_j, j \neq i$?
- ⊖ Explosion combinatoire

Élimination des variables

Ordre d'élimination - Illustration

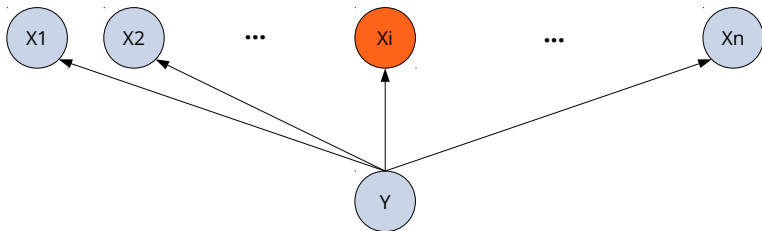


Quel(s) ordre(s) pour calculer $P(X_i)$?

- Élimination des $X_j, j \neq i$ et enfin élimination de Y ?
- ☹ Un seul calcul à réaliser : $P(X_i) = \sum_Y P(Y) P(X_i|Y)$
- Élimination de Y , puis élimination des $X_j, j \neq i$?
- ☹ Explosion combinatoire

Élimination des variables

Ordre d'élimination - Illustration



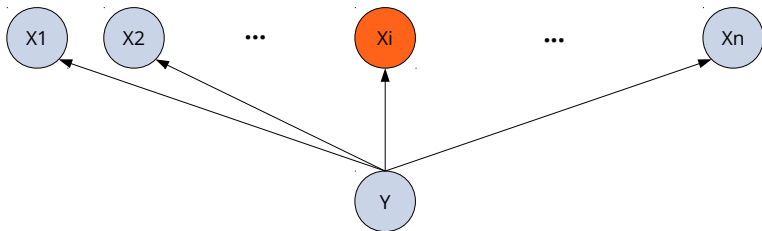
Quel(s) ordre(s) pour calculer $P(X_i)$?

- Élimination des $X_j, j \neq i$ et enfin élimination de Y ?
- ☹ Un seul calcul à réaliser : $P(X_i) = \sum_Y P(Y) P(X_i|Y)$
- Élimination de Y , puis élimination des $X_j, j \neq i$?

☹ Explosion combinatoire

Élimination des variables

Ordre d'élimination - Illustration



Quel(s) ordre(s) pour calculer $P(X_i)$?

- Élimination des $X_j, j \neq i$ et enfin élimination de Y ?
- ☺ Un seul calcul à réaliser : $P(X_i) = \sum_Y P(Y) P(X_i|Y)$
- Élimination de Y , puis élimination des $X_j, j \neq i$?
- ☹ **Explosion combinatoire**

Plan

- 1 Introduction
- 2 Notion de potentiel
- 3 Méthode d'élimination des variables
- 4 Conclusion**
- 5 Références
- 6 Annexes

Conclusion

Inférence probabiliste

- Objectif : Calculer des probabilités dans un RB
- Inférence exacte : Problème NP-Difficile

Méthode d'élimination des variables

- Méthode d'inférence exacte
- Méthode simple et intuitive ne reposant pas sur la théorie des graphes
- Principe :
 - 1 Réduction de la loi jointe en propageant l'évidence
 - 2 Élimination des variables hors requête et évidence par sommations successives
 - 3 Multiplication des potentiels restants à la fin de la procédure
 - 4 Normalisation du potentiel résultant afin d'obtenir la LPC recherchée
- Complexité de l'algorithme fortement dépendante de l'ordre d'élimination des variables

Plan

- 1 Introduction
- 2 Notion de potentiel
- 3 Méthode d'élimination des variables
- 4 Conclusion
- 5 Références
- 6 Annexes

Références



Cozman, Fabio G. (2000). "Generalizing Variable Elimination in Bayesian Networks". In : *the IBERAMIA/SBIA Workshops on Probabilistic Reasoning in Artificial Intelligence*. São Paulo : Editora Tec Art, p. 27-32.



Dechter, R. (1999). "Bucket Elimination : A Unifying Framework for Reasoning". In : *Artificial Intelligence* 113.1-2, p. 41-85.



Lauritzen, S. L. et D. J. Spiegelhalter (1988). "Local Computations with Probabilities on Graphical Structures and Their Application to Expert Systems". In : *Journal of the Royal Statistical Society* 50.2, p. 157-224.



Lin, Yan et Marek J. Druzdzel (1999). "Relevance-based Incremental Belief Updating in Bayesian Networks". In : *International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence* 13.02, p. 285-295. eprint : <http://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/S0218001499000161>.



Murphy, K. P., Y. Weiss et M. I. Jordan (1999). "Loopy Belief Propagation for Approximate Inference : An Empirical Study". In : *Proceedings of the 15th on Uncertainty in Artificial Intelligence*, p. 467-475.



Pearl, J. (sept. 1988). *Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems : Networks of Plausible Inference*. 1^{re} éd. Morgan Kaufmann.

Plan

- 1 Introduction
- 2 Notion de potentiel
- 3 Méthode d'élimination des variables
- 4 Conclusion
- 5 Références
- 6 Annexes
 - Algorithme

Élimination des variables

Algorithme

Entrée: LPC $\{P(X_i | \text{pa}(X_i))\}_{1 \leq i \leq n}$ de la loi jointe factorisée des v.a. $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$

Entrée: Une suite de v.a. de requête $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{X}$

Entrée: Une suite de v.a. $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{X}$, $\mathbf{Q} \cap \mathbf{E} = \emptyset$

Entrée: Une permutation σ des v.a. (X_1, \dots, X_n) représentant l'ordre d'élimination des v.a.

Sortie: La loi $P(\mathbf{Q} | \mathbf{E})$

1: // Initialisation de la liste des potentiels à considérer

2: $\mathcal{P} \leftarrow \{P(X_1 | \text{pa}(X_1)), \dots, P(X_n | \text{pa}(X_n))\}$

3: // Parcours de toutes les variables

4: **Pour chaque** $i = 1, \dots, n$ **Faire**

5: // Vérification si la variable courante (dans l'ordre d'élimination) est à éliminer

6: **Si** $X_{\sigma(i)} \in \mathbf{W} = \mathbf{X} \setminus (\mathbf{Q}, \mathbf{E})$ **Alors**

7: // Ensemble des potentiels cibles, i.e. dont le domaine contient la v.a. à éliminée

8: $\mathcal{B}_{\sigma(i)} \leftarrow \{\psi \in \mathcal{P} | X_{\sigma(i)} \in \text{Dom}(\psi)\}$

9: // Suppression des potentiels cibles de la liste de potentiels courante

10: $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \setminus \mathcal{B}_{\sigma(i)}$

11: $\Phi_{\sigma(i)} \leftarrow \prod_{\psi \in \mathcal{B}_{\sigma(i)}} \psi$ // Produit des potentiels cibles

12: $\Psi_{\sigma(i)} \leftarrow \sum_{X_{\sigma(i)}} \Phi_{\sigma(i)}$ // Élimination de la variable

13: // Mise à jour de la liste de potentiels qui ne contiennent plus la variable courante

14: $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \cup \{\Psi_{\sigma(i)}\}$

15: **Fin Si**

16: **Fin Pour**

17: $P(\mathbf{Q}, \mathbf{E}) \leftarrow \prod_{\psi \in \mathcal{P}} \psi$

18: Déduction de $P(\mathbf{Q} | \mathbf{E})$ en normalisant $P(\mathbf{Q} | \mathbf{E})$ sur la suite de v.a. \mathbf{Q}

Élimination des variables

Algorithme

Entrée: LPC $\{P(X_i | \text{pa}(X_i))\}_{1 \leq i \leq n}$ de la loi jointe factorisée des v.a. $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$

Entrée: Une suite de v.a. de requête $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{X}$

Entrée: Une suite de v.a. $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{X}, \mathbf{Q} \cap \mathbf{E} = \emptyset$

Entrée: Une permutation σ des v.a. (X_1, \dots, X_n) représentant l'ordre d'élimination des v.a

Sortie: La loi $P(\mathbf{Q} | \mathbf{E})$

- 1: // Initialisation de la liste des potentiels à considérer
- 2: $\mathcal{P} \leftarrow \{P(X_1 | \text{pa}(X_1)), \dots, P(X_n | \text{pa}(X_n))\}$
- 3: // Parcours de toutes les variables
- 4: **Pour chaque** $i = 1, \dots, n$ **Faire**
- 5: // Vérification si la variable courante (dans l'ordre d'élimination) est à éliminer
- 6: **Si** $X_{\sigma(i)} \in \mathbf{W} = \mathbf{X} \setminus (\mathbf{Q}, \mathbf{E})$ **Alors**
- 7: // Ensemble des potentiels cibles, i.e. dont le domaine contient la v.a. à éliminée
- 8: $\mathcal{B}_{\sigma(i)} \leftarrow \{\psi \in \mathcal{P} | X_{\sigma(i)} \in \text{Dom}(\psi)\}$
- 9: // Suppression des potentiels cibles de la liste de potentiels courante
- 10: $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \setminus \mathcal{B}_{\sigma(i)}$
- 11: $\Phi_{\sigma(i)} \leftarrow \prod_{\psi \in \mathcal{B}_{\sigma(i)}} \psi$ // Produit des potentiels cibles
- 12: $\Psi_{\sigma(i)} \leftarrow \sum_{X_{\sigma(i)}} \Phi_{\sigma(i)}$ // Élimination de la variable
- 13: // Mise à jour de la liste de potentiels qui ne contiennent plus la variable courante
- 14: $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \cup \{\Psi_{\sigma(i)}\}$
- 15: **Fin Si**
- 16: **Fin Pour**
- 17: $P(\mathbf{Q}, \mathbf{E}) \leftarrow \prod_{\psi \in \mathcal{P}} \psi$
- 18: Déduction de $P(\mathbf{Q} | \mathbf{E})$ en normalisant $P(\mathbf{Q} | \mathbf{E})$ sur la suite de v.a. \mathbf{Q}

Élimination des variables

Algorithme

Entrée: LPC $\{P(X_i | \text{pa}(X_i))\}_{1 \leq i \leq n}$ de la loi jointe factorisée des v.a. $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$

Entrée: Une suite de v.a. de requête $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{X}$

Entrée: Une suite de v.a. $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{X}$, $\mathbf{Q} \cap \mathbf{E} = \emptyset$

Entrée: Une permutation σ des v.a. (X_1, \dots, X_n) représentant l'ordre d'élimination des v.a.

Sortie: La loi $P(\mathbf{Q} | \mathbf{E})$

- 1: // Initialisation de la liste des potentiels à considérer
- 2: $\mathcal{P} \leftarrow \{P(X_1 | \text{pa}(X_1)), \dots, P(X_n | \text{pa}(X_n))\}$
- 3: // Parcours de toutes les variables
- 4: **Pour chaque** $i = 1, \dots, n$ **Faire**
- 5: // Vérification si la variable courante (dans l'ordre d'élimination) est à éliminer
- 6: **Si** $X_{\sigma(i)} \in \mathbf{W} = \mathbf{X} \setminus (\mathbf{Q}, \mathbf{E})$ **Alors**
- 7: // Ensemble des potentiels cibles, i.e. dont le domaine contient la v.a. à éliminée
- 8: $\mathcal{B}_{\sigma(i)} \leftarrow \{\psi \in \mathcal{P} | X_{\sigma(i)} \in \text{Dom}(\psi)\}$
- 9: // Suppression des potentiels cibles de la liste de potentiels courante
- 10: $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \setminus \mathcal{B}_{\sigma(i)}$
- 11: $\Phi_{\sigma(i)} \leftarrow \prod_{\psi \in \mathcal{B}_{\sigma(i)}} \psi$ // Produit des potentiels cibles
- 12: $\Psi_{\sigma(i)} \leftarrow \sum_{X_{\sigma(i)}} \Phi_{\sigma(i)}$ // Élimination de la variable
- 13: // Mise à jour de la liste de potentiels qui ne contiennent plus la variable courante
- 14: $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \cup \{\Psi_{\sigma(i)}\}$
- 15: **Fin Si**
- 16: **Fin Pour**
- 17: $P(\mathbf{Q}, \mathbf{E}) \leftarrow \prod_{\psi \in \mathcal{P}} \psi$
- 18: Déduction de $P(\mathbf{Q} | \mathbf{E})$ en normalisant $P(\mathbf{Q} | \mathbf{E})$ sur la suite de v.a. \mathbf{Q}

Élimination des variables

Algorithme

Entrée: LPC $\{P(X_i | \text{pa}(X_i))\}_{1 \leq i \leq n}$ de la loi jointe factorisée des v.a. $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$

Entrée: Une suite de v.a. de requête $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{X}$

Entrée: Une suite de v.a. $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{X}$, $\mathbf{Q} \cap \mathbf{E} = \emptyset$

Entrée: Une permutation σ des v.a. (X_1, \dots, X_n) représentant l'ordre d'élimination des v.a.

Sortie: La loi $P(\mathbf{Q} | \mathbf{E})$

1: // Initialisation de la liste des potentiels à considérer

2: $\mathcal{P} \leftarrow \{P(X_1 | \text{pa}(X_1)), \dots, P(X_n | \text{pa}(X_n))\}$

3: // Parcours de toutes les variables

4: **Pour chaque** $i = 1, \dots, n$ **Faire**

5: // Vérification si la variable courante (dans l'ordre d'élimination) est à éliminer

6: **Si** $X_{\sigma(i)} \in \mathbf{W} = \mathbf{X} \setminus (\mathbf{Q}, \mathbf{E})$ **Alors**

7: // Ensemble des potentiels cibles, i.e. dont le domaine contient la v.a. à éliminée

8: $\mathcal{B}_{\sigma(i)} \leftarrow \{\psi \in \mathcal{P} | X_{\sigma(i)} \in \text{Dom}(\psi)\}$

9: // Suppression des potentiels cibles de la liste de potentiels courante

10: $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \setminus \mathcal{B}_{\sigma(i)}$

11: $\Phi_{\sigma(i)} \leftarrow \prod_{\psi \in \mathcal{B}_{\sigma(i)}} \psi$ // Produit des potentiels cibles

12: $\Psi_{\sigma(i)} \leftarrow \sum_{X_{\sigma(i)}} \Phi_{\sigma(i)}$ // Élimination de la variable

13: // Mise à jour de la liste de potentiels qui ne contiennent plus la variable courante

14: $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \cup \{\Psi_{\sigma(i)}\}$

15: **Fin Si**

16: **Fin Pour**

17: $P(\mathbf{Q}, \mathbf{E}) \leftarrow \prod_{\psi \in \mathcal{P}} \psi$

18: Déduction de $P(\mathbf{Q} | \mathbf{E})$ en normalisant $P(\mathbf{Q} | \mathbf{E})$ sur la suite de v.a. \mathbf{Q}

Élimination des variables

Algorithme

Entrée: LPC $\{P(X_i | \text{pa}(X_i))\}_{1 \leq i \leq n}$ de la loi jointe factorisée des v.a. $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$

Entrée: Une suite de v.a. de requête $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{X}$

Entrée: Une suite de v.a. $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{X}$, $\mathbf{Q} \cap \mathbf{E} = \emptyset$

Entrée: Une permutation σ des v.a. (X_1, \dots, X_n) représentant l'ordre d'élimination des v.a.

Sortie: La loi $P(\mathbf{Q} | \mathbf{E})$

1: // Initialisation de la liste des potentiels à considérer

2: $\mathcal{P} \leftarrow \{P(X_1 | \text{pa}(X_1)), \dots, P(X_n | \text{pa}(X_n))\}$

3: // Parcours de toutes les variables

4: **Pour chaque** $i = 1, \dots, n$ **Faire**

5: // Vérification si la variable courante (dans l'ordre d'élimination) est à éliminer

6: **Si** $X_{\sigma(i)} \in \mathbf{W} = \mathbf{X} \setminus (\mathbf{Q}, \mathbf{E})$ **Alors**

7: // Ensemble des potentiels cibles, i.e. dont le domaine contient la v.a. à éliminée

8: $\mathcal{B}_{\sigma(i)} \leftarrow \{\psi \in \mathcal{P} | X_{\sigma(i)} \in \text{Dom}(\psi)\}$

9: // Suppression des potentiels cibles de la liste de potentiels courante

10: $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \setminus \mathcal{B}_{\sigma(i)}$

11: $\Phi_{\sigma(i)} \leftarrow \prod_{\psi \in \mathcal{B}_{\sigma(i)}} \psi$ // Produit des potentiels cibles

12: $\Psi_{\sigma(i)} \leftarrow \sum_{X_{\sigma(i)}} \Phi_{\sigma(i)}$ // Élimination de la variable

13: // Mise à jour de la liste de potentiels qui ne contiennent plus la variable courante

14: $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \cup \{\Psi_{\sigma(i)}\}$

15: **Fin Si**

16: **Fin Pour**

17: $P(\mathbf{Q}, \mathbf{E}) \leftarrow \prod_{\psi \in \mathcal{P}} \psi$

18: Déduction de $P(\mathbf{Q} | \mathbf{E})$ en normalisant $P(\mathbf{Q} | \mathbf{E})$ sur la suite de v.a. \mathbf{Q}

Élimination des variables

Algorithme

Entrée: LPC $\{P(X_i | \text{pa}(X_i))\}_{1 \leq i \leq n}$ de la loi jointe factorisée des v.a. $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$

Entrée: Une suite de v.a. de requête $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{X}$

Entrée: Une suite de v.a. $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{X}$, $\mathbf{Q} \cap \mathbf{E} = \emptyset$

Entrée: Une permutation σ des v.a. (X_1, \dots, X_n) représentant l'ordre d'élimination des v.a.

Sortie: La loi $P(\mathbf{Q} | \mathbf{E})$

1: // Initialisation de la liste des potentiels à considérer

2: $\mathcal{P} \leftarrow \{P(X_1 | \text{pa}(X_1)), \dots, P(X_n | \text{pa}(X_n))\}$

3: // Parcours de toutes les variables

4: **Pour chaque** $i = 1, \dots, n$ **Faire**

5: // Vérification si la variable courante (dans l'ordre d'élimination) est à éliminer

6: **Si** $X_{\sigma(i)} \in \mathbf{W} = \mathbf{X} \setminus (\mathbf{Q}, \mathbf{E})$ **Alors**

7: // Ensemble des potentiels cibles, i.e. dont le domaine contient la v.a. à éliminée

8: $\mathcal{B}_{\sigma(i)} \leftarrow \{\psi \in \mathcal{P} | X_{\sigma(i)} \in \text{Dom}(\psi)\}$

9: // Suppression des potentiels cibles de la liste de potentiels courante

10: $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \setminus \mathcal{B}_{\sigma(i)}$

11: $\Phi_{\sigma(i)} \leftarrow \prod_{\psi \in \mathcal{B}_{\sigma(i)}} \psi$ // Produit des potentiels cibles

12: $\Psi_{\sigma(i)} \leftarrow \sum_{X_{\sigma(i)}} \Phi_{\sigma(i)}$ // Élimination de la variable

13: // Mise à jour de la liste de potentiels qui ne contiennent plus la variable courante

14: $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \cup \{\Psi_{\sigma(i)}\}$

15: **Fin Si**

16: **Fin Pour**

17: $P(\mathbf{Q}, \mathbf{E}) \leftarrow \prod_{\psi \in \mathcal{P}} \psi$

18: Déduction de $P(\mathbf{Q} | \mathbf{E})$ en normalisant $P(\mathbf{Q} | \mathbf{E})$ sur la suite de v.a. \mathbf{Q}

Élimination des variables

Algorithme

Entrée: LPC $\{P(X_i | \text{pa}(X_i))\}_{1 \leq i \leq n}$ de la loi jointe factorisée des v.a. $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$

Entrée: Une suite de v.a. de requête $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{X}$

Entrée: Une suite de v.a. $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{X}$, $\mathbf{Q} \cap \mathbf{E} = \emptyset$

Entrée: Une permutation σ des v.a. (X_1, \dots, X_n) représentant l'ordre d'élimination des v.a.

Sortie: La loi $P(\mathbf{Q} | \mathbf{E})$

1: // Initialisation de la liste des potentiels à considérer

2: $\mathcal{P} \leftarrow \{P(X_1 | \text{pa}(X_1)), \dots, P(X_n | \text{pa}(X_n))\}$

3: // Parcours de toutes les variables

4: **Pour chaque** $i = 1, \dots, n$ **Faire**

5: // Vérification si la variable courante (dans l'ordre d'élimination) est à éliminer

6: **Si** $X_{\sigma(i)} \in \mathbf{W} = \mathbf{X} \setminus (\mathbf{Q}, \mathbf{E})$ **Alors**

7: // Ensemble des potentiels cibles, i.e. dont le domaine contient la v.a. à éliminée

8: $\mathcal{B}_{\sigma(i)} \leftarrow \{\psi \in \mathcal{P} | X_{\sigma(i)} \in \text{Dom}(\psi)\}$

9: // Suppression des potentiels cibles de la liste de potentiels courante

10: $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \setminus \mathcal{B}_{\sigma(i)}$

11: $\Phi_{\sigma(i)} \leftarrow \prod_{\psi \in \mathcal{B}_{\sigma(i)}} \psi$ // Produit des potentiels cibles

12: $\Psi_{\sigma(i)} \leftarrow \sum_{X_{\sigma(i)}} \Phi_{\sigma(i)}$ // Élimination de la variable

13: // Mise à jour de la liste de potentiels qui ne contiennent plus la variable courante

14: $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \cup \{\Psi_{\sigma(i)}\}$

15: **Fin Si**

16: **Fin Pour**

17: $P(\mathbf{Q}, \mathbf{E}) \leftarrow \prod_{\psi \in \mathcal{P}} \psi$

18: Déduction de $P(\mathbf{Q} | \mathbf{E})$ en normalisant $P(\mathbf{Q} | \mathbf{E})$ sur la suite de v.a. \mathbf{Q}

Élimination des variables

Algorithme

Entrée: LPC $\{P(X_i | \text{pa}(X_i))\}_{1 \leq i \leq n}$ de la loi jointe factorisée des v.a. $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$

Entrée: Une suite de v.a. de requête $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{X}$

Entrée: Une suite de v.a. $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{X}$, $\mathbf{Q} \cap \mathbf{E} = \emptyset$

Entrée: Une permutation σ des v.a. (X_1, \dots, X_n) représentant l'ordre d'élimination des v.a.

Sortie: La loi $P(\mathbf{Q} | \mathbf{E})$

1: // Initialisation de la liste des potentiels à considérer

2: $\mathcal{P} \leftarrow \{P(X_1 | \text{pa}(X_1)), \dots, P(X_n | \text{pa}(X_n))\}$

3: // Parcours de toutes les variables

4: **Pour chaque** $i = 1, \dots, n$ **Faire**

5: // Vérification si la variable courante (dans l'ordre d'élimination) est à éliminer

6: **Si** $X_{\sigma(i)} \in \mathbf{W} = \mathbf{X} \setminus (\mathbf{Q}, \mathbf{E})$ **Alors**

7: // Ensemble des potentiels cibles, i.e. dont le domaine contient la v.a. à éliminée

8: $\mathcal{B}_{\sigma(i)} \leftarrow \{\psi \in \mathcal{P} | X_{\sigma(i)} \in \text{Dom}(\psi)\}$

9: // Suppression des potentiels cibles de la liste de potentiels courante

10: $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \setminus \mathcal{B}_{\sigma(i)}$

11: $\Phi_{\sigma(i)} \leftarrow \prod_{\psi \in \mathcal{B}_{\sigma(i)}} \psi$ // Produit des potentiels cibles

12: $\Psi_{\sigma(i)} \leftarrow \sum_{X_{\sigma(i)}} \Phi_{\sigma(i)}$ // Élimination de la variable

13: // Mise à jour de la liste de potentiels qui ne contiennent plus la variable courante

14: $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \cup \{\Psi_{\sigma(i)}\}$

15: **Fin Si**

16: **Fin Pour**

17: $P(\mathbf{Q}, \mathbf{E}) \leftarrow \prod_{\psi \in \mathcal{P}} \psi$

18: Déduction de $P(\mathbf{Q} | \mathbf{E})$ en normalisant $P(\mathbf{Q} | \mathbf{E})$ sur la suite de v.a. \mathbf{Q}

Élimination des variables

Algorithme

Entrée: LPC $\{P(X_i | \text{pa}(X_i))\}_{1 \leq i \leq n}$ de la loi jointe factorisée des v.a. $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$

Entrée: Une suite de v.a. de requête $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{X}$

Entrée: Une suite de v.a. $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{X}$, $\mathbf{Q} \cap \mathbf{E} = \emptyset$

Entrée: Une permutation σ des v.a. (X_1, \dots, X_n) représentant l'ordre d'élimination des v.a.

Sortie: La loi $P(\mathbf{Q} | \mathbf{E})$

1: // Initialisation de la liste des potentiels à considérer

2: $\mathcal{P} \leftarrow \{P(X_1 | \text{pa}(X_1)), \dots, P(X_n | \text{pa}(X_n))\}$

3: // Parcours de toutes les variables

4: **Pour chaque** $i = 1, \dots, n$ **Faire**

5: // Vérification si la variable courante (dans l'ordre d'élimination) est à éliminer

6: **Si** $X_{\sigma(i)} \in \mathbf{W} = \mathbf{X} \setminus (\mathbf{Q}, \mathbf{E})$ **Alors**

7: // Ensemble des potentiels cibles, i.e. dont le domaine contient la v.a. à éliminée

8: $\mathcal{B}_{\sigma(i)} \leftarrow \{\psi \in \mathcal{P} | X_{\sigma(i)} \in \text{Dom}(\psi)\}$

9: // Suppression des potentiels cibles de la liste de potentiels courante

10: $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \setminus \mathcal{B}_{\sigma(i)}$

11: $\Phi_{\sigma(i)} \leftarrow \prod_{\psi \in \mathcal{B}_{\sigma(i)}} \psi$ // Produit des potentiels cibles

12: $\Psi_{\sigma(i)} \leftarrow \sum_{X_{\sigma(i)}} \Phi_{\sigma(i)}$ // Élimination de la variable

13: // Mise à jour de la liste de potentiels qui ne contiennent plus la variable courante

14: $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \cup \{\Psi_{\sigma(i)}\}$

15: **Fin Si**

16: **Fin Pour**

17: $P(\mathbf{Q}, \mathbf{E}) \leftarrow \prod_{\psi \in \mathcal{P}} \psi$

18: Déduction de $P(\mathbf{Q} | \mathbf{E})$ en normalisant $P(\mathbf{Q} | \mathbf{E})$ sur la suite de v.a. \mathbf{Q}

Élimination des variables

Algorithme

Entrée: LPC $\{P(X_i | \text{pa}(X_i))\}_{1 \leq i \leq n}$ de la loi jointe factorisée des v.a. $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$

Entrée: Une suite de v.a. de requête $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{X}$

Entrée: Une suite de v.a. $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{X}$, $\mathbf{Q} \cap \mathbf{E} = \emptyset$

Entrée: Une permutation σ des v.a. (X_1, \dots, X_n) représentant l'ordre d'élimination des v.a.

Sortie: La loi $P(\mathbf{Q} | \mathbf{E})$

1: // Initialisation de la liste des potentiels à considérer

2: $\mathcal{P} \leftarrow \{P(X_1 | \text{pa}(X_1)), \dots, P(X_n | \text{pa}(X_n))\}$

3: // Parcours de toutes les variables

4: **Pour chaque** $i = 1, \dots, n$ **Faire**

5: // Vérification si la variable courante (dans l'ordre d'élimination) est à éliminer

6: **Si** $X_{\sigma(i)} \in \mathbf{W} = \mathbf{X} \setminus (\mathbf{Q}, \mathbf{E})$ **Alors**

7: // Ensemble des potentiels cibles, i.e. dont le domaine contient la v.a. à éliminée

8: $\mathcal{B}_{\sigma(i)} \leftarrow \{\psi \in \mathcal{P} | X_{\sigma(i)} \in \text{Dom}(\psi)\}$

9: // Suppression des potentiels cibles de la liste de potentiels courante

10: $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \setminus \mathcal{B}_{\sigma(i)}$

11: $\Phi_{\sigma(i)} \leftarrow \prod_{\psi \in \mathcal{B}_{\sigma(i)}} \psi$ // Produit des potentiels cibles

12: $\Psi_{\sigma(i)} \leftarrow \sum_{X_{\sigma(i)}} \Phi_{\sigma(i)}$ // Élimination de la variable

13: // Mise à jour de la liste de potentiels qui ne contiennent plus la variable courante

14: $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \cup \{\Psi_{\sigma(i)}\}$

15: **Fin Si**

16: **Fin Pour**

17: $P(\mathbf{Q}, \mathbf{E}) \leftarrow \prod_{\psi \in \mathcal{P}} \psi$

18: Déduction de $P(\mathbf{Q} | \mathbf{E})$ en normalisant $P(\mathbf{Q} | \mathbf{E})$ sur la suite de v.a. \mathbf{Q}

Élimination des variables

Algorithme

Entrée: LPC $\{P(X_i | \text{pa}(X_i))\}_{1 \leq i \leq n}$ de la loi jointe factorisée des v.a. $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$

Entrée: Une suite de v.a. de requête $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{X}$

Entrée: Une suite de v.a. $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{X}$, $\mathbf{Q} \cap \mathbf{E} = \emptyset$

Entrée: Une permutation σ des v.a. (X_1, \dots, X_n) représentant l'ordre d'élimination des v.a

Sortie: La loi $P(\mathbf{Q} | \mathbf{E})$

1: // Initialisation de la liste des potentiels à considérer

2: $\mathcal{P} \leftarrow \{P(X_1 | \text{pa}(X_1)), \dots, P(X_n | \text{pa}(X_n))\}$

3: // Parcours de toutes les variables

4: **Pour chaque** $i = 1, \dots, n$ **Faire**

5: // Vérification si la variable courante (dans l'ordre d'élimination) est à éliminer

6: **Si** $X_{\sigma(i)} \in \mathbf{W} = \mathbf{X} \setminus (\mathbf{Q}, \mathbf{E})$ **Alors**

7: // Ensemble des potentiels cibles, i.e. dont le domaine contient la v.a. à éliminée

8: $\mathcal{B}_{\sigma(i)} \leftarrow \{\psi \in \mathcal{P} | X_{\sigma(i)} \in \text{Dom}(\psi)\}$

9: // Suppression des potentiels cibles de la liste de potentiels courante

10: $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \setminus \mathcal{B}_{\sigma(i)}$

11: $\Phi_{\sigma(i)} \leftarrow \prod_{\psi \in \mathcal{B}_{\sigma(i)}} \psi$ // Produit des potentiels cibles

12: $\Psi_{\sigma(i)} \leftarrow \sum_{X_{\sigma(i)}} \Phi_{\sigma(i)}$ // Élimination de la variable

13: // Mise à jour de la liste de potentiels qui ne contiennent plus la variable courante

14: $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \cup \{\Psi_{\sigma(i)}\}$

15: **Fin Si**

16: **Fin Pour**

17: $P(\mathbf{Q}, \mathbf{E}) \leftarrow \prod_{\psi \in \mathcal{P}} \psi$

18: Déduction de $P(\mathbf{Q} | \mathbf{E})$ en normalisant $P(\mathbf{Q} | \mathbf{E})$ sur la suite de v.a. \mathbf{Q}

Élimination des variables

Algorithme

Entrée: LPC $\{P(X_i | \text{pa}(X_i))\}_{1 \leq i \leq n}$ de la loi jointe factorisée des v.a. $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$

Entrée: Une suite de v.a. de requête $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{X}$

Entrée: Une suite de v.a. $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{X}$, $\mathbf{Q} \cap \mathbf{E} = \emptyset$

Entrée: Une permutation σ des v.a. (X_1, \dots, X_n) représentant l'ordre d'élimination des v.a

Sortie: La loi $P(\mathbf{Q} | \mathbf{E})$

- 1: // Initialisation de la liste des potentiels à considérer
- 2: $\mathcal{P} \leftarrow \{P(X_1 | \text{pa}(X_1)), \dots, P(X_n | \text{pa}(X_n))\}$
- 3: // Parcours de toutes les variables
- 4: **Pour chaque** $i = 1, \dots, n$ **Faire**
- 5: // Vérification si la variable courante (dans l'ordre d'élimination) est à éliminer
- 6: **Si** $X_{\sigma(i)} \in \mathbf{W} = \mathbf{X} \setminus (\mathbf{Q}, \mathbf{E})$ **Alors**
- 7: // Ensemble des potentiels cibles, i.e. dont le domaine contient la v.a. à éliminée
- 8: $\mathcal{B}_{\sigma(i)} \leftarrow \{\psi \in \mathcal{P} | X_{\sigma(i)} \in \text{Dom}(\psi)\}$
- 9: // Suppression des potentiels cibles de la liste de potentiels courante
- 10: $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \setminus \mathcal{B}_{\sigma(i)}$
- 11: $\Phi_{\sigma(i)} \leftarrow \prod_{\psi \in \mathcal{B}_{\sigma(i)}} \psi$ // Produit des potentiels cibles
- 12: $\Psi_{\sigma(i)} \leftarrow \sum_{X_{\sigma(i)}} \Phi_{\sigma(i)}$ // Élimination de la variable
- 13: // Mise à jour de la liste de potentiels qui ne contiennent plus la variable courante
- 14: $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \cup \{\Psi_{\sigma(i)}\}$
- 15: **Fin Si**
- 16: **Fin Pour**
- 17: $P(\mathbf{Q}, \mathbf{E}) \leftarrow \prod_{\psi \in \mathcal{P}} \psi$
- 18: Déduction de $P(\mathbf{Q} | \mathbf{E})$ en normalisant $P(\mathbf{Q} | \mathbf{E})$ sur la suite de v.a. \mathbf{Q}