

## Szakdolgozat

# Fázisillesztés modellezése spontán parametrikus lekonverziós nemlineáris kristályokban

Betz Roland

Témavezető: Dr. Sarkadi Tamás

Docens

BME Atomfizika tanszék

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

2020

## A szakdolgozat kiírása

A szakdolgozattéma az Atomfizika Tanszéken zajló kvantumoptikai kutatásokhoz, laborfejlesztésekhez kapcsolódik. A fejlesztések egyik célkitűzése, hogy összefonódott fotonpárokat előállító fényforrások épüljenek fel. Már megépítésre került egy BBO (béta-bárium borát) kristály segítségével megvalósított fényforrás, valamint előkészületben van egy ppKTP (periodikusan polarizált kálium titanil foszfát) kristályt tartalmazó fényforrás is. Az ikerfoton fényforrások egyik legfontosabb alkotóeleme a spontán parametrikus konverziót megvalósító nemlineáris kristály.

A diplomamunka készítőjének feladata, hogy fejlesszen számítógépes modellt, mely segítségével a kristályban lezajló főbb optikai folyamatok értelmezhetőek. A modell képes legyen kezelni az anizotróp hullámterjedést az egytengelyű kristályban és annak határfelületein, képes legyen a fázisillesztés modellezésére, valamint kezelje a kristály diszperzióját. Elvárás, hogy a modell eredményei validálhatók legyenek a kísérleti eredményekkel.

## **Önállósági nyilatkozat**

Alulírott Betz Roland a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Fizika BSc. szakos hallgatója kijelentem, hogy ezt a szakdolgozatot meg nem engedett segédeszközök nélkül, önállóan, a témavezető irányításával készítettem, és csak a megadott forrásokat használtam fel. Minden olyan részt, melyet szó szerint, vagy azonos értelemben, de átfogalmazva más forrásból vettem, a forrás megadásával jelöltem.

Budapest, 2020.05.29

.....  
Betz Roland

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>1</b>
<b>2. Elméleti háttér</b>	<b>2</b>
2.1. Nemlineáris optika .....	2
2.1.1. Nemlineáris polarizáció .....	2
2.1.2. Hullámegyenletek nemlineáris közegekben .....	3
2.1.3. Összegfrekvencia generálás .....	5
2.1.4. Fázisillesztés .....	8
2.1.5. Spontán parametrikus lekonverzió .....	11
<b>3. Kísérleti elrendezés</b>	<b>13</b>
<b>4. Type I fázisillesztés modellezése végeselem módszerrel</b>	<b>15</b>
4.1. Validáció .....	15
4.2. A modellezésnél alkalmazott elméleti megfontolások .....	18
4.2.1. A lekonvertált fotonok modellezése .....	18
4.2.2. Poynting vektor .....	21
4.2.3. A távoltéri szögeloszlás becslése elméleti úton .....	23
4.3. Kétdimenziós modellezés .....	25
4.3.1. Szimmetrikus eset .....	25
4.3.2. Aszimmetrikus eset .....	28
4.4. Háromdimenziós modellezés .....	29
<b>5. Összefoglalás és kitekintés</b>	<b>31</b>

# 1. Bevezetés

Szakdolgozatom a BME Atomfizika tanszékén zajló, összefonódott fotonpárok keltését megvalósító kísérletéhez kapcsolódik. A fotonpárok keltése egy másodrendű nemlineáris optikai folyamattal, a spontán parametrikus lekonverzióval (a továbbiakban SPDC) valósul meg. A kísérleti elrendezés fontos eleme egy  $\beta$ -bárium borát optikai anizotrópiával rendelkező kristály, amelyben az SPDC folyamat lejátszódik. A szakdolgozatom célja ennek a folyamatnak, és főként a kristályban és azon kívül történő hullámterjedésnek a modellezése végeselem módszerrel, különös tekintettel az SPDC folyamat során a kristályból kilépő lekonvertált fotonok távoltéri szórási képére. Alapvetően egy kísérleti megközelítést alkalmaztam, de természetesen a modellezés egyes lépéseit, az alkalmazott közelítéseket és egyszerűsítéseket elméleti megfontolásokkal is igyekeztem alátámasztani.

A következő fejezetekben elsőként az SPDC megértéséhez szükséges legfontosabb elméleti ismereteket foglalom össze, majd nagyvonalakban ismertetem az SPDC folyamatot megvalósító kísérleti összeállítást, végül bemutatom a végeselem módszerrel készült szimulációs modelleket. Amennyiben az elkészült modell pontosan visszaadja az adott kísérleti elrendezés esetén eddig tett megfigyeléseket, akkor remélhetőleg a továbbiakban újabb kísérleti elrendezések teszteléséhez, előrejelzéshez is jól használható lesz majd.

## 2. Elméleti háttér

### 2.1. Nemlineáris optika

Egy nemlineáris optikai rendszer nemlinearitásán azt értjük, hogy egy anyagi rendszer elektromágneses gerjesztésre adott válasza nem lineáris függvénye a gerjesztés erősségének. Ennek pontosabb, matematikai alapú megfogalmazásához tekintsük egy anyagban a dipólmomentumok térfogati sűrűségét leíró polarizációvektor és a gerjesztő térerősség kapcsolatát.

#### 2.1.1. Nemlineáris polarizáció

Hagyományos esetben a polarizáció és az alkalmazott térerősség kapcsolata lineáris, vagyis:

$$P(t) = \varepsilon_0 \chi^{(1)} E(t) \quad (1)$$

ahol  $\varepsilon_0$  természeti állandó a vákuum permittivitása,  $\chi^{(1)}$  arányossági tényezőt pedig az adott közeg lineáris szuszceptibilitásának nevezzük. Nemlineáris esetben leggyakrabban a polarizáció gerjesztéstől való függését a térerősség hatványsorba fejtésével kaphatjuk, amely az (1) egyenlet általánosításának tekinthető:

$$P(t) = \varepsilon_0 \chi^{(1)} E(t) + \varepsilon_0 \chi^{(2)} E^2(t) + \dots \quad (2)$$

ahol a  $\chi^{(n)}$  arányossági tényezőket  $n$ -edrendű nemlineáris szuszceptibilitásnak nevezzük. Az egyszerűség kedvéért  $P(t)$  és  $E(t)$  mennyiségeket most skalárként kezeltük. Általános (vektoriális) esetben a  $\chi^{(n)}$  mennyiségek tenzorok. Az is igaz továbbá, hogy a fenti képletek csak veszteség- és diszperziómentes esetben érvényesek.

Az ok, amiért a polarizáció kulcsfontosságú a nemlineáris jelenségek leírásában az, hogy az időfüggő polarizáció elektromágneses terek forrásaként viselkedhet, ahogy azt majd a későbbiekben a hullámegyenletek tárgyalásánál látni fogjuk<sup>[1]</sup>. A nemlineáris optikai kölcsönhatás egy egyszerű példája a másodharmonikus keltés. Tekintsünk egy nemlineáris kristályt, nem nulla másodrendű nemlineáris szuszceptibilitással, és essen be rá egy lézernyaláb, amelynek elektromos tere legyen:

$$E(t) = E_0 e^{-i\omega t} + c. c. \quad (3)$$

ahol most alkalmazzunk komplex írásmódot,  $\omega$  mennyiség a beeső lézernyaláb körfrekvenciája, a c.c. pedig a komplex konjugáltat jelöli. Behelyettesítve a (2) egyenletbe:

$$P(t) = (\varepsilon_0 \chi^{(1)} E_0 e^{-i\omega t} + c.c.) + (\varepsilon_0 \chi^{(2)} E_0^2 e^{-i2\omega t} + 2\varepsilon_0 \chi^{(2)} E_0 E_0^* + c.c.) \quad (4)$$

Megfigyelhető, hogy a nemlineáris effektus következtében a gerjesztéshez képest egy további frekvenciakomponens jelenik meg a nemlineáris kristály válaszában.

### 2.1.2. Hullámegyenletek nemlineáris közegekben

Az előző alfejezetben a polarizáció tárgyalásánál említettem, hogy nemlineáris esetben a polarizáció új frekvenciakomponensű elektromágneses hullámok forrása lehet. Ebben az alfejezetben ezt a jelenséget próbálom részletesebben leírni a Maxwell-egyenletek segítségével. Ehhez két Maxwell-egyenletet fogunk felhasználni, és olyan közegeket fogunk vizsgálni, amely nem tartalmaz szabad töltéseket, sem áramokat, azaz:

$$\rho = 0 \quad \text{és} \quad \mathbf{j} = 0 \quad (5)$$

ahol  $\rho$  a töltéssűrűség,  $\mathbf{j}$  pedig az áramsűrűségvektor. Szintén feltesszük, hogy az anyag, amit vizsgálunk nem mágneses:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad (6)$$

Használni fogjuk még a fény vákuumban mért sebességére vonatkozó alábbi összefüggést is:

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \quad (7)$$

ahol  $\mu_0$  a vákuum permeabilitása természeti állandó. Fontos még az elektromos térerősség és az eltolás viszonya:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (8)$$

ahol általánosan  $\mathbf{P}$  nem lineáris függvénye  $\mathbf{E}$ -nek. Ezek után lássuk a két Maxwell-egyenletet a fenti összefüggések felhasználásával:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \quad (9)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \mathbf{H}) \quad (10)$$

Képezzük most a (10) egyenlet rotációját, az így kapott eredmény jobb oldalán pedig a rotációt felcserélve az idő szerinti deriválttal, majd a (9) egyenlet alapján a mágneses teret az eltolással helyettesítve a következő egyenlet adódik:

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{D} \quad (11)$$

Az eltolást az egyenletből kiküszöbölve átrendezés után adódik:

$$\text{rot rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = -\frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P} \quad (12)$$

Ez a hullámegyenlet legáltalánosabb alakja a nemlineáris optikában. Bizonyos körülmények között ez a kifejezés tovább egyszerűsíthető egy vektoranalízisből ismert azonosság segítségével, mellyel (12) bal oldalának első tagjára írható:

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} \quad (13)$$

ahol a jobb oldal második tagjánál szereplő  $\Delta$  jel a Laplace operátort jelenti. Lineáris, izotróp esetben a jobb oldal első tagja nulla a  $\text{div } \mathbf{D} = 0$  feltétel miatt, nemlineáris esetben viszont általában nem az. Ugyanakkor legtöbb esetben ennek a tagnak a járuléka elhanyagolható, emiatt pedig a (12) hullámegyenlet az alábbi alakban is írható:

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P} \quad (14)$$

illetve írhatjuk ennek az elektromos eltolással kifejezett alternatív formáját is:

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{D} = 0 \quad (15)$$

Tovább finomítva a kifejezésen a polarizációt szétbonthatjuk lineáris  $\mathbf{P}^{(1)}$  és nemlineáris  $\mathbf{P}^{(NL)}$  komponensekre, amelyekkel az elektromos eltolásra írhatjuk:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^{(1)} + \mathbf{P}^{(NL)} \quad (16)$$

Ezt visszahelyettesítve a (14) egyenletbe kapjuk:

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{D}^{(1)} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P}^{(NL)} \quad (17)$$

Hogy lássuk, az egyenletnek ezen legutolsó alakja miért is hasznos, tekintsünk példaként egy veszteségmentes, diszperziómentes, izotróp közeget, amely esetben  $\mathbf{D}^{(1)} = \varepsilon_0 \varepsilon^{(1)} \mathbf{E}$  fennáll, ahol  $\varepsilon^{(1)}$  relatív permittivitás dimenzió nélküli skalármennyiség. Ezeket a (17) egyenletbe helyettesítve:



$$-\Delta \mathbf{E} + \frac{\epsilon^{(1)}}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = -\frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P}^{(NL)} \quad (18)$$

Látható, hogy ez egy inhomogén hullámegyenlet: a közeg nemlineáris válasza egy forrástagként jelenik meg az egyenlet jobb oldalán.

Diszperzív közegnél minden frekvenciakomponens terét külön kell vizsgálni, azaz például a térerősség ilyenkor így írható fel:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_n \mathbf{E}_n(\mathbf{r}, t) \quad (19)$$

$$\mathbf{E}_n(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_n(\mathbf{r}) e^{-i\omega_n t} + c. c. \quad (20)$$

Ugyanezen analógia mentén írható fel az elektromos eltolás:

$$\mathbf{D}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \sum_n \mathbf{D}_n^{(1)}(\mathbf{r}, t) \quad (21)$$

$$\mathbf{D}_n^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{D}_n^{(1)}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_n t} + c. c. \quad (22)$$

és a polarizáció is:

$$\mathbf{P}^{(NL)}(\mathbf{r}, t) = \sum_n \mathbf{P}_n^{(NL)}(\mathbf{r}, t) \quad (23)$$

$$\mathbf{P}_n^{(NL)}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{P}_n^{(NL)}(\mathbf{r}) e^{-i\omega_n t} + c. c. \quad (24)$$

Feltéve továbbá, hogy a közeg veszteségmentes, az  $\mathbf{E}_n$  és  $\mathbf{D}_n^{(1)}$  mennyiségek közötti kapcsolatra fenáll, hogy:

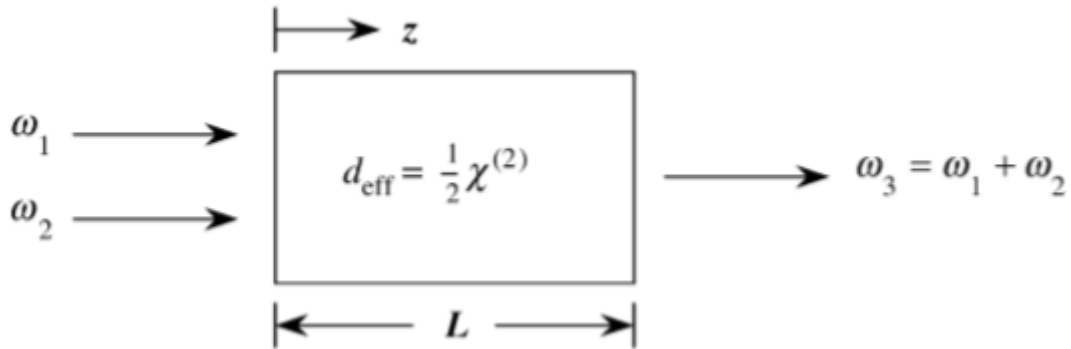
$$\mathbf{D}_n^{(1)} = \epsilon_0 \boldsymbol{\epsilon}^{(1)}(\omega_n) \mathbf{E}_n \quad (25)$$

ahol  $\boldsymbol{\epsilon}^{(1)}(\omega_n)$  mennyiség a frekvenciafüggő dielektromos tenzor. Ezeket a kifejezéseket visszahelyettesítve a (18)-ba megkapjuk az egyenletnek az egyes frekvenciakomponensekre érvényes alakját:

$$\Delta \mathbf{E}_n - \frac{\boldsymbol{\epsilon}^{(1)}(\omega_n)}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}_n = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P}^{(NL)} \quad (26)$$

### 2.1.3. Összegfrekvencia generálás

Ebben az alfejezetben, mellőzve a részletes levezetéseket csak a levezetések főbb lépéseit és a dolgozat szempontjából lényeges eredményeket szeretném bemutatni, a precíz levezetések megtalálhatók Boyd: Nonlinear optics<sup>[1]</sup> című munkájában. Tekintsünk egy veszteségmentes, nemlineáris közeget, amelyre két monokromatikus, egymáshoz képest párhuzamos fénysugarat bocsátunk a közeg felületére merőlegesen, a kettőtörés effektusait az egyszerűség kedvéért most elhanyagoljuk (1. ábra).



1. ábra: Összegfrekvencia generálás<sup>[1]</sup>

Ahogy az 1. ábráról is leolvasható, a hullámok  $z$  irányban terjednek, a nemlineáris közeg  $L$  hosszúságú, a beeső sugarak  $\omega_1$  és  $\omega_2$  körfrekvenciájúak, az  $\omega_3$  körfrekvencia pedig a beeső nyalábok körfrekvenciájának összege. A  $d_{eff} = \frac{1}{2}\chi_{eff}^{(2)}$  egy bonyolult, de ismertnek feltételezhető paraméter, amely az adott közeg nemlineáris szuszceptibilitásától és geometriai faktoroktól függ.

Nemlineáris forrástag nélkül a (26) egyenlet megoldása az alábbi síkhullám:

$$E_3(z, t) = A_3 e^{i(k_3 z - \omega_3 t)} + c. c. \quad (27)$$

ahol most  $A_3$  amplitúdó konstans, illetve fennállnak a következő összefüggések ( $j = 1, 2, 3$ ):

$$k_j = \frac{n_j \omega_j}{c} \quad \text{és} \quad n_j^2 = \varepsilon^{(1)}(\omega_j) \quad (28)$$

Feltesszük, hogy ha a nemlineáris forrástag hatása kicsi, a megoldás továbbra is síkhullám, de  $A_3$  a  $z$  koordináta lassan változó függvénye lesz. A bemenő sugarak terét a következő alakban írjuk fel ( $j = 1, 2$ ):

$$E_j(z, t) = A_j e^{i(k_j z - \omega_j t)} + c. c. \quad (29)$$

A nemlineáris forrástagot pedig az alábbi formában:

$$P(z, t) = P_3 e^{-i\omega_3 t} + c. c. \quad (30)$$

ahol levezetés nélkül  $P_3$  értéke:

$$P_3 = 4\varepsilon_0 d_{eff} A_1 A_2 e^{i(k_1+k_2)z} \quad (31)$$

A (26) hullámegyenletbe visszahelyettesítve (27) és (30) egyenleteket, az  $\omega_3$  körfrekvenciájú tér amplitúdójának változására a következő összefüggés adódik:

$$\frac{dA_3}{dz} = \frac{2id_{eff}\omega_3^2}{k_3 c^2} A_1 A_2 e^{i\Delta k z} \quad (32)$$

ahol  $\Delta k = k_1 + k_2 - k_3$ . Továbbá a kifejezés akkor igaz, ha az  $A_3$  amplitúdó változása a hullámhossz nagyságrendjén elhanyagolhatóan kicsi (lassan változó amplitúdó közelítés). Látható, hogy amennyiben a  $\Delta k = 0$  fázisillesztési feltétel teljesül, az  $A_3$  amplitúdó a  $z$  koordináta lineáris függvénye. A fenti egyenletek felírhatók a gerjesztő terekre is:

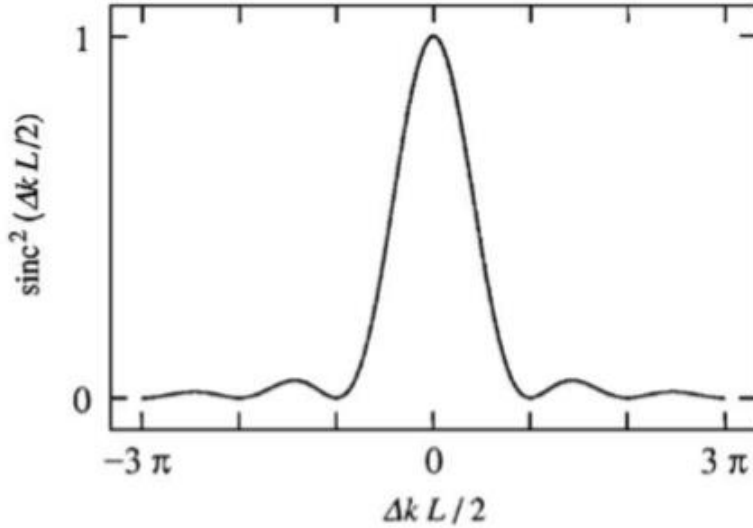
$$\frac{dA_1}{dz} = \frac{2id_{eff}\omega_1^2}{k_1 c^2} A_3 A_2^* e^{-i\Delta k z} \quad (33)$$

$$\frac{dA_2}{dz} = \frac{2id_{eff}\omega_2^2}{k_2 c^2} A_3 A_1^* e^{-i\Delta k z} \quad (34)$$

Végül nézzük általános esetben (fázisillesztés nélkül) az  $L$  hosszú közegből kilépő tér intenzitását  $\Delta k$  függvényében:

$$I_3(\Delta k) = \frac{8d_{eff}^2 \omega_3^2 I_1 I_2}{n_1 n_2 n_3 \varepsilon_0 c^3} L^2 \text{sinc}^2\left(\frac{\Delta k L}{2}\right) = I_3^{max} \text{sinc}^2\left(\frac{\Delta k L}{2}\right) \quad (35)$$

Látható, hogy a  $\Delta k$  függést teljes egészében a  $\text{sinc}^2\left(\frac{\Delta k L}{2}\right)$  tag tartalmazza (2. ábra). Emiatt a folyamat hatékonysága nagyon érzékeny a fázisillesztés pontosságára, tehát ha egy jól mérhető összegfrekvenciás jelet szeretnénk generálni, biztosítanunk kell a  $\Delta k = 0$  fázisillesztési feltételt.



2. ábra: Az összefrekvenciás jel intenzitásának függése a fázisillesztés pontosságától<sup>[1]</sup>

#### 2.1.4. Fázisillesztés

Tekintsük az előző alfejezetben bemutatott összefrekvencia generálást, és írjuk fel rá a fázisillesztési feltételt:

$$\Delta k = k_1 + k_2 - k_3 = \frac{n(\omega_1)\omega_1}{c} + \frac{n(\omega_2)\omega_2}{c} - \frac{n(\omega_3)\omega_3}{c} = 0 \quad (36)$$

ahol felhasználtuk, hogy a hullámok mindegyike  $z$  irányba terjed, ezért elegendő a hullámszámok abszolút értékét vizsgálni. Fennáll továbbá  $\omega_1 + \omega_2 = \omega_3$  összefüggés, és feltehetjük, hogy emiatt  $\omega_1 \leq \omega_2 < \omega_3$  is érvényes. A legtöbb anyagra igaz, hogy normális diszperziót követ, azaz a törésmutatója a frekvenciának monoton növekvő függvénye, amiből viszont az következik, hogy a fázisillesztési feltétel ilyen anyagokra nem valósítható meg. Ez belátható, ha az előző egyenletből kifejezzük  $n(\omega_3)$ -at:

$$n(\omega_3) = \frac{n(\omega_1)\omega_1 + n(\omega_2)\omega_2}{\omega_3} \quad (37)$$

majd végezzük el az alábbi átalakítást:

$$n(\omega_3) - n(\omega_2) = \frac{n(\omega_1)\omega_1 + n(\omega_2)\omega_2 - n(\omega_2)\omega_3}{\omega_3} = (n(\omega_1) - n(\omega_2)) \frac{\omega_1}{\omega_3} \quad (38)$$

Normális diszperzió esetén az egyenlet bal oldala pozitív, míg a jobb oldala negatív vagy nulla, tehát a fentiekben megadott feltételekkel a fázisillesztés nem valósítható meg.

A probléma megoldását az optikai anizotrópiával rendelkező közegek biztosíthatják, a következőkben ezt fogjuk megvizsgálni. Ilyen esetben az anizotrópia miatt a közeg polarizációvektora és a közegen áthaladó elektromágneses hullám polarizációs állapota (vagyis az elektromos térének iránya) irányfüggést is mutat. Emiatt pedig a különböző polarizációs állapotú terekhez különböző törésmutatók tartozhatnak, ez a jelenség pedig biztosíthatja a fázisillesztési feltétel teljesülését. Irányfüggő tulajdonságokkal rendelkező közegek esetén az elektromos tér és az eltolás nem feltétlenül párhuzamosak. Lineáris kapcsolatot feltételezve az  $i$ -komponensek közt megadható az alábbi összefüggés<sup>[2]</sup>:

$$D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_{ij} E_j \quad (39)$$

ahol  $\varepsilon_{ij}$  a relatív permittivitás tenzora, a szorzatban szereplő azonos indexekre pedig most összegezni kell (Einstein-konvenció). Belátható, hogy ez a tenzor szimmetrikus, ez esetben pedig található olyan koordináta-rendszer, amelyben a tenzor diagonális, ezt nevezzük principális koordináta-rendszernek. A főátlóbeli elemek ilyenkor a megfelelő principális törésmutatók négyzeteivel megegyezők:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{bmatrix} \quad (40)$$

A továbbiakhoz ismét felhasználjuk a mágneses-, illetve elektromos tér rotációjára vonatkozó (9) és (10) Maxwell-egyenleteket, ismét (10) egyenlet rotációját képezve, majd (9)-et behelyettesítve. A megoldást továbbá síkhullám alakban keresve felhasználjuk, hogy a hely szerinti deriválás eredménye  $i\mathbf{k}$ , az idő szerinti deriválása pedig  $-i\omega$ :

$$\text{rot rot } \mathbf{E} + \mu \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \mathbf{H}) = \text{rot rot } \mathbf{E} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (41)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \mathbf{E} + \omega^2 \mu \varepsilon \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (42)$$

Vezessük be  $\mathbf{s} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$  jelölést, és használjuk az  $\mathbf{s} \times \mathbf{s} \times \mathbf{E} = \mathbf{s}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E}$  összefüggést, amellyel az egyenlet tovább alakítható:

$$\mathbf{s}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} + \frac{\omega^2}{k^2 c^2} \varepsilon_r \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (43)$$

Használjunk most principális koordinátákat, illetve a relatív permittivitás tenzorban a permittivitás komponenseit cseréljük le a principális törésmutatókra, a (40) összefüggés

alapján. Ezen kívül definiáljuk az  $n = \frac{kc}{\omega}$  effektív törésmutatót. Ezeket felhasználva a fenti egyenlet mátrixos alakban:

$$\begin{bmatrix} n_x^2 - n^2(s_y^2 + s_z^2) & n^2 s_x s_y & n^2 s_x s_z \\ n^2 s_x s_y & n_y^2 - n^2(s_x^2 + s_z^2) & n^2 s_y s_z \\ n^2 s_x s_z & n^2 s_y s_z & n_z^2 - n^2(s_x^2 + s_y^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (44)$$

Ennek az egyenletrendszernek akkor van nem nemtriviális megoldása, ha az együtthatómátrix determinánsa nulla, aminek teljesülése esetén, feltéve, hogy  $n \neq n_j$ , a Fresnel-egyenletet kapjuk:

$$\frac{s_x^2}{n^2 - n_x^2} + \frac{s_y^2}{n^2 - n_y^2} + \frac{s_z^2}{n^2 - n_z^2} = \frac{1}{n^2} \quad (45)$$

Látható, hogy ez egy másodfokú kifejezés az effektív törésmutatóra, ami miatt általában egy adott  $\mathbf{s}$  irányhoz (hullámszámhoz) két különböző törésmutató tartozik. Az elektromos tér megoldásai ezekhez a törésmutatókhoz:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{s_x}{n^2 - n_x^2} \\ \frac{s_y}{n^2 - n_y^2} \\ \frac{s_z}{n^2 - n_z^2} \end{bmatrix} \quad (46)$$

azaz adott terjedési irányban kétféle polarizációs állapotú síkhullám terjedhet.

Ezek után térjünk át olyan anyagokra, amelyeknél a három principális törésmutatóból kettő megegyezik. Tartozzanak ezek a koordinátarendszerünk x és y tengelyeihez, és nevezzük őket ordinárius principális törésmutatóknak. A z tengelyhez tartozó törésmutatót pedig extraordinárius principális törésmutatónak hívjuk.

$$n_x^2 = n_y^2 = n_o^2 \quad (47)$$

$$n_z^2 = n_e^2 \quad (48)$$

Az előbb láttuk, hogy anizotróp közegekben egy adott hullámszámvektorhoz két terjedési sajátmódus (polarizációs állapot) tartozik. Belátható, hogy (47) esetben az egyik módus mindig az ordinárius törésmutatót látja:

$$n_1^2 = n_o^2 \quad (49)$$

A másik módus esetén pedig az effektív törésmutató értéke a terjedési irány függvénye:

$$\frac{1}{n_2^2} = \frac{s_x^2 + s_y^2}{n_e^2} + \frac{s_z^2}{n_o^2} = \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2} + \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} \quad (50)$$

ahol  $\theta$  a hullámszámvektor és a z tengellyel bezárt szöget jelenti.  $\theta = 0$  esetén  $n_2 = n_1$ , tehát a z tengely irányába haladó hullámok terjedését csak az ordinárius törésmutató határozza meg. A z tengelyt, pontosabban annak irányát optikai tengelynek nevezzük, az ilyen tulajdonságú közeg pedig ún. egytengelyű, vagy uniaxiális közeg.

Korábban az izotróp eset tárgyalásánál láttuk, hogy normál diszperzió esetén nem valósítható meg a fázisillesztési feltétel, az (38) egyenletnek nem volt megoldása. Egytengelyű közegeknél viszont létezhetnek olyan  $\omega_j$  és  $n_j(\omega_j, \theta_j)$  értékek, amelyekre az egyenletnek létezik megoldása. Ennek lehetőségei az alábbi táblázatban láthatók:

	Pozitív uniaxiális ( $n_e > n_o$ )	Negatív uniaxiális ( $n_e < n_o$ )
Type I	$n_3^o(\omega_3) = n_1^e(\omega_1) + n_2^e(\omega_2)$	$n_3^e(\omega_3) = n_1^o(\omega_1) + n_2^o(\omega_2)$
Type II	$n_3^o(\omega_3) = n_1^o(\omega_1) + n_2^e(\omega_2)$	$n_3^e(\omega_3) = n_1^e(\omega_1) + n_2^o(\omega_2)$

A továbbiakban negatív egytengelyű közegekkel foglalkozunk, a végeelem szimuláció során ilyen típusú közegek Type I fázisillesztését próbáltam modellezni. Ebben az esetben az összefrekvencia generálás során tehát úgy valósulhat meg a fázisillesztés, hogy az  $\omega_3$  körfrekvenciájú tér extraordinárius, míg az  $\omega_1$  és  $\omega_2$  körfrekvenciás terek ordinárius polarizációval rendelkeznek.

### 2.1.5. Spontán parametrikus lekonverzió

A spontán parametrikus lekonverzió tulajdonképpen az összefrekvencia generálás inverz folyamata, melynek során egy foton az energia- és impulzusmegmaradás követelményeit teljesítve két másik, alacsonyabb energiájú fotonra „hasad”. Az SPDC kvantumos folyamat, azonban jó közelítéssel leírható klasszikus módon is. A folyamat olyan értelemben inverze az összefrekvencia generálásnak, hogy ez esetben egy nemlineáris közegben terjedő  $\omega_3$  körfrekvenciájú síkhullám mellett most  $\omega_1$  és  $\omega_2$  körfrekvenciájú terek jelennek meg, ahol  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  feltétel ugyanúgy fennáll. Az  $\omega_3$  körfrekvenciájú hullámot pumpának, az  $\omega_1$  és  $\omega_2$  körfrekvenciájú hullámokat pedig jel-nek, illetve idler-nek nevezzük. Használjuk fel az

összegfrekvencia generálásnál levezetett képleteket, és próbáljuk megoldani őket kimerítetlen pumpa közelítésben (a pumpa amplitúdóját állandónak tekintjük a z tengely mentén):

$$\frac{dA_1}{dz} = \frac{2id_{eff}\omega_1^2}{k_1c^2} A_3 A_2^* e^{i\Delta kz} \quad (51)$$

$$\frac{dA_2}{dz} = \frac{2id_{eff}\omega_2^2}{k_2c^2} A_3 A_1^* e^{i\Delta kz} \quad (52)$$

$$\frac{dA_3}{dz} = 0 \quad (53)$$

Feltesszük, hogy a fázisillesztés teljesül, ekkor a második egyenletet z szerint deriválva a szükséges behelyettesítések után adódik:

$$\frac{d^2 A_2}{dz^2} = \frac{4d_{eff}\omega_1^2\omega_2^2}{k_1k_2c^4} A_3 A_3^* A_2 \equiv K^2 A_2 \quad (54)$$

$$A_2(z) = C \cdot \sinh(Kz) + D \cdot \cosh(Kz) \quad (55)$$

ahol  $K^2 = \frac{4d_{eff}\omega_1^2\omega_2^2}{k_1k_2c^4} |A_3|^2$ , C és D konstansokat pedig a peremfeltételek határozzák meg.

Spontán parametrikus lekonverzió esetén kezdetben csak az  $\omega_3$  körfrekvenciájú tér van jelen, ezért írjuk elő  $A_2(0) = 0$  feltételt, az  $A_1(0)$  esetre egyelőre ne adjunk semmilyen megkötést. Ekkor a jel és idler terek amplitúdójára a következő összefüggés írható fel:

$$A_1(z) = A_1(0) \cosh(Kz) \quad (56)$$

$$A_2(z) = i \left( \frac{n_1\omega_2}{n_2\omega_1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{A_3}{|A_3|} A_1^*(0) \sinh(Kz) \quad (57)$$

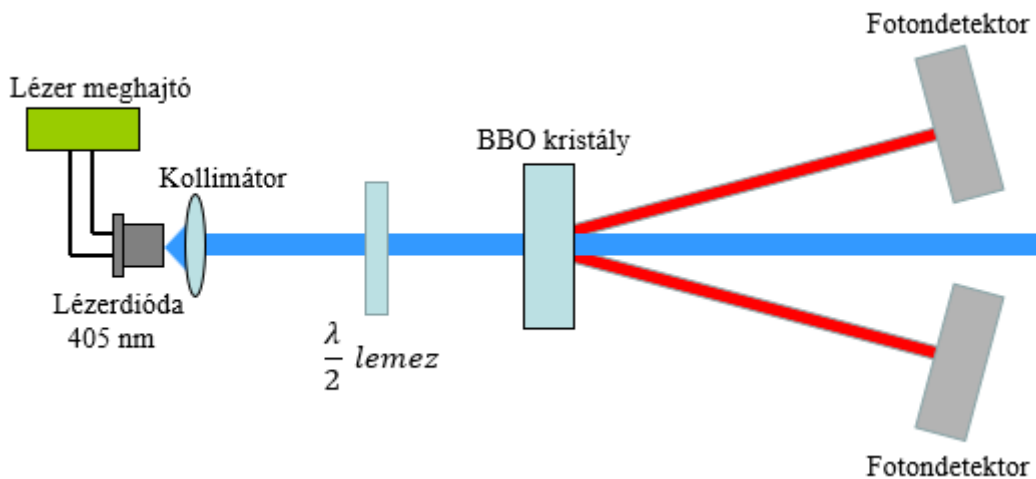
Látható, hogy a klasszikus levezetés szigorúan véve nem ad tökéletesen pontos leírást a jelenségről, hiszen amennyiben  $A_1(0) = 0$ , vagyis kezdetben csak a pumpa tere van jelen a közegben, akkor (56) és (57) szerint a jel és idler hullámok meg sem jelennek. Ugyanakkor, ha feltesszük, hogy  $A_1(0)$  kezdetben valamilyen kicsiny érték, a jelenség máris leírható a fenti klasszikus egyenletekkel is. A spontán parametrikus lekonverzió jelensége ellentmondásmentesen, a fenti „kezdeti feltétel problémát” kiküszöbölve is levezethető kvantummechanikai leírást követve, amitől ebben a dolgozatban eltekintünk, a levezetés megtalálható Yariv Amnon: Quantum Electronics című munkájában.



### 3. Kísérleti elrendezés

Ebben a részben röviden összefoglalnám a spontán parametrikus lekonverziót megvalósító kísérleti elrendezést.

A pumpát egy 405 nm hullámhosszú lézernyaláb valósítja meg, amelynek polarizációs állapotát egy  $\frac{\lambda}{2}$ -es lemezzel állítjuk be, hiszen a Type I fázisillesztéshez a pumpanyalábnak extraordinárius polarizációval kell rendelkeznie. A nyaláb ezután a nemlineáris kristályra esik annak lapjára merőlegesen, ahol megfelelő fázisillesztés esetén alacsonyabb körfrekvenciájú jel és idler fotonok keletkeznek, ezek egy néhány fokalésszögű kúp alakú megvalósított irányban hagyják el a kristályt és egy-egy detektorba érkeznek, amelyek számolják a foton „beütéseket”, illetve koincidenciamérést is megvalósítanak (3. ábra). A továbbiakban csak a modellezés lényegét képező nemlineáris kristállyal foglalkozunk részletesebben.



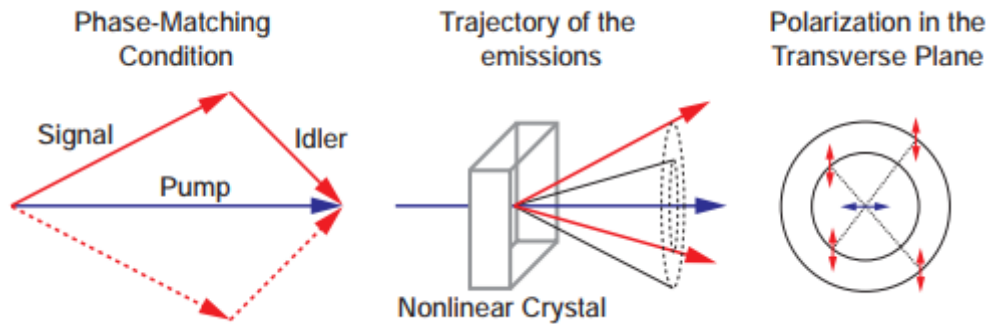
3. ábra: A kísérleti elrendezés fontosabb elemei

Az SPDC kísérletekben leggyakrabban  $\beta$ -bárium borát (röviden BBO) kristályt használnak, ami egy negatív uniaxiális közeg, vagyis extraordinárius törésmutatója kisebb az ordinárius törésmutatójánál. A BBO kristály egyes törésmutatóit az ún. Sellmeier-egyenletek adhatjuk meg, amelyek az egyes közegek diszperzióját is magukba foglaló empirikus formulák<sup>[2]</sup>.

$$n_o(\lambda) = \sqrt{2.7405 + \frac{0.0184}{\lambda^2 - 0.0179} - 0.0155\lambda^2} \quad (58)$$

$$n_e(\lambda) = \sqrt{2.373 + \frac{0.0128}{\lambda^2 - 0.0156} - 0.0044\lambda^2} \quad (59)$$

ahol  $\lambda$  a vákuumbéli hullámhossz, és mikrométer mértékegységben adott. Ahogy azt korábban említettem, Type I fázisillesztéskor a pumpanyaláb extraordinárius polarizációval lép be a BBO kristályba, a generált jel és idler hullámok polarizációs állapota pedig ordinárius lesz. A fázisillesztési feltételt, a kristályt elhagyó fotonok irányát és polarizációját a 4. ábra szemlélteti (Type I fázisillesztés esetén).



4. ábra: Fázisillesztés, a kilépő pumpa, jel és idler fotonok iránya és polarizációja<sup>[3]</sup>

A lekonvertált fotonok irányai két kollineáris kúpot képeznek, amelyek tengelyét a pumpanyaláb iránya adja meg. Abban az esetben, ha a jel és idler körfrekvenciák megegyeznek, a kúpok palástjai is fedésbe kerülnek egymással<sup>[3]</sup>.

A jel és idler fotonok ordinárius polarizációja azért előnyös, mert ezek a fotonok csak a kristály ordinárius törésmutatóját látják, tehát a szimulációk során megtehetjük azt az egyszerűsítést, hogy a kristályban terjedő jel és idler hullámok modellezéséhez izotróp közeget használunk majd.

## 4. Type I fázisillesztés modellezése végeselem módszerrel

A természet törvényeinek matematikai leírása gyakran vezet parciális differenciálegyenletek felírásához. Az esetek nagy részében ezeket az egyenleteket nem lehetséges analitikusan megoldani. Ehelyett az adott problémát diszkrétizálhatjuk, azaz diszkrét kis elemekre bontva numerikus módszerekkel egy közelítő megoldást adhatunk. A végeselem módszer is egy ilyen numerikus eljárás. A szimulációk megkezdésekor egy fizikai modellt választunk (ez jelen esetben a Wave optics  $\rightarrow$  Electromagnetic waves, frequency domain nevű modul), amely tartalmazza az adott probléma megoldásához szükséges egyenleteket. Ezután összeállítunk egy geometriát, amelyre a feladatot meg szeretnénk oldani, ezt a geometriát hálózással kicsiny elemekre bontjuk, majd ezekre a kis elemekre közelítően megoldott differenciálegyenletekből áll össze a megoldás a teljes geometriára nézve. Nagyon fontos, hogy ezeknek az elemi tartományoknak a méretét jól válasszuk. Ha túl nagy elemeket használunk, akkor a megoldás pontatlan lesz, rosszabb esetben nem tud bekonvergálni a kívánt hibahatár alá. Ha túl kicsi elemekből alakítjuk ki a hálózást, akkor pedig számítógéptől függően időben nagyon elnyúlhat a szimuláció. A pontos eredményhez a modellemben alkalmazott maximális hálóelemméretnek kisebbnek kellett lennie a hullámhossz felénél, ami miatt viszont a geometria teljes mérete is csak mikroszkopikus lehetett, mivel másképp nem futott le belátható időn belül egy-egy szimuláció. A geometria méretének felső határa kétdimenziós esetben nagyjából 100 hullámhossznyi magasságú téglalapot, háromdimenziós esetben pedig körülbelül 10 hullámhossznyi magasságú hengert jelentett.

Dolgozatomban a Comsol Multiphysics nevű végeselem modellező szoftver 5.3a verzióját használtam.

### 4.1. Validáció

A modellépítést egy viszonylag egyszerű jelenség modellezésével kezdtem, amely validációs célt is szolgál. Fontos megjegyezni, hogy ebből nem következik automatikusan a később felépítendő modell helyessége, viszont mindenképpen egy hasznos első lépés, ahonnan tovább lehet fejleszteni a szimulációt, illetve önellenőrzés is arra vonatkozóan, hogy a kiinduló modell helyesen lett felépítve, megfelelő peremfeltételeket használunk, kielégítő a geometria hálózása, és a numerikusan számolt fizikai mennyiségek értéke egyezik az elméleti értékekkel.

Validációs kritériumnak a Fresnel-formulák teljesülésének vizsgálatát választottam izotróp közegekben. Ehhez a Comsol szoftverben definiáltam egy négyzet alapú hasábot, amelyet a z koordinátatengely mentén középen elválasztva két tartományra osztottam. Az alsó

tartomány közege üveg,  $n_1 = 1,5$ -ös törésmutatóval, a felső tartomány levegő,  $n_2 = 1$ -es törésmutatóval. A hasáb alján, a  $z = 0$  koordinátájú felületről egy síkhullámot indítottam, amelynek hullámszámvektora az  $y$ - $z$  síkban van és a  $z$  tengellyel  $\alpha$  szöget zár be.  $\alpha$  egy változó paraméter, ennek függvényében vizsgáljuk majd a Fresnel-egyenletek teljesülését. A síkhullám elektromos térerőssége  $x$  irányú, ami a hullámszámvektor irányát figyelembe véve azt jelenti, hogy a síkhullám ún. s-polarizációjú, azaz az elektromos térerősség vektora a beesési síkra merőleges. A reflexiós és transzmissziós tényezők adják meg, hogy egy közeghatáron áthaladó, illetve részben visszaverődő hullám esetén a térerősség mekkora hányada verődött vissza, illetve haladt át a közeghatáron. Ezek s-polarizáció esetében így írhatók fel:

$$r_s = \frac{E_{visszavert}}{E_{beeső}} = \frac{n_1 \cos(\alpha) - n_2 \cos(\beta)}{n_1 \cos(\alpha) + n_2 \cos(\beta)} \quad (60)$$

$$t_s = \frac{E_{áthaladó}}{E_{beeső}} = \frac{2n_1 \cos(\alpha)}{n_1 \cos(\alpha) + n_2 \cos(\beta)} \quad (61)$$

ahol  $s$  index a s-polarizációra utal,  $n_1$  az első közeg törésmutatója (ahonnan a hullám érkezik),  $n_2$  a második közeg törésmutatója (ahová a hullám továbbhalad),  $\alpha$  a beesési,  $\beta$  pedig a törési szög. A beeső, visszavert, és áthaladó hullámok intenzitásainak arányaira is felírhatók az előzőkkel analóg összefüggések. A visszavert és a beeső hullám intenzitásarányát mutató mennyiség a reflektancia, míg az áthaladó és beeső hullám intenzitásaránya a transzmittancia. Ezek a transzmissziós és reflexiós együtthatókkal kifejezhetők, ezeket hívjuk Fresnel-formuláknak, vagy Fresnel-együtthatóknak.

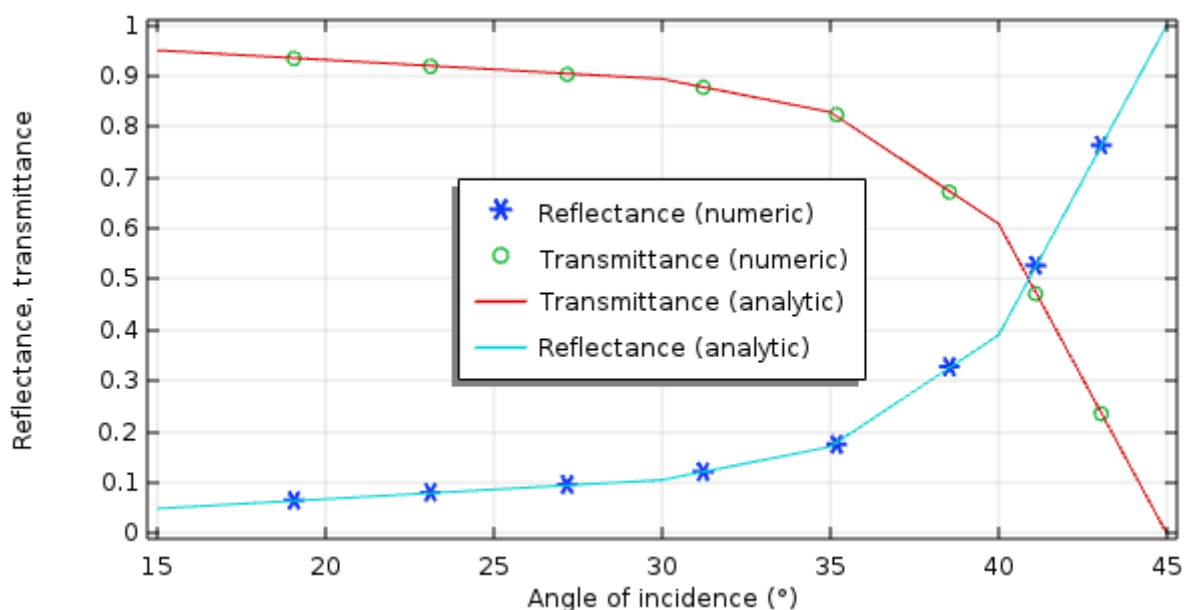
$$R_s = |r_s|^2 \quad (62)$$

$$T_s = \frac{n_2 \cos(\beta)}{n_1 \cos(\alpha)} |t_s|^2 \quad (63)$$

Látható, hogy amennyiben a törésmutatók ismertek, illetve definiálunk egy beesési szöget, ezekből egyrészt a Snellius-Descartes törvény alapján elméleti úton meghatározható a törési szög, másrészt maguk a Fresnel-együtthatók is. A validáció célja szintén ezen együtthatók meghatározása numerikus módszerrel, amihez adott a fentebb már leírt geometria a törésmutatókkal, és adott a beesési szög, amely a szimuláció során 15, 30, 35, 40, 45 fokok értékeit vesz fel. Az értékeket próbáltam úgy választani, hogy az eredmény kellően szemléletes legyen, sajnos a számítási kapacitásom végeessége miatt csak korlátozott számú pontban volt lehetőségem szimulációt lefuttatni.

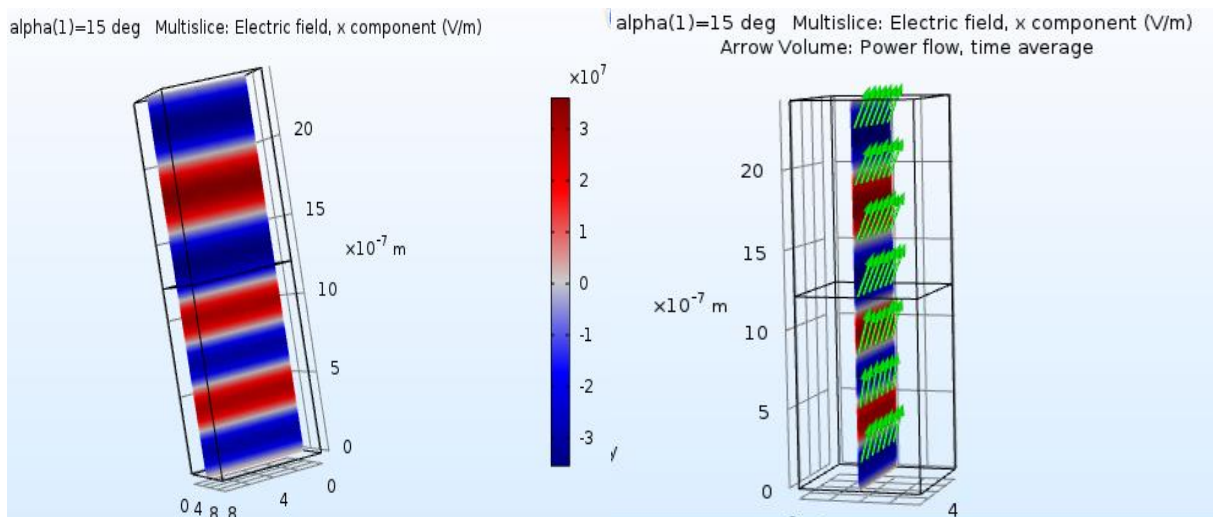
A geometria az x és y irányokban „végtelenítve” van, tehát úgy kell elképzelni, mintha az üveg és levegő közegek ezekben az irányokban a végtelenségig folytatódna, és a szimuláció során ennek egy véges tartományából vennénk mintát, a belépő síkhullám pedig ennek megfelelően szintén végtelen kiterjedésű az x-y síkban. Ha nem így lenne, akkor például egy nagyobb szögű beesésnél nem lenne jól használható a modell, mivel az első közegben ferdén terjedő hullám akár úgy is kiléphetne a hasáb oldalfalán, hogy el sem érné a második közeg határát.

Lássuk ezek után az eredményeket. A Fresnel-együtthatók elméleti és numerikusan számított értékeit közös grafikonon ábrázoltam a beesési szög függvényében (5. ábra).



5. ábra: A reflektancia és transzmittancia analitikus, illetve numerikusan számított értékei a beesési szög függvényében

Látható, hogy a numerikus értékek jó egyezést mutatnak az elméleti úton számoltakkal, mely egyezést az analitikus értékek, illetve a szimuláció alapján készült adatfájlok összehasonlításával számszerűsítve a relatív hiba egy ezreléknél kisebbnek adódik. A 6. ábrán megtekinthető a geometria, illetve a térerősség eloszlást is ábrázoltam az x-z síkon piros és kék színekkel, továbbá zöld színű nyilakkal a Poynting vektorokat is megjelenítettem. Jól látszik a közeghatáron való átlépés után a hullámhossz növekedése, illetve a Poynting vektorok irányának megváltozása. Az ábrák 15°-os beesési szög mellett készültek. A validáció céljára készített modell tehát a várakozásnak megfelelően szimulálja a fénytörést, az elméleti és a szimulációs eredmények egyeznek. A továbbiakban ennek továbbfejlesztésével kísérleteztem, hogy alkalmas legyen a BBO kristály Type I fázisillesztésének modellezésére is.



6. ábra: Térerősség eloszlás (balra) és Poynting vektorok (jobbra)

## 4.2. A modellkészítésnél alkalmazott elméleti megfontolások

### 4.2.1. A lekonvertált fotonok modellezése

Ha az SPDC jelenséget teljesen a kísérleti elrendezésnek megfelelő felállásban szeretnénk modellezni, több szempontból is nehézségekbe ütköznénk. Először is modelleznünk kellene a pumpanyalábot, amely egy anizotróp közegbe lép be, ahol a parametrikus lekonverzióknak megfelelően alacsonyabb frekvenciájú fotonok keletkeznének. Korábban láttuk, hogy a jelenséget egzaktul kvantummechanika segítségével lehet leírni, a Comsol szoftver viszont nem rendelkezik ilyen modullal. Azt is láttuk, hogy jó közelítéssel használhatunk klasszikus leírást, azonban ekkor feltételeznünk kell, hogy a jel és idler fotonok valamilyen kis amplitúdóval már eleve ott vannak kristályban a pumpanyaláb belépésekor. Továbbá figyelembe kellene venni a kristály anizotrópiáját és nemlinearitását is a modellezés során.

A szakdolgozatom legfontosabb célja, hogy egy olyan modell készüljön, amivel modellezni lehet a nemlineáris kristályból egy kúppalást mentén kilépő fotonok távolférfi szögeloszlását. Az alapgondolat az volt, hogy ezeket a feladatokat úgy is meg lehetne oldani, hogy a fentebb bemutatott, a modellezés szempontjából problémás körülményeket a következők szerint leegyszerűsítjük. Először is, a kristályba belépő pumpanyaláb extraordinárius polarizációjú, az SPDC folyamat során Type I fázisillesztés során előállt fotonok pedig ordinárius polarizációjúak. Mivel csak a keletkezett fotonok viselkedését szeretnénk vizsgálni, elvileg megtehetjük, hogy a kristályban való terjedésüket egy hagyományos, nem kettőstörő kristályban való terjedéssel modellezzük, hiszen ezek a fotonok

egy anizotróp közegben az ordinárius polarizációs állapotuk miatt egyébként is csak az ordinárius törésmutatót „látják”.

A szimulációk során a z tengelyt úgy választottam, hogy az a pumpanyaláb terjedési irányával egyező legyen. A laboratóriumban alkalmazott elrendezés szerint kristály optikai tengelye ekkor 29 °-os szöget zár be a z tengellyel. A lekonvertált fotonok fázisát a z koordináta függvényében így írhatjuk fel:

$$\phi(z) = \frac{1}{2} k_p z \quad (64)$$

ahol most degenerált esetet feltételeztünk, azaz ilyenkor a lekonvertált jel és idler fotonok hullámhossza kétszerese a pumpanyaláb hullámhosszának, az egyenletben  $k_p$  a pumpanyaláb hullámszámát jelenti a kristályon belül. A képlet alapján kiszámíthatjuk az azonos fázisú helyek távolságát ( $\Delta z$ ), ha a fázis helyére  $2\pi$ -t írunk.

$$\Delta z = 2 \frac{2\pi}{k_p} = 2 \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{\lambda_p}} = 2\lambda_p = \frac{2\lambda_{p0}}{n} \quad (65)$$

ahol most  $\lambda_p$  a pumpa hullámhossza a kristályban,  $\lambda_{p0}$  a pumpa hullámhossza vákuumban,  $n$  pedig a törésmutató értéke a pumpanyalábra vonatkozóan. A pumpa extraordinárius polarizációja miatt ezt a (szögfüggő) törésmutatót az (50) egyenlet alapján kaphatjuk meg,  $\theta = 29^\circ$  helyettesítésével. Az  $n_o$  ordinárius, illetve  $n_e$  extraordinárius törésmutatókat pedig az (58) és (59) Sellmeier-egyenletek alapján kapjuk:

$$n_o^p(\lambda = 0.405) = \sqrt{2.7405 + \frac{0.0184}{0.405^2 - 0.0179} - 0.0155 \cdot 0.405^2} = 1.692 \quad (66)$$

$$n_e(\lambda = 0.405) = \sqrt{2.3730 + \frac{0.0128}{0.405^2 - 0.0156} - 0.0044 \cdot 0.405^2} = 1.568 \quad (67)$$

Ezek alapján a modell szerinti geometriában a pumpára vonatkozó törésmutató (50) alapján:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{\sin^2(29)}{1.568^2} + \frac{\cos^2(29)}{1.692^2} = 0.3628 \quad (68)$$

ami alapján  $n = 1.6602$  az a törésmutató, ami a közegben terjedő pumpanyalábra érvényes. Fontos megjegyezni, hogy (66) egyenletben a bal oldalon szereplő  $n_o^p$  a pumpanyalábra

érvényes ordinárius törésmutató. Az eltérő körfrekvencia miatt a jel és idler hullámok ordinárius törésmutatója ( $n_o^{j,i}$ ) ettől egy kicsit különböző lesz:

$$n_o^{j,i}(\lambda = 0.810) = \sqrt{2.7405 + \frac{0.0184}{0.810^2 - 0.0179} - 0.0155 \cdot 0.810^2} = 1.661 \quad (69)$$

Térjünk ezután vissza a (65) egyenlethez, amiből  $n$  ismeretében már megkaphatjuk az azonos fázisú pontok távolságát:

$$\Delta z = \frac{2\lambda_{p0}}{n} = \frac{2 \cdot 405}{1.6602} = 487.89 \text{ nm} \quad (70)$$

A lekonvertálódott fotonokat ennek megfelelően úgy modelleztem, hogy  $\Delta z$  távközönként azonos fázisban sugárzó hullámforrásokat helyeztem el az anyagban. A lekonverzió a valóságban persze folyamatosan történik, de a modellezés szempontjából ennek a megvalósítása körülményes lett volna. A hullámforrásokat olyan körlapokként definiáltam, amelyek a  $z$  tengely irányában bocsátanak ki  $x$  irányban polarizált hullámokat, amelyek térerősség eloszlását az  $x$ - $y$  síkon Gauss-eloszlással adtam meg:

$$E_x(x, y) = E_0 \cdot \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) \quad (71)$$

ahol most a térerősség amplitúdójának nincs jelentősége, ezért értékét egységnyiinek választottam ( $E_0$  egységnyi értékű paraméter szerepe, hogy a képlet dimenzióhelyes legyen), a  $\sigma$  paraméter értéke pedig minden szimuláció esetén az adott geometriától függ. Várakozásunk szerint az ilyen módon elhelyezett „virtuális” hullámforrások kölcsönhatásából kialakuló interferencia miatt kialakuló távoltéri intenzitáseloszlás jó egyezést mutat majd a kísérleti eredményekkel. A keletkezett jel és idler fotonok hullámhosszát az ordinárius polarizációjuk miatt az ordinárius törésmutató határozza meg:

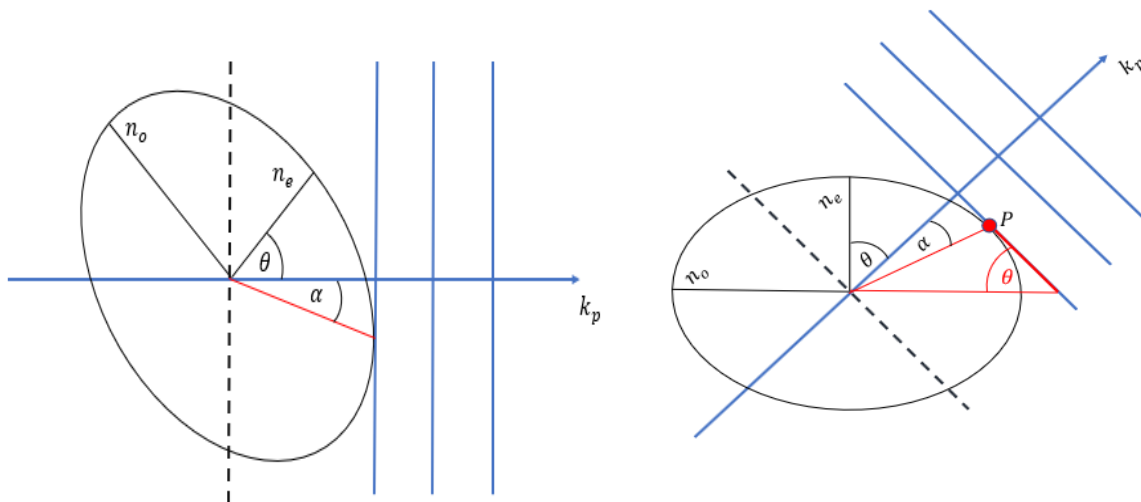
$$\lambda_{i,j} = \frac{2\lambda_{p0}}{n_o^{j,i}} = 487.66 \text{ nm} \quad (72)$$

ahol  $\lambda_{p0}$  a pumpa vákuumbéli hullámhossza,  $n_o^{j,i}$  pedig a kristály ordinárius törésmutatója a jel és idler fotonokra vonatkozóan. Látható, hogy az eredmény nem egyezik a (65) egyenlettel számolt  $\Delta z$  értékkel, tehát a korong alakú hullámforrásokból kisugárzó terek fázisai nem lesznek teljesen „fedésben” egymással, ami interferenciát fog okozni.



### 4.2.2. Poynting vektor

Anizotróp közegekben terjedő hullám hullámszámvektora és Poynting vektora nem feltétlenül esnek egybe. Ennek hatását is próbáltuk a modellünkbe beépíteni. A jelenség szemléltetéséhez tekintsük meg a 7. ábrát. Az ábra bal oldalán azt látjuk, ahogy a  $405\text{ nm}$  hullámhosszú pumpanyaláb belép az anizotróp kristályba, annak felületére merőlegesen. A közegethatárt szaggatott vonal jelzi. A 7. ábra vonatkozásában használjuk most az x-y koordinátasíkot. Az x koordinátatengely tehát ebben az ábrázolásban a pumpanyaláb  $k_p$  hullámszámvektorával esik egybe, és a kristály optikai tengelye  $\theta$  szöget zár be az x tengellyel. Megrajoltam az indexellipszist, rajta a kis és nagytengelyeknek megfelelő extraordinárius és ordinárius törésmutatókkal. Képzeljük most el, hogy az ábrán látható ellipszis középpontja az a pont, ahová a Gauss-os intenzitáseloszlású lézernyaláb középső része esik, azaz azon pontja, amelyik a legnagyobb intenzitást képviseli. Ezt a pontot a Huygens-Fresnel elvnek megfelelően egy ponthullámforrásnak feltételezve képzeljük el, ahogy a kibocsátott hullám az ábrán berajzolt indexellipszisnek megfelelő alakban terjed. A hullámfrontok változatlanul x irányba haladnak, viszont a legnagyobb intenzitást képviselő részük már nem az x tengelyen lesz, hanem az adott hullámfront és az indexellipszis által meghatározott érintőpontban, amely ponthoz az ábra bal oldalán  $\alpha$  szöggel húztam piros vonalat.



7. ábra: A Poynting vektor és a hullámszámvektor által bezárt szög kiszerveztése

Ezek után nézzük meg a 7. ábra jobb oldalát, amelyet a bal oldali ábra  $(90 - \theta)$  fokos, óramutató járásával ellentétes irányú elforgatásával kapunk. Ilyen módon a principális koordinátarendszerben dolgozhatunk, és használhatjuk az ellipszis egyenletét az  $\alpha$  szög kiszámításához. A piros háromszögben is megjelenik  $\theta$  szög, hiszen az eredeti  $\theta$  szöggel merőleges szárú szögek. Látható, hogy a P érintőpont meredekségének abszolút értéke éppen

$\tan(\theta)$  nagyságú, vagyis az ellipszis egyenletét felhasználva egy deriválás segítségével megkaphatjuk a P pont koordinátáit, abból pedig az  $\alpha$  szöget.

Az ellipszis egyenletét felírva, majd  $y = f(x)$  alakúra hozva kapjuk:

$$y(x) = \sqrt{n_e^2 - \frac{n_e^2}{n_o^2} x^2} \quad (73)$$

Deriváljuk le (73)-at  $x$  szerint, majd a kapott eredmény abszolút értékét (mivel a kapott meredekség negatív lesz) tegyük egyenlővé  $\tan(\theta)$ -val.

$$x \frac{n_e}{n_o^2} \left(1 - \frac{x^2}{n_o^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \tan(\theta) \quad (74)$$

A fenti egyenletet kielégítő pontok:

$$x = 0.8668 \quad \text{és} \quad y = 1.3461 \quad (75)$$

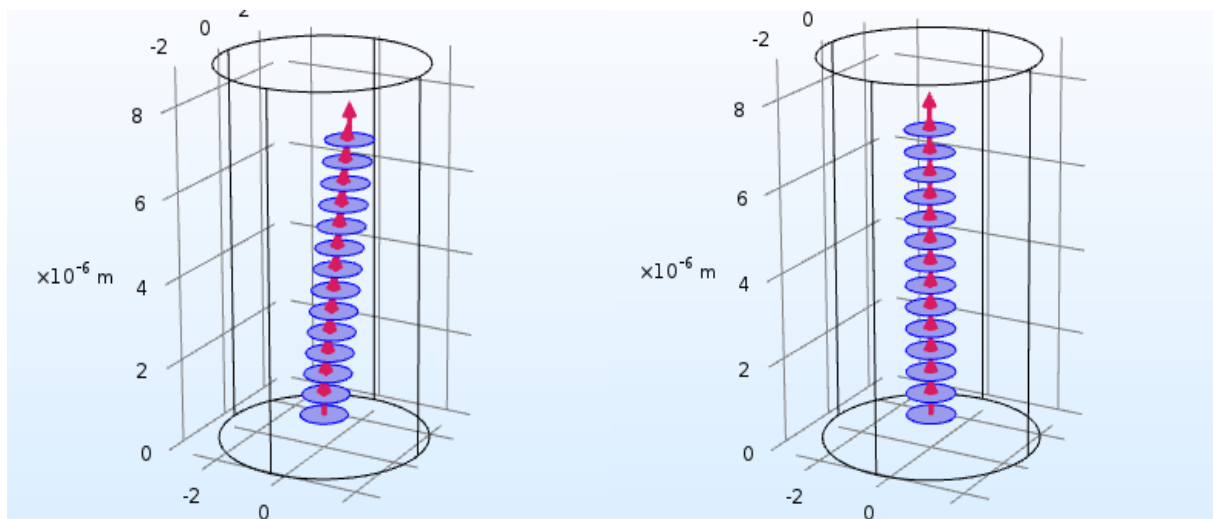
Az eredményeket felhasználva  $\alpha$  szög értéke:

$$\alpha = 90 - \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \theta = 3.78^\circ \quad (76)$$

Térjünk most vissza az általános háromdimenziós tárgyalásra, amelyben  $z$  tengely jelzi a pumpanyaláb hullámszámvektorának irányát. A modellezés során azt is vizsgáltam, hogy a pumpanyaláb Poynting vektorának  $3.78^\circ$ -os elhajlásának van-e észrevehető hatása a kialakuló interferenciaképre és intenzitáseloszlásra vonatkozóan. Ennek modellezésére az egymást követő korongok tengelyeit az  $x$  koordinátatengely irányában egymáshoz képest kicsiny  $dx$  távolsággal eltolhatjuk, amely távolságot a következő összefüggéssel adhatjuk meg:

$$dx = \Delta z \cdot \tan(\alpha) = \frac{2\lambda_{p0}}{n} \tan(\alpha) \approx 32.23 \text{ nm} \quad (77)$$

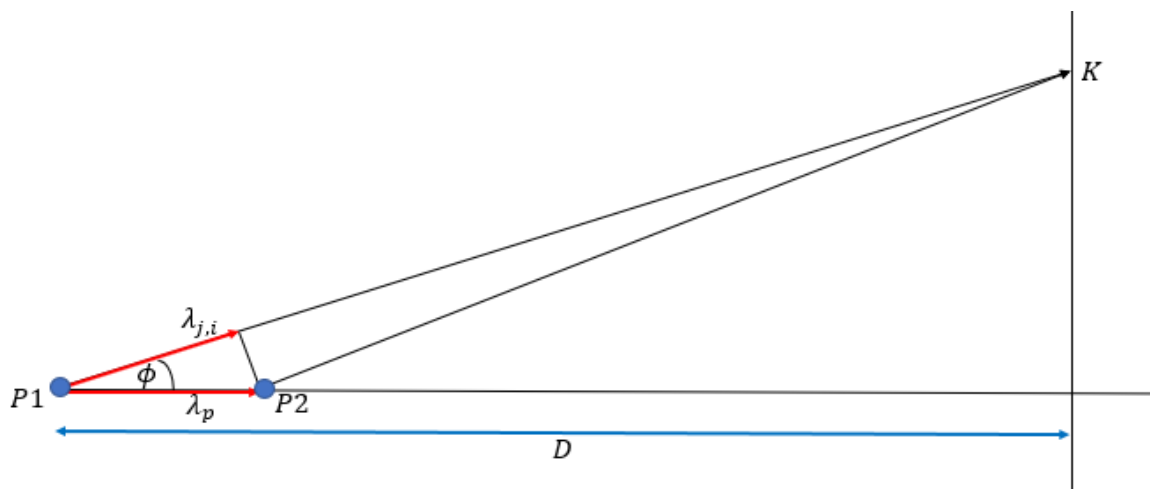
Ez biztosítaná, hogy a hullámszámvektor továbbra is az eredeti irányba álljon, ugyanakkor az energiaterjedés irányát kissé „elhangolná” az  $\alpha$  szögnek megfelelő mértékben. A kicsiny elhajlási szög miatt várhatóan ennek hatása elhanyagolható lesz, ami miatt azt a további egyszerűsítést alkalmazhatnánk, hogy a hullámforrásainkat egyszerűen a  $z$  tengely mentén fűzzük fel sorban, és nem kellene az oldalirányú terjedés modellezésével foglalkozni. Szemléltetésképpen az így megvalósított kétféle geometria látható a 8. ábrán egy háromdimenziós henger geometria mellett, a piros nyilak a korong alakú forrásokból induló hullámok terjedési irányát jelölik.



8. ábra: A korong alakú hullámforrások elrendezése a pumpanyaláb törését figyelembe véve (balra), illetve azt elhanyagolva (jobbra)

#### 4.2.3. A távoltéri szögeloszlás becslése elméleti úton

A távoltéri szögeloszlás becsléséhez képzeljünk el egy a kétréses kísérlethez hasonló felállást, most azonban a pontszerű forrásaink nem egymás mellett, hanem egymás után helyezkednek el, vagyis most a hullámforrások azon a tengelyen helyezkednek el, amelyre merőleges síkon a távoltéri intenzitáseloszlást vizsgáljuk. Tekintsük meg ennek szemléltetéséhez a 9. ábrát.



9. ábra: A távoltéri szögeloszlás becslése

P1 és P2 hullámforrások egymáshoz képes  $\lambda_p$  távolságra helyezkednek el, ami a pumpanyaláb közegen belüli hullámhosszát jelenti. A források a jel és idler fotonoknak megfelelő,  $\lambda_{j,i}$  hullámhosszú fotonokat bocsátanak ki. Ha az ábrázolt geometriára fennáll  $D \gg \lambda$  feltétel,

akkor az ábrán látható K pontban akkor jelenik meg konstruktív interferencia, ha a P1 és P2 pontokból érkező hullámok úthosszainak különbsége  $\lambda_{j,i}$ . Ez akkor valósul meg, ha az ábrán látható  $\phi$  szög fennáll, hogy:

$$\cos(\phi) = \frac{\lambda_{j,i}}{\lambda_p} \rightarrow \phi = \arccos\left(\frac{\lambda_{j,i}}{\lambda_p}\right) \quad (78)$$

A képletbe helyettesítve a (70) és (72) kifejezések által megadott hullámhosszakat  $\phi \approx 1.89^\circ$  adódik. Figyelembe véve, hogy a fent bemutatott számítást a kristály belsejében tartózkodó hullámra végeztük, a levegőben várható szórési szög a Snellius-Descartes törvény alapján a kristály ordinárius törésmutatójából egyszerűen kiszámítható.

$$\phi_{detektált} = \arcsin((n_o^{j,i} \cdot \sin(\phi)) \approx 3.14^\circ \quad (79)$$

Tehát a fenti egyszerű becslési eljárással jó közelítéssel megkaptuk a laboratóriumi kísérletek során tapasztalt szórési szöget. A (70) és (72) kifejezések összevetéséből ugyanakkor az is látható, hogy a modellben hullámforrásként funkcionáló korongok távolsága, és a korongból kibocsájtott jel/idler hullámok hullámhossza közti eltérés nagyon kicsi. Ha szeretnénk legalább annyi korongot egymás után helyezni, hogy az első és utolsó korongok között legyen legalább egy hullámhossznyi fázistolás, akkor ebben a felállásban ez több mint 2000 korongot jelentene. Ekkora geometria modellezésére a minimálisan szükséges hálóelemméret megkövetelése mellett nincs lehetőségem. Megtehetjük viszont, hogy a modellben a kristályunk optikai tengelye és a pumpanyaláb hullámszámvektora által bezárt  $\theta$  szöget – melyet vágási szögnek is nevezünk -  $29^\circ$ -nál nagyobbra állítjuk, ezáltal a pumpanyaláb törésmutatója is módosul, ennek segítségével a pumpa, illetve jel/idler fotonok hullámhosszának különbsége megnövelhető akkorára, hogy egy kezelhetőbb méretű geometriát kapjunk, amit a rendelkezésre álló számítási kapacitással is modellezni tudok. Többféle vágási szöget megvizsgálva meghatározható a szórési szög vágási szögtől való függése, de várhatóan ahogy csökken majd  $\theta$  szög értéke és vele nő az egy teljes hullámhossznyi fáziskülönbség eléréséhez szükséges korongok száma, úgy romlik a szimuláció pontossága is. Ezt viszonylag könnyen beláthatjuk, ha belegondolunk, hogy tegyük fel 200 db korongot modellezünk a szükséges 2000 helyett, egyrészt a körülbelül 3 fokos szórési szög irányában folyamatos erősítő interferencia zajlik, másrészt, rosszabb hatásfokkal ugyan, de tengelyirányban is az első és a 200. korongok terei között még mindig bőven erősítő interferencia történik, aminek eredménye várhatóan az lesz, hogy nem fog élesen két rendre szétválni az interferenciakép, hanem annak középső része

is erősen látható marad. Továbbá  $\theta$  szög csökkenésével a szórási szög is egyre kisebb, ez a körülmény szintén negatív irányba befolyásolja a szórási csúcsok éles elkülönülését.

### 4.3. Kétdimenziós modellezés

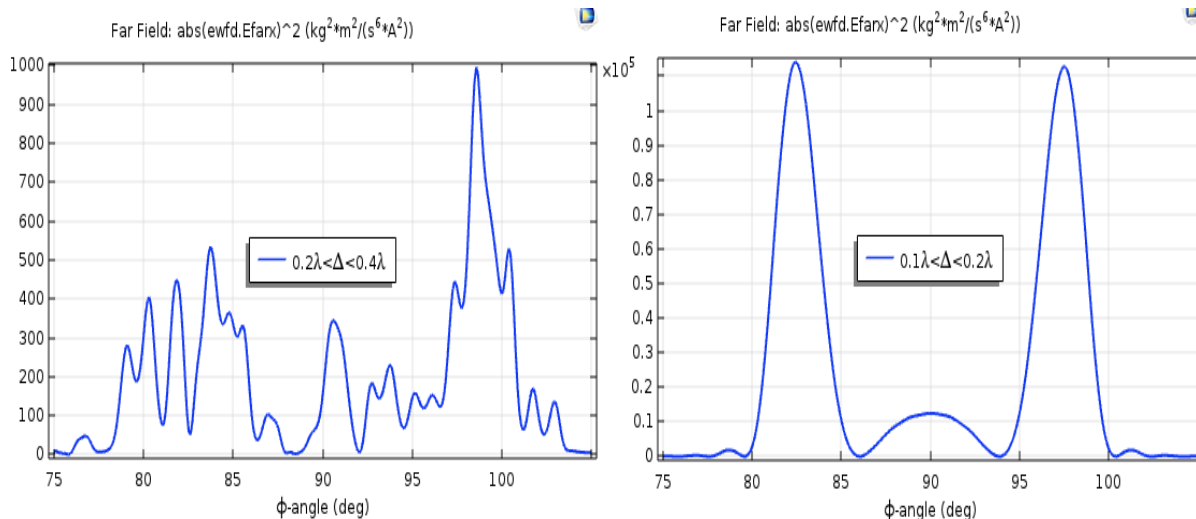
#### 4.3.1. Szimmetrikus eset

Az általam definiált 2D geometria tulajdonképpen a 3D geometria x-z koordinátasíkban való elmetszése. A hullámforrások ekkor körlapok helyett vonalak, a rajtuk definiált Gauss-eloszlású térerősség ugyanúgy x polarizációjú, de nem tartalmazza az y koordinátától való helyfüggést, tehát egy egyszerű egydimenziós Gauss-függvényről van szó.

$$E_x(x) = E_0 \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \quad (80)$$

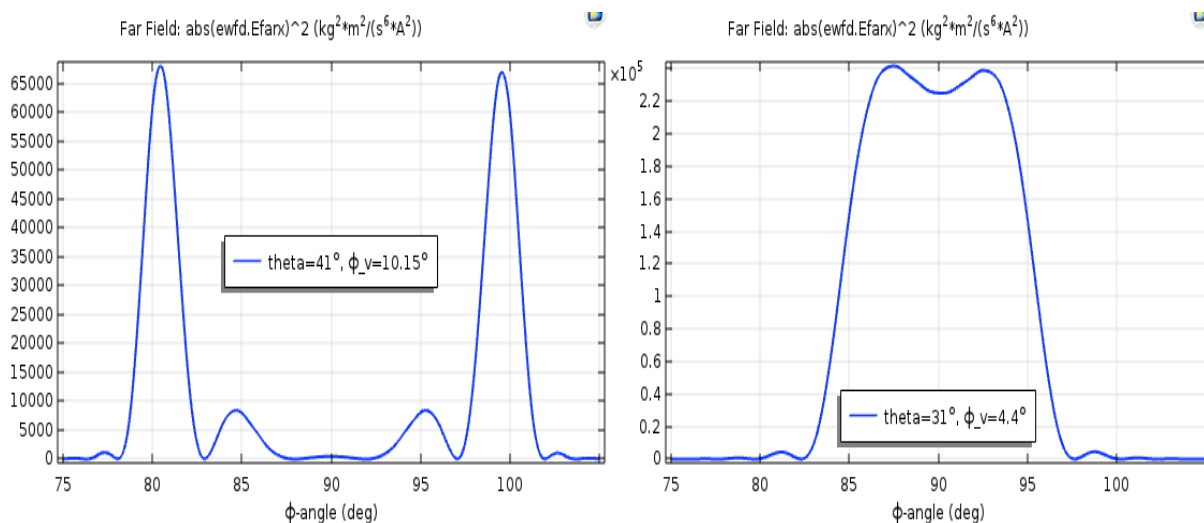
A kristályt modellező geometria ebben az esetben természetesen egy téglalap lesz. A számítási kapacitásom olyan kétdimenziós geometriák modellezését tette lehetővé, amelyeknél az oldalhossz a használt hullámhosszak kb. 100-szoros nagyságrendjébe esik.

Korábban említettem, hogy a megfelelő sűrűségű hálózás megválasztása kritikus fontosságú. Ennek demonstrálásához tekintsük meg a 10. ábrát, ahol két különböző méretű hálózással készült szimuláció eredménye látható. Az alkalmazott hálóelemek méretén kívül a modell minden egyéb paramétere megegyezik. A  $\Delta$  jel most 1 darab hálóelem méretét jelenti, a  $\lambda$  paraméter pedig a jel és idler fotonok vákuumbéli hullámhosszát jelenti (810 nm). Jól látszik, hogy túl nagyra választva  $\Delta$ -át a kapott eloszlás grafikonja értelmezhetetlenné válik. A  $0.2\lambda < \Delta < 0.3\lambda$  feltételnek megfelelő háló már jellegében a várakozásoknak megfelelő eloszlásgörbéket biztosít, viszont ezek gyakran aszimmetrikusak, illetve gyakran jelennek meg a görbéken nem várt helyeken hirtelen ugrások, szakadások. Tapasztalatom szerint a  $0.1\lambda < \Delta < 0.2\lambda$  kritériumnak megfelelő választás kellően „sima” és szimmetrikus, a várakozásokkal összhangban álló eloszlásgörbéket biztosít. Természetesen ez viszont a geometria méretére megszorítást is jelent. Ilyen hálósűrűség mellett 140 db hullámforrás elhelyezésére elegendő nagyságú geometriát tudok felépíteni, és a fenti feltételekkel a szimulációt még le tudom futtatni. Ez persze azt is jelenti, hogy alacsonyabb vágási szögek esetén jóval pontatlanabb szórási szögeloszlást fogunk kapni a 4.2.3 alfejezetben kifejtett okok miatt. Az alábbiakban bemutatott eredmények modellezésekor mindig ugyanazokat a geometriai és hálózási feltételeket használtam, tehát 140 db virtuális hullámforrást, és  $0.1\lambda < \Delta < 0.2\lambda$  méretű hálót.



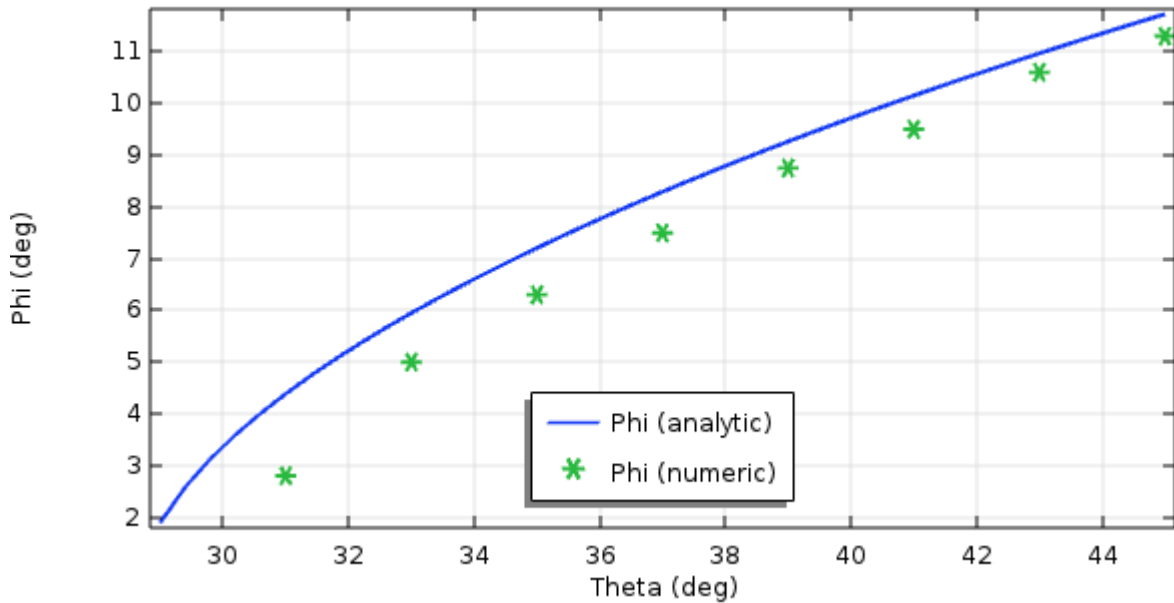
10. ábra: A hálózás sűrűségének hatása az eloszlási görbe pontosságára

A 11. ábrán megtekinthető a távoltéri intenzitáseloszlás  $41^\circ$ -os, illetve  $31^\circ$ -os vágási szögek esetén. A két grafikonon feltüntettem a vágási szöget ( $\theta$ ), és az elmélet alapján várható szórási szöget is ( $\phi_v$ ). A Comsolban a távoltéri eloszlás „tengelye”, középső része a  $90^\circ$ -os szöghöz tartozik, ahogyan az ábrákon is látszik, a szórási szögek ennek figyelembevételével számítandók.



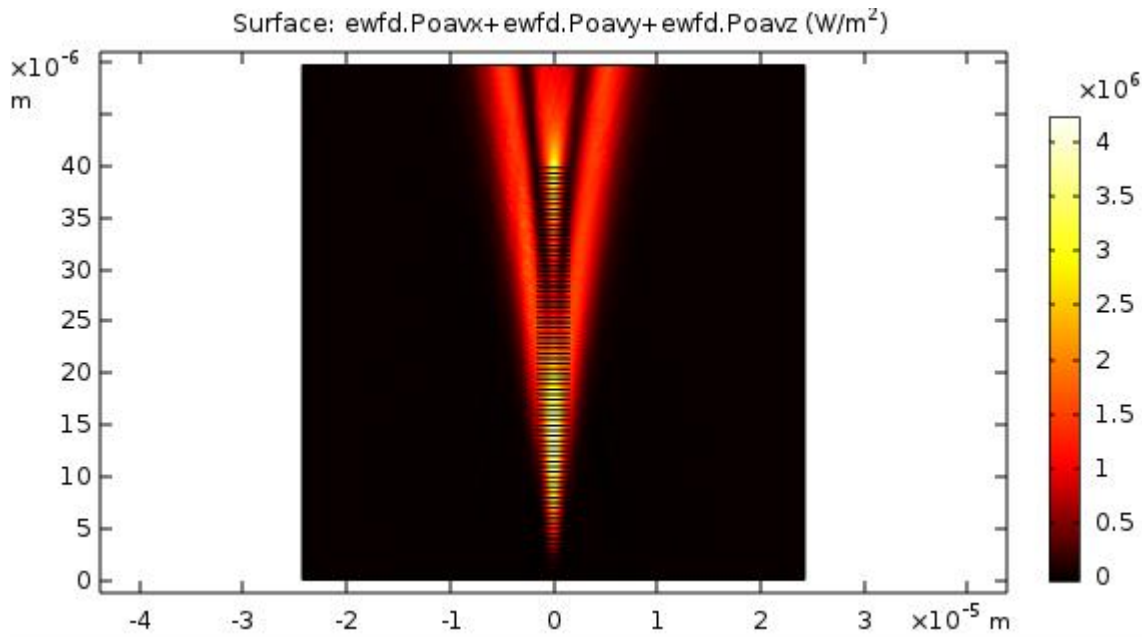
11. ábra: Távoltéri intenzitáseloszlások  $\theta = 41^\circ$  és  $\theta = 31^\circ$  esetén

A várakozásnak megfelelően nagyobb vágási szög esetén a szórási csúcsok jól elkülönülnek, míg kisebb  $\theta$  szögre egy jóval pontatlanabb eloszlás mutatkozik. Az elméleti számítások alapján elkészíthető a szórási szög görbéje a vágási szög függvényében. A 12. ábrán ennek grafikonja látható, amelyen feltüntettem a különböző vágási szögekre szimulációval számított szórási szög értékeket is.



12. ábra: A szórési szögek analitikusan és numerikusan számított értékei a kristály vágási szögének függvényében

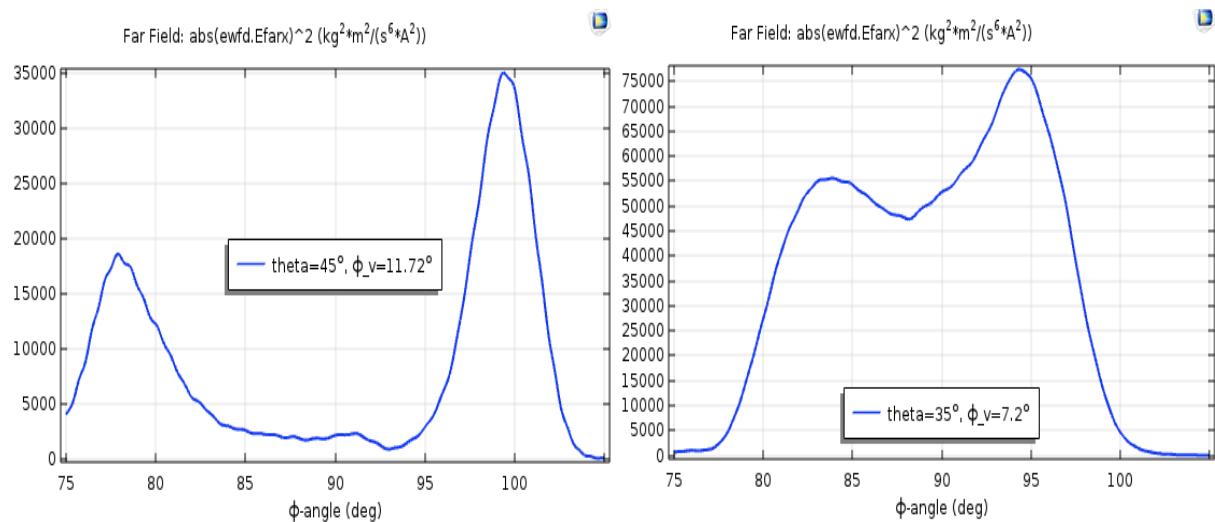
Jól látszik, hogy egyre kisebb vágási szögekre a szimuláció pontossága is romló tendenciát mutat.  $\theta = 31^\circ$  esetén már igen nagy a szimuláció hibája,  $29^\circ$ -os vágási szögre pedig már nem is sikerült értelmezhető eredményt kiszámítani, mert a görbe középső része nem válik két részre, aminek az az oka, hogy a hullámforrások alacsony száma miatt még túl nagy az erősítő interferencia a középső részen, így az oldalsó csúcsok ekkor még nem tudnak látható mértékben elkülönülni. Nagyobb vágási szögekre viszont a számított értékek viszonylag jól közelítik az elméleti számításokat, a  $\theta \in [35^\circ, 45^\circ]$  intervallum alsó tartományában a relatív hiba még 10-12%-os, míg a felső tartományban már csak 3-4%-os. A 13. ábrán megfigyelhetők az energiaáramlás fő irányai is a BBO kristályban, a z koordinátatengely mentén,  $45^\circ$ -os vágási szög mellett.



13. ábra: Az energiaáramlás irányai  $\theta = 45^\circ$  esetén

#### 4.3.2. Aszimmetrikus eset

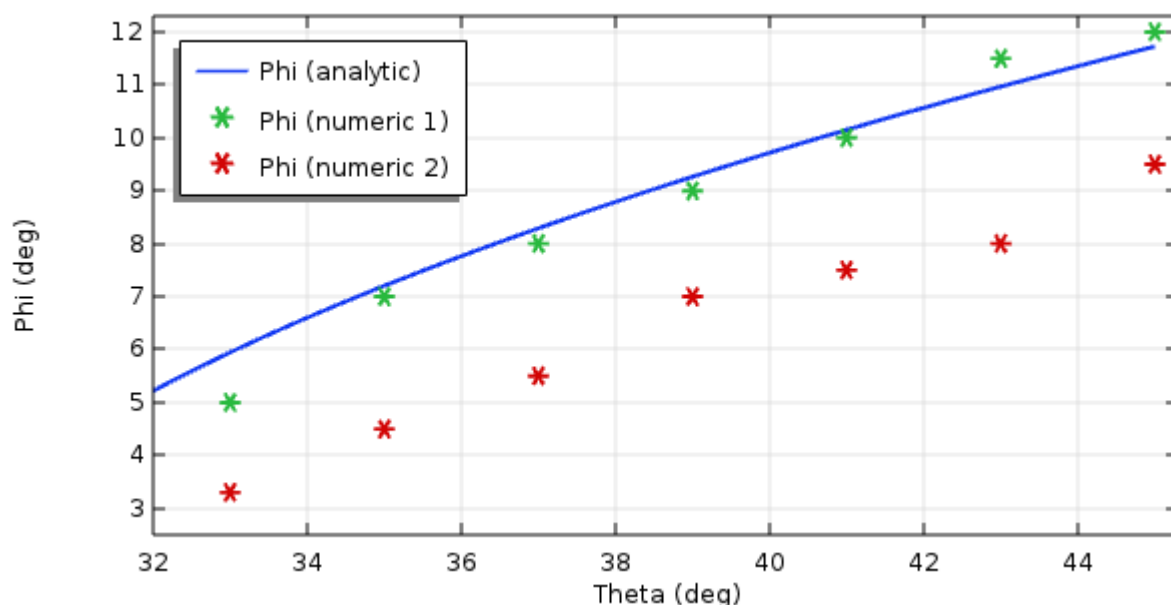
Ezek után vizsgáljuk meg, mi történik, ha az egyes hullámforrások tengelyét (77) szerint egymáshoz képest az x koordinátatengely irányában kicsit elmozdítjuk. Az eredmények azt mutatják, hogy ekkor egy aszimmetrikus intenzitáseloszlás alakul ki, továbbra is két intenzitáscsúccsal a szimmetriatengely két oldalán, azonban a csúcsok sem az intenzitás értékében, sem a csúcshoz tartozó szórási szögben, sem félértékszélességben nem egyeznek. Továbbá az is elmondható, hogy az alacsonyabb vágási szögekhez tartozó eloszlások a szimmetrikus esetnél pontatlanabbak (14. ábra).



14. ábra: Távoltéri intenzitáseloszlások  $\theta = 45^\circ$  és  $\theta = 35^\circ$  esetén (a hullámforrások tengelyének x-irányú eltolása mellett)



A szórási szögeket a különböző vágási szögeknél megvizsgálva a 12. ábra analógiájára ez esetben is elkészíthető a  $\phi(\theta)$  függvény (15. ábra).



15. ábra: A szórási szögek analitikusan és numerikusan számított értékei a kristály vágási szögének függvényében (a hullámforrások tengelyének  $x$ -irányú eltolása mellett)

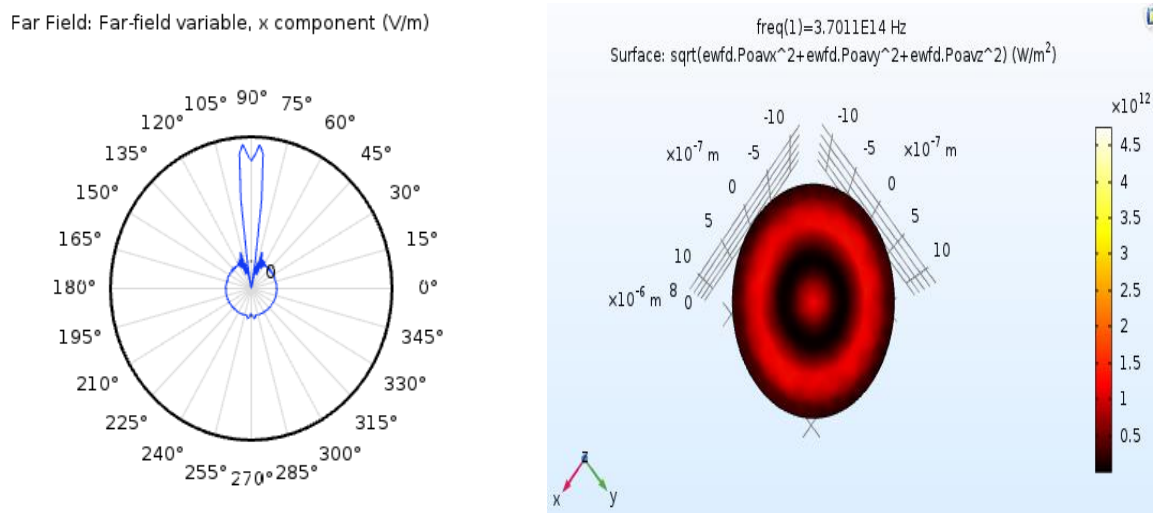
A 15. ábrán, mivel két, egymástól különböző szórási szög jelenik meg, ezeket külön jelöltem. A  $\theta < 33^\circ$  szögekre a szimulációk már annyira pontatlanok, hogy a szórási szögeket az eloszlási görbékről nem lehetett megállapítani. Feltételezhető, hogy a 2D-s modell szimmetria tulajdonságai miatt ( $y$  irányban végtelenített geometria) a kapott eredmény nem teljesen pontosan képezi le a térbeli esetet, ennek kiderítéséhez pontos 3D szimulációk szükségesek.

#### 4.4. Háromdimenziós modellezés

A kétdimenziós modellezésnél láttuk, hogy a pontos szimuláció előfeltétele a megfelelően sűrű hálózás, ami egyúttal a geometria maximális méretének is korlátot szab. Ez fokozottan igaz a háromdimenziós esetre, hiszen egy újabb térdimenzió hozzáadásával a szükséges hálóelemek száma, és ezzel a számítási kapacitásigény is jelentősen megnő. Emiatt sajnos nem lehetséges a kétdimenziós esethez hasonló részletességű elemzés, tehát például nem megoldható a vágási szög függvényében vizsgálni a szórási szögeket, hiszen láttuk, hogy az alacsonyabb vágási szögeket már a 2D-s modell sem tudta megfelelő pontossággal kezelni. Ehelyett ebben a részben megvizsgálom egy olyan esetet, amelyet kisebb geometriája miatt a rendelkezésemre álló technikai feltételekkel is tudok modellezni, és szeretném megmutatni, hogy az így előálló háromdimenziós eloszlás analóg a kétdimenzióssal, és annak

kiterjesztésének, általánosításának tekinthető. Mivel geometria és hálózás szempontjából a nagyobb vágási szögű elrendezések előnyösek, ezért egy ilyen esetet vizsgálok meg. Ehhez egy hengeres geometriát fogok használni, ahol a henger alapja az x-y síkon van, a henger tengelye pedig maga a z koordinátatengely lesz. A hálózás sűrűségére továbbra is a  $0.1\lambda < \Delta < 0.2\lambda$  megkötés érvényes, ehhez a feltételhez kerestem a rendelkezésemre álló számítási kapacitásnak megfelelő méretű geometriát.

A feltételeknek egy olyan hengergeometria felelt meg, amelybe 30 db hullámforrás fért el. Ez a szám sajnos nagyon kevés, a számítások így szükségszerűen pontatlanok, a kapott eloszlásokról ilyen megszorítások mellett annyi mondható el, hogy jellegükben helyesek. A kétdimenzióban látott intenzitáscsúcsok háromdimenziós megfelelője a gyűrű alakú interferenciamintázat (16. ábra).



16. ábra: Távoltéri eloszlás és interferenciagyűrű

A 16. ábra 41°-os vágási szögértéknél futtatott szimuláció alapján készült, bal oldalán a térerősség eloszlása látható távoltérben. Az eloszlás grafikonja úgy képződik, hogy a hengergeometria felső részét határoló körlapot érő sugárzás képe van a távoltérbe vetítve, ennek teljes 360°-os eloszlását figyelhetjük meg az ábrán. A hengert a kör közepén kell elképzelni, a tengelye 90°-os irányba néz, és a belőle kilépő sugárzás is ebben az irányban terjed. A kicsiny kék színű kör jelzi a térerősség nulla értékeit, ami a várakozásoknak megfelelően a 90°-os iránytól jelentősen eltérő irányokban nulla. 90°-nál kirajzolódik látszanak a várt szórési csúcsok, ugyanakkor látható, hogy a túl kicsi geometria miatt ezek még nem válnak szét határozottan, az eloszlás tengelyirányú komponense is erős. Az ábra jobb oldali részén az intenzitás eloszlás látható, arra a körlapra rátekintve felülnézetből, ahonnan a sugárzás kilép a kristályból. Jól megfigyelhető a várt gyűrű alakú interferenciamintázat. 41°-os vágási szög esetén a szórési

szög várható értéke  $10^\circ$  körüli, ehhez képest a szimuláció során számolt szög értéke kb.  $5^\circ$ . Ahogy az várható volt, a fenti beállítások mellett az eredmény meglehetősen pontatlan. A rendelkezésemre álló technikai feltételek mellett sajnos ennél pontosabb szimulációkat háromdimenzióban nem tudtam lefuttatni.

## 5. Összefoglalás és kitekintés

Összességében elmondható, hogy az SPDC jelenség során kialakuló szórási kép modellezésére készített végeelem modell jó közelítéssel visszaadja az elméleti várakozásoknak megfelelő eredményeket. A modellkészítés során több egyszerűsítő közelítéssel éltünk (virtuális hullámforrások, jel/idler fotonok terjedésére vonatkozóan izotróp modell használata), viszont az eredmények tükrében ezek a közelítések megalapozottnak tűnnek. A modellezés pontosságának korlátait egyértelműen a megfelelő sűrűségű hálózás, és az ebből következő geometriai megoldások jelentik, főként a háromdimenziós esetben. Az eddig elkészült modellek elsősorban ebben az irányban fejleszthetők tovább. Komolyabb számítási kapacitással rendelkező számítógéppel háromdimenzióban is el lehetne készíteni a szórási szögek vágási szögtől való függésének grafikonját, ehhez viszont a szakdolgozatomban használt geometriánál jóval nagyobbat kellene használni, nagyságrendileg ezerszer akkorát, feltéve, hogy a  $\theta = 29^\circ$ -os vágási szöghöz tartozó szórási szögeket is szeretnénk pontosan kimutatni. Érdekes lenne továbbá a hullámforrások kicsiny eltolásával adódó geometria eloszlásait is megvizsgálni egy pontosabb háromdimenziós modellben.

## **Köszönetnyilvánítás**

A kutatást a Nemzeti Kutatási Fejlesztési és Innovációs Alap támogatta a Nemzeti Kiválósági Program keretében, a "Kvantumbitek előállítása, megosztása és kvantuminformációs hálózatok fejlesztése" című, 2017-1.2.1-NKP-2017-00001. számú projekt részeként.

## Hivatkozások

- [1] Robert W. Boyd: Nonlinear optics. Elsevier Science, 2008
- [2] Zsolcai Viktor: „Nemlineáris optikai spontán parametrikus lekonverziós folyamat optimalizálása kvantuminformatikai kutatásokhoz” c. diplomamunkája. BME TTK, 2018
- [3] Dorilián López Mago: Implementation of a two-photon Michelson interferometer for Quantum-Optical Coherence Tomography. 2012
- [4] Christophe Couteau: Spontaneous parametric down-conversion. University of Technology of Troyes.
- [5] Dr. Ábrahám György: Optika. Panem kiadó, 1998
- [6] <https://www.comsol.com/multiphysics/finite-element-method>