Einfuehrung in die Theoretische Informatik

Kyriakos Schwarz,Roland Hediger

HS 2014

Contents

1 Erste Woche

1.1 Sprachen

Alphabet Σ: nichtleere endliche Menge (von Zeichen)

Wort ueber Σ: endliche Folge von Zeichen aus Σ

Leeres Wort: ϵ (epsilon)

Menge aller Woerter ueber Σ: Σ^*

Konkatenation von Woertern x, y ueber Σ:

$x = x_1 x_2 ... x_n \qquad ,x_i \in \Sigma$
$y = y_1 y_2 ... y_n \qquad ,y_i \in \Sigma$

$x \cdot y = xy = x_1 x_2 ... x_n y_1 y_2 ... y_n$

Java: $+$ "" (ϵ)
Haskell: $++$ "" (ϵ)

Monoid: Sei M eine Menge und

$\circ : M \times M \rightarrow^{total} M$ eine Verknuepfung

Das Paar $(M, \circ)$ heisst ein Monoid, falls gilt:

1) $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c \qquad ,\forall a, b, c \in M$

2) Es gibt ein $e \in M$ mit $a \circ e = a = e \circ a \qquad ,\forall a \in M$

□

Beispiel 1

$M = \Sigma^*, \circ = \cdot$

$(\Sigma^*, \cdot)$ ist ein Monoid mit ϵ als neutralem Element

□

Beispiel 2

$\{\{x = 5; y = 6; \}z = 7; \} \equiv \{x = 5; \{y = 6; z = 7; \}\}$

Komposition von Anweisungen assoziativ

Neutrales Element: ; (Java) skip, NOP (no operation)

$(x = 2 * x; x = x + 1;) \not\equiv (x = x + 1; x = 2 * x)$

□

Sprache ueber Σ:

Menge von Woerter ueber Σ

Beispiele

$\{\}$ 0 Woerter
$\{0, 1, 01, 10\}$ Sprache uber $\Sigma = \{0, 1\}$
Σ^*
$\{\epsilon\}$ 1 Wort
$\{\epsilon, 0, 00, 000, ...\}$ uber $\Sigma = \{0\}$

Bem
Sprache kann ∞ viele Woerter enthalten
Jedes Wort ist aber endlich

Bem
$\epsilon \in \Sigma^*$
Σ^* immer ∞ gross

Operationen auf Sprachen

Seien L_1, L_2 Sprachen

$L_1 \cup L_2$ Vereinigungsmenge

$L_1 \cdot L_2 = \{xy \mid x \in L_1, y \in L_2\}$ (Kreuzprodukt)

Sei $(M, \circ)$ ein Monoid. Dann def.

$a^0 = e \qquad ,a \in M$
$a^n = a \circ a^{n-1} \qquad ,n > 0$

□

$L^0 = \{\epsilon\}$

$L^n = L \cdot L^{n-1} \qquad ,n > 0$

Kleen' scher Stern

$L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup ...$

$= \{x_1, x_2, ..., x_k \mid k \geqslant 0, x_i \in L\}$

Aufgabe

$\Sigma = \{a, b, ..., z\},\ L_1 = \{good, bad\},\ L_2 = \{cat, dog\}$

$L_1 \cup L_2 = \{bad, cat, dog, good\}$

$L_1 \cdot L_2 = \{goodcat, gooddog, badcat, baddog\}$

$L_1^0 = \{\epsilon\}$

$L_1^1 = \{good, bad\} = L_1 \cdot L_1^0 = L_1$

$L_1^2 = \{goodgood, goodbad, badgood, badbad\}$

$L_1^3 = \{goodgoodgood, goodgoodbad, goodbadgood, goodbadbad,$
$badgoodgood, badgoodbad, badbadgood, badbadbad\}$

$L_1^* = L_1^0 \cup L_1^1 \cup L_1^2 \cup L_1^3 \cup ...$
$= \{x_1, x_2, ..., x_k \,|k \geqslant 0, x_i \in, L_1\} = \{\epsilon, ...\}$

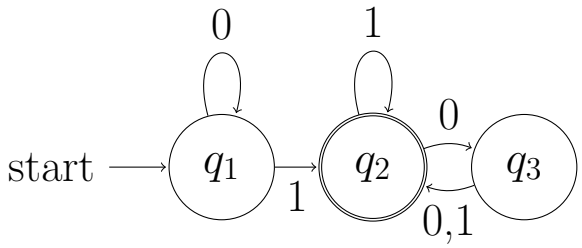
$L_1 \cdot L_2 = \{goodcat, gooddog, badcat, baddog\} \neq L_2 \cdot L_1$

$|M|$ = Anzahl Elemente von M

1.2 Endliche Automaten DFA

deterministic finite automator

Statisch



Dynamisch

Verarbeitung Input: $\xrightarrow{1101}$

1. Start in q_1 Startzustand
2. Lese ①101 , $q_1 \to q_2$
3. Lese 1①01 , $q_2 \to q_2$
4. Lese 11⓪1 , $q_2 \to q_3$
5. Lese 110① , $q_3 \to q_2$
6. Fertig + akzeptiere, da q_2 akzeptierender Zustand ist und die Eingabe fertig gelesen ist.

Liefert accept oder fertig

Terminiert immer!

Def DFA : Ein DFA ist ein 5-Tupel $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit:

1. Q ist eine endliche nichtleere Menge von Zustaenden

2. Σ ist das Eingabealphabet (z.B. 1101)

3. $\delta : Q \times \Sigma \to^{total} Q$
   Transitionsfunktion

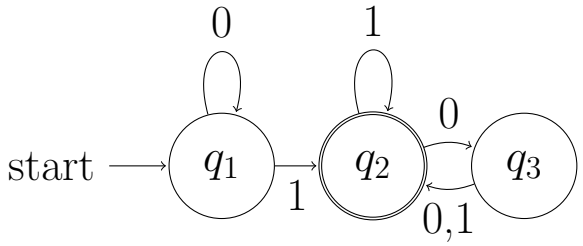
4. q_0 Startzustand

5. $F \subseteq Q$ Menge der akzeptierende Zustaende

---

2 Zweite Woche

2.1 DFA, NFA



1. $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$

2. $\Sigma = \{0, 1\}$

3. $\delta : Q \times \Sigma \to Q$

   $\delta(q_1, 0) = q_1$, $\delta(q_1, 1) = q_2$, ...

4. q_1 Start

5. $F = \{q_2\}$

Def Verarbeitung (dynamisch)

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA

Sei $w = x_1x_2x_3...x_m$ ein Wort ueber Σ mit $x_i \in \Sigma$, $n \geqslant 0$ [$n = 0 \rightarrow w = \epsilon$]

M akzeptiert w, wenn eine Folge von Zustaenden existiert $r_0, r_1, r_2, ..., r_n$, mit:

1. $r_0 = q_0$
2. $r_i = \delta(r_{i-1}, x_i), i \in \{1...m\}$
3. $r_n \in F$

Sonst wird w verworfen

accept / reject

□

M erkennt Sprache L falls

$L = \{w \in \Sigma^* \mid M \text{ akzeptiert } w\}$

Eine Sprache heisst regulaer, wenn ein

DFA existiert, der die Sprache erkennt

Automat $\rightarrow$ akzeptiert / verwirft Wort

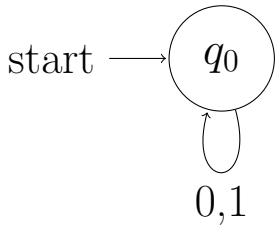
$\searrow$

erkennt Sprache

$\uparrow$

recognise

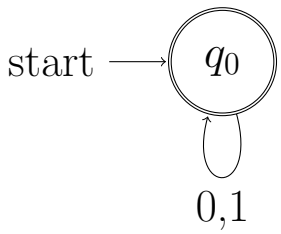
M_2 : $\quad \Sigma = \{0, 1\}$



akzeptiert kein Wort

erkennt $\emptyset$

M_3 : $\quad \Sigma = \{0, 1\}$



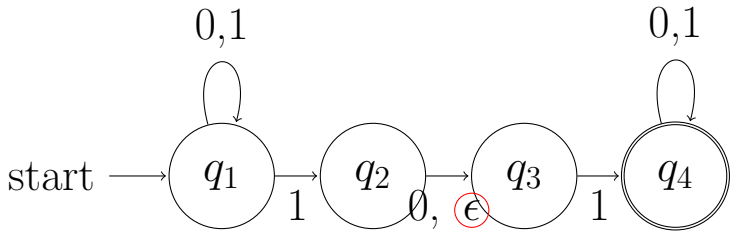
akzeptiert jedes Wort

erkennt Σ^*

Zwei DFA heissen aequivalent, wenn sie
dieselbe Sprachen erkennen

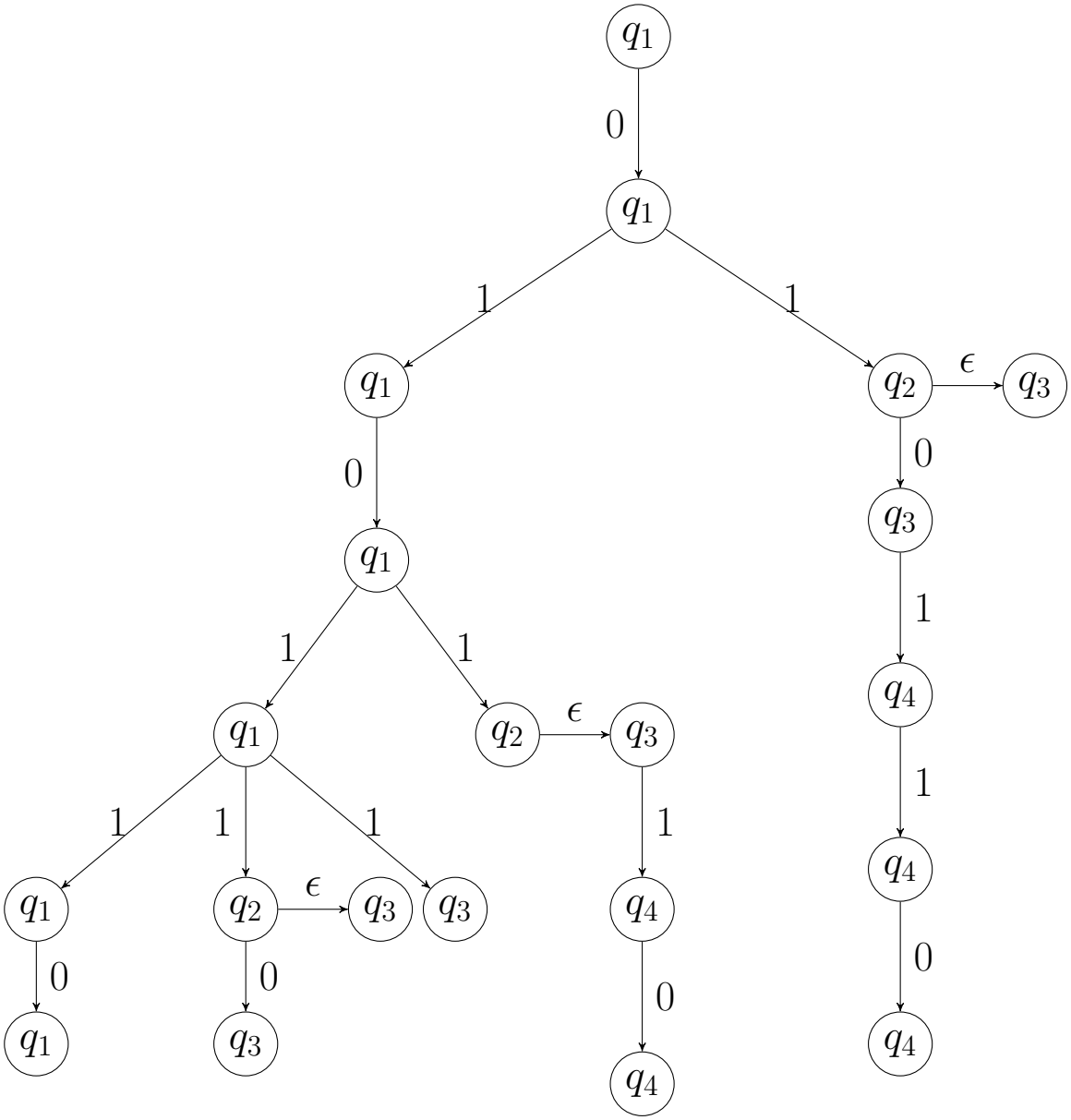
NFA: nichtdeterministischer FA

N_1 : $\Sigma = \{0, 1\}$



Eingabe: 010110

Verarbeitung:



$P(Q) = 2^Q$
heisst Potenzmenge
alle mögliche Teilmengen der Menge.
$\sum_\epsilon = \sum \cup \{\epsilon\}$

Def DFA : Ein NFA ist ein 5-Tupel $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit:

1. Q ist eine endliche nichtleere Menge von Zustaenden

2. Σ ist das Eingabealphabet (z.B. 1101)

3. $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow^{total} P(Q)$
   Transitionsfunktion

4. $q_0 \in Q$ Startzustand

5. $F \subseteq Q$ Menge der akzeptierende Zustaende
