Einfuehrung in die Theoretische Informatik

Kyriakos Schwarz,Roland Hediger

HS 2014

Contents

1 Erste Woche

1.1 Sprachen

Alphabet Σ: nichtleere endliche Menge (von Zeichen)

Wort ueber Σ: endliche Folge von Zeichen aus Σ

Leeres Wort: ϵ (epsilon)

Menge aller Woerter ueber Σ: Σ^*

Konkatenation von Woertern x, y ueber Σ:

$x = x_1x_2...x_n \qquad ,x_i \in \Sigma$
$y = y_1y_2...y_n \qquad ,y_i \in \Sigma$

$x \cdot y = xy = x_1x_2...x_ny_1y_2...y_n$

Java: + "" (ϵ)
Haskell: ++ "" (ϵ)

Monoid: Sei M eine Menge und

$\circ : M \times M \to^{total} M$ eine Verknuepfung

Das Paar $(M, \circ)$ heisst ein Monoid, falls gilt:

1) $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c \qquad ,\forall a, b, c \in M$

2) Es gibt ein $e \in M$ mit $a \circ e = a = e \circ a \qquad ,\forall a \in M$

$\square$

Beispiel 1

$M = \Sigma^*, \circ = \cdot$

$(\Sigma^*, \cdot)$ ist ein Monoid mit ϵ als neutralem Element

$\square$

Beispiel 2

$\{\{x = 5; y = 6;\} z = 7;\} \equiv \{x = 5; \{y = 6; z = 7;\}\}$

Komposition von Anweisungen assoziativ

Neutrales Element: ; (Java) skip, NOP (no operation)

$(x = 2 * x; x = x + 1;) \not\equiv (x = x + 1; x = 2 * x)$

$\square$

Sprache ueber Σ:

Menge von Woerter ueber Σ

Beispiele

$\{\}$ 0 Woerter
$\{0, 1, 01, 10\}$ Sprache uber $\Sigma = \{0, 1\}$
Σ^*
$\{\epsilon\}$ 1 Wort
$\{\epsilon, 0, 00, 000, ...\}$ uber $\Sigma = \{0\}$

Bem
Sprache kann ∞ viele Woerter enthalten
Jedes Wort ist aber endlich

Bem
$\epsilon \in \Sigma^*$
Σ^* immer ∞ gross

Operationen auf Sprachen

Seien L_1, L_2 Sprachen

$L_1 \cup L_2$ Vereinigungsmenge

$L_1 \cdot L_2 = \{xy \mid x \in L_1, y \in L_2\}$ (Kreuzprodukt)

Sei $(M, \circ)$ ein Monoid. Dann def.

$$a^0 = e \qquad ,a \in M$$
$$a^n = a \circ a^{n-1} \qquad ,n > 0$$

$\square$

$$L^0 = \{\epsilon\}$$

$$L^n = L \cdot L^{n-1} \qquad ,n > 0$$

<u>Kleen' scher Stern</u>

$$L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup ...$$

$$= \{x_1, x_2, ..., x_k \mid k \geqslant 0, x_i \in L\}$$

<u>Aufgabe</u>

$\Sigma = \{a, b, ..., z\}$, $L_1 = \{good, bad\}$, $L_2 = \{cat, dog\}$

$L_1 \cup L_2 = \{bad, cat, dog, good\}$

$L_1 \cdot L_2 = \{goodcat, gooddog, badcat, baddog\}$

$L_1^0 = \{\epsilon\}$

$L_1^1 = \{good, bad\} = L_1 \cdot L_1^0 = L_1$

$L_1^2 = \{goodgood, goodbad, badgood, badbad\}$

$$L_1^3 = \{goodgoodgood, goodgoodbad, goodbadgood, goodbadbad,$$
$$badgoodgood, badgoodbad, badbadgood, badbadbad\}$$

$$L_1^* = L_1^0 \cup L_1^1 \cup L_1^2 \cup L_1^3 \cup ...$$
$$= \{x_1, x_2, ..., x_k \,|k \geqslant 0, x_i \in, L_1\} = \{\epsilon, ...\}$$

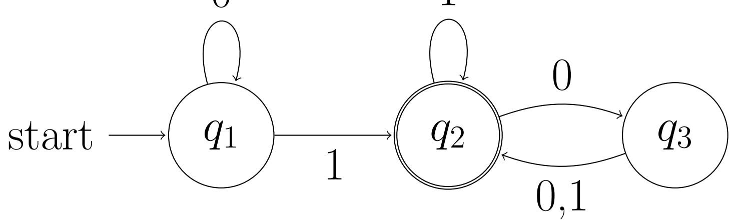
$L_1 \cdot L_2 = \{goodcat, gooddog, badcat, baddog\} \neq L_2 \cdot L_1$

$|M| =$ Anzahl Elemente von M

1.2 Endliche Automaten DFA

deterministic finite automator

Statisch



Dynamisch

Verarbeitung   Input: $\xrightarrow{1101}$

1. Start in q_1 Startzustand
2. Lese 1101   , $q_1 \to q_2$
3. Lese 1101   , $q_2 \to q_2$
4. Lese 1101   , $q_2 \to q_3$
5. Lese 1101   , $q_3 \to q_2$
6. Fertig + akzeptiere, da q_2 akzeptierender Zustand ist und die Eingabe fertig gelesen ist.

Liefert accept oder fertig

Terminiert immer!

Def DFA : Ein DFA ist ein 5-Tupel $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit:

1. Q ist eine endliche nichtleere Menge von Zustaenden

2. Σ ist das Eingabealphabet (z.B. 1101)

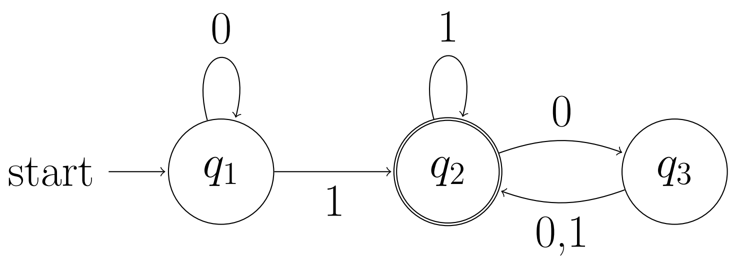
3. $\delta : Q \times \Sigma \to^{total} Q$
   Transitionsfunktion

4. q_0 Startzustand

5. $F \subseteq Q$ Menge der akzeptierende Zustaende

2 Zweite Woche

2.1 DFA, NFA



1. $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$

2. $\Sigma = \{0, 1\}$

3. $\delta : Q \times \Sigma \to Q$

   $\delta(q_1, 0) = q_1$, $\delta(q_1, 1) = q_2$, ...

4. q_1 Start

5. $F = \{q_2\}$

<u>Def Verarbeitung</u> (dynamisch)

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA

Sei $w = x_1 x_2 x_3 ... x_m$ ein Wort ueber Σ mit $x_i \in \Sigma$, $n \geqslant 0$ $[n = 0 \rightarrow w = \epsilon]$

M akzeptiert w, wenn eine Folge von Zustaenden existiert $r_0, r_1, r_2, ..., r_n$, mit:

1. $r_0 = q_0$
2. $r_i = \delta(r_{i-1}, x_i), i \in \{1...m\}$
3. $r_n \in F$

Sonst wird w verworfen

accept / reject

□

> M erkennt Sprache L falls
>
> $L = \{w \in \Sigma^* \mid M \text{ akzeptiert } w\}$

> Eine Sprache heisst regulaer, wenn ein
>
> DFA existiert, der die Sprache erkennt

Automat $\rightarrow$ akzeptiert / verwirft Wort

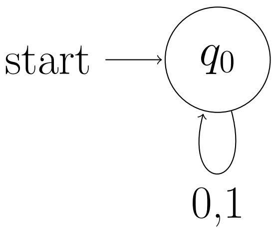
$\searrow$

erkennt Sprache

$\uparrow$

recognise

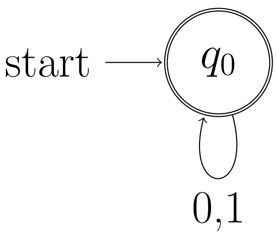
$M_2 :$ $\qquad \Sigma = \{0, 1\}$



akzeptiert kein Wort

erkennt $\emptyset$

$M_3 :$ $\qquad \Sigma = \{0, 1\}$



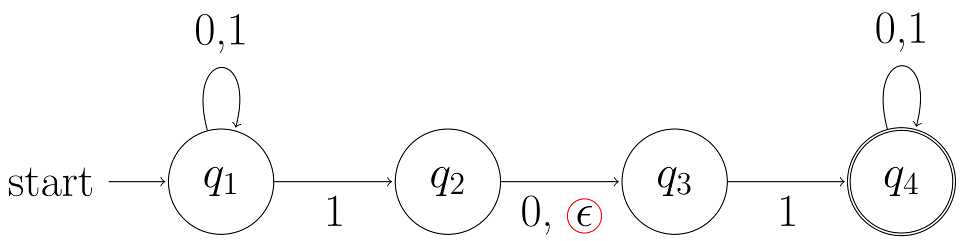
akzeptiert jedes Wort

erkennt Σ^*

Zwei DFA heissen aequivalent, wenn sie dieselbe Sprachen erkennen

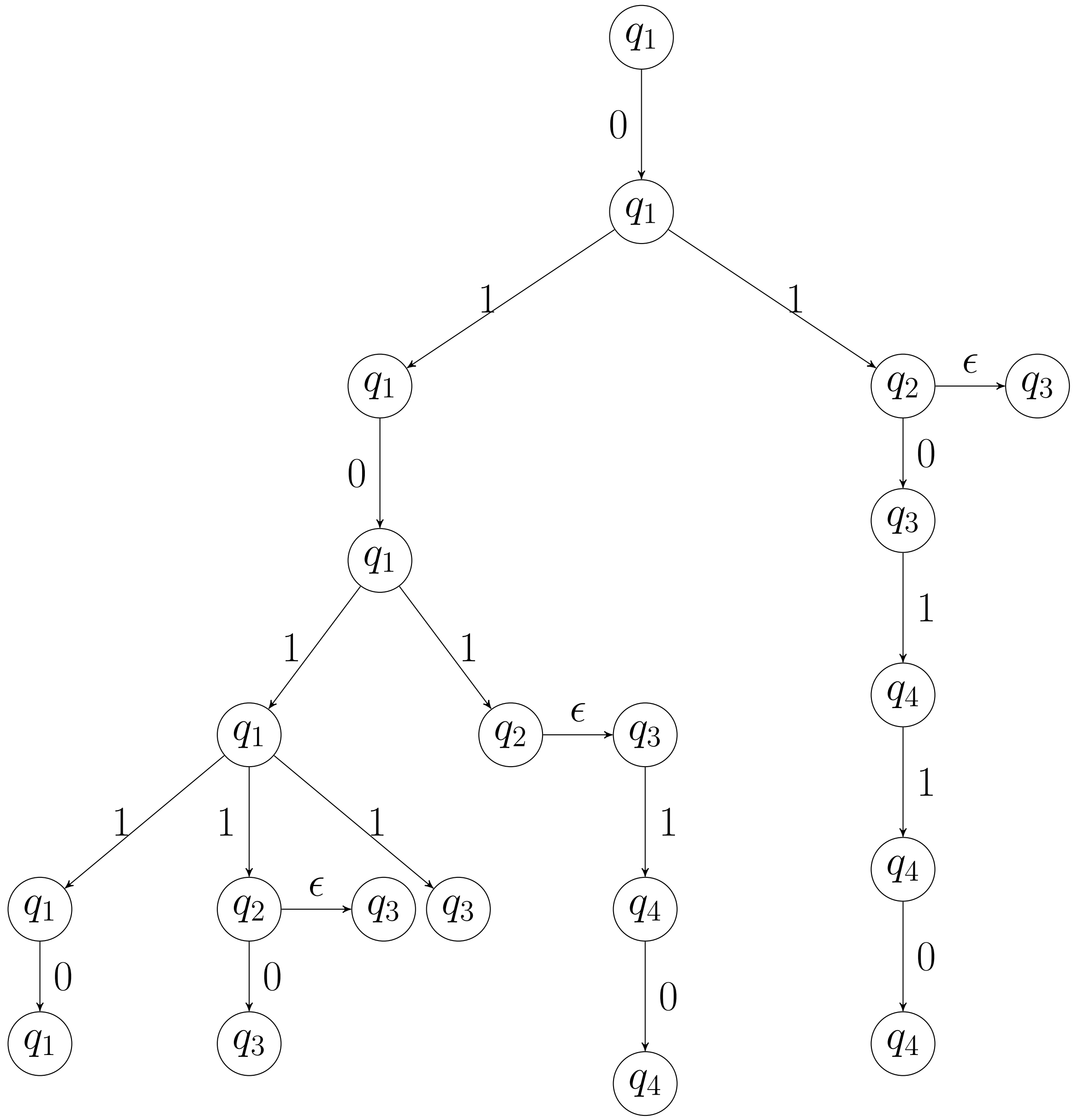
NFA: nichtdeterministischer FA

N_1 : $\qquad \Sigma = \{0, 1\}$



Eingabe: 010110

Verarbeitung:



Def: $P = P(Q) = 2^Q =$ Potenzmenge
ist Menge aller Teilmengen von Q

$\Sigma_\epsilon = \Sigma \cup \{\epsilon\}$

Def DFA : Ein NFA ist ein 5-Tupel $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit:

1. Q ist eine endliche nichtleere Menge von Zustaenden

2. Σ ist das Eingabealphabet (z.B. 1101)

3. $\delta : Q \times \Sigma_\epsilon \rightarrow^{total} P(Q)$
   Transitionsfunktion

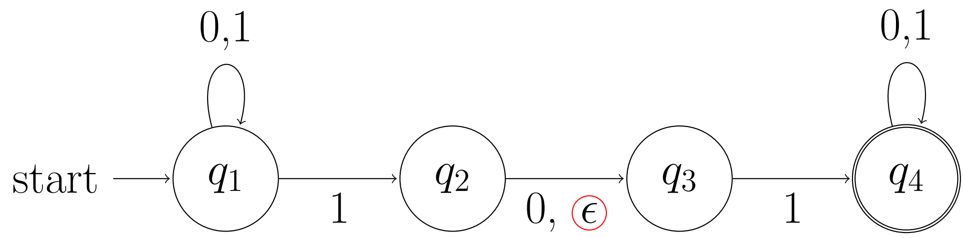
4. $q_0 \in Q$ Startzustand

5. $F \subseteq Q$ Menge der akzeptierende Zustaende

---

3 Dritte Woche

3.1 NFA



Berechnung NFA

Sei $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein NFA

Sei $w = y_1 y_2 ... y_m$, $y_i \in \Sigma\epsilon$

Es existiere eine Folge von Zustaenden
$r_0 r_1 r_2 ... r_m$, $r_i \in Q$ mit

1. $r_0 = q_0$
2. $r_i \in \delta(r_{i-1}, y_i)$, $1 \leqslant i \leqslant m$
3. $r_m \in F$

Dann akzeptiert N das Wort w, sonst verwirft es

□

<u>Beispiel</u> N_1 auf 010110 (unseres Beispiel)

1^{er} Weg

$$\begin{array}{ccccccccccccc} q_1 & & q_1 & & q_2 & & q_3 & & q_4 & & q_4 & & q_4 \\ & 0 & & 1 & & 0 & & 1 & & 1 & & 0 & \end{array}$$

2^{er} Weg

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} q_1 & & q_1 & & q_1 & & q_1 & & q_2 & & q_3 & & q_4 & & q_4 \\ & 0 & & 1 & & 0 & & 1 & & \epsilon & & 1 & & 1 & \end{array}$$

<u>Theorem</u>: Jeder NFA hat einen aequivalenten DFA □

<u>Beweis</u>: Sei $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein NFA der L erkennt
Wir <u>konstruieren</u> ein DFA $D = (Q', \Sigma', \delta', q_0', F')$, der ebenfalls L erkennt

1. $Q' = 2^Q = P(Q)$

2. $\underset{\in Q'}{\underset{\uparrow}{\delta'(R, \alpha)}} = \bigcup_{r \in R} \delta(r, \alpha)$

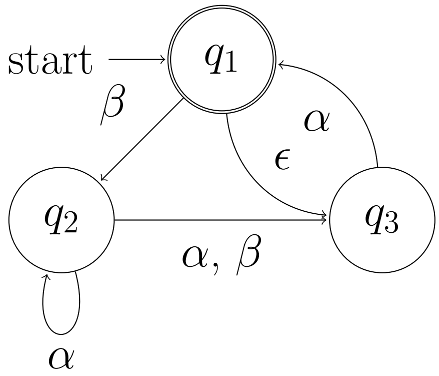
Sei $E(R) = \{q \in Q \mid q \text{ kann von } R \text{ aus durch } \epsilon\text{-Trans erreicht werden}\}$

3. $q_0' = E(\{q_0\})$

4. $F' = \{R \in Q' \mid R \cap F \neq \emptyset\}$

$\square$

Uebung



$$
\begin{aligned}
&Q = \{q_1, q_2, q_3\} \\
&\Sigma = \{\alpha, \beta\} \\
&\delta = \{\delta(q_1, \beta) = q_2, \\
&\qquad \delta(q_1, \epsilon) = q_3 \\
&\qquad \delta(q_2, \alpha) = q_2 \\
&\qquad \delta(q_2, \alpha) = q_3 \\
&\qquad \delta(q_2, \beta) = q_3 \\
&\qquad \delta(q_3, \alpha) = q_1\} \\
&q_0 = q_1 \\
&F = \{q_1\}
\end{aligned}
$$

$\rightarrow$ DFA

1. $Q' = P(Q) = \{\{\}, \{q_1\}, \{q_2\}, \{q_3\}, \{q_1, q_2\},$
$\{q_1, q_3\}, \{q_2, q_3\}, \{q_1, q_2, q_3\}\}$

2. δ':

	α	β
$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$
$\{q_1\}$	$\{\}$	$\{q_2\}$
$\{q_2\}$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_3\}$
$\{q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{\}$
$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$
$\{q_1, q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_2\}$
$\{q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_3\}$
$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$

3. $q_0' = E(\{q_0\}) = E(\{q_1\}) = \{q_1, q_3\}$

4. $F' = \{\{q_1\}, \{q_1, q_2\}, \{q_1, q_3\}, \{q_1, q_2, q_3\}\}$

---

4 Vierte Woche

4.1 Abgeschlossenheit

Abgeschlossenheit

$a, b \in \mathbb{N}$, $a + b \in \mathbb{N}$

$a - b \notin \mathbb{N}$

$\uparrow$

im Allgemeinem

Def

Eine Menge M heisst abgeschlossen unter einer Operation $\circ$, wenn $a \circ b \in M$ fuer alle $a, b \in M$

$\square$

Satz

Die Menge der raeguleren Sprachen ist abgeschlossen unter Vereinigung, Konkatenation und Kleenescher Stern

$\square$

$\bigcup$ Vereinigung

1. Schon gezeigt durch DFAs
2. Nun mit NFAs:

<skitze>

N_1 erkennt L_1
N_2 erkennt L_2
N erkennt $L_1 \cup L_2$

Konkatenation

L_1, L_2 regulaer, dann $L_1 \cdot L_2$ regulaer

<skitze>

Kleen'scher Stern

L regulaer, dann L^* regulaer

<skitze>

N erkennt L^*

4.2 RE

Raegulere Ausdruecke (RE)

REs: Spezifikation
DFA / NFAs: Implementation

Arithmetischer Ausdruck: "$(5 + 3) * 4$" : String
32 : $\mathbb{N}$

Bedeutung von String ist $\mathbb{N}$

RE: "$(0 \cup 1) \cdot 0^*$" : String
$\{0\}\ \{1\}\ \{0\}$
$\{0, 1\}\ \{\epsilon, 0, 00, 000, ...\}$
$\{0, 00, 000, ..., 1, 10, 100, ...\}$

Bedeutung von String ist Sprache

Syntax und Semantik von REs

	RE Syntax	L(RE) Semantik
1.	a fuer $a \in \Sigma$	$\{a\}$
2.	ϵ	$\{\epsilon\}$
3.	$\emptyset$	$\emptyset$
4.	$(R_1 \cup R_2)$	$L(R_1) \cup L(R_2)$
5.	$(R_1 \circ R_2)$	$L(R_1) \cdot L(R_2)$
6.	(R^*)	$(L(R))^*$

6. (Hoch) $\xrightarrow{Praezidenzen}$ (Niedrig) 1.

z.B.: $a \cdot b \cup c$

bedeutet
$(a \cdot b) \cup c$

und <u>nicht</u>
$a \cdot (b \cup c)$

<u>Zucker</u> (Es kann nichts neues)

$R^+ = R \circ R^*$

also

$R^* = R^+ \cup \epsilon$

$\Sigma = c_1 \cup c_2 \cup ... \cup c_n$ mit $c_i \in \Sigma$

Beispiele

a) "$(0 \cup 1)^*01$" bezeichnet alle Woerter, die mit 01 enden

---

5 Funfte Woche

5.1 Pumping Lemma

$\{0^n 1^n | n \geq 0\}$ nicht Regulär

<u>Pumping Lemma:</u>

Sei L eine Reguläre Sprache über $\sum$
Dann existiert eine Zahl $p \in N$ (Pumping Länge) mit:
Jedes Wort $s \in L$ mit $|s| \geq p$ lässt sich schreiben als:
$s = xyz$ wobei $x, y, z \in \sum^*$ mit folgenden eigenschaften:

1. (Aufpumpen) $xy^i z \in L$ für alle $i \geq 0$
2. $|y| \geq 1$
3. $|xy| \leq p$

Für jedes Wort existiert eine Zerlegung.
Logische Struktur : $\{\exists p | \forall s \in L | \exists x, y, z | 1)2)3)\}$

Beweis:

Sei M ein DFA das L erkennt, $M = \{Q, \sum, \delta, q_0, F\}$

Sei p die Anzahl Zustände : $p = |Q|$

Sei $s = s_1 \dots s_n \in L$ mit $s_i \in \sum$ und $n \geq p$

Sei $r_1, r_2 \dots r_{n+1}$ die Folge der Zustände die M durchläuft um s zu akzeptieren.
$s = s_1 \downarrow_{r_1} \dots \downarrow_{r_n} s_n \downarrow_{r_{n+1} \in F}$

Länge $n + 1 \geq p + 1, n + 1 > p$

Da M p Zustände hat muss **mindestens ein Zustand zweimal unter dem erstem p+1 Zuständen vorkommen /durchgelaufen werden** (Eigenschaften des DFA - jedes Zeichen des Alphabet muss durch jeder Zustand verarbeitet werden)

Pidgeonhole Prinzip:
Beziechne r_j das erste Auftreten eines sollchen Zustandes (Zustände paarweise verschieden bis zum gewissen Punkt). r_l das zweite Auftreten des Zuständes $l > j$

(Diagram hier)

Aus dem Pidgeonholeprinzip folgt dass $l \leq p+1$:

1. M akzeptiert $xy^iz, i \geq 0$

2. Zwischen r_j, r_l mind 1 Zeichen) $l \neq j|y| \geq 1$

3. $|xy| = l - 1 \leq (p+1) - 1 = p$

$\square$

<u>Beispiel:</u>
$\{0^n1^n | n \geq 0\} = L_1$

Sei L_1 Regulär dann existiert ein p (Pumping Lemma).

Betrachte $s = 0^p1^p \in L$:
Dann lässt sich s schreiben als $s = xyz$ mit der Eigenschaft: $s = xyz, x, y^iz \in L, |y| \geq 1$

1. y besteht nur aus Nullen : $xyyz \notin L$

2. y besteht nur aus Einsen $xyyz \notin L$

3. y besteht aus Nullen und Einsen $\rightarrow$ $xyyz$: (Riehenfolge ist

falsch)

Wiederspruch in jedem Fall $\rightarrow L_1$ nicht regulär