

Contenido

- Estados límites últimos
- Fórmula de hinca dinámica
- Ensayos dinámicos de campo
- **Modelación**





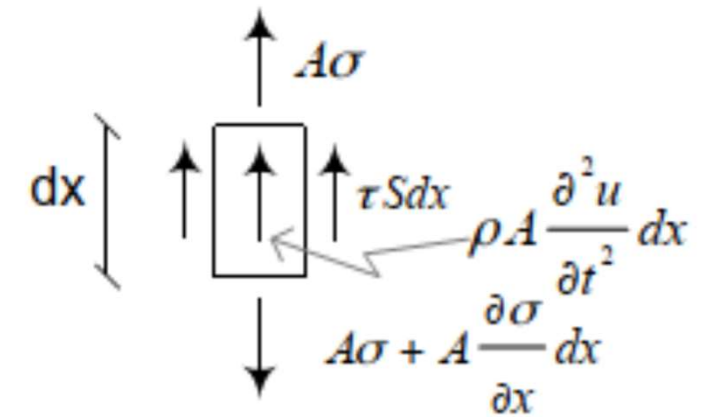
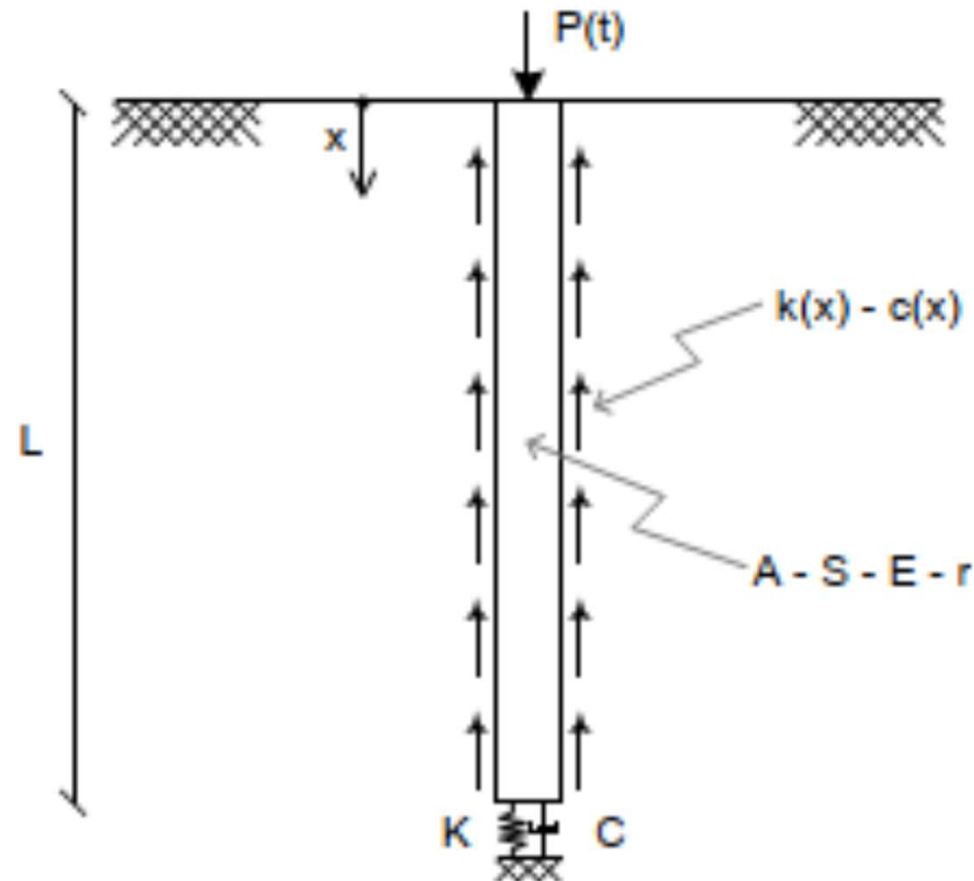
Modelo físico - matemático

La ecuación de equilibrio en un elemento diferencial que representa el modelo adoptado tiene en cuenta:

- Inercia del pilote
- Propiedades del suelo en la punta:
 - Rigidez $K(L)$
 - Amortiguamiento $C(L)$
- Propiedades de la estratigrafía en el perímetro:
 - Rigidez $k(x)$
 - Amortiguamiento $c(x)$



Modelo físico - matemático



$$A \frac{\partial \sigma}{\partial x} - S \tau - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$



Modelo físico - matemático

Considerando la relación entre tensiones y desplazamientos:

$$A \frac{\partial \sigma}{\partial x} - S \tau - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad \sigma = E \frac{\partial u}{\partial x} \quad \tau = c \frac{\partial u}{\partial t} + k u$$

La ecuación diferencial de equilibrio resulta

$$E A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c S \frac{\partial u}{\partial t} - k S u - \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

En los extremos del pilote se debe cumplir:

$$x = 0: P(t) = -A \sigma(0, t) = -E A \frac{\partial u}{\partial x}(0, t)$$

$$x = L: K u(L, t) + C \frac{\partial u}{\partial t}(L, t) = -A \sigma(L, t) = -E A \frac{\partial u}{\partial x}(L, t)$$



Ecuaciones generales del problema

La velocidad de propagación de ondas en el pilote es $V_p = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$
 Reescribimos las expresiones previas y dividimos m.a.m. por la rigidez axial

La ecuación diferencial de equilibrio resulta

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{c S}{E A} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{k S}{E A} u - \frac{1}{V_p^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

En los extremos del pilote se debe cumplir:

$$x = 0: \frac{P(t)}{E A} = -\frac{\partial u}{\partial x}(0, t)$$

$$x = L: \frac{K}{E A} u(L, t) + \frac{C}{E A} \frac{\partial u}{\partial t}(L, t) = -\frac{\partial u}{\partial x}(L, t)$$

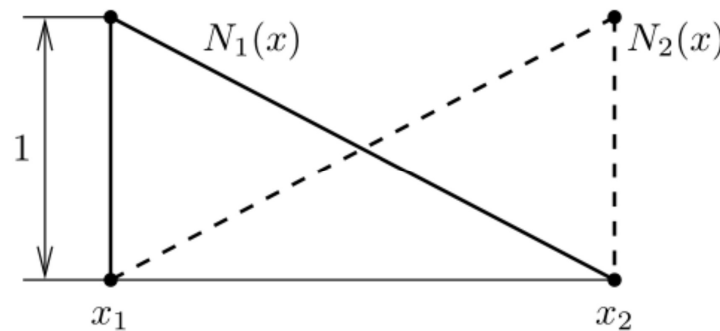


Método de los elementos finitos

Discretización

Se interpolan los desplazamientos mediante elementos isoparamétricos unidimensionales

$$\tilde{u} = h_j \hat{u}_j$$



$$h_1 = \frac{1}{2} (1 - r)$$

$$h_2 = \frac{1}{2} (1 + r)$$

Sus derivadas son:

- Espaciales $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} = \frac{\partial h_j}{\partial x} \hat{u}_j$ $\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 h_j}{\partial x^2} \hat{u}_j$

- Temporales $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = h_j \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial t} = h_j \dot{\hat{u}}_j$ $\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = h_j \frac{\partial^2 \hat{u}_j}{\partial t^2} = h_j \ddot{\hat{u}}_j$



Método de los elementos finitos

Residuos

Sobre las ecuaciones generales se plantea la ecuación de residuo

$$\begin{aligned}
 & \int_0^L h_i \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} dx - \int_0^L h_i \frac{c S}{E A} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} dx - \int_0^L h_i \frac{k S}{E A} \tilde{u} dx - \dots \\
 & \dots - \int_0^L h_i \frac{1}{V_p^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} dx + \left[\frac{P(t)}{EA} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(0, t) \right] \Big|_{x=0} + \dots \\
 & \dots + h_i \left[-\frac{K}{EA} \tilde{u}(L, t) - \frac{C}{EA} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(L, t) - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(L, t) \right] \Big|_{x=L} = 0
 \end{aligned}$$



Método de los elementos finitos

Integración temporal

Al evaluar las integrales según la discretización se define

$$(I_{ij} + k_{ij}) \hat{u}_j + c_{ij} \dot{\hat{u}}_j + M_{ij} \ddot{\hat{u}}_j + \left[\frac{K}{EA} \hat{u}_j + \frac{C}{EA} \dot{\hat{u}}_j \right] \Big|_{x=L} = \left[\frac{P(t)}{EA} \right] \Big|_{x=0}$$

Para integrar temporalmente se aplica el método de Newmark

$$(I_{ij} + k_{ij}) \hat{u}_j^{n+1} + c_{ij} \dot{\hat{u}}_j^{n+1} + M_{ij} \ddot{\hat{u}}_j^{n+1} + \dots \\ \dots + \left[\frac{K}{EA} \hat{u}_j^{n+1} + \frac{C}{EA} \dot{\hat{u}}_j^{n+1} \right] \Big|_{x=L} = \left[\frac{P(t)}{EA} \right] \Big|_{x=0}$$

donde:

- aceleración: $\ddot{\hat{u}}_j^{n+1} = \frac{\hat{u}_j^{n+1}}{\Delta t^2 \beta} - \frac{\hat{u}_j^n}{\Delta t^2 \beta} - \frac{\dot{\hat{u}}_j^n}{\Delta \beta} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\hat{u}}_j^n$
- velocidad: $\dot{\hat{u}}_j^{n+1} = \dot{\hat{u}}_j^n + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{\hat{u}}_j^n + \gamma \Delta t \ddot{\hat{u}}_j^{n+1}$

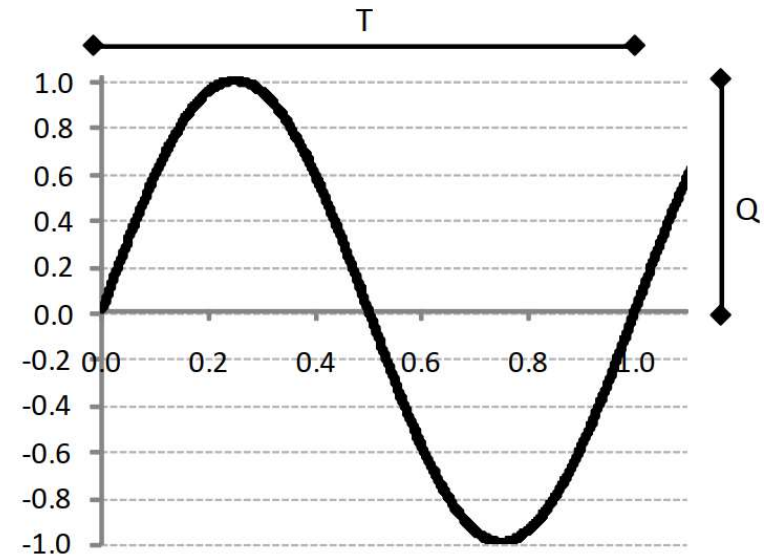
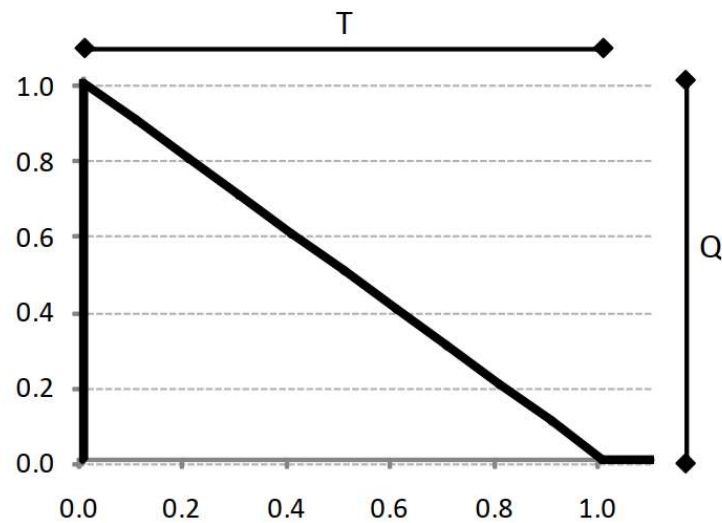
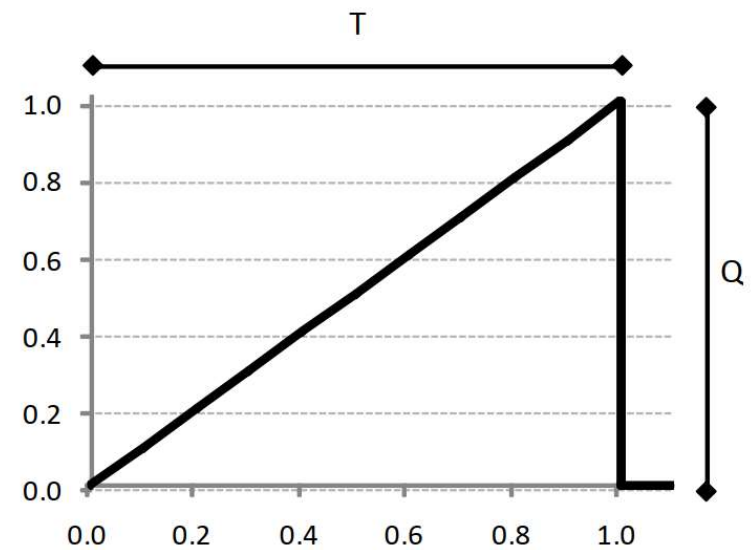
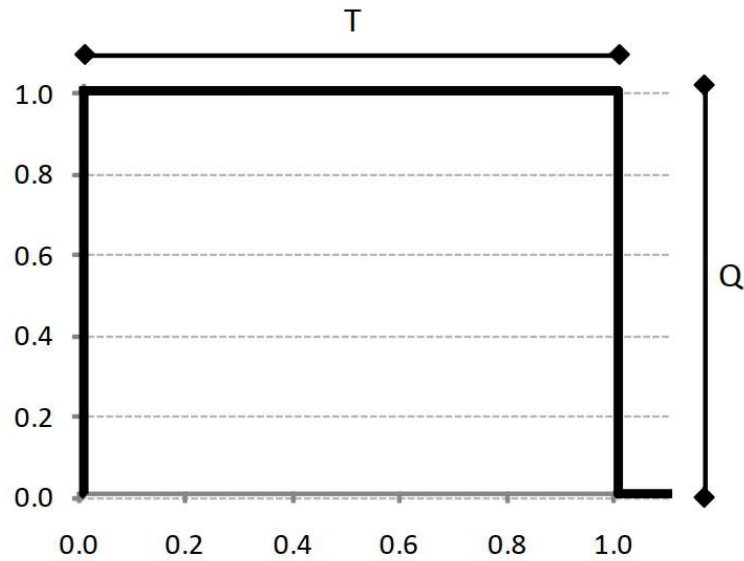


Datos de entrada del problema

	Dato	Id	Unidad
Pilote	Longitud	L	m
	Módulo de Elasticidad	E	kN/m ²
	Peso específico	γ	kN/m ³
	Sección	A	m ²
	Perímetro	S	m ²
Suelo	Rigidez perimetral	k	kN/m ² /m
	Amortiguamiento perimetral	c	kN*s/m ² /m
	Rigidez - punta	K	kN/m
	Amortiguamiento - punta	C	kN*s/m

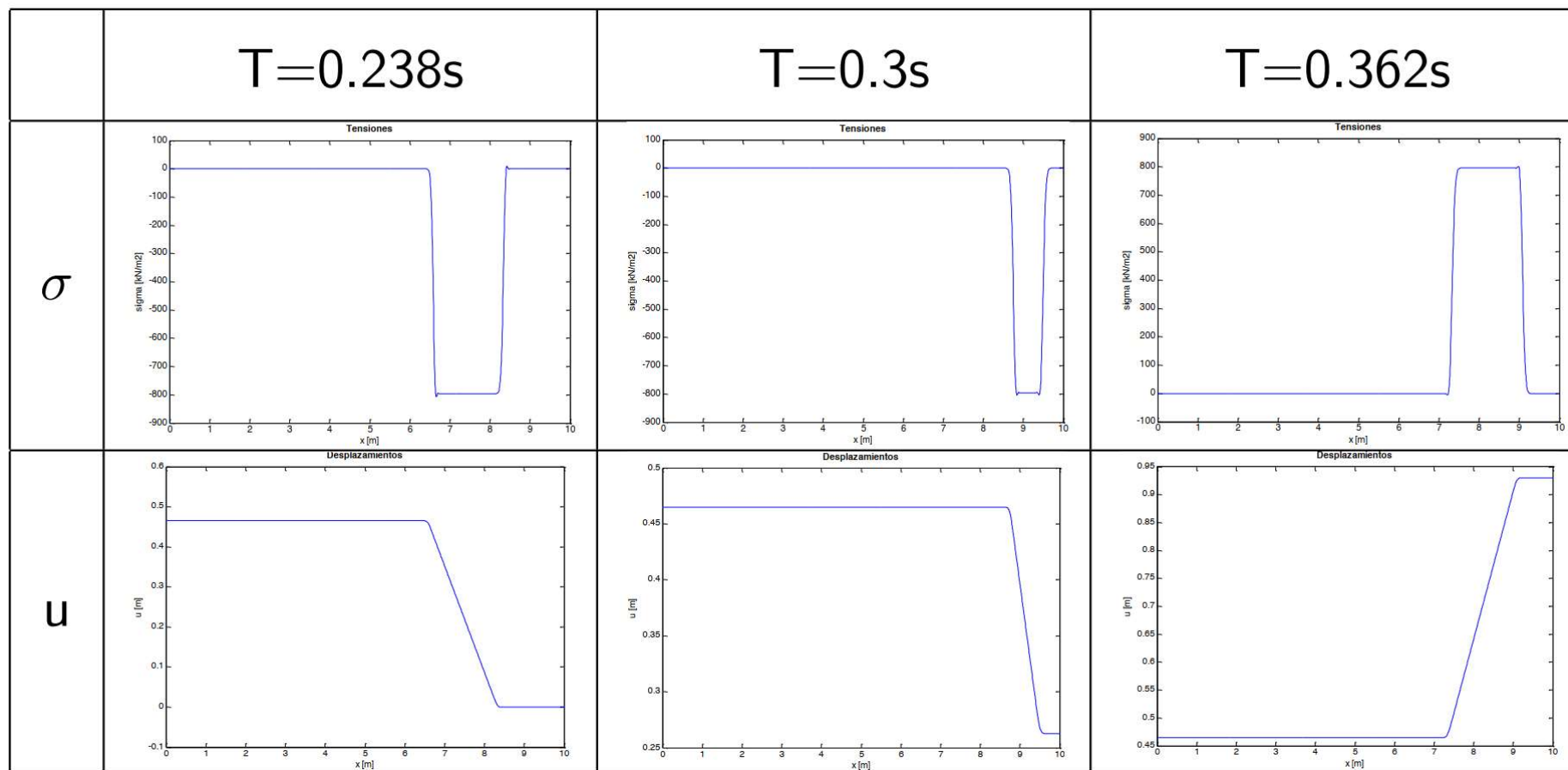


Alternativas de excitación



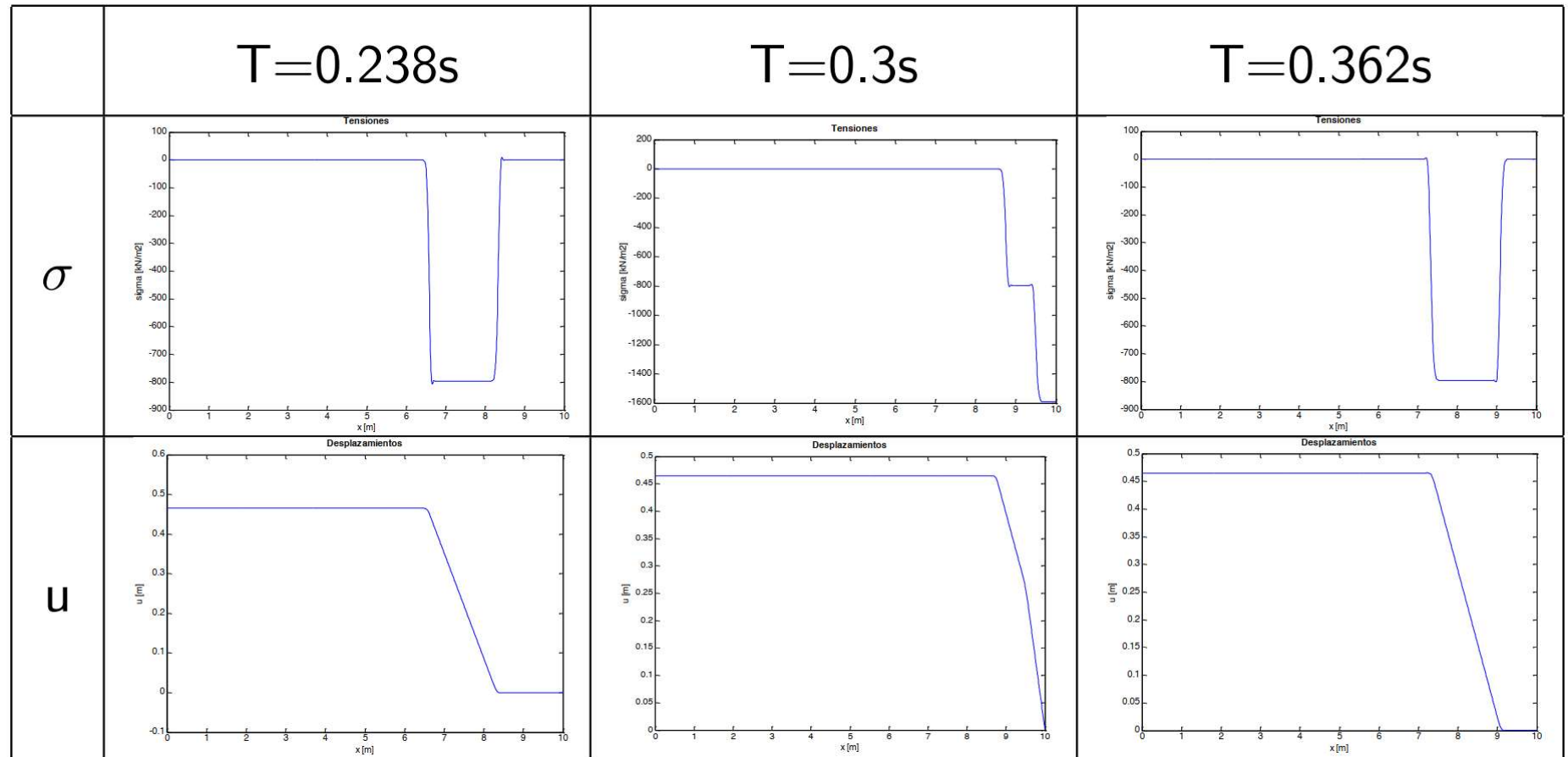


Caso 1: Pilote flotante ($K=C=k=c=0$)



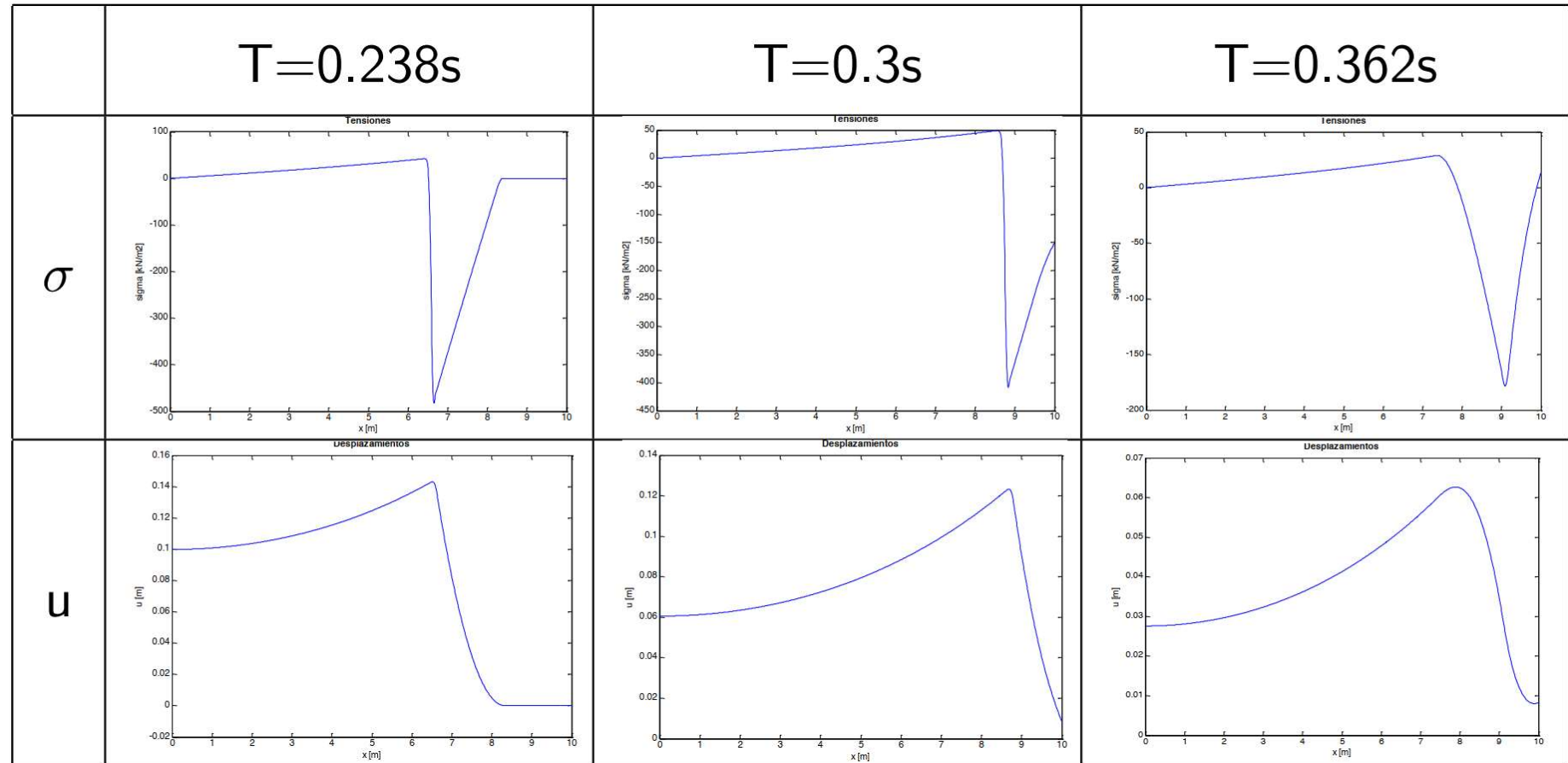


Caso 2: Pilote en roca ($K=\infty$, $C=k=c=0$)





Caso 3: Rampa ascendente (K, C, k, c)





Ejercicio: análisis de condiciones de contorno

Mediante el uso del programa de elementos finitos para una excitación definida por un pulso:

- Analizar la propagación para un extremo libre
- Analizar la propagación para un extremo rígido
- Graficar la variación de las velocidades y las tensiones a medida que el pulso se propaga en el pilote



Propagación de ondas en pilotes

La propagación de ondas en pilotes se puede originar bajo las siguientes situaciones:

- Hinca dinámica de pilotes
- Ensayos dinámicos de carga
- Ensayos no destructivos
- Fundaciones de máquinas
- **Fundaciones de un puente ferroviario**

Los casos que se representan corresponden a vibraciones que se propagan en la dirección principal del elemento en análisis



Ejercicio: fundación de un puente ferroviario

La pila de un puente ferroviario está compuesta por dos pilotes fundados sobre roca rígida. La acción del tren se puede aproximar como una sollicitación periódica. Asumiendo un amortiguamiento del fuste despreciable y una rigidez del fuste tal que $H/L = 1$, donde $H^2 = \frac{EA}{k S}$, buscar la frecuencia de resonancia del pilote.



Referencias

- Kramer, S. L. (1996). *Geotechnical Earthquake Engineering*. Prentice Hall.
- Verruijt, A. (2010). *An Introduction to Soil Dynamics*. Springer.
- Hannigan, P. J., Rausche, F., Likins, G. E., Robinson, B. R. and Becker, M. L. (2016). *Design and construction of driven pile foundations-Volume I* (No. FHWA-NHI-16-009).
- Hannigan, P. J., Rausche, F., Likins, G. E., Robinson, B. R. and Becker, M. L. (2016). *Design and construction of driven pile foundations-Volume II* (No. FHWA-NHI-16-009).
- Bathe, K. J. (2006). *Finite element procedures*. Klaus-Jurgen Bathe.