Elementos de Cálculo Numérico / Cálculo Numérico

Primer Cuatrimestre 2025

Práctica N° 8: Aproximación por cuadrados mínimos.

Ejercicio 1 Escribir un programa que reciba como datos dos vectores x e y y un número n y devuelva un vector con los coeficientes del polinomio de grado n que mejor ajusta la tabla dada por x e y en el sentido de cuadrados mínimos. Para el cálculo, utilice la descomposición QR de una matriz apropiada.

Ejercicio 2 Encontrar el polinomio de grado 1 que aproxima en el sentido de cuadrados mínimos la siguiente tabla de datos:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	-.1	1.1	1.9	3.2	3.8	5	6	7.3	8.1	8.9

y el polinomio de grado 2 que aproxima en el mismo sentido la siguiente tabla de datos:

x	-1	0	1	3	6
y	6.1	2.8	2.2	6	26.9

Ejercicio 3 Hallar la constante o polinomio de grado 0 que mejor aproxima en el sentido de cuadrados mínimos a una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ en n puntos $x_1, \ldots, x_n$ en $[a, b]$.

Ejercicio 4 El archivo *notas.csv* contiene los porcentajes de asistencia a los laboratorios de Cálculo Numérico y la nota obtenida en el final de la materia, por un grupo de alumnos. Realizar un ajuste lineal y un ajuste cuadrático de los datos. A partir de cada ajuste, ¿qué porcentaje de asistencia a los laboratorios sería recomendable alcanzar si se quiere obtener al menos un 8 en el final?

Para leer los datos del archivo, recomendamos usar el paquete `pandas`. La siguiete secuencia levanta el archivo y almacena los datos en una matriz A:

```
import pandas as pd
data = pd.read_csv("notas.csv")
A    = data.to_numpy()
```

El archivo debe estar en la misma carpeta que la notebook en donde se ejecuta el código.

Ejercicio 5 Considerar la función $f(x) = \dfrac{1}{1 + 25x^2}$ en el intervalo [-1,1].

Para $n = 5, 10, 15$; graficar simultáneamente f junto con

- los polinomios que aproximan a f en el sentido de cuadrados mínimos en $n+1$ puntos equiespaciados y tienen grado $\frac{2}{5}n$ y $\frac{4}{5}n$,

- el polinomio que resulta de interpolar a f en los puntos anteriores.

Ejercicio 6 El radiocarbono, o isótopo 14 del carbono (^{14}C) se crea permanentemente en la atmósfera, se incorpora a las plantas a través de la fotosíntesis y a los animales a través de las plantas que ingieren. Una vez que la planta o el animal muere, el ^{14}C decae radioactivamente siguiendo una ley exponencial decreciente. El archivo `carbono14.csv` contiene datos simulados de la cantidad de ^{14}C en una muestra de materia orgánica, desde el momento de la muerte ($t = 0$). El tiempo se mide en años.

(a) Ajustar los datos con un polinomio lineal p. Graficar p junto con los datos. A partir del gráfico, decidir si el ajuste es bueno o no.

(b) Ajustar los datos con una función del tipo $f(x) = ae^{bx}$ y calcular el error $E = \sum_i (y_i - f(x_i))^2$.

(c) Graficar conjuntamente los datos y los dos ajustes.

c 6

Ejercicio 7 Considerar $\text{erf} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

a) Utilizando el comando `scipy.special.erf` graficar la función en el intervalo $[-15, 15]$. Observar que $\lim_{x\to\pm\infty} \text{erf}(x) = \pm 1$.

b) Aproximar la función erf en el sentido de cuadrados mínimos con polinomios de grado 1, 3 y 5, considerando 20 puntos equiespaciados en el intervalo $[-10, 10]$. Graficar erf junto con estos polinomios en el intervalo $[-15, 15]$. Observar que la aproximación es mala fuera del intervalo $[-10, 10]$.

c) Se quiere aproximar nuevamente la función erf en el sentido de cuadrados mínimos con una combinación lineal de funciones que compartan con erf la propiedad de ser acotada e impar. Para ello, ajustar la función erf con una función del tipo

$$c_1 x e^{-x^2} + c_2 \text{arctan}(x) + c_3 \frac{x}{x^2+1},$$

considerando 20 puntos equiespaciados en el intervalo $[-10, 10]$. Graficar erf junto a esta aproximación en el intervalo $[-15, 15]$ y comparar con el ítem (b).

Ejercicio 8 Aproximar los datos de la tabla siguiente con un modelo de la forma $f(x) \sim ae^{bx}$ en el sentido de cuadrados mínimos para la función $\ln(f(x))$.

x	-1	0	1	2
y	8.1	3	1.1	0.5

Ejercicio 9 Aproximar los datos de la tabla siguiente con un modelo de la forma $f(x) \sim -e^{ax^2+bx+c}$ en el sentido de cuadrados mínimos para la función $\ln(-f(x))$.

x	-1	0	1	2
y	- 1.1	- 0.4	- 0.9	- 2.7

Ejercicio 10 Considerar la función signo dada por

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Aproximar la función sgn en el sentido de cuadrados mínimos con funciones de la forma $a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x) + a_3 \cos(3x) + b_3 \sin(3x)$, considerando puntos equiespaciados en el intervalo $[-\pi, \pi]$, con paso 0.001. Graficar el resultado obtenido.

Ejercicio 11 Escribir un programa que reciba como datos dos vectores `x` e `y`, y una lista de funciones `S`:

$$\mathtt{S} = \{f_1, \dots, f_n\}$$

y calcule la función $f \in < f_1, \dots, f_n >$ que mejor aproxima a la tabla dada por `x` e `y` en el sentido de cuadrados mínimos.

Ejercicio 12 Considerar

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f'(x) g'(x)\ dx$$

a) Probar que $\langle\ ,\ \rangle$ es un producto interno en S_m, el espacio generado por $\{x, x^2, x^3, \cdots, x^m\}$.

b) Hallar una base ortonormal para S_3.

c) Hallar la mejor aproximación en el sentido de cuadrados mínimos sobre S_3 para $f(x) = x^4$.

Ejercicio 13 Sea

$$\langle f, g \rangle = f(1)g(1) - f(-1)g(-1) + \int_{-1}^{1} f'(x) g'(x) dx.$$

a) Decidir si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno en $C^1([-1, 1])$.

b) Probar que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno para el espacio $V = \{f \in C^1([-1, 1]) : f \text{ es impar}\}$.

c) Hallar la mejor aproximación en el sentido de cuadrados mínimos del polinomio $p(x) = x^5$ sobre el subespacio S generado por $\{x, x^3\}$.

Ejercicio 14 a) Demostrar que

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f''(x) g''(x) dx + f(-1)g(-1) + f(1)g(1)$$

es un producto interno en el espacio $\mathcal{C}^2([-1, 1])$.

b) Hallar una base ortonormal de $\mathbb{R}_2[X]$ para el producto interno definido en el ítem anterior.

c) Probar que si f es una función par en $\mathcal{C}^2([-1,1])$, entonces su proyección sobre $\mathbb{R}_2[X]$ es par, y que si f es una función impar, entonces su proyección es impar.

Ejercicio 15 En el conjunto de las funciones definidas en el intervalo $[-1,1]$, que son por lo menos dos veces derivables, definimos el siguiente producto

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} (f''g'' + f'g')\, dx$$

a) ¿Es un producto interno en ese conjunto?.

b) Para todo $n \geq 1$, sea S_n el subespacio generado por $\{x, x^2, \ldots, x^n\}$. ¿Es un producto interno sobre S_n?.

c) Hallar una base ortonormal para S_3.

d) Hallar la proyección ortogonal de la función $f(x) = \text{sen}(\pi x)$ sobre S_3. ¿Cuál es la proyección ortogonal de la función $g(x) = 2\text{sen}(\pi x) - 5x^2$ sobre S_3?