Elementos de Cálculo Numérico / Cálculo Numérico

Primer Cuatrimestre 2025

Práctica N° 4: Número de condición. Sistemas Lineales.

Ejercicio 1. Probar que para toda $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

a)

$$||A||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

b)

$$||A||_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

c) Escriba funciones en Python que calculen estas normas.

Ejercicio 2. Si $x \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, probar que las constantes de equivalencia entre las normas $\|.\|_1$ y $\|.\|_2$ y entre las normas $\|.\|_2$ y $\|.\|_\infty$ vienen dadas por:

- Vectorial

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$$
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$$

- Matricial

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\|A\|_\infty$$
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\|A\|_1$$

- Calcular los coeficientes para la equivalencia vectorial y matricial entre las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$

Ejercicio 3. Se quiere estimar la norma 2 de una matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ como el máximo del valor $\|Ax\|_2/\|x\|_2$ entre varios vectores $x \in \mathbb{R}^3$ no nulos generados al azar. Hacer un programa que reciba una matriz A y luego

- genere los primeros 100 términos de la siguiente sucesión:

$$s_1 = 0, \quad s_{k+1} = \max\left\{s_k, \frac{\|Ax_k\|_2}{\|x_k\|_2}\right\}$$

donde los $x_k \in \mathbb{R}^3$ son vectores no nulos generados al azar distribuidos uniformemente en el círculo unitario.

- grafique la sucesión calculada, junto con el valor exacto de la norma de la matriz.

Recordar que la norma de un vector o matriz `x` se calculan en Python con el comando `np.linalg.norm(x,2)`. Para generar vectores al azar puede usarse la función `np.random.random()`. Tener en cuenta esto genera valores en el intervalo $[0,1]$. Chequear, además que estos vectores generados resulten no nulos.

Ejercicio 4. Se tiene el sistema $Ax = b$.

a) Sea x la solución exacta y $\tilde{x}$ la solución obtenida numéricamente. Se llama *residuo* al vector $r := b - A\tilde{x}$. Si notamos $e = x - \tilde{x}$, mostrar que:

$$\frac{1}{cond(A)} \frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|e\|}{\|x\|} \leq cond(A) \frac{\|r\|}{\|b\|}.$$

¿Cómo se puede interpretar este resultado?

b) En lugar del dato exacto b se conoce una aproximación $\tilde{b}$. $\tilde{x}$ es tal que $A\tilde{x} = \tilde{b}$. Probar que:

$$\frac{1}{cond(A)} \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|} \leq \frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq cond(A) \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}.$$

¿Cómo se puede interpretar este resultado?

Ejercicio 5. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

a) Calcular $cond_2(A)$ y $cond_\infty(A)$.

b) ¿Cuán chico debe ser el error en los datos $(b - \tilde{b})$, si se desea que el error en la aproximación de la solución sea menor que 10^{-4}?

c) Realizar experimentos numéricos para verificar las estimaciones del ítem anterior. Considerar $b = (3, 2, 2)^t$, que se corresponde con la solución exacta $x = (1, 1, 1)^t$. Generar vectores de error aleatorios, normalizarlos para que su norma sea tan chica como la estimada en el item anterior y perturbar b obteniendo $\tilde{b}$. Finalmente, resolver $A\tilde{x} = \tilde{b}$ y verificar que $\|\tilde{x} - x\| < 10^{-4}$.

Ejercicio 6. Probar que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz inversible y $\| \ \|$ es una norma matricial, la condición de A verifica la desigualdad:

$$\frac{1}{cond(A)} \leq \inf \left\{ \frac{\|A - B\|}{\|A\|} : B \text{ es singular} \right\}.$$

Deducir que

$$cond(A) \geq \sup \left\{ \frac{\|A\|}{\|A - B\|} : B \text{ es singular} \right\}.$$

Nota: En ambos casos, vale la igualdad, pero la otra desigualdad es un poco más complicada de probar. De la igualdad se puede concluir que $cond(A)$ mide la distancia relativa de A a la matriz singular más próxima.

Ejercicio 7.

a) Estimar la $cond_\infty(A)$ de las siguientes matrices en función ε (cuando $\varepsilon \to 0$).

$$\text{(i)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{(ii)} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1+\varepsilon \\ 2 & 3 & 4 \\ 1-\varepsilon & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Concluir que la condición de las matrices A y B del ítem anterior tienden a infinito, cualquiera sea la norma considerada.

Ejercicio 8. Sea D_n la matriz diagonal de $n \times n$ con elementos diagonales iguales a $1/10$. Calcular el determinante de D_n y ver que $det(D_n) \to 0$ si $n \to \infty$. ¿D_n está mal condicionada?

Ejercicio 9. Sea $A_n \in \mathbb{R}^n$ la matriz dada por $A_n = (a_{i,j})$,

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 1 \text{ o } j = 1 \\ 1/i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Probar que $Cond_\infty(A_n) \geq Cn^2$ para alguna constante C independiente de n.

b) Probar que $Cond_2(A_n) \longrightarrow \infty$ cuando $n \longrightarrow \infty$.

Ejercicio 10. La n-ésima matriz de Hilbert $H_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$, se define de la siguiente manera

$$(H_n)_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}.$$

Demostrar que $cond_\infty(H_n) \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

Ejercicio 11.

a) Escribir un programa que resuelva un sistema $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ usando eliminación gaussiana sin pivoteo.

b) Adaptar el programa del ítem anterior para que calcule la matriz A^{-1}.

Ejercicio 12. Se quiere calcular la solución del sistema lineal:

$$\begin{aligned} 10^{-3}x + 2y &= 8 \\ x + y &= 2 \end{aligned}$$

utilizando eliminación gaussiana sin pivoteo, con aritmética de punto flotante de 3 dígitos y sistema de redondeo.

a) Analizar si el resultado difiere significativamente de la solución real.

b) Repetir el método de eliminación gaussiana eligiendo el pivote más conveniente.

Ejercicio 13. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz tridiagonal.

a) Mostrar que el proceso de eliminación gaussiana preserva los ceros de A, es decir que a lo largo de la triangulación no se generan valores no nulos fuera de las tres diagonales principales.

b) Adaptar el programa del Ejercicio 11 para que resuelva un sistema $Ax = b$, con A tridiagonal. El programa debe recibir cuatro vectores (las tres diagonales principales y b), y devolver x. Utilizar el comando `time.time()` (es necesario importar el paquete `time`) para conocer el tiempo que se tarda en resolver un sistema con este programa y comparar con el que se requiere para resolver el mismo sistema utilizando los comandos `np.linalg.inv()` y `np.linalg.solve()`, que no están especialmente pensados para matrices tridiagonales.

c) Experimentar con ejemplos de la Práctica 3 cuya formulación conduzca a matrices tridiagonales.

Ejercicio 14. Considerar la matriz

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 5 \\ -2 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

Mostrar que es definida positiva y calcular su descomposición de Cholesky.