**FRACTAIS NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA: UM ESTADO DO CONHECIMENTO DE 2005 A 2017.**

Paula Roberta Mendes de Oliveira

Mestranda do programa de pós-graduação do mestrado em Ensino da UERN/IFRN/UFERSA. Especialista em Gestão e Organização da Escola pela Universidade Pitágoras Unopar.

paularomendes@hotmail.com.

Márcia Maria Alves de Assis

Doutora em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN. Professora do programa de pós-graduação do mestrado em Ensino da UERN/IFRN/UFERSA.

E-mail: marciageomat@ig.com.br.

**RESUMO**

A geometria fractal é uma nova geometria que surgiu junto com a Teoria do Caos, quando cientistas, de várias áreas, buscavam respostas a inquietações sobre fenômenos naturais como: a irregularidade das chuvas, as oscilações nas batidas do coração, as formas das montanhas, os relâmpagos. Esse trabalho busca investigar de que forma o estudo dessa geometria pode contribuir para a formação dos alunos de Licenciatura em Matemática. Para isso, realizaremos uma pesquisa-ação com uma turma de alunos da disciplina de Laboratório de Prática de Ensino-Aprendizagem em Matemática II do 5º período do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Rio Grande do Norte, Campus Central. Aqui descrevemos apenas uma revisão bibliográfica a partir de trabalhos que estão disponíveis no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes e foram publicados nos últimos treze anos, constituindo a parte inicial da nossa pesquisa. Como resultado, já podemos destacar que, a geometria fractal vem sendo estudada e aplicada em várias áreas, mas, são poucos os trabalhos que a investigam relacionando-a com a formação de professores e mais especificamente, a formação de professores de Matemática.

**Palavras-chave:** Geometria fractal. Formação de professores. Licenciatura em Matemática.

**INTRODUÇÃO**

O nome *fractal*, vem do adjetivo *fractus*, que significa quebra. Ele foi usado a primeira vez, por seu criador, Benoit Mandelbrot[[1]](#footnote-1),em 1975, mas objetos com as características do tipo fractal já haviam aparecido décadas antes, quando alguns cientistas, realizando processos iterativos, criaram fractais artificiais. Esse nome passou, então, a ser usado para delinear, calcular e refletir sobre as formas rugosas, irregulares e fragmentadas da natureza ou de objetos construídos pelo homem por processos iterativos.

Os objetos ditos fractais possuem algumas características que foram usadas para defini-los: a autossemelhança, a dimensão fracionada e a complexidade. Assim, podemos dizer que um fractal é um objeto, ou conjunto de objetos complexos, geométricos ou naturais, que possui partes semelhantes ao todo, só que em escala menor.

Quando analisamos o surgimento da Teoria do Caos, de onde vem a geometria dos fractais, percebemos o quão entrelaçados estão os conteúdos disciplinares estudados em sala de aula, e o quão, no decorrer da história, esses conteúdos foram separados e fragmentados. Mas, “o caos rompe as fronteiras que separam as disciplinas científicas. Por ser uma ciência da natureza global dos sistemas, reuniu pensadores de campos que estavam muito separados” (Gleick,1989, p.5).

Atualmente essa geometria está sendo aplicada de forma muito variada: na engenharia elétrica, para fabricação de antenas; na computação gráfica, para criação de imagens artificiais de nuvens e montanhas; na medicina, em análise de imagens de células cancerígenas; na geologia, para análise dos solos; esses são apenas alguns exemplos.

Dessa forma, o estudo da Geometria Fractal transpõe a ideia de disciplina e traz a possibilidade de uma prática que favoreça o processo de aprendizagem pois visa, religar conhecimentos fragmentados e a agregação aos conhecimentos prévios dos alunos, podendo está presente na formação do professor, para que ela possa chegar à sala de aula com propostas que beneficiem ainda mais a sua prática.

Essa formação já vem sendo discutida a alguns anos e é considerada por alguns autores como um dos problemas da educação. D’ambrósio (1996, p. 83) a considera grave e aponta que “ela afeta particularmente a educação matemática de hoje”. Ele defende ainda que,

para os cursos de licenciatura, as aulas de conteúdo seriam mais interessantes se em vez de dar uma lista de pontos tradicional, que geralmente é fria e desconectada, fossem estudados, em muitos dos seus aspectos – teóricos, históricos, experimentais, aplicações -, fórmulas e resultados importantes e gerais. (D’AMBRÓSIO, 1996, p. 101)

Assim, o nosso trabalho busca investigar de que forma a geometria fractal pode contribuir para a formação dos alunos de Licenciatura em Matemática. Para isso, realizaremos uma pesquisa-ação com uma turma de alunos da disciplina de Laboratório de Prática de Ensino-Aprendizagem em Matemática II do 5º período do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Rio Grande do Norte, Campus Central.

Como parte inicial do nosso trabalho, fizemos um estado do conhecimento que favorece “compreender como se dá a produção do conhecimento em uma determinada área de conhecimento” (Romanowski, p.39). Essa busca está relacionada a geometria fractal e formação de professores de Licenciatura em Matemática, e será apresentada a seguir.

**UM ESTADO DO CONHECIMENTO DE 2005 A 2017**

Nosso trabalho começou com o levantamento do que vem sendo escrito sobre a geometria fractal e formação de professores de matemática. Analisamos as dissertações e teses no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes[[2]](#footnote-2) pois ao final teremos como produto um trabalho nesse formato. Desta forma, como abordamos “apenas um setor das publicações sobre o tema estudado” (Romanowski, p.39), temos um estado do conhecimento.

Assim, nosso trabalho foi composto por três etapas: a escolha dos descritores que seriam utilizados e um levantamento das dissertações e teses no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes, caracterizando assim, nossa primeira etapa. A segunda etapa foi analisar os trabalhos selecionados, fazendo a leitura desses e o levantamento de alguns dados importantes, e por fim, como terceira etapa fazer uma categorização dos trabalhos.

Após acessar o site, escrevemos os descritores utilizando as palavras ligadas com os operadores booleanos. Utilizamos como descritores, inicialmente, “fractais” AND “formação de professores de matemática”, obtivemos apenas 1 trabalho e ao substituir “fractais” por “fractal”, encontramos 2 trabalhos sendo um deles o mesmo da busca anterior, ambos, dissertações. Na sequência, usamos “fractais” AND “ensino superior”, encontrando apenas 1 trabalho. Quando colocamos “fractal” AND “ensino superior” encontramos 3 trabalhos, sendo que um deles é o mesmo da busca anterior, somando assim, 5 trabalhos.

Na sequência utilizamos como descritores “fractais” AND “licenciatura em matemática” obtendo como resultado 4 trabalhos, com 3 diferentes dos anteriores. Ao substituir “fractais” por “fractal”, obtivemos 6 trabalhos, mas todos já haviam aparecido nas buscas anteriores. Assim, encontramos um total de 8 trabalhos.

Passamos então para a segunda fase, a leitura dos textos e o levantamento de alguns dados importantes. Após a leitura, verificamos que dois desses trabalhos não possuíam nenhuma das ideias chaves da nossa pesquisa: fractais e/ou formação de professores. Assim, temos um total de apenas 6 trabalhos, que foram escritos entre 2005 e 2017, determinando assim nosso espaço temporal.

Essa análise nos possibilitou destacar alguns aspectos informativos, como podemos ver na tabela a seguir:

Tabela 1: Fractais e a Formação de professores de 2005 a 2017.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Autor | Título | Ano | Tipo | Programa |
| Bárbara Regina da Silveira Batista. | Sequências numéricas a partir da geometria fractal para licenciados em Matemática' | 22017 | Dissertação | Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática |
| Flavio Roberto Gouvea. | Um estudo de fractais geométricos através de caleidoscópios e softwares de geometria dinâmica. | 22005 | Dissertação | Mestrado em Educação Matemática |
| José Carlos Pinto Leivas. | Imaginação, intuição e visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática. | 22009 | Tese | Doutorado em educação. |
| Juliano Eli. | Números complexos e suas aplicações: Uma proposta de ensino contextualizado com abordagem histórica. | 22014 | Dissertação | Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática |
| Nilson Jorge Baldovinotti. | Um Estudo de Fractais Geométricos na Formação de Professores de Matemática. | 22011 | Dissertação | Mestrado em Educação Matemática |
| Thiago Barcelos Castilhos. | Possibilidades pedagógicas para introdução de geometria fractal no ensino básico e na formação de professores de matemática. | 22014 | Dissertação | PROFMAT |

Fonte: Elaborada pela autora

Como podemos perceber, o tema vem sendo discutido a alguns anos, mas as produções, com a discussão que propomos, são poucas. Como terceira etapa, fizemos uma categorização a partir das leituras realizadas: Os fractais e a formação do professor de matemática, e Os fractais e outros recursos didáticos. A seguir, traremos uma discussão sobre os fractais e a formação do professor.

**OS FRACTAIS E A FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA**

A formação do professor de Matemática hoje, deve buscar não somente a aprendizagem de conteúdos matemáticos, mais principalmente, dá suporte para que o futuro professor adquira conhecimentos que favoreçam um ensino de qualidade e uma aprendizagem de forma integral, e como proposta que lhe sirva de suporte, apresentamos a geometria fractal.

Nem todos os trabalhos aqui analisados possuem essa perspectiva, ou seja, discutem a formação do professor de matemática, mas trazem proposta de atividades pedagógicas usando a geometria fractal como ferramenta para a Educação Básica e/ou Ensino Superior sendo discutidas ou apresentadas nas aulas de disciplinas de ensino/estágio/laboratório dos cursos de Licenciatura em Matemática, defendendo que ela pode proporcionar aos alunos um maior interesse pela matemática e seja assim, um facilitador da aprendizagem.

Com esse viés, o autor Castilhos (2014) propõe em seu trabalho, atividades pedagógicas para 7º e 8º ano do EF, 1ª e 2ª séries do EM e para licenciandos do curso de Matemática. A última proposta visa mostrar as possibilidades do uso dos fractais no ensino de razão, fração e progressões geométricas, propostas nas atividades anteriores, além recolher opiniões dos licenciandos sobre o material produzido.

Eli (2008) traz uma proposta de ensino contendo atividades sobre a representação de números complexos, algumas delas com o uso de recurso computacional. Esse autor destaca a geometria fractal e outras aplicações, como forma de ajudar na aprendizagem desse conteúdo mencionando que, quando ensinamos o conteúdo de números complexos, é importante

discutir com os estudantes sobre as aplicações, como na geometria fractal, na teoria quântica e na aerodinâmica, despertam interesses, pois o contato de conhecimentos gerados pelas discussões desse objeto de estudo proporcionam aos estudantes, sentidos para aprendê-lo. (ELI, 2008, p.71)

Percebemos que os fractais aparecem como uma aplicação do conteúdo estudado, possibilitando ao aluno não só aprender o conteúdo, mas ver o conhecimento na prática e conhecer temas interessantes. Com esse mesmo pensamento, a autora Batista (2017) propõe o uso da geometria fractal para o ensino de sequências numéricas no curso de Licenciatura destacando que

utilizar fractais para introdução do conteúdo de sequências numéricas remete às conexões estabelecidas entre o Cálculo e a Geometria, em que o primeiro é apresentado nos livros pelo conteúdo [...] e a Geometria Fractal desenvolve o espírito de curiosidade frente ao inesperado em cada iteração (BATISTA, 2017, p.30).

E continua defendendo que podemos aproveitar esse processo iterativo que apresenta um processo infinito, uma das características dos fractais, para estudar as “sequências que podem ser analisadas em convergência e divergência, desta forma agregando ao conteúdo de sequências numéricas a exploração visual construída pelo aluno para compreender os conceitos necessários (BATISTA, 2017, p.30).

O autor Gouvea (2005) também traz propostas de atividades com fractais, nesse caso, para o estudo de conceitos geométricos. Essas atividades foram elaboradas e aplicadas a alunos do 1ª ano de Licenciatura em Matemática utilizando o caleidoscópios e softwares educacionais, justificando que a escolha dessa turma se deu “pelo fato desses alunos terem concluído o Ensino Médio recentemente, pois pesquisas apontam que alunos do 1ª ano da universidade ainda mostram dificuldades quando o tema tratado é Geometria” (GOUVEA, 2005, p. 86).

Não vemos, nos textos desses autores, discussões abordando a formação do professor, mas podemos crer que, quando elaboramos ou propomos atividades para facilitar a aprendizagem dos alunos não deixamos de contribuir para a formação daqueles que se apropriam desses materiais buscando essa mesma intenção.

Com o pensamento nessa formação, o autor Leivas (2009), faz uma análise da geometria nos cursos de Licenciatura do Rio Grande do Sul buscando as geometrias não euclidianas, percebendo que a geometria fractal aparece em alguns currículos, como tema dentro de uma disciplina.

Assim, ele faz sua discussão apontando possibilidades de utilizar a imaginação, intuição e visualização em disciplinas de um curso de Licenciatura em matemática, buscando uma melhor formação do futuro professor, mencionando que “inovação no desenvolvimento curricular na formação do professor parece ser exigência necessária e urgente, tanto no que diz respeito aos conteúdos quanto às formas de tratamento do conhecimento matemático” (LEIVAS, 2009, p.14).

O autor Baldovinitti (2011) em suas discussões, relata que mesmo existindo pesquisas que recomendam o uso de fractais em sala de aula, quase sempre não acontece

pois são poucos os professores que tiveram oportunidade de estudar o tema no seu curso de licenciatura ou mesmo em cursos de formação continuada. Isto acarreta um desconforto ao docente, já que a insegurança em relação ao assunto inibe seu ensino na escola (BALDOVINITTI, 2011, p.63)

Dessa forma, ele defende a inserção desse tema nos cursos de licenciatura, como parte de pesquisa ou na elaboração de futuras propostas pedagógicas, utilizando-o na perspectiva de “reconhecer o aluno do curso de licenciatura como um ativo construtor de seu conhecimento, assimilando e organizando suas ideias por intermédio da maneira de como interpretar suas experiências durante a sua formação” (BALDOVINITTI, 2011, p. 85).

Assim, percebemos que o uso da geometria fractal como ferramenta para o ensino de matemática pode perpassar todos os níveis de ensino, logo os futuros professores devem conhecê-la e pensá-la como base para a aquisição de vários conteúdos matemáticos e, nada melhor que uma licenciatura para apresentá-los a um tema atual, interessante e interdisciplinar.

**OS FRACTAIS E OUTROS RECURSOS DIDÁTICOS**

Muitos autores defendem o uso de recursos didáticos que facilitem o processo de ensino e aprendizagem. Materiais visuais, construção de maquetes, pinturas, recortes, montagem de quebra-cabeças, e não poderia faltar, o uso do computador, entre outros. A geometria fractal, pode ser um desses recursos, pois nos possibilita visualizar formas muito interessantes. Muitos dos seus objetos, os fractais, podem ser desenhados, construídos no computador ou ainda, feitos com materiais manipuláveis. Os trabalhos aqui analisados trazem principalmente o uso de software para a construção dos mesmos.

Leivas (2009, p. 243), por exemplo, destaca que “a utilização da intuição e da visualização por meio de métodos computacionais é um recurso que pode ser empregado na construção, exploração e análise de Geometria Fractal”. Já Gouvea (2005) é enfático defendendo o uso de softwares de Geometria Dinâmica, como o CabriGéomètre II e o iGeom, “pois através desses softwares educacionais podem-se efetuar construções geométricas muito rapidamente e com bons resultados”. (GOUVEA, 2005, P.12)

A autora Batista (2017), traz em seu trabalho a construção de fractais pelos alunos com uso de régua, compasso, lápis e papel, fazendo uma atividade mais manual. Esse recurso é possível até certo ponto, visto que, o processo iterativo pode ser dificultado. O que é destacado por Castilhos (2014), quando propõe que

a construção desses objetos feita manualmente não nos proporciona total exatidão do objeto, ou melhor, só conseguimos fazer certo número de iteração, assim é dada uma grande oportunidade para a utilização, com os alunos, de algum software de geometria dinâmica”. (CASTILHOS, 2014, p. 9).

Muitos professores de matemática não tiveram em sua formação, acesso ao uso de materiais manipuláveis e do computador como ferramenta educacional no passado, mas os licenciandos de hoje já podem se apropriar dessa ferramenta para sua utilização no futuro. Nesse sentido, Gouvea (2005, p. 18), lembra que “os professores devem procurar criar ambientes de aprendizagem, com recursos tecnológicos disponíveis aos alunos, utilizando uma proposta pedagógica atualizada, que leve em conta as novas tecnologias da informação e comunicação”. Com a mesma ideia, mas destacando a importância do uso dos materiais manipuláveis, Baldovitti traz uma reflexão sobre esse ponto defendendo que

durante a formação inicial e continuada do professor de matemática é necessário criar oportunidades para a reflexão e discussão sobre o uso de materiais manipulativos em sala de aula. É através desses momentos de interação que os estudantes do curso de licenciatura de matemática terão oportunidade de refletir sobre as possíveis relações existentes no contexto de sala de aula que envolve os alunos e os materiais manipulativos e a interação entre os alunos com esse tipo de recurso didático. (BALDOVINITTI, 2011, p. 82)

O autor Leivas (2009) ao discutir a presença da geometria fractal no currículo, nos inquieta para o uso da interdisciplinaridade como forma de agregarmos outros temas nos cursos de licenciatura

talvez a introdução de abordagens interdisciplinares no tratamento desse conhecimento possa vir a ser uma forma de não serem criadas disciplinas novas, isoladas, simplesmente para cobrir conteúdos novos ou suprir a ausência daqueles que os mais conservadores exigem que estejam presentes nos cursos em que atuam. (LEIVAS, 2009, p.14).

Encontramos também, nos demais trabalhos, a presença da interdisciplinaridade, mesmo que de forma sutil. O autor Castilho (2014, p.10), por exemplo, relata que “o mais importante da introdução de fractais no ensino da matemática é a possibilidade de interdisciplinaridade e contextualização”.

Já em Batista (2017), encontramos a defesa do uso dessa geometria destacando que “o estudo da Geometria Fractal permite trabalhar numa perspectiva interdisciplinar e possibilita que os alunos tenham uma visão mais clara de utilização dessa Geometria nas diferentes áreas do conhecimento” (BATISTA, 2017, p.21).

Outro autor, Baldovinitti (2011), mostra essa relação quando destaca que “a inserção do estudo de fractais no currículo escolar pode contribuir para o que os PCN do Ensino Médio chamam de interdisciplinaridade, uma vez que permite associar os diversos conceitos matemáticos existentes com os de outras áreas de aplicação” (BALDOVINITTI, 2011, p. 63).

Para finalizar essa discussão destacamos um ponto sobre esses os recursos didáticos, no que diz respeito ao uso adequado, a partir da análise da potencialidade do mesmo, pois “o recurso didático como material alternativo não é suficiente para a construção de um conceito, se não houver um conhecimento do conteúdo em toda a sua intensidade e plenitude” (LEIVAS, 2009, p. 51).

Assim, usar a o computador ou outro recurso didático sem uma análise de sua potencialidade e inseri-lo em um ambiente que não garanta uma consolidação do conteúdo estudado é um risco para o professor. Desta forma, uma formação que lhe permita ter contato com essas possibilidades, para que haja reflexão quanto ao seu uso, é de fundamental importância.

**CONCLUSÕES**

Esse trabalho apresenta parte de uma pesquisa em andamento. Ele descreve uma revisão bibliográfica do tipo estado do conhecimento a partir de trabalhos que estão disponíveis no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes e foram publicados nos últimos treze anos. Eles foram selecionados utilizando-se dos descritores formados pelas palavras que são tema do nosso trabalho.

Como resultado inicial, podemos destacar a quantidade, muito pequena, de trabalhos que investigam as contribuições que os fractais podem trazer para a formação do professor. Destacamos, ainda que, dos trabalhos encontrados, alguns não discutiam essa formação, apenas apresentava proposta para que os professores ou futuros professores pudessem usá-las em suas aulas como recurso facilitador da aprendizagem, o que não deixa de contribuir para a sua atuação em sala de aula, como defendemos anteriormente.

Procuramos, neste texto, apresentar algumas contribuições da geometria fractal para a formação do professor, formação que deve ser discutida e fortalecida, pois “o conceito de formação de professor exige um repensar. É muito importante que se entenda que é impossível pensar no professor como já formado” (D’AMBRÓSIO, 1996, p. 97), principalmente ao terminar uma licenciatura.

Além disso, podemos perceber uma relação entre a geometria fractal e o uso do computador, gerando novas possibilidades para os professores usarem em sala de aula na busca de facilitar o processo de ensino e aprendizagem já que, “sua inserção em sala de aula dependerá da natureza da prática desse profissional, como ele relaciona a tecnologia aos diversos elementos que compõem a sua atividade profissional”(BALDOVINITTI, 2011, p. 68).

Desta forma, concluímos que a formação do professor de matemática pode ser favorecida com o uso da geometria fractal e nos leva a buscar caminhos que podem facilitar esse uso, o uso do computador e a interdisciplinaridade, buscando contribuir para que ela seja mais completa, lhes dando possibilidades de fortalecer mais a sua formação. Assim, como nossa pesquisa está em andamento nosso próximo passo será aprofundamento na relação interdisciplinaridade e a formação do professor.

**REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

BALDOVINOTTI, NILSON JORGE. **Um Estudo de Fractais Geométricos na Formação de Professores de Matemática**. 2011, 204 f. Mestrado em Educação Matemática. Universidade Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2011.

BATISTA, Bárbara Regina da Silveira. **Sequências numéricas a partir da geometria fractal para licenciados em Matemática**. 2017 74 f. Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Franciscana, Santa Maria, 2017.

CASTILHOS, Thiago Barcelos. **Possibilidades pedagógicas para introdução de geometria fractal no ensino básico e na formação de professores de matemática.** 2014. 57 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de PROFMAT, Universidade Federal Fluminense, Rio de Janeiro, 2014.

D’AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: da teoria à prática**. Campinas, São Paulo: Papirus, 1996.

GLEICK, James. **Caos: a criação de uma nova ciência**. Trad. Woltensir Dutra. - Rio de Janeiro: Elsevier, 1989. - 16ª reimpressão.

GOUVEA, Flavio Roberto. **Um estudo de fractais geométricos através de caleidoscópios e softwares de geometria dinâmica**. 2005. v, 259 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2005.

ELI, Juliano. **Números complexos e suas aplicações: Uma proposta de ensino contextualizado com abordagem histórica**. 2014. 171 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Regional de Blumenau. Santa Catarina, 2014.

LEIVAS, José Carlos Pinto. **Imaginação, intuição e visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática.**2009, 294 f. Tese (Doutorado) –Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.

ROMANOWSKI, Joana Paulin; Ens, Romilda Teodora. As pesquisas denominadas do tipo "estado da arte" em educação. **Revista Diálogo Educacional,** vol. 6, núm. 19, septiembre-diciembre, 2006, pp. 37-50 Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Brasil.

1. Benoit Mandelbrot (1924-2010) – nasceu na Polônia e morreu em Cambridge, Massachusetts, desenvolveu vários estudos sobre fractais, sendo conhecido como “pai da Geometria Fractal”. [↑](#footnote-ref-1)
2. http://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#!/, acessado pela última em vez 02/09/2018, ás 18:40h. [↑](#footnote-ref-2)