Programação Matemática

Trabalho de Otimização Inteira

O trabalho deve ser realizado em grupos de **cinco pessoas**.

1 Descrição do Problema e Modelagem Matemática

O problema de localização de facilidades é um problema clássico de otimização que pode ser abordado de várias formas. Abaixo, apresentamos duas abordagens clássicas. A primeira visa atender a demanda dos clientes minimizando a soma dos custos fixos de instalação das facilidades e dos custos de transportes. Na segunda, o objetivo é maximizar o lucro gerado pelas facilidades abertas.

1.1 Minimizando Custos

O problema de localização de facilidades que visa atender a demanda dos clientes com mínimo custo pode ser descrito como um problema de otimização linear inteira dado por (1) – (5).

$$
\begin{aligned}
& \textit{minimize } z = && \sum_{i=1}^{n} f_i\ y_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} && && (1)\\
& \textit{sujeito a} && && && \\
& && \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 && j = 1,\ldots,m && (2)\\
& && \sum_{j=1}^{m} d_j x_{ij} \le Cap_i\ y_i && i = 1,\ldots,n && (3)\\
& && y_i \in \{0,1\} && i = 1,\ldots,n && (4)\\
& && 0 \le x_{ij} \le 1 && i = 1,\ldots,n; j = 1,\ldots,m && (5)
\end{aligned}
$$

em que:

n: é o número de locais onde podem ser instaladas as facilidades;

m: é o número de clientes que devem ser atendidos;

f_i: é o custo fixo da facilidade $i \in \{1, ...n\}$ se ela for aberta;

c_{ij}: é o custo de transporte da facilidade i ($i \in \{1, ...n\}$) para o cliente j ($j \in \{1, ...m\}$);

d_j: é a demanda do cliente j ($j \in \{1, ...m\}$);

Cap_i: é a capacidade da facilidade i ($i \in \{1, ...n\}$);

y_i: é uma variável binária que assume o valor 1 se a facilidade i ($i \in \{1, ...n\}$) é aberta, e assume o valor 0 caso contrário;

x_{ij}: é uma variável contínua que corresponde a fração da demanda do cliente j ($j \in \{1, ...m\}$) atendida pela facilidade i ($i \in \{1, ...n\}$) ($0 \leq x_{ij} \leq 1$).

A função objetivo (1) visa minimizar o custo total de distribuição, ou seja, a soma dos custos fixos das facilidades abertas mais a soma dos custos de transporte das facilidades para os clientes. As restrições (2) garantem que todos os clientes tenham sua demanda atendida. As restrições (3) asseguram que a capacidade de cada uma das facilidades é respeitada. O domínio das variáveis é definido em (4) e (5).

1.2 Maximizando Lucros

O problema de localização de facilidades também pode ter como objetivo a maximização dos lucros. Neste caso, o problema consiste em dado um conjunto de facilidades e um conjunto de clientes, decidir quais facilidades instalar e quais clientes atender de forma a maximizar os lucros. Este problema pode ser modelado como descrito a seguir.

$$\begin{aligned}
&\textit{maximize } z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} L_{ij}x_{ij} - \sum_{i=1}^{n} f_i\ y_i && && (6)\\
&\textit{sujeito a} && && \\
&\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq 1 && j = 1, \ldots, m && (7)\\
&\sum_{j=1}^{m} d_j x_{ij} \leq Cap_i\ y_i && i = 1, \ldots, n && (8)\\
&y_i \in \{0, 1\} && i = 1, \ldots, n && (9)\\
&0 \leq x_{ij} \leq 1 && i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m && (10)
\end{aligned}$$

em que:

n: é o número de locais onde podem ser instaladas as facilidades;

m: é o número de clientes que podem ser atendidos;

f_i: é o custo fixo da facilidade $i \in \{1, ...n\}$ se ela for aberta;

L_{ij}: é o lucro obtido se a facilidade i ($i \in \{1, ...n\}$) atender ao cliente j ($j \in \{1, ...m\}$);

d_j: é a demanda máxima do cliente j ($j \in \{1, ...m\}$);

Cap_i: é a capacidade da facilidade i ($i \in \{1, ...n\}$);

y_i: é uma variável binária que assume o valor 1 se a facilidade i ($i \in \{1, ...n\}$) é aberta, e assume o valor 0 caso contrário;

x_{ij}: é uma variável contínua que corresponde a fração da demanda do cliente j ($j \in \{1, ...m\}$) atendida pela facilidade i ($i \in \{1, ...n\}$) ($0 \leq x_{ij} \leq 1$).

A função objetivo (6) visa maximizar os lucros, ou seja, a soma do lucro obtido pelas facilidades menos o custos fixos associados a elas. As restrições (7) asseguram que a demanda máxima dos clientes é respeitada. As restrições (8) asseguram que a capacidade de cada uma das facilidades é respeitada. O domínio das variáveis é definido em (9) e (10).

2 Tarefas

Com base no modelo de minimização de custos, devem ser cumpridas as seguintes tarefas:

Tarefa 1: Escreva o modelo de localização de facilidades que minimiza os custos em linguagem de modelagem.

Tarefa 2: Sabemos que as restrições (3) garatem que as variáveis y_i assumam valores 0 ou 1 em todas as soluções factíveis. No entanto, quando é resolvida a relaxação linear do problema, estas variáveis podem assumir valores reais. O limitante dual do problema poderia ser melhorado se novas restrições fossem adicionadas ao problema, por exemplo:

$$x_{ij} \leq y_i \qquad (11)$$

Explique brevemente por que essas restrições poderiam trazer melhorias. Para as instâncias disponibilizadas resolva o problema linearmente relaxado considerando o modelo (1) - (5). Em seguida, resolva novamente as instâncias adicionando as restrições (11) e reescrevendo as restrições (3) como:

$$\sum_{j=1}^{m} d_j x_{ij} \leq Cap_i \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Tarefa 3: Resolva as instâncias disponibilizadas no site da disciplina utilizando o *software* não-comercial de otimização SCIP, com tempo limite de **5 minutos** para cada instância.

Tarefa 4: Resolver as instâncias disponibilizadas no site da disciplina utilizando o *software* comercial de otimização GUROBI com tempo limite de **5 minutos** para cada instância.

Tarefa 5: Pesquise uma aplicação do problema de localização de facilidades. Descreva a aplicação, explique quais são os parâmetros, suas variáveis, a função objetivo e suas restrições. Em resumo, deixe clara sua aplicação e justifique sua utilidade. Obs. Não podem ser utilizados os exemplos apresentados em aula.

Tarefa 6: Elabore um problema exemplo (*toy problem*), descreva-o matematicamente utilizando o modelo e resolva-o utilizando o *solver* não-comercial **SCIP**. Este exemplo deve ser pequeno em relação a sua dimensão. Ele deve ser utilizado para facilitar a compreensão do problema, do modelo e de suas restrições. Ele deve ser um exemplo para a aplicação escolhida na Tarefa 5.

3 Objetivos

Este trabalho tem os seguintes objetivos:

1. Entender o problema proposto e a forma como o mesmo foi modelado.
2. Aprender a escrever um modelo utilizando linguagem de modelagem e resolvê-lo com *solvers* de otimização (comercial e não comercial).
3. Resolver instâncias da literatura e comparar resultados.
4. Identificar um problema real que pode ser resolvido com base no modelo de Localização de Facilidades.

4 O que deve ser entregue, e quando

Deve ser entregue um relatório reportando o que foi feito, os códigos gerados e os dados do *toy problem* até o dia **30/11/2023** às 23h59min (via e-Disciplinas). O conteúdo do relatório da primeira etapa deve conter:

- Nome, número USP e e-mail de cada integrante do grupo.
- Definição/descrição do problema, de seus parâmetros, suas variáveis, restrições e função objetivo do modelo usado.
- Definição da aplicação do problema proposta pelo grupo.
- Um problema exemplo (*toy problem*) baseado na aplicação escolhida. O *toy problem* deve ser ilustrado no relatório e descrito em um arquivo no formato ilustrado na Figura 1. No arquivo, m corresponde ao número de facilidades e n ao número

de clientes. Em seguida, são apresentados para cada facilidade sua capacidade e seu custo fixo. Para cada cliente é dada a demanda e os custos de transporte do cliente para cada um das facilidades. Este arquivo deve ser lido pelo programa desenvolvido. Este exemplo deve ser pequeno e detalhado. Cada grupo deve criar seu exemplo.

- A solução obtida para o *toy problem* utilizando o *solver* indicado acima. Se possível a solução do exemplo deve ser ilustrada com uma ou mais figuras.
- Descrição detalhada de todos os resultados, divididos em seções, ou seja, uma seção para cada tópico apontado.
- Análise dos resultados utilizando tabelas, gráficos, etc.
- Conclusões.

Figura 1: Formato do arquivo do *toy problem*.

```
n m
cap1 f1
cap2 f2
…
capn fn
d1 c11 c21 ... cn1
d2 c12 c22 ....cn2
...
dm c1m c2m ... cnm
```

5 Critérios de avaliação

Para a avaliação dos relatórios/códigos serão considerados os seguintes pontos:

- completude: o relatório contempla todos os itens pedidos?
- corretude: os conceitos envolvidos foram apresentados de forma correta?
- escrita (clareza e concisão): o conteúdo do relatório é relevante para a sua completude e está apresentado de forma clara?

O trabalho valerá até 10 pontos no total, divididos da seguinte forma:

- Descrição da aplicação e sua corretude: 2 pontos.
- Testes computacionais: 3 pontos.
- Análises dos testes computacionais: 2 pontos.
- Apresentação: 3 pontos.