

Estructura de datos y algoritmos

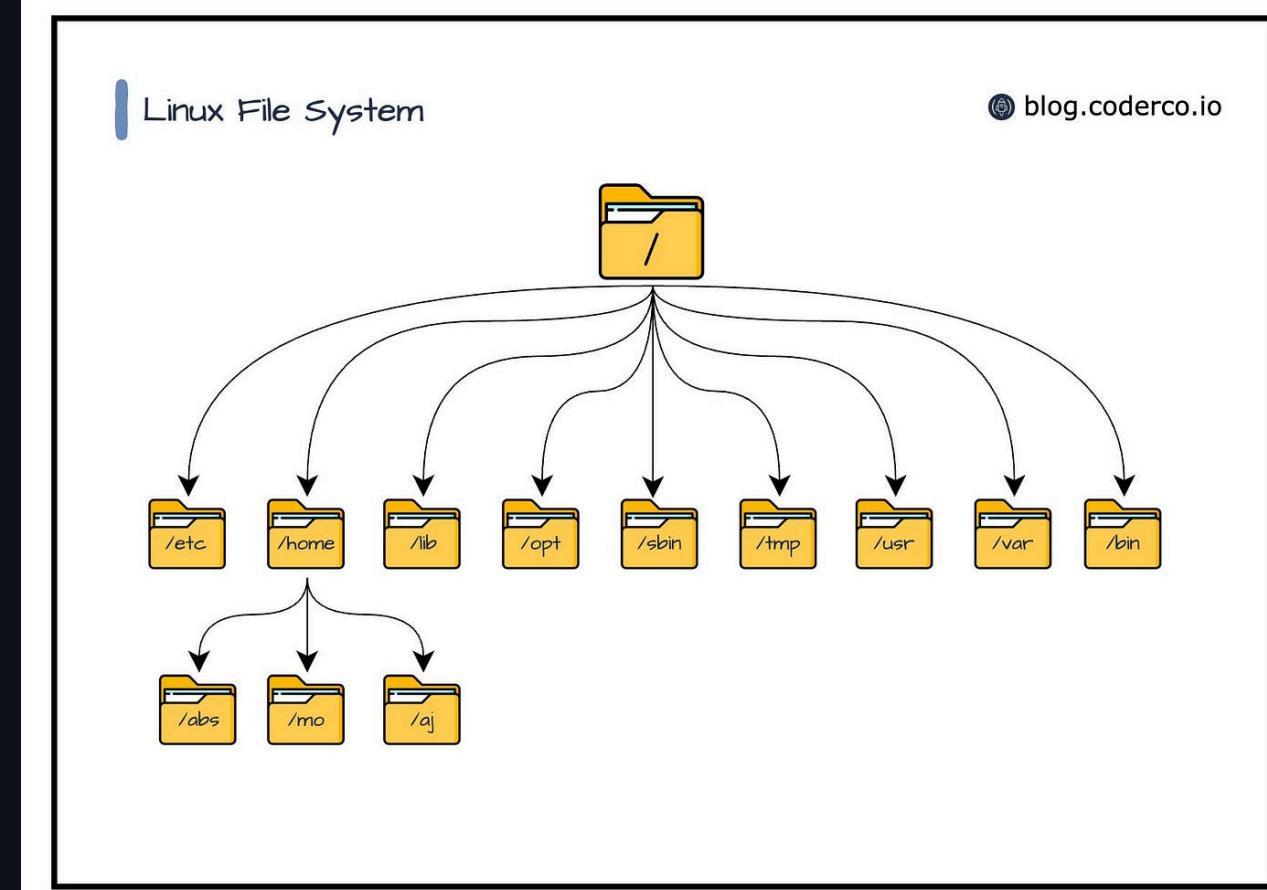
Rodrigo Alvarez

rodrigo.alvarez2@mail_udp.cl

Árboles

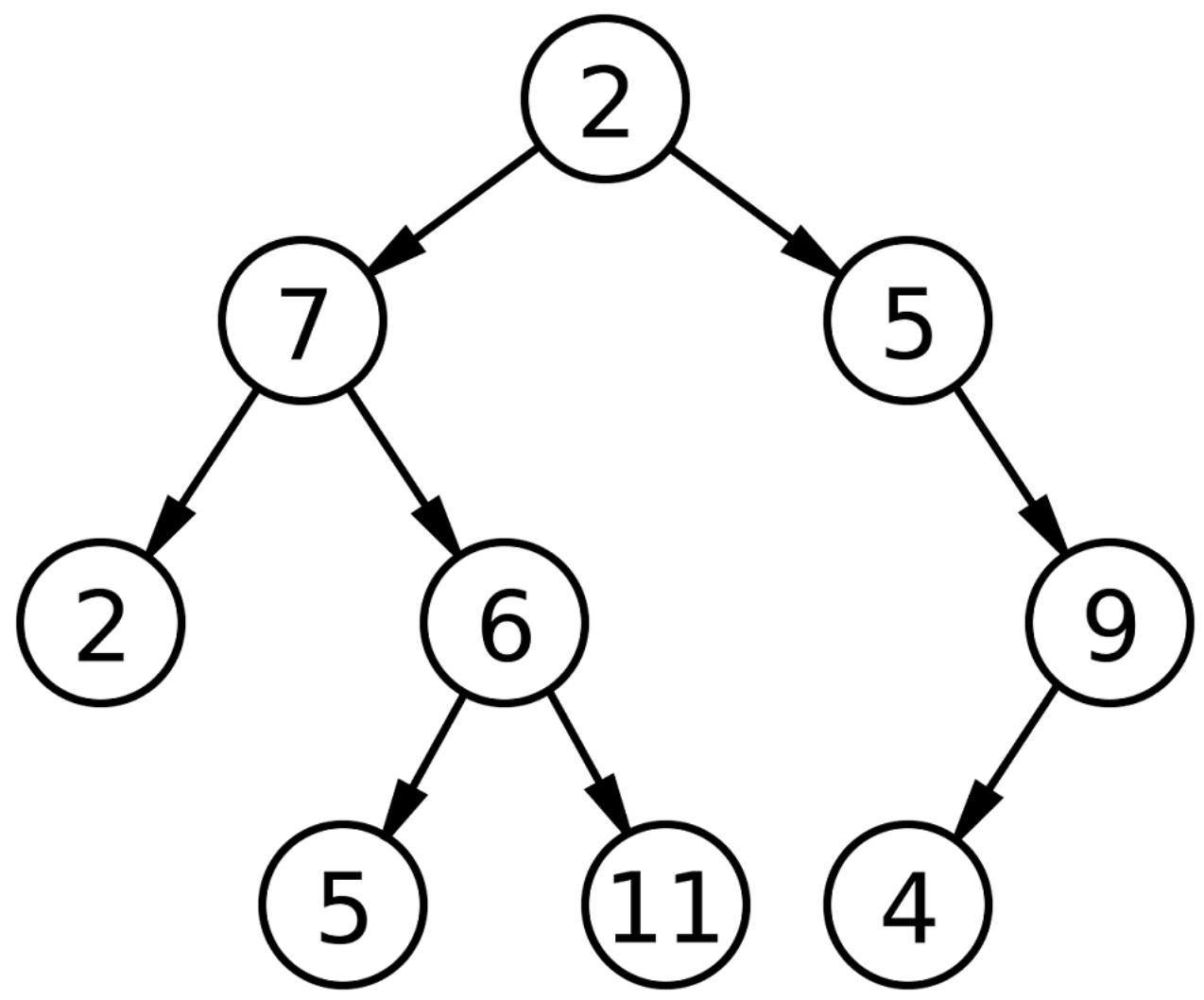
Árboles

- Son una estructura de datos jerárquica
- Muy utilizadas para resolver problemas de software como:
 - Árboles de directorios
 - Toma de decisiones
 - Organización de información en bases de datos
 - etc



Árboles: definiciones

- **Subárbol:** Un árbol que es parte de otro árbol
- **Profundidad de un nodo:** Número de aristas que hay desde la raíz hasta el nodo
- **Altura de un nodo:** Número de aristas que hay desde el nodo hasta el nodo más lejano



Árbol binario

- Es un árbol en el que cada nodo tiene a lo más dos hijos
- Cada nodo tiene un nodo padre, excepto la raíz

Nodo

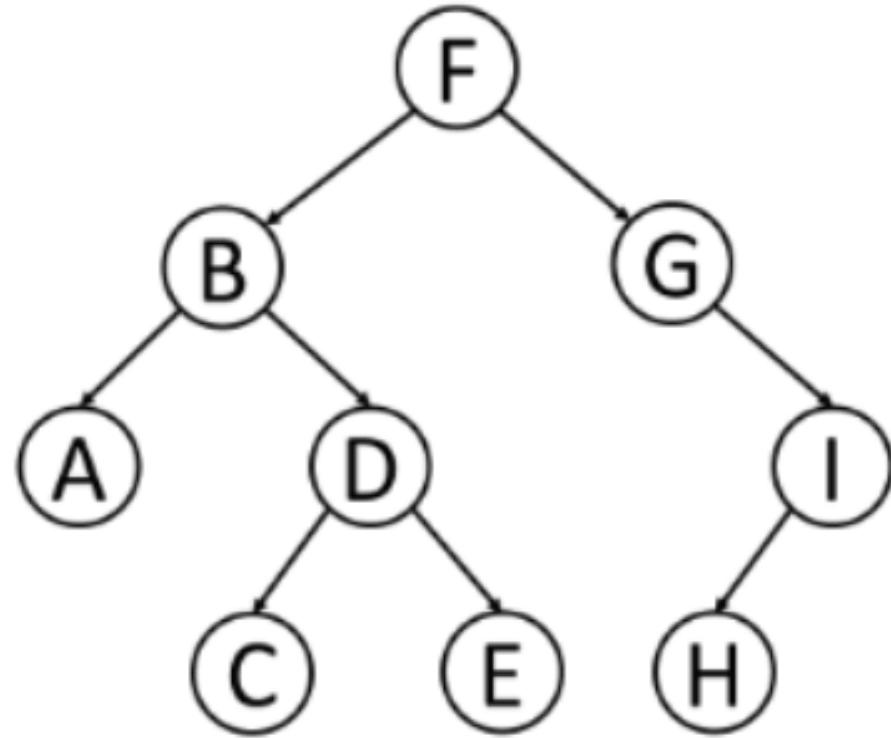
```
class Node {  
    int data;  
    Node left, right;  
    Node(int item) {  
        data = item;  
        left = right = null;  
    }  
}
```

Recorridos (tree traversals)

- Los recorridos son una forma de visitar los nodos de un árbol

Recorrido Inorder

En este recorrido primero se visita el subárbol izquierdo, luego la raíz y finalmente el subárbol derecho



Inorder:

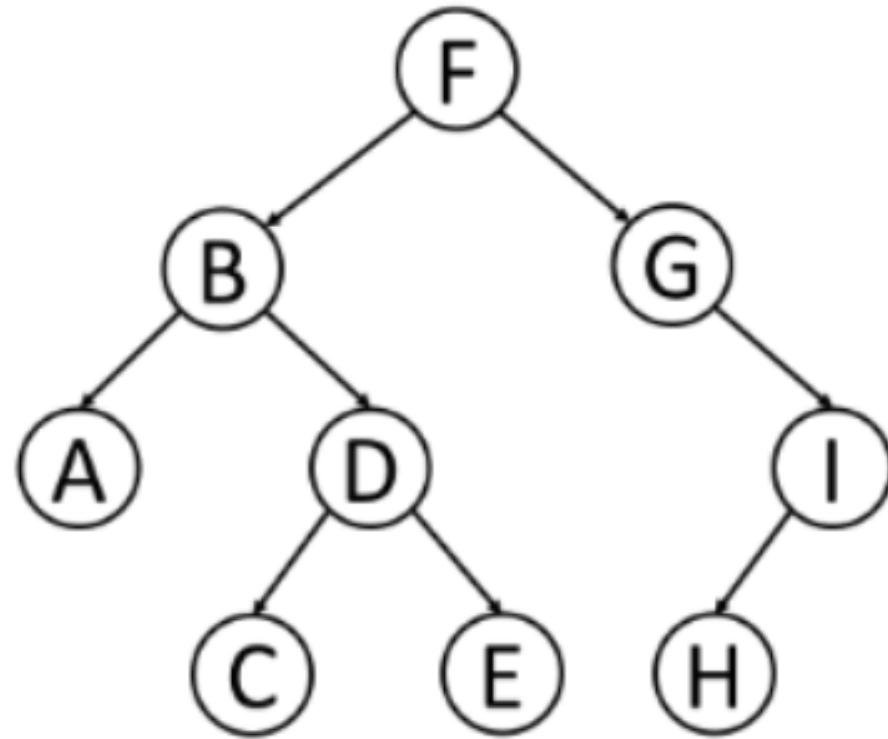


Recorrido Inorder

```
void inorder(Node node) {  
    if (node == null) return;  
    inorder(node.left);  
    System.out.print(node.data + " ");  
    inorder(node.right);  
}
```

Recorrido Preorder

En este recorrido primero se visita la raíz, luego el subárbol izquierdo y finalmente el subárbol derecho



Preorder:

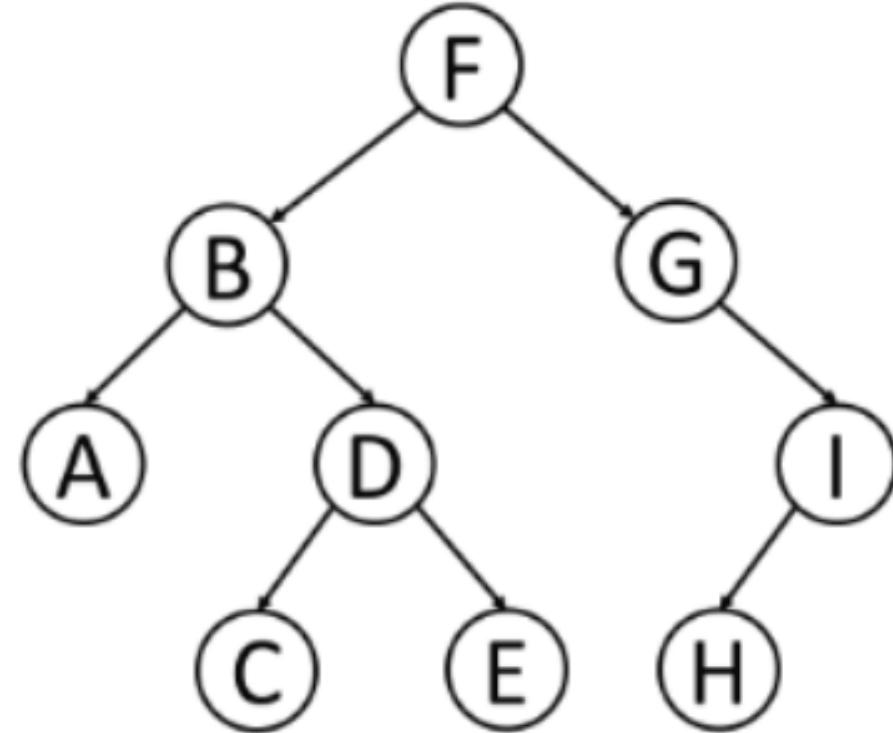


Recorrido Preorder

```
void preorder(Node node) {  
    if (node == null) return;  
    System.out.print(node.data + " ");  
    preorder(node.left);  
    preorder(node.right);  
}
```

Recorrido Postorder

En este recorrido primero se visita el subárbol izquierdo, luego el subárbol derecho y finalmente la raíz



Postorder:

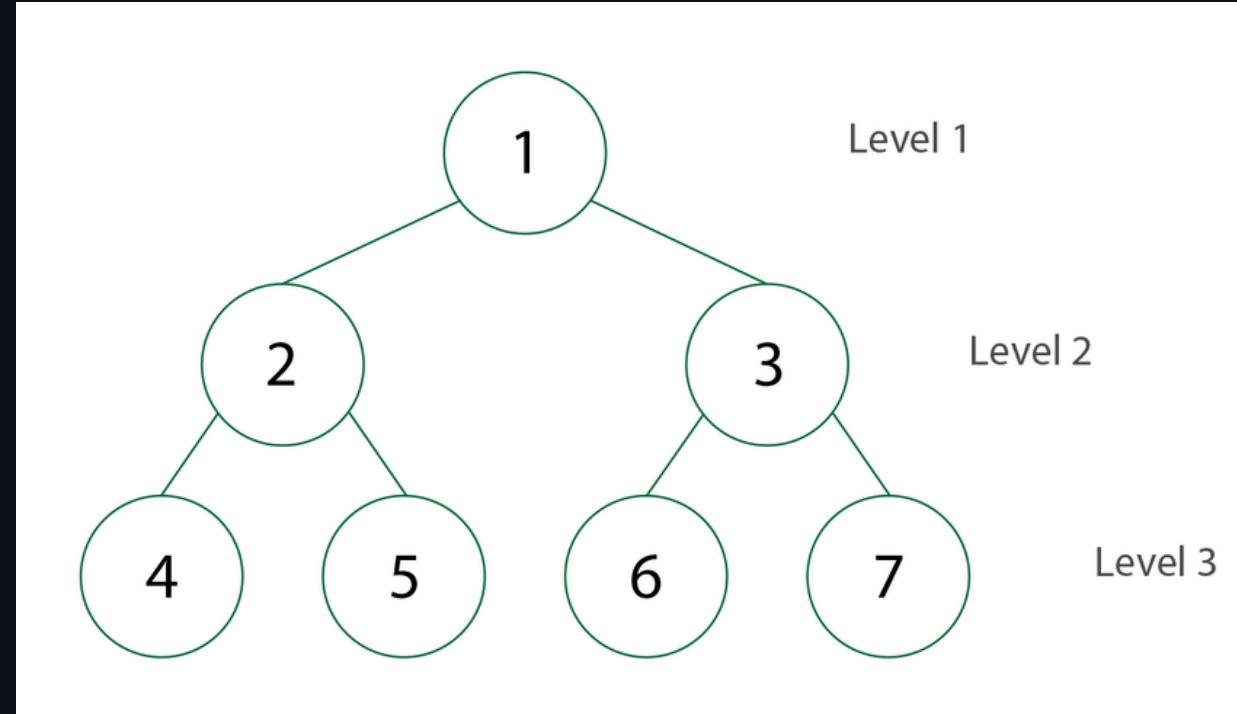


Recorrido Postorder

```
void postorder(Node node) {  
    if (node == null) return;  
    postorder(node.left);  
    postorder(node.right);  
    System.out.print(node.data + " ");  
}
```

Recorrido por niveles

En este recorrido se recorre el árbol por niveles



Recorrido por niveles

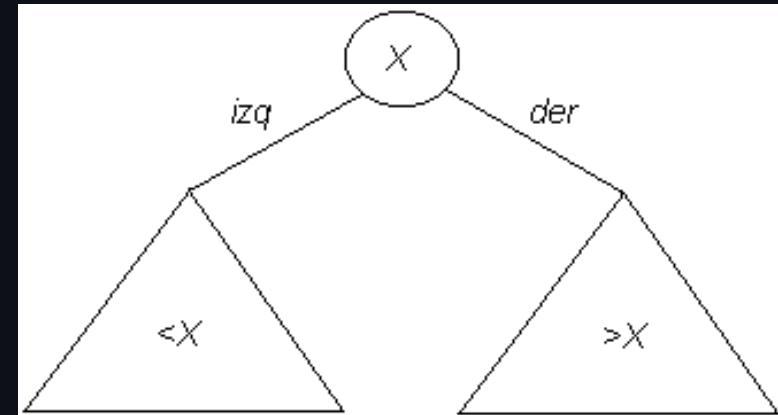
```
void byLevelTraversal(Node root) {  
    if (root == null) return;  
    Queue<Node> q = new LinkedList<>();  
    q.add(root);  
    while (!q.isEmpty()) {  
        Node node = q.poll();  
        System.out.print(node.data + " ");  
        if (node.left != null) q.add(node.left);  
        if (node.right != null) q.add(node.right);  
    }  
}
```

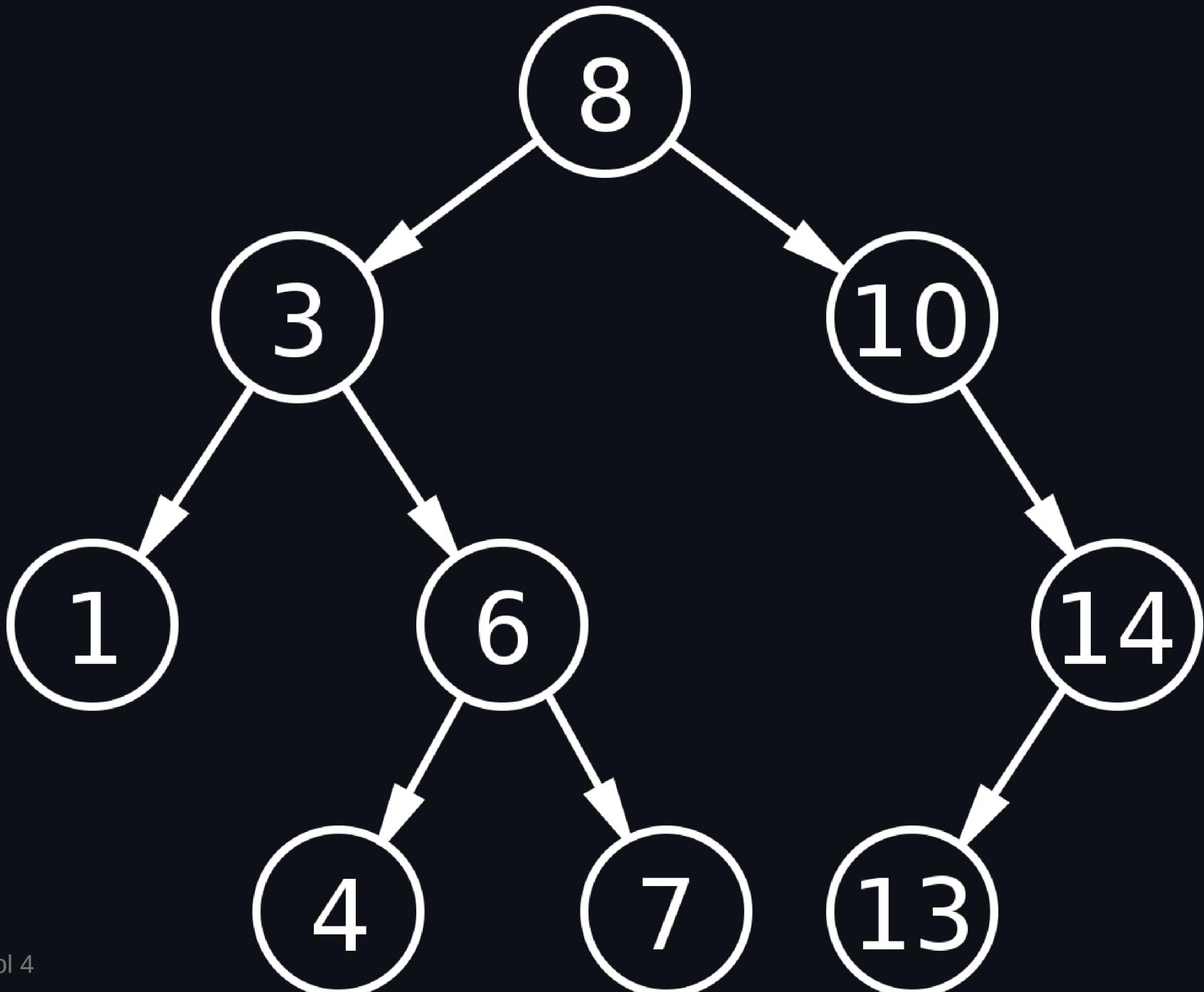
Búsqueda en árboles

- Los recorridos son útiles para buscar elementos en un árbol
- El recorrido por niveles puede ser utilizado para buscar un elemento en un método de búsqueda en anchura (BFS)
- Los recorridos inorder, preorder y postorder pueden ser utilizados para buscar un elemento en un método de búsqueda en profundidad (DFS)

Árbol binario de búsqueda (BST)

- Es un árbol binario en el que para cada nodo:
 - Todos los nodos del subárbol izquierdo son menores
 - Todos los nodos del subárbol derecho son mayores
 - Los subárboles izquierdo y derecho también son BST
- Permite realizar búsquedas eficientes



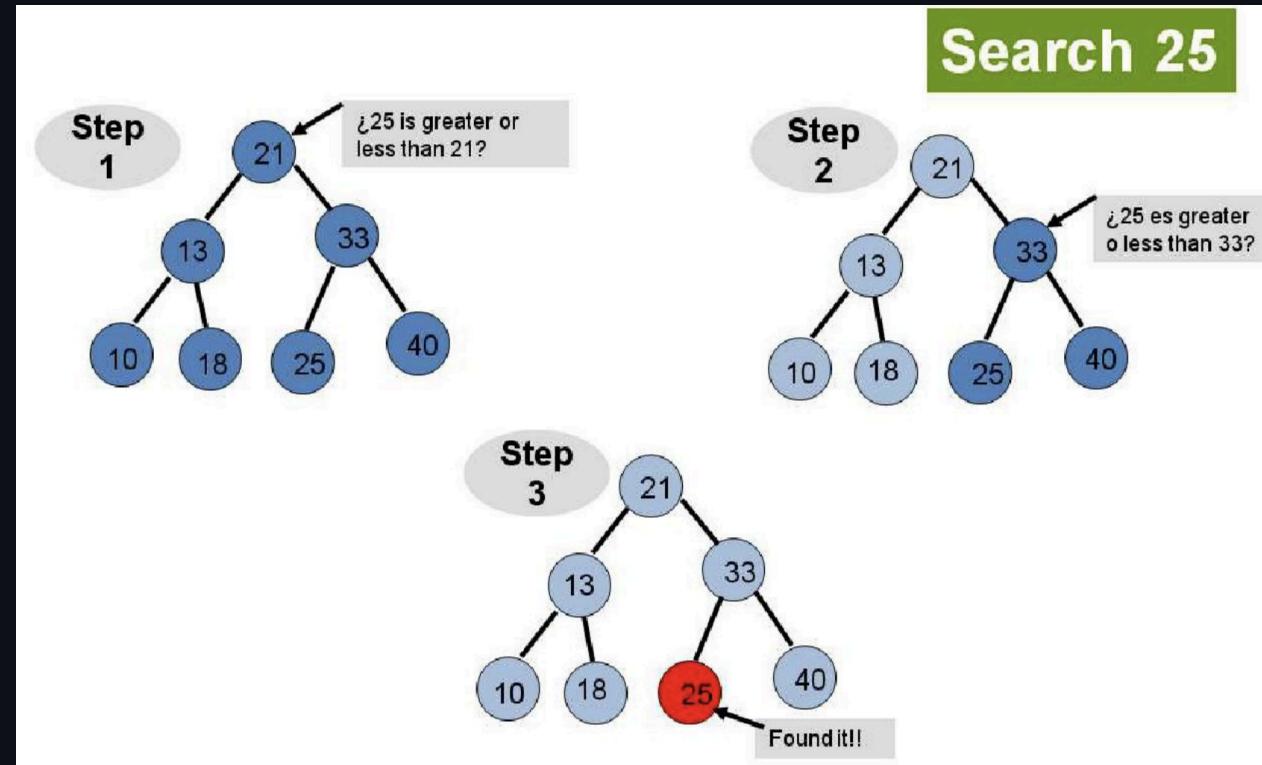


Árbol binario de búsqueda (BST): operaciones

- **Búsqueda:** Buscar un elemento en el árbol
- **Inserción:** Insertar un elemento en el árbol
- **Eliminación:** Eliminar un elemento del árbol

Árboles binarios de búsqueda: búsqueda

- Se recorre el árbol desde la raíz
- Si el nodo actual no es el nodo buscado, se decide si hay que buscar por la derecha o por la izquierda
- El algoritmo para, cuando se encuentra el nodo con el valor buscado o al llegar a un árbol vacío



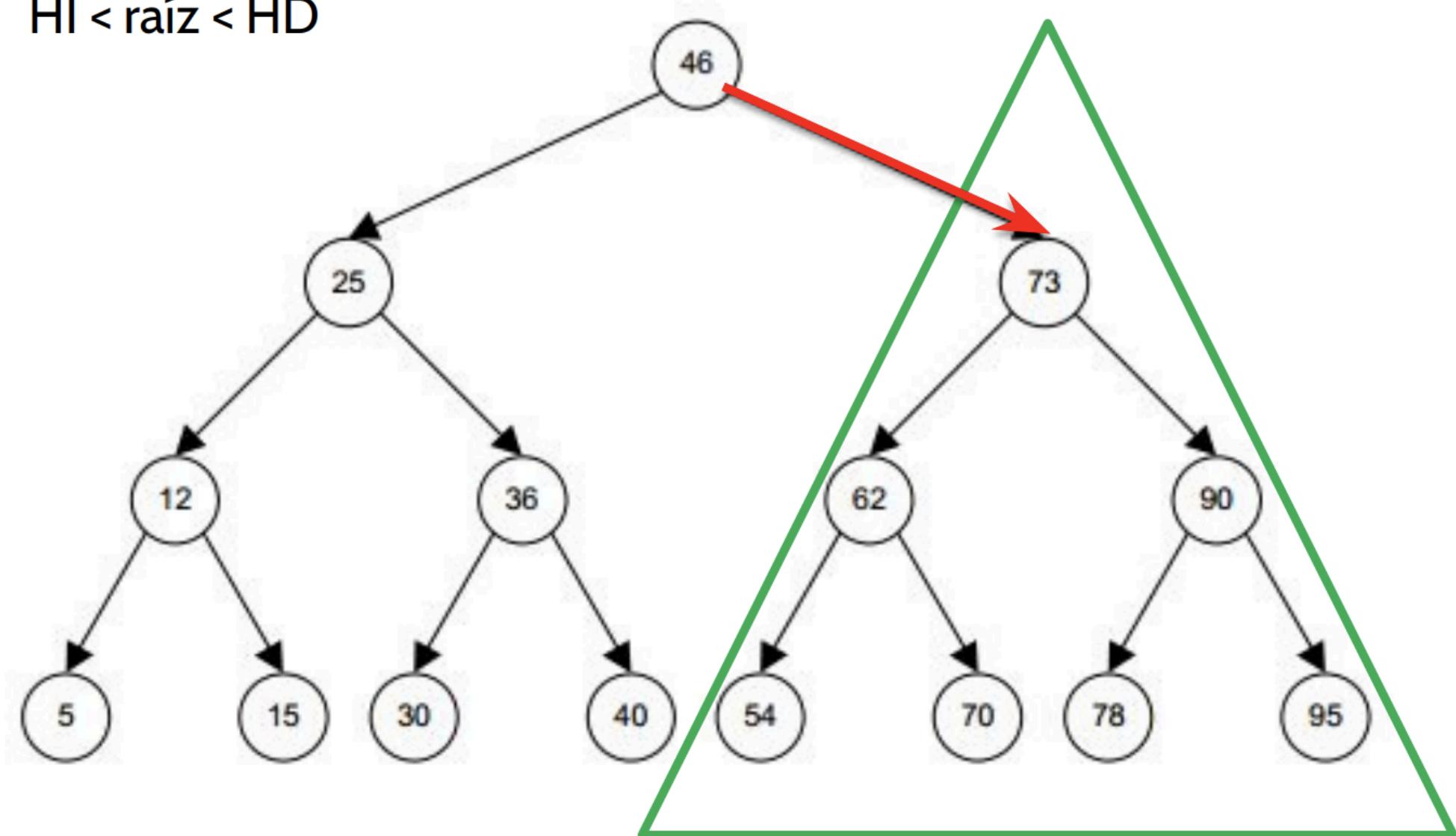
Árboles binarios de búsqueda: búsqueda

Recursivamente desde la raíz:

- Si el nodo que se busca es menor que el nodo actual, se busca en el subárbol izquierdo
- Si el nodo que se busca es mayor que el nodo actual, se busca en el subárbol derecho
- Si el nodo que se busca es igual al nodo actual, se ha encontrado el nodo
- Si el nodo que se busca no existe, se ha llegado a un nodo nulo

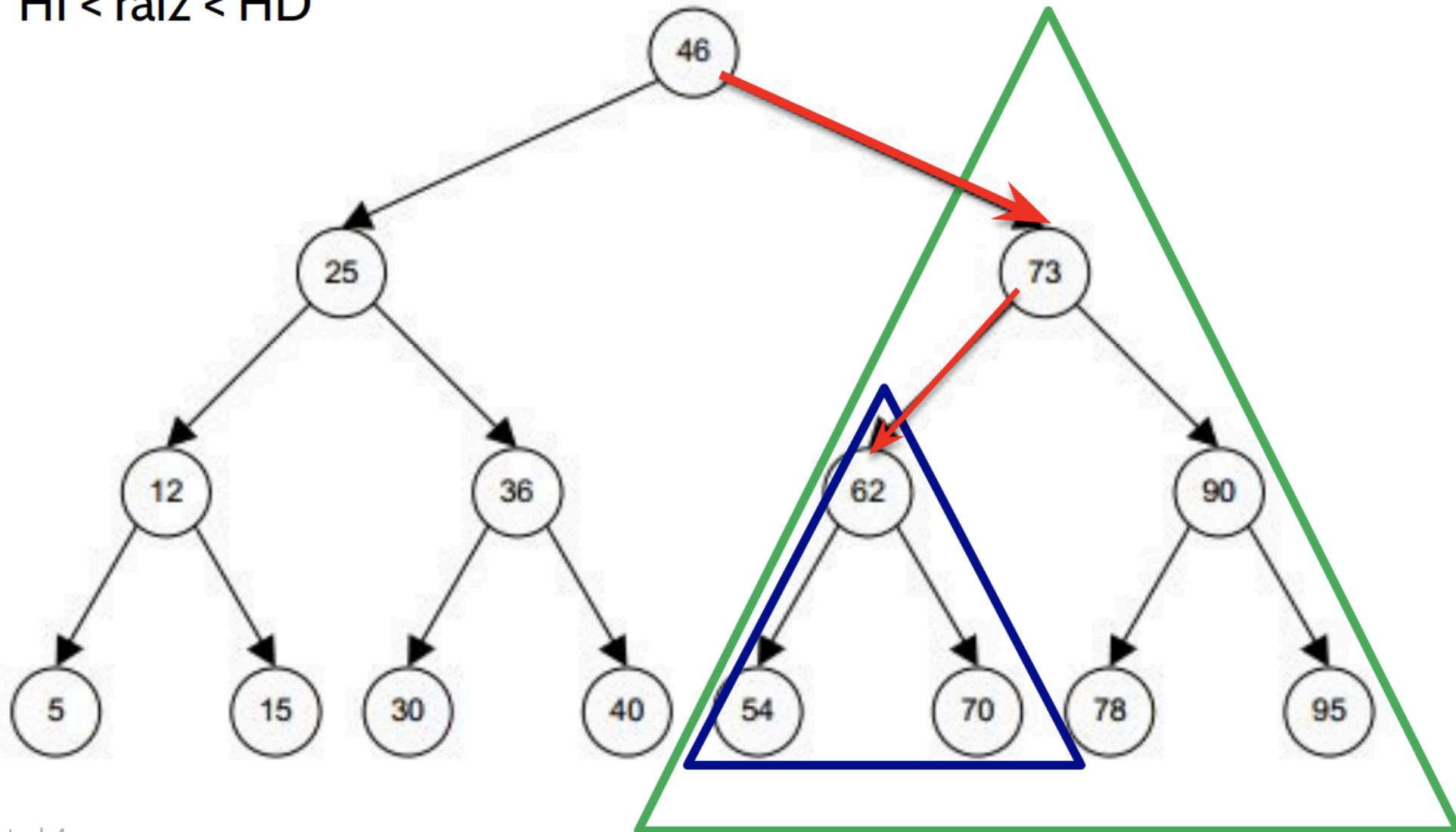
Solución: Buscar 70

HI < raíz < HD



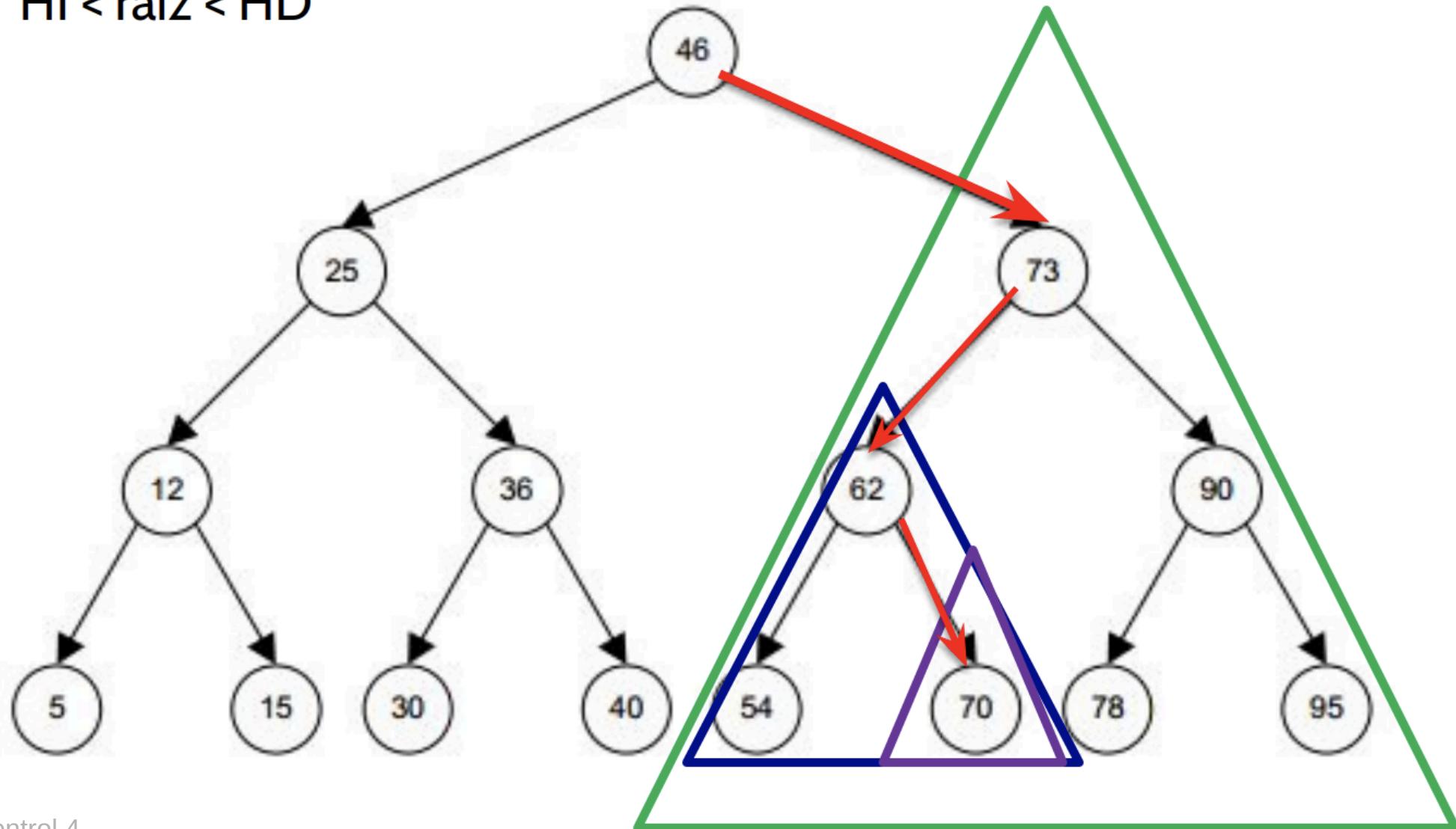
Solución: Buscar 70

HI < raíz < HD



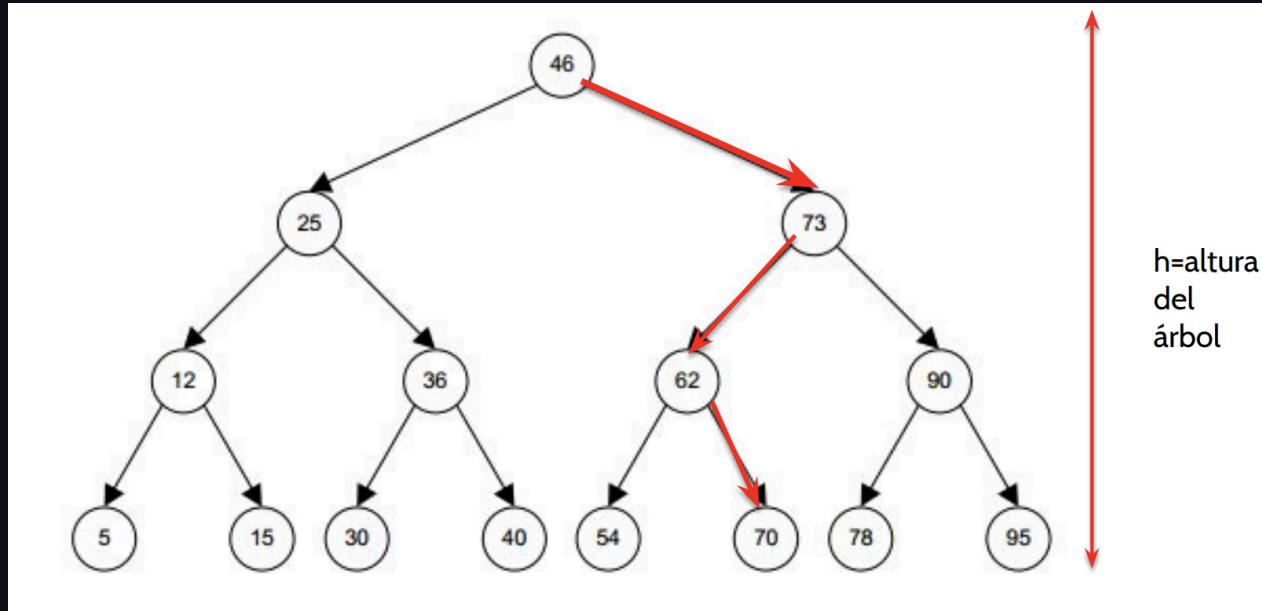
Solución: Buscar 70

HI < raíz < HD



Árboles binarios de búsqueda: búsqueda

- En el peor caso, en la búsqueda se realizan h comparaciones, donde h es la altura del árbol
- Por lo tanto, la complejidad será $O(h)$ donde h es la altura del árbol

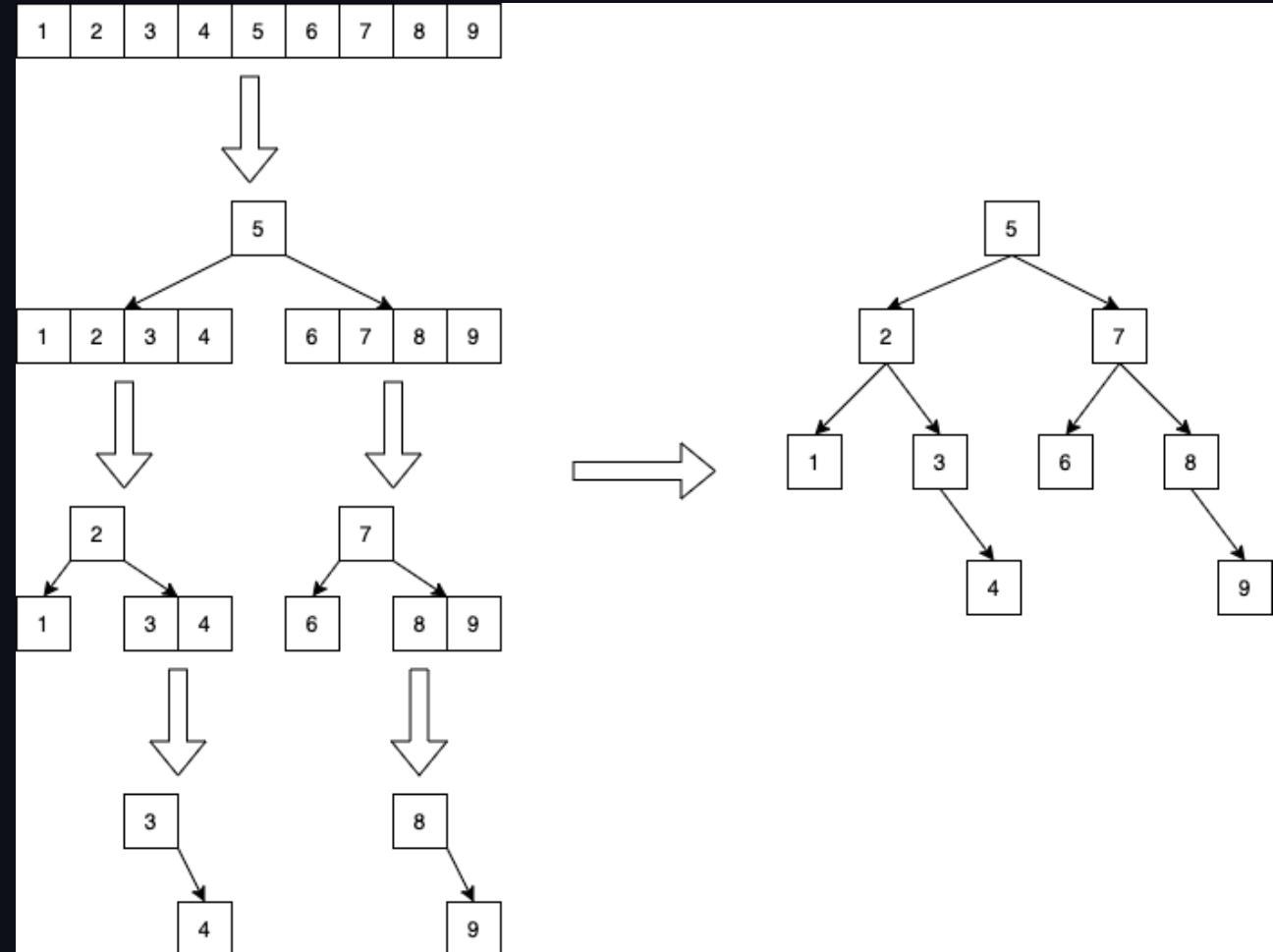


Árboles binarios de búsqueda: búsqueda

```
Node search(Node root, int value) {  
    if (root == null || root.data == value) return root;  
    if (root.data < value) return search(root.right, value);  
    else return search(root.left, value);  
}
```

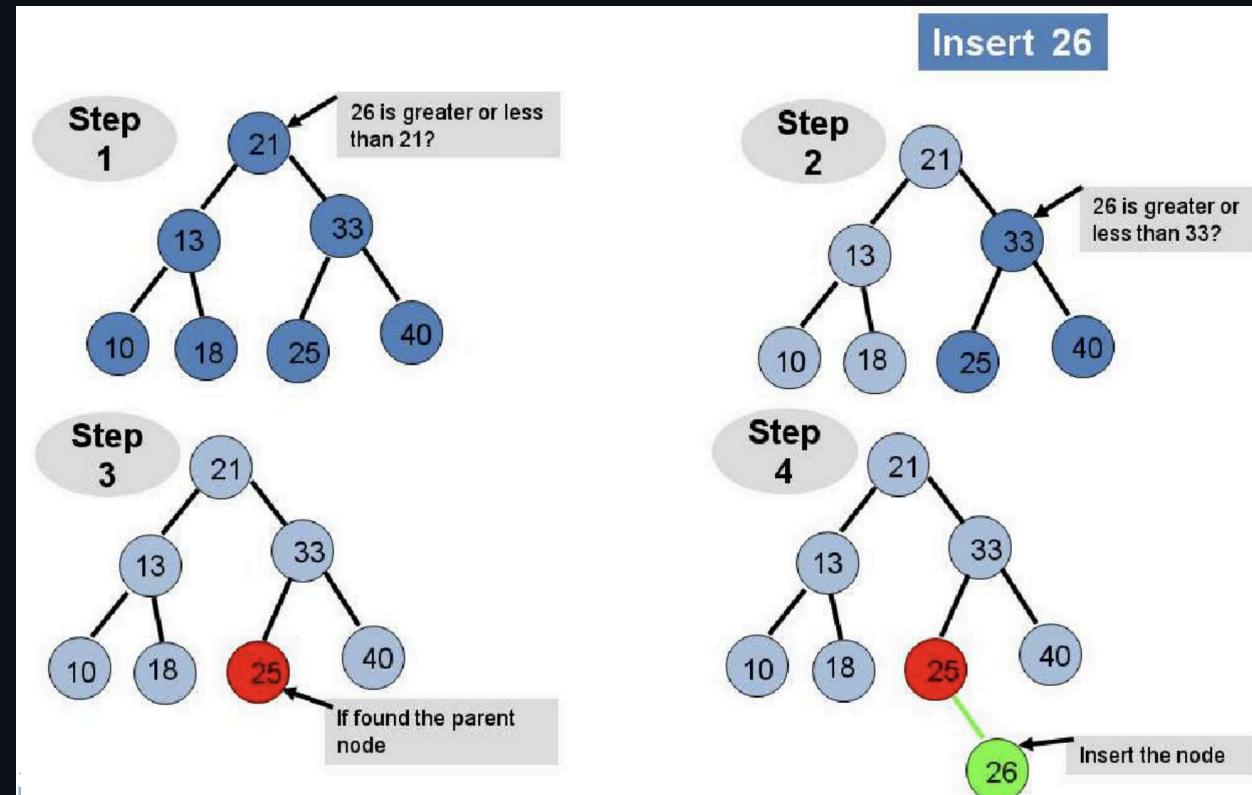
Búsqueda binaria a BST

- Existe una relación entre la búsqueda binaria y los árboles binarios de búsqueda
- La búsqueda en un BST sigue el mismo principio que la búsqueda binaria
- Un BST puede ser visto como una versión más flexible de la búsqueda binaria



Árboles binarios de búsqueda: inserción

- Los nodos se insertan siempre como nodos hoja
- La inserción en un árbol binario de búsqueda es similar a la búsqueda
- La diferencia radica en que si se llega a un nodo nulo, se inserta el nodo en ese lugar



Árboles binarios de búsqueda: inserción

Recursivamente desde la raíz:

- Si el nodo que se busca insertar es menor que el nodo actual, se busca en el subárbol izquierdo
- Si el nodo que se busca insertar es mayor que el nodo actual, se busca en el subárbol derecho
- Si el nodo que se busca insertar es igual al nodo actual, se ha encontrado el nodo y no se inserta (no se permiten duplicados)
- Si el nodo actual es nulo, se inserta el nodo en ese lugar

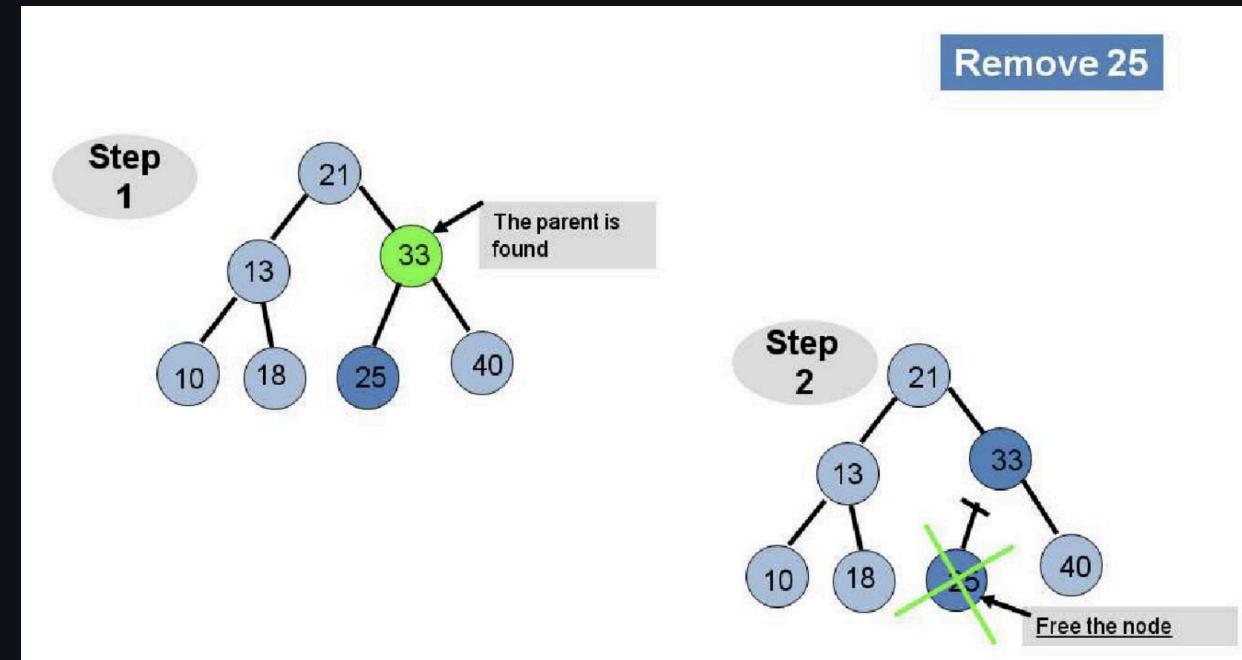
```
Node insert(Node root, int value) {  
    if (root == null) return new Node(value);  
    if (root.data < value) root.right = insert(root.right, value);  
    else if (root.data > value) root.left = insert(root.left, value);  
    return root;  
}
```

Árboles binarios de búsqueda: eliminación

- La eliminación en un árbol binario de búsqueda es más compleja que la búsqueda e inserción
- Se deben considerar tres casos:
 - Si el nodo a eliminar es una hoja:
 - Se elimina el nodo
 - Si el nodo a eliminar tiene un solo hijo:
 - Se elimina el nodo y se reemplaza por su hijo
 - Si el nodo a eliminar tiene dos hijos:
 - Se reemplaza el nodo por el nodo más pequeño del subárbol derecho o el nodo más grande del subárbol izquierdo (sucesor o predecesor)
 - Se elimina el nodo

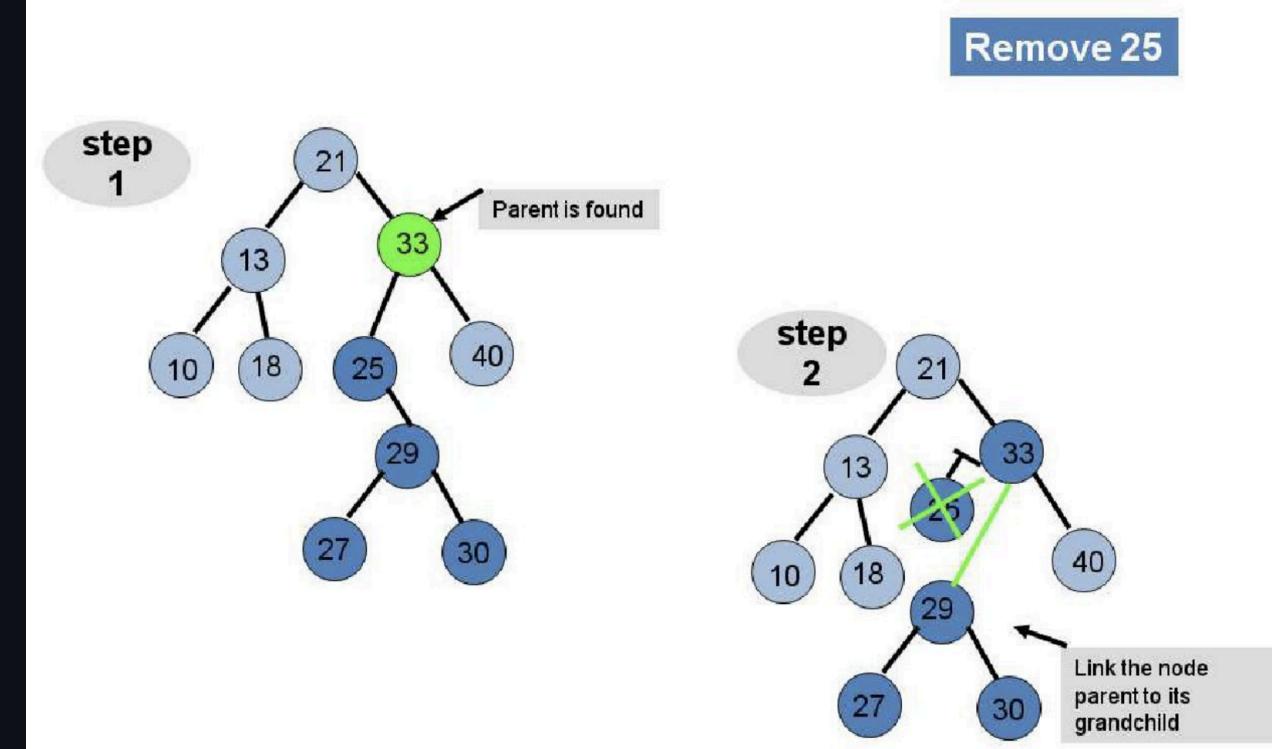
Árboles binarios de búsqueda: eliminación

Caso 1: Nodo hoja



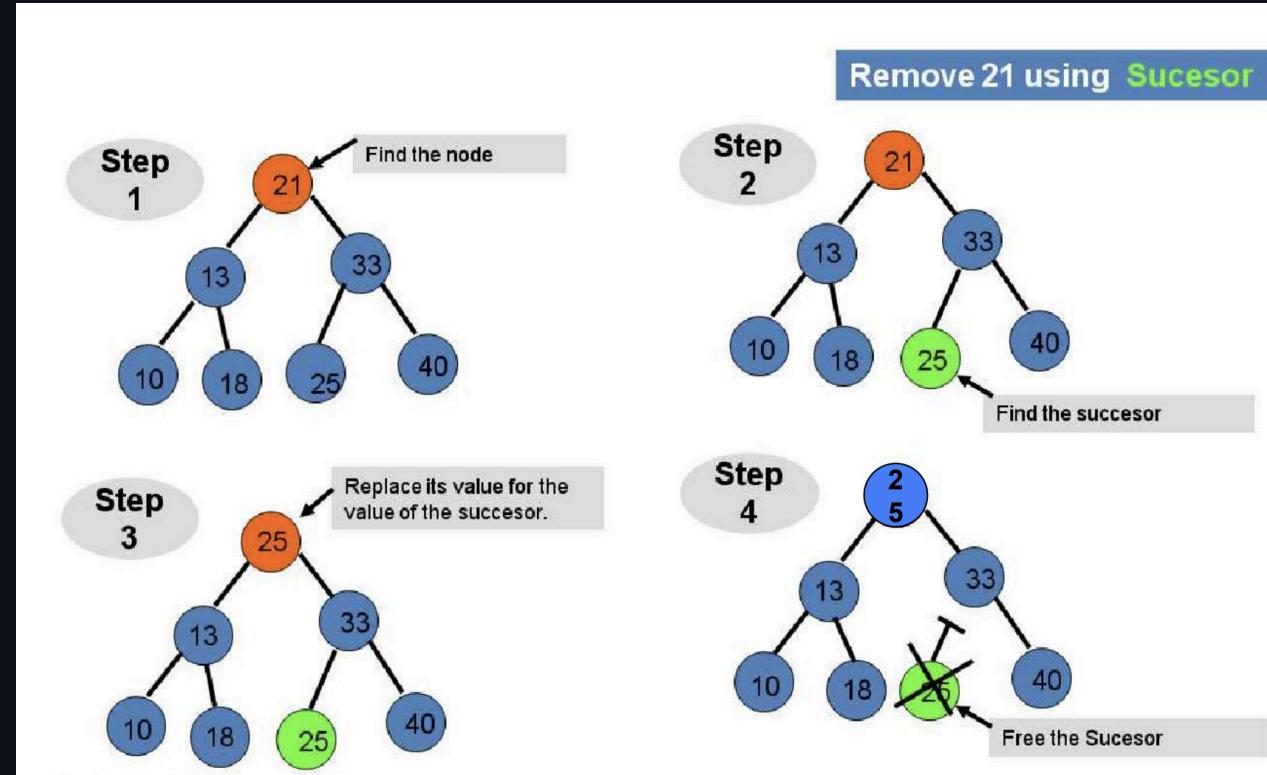
Árboles binarios de búsqueda: eliminación

Caso 2: Nodo con un hijo



Árboles binarios de búsqueda: eliminación

Caso 3: Nodo con dos hijos



Árboles binarios de búsqueda: eliminación

```
Node remove(Node root, int value) {
    if (root == null) return root;
    if (root.data < value) root.right = remove(root.right, value);
    else if (root.data > value) root.left = remove(root.left, value);
    else {
        if (root.left == null) return root.right;
        else if (root.right == null) return root.left;
        root.data = minValue(root.right);
        root.right = remove(root.right, root.data);
    }
    return root;
}
```

<https://visualgo.net/en/bst>

The screenshot shows the VisualGo.NET interface for Binary Search Trees (BST) and AVL Trees. The URL in the address bar is <https://visualgo.net/en/bst>. The page title is "BINARY SEARCH TREE" and "AVL TREE". The status bar indicates "N=13, h=3". The interface includes a "e-Lecture Mode" dropdown, a "LOGIN" button, and a toolbar with a pencil icon and an 'X' icon. A sidebar on the left contains a list of operations: "Toggle BST Layout", "Create", "Search(v)", "Insert(v)", "Remove(v)", "Predec-/Succ-essor(v)", "Select(k)", and "Traverse(root)". The main area displays a tree structure with nodes labeled from 1 to 13. The bottom navigation bar includes a zoom slider set at "1.0x", and links for "About", "Team", "Terms of use", and "Privacy Policy".

Árboles binarios balanceados

- Un árbol binario de búsqueda puede degenerar en una lista enlazada si se insertan los elementos en orden
- Para evitar esto, se pueden utilizar árboles binarios balanceados
- Un árbol binario balanceado es un árbol binario de búsqueda en el que la altura de los subárboles izquierdo y derecho de cada nodo difiere en no más de 1
- Los árboles binarios balanceados permiten realizar operaciones en tiempo logarítmico
- Existen estructuras de datos que implementan árboles binarios autobalanceados, como los árboles AVL y los árboles red-black

AVL

- Un árbol AVL es un tipo especial de árbol binario ideado por los matemáticos soviéticos Adelson-Velskii y Landis.
- Fue el primer árbol de búsqueda binario auto-balanceable que se ideó.
- En un árbol AVL, la diferencia de alturas entre los subárboles izquierdo y derecho de cualquier nodo es de a lo más 1.

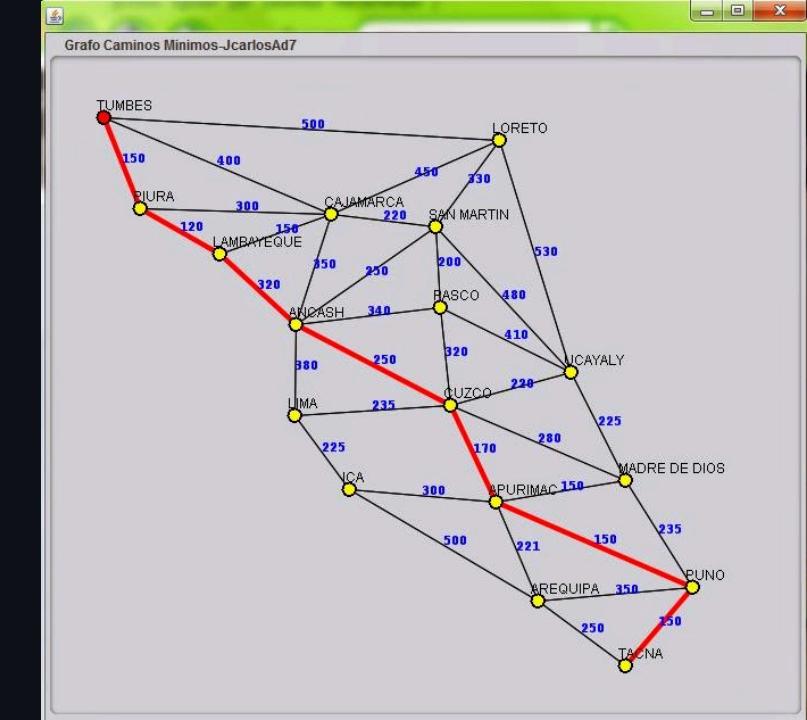
Heap y Priority Queue

Priority Queue

- Una cola de prioridad es un tipo de dato abstracto que permite almacenar elementos con una prioridad asociada.
- Tiene tres operaciones básicas:
 - **Insertar (add)**: Insertar un elemento con una prioridad asociada.
 - **Eliminar (poll)**: Eliminar y retornar el elemento con mayor prioridad.
 - **Mirar (peek)**: Mirar el elemento con mayor prioridad.

Priority Queue

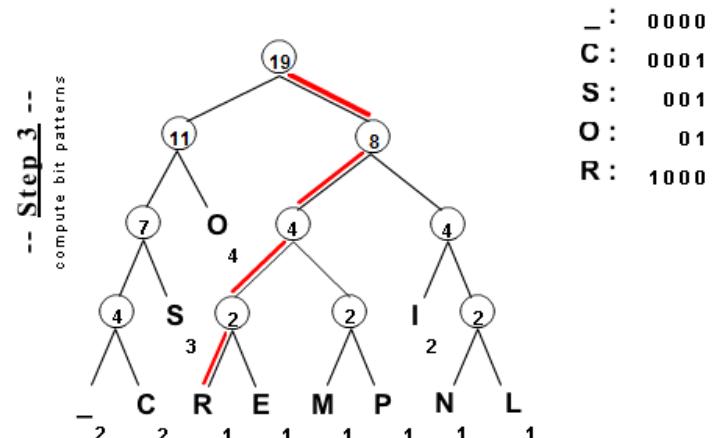
- Ejemplos de uso:
 - Algoritmos de planificación (Scheduling): se utiliza en sistemas operativos para manejar la prioridad de tareas en la planificación de CPU.
 - Algoritmos de búsqueda de caminos (Pathfinding): en el algoritmo de Dijkstra.
 - Algoritmos de compresión: algoritmo de Huffman para la compresión de datos.



Huffman Coding

Example: "COMPRESSION_IS_COOL"

To compute the bit pattern for each datum, we go up the tree and note down a "1" (true) if we take the branch to the **left** and a "0" (false) if we take the branch to the **right**, respectively.



Main.java + 42epyjru6 NEW JAVA ▾ RUN ► :

1

STDIN

Input for the program (Optional)

Output:

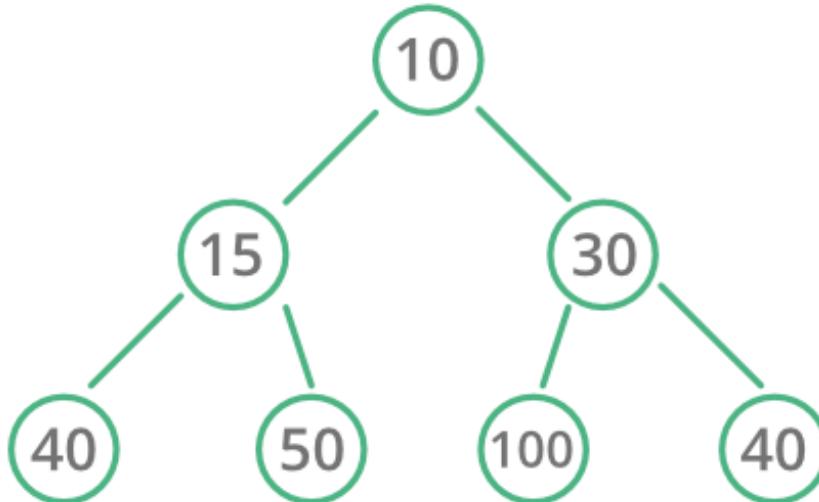
10
10
15

Heap

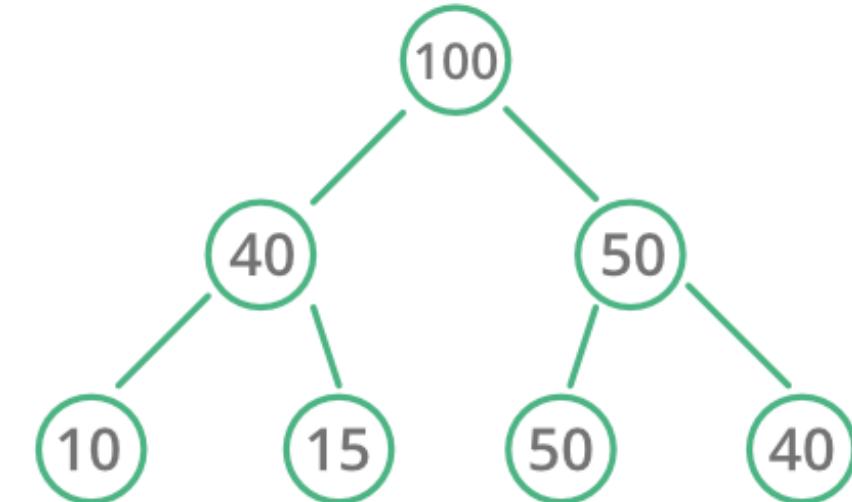
- Un heap es un árbol binario completo que cumple con la propiedad de heap.
- Un heap puede ser de dos tipos:
 - **Min heap**: El valor de cada nodo es menor o igual que el valor de sus hijos.
 - **Max heap**: El valor de cada nodo es mayor o igual que el valor de sus hijos.
 - En ambos casos, el nodo raíz tiene el valor más pequeño o más grande, respectivamente.
 - Es decir la raíz de un heap es el elemento con mayor prioridad.

Heap Data Structure

Heap



Min Heap



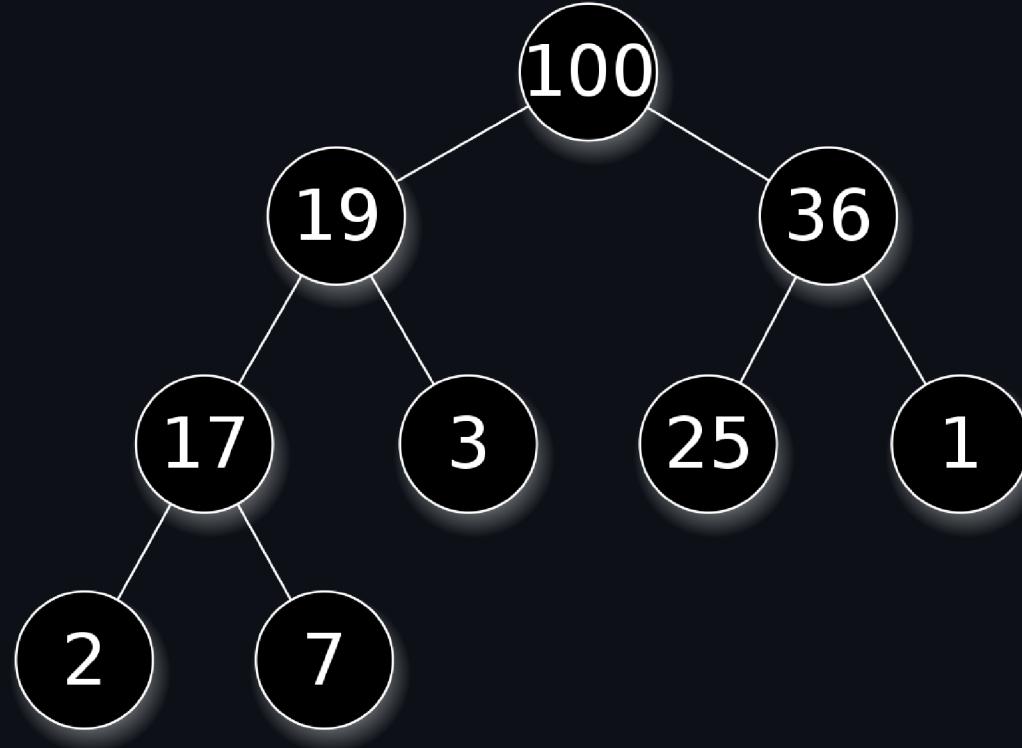
Max Heap

DE

Heap

- Un heap a pesar de ser un árbol binario, se puede representar como un arreglo.
- La relación entre los índices de los nodos y sus padres e hijos es la siguiente:
 - El hijo izquierdo de un nodo en la posición i está en la posición $2i + 1$.
 - El hijo derecho de un nodo en la posición i está en la posición $2i + 2$.
 - El padre de un nodo en la posición i está en la posición $\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor$.
- Esta representación permite realizar operaciones de inserción y eliminación en tiempo logarítmico.
- La altura de un heap es $O(\log n)$, donde n es la cantidad de elementos.

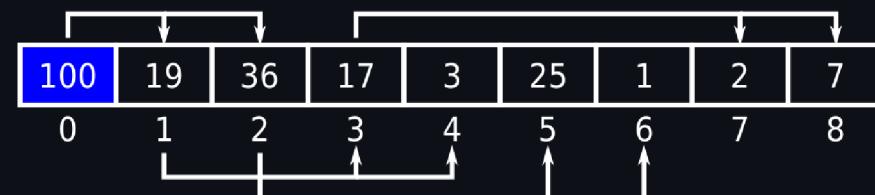
Tree representation



Heap

- left: $2i + 1$
- right: $2i + 2$
- parent: $\lfloor \frac{i-1}{2} \rfloor$

Array representation



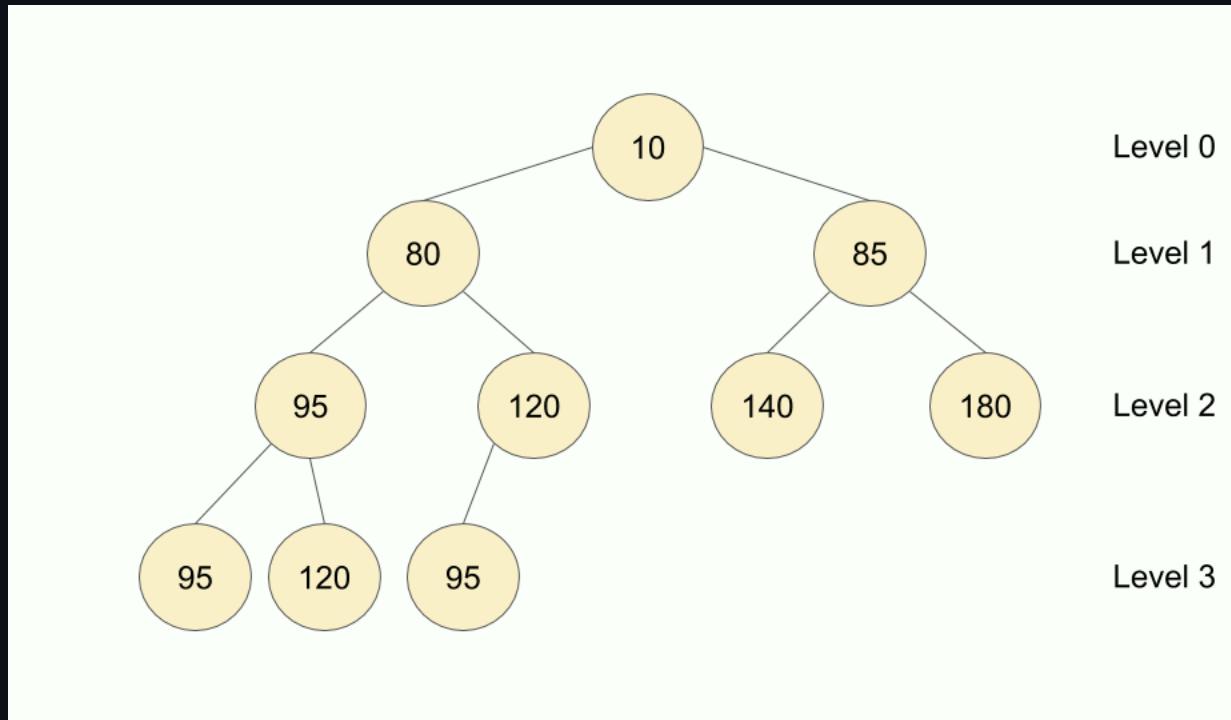
```
class MaxHeap {  
    int[] heap;  
    int size;  
    MaxHeap(int capacity) {  
        heap = new int[capacity];  
        size = 0;  
    }  
}
```

Heap: Reheapify

- Para poder mantener las invariantes del Heap, cada vez que este es modificado por una inserción o eliminación, es necesario recuperar el orden del heap, tambien llamado “reheapify”
- Existen dos casos cuando es necesario esta operación:
 - Cuando se inserta un elemento en un heap y su valor es mayor que el de su padre:
 - Se realiza un “bottom-up heapify” o "swim up".
 - Cuando se hace eliminamos el nodo raiz y se reemplaza por el último elemento del heap:
 - Se realiza un “top-down heapify” o "sink down".

Heap: insertar

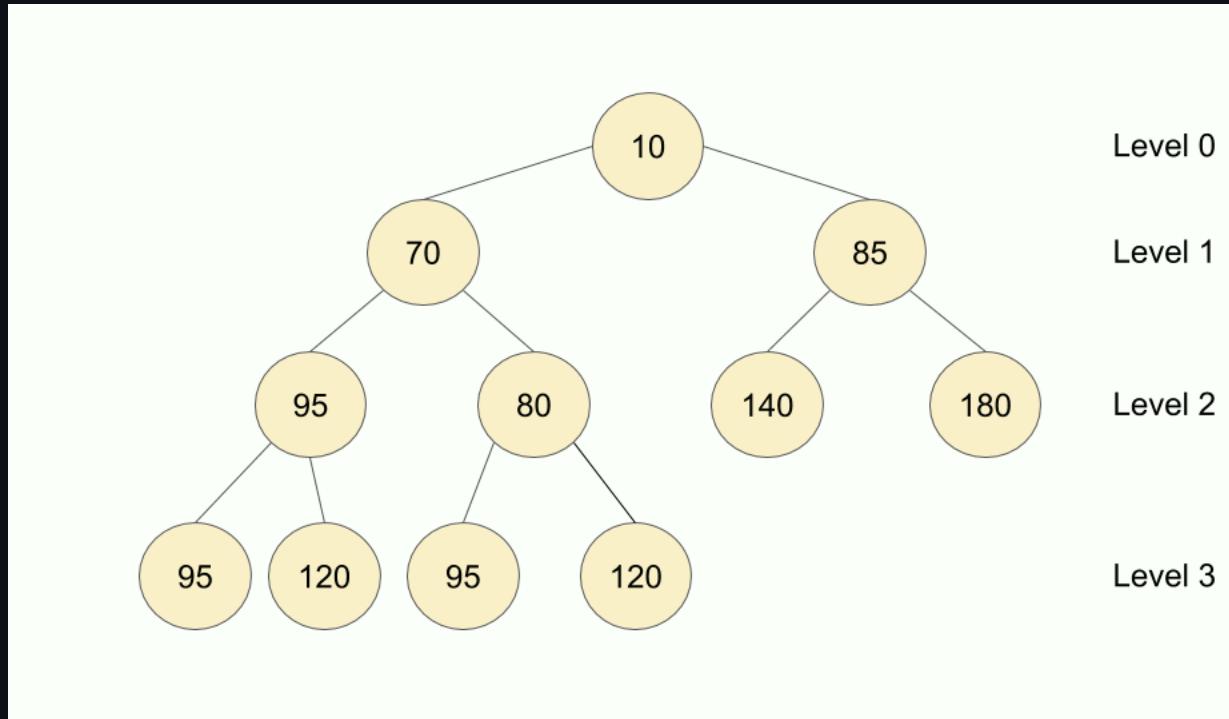
- Para insertar un elemento en un heap, se agrega el elemento al final del arreglo y se realiza un reheapify hacia arriba.
- En un max heap, se compara el elemento con su padre y si es mayor, se intercambian.
- En un min heap, se compara el elemento con su padre y si es menor, se intercambian.
- Se repite el proceso hasta que el elemento llegue a la raíz o su padre sea mayor o menor, según sea el caso.
- La complejidad de esta operación es $O(\log n)$.



```
...
void swap(int i, int j) {
    int temp = heap[i];
    heap[i] = heap[j];
    heap[j] = temp;
}
void insert(int value) {
    heap[size] = value;
    swim(size);
    size++;
}
void swim(int index) {
    int parent = (index - 1) / 2;
    while (index > 0 && arr[index] > arr[parent]) {
        swap(index, parent);
        index = parent;
        parent = (index - 1) / 2;
    }
}
```

Heap: eliminar

- Para eliminar un elemento en un heap, se elimina el nodo raíz y se reemplaza por el último elemento del arreglo y se realiza un reheapify hacia abajo.
- En un max heap, se compara el elemento con sus hijos y se intercambia con el mayor.
- En un min heap, se compara el elemento con sus hijos y se intercambia con el menor.
- Se repite el proceso hasta que el elemento llegue a una hoja o sus hijos sean menores o mayores, según sea el caso.
- La complejidad de esta operación es $O(\log n)$.



```
...
void remove() {
    heap[0] = heap[size-1];
    size--;
    sink(0);
}
void sink(int index) {
    while (2 * index + 1 < size) {
        int left = 2 * index + 1;
        int right = 2 * index + 2;
        int largest = left;
        if (right < size && arr[right] > arr[left]) {
            largest = right;
        }
        if (arr[index] >= arr[largest]) {
            break;
        }
        swap(index, largest);
        index = largest;
    }
}
```

<https://visualgo.net/en/heap>

The screenshot shows a web-based visualization tool for a binary heap. The top navigation bar includes a search icon, the URL 'VISUALGO.NET / en /heap', the page title 'BINARY HEAP', a dropdown menu, 'e-Lecture Mode ▾', a 'LOGIN' button, and social sharing icons for thumbs up and a share symbol.

The main content area is currently empty, showing a large gray space. On the left side, there is a vertical sidebar with a green header containing a left arrow icon. Below the header, a list of heap operations is displayed:

- > Compact Array Mode
- Create(A) - $O(N \log N)$
- Create(A) - $O(N)$
- Insert(v)
- ExtractMax()
- UpdateKey(i, newv)
- Delete(i)

On the right side, there is a vertical sidebar with a blue header containing a left arrow icon, followed by a gold header containing a left arrow icon. At the bottom of the screen, there is a control bar with a volume slider set to 1.0x, playback controls (rewind, fast forward, play/pause), and links for 'About', 'Team', 'Terms of use', and 'Privacy Policy'.

