

Estructura de datos y algoritmos

Rodrigo Alvarez

rodrigo.alvarez2@mail.udp.cl

Eficiencia de tiempo de ejecución

Análisis de complejidad temporal

El análisis de complejidad temporal es una técnica que permite determinar cuánto tiempo tardará un algoritmo en ejecutarse en función del tamaño de los datos de entrada.

- Empírica o experimental: Consiste en medir el tiempo de ejecución en una computadora específica para una entrada dada.
- Teórica: Se expresa en términos de la función matemática que representa el tiempo que tarda el algoritmo en función del tamaño de la entrada.

Ejemplo de análisis empírico

427w6q834

JAVA ▼

RUN ▶

1

STDIN

10000

Output:

Enter the size of the array:
Enter the elements of the array:
Enter the number to be searched:
Start time: 3063317708293
End time: 3063327946854
Time taken to search: 0.010238561 seconds
Number 30001 not found

Análisis teórico

El análisis de complejidad es una herramienta fundamental para el diseño y optimización de algoritmos. Este análisis es basado en un "modelo de máquina" o "modelo de cómputo consensuado" se presenta como una medida "universal" válida para distintas implementaciones del algoritmo.

- La **medida del tiempo** se refiere al número de instrucciones u operaciones elementales (OE) que se ejecutan en la máquina "ideal" para determinado input en función del tamaño del mismo.
- La **medida espacial** se refiere a la cantidad de memoria necesaria para resolver un problema en la máquina ideal.

Análisis de los distintos casos

Diferentes entradas de la misma longitud pueden causar que el algoritmo se comporte distinto, por lo que se podría analizar el algoritmo desde tres perspectivas: **el mejor caso, el caso promedio y el peor caso.**



Operaciones elementales

Las operaciones elementales son aquellas operaciones básicas que el procesador puede realizar en un tiempo acotado por una constante, es decir, que no dependen del tamaño de la entrada. Estas operaciones incluyen las operaciones aritméticas básicas como la suma, resta, multiplicación y división, las comparaciones lógicas como mayor que, menor que, igual a, y las asignaciones a variables de tipos básicos como enteros, flotantes o caracteres.

Es importante tener en cuenta que el conjunto de operaciones elementales puede variar según el modelo de cómputo que se utilice.

Cálculo de Operaciones elementales

Existen tres casos principales para los cuales se pueden calcular las operaciones elementales de un algoritmo: el peor caso, el mejor caso y el caso promedio.

- Peor caso: Se calcula el número de operaciones elementales para el input que genere el peor rendimiento del algoritmo. Esto es importante porque permite garantizar que el algoritmo siempre funcionará en un tiempo acotado, independientemente de los datos de entrada.
- Mejor caso: Se calcula el número de operaciones elementales para el input que genere el mejor rendimiento del algoritmo.
- Caso promedio: Se calcula el número de operaciones elementales para una distribución de inputs típicos en la tarea en cuestión. El caso promedio es importante para entender el rendimiento esperado del algoritmo en situaciones reales.

Ejemplo de cálculo de Operaciones Elementales (OE's)

```
1: public static boolean findInArray(int[] arr, int num) {  
2:     for (int i = 0; i < arr.length; i++) {  
3:         if (arr[i] == num) {  
4:             return true;  
5:         }  
6:     }  
7:     return false;  
8: }
```

- 1: define la función y los argumentos que recibe. No hay operaciones elementales que contar en esta línea.
- 2: inicia un ciclo for que recorre el arreglo. Se realizan tres operaciones elementales: una asignación ($i = 0$), una comparación ($i < \text{arr.length}$) y al final de cada ciclo se ejecuta $i++$.
- 3: verifica si el elemento actual es igual al valor buscado. Hay una comparación ($\text{arr}[i] == x$) y una acceso $\text{arr}[i]$ que cuentan como dos operaciones elementales.
- 4: si se encuentra el valor buscado, la función retorna verdadero. Esta línea cuenta como una operación elemental.
- 7: si se termina el ciclo sin encontrar el valor buscado, la función retorna falso. Esta línea cuenta como una operación elemental.

Ejemplo de cálculo del mejor caso

```
1: public static boolean findInArray(int[] arr, int num) {
2:     for (int i = 0; i < arr.length; i++) {
3:         if (arr[i] == num) {
4:             return true;
5:         }
6:     }
7:     return false;
8: }
```

- $L2_i$: Inicialización del for cuenta como 1 OE
 - $L2_c$: Condición del for cuenta como 1 OE
 - $L3$: 2 OE (acceso a arreglo y comparación)
 - $L4$: 1 OE
- El mejor caso de esta función es que el elemento a buscar esté en la primera posición.
 - Para representar el mejor caso sólo será necesario revisar la primera posición del arreglo.
 - La función que indica el tiempo que se demorará nuestro algoritmo en función de la entrada n es: $T(n) = L2_i + L2_c + L3 + L4$
 - Reemplazando en la fórmula: $T(n) = 1 + 1 + 2 + 1 = 5$
 - Podemos ver que la función $T(n)$ no tiene dependencia de n , esto es debido a que al no ejecutar más de una iteración del ciclo, la dependencia del tamaño de la entrada desaparece.

Ejemplo de cálculo del peor caso

```
1: public static boolean findInArray(int[] arr, int num) {
2:     for (int i = 0; i < arr.length; i++) {
3:         if (arr[i] == num) {
4:             return true;
5:         }
6:     }
7:     return false;
8: }
```

- $L2_i$: Inicialización del for cuenta como 1 OE
- $L2_c$: Condición del for cuenta como 1 OE
- $L2_{in}$: Incremento del for, se ejecuta cuando termina una iteración del ciclo, cuenta como 1 OE
- $L3$: 2 OE (acceso a arreglo y comparación)
- $L4$: 1 OE
- $L7$: 1 OE

- El peor caso de esta función es que el elemento no esté presente.
- Este caso indicará que el arreglo de tamaño N debe ser recorrido completamente.
- Para representar el peor caso, será necesario recorrer el arreglo hasta terminarlo y luego retornar falso en la L7.
- La función que indica el tiempo que se demorará nuestro algoritmo en función de la entrada n es:
$$T(n) = L2_i + \sum_{i=1}^n (L2_c + L3 + L2_{in}) + L7$$
- Reemplazando en la fórmula:
$$T(n) = 1 + \sum_{i=1}^n (1 + 2 + 1) + 1 = 4n + 2$$
- La función FindInArray en el peor de los casos se comporta como la función T(n).

Ejemplo de cálculo del caso promedio

```
1: public static boolean findInArray(int[] arr, int num) {
2:     for (int i = 0; i < arr.length; i++) {
3:         if (arr[i] == num) {
4:             return true;
5:         }
6:     }
7:     return false;
8: }
```

- $L2_i$: Inicialización del for cuenta como 1 OE
- $L2_c$: Condición del for cuenta como 1 OE
- $L2_{in}$: Incremento del for, se ejecuta cuando termina una iteración del ciclo, cuenta como 1 OE
- $L3$: 2 OE (acceso a arreglo y comparación)
- $L4$: 1 OE
- $L7$: 1 OE

- Como existen n posiciones en el arreglo, supondremos a priori que todas las posiciones son equis probables de contener el número buscado, por lo tanto cada una tendrá una probabilidad de $1/n$. Es decir, en promedio el ciclo se ejecutará $\sum_{i=0}^{n-1} i \cdot \frac{1}{n} = \frac{n-1}{2}$ veces.
- Escribiendo la fórmula $T(n)$ con esta cantidad esperada de iteraciones queda: $T(n) = L2_i + \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} (L2_c + L3 + L2_{in}) + L2_c + L3 + L4$
- Reemplazando: $T(n) = 5 + \sum_1^{\frac{n-1}{2}} (4) = 2n + 3$

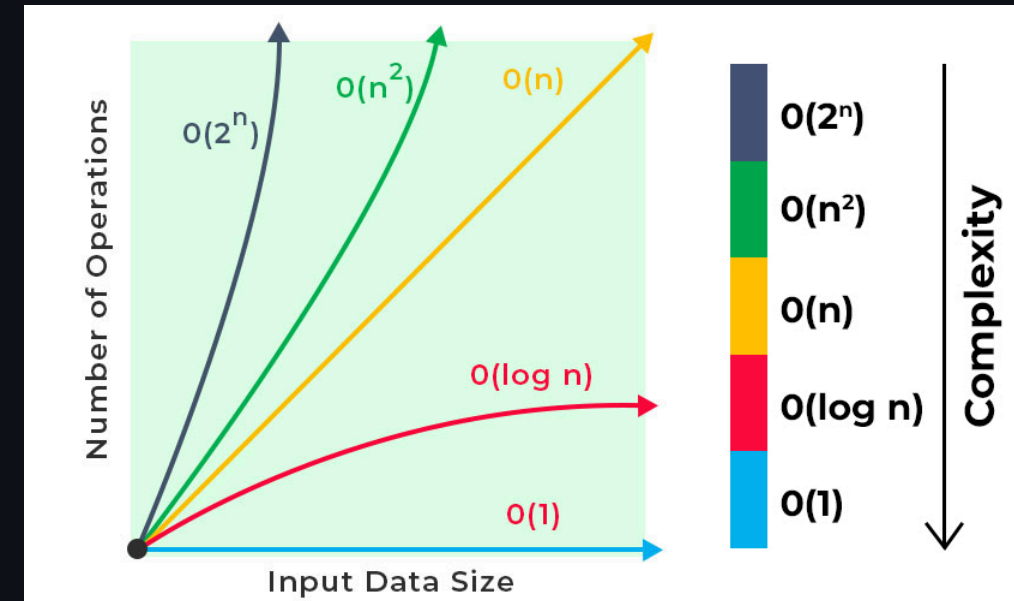
Tamaño de la entrada

- Por qué la complejidad en función del tamaño de la entrada?
- Queremos una complejidad relativa, no absoluta
- Una medida general de la ejecución, no nos interesa cuánto demora la instancia particular, sino que el algoritmo en general
- Es más abstracta que pensar en función de cada input (Sabendo que podrían existir infinitos inputs distintos)
- $T(n)$: complejidad temporal para una entrada de tamaño n

Análisis asintótico

El análisis asintótico es una técnica de análisis que permite describir la complejidad espacial o temporal de un algoritmo mediante el orden de crecimiento.

El orden de crecimiento se caracteriza mediante una función matemática, esta es la que describe la relación entre tiempo y tamaño de la entrada, o uso de memoria y tamaño de la entrada.



■ ¿Por qué quiero algoritmos que sean eficientes asintóticamente?

| | Tamaño n | | | | | |
|----------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------------|-----------------------------|
| Complejidad Temporal | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 |
| n | .00001 segundos | .00002 segundos | .00003 segundos | .00004 segundos | .00005 segundos | .00006 segundos |
| n^2 | .0001 segundos | .0004 segundos | .0009 segundos | .0016 segundos | .0025 segundos | .0036 segundos |
| n^3 | .001 segundos | .008 segundos | .027 segundos | .064 segundos | .125 segundos | .216 segundos |
| n^5 | .1 segundos | 3.2 segundos | 24.3 segundos | 1.7 minutos | 5.2 minutos | 13.0 minutos |
| 2^n | .001 segundos | 1.0 segundos | 17.9 minutos | 12.7 días | 35.7 años | 366 siglos |
| 3^n | .059 segundos | 58 minutos | 6.5 años | 3855 siglos | 2×10^8 siglos | 1.3×10^{13} siglos |

Comparación de algoritmos con distintas complejidades, polinomiales y exponenciales

Fuente: Aho, Hopcroft, Ullman

Big O

$\mathcal{O}(g(N)) = \{f(N) : \text{existen constantes positivas } c \text{ y } N_0 \text{ de forma que } 0 \leq f(N) \leq cg(N) \text{ para todo } N \geq N_0\}$



Big O

- Caracteriza la cota superior de una función, es decir que la función en cuestión no crece más rápido que un cierto ratio.
- Esta notación se usa para caracterizar el peor caso de tiempo de ejecución o memoria para un algoritmo.
- Digamos que un determinado algoritmo tiene tiempo de ejecución en función de $T(N) = 7N^3 + 5N^2 - 20N + 7$. Esto en términos de Big O podría traducirse como $T(N) = O(N^3)$.
- La razón es que $7N^3 + 5N^2 - 20N + 7 \leq cN^3$ con c como una constante positiva.

Big Omega

$\Omega(g(N)) = \{f(N) : \text{existen constantes positivas } c \text{ y } N_0 \text{ de forma que } 0 \leq cg(N) \leq f(N) \text{ para todo } N \geq N_0 \}$

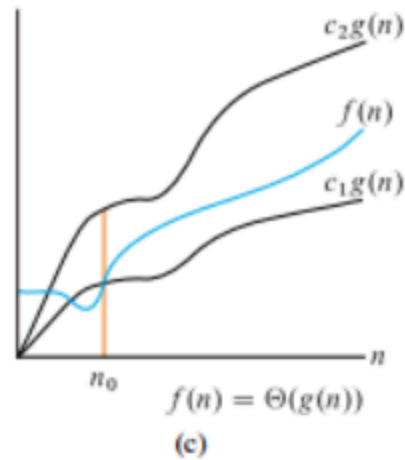


Big Omega (Ω)

- La notación Notación Ω , conocida como Omega caracteriza la cota inferior de una función.
- Para el caso del ejemplo $T(N) = 7N^3 + 5N^2 - 20N + 7$, podemos decir que en términos de notación Omega el tiempo de ejecución es en magnitud de $\Omega(N^3)$, $\Omega(N^2)$ o incluso $\Omega(1)$, siempre y cuando exista un N para ese caso.

Big Theta

$\Theta(g(N)) = \{f(N) : \text{existen constantes positivas } c_1, c_2 \text{ y } N_0 \text{ de forma que } 0 \leq c_1g(N) \leq f(N) \leq c_2g(N) \text{ para todo } N \geq N_0 \}$



Big Theta (Θ)

- La notación Notación Θ , conocida como Theta caracteriza la cota ajustada de una función.
- Para el caso del ejemplo $T(N) = 7N^3 + 5N^2 - 20N + 7$, si $T(N) = \Omega(N^3)$ y $T(N) = O(N^3)$, entonces se puede decir $T(N) = \Theta(N^3)$.

