

Estructura de datos y algoritmos

Rodrigo Alvarez

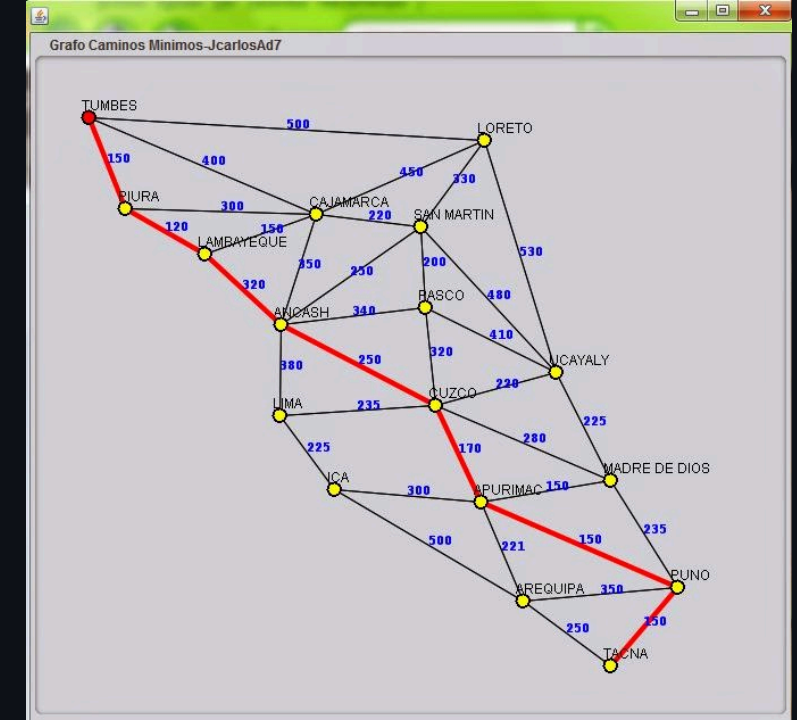
rodrigo.alvarez2@mail.udp.cl

Priority Queue

- Una cola de prioridad es un tipo de dato abstracto que permite almacenar elementos con una prioridad asociada.
- Tiene tres operaciones básicas:
 - **Insertar (add)**: Insertar un elemento con una prioridad asociada.
 - **Eliminar (poll)**: Eliminar y retornar el elemento con mayor prioridad.
 - **Mirar (peek)**: Mirar el elemento con mayor prioridad.

Priority Queue

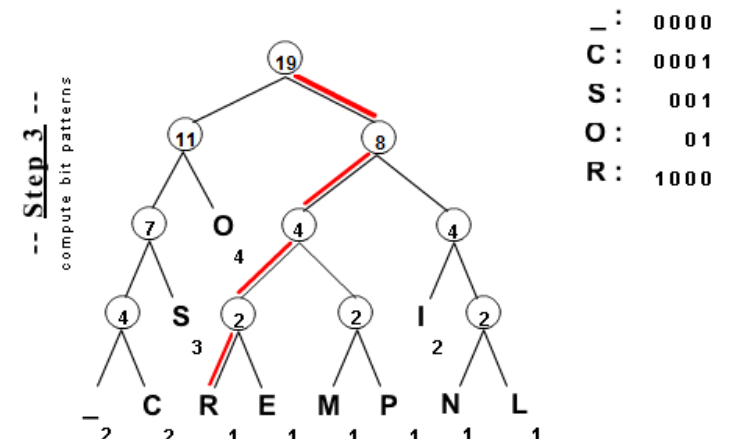
- Ejemplos de uso:
 - Algoritmos de planificación (Scheduling): se utiliza en sistemas operativos para manejar la prioridad de tareas en la planificación de CPU.
 - Algoritmos de búsqueda de caminos (Pathfinding): en el algoritmo de Dijkstra.
 - Algoritmos de compresión: algoritmo de Huffman para la compresión de datos.



Huffman Coding

Example: "COMPRESSION_IS_COOL"

To compute the bit pattern for each datum, we go up the tree and note down a "1" (true) if we take the branch to the *left* and a "0" (false) if we take the branch to the *right*, respectively.



42epyjru6

JAVA ▼

RUN ▶

1

STDIN

Input for the program (Optional)

Output:

10

10

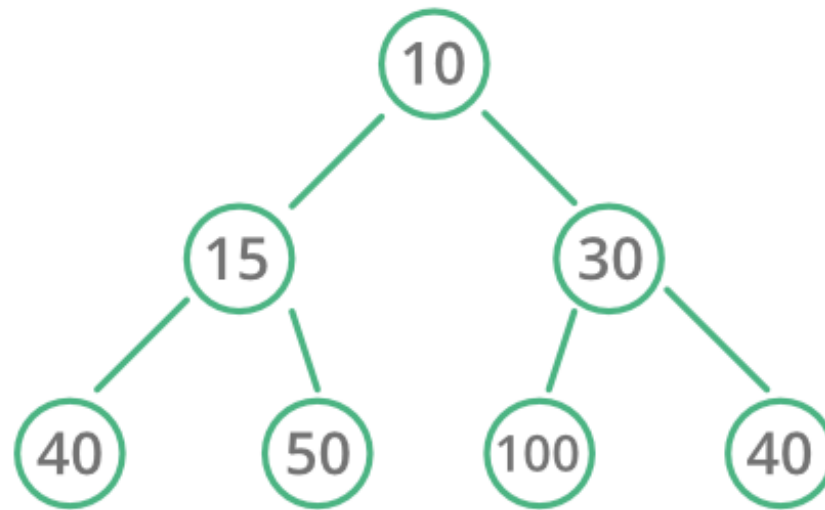
15

Heap

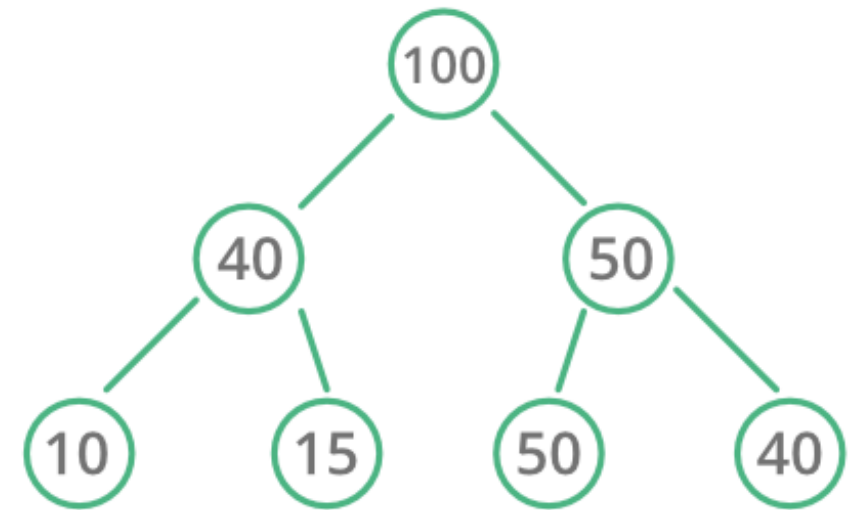
- Un heap es un árbol binario completo que cumple con la propiedad de heap.
- Un heap puede ser de dos tipos:
 - **Min heap:** El valor de cada nodo es menor o igual que el valor de sus hijos.
 - **Max heap:** El valor de cada nodo es mayor o igual que el valor de sus hijos.
 - En ambos casos, el nodo raíz tiene el valor más pequeño o más grande, respectivamente.
 - Es decir la raíz de un heap es el elemento con mayor prioridad.

Heap

Heap Data Structure



Min Heap



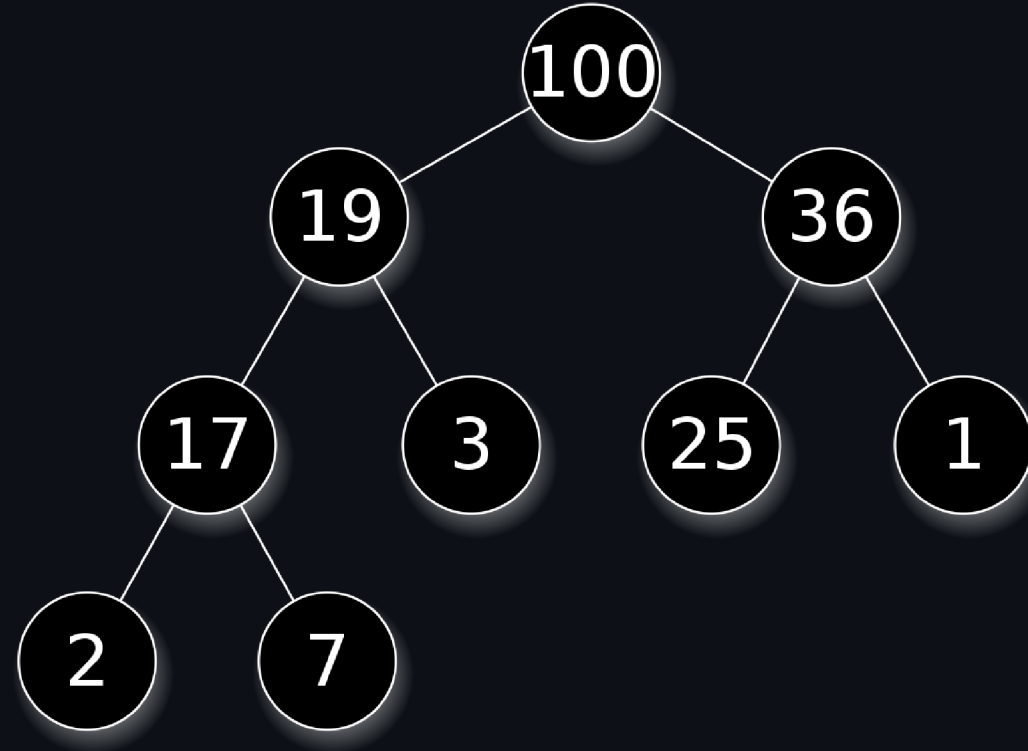
Max Heap



Heap

- Un heap a pesar de ser un árbol binario, se puede representar como un arreglo.
- La relación entre los índices de los nodos y sus padres e hijos es la siguiente:
 - El hijo izquierdo de un nodo en la posición i está en la posición $2i + 1$.
 - El hijo derecho de un nodo en la posición i está en la posición $2i + 2$.
 - El padre de un nodo en la posición i está en la posición $\left\lfloor \frac{i-1}{2} \right\rfloor$.
- Esta representación permite realizar operaciones de inserción y eliminación en tiempo logarítmico.
- La altura de un heap es $O(\log n)$, donde n es la cantidad de elementos.

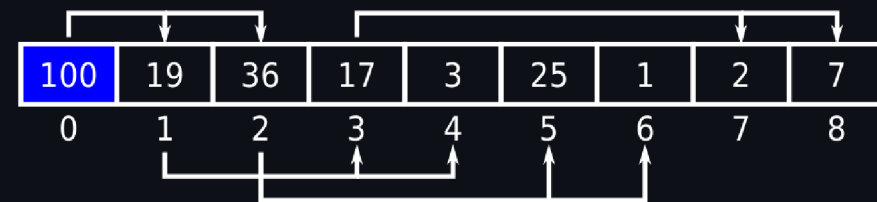
Tree representation



Heap

- left: $2i + 1$
- right: $2i + 2$
- parent: $\left\lfloor \frac{i-1}{2} \right\rfloor$

Array representation



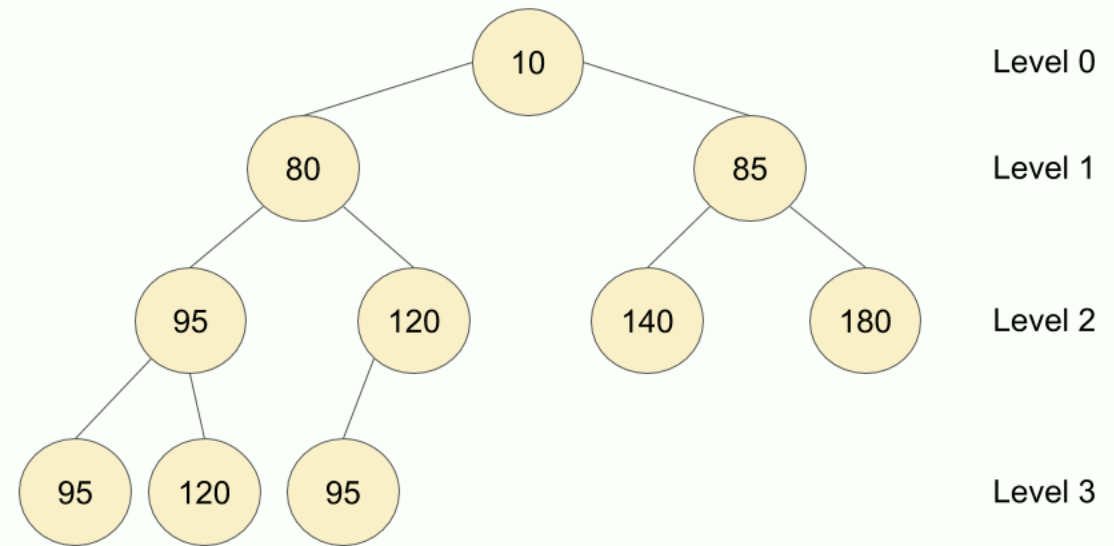

```
class MaxHeap {  
    int[] heap;  
    int size;  
    MaxHeap(int capacity) {  
        heap = new int[capacity];  
        size = 0;  
    }  
}
```

Heap: Reheapify

- Para poder mantener las invariantes del Heap, cada vez que este es modificado por una inserción o eliminación, es necesario recuperar el orden del heap, también llamado “reheapify”
- Existen dos casos cuando es necesario esta operación:
 - Cuando se inserta un elemento en un heap y su valor es mayor que el de su padre:
 - Se realiza un “bottom-up heapify” o “swim up”.
 - Cuando se hace eliminamos el nodo raíz y se reemplaza por el último elemento del heap:
 - Se realiza un “top-down heapify” o “sink down”.

Heap: insertar

- Para insertar un elemento en un heap, se agrega el elemento al final del arreglo y se realiza un reheapify hacia arriba.
- En un max heap, se compara el elemento con su padre y si es mayor, se intercambian.
- En un min heap, se compara el elemento con su padre y si es menor, se intercambian.
- Se repite el proceso hasta que el elemento llegue a la raíz o su padre sea mayor o menor, según sea el caso.
- La complejidad de esta operación es $O(\log n)$.



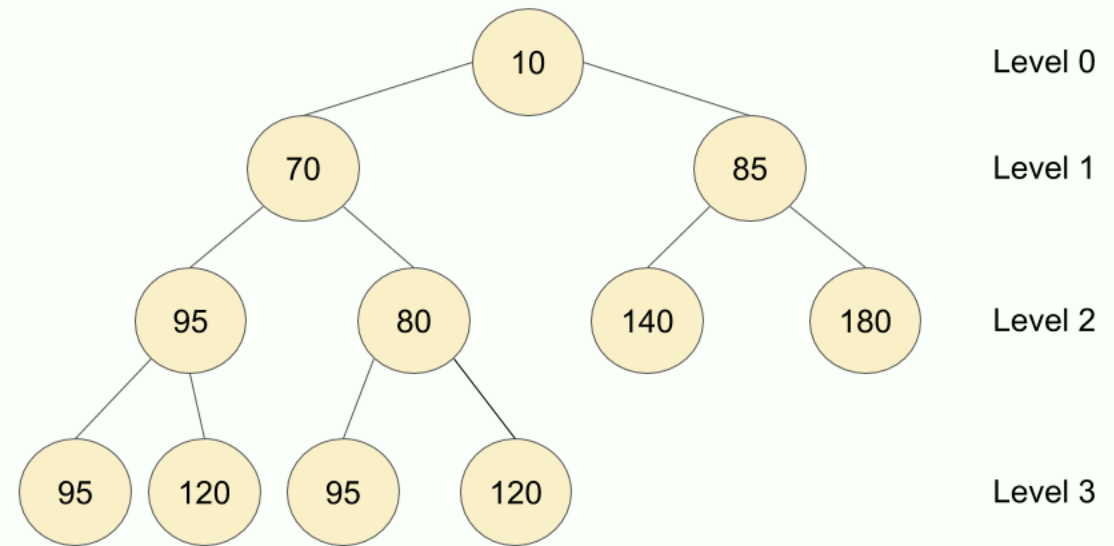
```

...
void swap(int i, int j) {
    int temp = heap[i];
    heap[i] = heap[j];
    heap[j] = temp;
}
void insert(int value) {
    heap[size] = value;
    swim(size);
    size++;
}
void swim(int index) {
    int parent = (index - 1) / 2;
    while (index > 0 && arr[index] > arr[parent]) {
        swap(index, parent);
        index = parent;
        parent = (index - 1) / 2;
    }
}

```

Heap: eliminar

- Para eliminar un elemento en un heap, se elimina el nodo raíz y se reemplaza por el último elemento del arreglo y se realiza un reheapify hacia abajo.
- En un max heap, se compara el elemento con sus hijos y se intercambia con el mayor.
- En un min heap, se compara el elemento con sus hijos y se intercambia con el menor.
- Se repite el proceso hasta que el elemento llegue a una hoja o sus hijos sean menores o mayores, según sea el caso.
- La complejidad de esta operación es $O(\log n)$.




```

...
void remove() {
    heap[0] = heap[size-1];
    size--;
    sink(0);
}
void sink(int index) {
    while (2 * index + 1 < size) {
        int left = 2 * index + 1;
        int right = 2 * index + 2;
        int largest = left;
        if (right < size && arr[right] > arr[left]) {
            largest = right;
        }
        if (arr[index] >= arr[largest]) {
            break;
        }
        swap(index, largest);
        index = largest;
    }
}

```

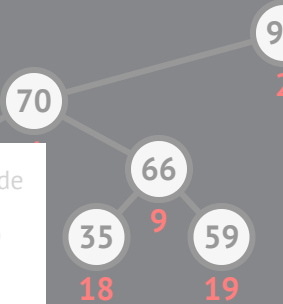
<https://visualgo.net/en/heap>

 VISUALGO.NET / en / heap

BINARY HEAP

1. Binary (Max) Heap

e-Lecture Mode [LOGIN](#)



```
graph TD; 70 --- 9; 70 --- 66; 9 --- 35; 9 --- 59; 66 --- 18; 66 --- 19
```

-> Compact Array Mode

Create(A) - $O(N \log N)$

Create(A) - $O(N)$

Insert(v)

ExtractMax()

HeapSort()

UpdateKey(i, newv)

Delete(i)

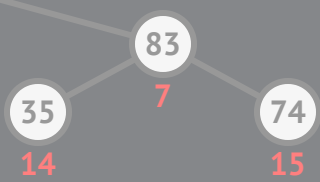
A Binary (Max) Heap is a complete binary tree that maintains the Max Heap property.

Binary Heap is one possible data structure to model an efficient Priority Queue (PQ) Abstract Data Type (ADT). In a PQ, each element has a "priority" and an element with higher priority is served before an element with lower priority (ties are either simply resolved arbitrarily or broken with standard First-In First-Out (FIFO) rule as with a normal Queue). Try clicking ExtractMax() for a sample animation on extracting the max value of random Binary Heap above.

To focus the discussion scope, this visualization show a Binary **Max** Heap of integers where duplicates are allowed. See this for an easy conversion to Binary **Min** Heap. Generally, any other objects that can be compared can be stored in a Binary Max Heap, e.g., Binary Max Heap of floating points, etc.

Remarks: By default, we show e-Lecture Mode for first time (or non logged-in) visitor. If you are an NUS student and a repeat visitor, please login.

slide 1 (2%)



```
graph TD; 83 --- 35; 83 --- 74; 35 --- 14; 74 --- 15
```

1.0x 1x

[About](#) [Team](#) [Terms of use](#) [Privacy Policy](#)

Heap sort

- Heap sort es un algoritmo de ordenamiento basado en la estructura de un heap.
- La idea es construir un heap a partir de los elementos y luego ir eliminando el nodo raíz y reemplazándolo por el último elemento del heap.
- La complejidad de este algoritmo es $O(n \log n)$ en el peor caso.
- A pesar de tener la misma complejidad que quicksort y mergesort, heap sort es menos eficiente en la práctica.
- Sin embargo, heap sort es un algoritmo in-place y no necesita memoria adicional.

Map y Set

Set: TDA

- Un conjunto es una colección de elementos sin repetición.
- Tiene tres operaciones básicas:
 - **Insertar (add)**: Insertar un elemento.
 - **Eliminar (remove)**: Eliminar un elemento.
 - **Buscar (contains)**: Buscar un elemento.

42f6baw6u

JAVA ▼

RUN ▶

1

STDIN

Input for the program (Optional)

Output:

true
false
true
false

Map: TDA

- Un mapa es una colección de pares clave-valor.
- Tiene tres operaciones básicas:
 - **Insertar (put)**: Insertar un par clave-valor.
 - **Eliminar (remove)**: Eliminar un par clave-valor.
 - **Buscar (get)**: Buscar un valor asociado a una clave.
- Ejemplos de uso:
 - Diccionarios en Python.
 - Tablas de símbolos en compiladores.

42f6jz5pq

JAVA ▼

RUN ▶

1

STDIN

Input for the program (Optional)

Output:

5

HashTable

- Es una estructura de datos que al estar bien implementada permite que la inserción, remoción y búsqueda tengan una complejidad de tiempo constante
 - Se utiliza un vector o una matriz para almacenar los datos, tamaño debe ser conocido (existen otras formas de almacenar, pero dependen de la implementación a utilizar)
 - Se utiliza una función hash, la cual asocia un elemento de un cierto conjunto (string, números, archivos, etc.) a un número entero de tamaño conocido

HashTable: ejemplo

- Deseamos guardar las ocurrencias de cada palabra en un texto
 - día: 6
 - escuela: 13
 - gratuito: 1
 - árbol: 8
 - burro: 5
 - feudal: 2
- Si tuviéramos solo una palabra que comienza con cada letra podríamos construir una estructura que contenga un vector con 26 posiciones y una función hash de tipo:

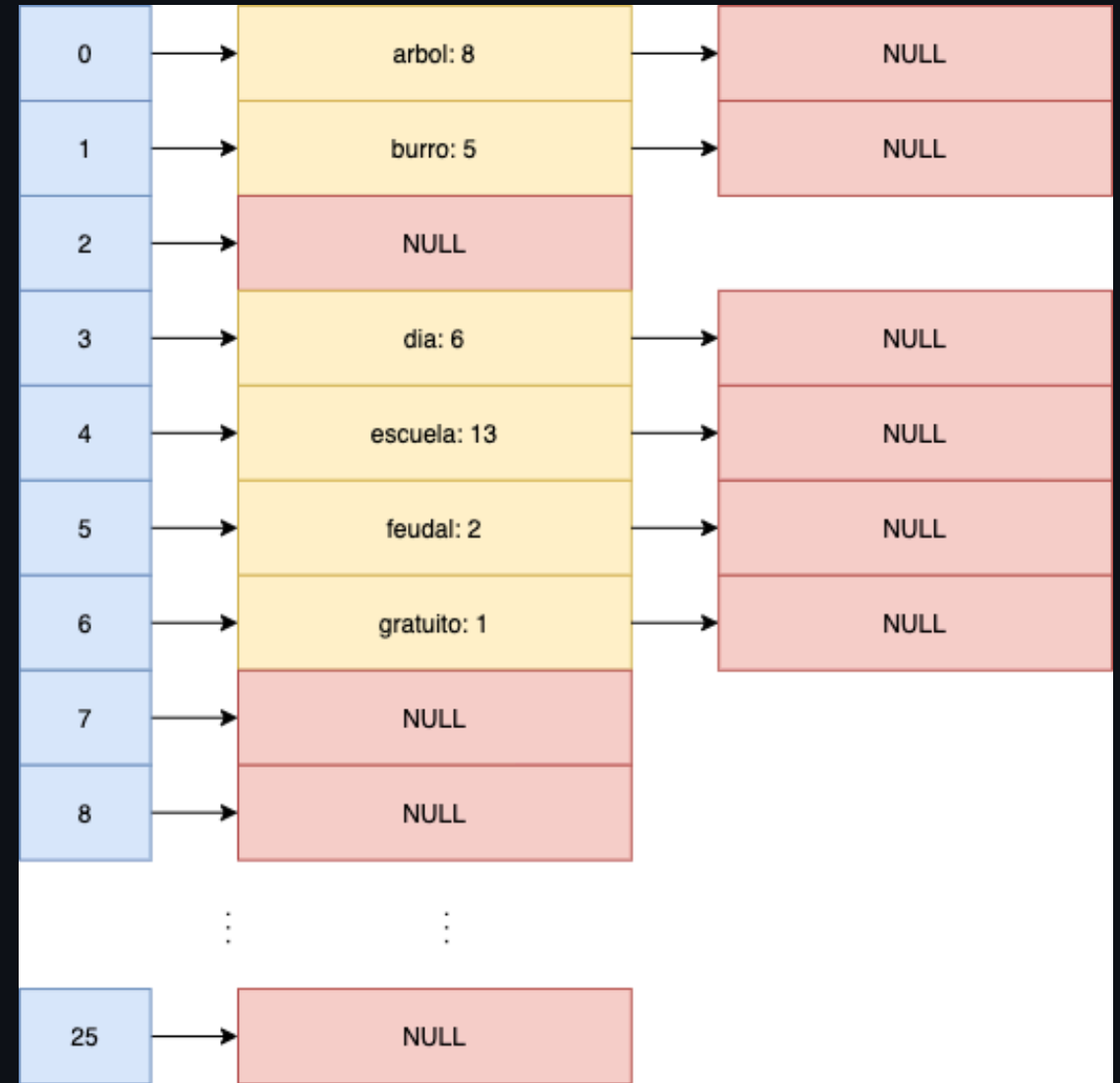
```
int hash(String s) {  
    return s.charAt(0) - 'a';  
}
```

- De esta forma, la palabra "día" se almacenaría en la posición 3 del vector

a	0	árbol: 8
b	1	burro: 5
c	2	
d	3	día: 6
e	4	escuela: 13
f	5	feudal: 2
g	6	gratuito: 1
h	7	
i	8	
⋮	⋮	⋮
z	25	

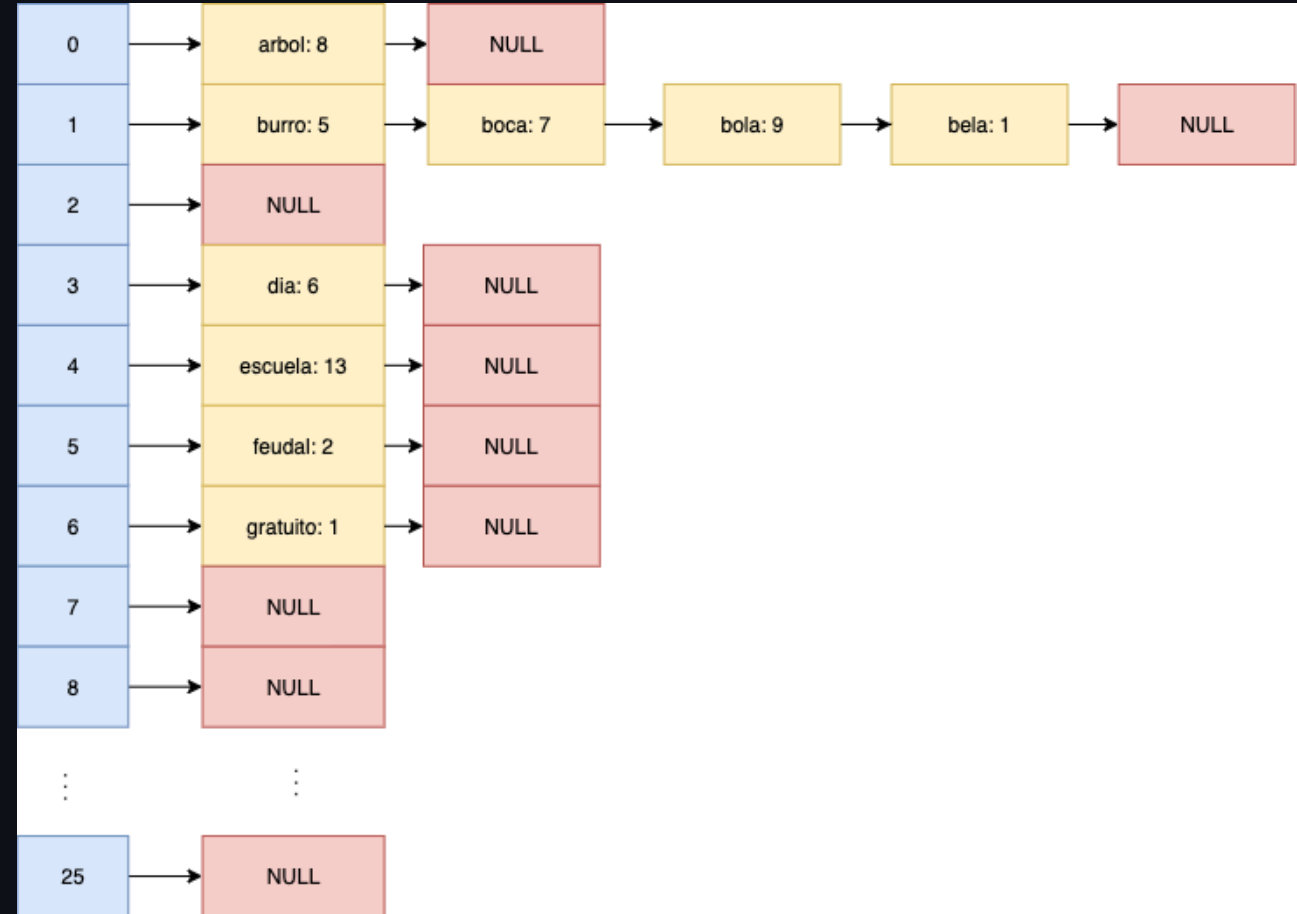
HashTable: encadenamiento

- Cómo mejoramos la tabla hash para que pueda almacenar más de una palabra que empiece con la misma letra?
- Podríamos hacer que cada posición del vector fuera una lista enlazada y en el caso de una **colisión** se almacenan en la lista de esa posición
 - colisión: que dos o más llaves, obtengan el mismo resultado en a función de hash
- Este tipo de tabla hash se le llama encadenamiento



HashTable: encadenamiento

- Si queremos insertar las palabras:
 - Boca: 7
 - Bola: 9
 - Bela: 1
- Nuestra estructura se comienza a asemejar a una lista enlazada común, donde el tiempo de insertar, buscar y remover comienza a tender a $O(N)$, por lo cual debemos seguir mejorando la estructura



HashTable: encadenamiento

- Como mejorar la dispersión para que la complejidad no se vuelva $O(n)$?
- Si la función hash utiliza toda la key, en vez de solo utilizar la primera letra se podrán conseguir mejores resultados

broca $\rightsquigarrow h(\text{"broca"}) = 3$

boca $\rightsquigarrow h(\text{"boca"}) = 0$

bolo $\rightsquigarrow h(\text{"bolo"}) = 5$

bela $\rightsquigarrow h(\text{"bela"}) = 2$

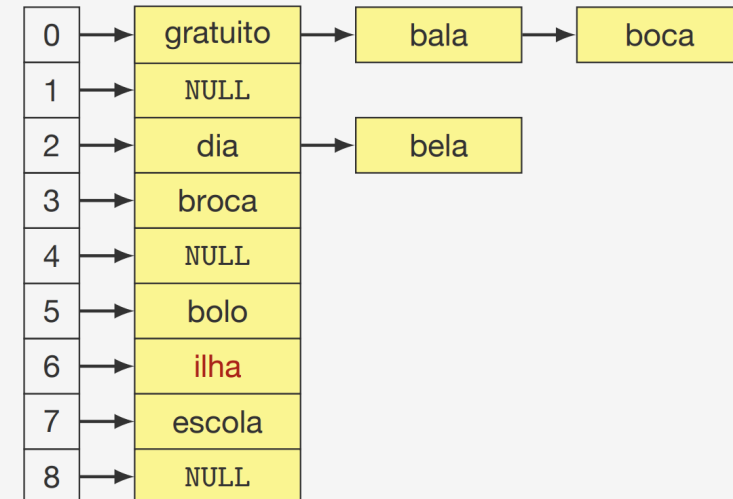
bala $\rightsquigarrow h(\text{"bala"}) = 0$

dia $\rightsquigarrow h(\text{"dia"}) = 2$

escola $\rightsquigarrow h(\text{"escola"}) = 7$

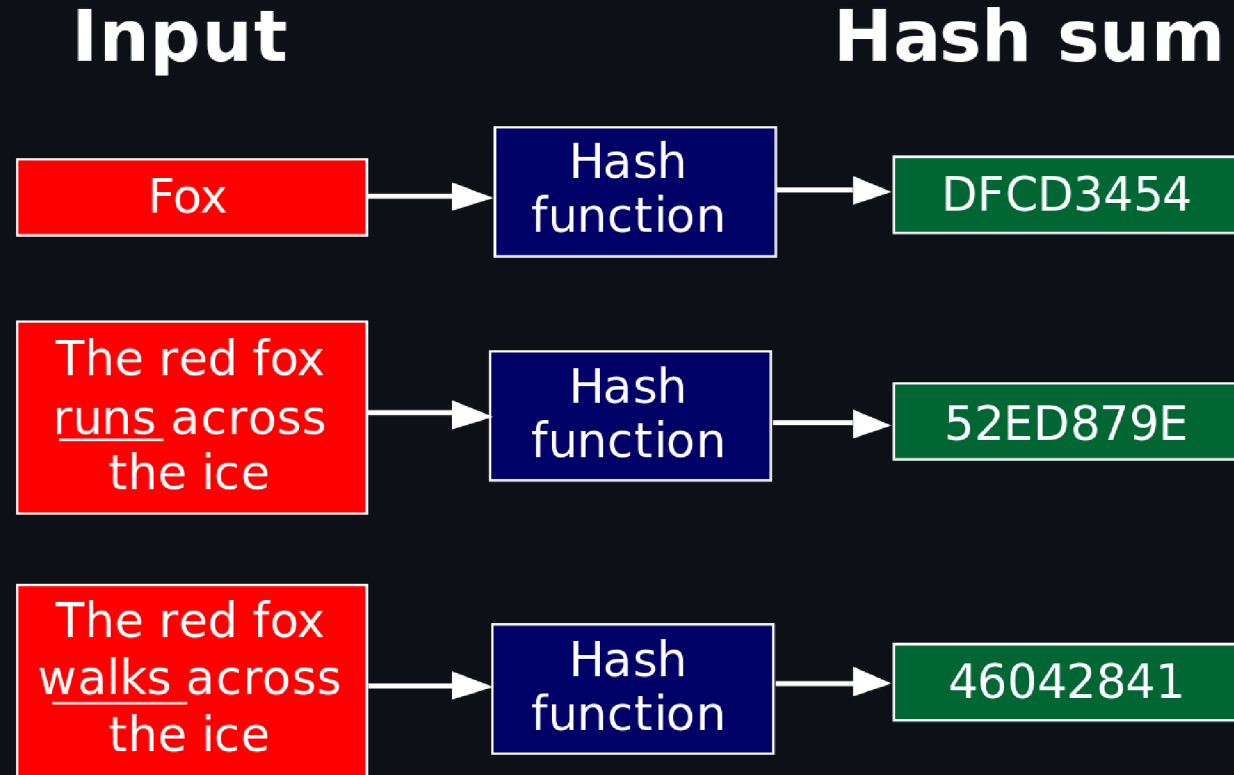
gratuito $\rightsquigarrow h(\text{"gratuito"}) = 0$

ilha $\rightsquigarrow h(\text{"ilha"}) = 6$



HashTable: propiedades

- La complejidad de tiempo de las operaciones de inserción, búsqueda y eliminación en una tabla hash dependen de la función hash y de la forma en que se manejan las colisiones
- En el caso de encadenamiento, la complejidad de tiempo de las operaciones es $O(1)$ en promedio, pero en el peor caso es $O(n)$ si se elige una mala función hash

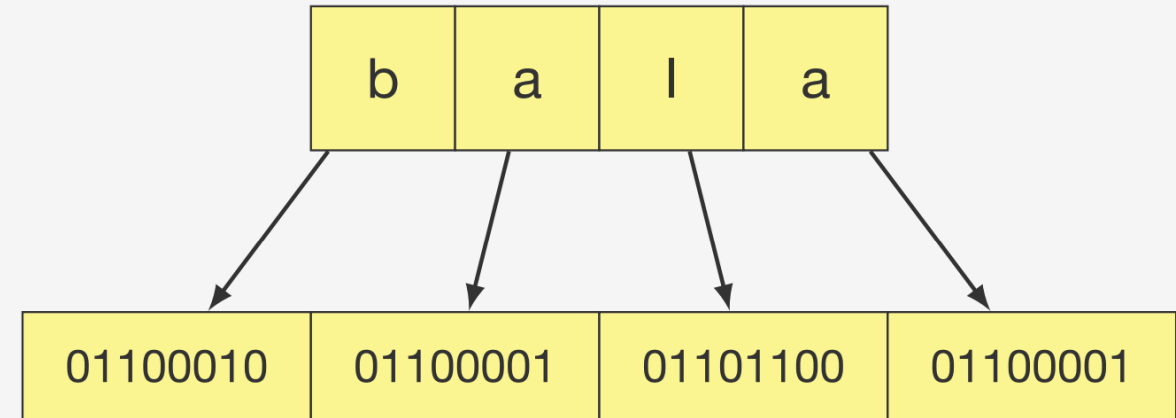


Función de hashing

- Una buena función de hashing hace que las llaves están dispersas en la tabla:
 - La probabilidad de una llave de tener un hash específico es (aproximadamente) $1/M$ (M es el tamaño de la tabla)
 - o sea, esperamos que cada lista tenga n/M elementos (n es el número de elementos)
- Hashing perfecto: si conocemos todas llaves a priori, es posible encontrar una función de hashing inyectiva:
 - eso significa que no existen colisiones
 - encontrar esa función puede ser muy difícil

Función de hashing

- La función hash presupone que las llaves son **números enteros**
- Que pasa si no lo es?
 - La llave es reinterpretada como un número entero
- Con este método, donde la llave es reinterpretada como una secuencia de bits, la palabra “bala” se transforma en el número 1.650.551.905



Función de hashing: método de la división

- Obtenemos el resto de la división por el tamaño M del arreglo de almacenamiento

$$h(x) = x \bmod M$$

Ejemplo:

$$h(\text{"bala"}) = 1.650.551.905 \bmod 1783 = 277$$

- Este método es simple y rápido, pero puede ser ineficiente si M no es un número primo ya que las colisiones pueden ser más frecuentes
- Si M es un número primo, la probabilidad de colisión es menor

Función de hashing: método de la división

- Cómo podemos calcular el número x que representa el string “bala” ?

$$x = 'b' \cdot 256^3 + 'a' \cdot 256^2 + 'l' \cdot 256 + 'a' \cdot 256^0$$

- Este cálculo puede ser reescrito:

$$x = (((('b' \cdot 256) + 'a') \cdot 256 + 'l') \cdot 256 + 'a')$$

- El problema es que x puede ser un número tan grande que puede superar fácilmente el máximo de un int, pero el cálculo puede ser reducido utilizando álgebra modular reescribiendo la fórmula $x \bmod M$:

$$x = (((('b' \bmod M) \cdot 256) + ('a' \bmod M)) \cdot 256 + ('l' \bmod M)) \cdot 256 + ('a' \bmod M)$$

HashTable: implementación con encadenamiento

```
public class HashTable {  
    private static final int SIZE = 1783;  
    private LinkedList<Node>[] table;  
  
    private class Node {  
        String key;  
        String value;  
  
        public Node(String key, String value) {  
            this.key = key;  
            this.value = value;  
        }  
    }  
  
    private int hash(String key) {  
        // Division method  
        int hash = 0;  
        for (int i = 0; i < key.length(); i++) {  
            hash = (256 * hash + key.charAt(i)) % SIZE;  
        }  
        return hash;  
    }  
    ...  
}
```


HashTable: implementación con encadenamiento

```
public class HashTable {  
    ...  
    public void put(String key, String value) {  
        int index = hash(key);  
        if (table[index] == null) {  
            table[index] = new LinkedList<>();  
        }  
        table[index].add(new Node(key, value));  
    }  
  
    public String get(String key) {  
        int index = hash(key);  
        if (table[index] == null) {  
            return null;  
        }  
        for (Node node : table[index]) {  
            if (node.key.equals(key)) {  
                return node.value;  
            }  
        }  
        return null;  
    }  
    ...  
}
```

HashTable: implementación con encadenamiento

```
public class HashTable {  
    ...  
    public void remove(String key) {  
        int index = hash(key);  
        if (table[index] == null) {  
            return;  
        }  
        for (Node node : table[index]) {  
            if (node.key.equals(key)) {  
                table[index].remove(node);  
                return;  
            }  
        }  
    }  
}
```

HashTable: Linear probing

- Existe una alternativa a la implementación de una tabla hashing encadenada
- Linear probing:
 - los datos son guardados en el mismo vector
 - las colisiones son colocadas en la siguiente posición libre de la tabla
- Características
 - Evita recorrer punteros al no utilizar listas enlazadas
 - Si la tabla se llena, es necesario crear una mayor
 - cambiar la función hash
 - recalcular todos los hash
 - La remoción se vuelve un poco más complicada
- Inserción:
 - Obtenemos la posición con la función hashing
 - Si el espacio está libre, guardamos el dato
 - Si no está libre, buscamos cual es la siguiente posición libre después de la posición obtenida de la función hashing, al encontrarla guardamos el dato en esa posición

broca \rightsquigarrow $h(\text{"broca"}) = 3$

boca \rightsquigarrow $h(\text{"boca"}) = 0$

bolo \rightsquigarrow $h(\text{"bolo"}) = 5$


bela \rightsquigarrow $h(\text{"bela"}) = 2$

bala \rightsquigarrow $h(\text{"bala"}) = 0$

dia \rightsquigarrow $h(\text{"dia"}) = 2$

escola \rightsquigarrow $h(\text{"escola"}) = 7$

gratuito \rightsquigarrow $h(\text{"gratuito"}) = 0$

0			0	boca
1			1	
2			2	bela
3			3	broca
4			4	
5			5	bolo
6			6	
7			7	

broca \rightsquigarrow $h(\text{"broca"}) = \cancel{3}$

boca \rightsquigarrow $h(\text{"boca"}) = \cancel{0}$

bolo \rightsquigarrow $h(\text{"bolo"}) = \cancel{5}$




bela \rightsquigarrow $h(\text{"bela"}) = \cancel{2}$

bala \rightsquigarrow $h(\text{"bala"}) = 0$

dia \rightsquigarrow $h(\text{"dia"}) = 2$

escola \rightsquigarrow $h(\text{"escola"}) = 7$

gratuito \rightsquigarrow $h(\text{"gratuito"}) = 0$

0	boca		0	boca	
1			1	bala	
2	bela		2	bela	
3	broca		3	broca	
4			4		
5	bolo		5	bolo	
6			6		
7			7		

broca $\rightsquigarrow h(\text{"broca"}) = \cancel{3}$

boca $\rightsquigarrow h(\text{"boca"}) = \cancel{0}$

bolo $\rightsquigarrow h(\text{"bolo"}) = \cancel{5}$




bela $\rightsquigarrow h(\text{"bela"}) = \cancel{2}$

bala $\rightsquigarrow h(\text{"bala"}) = \cancel{0}$

dia $\rightsquigarrow h(\text{"dia"}) = 2$

escola $\rightsquigarrow h(\text{"escola"}) = 7$

gratuito $\rightsquigarrow h(\text{"gratuito"}) = 0$

0	boca		0	boca	  
1			1	bala	
2	bela		2	bela	
3	broca		3	broca	
4			4	dia	
5	bolo		5	bolo	
6			6		
7			7		

HashTable: Linear probing

- Como hacer la búsqueda con linear probing?
- Es necesario simular la inserción:
 - Calcular la función de hashing
 - Recorrer la tabla en secuencia buscando por la llave
 - Si la llave es encontrada, se retornan los items que pertenecen a la llave
 - Si se encuentra un espacio vacío (la llave no existe), se devuelve NULL

