

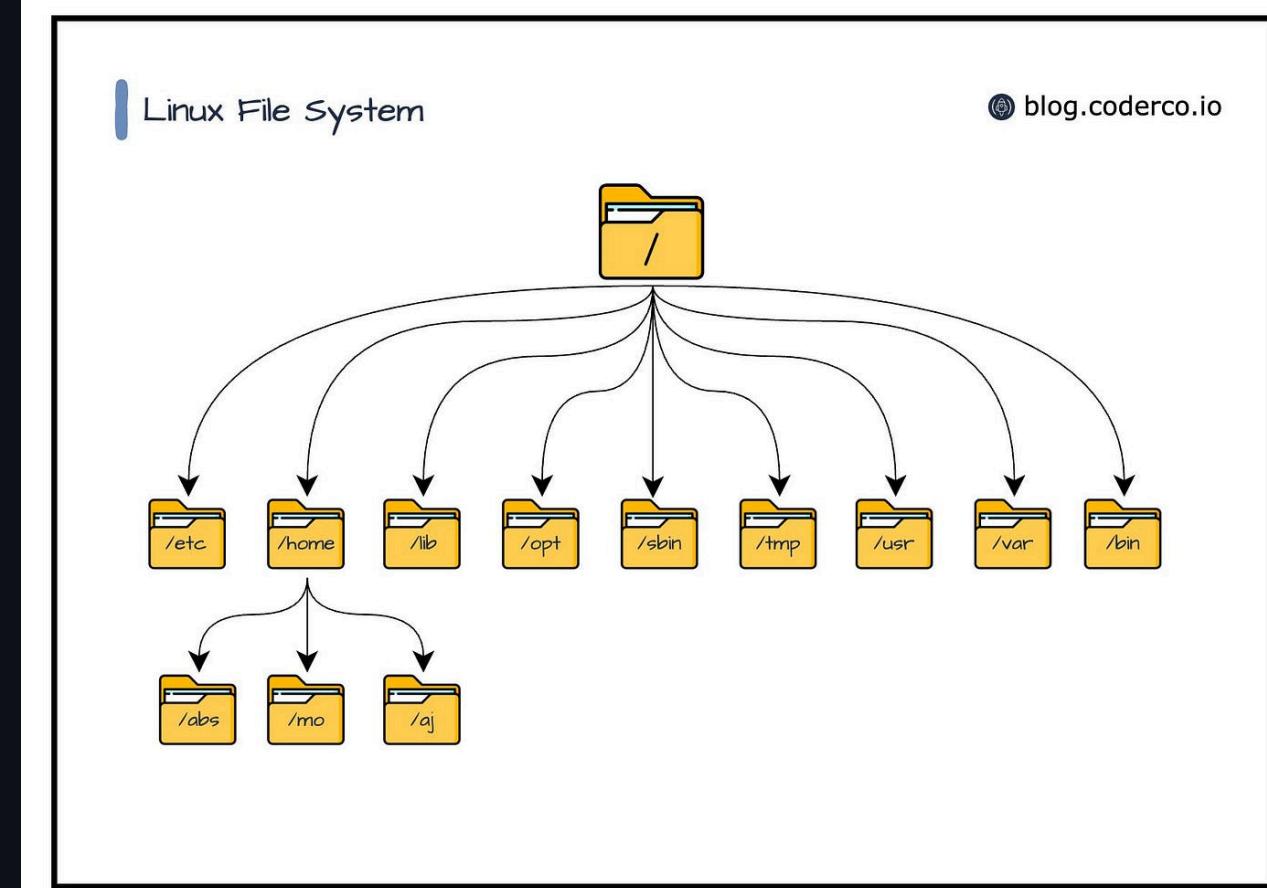
# Estructura de datos y algoritmos

Rodrigo Alvarez

[rodrigo.alvarez2@mail\\_udp.cl](mailto:rodrigo.alvarez2@mail_udp.cl)

# Árboles

- Son una estructura de datos no lineal, llamadas estructuras jerárquicas
- Son las estructuras no lineales más utilizadas para resolver problemas de software como:
  - Árboles de directorios
  - Toma de decisiones
  - Organización de información en bases de datos
    - etc

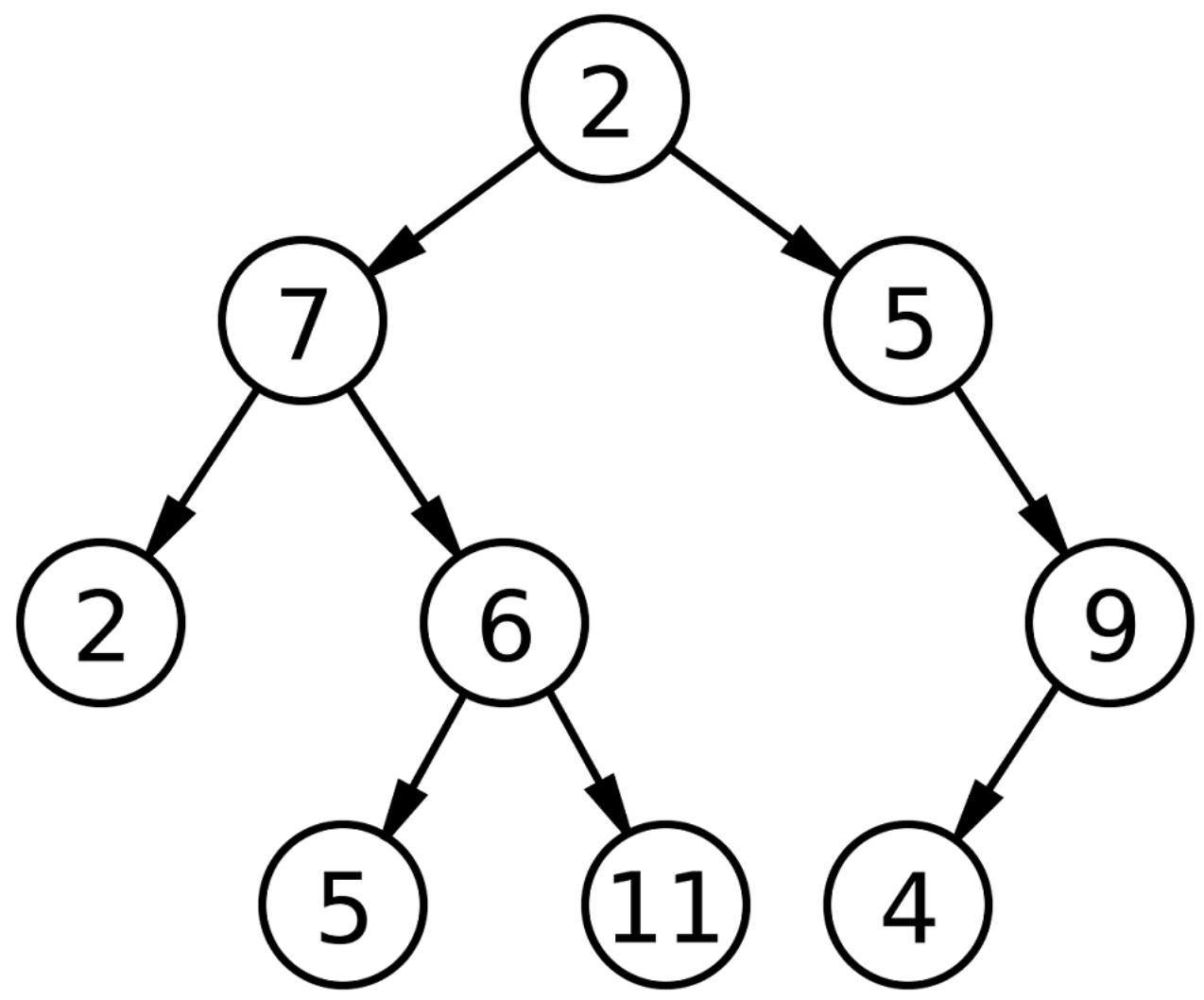


# Árboles: definiciones

- Un Árbol consiste en un nodo **r** denominado nodo raíz y una lista o conjunto de subárboles ( $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ )
- Se definen como nodos hijos de **r** a los nodos raíces de los subárboles  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$
- Si **b** es un nodo hijo de **a** entonces **a** es el nodo padre de **b**
- Un nodo puede tener cero o más hijos, y uno o ningún parente. El único nodo que no tiene parente es el nodo raíz del árbol

# Árboles: definiciones

- **Subárbol:** Un árbol que es parte de otro árbol
- **Profundidad de un nodo:** Número de aristas que hay desde la raíz hasta el nodo
- **Altura de un nodo:** Número de aristas que hay desde el nodo hasta el nodo más lejano



## Árbol binario

- Es un árbol en el que cada nodo tiene a lo más dos hijos
- Cada nodo tiene un nodo padre, excepto la raíz

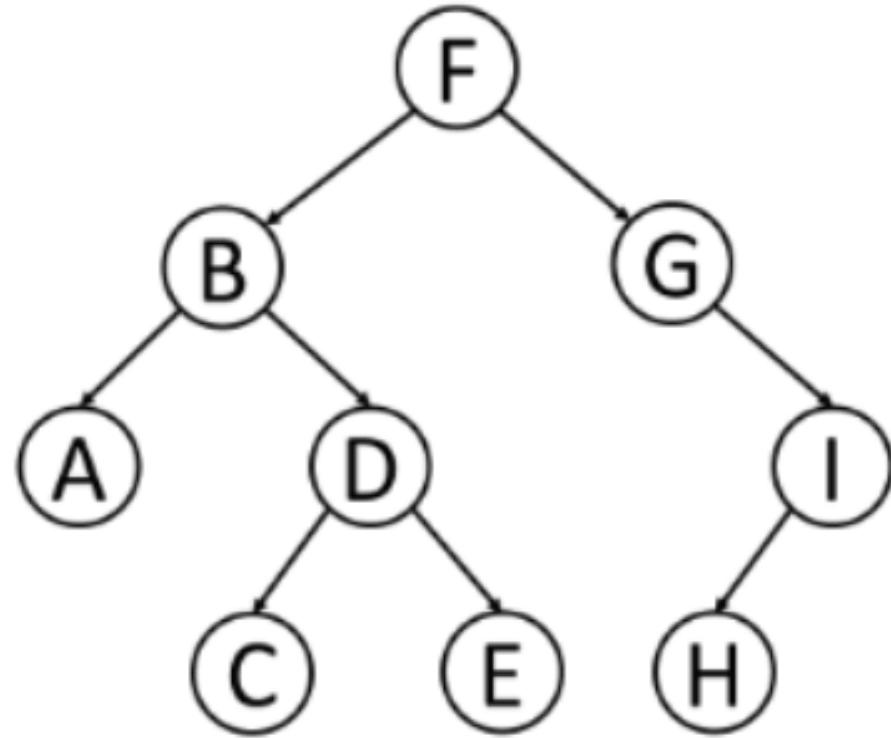
# Nodo

```
class Node {  
    int data;  
    Node left, right;  
    Node(int item) {  
        data = item;  
        left = right = null;  
    }  
}
```

# Recorridos (tree traversals)

## Recorrido Inorder

En este recorrido, de manera **recursiva**, primero se visita el **subárbol izquierdo**, luego la **raíz** y finalmente el **subárbol derecho**

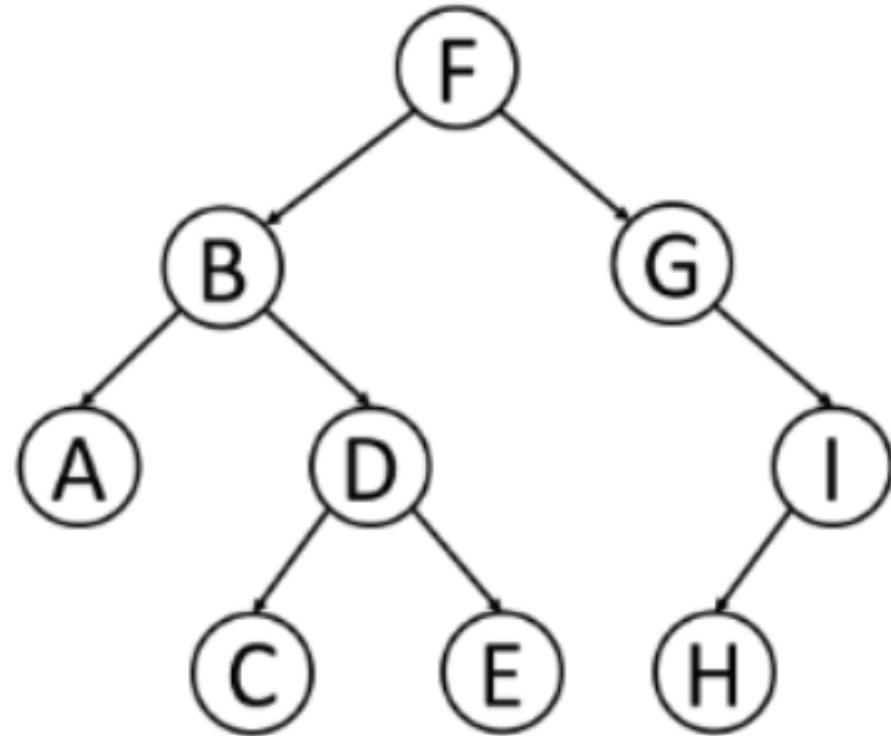


Inorder:



## Recorrido Inorder

En este recorrido primero se visita el subárbol izquierdo, luego la raíz y finalmente el subárbol derecho



Inorder:

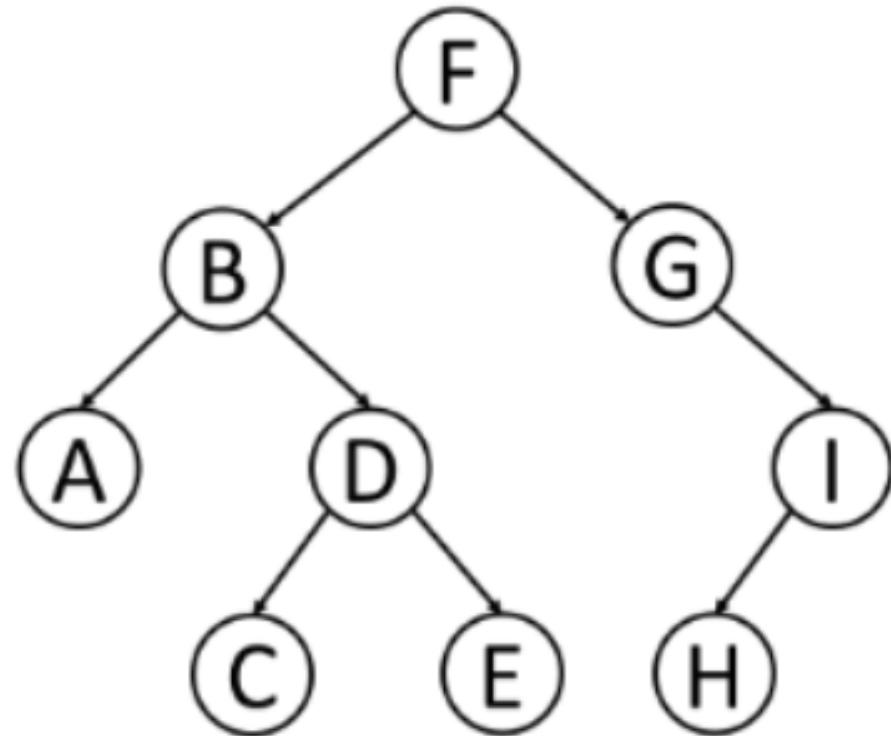


# Recorrido Inorder

```
void inorder(Node node) {  
    if (node == null) return;  
    inorder(node.left);  
    System.out.print(node.data + " ");  
    inorder(node.right);  
}
```

## Recorrido Preorder

En este recorrido primero se visita la raíz, luego el subárbol izquierdo y finalmente el subárbol derecho

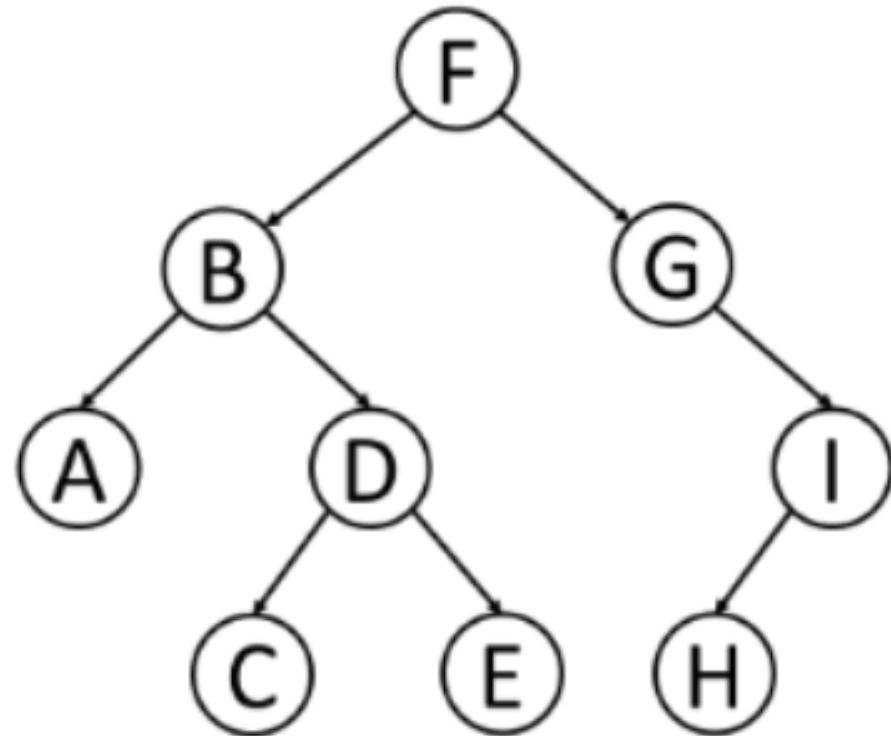


Preorder:



## Recorrido Preorder

En este recorrido primero se visita la raíz, luego el subárbol izquierdo y finalmente el subárbol derecho



Preorder:

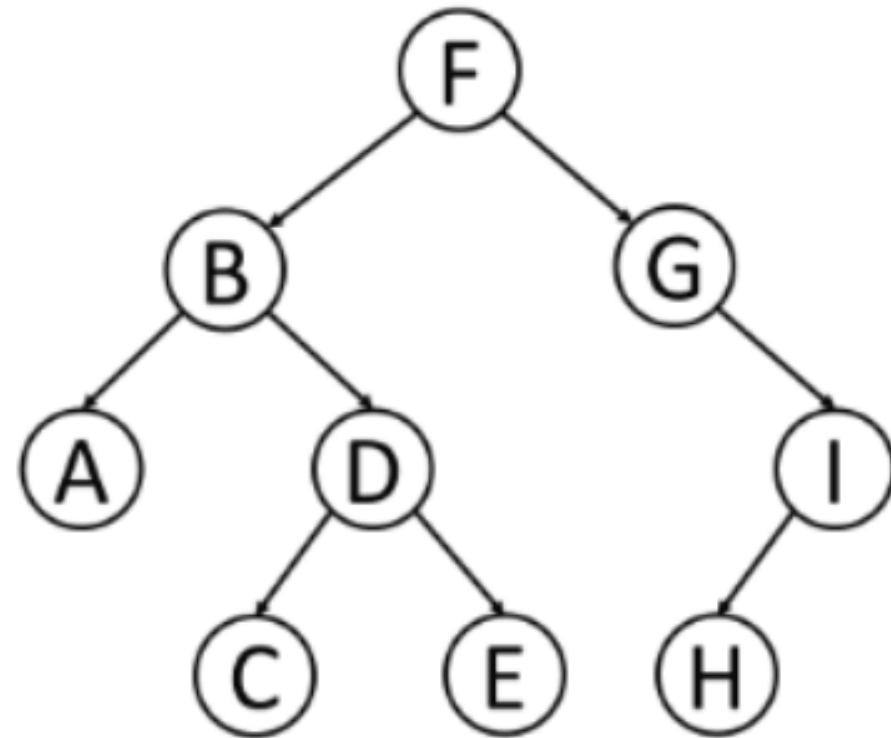


# Recorrido Preorder

```
void preorder(Node node) {  
    if (node == null) return;  
    System.out.print(node.data + " ");  
    preorder(node.left);  
    preorder(node.right);  
}
```

## Recorrido Postorder

En este recorrido primero se visita el subárbol izquierdo, luego el subárbol derecho y finalmente la raíz

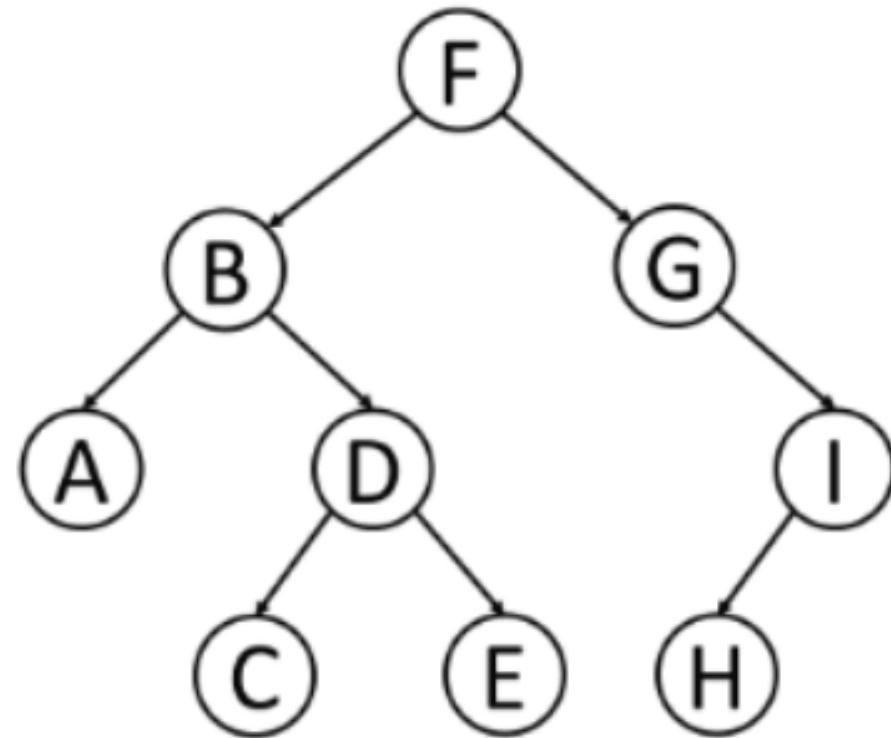


Postorder:



## Recorrido Postorder

En este recorrido primero se visita el subárbol izquierdo, luego el subárbol derecho y finalmente la raíz



Postorder:

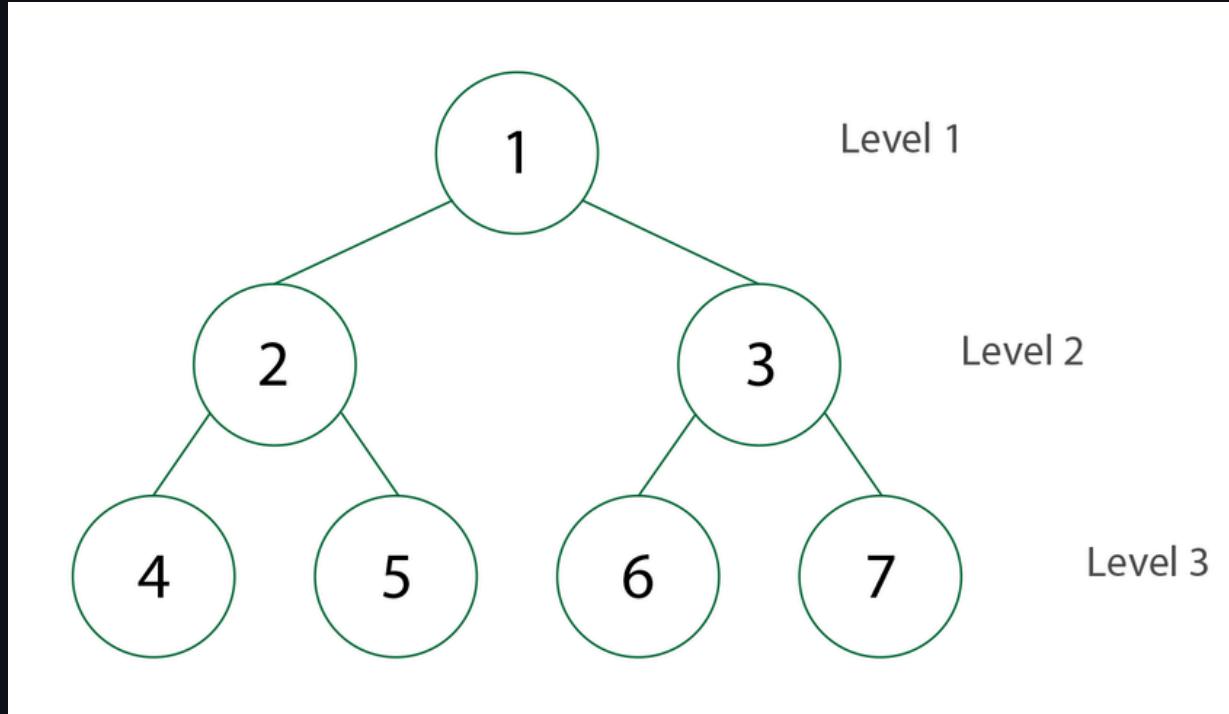


# Recorrido Postorder

```
void postorder(Node node) {  
    if (node == null) return;  
    postorder(node.left);  
    postorder(node.right);  
    System.out.print(node.data + " ");  
}
```

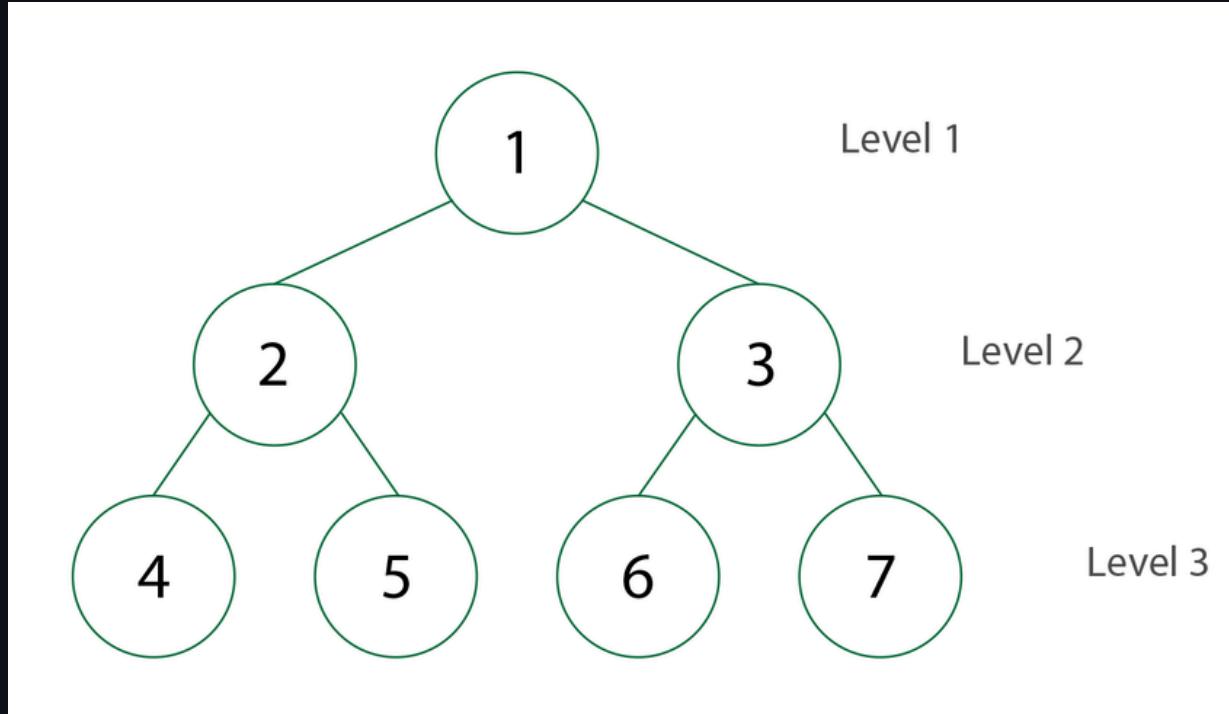
## Recorrido por niveles

En este recorrido se recorre el árbol por niveles



## Recorrido por niveles

En este recorrido se recorre el árbol por niveles



# Recorrido por niveles

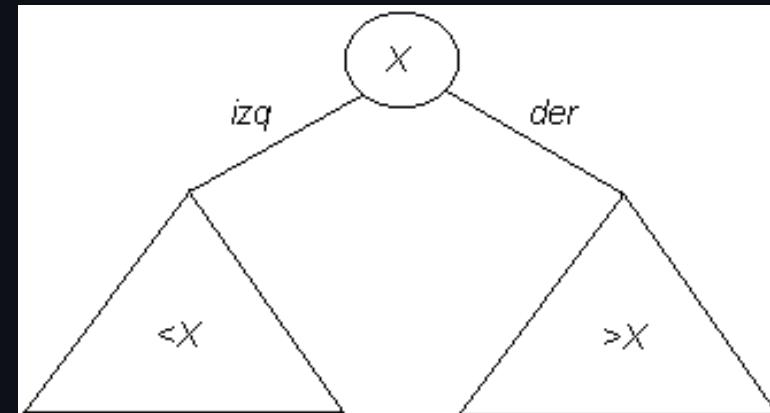
```
void byLevelTraversal(Node root) {  
    if (root == null) return;  
    Queue<Node> q = new LinkedList<>();  
    q.add(root);  
    while (!q.isEmpty()) {  
        Node node = q.poll();  
        System.out.print(node.data + " ");  
        if (node.left != null) q.add(node.left);  
        if (node.right != null) q.add(node.right);  
    }  
}
```

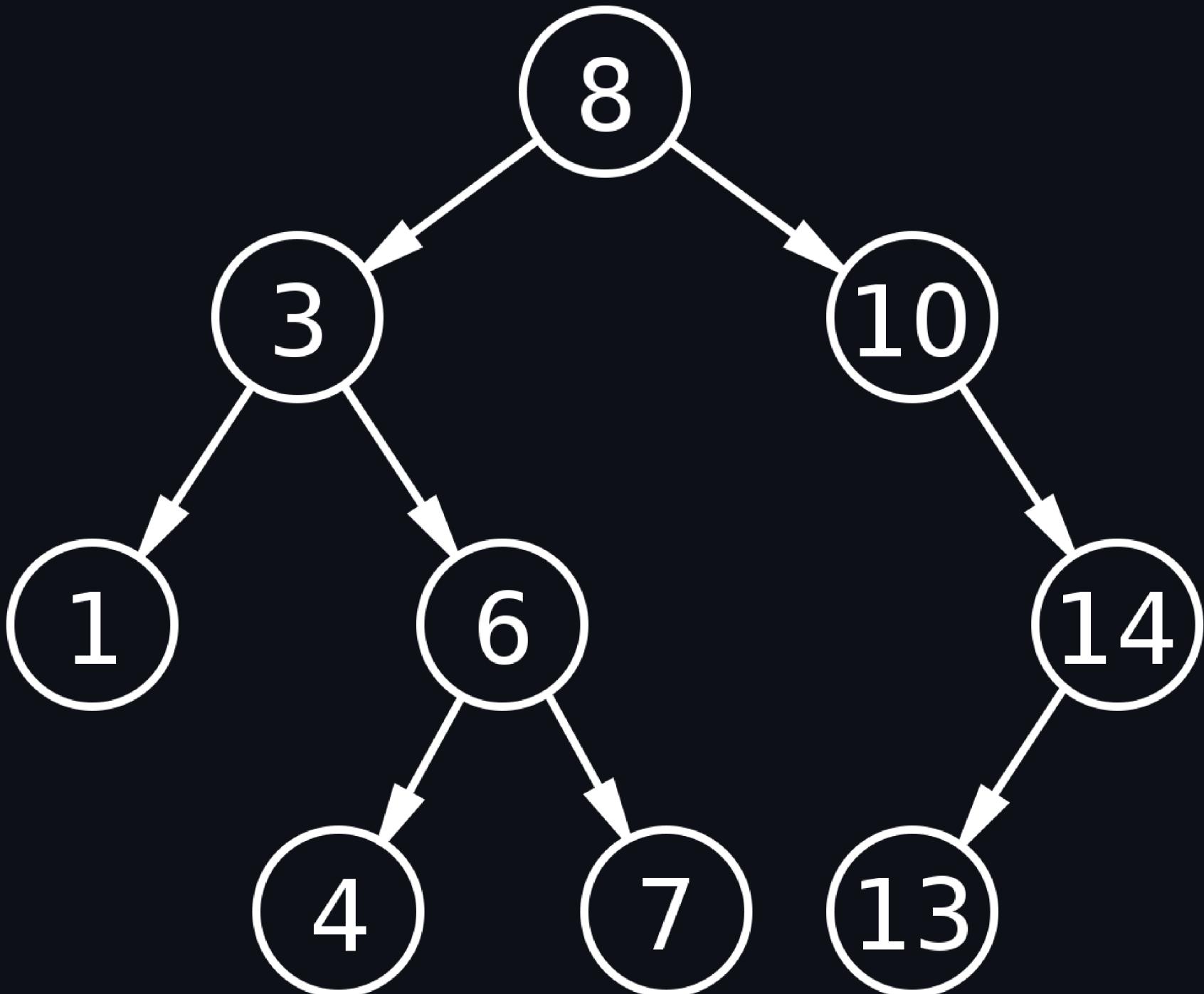
# Árbol binario de búsqueda (BST)

Sea  $A$  un árbol binario de raíz  $R$  e hijos izquierdo y derecho (posiblemente nulos)  $H_I$  y  $H_D$ , respectivamente.

Decimos que  $A$  es un árbol binario de búsqueda (BST en inglés) si y solo si se satisfacen las dos condiciones al mismo tiempo:

- $H_I$  es un BST con todos los elementos menores que  $R \vee H_I$  es un árbol vacío
- $H_D$  es un BST con todos los elementos mayores que  $R \vee H_D$  es un árbol vacío



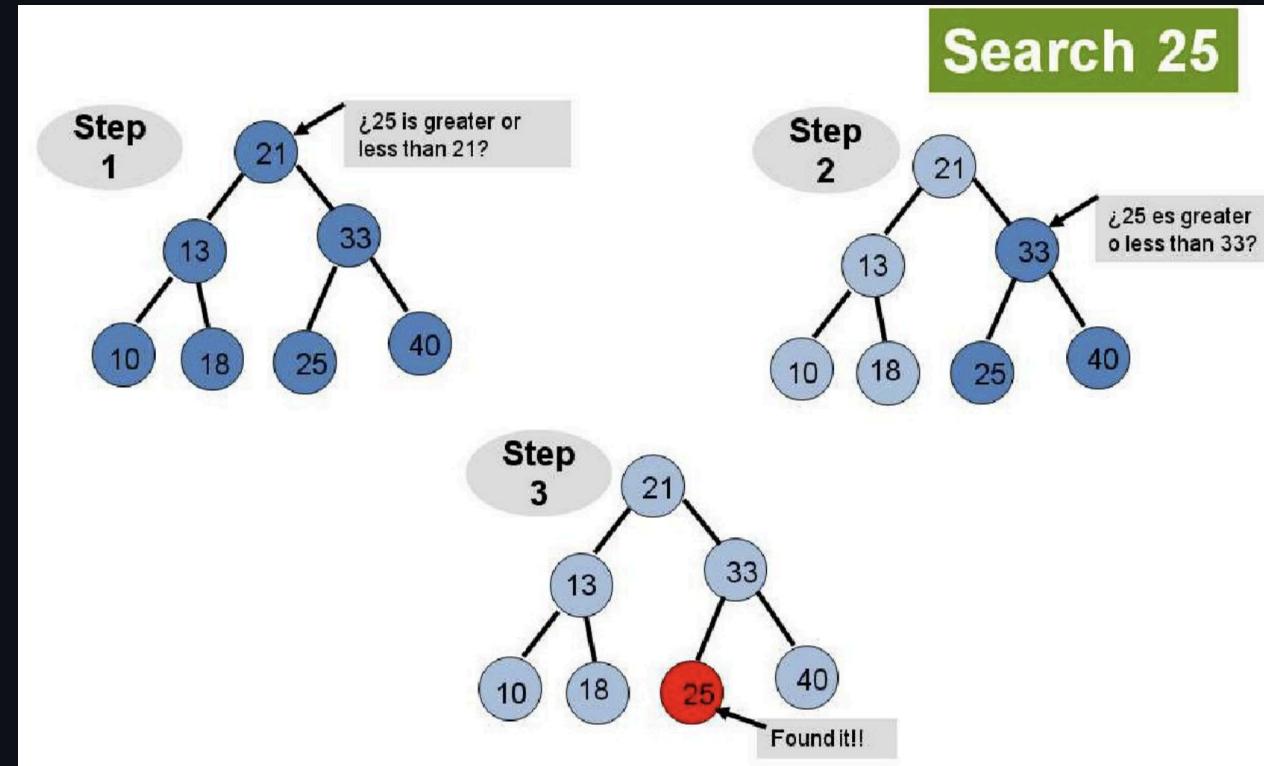


## Árbol binario de búsqueda (BST): operaciones

- **Búsqueda:** Buscar un elemento en el árbol
- **Inserción:** Insertar un elemento en el árbol
- **Eliminación:** Eliminar un elemento del árbol

# Árboles binarios de búsqueda: búsqueda

- Se recorre el árbol desde la raíz
- Si el nodo actual no es el nodo buscado, se decide si hay que buscar por la derecha o por la izquierda
- El algoritmo para, cuando se encuentra el nodo con el valor buscado o al llegar a un árbol vacío



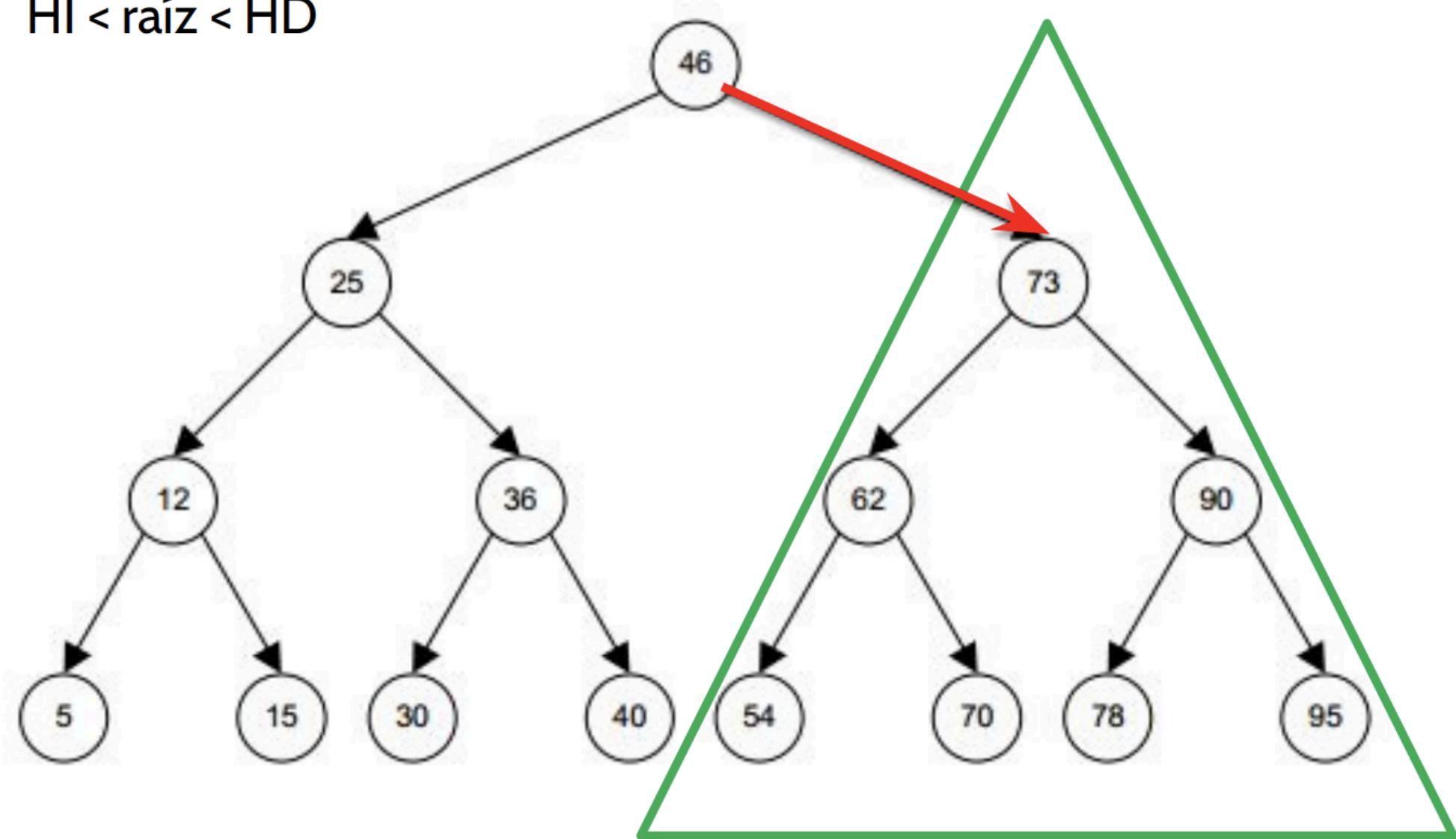
# Árboles binarios de búsqueda: búsqueda

Recursivamente desde la raíz:

- Si el nodo que se busca es menor que el nodo actual, se busca en el subárbol izquierdo
- Si el nodo que se busca es mayor que el nodo actual, se busca en el subárbol derecho
- Si el nodo que se busca es igual al nodo actual, se ha encontrado el nodo
- Si el nodo que se busca no existe, se ha llegado a un nodo nulo

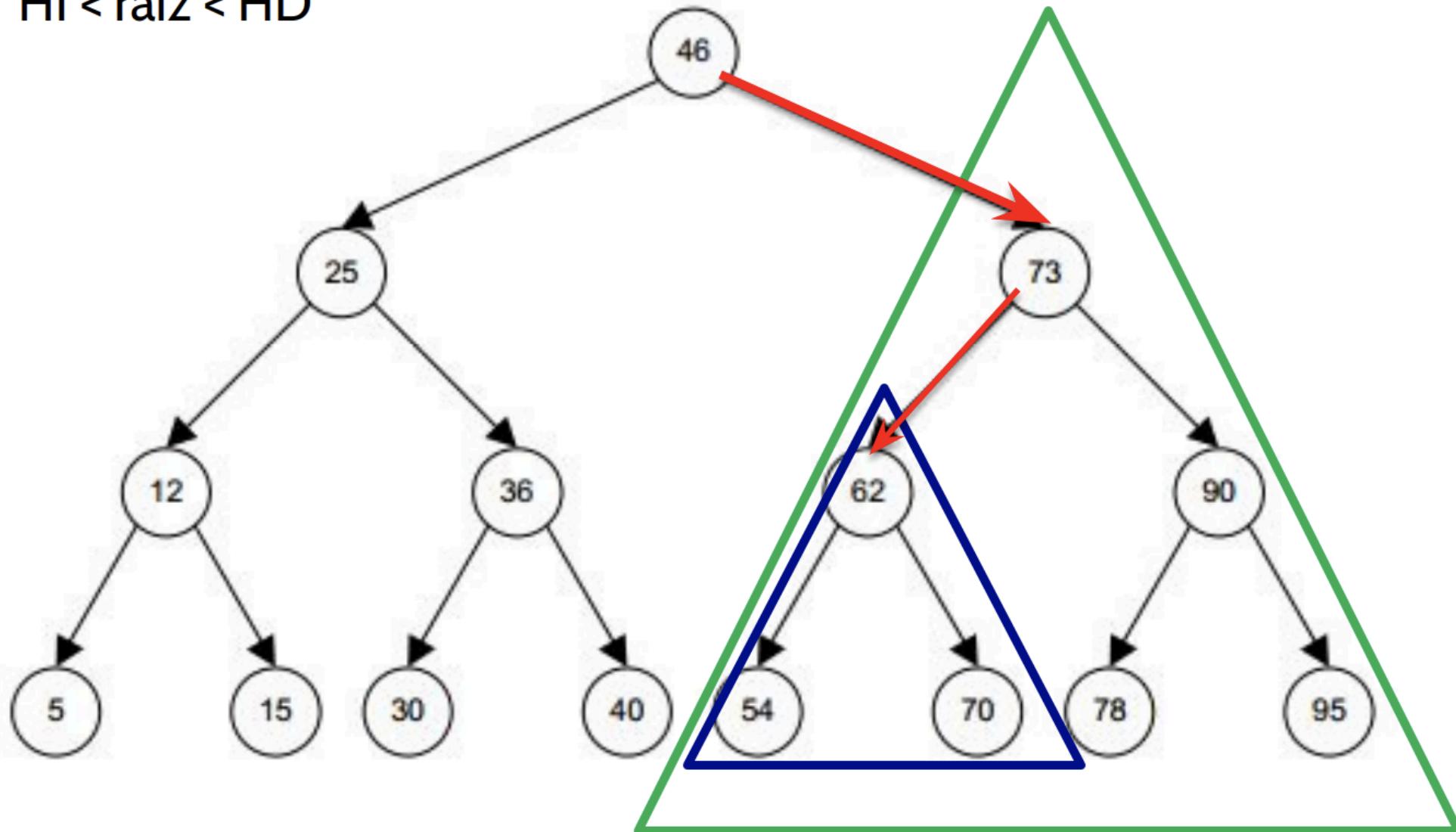
# Solución: Buscar 70

HI < raíz < HD



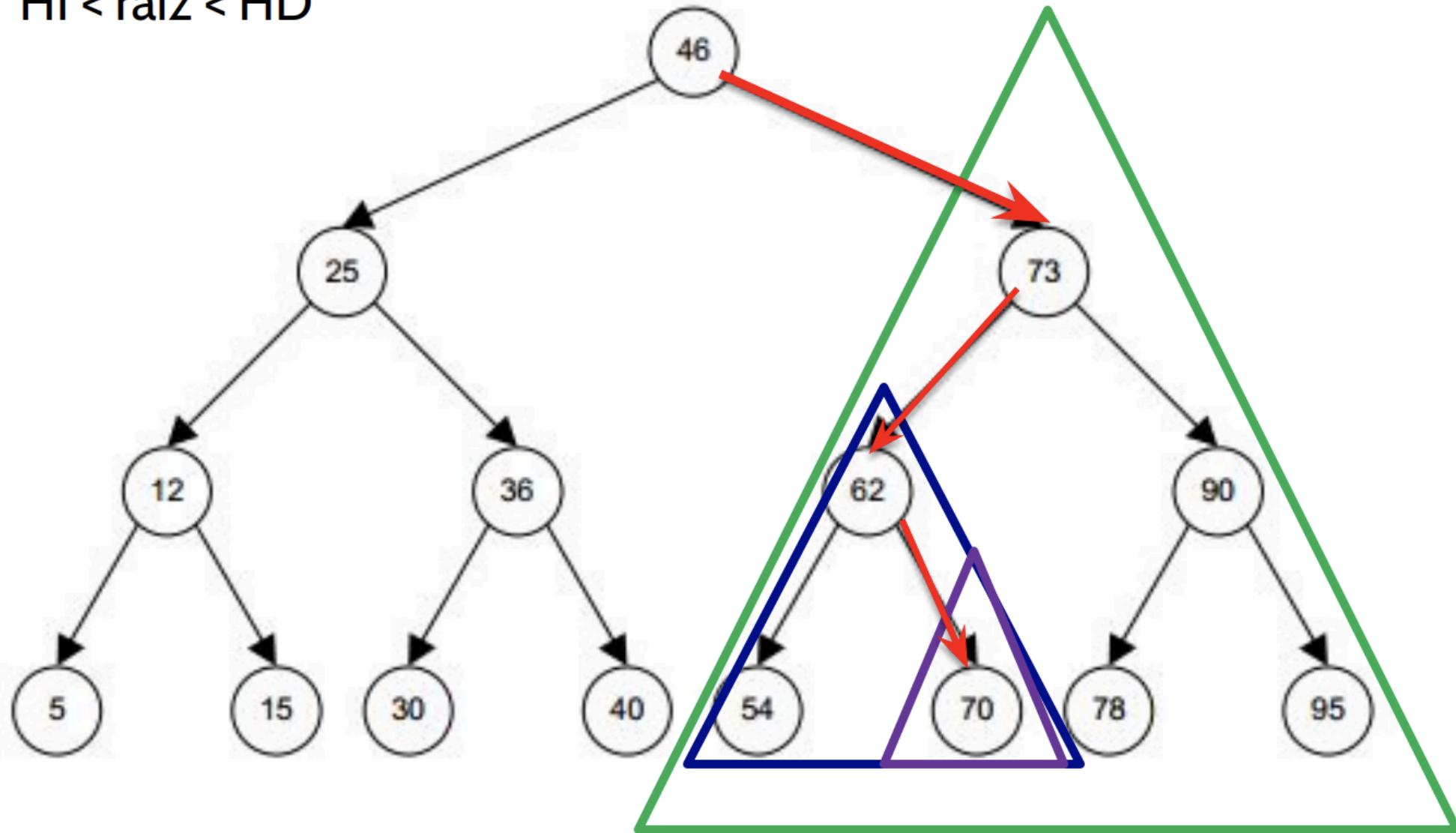
# Solución: Buscar 70

HI < raíz < HD



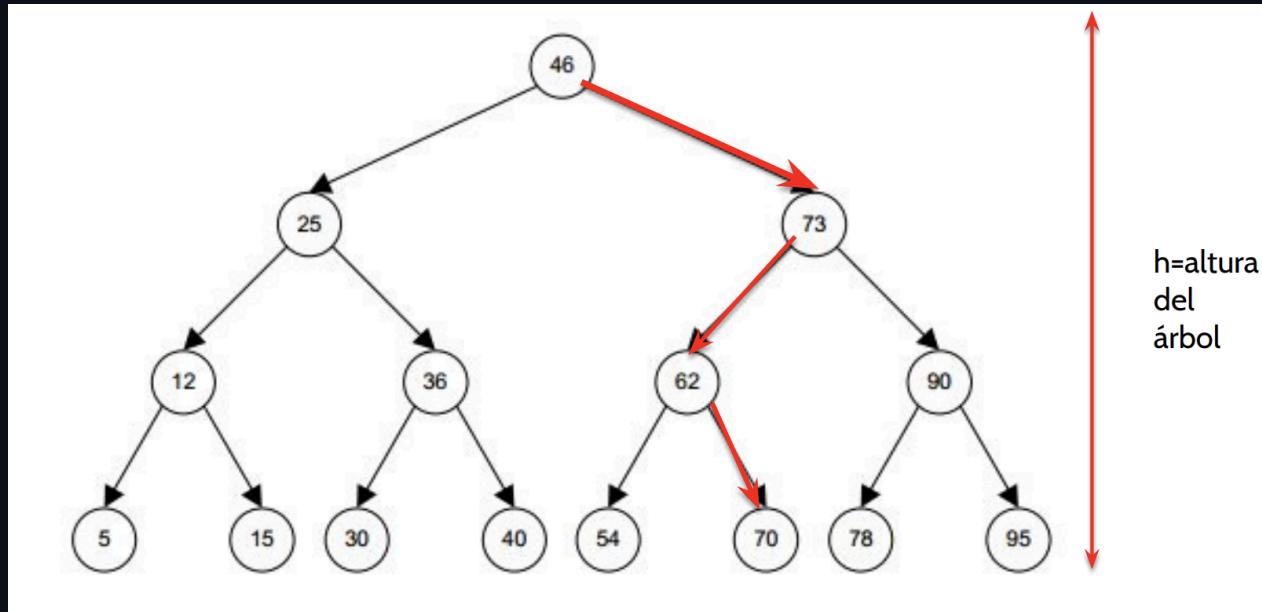
# Solución: Buscar 70

HI < raíz < HD



# Árboles binarios de búsqueda: búsqueda

- En el peor caso, en la búsqueda se realizan  $h$  comparaciones, donde  $h$  es la altura del árbol
- Por lo tanto, la complejidad será  $O(h)$  donde  $h$  es la altura del árbol

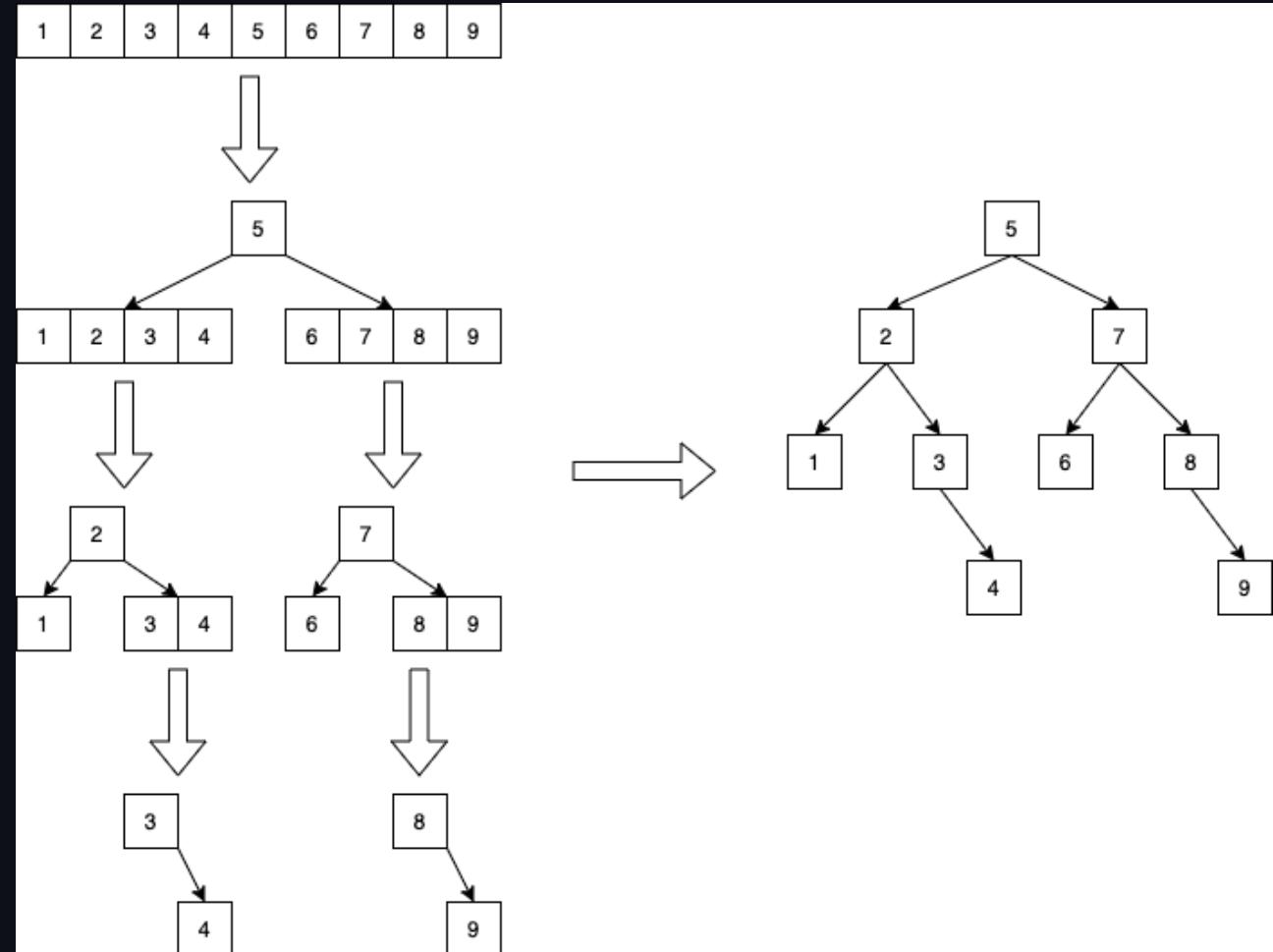


# Árboles binarios de búsqueda: búsqueda

```
Node search(Node root, int value) {  
    if (root == null || root.data == value) return root;  
    if (root.data < value) return search(root.right, value);  
    else return search(root.left, value);  
}
```

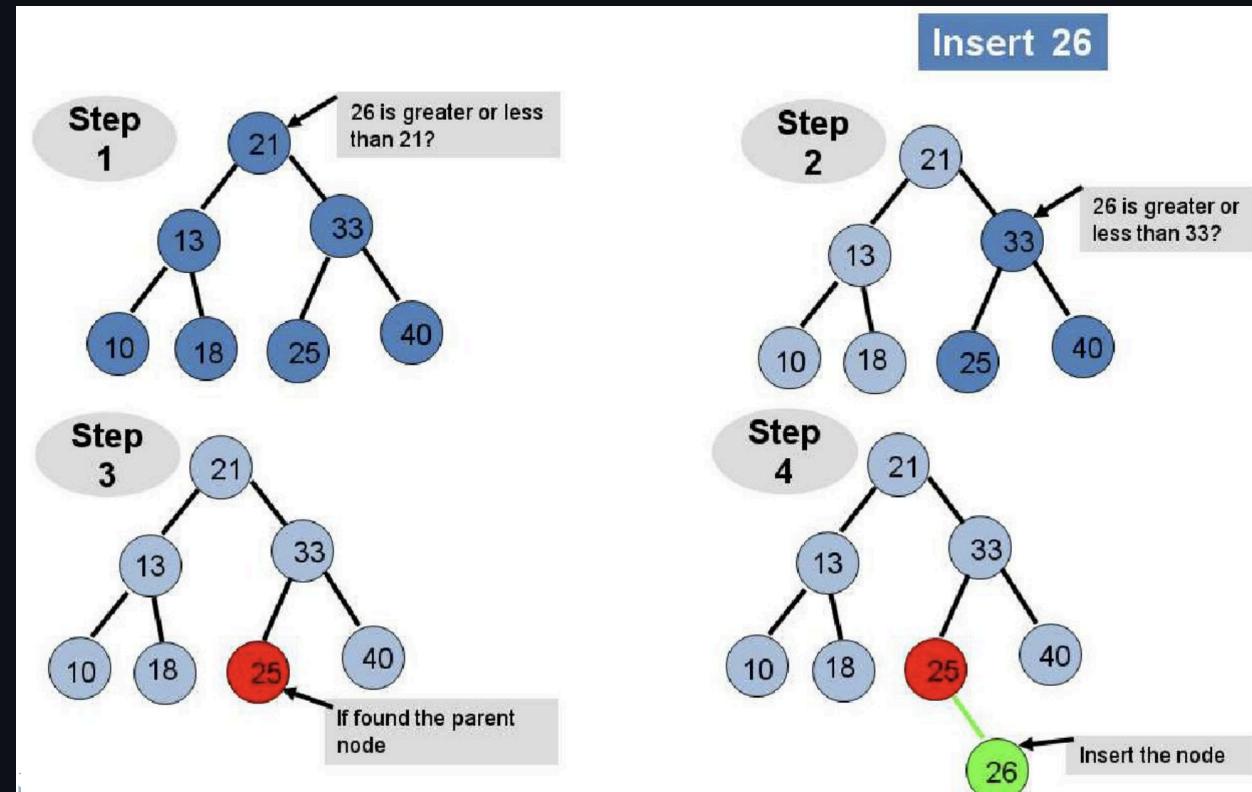
# Búsqueda binaria a BST

- Existe una relación entre la búsqueda binaria y los árboles binarios de búsqueda
- La búsqueda en un BST sigue el mismo principio que la búsqueda binaria
- Un BST puede ser visto como una versión más flexible de la búsqueda binaria



# Árboles binarios de búsqueda: inserción

- Los nodos se insertan siempre como nodos hoja
- La inserción en un árbol binario de búsqueda es similar a la búsqueda
- La diferencia radica en que si se llega a un nodo nulo, se inserta el nodo en ese lugar



# Árboles binarios de búsqueda: inserción

Recursivamente desde la raíz:

- Si el nodo que se busca insertar es menor que el nodo actual, se busca en el subárbol izquierdo
- Si el nodo que se busca insertar es mayor que el nodo actual, se busca en el subárbol derecho
- Si el nodo que se busca insertar es igual al nodo actual, se ha encontrado el nodo y no se inserta (no se permiten duplicados)
- Si el nodo actual es nulo, se inserta el nodo en ese lugar

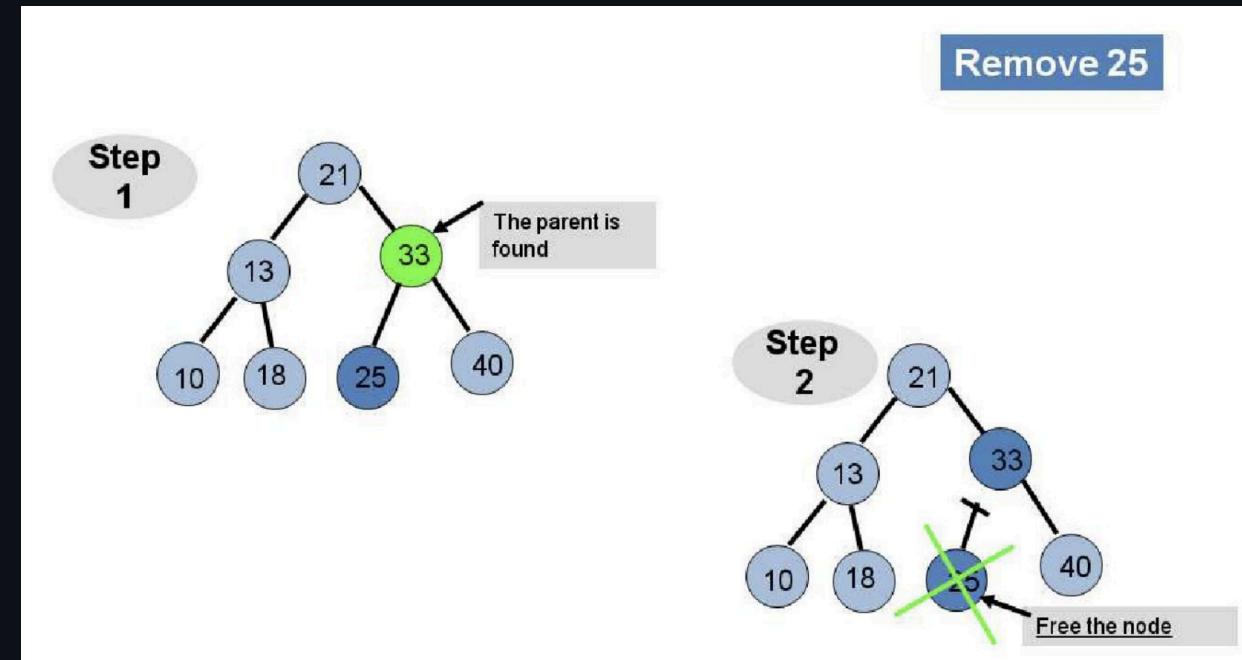
```
Node insert(Node root, int value) {  
    if (root == null) return new Node(value);  
    if (root.data < value) root.right = insert(root.right, value);  
    else if (root.data > value) root.left = insert(root.left, value);  
    return root;  
}
```

# Árboles binarios de búsqueda: eliminación

- La eliminación en un árbol binario de búsqueda es más compleja que la búsqueda e inserción
- Se deben considerar tres casos:
  - Si el nodo a eliminar es una hoja:
    - Se elimina el nodo
  - Si el nodo a eliminar tiene un solo hijo:
    - Se elimina el nodo y se reemplaza por su hijo
  - Si el nodo a eliminar tiene dos hijos:
    - Se reemplaza el nodo por el nodo más pequeño del subárbol derecho o el nodo más grande del subárbol izquierdo (sucesor o predecesor)
    - Se elimina el nodo

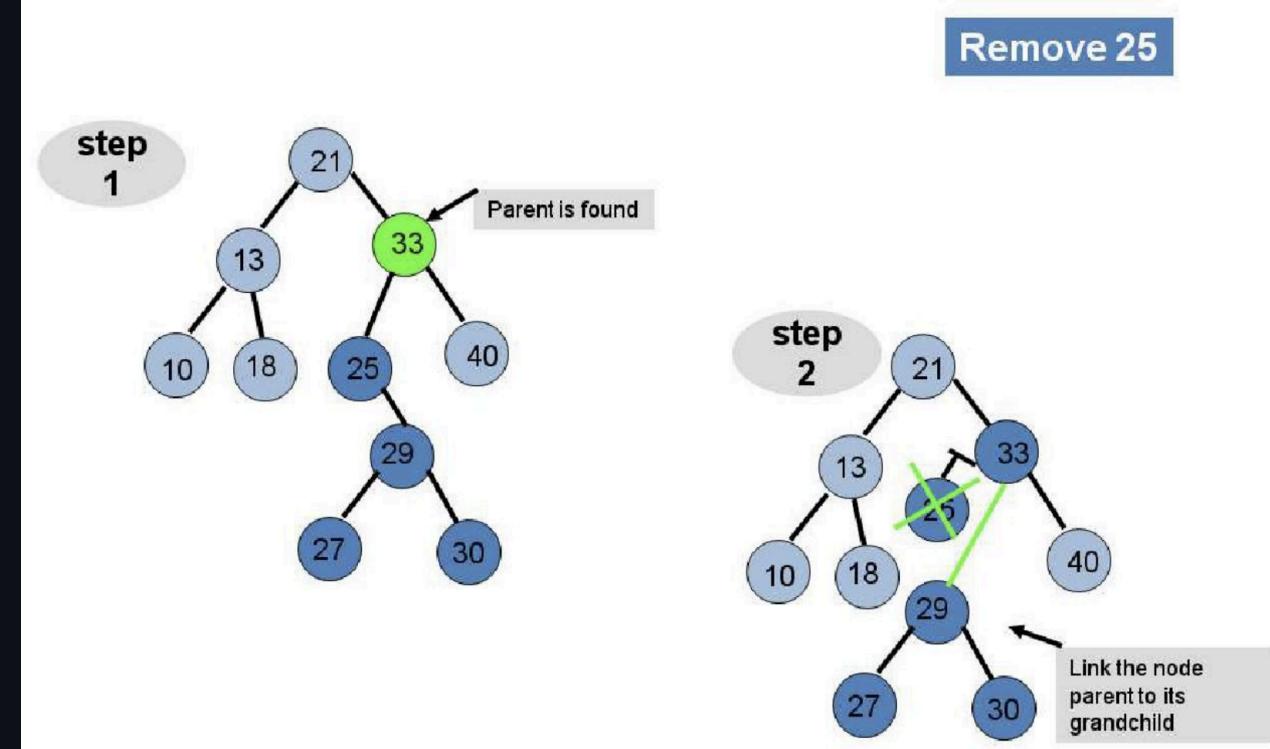
# Árboles binarios de búsqueda: eliminación

Caso 1: Nodo hoja



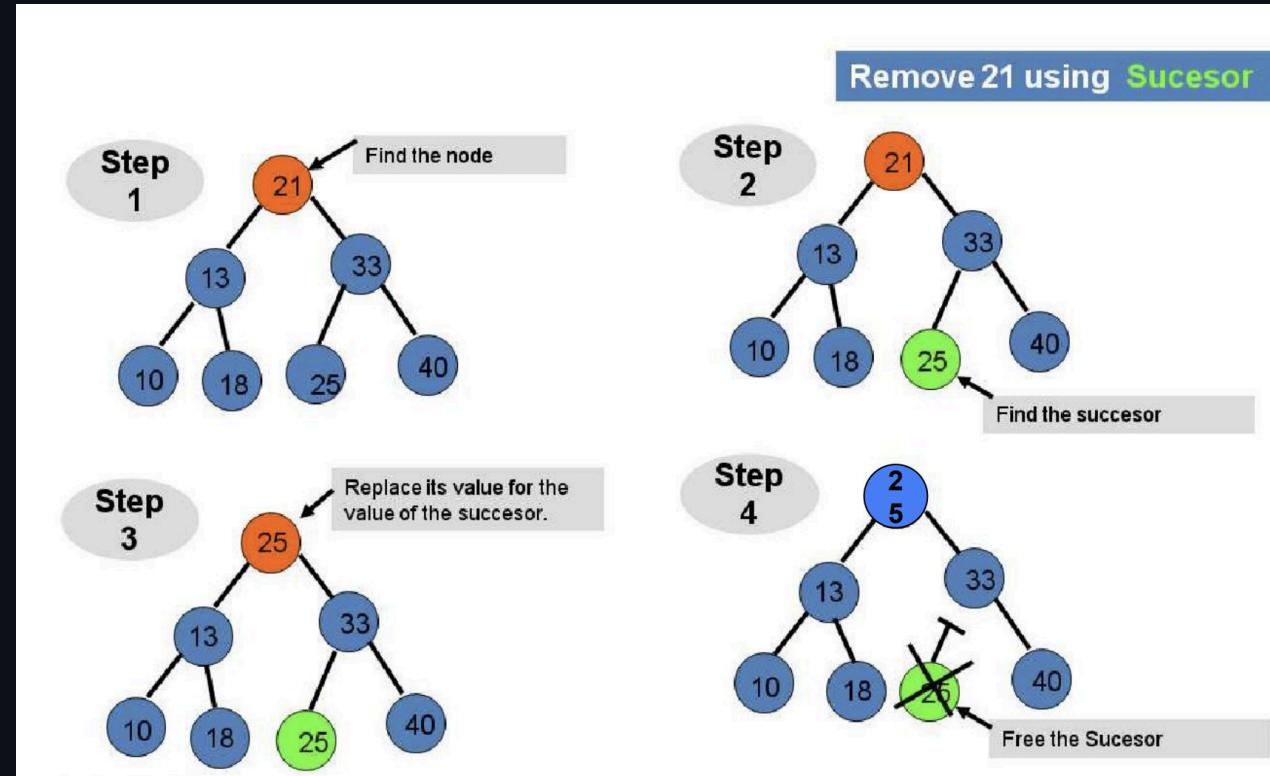
# Árboles binarios de búsqueda: eliminación

Caso 2: Nodo con un hijo



# Árboles binarios de búsqueda: eliminación

Caso 3: Nodo con dos hijos



# Árboles binarios de búsqueda: eliminación

```
Node remove(Node root, int value) {
    if (root == null) return root;
    if (root.data < value) root.right = remove(root.right, value);
    else if (root.data > value) root.left = remove(root.left, value);
    else {
        if (root.left == null) return root.right;
        else if (root.right == null) return root.left;
        root.data = minValue(root.right);
        root.right = remove(root.right, root.data);
    }
    return root;
}
```

<https://visualgo.net/en/bst>

The screenshot shows the VisualGo.NET interface for a Binary Search Tree (BST). The top navigation bar includes the logo, language dropdown (en), and links for "BINARY SEARCH TREE" and "AVL TREE". On the right, there are "e-Lecture Mode" and "LOGIN" buttons. The main area displays a tree structure with the statistics "N=13, h=5". A context menu is open on the left, listing operations: "Toggle BST Layout", "Create", "Search(v)", "Insert(v)", "Remove(v)", "Predec-/Successor(v)", "Select(k)", and "Traverse(root)". The bottom navigation bar features zoom controls (1.0x, 1x), and links for "About", "Team", "Terms of use", and "Privacy Policy".

N=13, h=5

Toggle BST Layout

Create

Search(v)

Insert(v)

Remove(v)

Predec-/Successor(v)

Select(k)

Traverse(root)

1.0x ■ 1x

About Team Terms of use Privacy Policy

# Árboles binarios balanceados

- Un árbol binario de búsqueda puede degenerar en una lista enlazada si se insertan los elementos en orden
- Para evitar esto, se pueden utilizar árboles binarios balanceados
- Un árbol binario balanceado es un árbol binario de búsqueda en el que la altura de los subárboles izquierdo y derecho de cada nodo difiere en no más de 1
- Los árboles binarios balanceados permiten realizar operaciones en tiempo logarítmico
- Existen estructuras de datos que implementan árboles binarios autobalanceados, como los árboles AVL y los árboles red-black

## AVL

- Un árbol AVL es un tipo especial de árbol binario ideado por los matemáticos soviéticos Adelson-Velskii y Landis.
- Fue el primer árbol de búsqueda binario auto-balanceable que se ideó.
- En un árbol AVL, la diferencia de alturas entre los subárboles izquierdo y derecho de cualquier nodo es de a lo más 1.

- implementación de un BST
- MIT Binary trees
  - parte 1
  - parte 2
- árboles binarios
- árboles binarios de búsqueda (bst)