

Estructura de datos y algoritmos

Rodrigo Alvarez

rodrigo.alvarez2@mail.udp.cl

Análisis de complejidad temporal

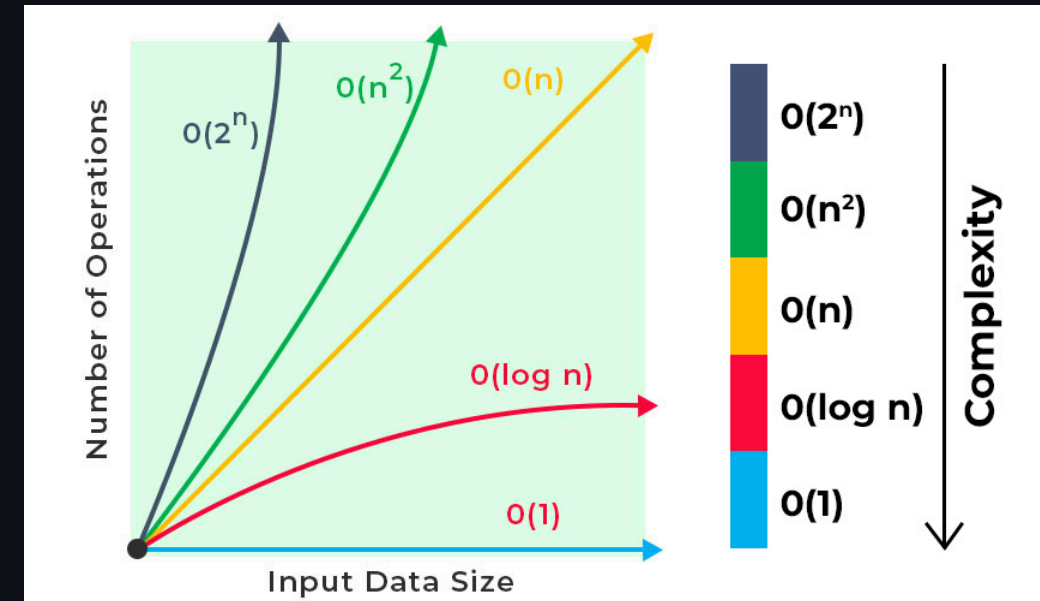
El análisis de complejidad temporal es una técnica que permite determinar cuánto tiempo tardará un algoritmo en ejecutarse en función del tamaño de los datos de entrada.

- Empírica o experimental: Consiste en medir el tiempo de ejecución en una computadora específica para una entrada dada.
- Teórica: Se expresa en términos de la función matemática que representa el tiempo que tarda el algoritmo en función del tamaño de la entrada.

Análisis asintótico

El análisis asintótico es una técnica de análisis que permite describir la complejidad espacial o temporal de un algoritmo mediante el orden de crecimiento.

El orden de crecimiento se caracteriza mediante una función matemática, esta es la que describe la relación entre tiempo y tamaño de la entrada, o uso de memoria y tamaño de la entrada.



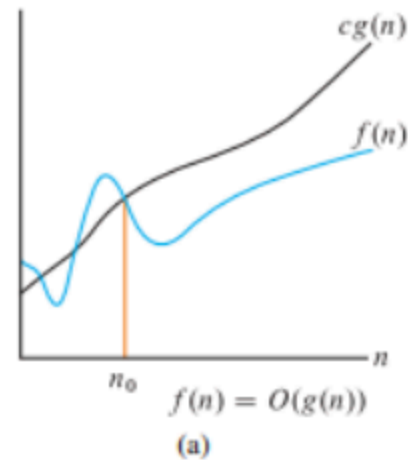
■ ¿Por qué quiero algoritmos que sean eficientes asintóticamente?

	Tamaño n					
Complejidad Temporal	10	20	30	40	50	60
n	.00001 segundos	.00002 segundos	.00003 segundos	.00004 segundos	.00005 segundos	.00006 segundos
n^2	.0001 segundos	.0004 segundos	.0009 segundos	.0016 segundos	.0025 segundos	.0036 segundos
n^3	.001 segundos	.008 segundos	.027 segundos	.064 segundos	.125 segundos	.216 segundos
n^5	.1 segundos	3.2 segundos	24.3 segundos	1.7 minutos	5.2 minutos	13.0 minutos
2^n	.001 segundos	1.0 segundos	17.9 minutos	12.7 días	35.7 años	366 siglos
3^n	.059 segundos	58 minutos	6.5 años	3855 siglos	2×10^8 siglos	1.3×10^{13} siglos

Comparación de algoritmos con distintas complejidades, polinomiales y exponenciales

Big O

$\mathcal{O}(g(N)) = \{f(N) : \text{existen constantes positivas } c \text{ y } N_0 \text{ de forma que } 0 \leq f(N) \leq cg(N) \text{ para todo } N \geq N_0\}$

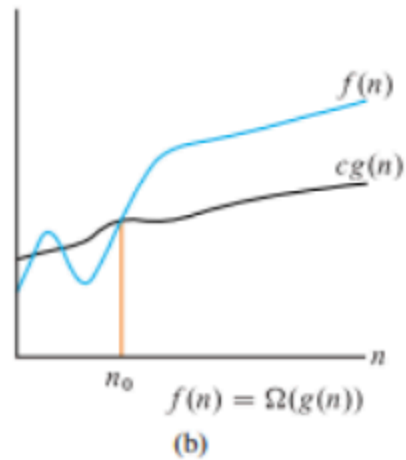


Big O

- Caracteriza la cota superior de una función, es decir que la función en cuestión no crece más rápido que un cierto ratio.
- Esta notación se usa para caracterizar el peor caso de tiempo de ejecución o memoria para un algoritmo.
- Digamos que un determinado algoritmo tiene tiempo de ejecución en función de $T(N) = 7N^3 + 5N^2 - 20N + 7$. Esto en términos de Big O podría traducirse como $T(N) = O(N^3)$.
- La razón es que $7N^3 + 5N^2 - 20N + 7 \leq cN^3$ con c como una constante positiva.

Big Omega

$\Omega(g(N)) = \{f(N) : \text{existen constantes positivas } c \text{ y } N_0 \text{ de forma que } 0 \leq cg(N) \leq f(N) \text{ para todo } N \geq N_0 \}$

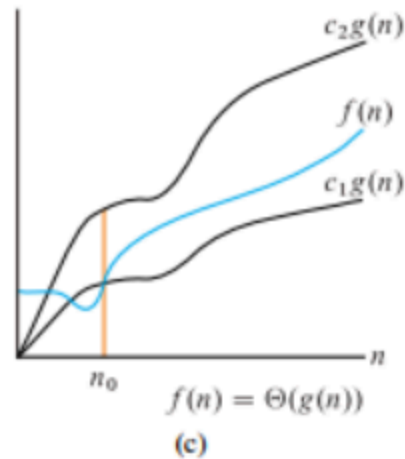


Big Omega (Ω)

- La notación Notación Ω , conocida como Omega caracteriza la cota inferior de una función.
- Para el caso del ejemplo $T(N) = 7N^3 + 5N^2 - 20N + 7$, podemos decir que en términos de notación Omega el tiempo de ejecución es en magnitud de $\Omega(N^3)$, $\Omega(N^2)$ o incluso $\Omega(1)$, siempre y cuando exista un N para ese caso.

Big Theta

$\Theta(g(N)) = \{f(N) : \text{existen constantes positivas } c_1, c_2 \text{ y } N_0 \text{ de forma que } 0 \leq c_1g(N) \leq f(N) \leq c_2g(N) \text{ para todo } N \geq N_0 \}$



Big Theta (Θ)

- La notación Notación Θ , conocida como Theta caracteriza la cota ajustada de una función.
- Para el caso del ejemplo $T(N) = 7N^3 + 5N^2 - 20N + 7$, si $T(N) = \Omega(N^3)$ y $T(N) = O(N^3)$, entonces se puede decir $T(N) = \Theta(N^3)$.

Divisibilidad

En matemáticas, la divisibilidad es la propiedad de un número de ser divisible entre otro número sin dejar un residuo. El número entero b divide al entero a si y solo si $a = b \cdot k$ para algún entero k . En la nomenclatura también es posible decir que a es divisible por b o que b es **divisor** de a y escribimos esto como $b \mid a$. Si b no divide a a , escribimos $b \nmid a$.

Divisibilidad

Por ejemplo:

- 10 es divisible por 5 ($5 \mid 10$) porque $10 \div 5 = 2$ con un residuo de 0.
- 23 es divisible por 1 ($1 \mid 23$) porque $23 \div 1 = 23$ con un residuo de 0.
- 9 no es divisible por 7 ($7 \nmid 9$) porque $9 \div 7 = 1$ con un residuo de 2.

Para validar si un número entero es divisor de otros se hace verificando si el residuo de la división es cero.

Este concepto es central y tiene una aplicación directa en muchos problemas algorítmicos.

Números Primos

Los números primos son elementos fundamentales en matemáticas y juegan un papel crucial en la teoría de números, algoritmos, y diversas aplicaciones prácticas, como la criptografía. Un número primo es un número entero mayor que 1 que solo tiene dos divisores: 1 y sí mismo.

Todo número entero p que es solo divisible por 1 y sí mismo se dice que es un número primo.

Números Primos

- Ejemplos de números primos:
 - 2 es primo porque solo se puede dividir por 1 y 2.
 - 3 es primo porque solo se puede dividir por 1 y 3.
 - 5 es primo porque solo se puede dividir por 1 y 5.
- Ejemplos de números no primos:
 - 4 no es primo porque puede dividirse por 1, 2 y 4.
 - 6 no es primo porque puede dividirse por 1, 2, 3 y 6.

Prueba de divisibilidad básica

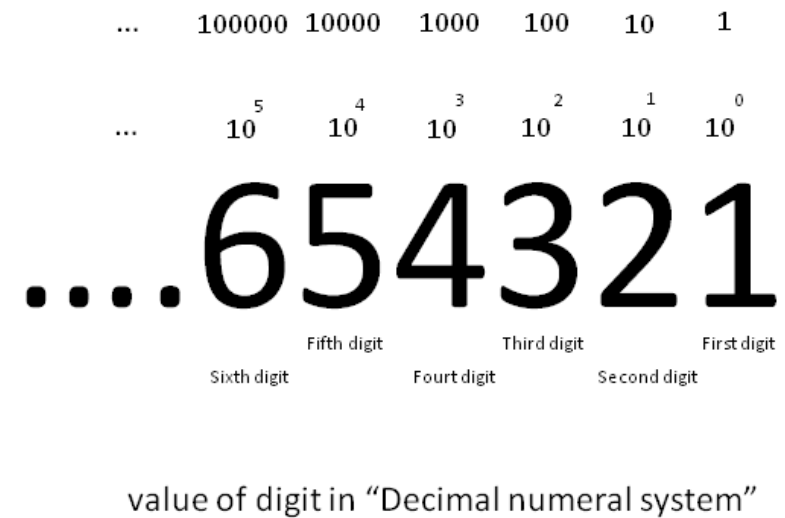
Una manera sencilla de determinar si un número entero N es primo es comprobando si es o no divisible por algún número entre 2 y \sqrt{N} . No es necesario comprobar los mayores a \sqrt{N} porque sus pares ya habrán aparecido con divisores menores.

De esta manera si N es divisible por cualquier número en el rango no sería primo, y si se cumple el caso contrario y N no es divisible por ningún valor dentro de ese rango, significa que N es primo.

Sistema posicional

El sistema o notación posicional es un sistema numérico en el que el valor actual de un número viene dado por las posiciones de los dígitos que lo conforman.

Los números que usamos a diario como 153 o 365 pertenecen al sistema posicional base 10, conocido también como el sistema decimal.



Sistema decimal

El sistema decimal hace uso de 10 dígitos que van desde el 0 hasta el 9, con sus respectivas posiciones (unidad, decena, centena y así sucesivamente). El sistema decimal en el conjunto de los naturales (incluyendo el cero) se puede generalizar como:

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i \cdot 10^i, \text{ donde } a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Sistema binario

El sistema binario hace uso de 2 dígitos, 0 o 1, que con sus respectivas posiciones permiten representar el valor de un número. Haciendo el mismo ejercicio con el sistema decimal, el sistema binario se puede representar como:

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i \cdot 2^i, \text{ donde } a_i \in \{0, 1\}$$

Problema

Como caso de estudio consideremos el problema de transformar un número decimal a binario. Donde tendremos como **input** un número entero n , y como **output** una secuencia de caracteres que represente n en el sistema binario.

decimal a binario

Recursión

- Una manera de diseñar soluciones a problemas mediante "dividir y conquistar".
 - Un problema se divide en subproblemas más pequeños.
- Semánticamente es una técnica de programación en la que una función se llama a sí misma.
- La recursión es una forma de iteración.
 - En programación la meta es **no** tener una recursión infinita:
 - Se debe tener un caso base que termine la recursión.
 - Se debe avanzar hacia el caso base en cada llamada recursiva.

Relaciones de Recurrencia de Grado ≥ 2

Una relación de recurrencia de grado 2 tiene la forma:

$$T(n) = a \cdot T(n - 1) + b \cdot T(n - 2) + f(n)$$

Donde:

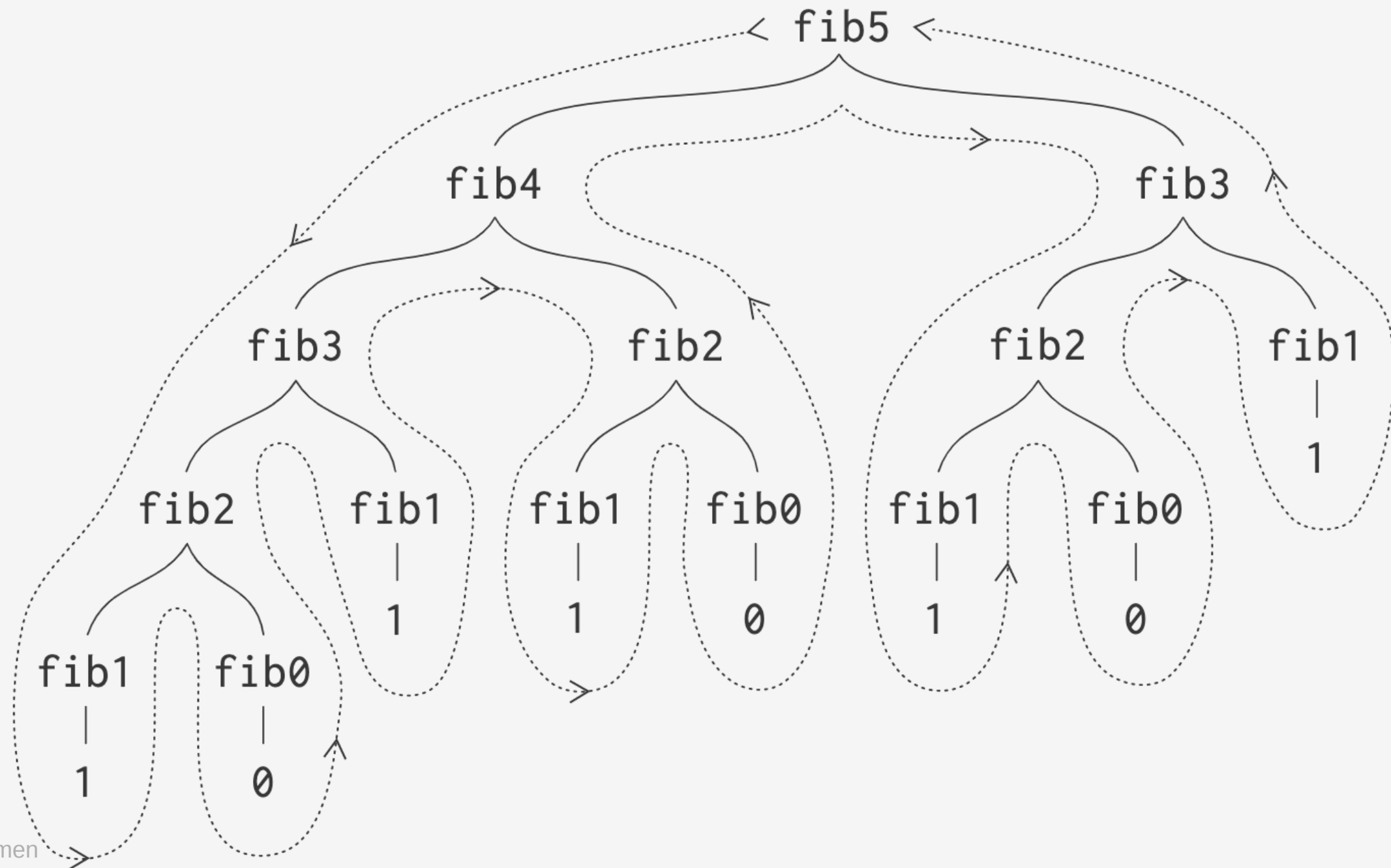
- $T(n)$ es el término n -ésimo de la secuencia.
- a y b son coeficientes constantes.
- $f(n)$ es una función de n que puede ser constante o variar con n .
- Las condiciones iniciales $T(0)$ y $T(1)$ se deben especificar para definir completamente la secuencia.

Serie de fibonacci

$$F(n) = F(n - 1) + F(n - 2)$$

con condiciones iniciales $F(0) = 0$ y $F(1) = 1$

```
public int fibonacci(int n) {  
    if(n == 0)  
        return 0;  
    else if(n == 1)  
        return 1;  
    else  
        return fibonacci(n - 1) + fibonacci(n - 2);  
}
```



Computación Eficiente

Aunque resolver explícitamente una relación de grado 2 puede ser matemáticamente simple, implementarlo de manera eficiente, especialmente cuando los coeficientes son grandes o los términos iniciales son complejos necesita otro tipo de técnicas.

Memoización

La memoización es una técnica de optimización utilizada principalmente para mejorar la eficiencia de algoritmos recursivos al evitar cálculos repetidos. Se basa en almacenar los resultados de subproblemas ya resueltos en una estructura de datos, como un diccionario o un arreglo, para que puedan ser reutilizados en lugar de ser recalculados cada vez que se necesitan.

Fibonacci usando memoización

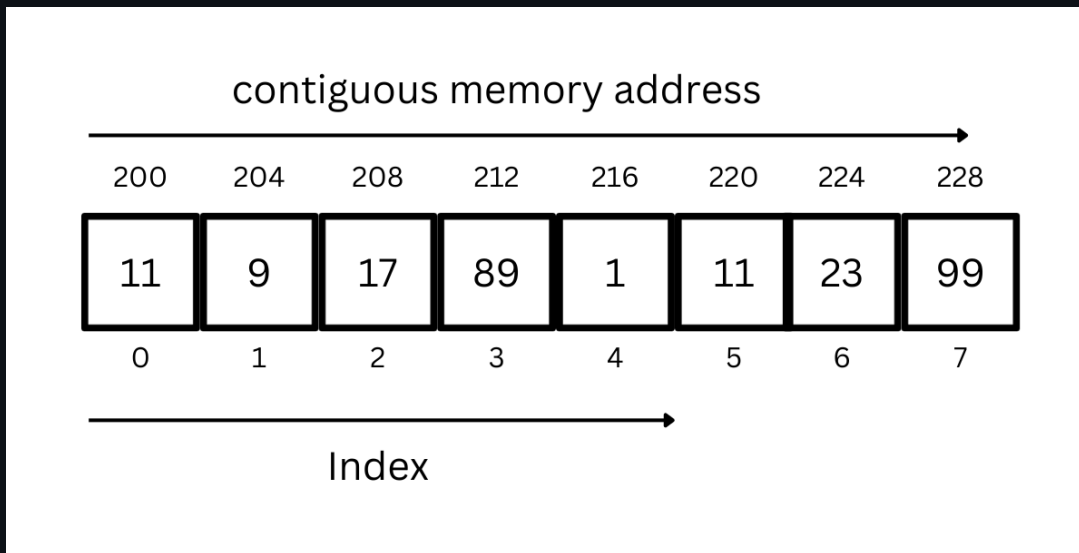
```
public static int fib(int n, int[] memo) {  
    if (n <= 1) {  
        return n;  
    } else if (memo[n] != 0) {  
        return memo[n];  
    } else {  
        memo[n] = fib(n - 1, memo) + fib(n - 2, memo);  
        return memo[n];  
    }  
}
```

TDA vs Estructuras de datos

- **Tipo de dato abstracto (TDA)**
 - Dice qué hace, no cómo lo hace. (especificación)
 - Que data se puede guardar
 - Qué operaciones se pueden hacer / Qué es lo que significan.
- **Estructura de datos**
 - Dice cómo se hace. (implementación)
 - Cómo se guardan los datos
 - **Cómo se hacen** las operaciones (algoritmos).

Arrays

- Colección de elementos ordenados.
 - Cada elemento es una unidad básica de información.
 - Posición: Lugar que ocupa un elemento en el array.
- Tamaño fijo.



Listas

- Colección de elementos ordenados.
 - Cada elemento es una unidad básica de información.
 - Posición: Lugar que ocupa un elemento en la lista.
- Tamaño es dinámico.

```
interface List {  
    int get_at(int i); // obtener elemento en posición i  
    void insert_at(int i, int e); // agregar elemento en posición i  
    int delete_at(int i); // remover elemento en posición i  
    ...  
    void insert_at_end(int e); // agregar elemento al final  
    void insert_at_start(int e); // agregar elemento al inicio  
    int delete_at_end(); // remover elemento al final  
    int delete_at_start(); // remover elemento al inicio  
}
```

Listas enlazadas

Consiste en una secuencia de nodos, en los que se guardan campos de datos arbitrarios y una o dos referencias, enlaces o punteros al nodo anterior o posterior

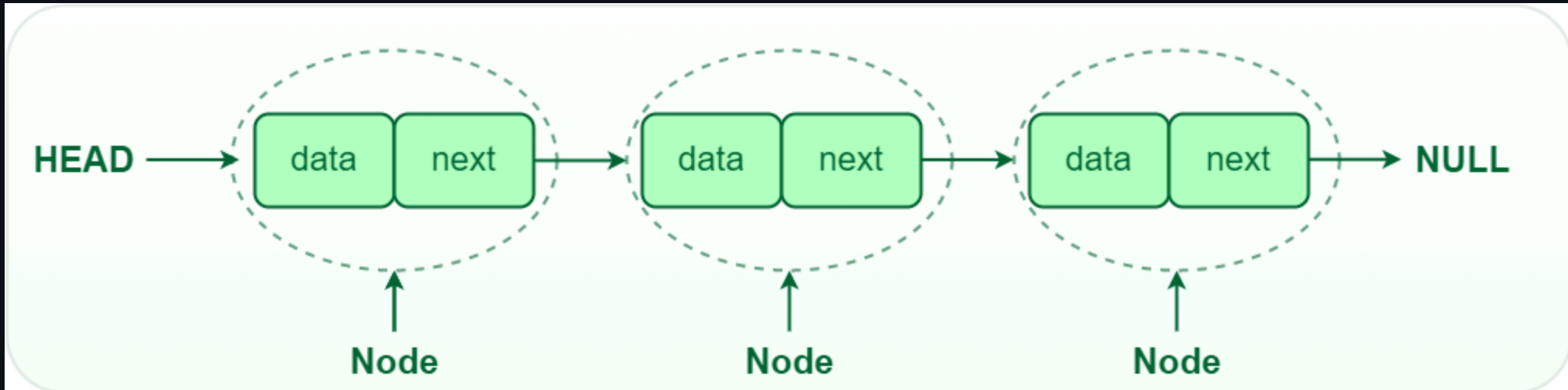
Nodo

- Estructura básica utilizada en la construcción de la mayoría de las estructuras de datos
- Está compuesto por los datos que almacena y una lista de referencias a otros nodos
 - En el caso de las listas (básicas), pilas y colas solo contiene una referencia
 - En el caso de los árboles contiene dos o más referencias

```
class Node {  
    int data;  
    Node next;  
    public Node(int data) {  
        this.data = data;  
        this.next = null;  
    }  
    public int getData() { return data; }  
    public void setData(int data) { this.data = data; }  
    public Node getNext() { return next; }  
    public void setNext(Node next) { this.next = next; }  
}
```

Lista enlazada

- Lista de nodos enlazados
- El último nodo apunta a `null`
- El primer nodo se llama `head`



Lista enlazada

```
class LinkedList {
    Node head;
    public LinkedList() {
        this.head = null;
    }
    public int get_at(int i) {
        Node current = head;
        for (int j = 0; j < i; j++) {
            current = current.next;
        }
        return current.data;
    }
    ...
}
```

```

class LinkedList {
    ...
    public void insert_at(int i, int e) {
        Node newNode = new Node(e);
        if (i == 0) {
            newNode.next = head;
            head = newNode;
        } else {
            Node current = head;
            for (int j = 0; j < i - 1; j++) {
                current = current.next;
            }
            newNode.next = current.next;
            current.next = newNode;
        }
    }
    ...
}

```

Lista enlazada

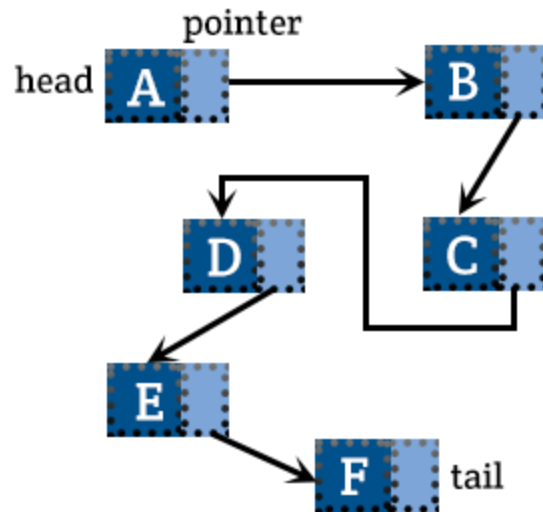
```
class LinkedList {  
    ...  
    public int delete_at(int i) {  
        if (i == 0) {  
            int data = head.data;  
            head = head.next;  
            return data;  
        } else {  
            Node current = head;  
            for (int j = 0; j < i - 1; j++) {  
                current = current.next;  
            }  
            int data = current.next.data;  
            current.next = current.next.next;  
            return data;  
        }  
    }  
}
```

Array vs lista enlazada

Array

index	
0	A
1	B
2	C
3	D
4	E
5	F

Linked List



Lista enlazada con tail

- Lista enlazada con referencia al último nodo
- El último nodo se llama `tail`

```
class LinkedListWithTail {  
    Node head;  
    Node tail;  
    public LinkedList() {  
        this.head = null;  
        this.tail = null;  
    }  
    public void insert_at_end(int e) {  
        Node newNode = new Node(e);  
        if (head == null) {  
            head = newNode;  
            tail = newNode;  
        } else {  
            tail.next = newNode;  
            tail = newNode;  
        }  
    }  
}
```

Lista enlazada

```
class LinkedList {  
    Node head;  
    public LinkedList() {  
        this.head = null;  
    }  
    public int get_at(int i) {  
        Node current = head;  
        for (int j = 0; j < i; j++) {  
            current = current.next;  
        }  
        return current.data;  
    }  
    ...  
}
```

```

class LinkedList {
    ...
    public void insert_at(int i, int e) {
        Node newNode = new Node(e);
        if (i == 0) {
            newNode.next = head;
            head = newNode;
        } else {
            Node current = head;
            for (int j = 0; j < i - 1; j++) {
                current = current.next;
            }
            newNode.next = current.next;
            current.next = newNode;
        }
    }
    ...
}

```

Lista enlazada

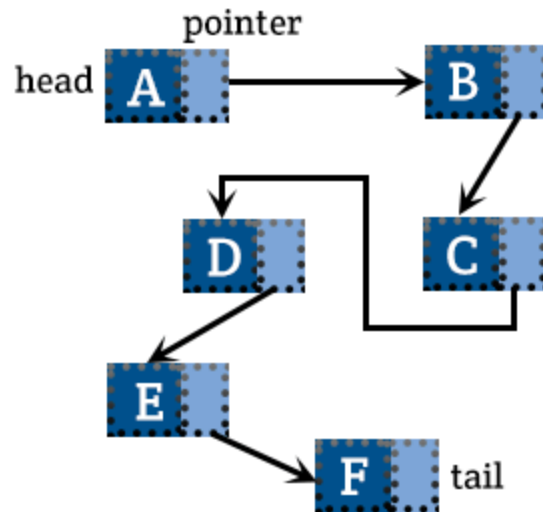
```
class LinkedList {  
    ...  
    public int delete_at(int i) {  
        if (i == 0) {  
            int data = head.data;  
            head = head.next;  
            return data;  
        } else {  
            Node current = head;  
            for (int j = 0; j < i - 1; j++) {  
                current = current.next;  
            }  
            int data = current.next.data;  
            current.next = current.next.next;  
            return data;  
        }  
    }  
}
```


Array vs lista enlazada

Array

index	
0	A
1	B
2	C
3	D
4	E
5	F

Linked List



Lista enlazada con tail

- Lista enlazada con referencia al último nodo
- El último nodo se llama `tail`

```
class LinkedListWithTail {
    Node head;
    Node tail;
    public LinkedList() {
        this.head = null;
        this.tail = null;
    }
    public void insert_at_end(int e) {
        Node newNode = new Node(e);
        if (head == null) {
            head = newNode;
            tail = newNode;
        } else {
            tail.next = newNode;
            tail = newNode;
        }
    }
}
```

LinkedList en la stdlib de java

- `add(int index, E e)` Inserta un elemento en una determinada posición
- `addFirst(E e)` Agrega un elemento al principio de la lista
- `addLast(E e)` Agrega un elemento al final de la lista
- `remove(int index)` Elimina un elemento en una determinada posición
- `removeFirst()` Elimina el elemento al principio de la lista
- `removeLast()` Elimina el elemento al final de la lista
- `get(int index)` Obtiene el elemento en una determinada posición
- `getFirst()` Obtiene el elemento al principio de la lista
- `getLast()` Obtiene el elemento al final de la lista

42r347rgd

JAVA ▼

RUN ▶

1

STDIN

Input for the program (Optional)

Output:

```
Main.java:13: error: variable cars is already defined
    LinkedList<String> cars = new LinkedList<String>() {
                        ^
```

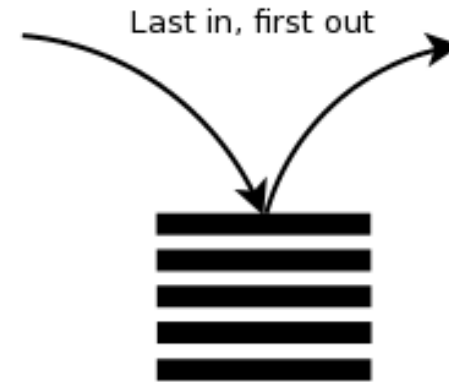
1 error

error: compilation failed

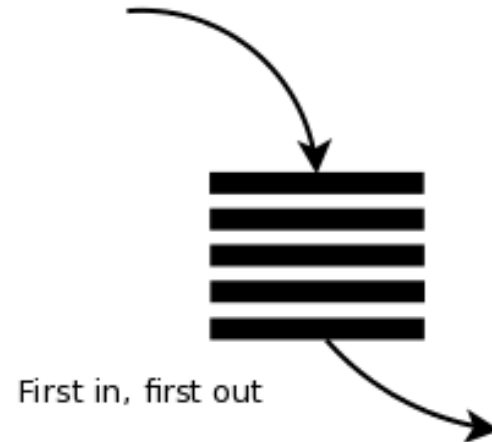
Pilas y colas

- **pila:** El único elemento accesible es el ultimo añadido.
- **cola:** El único elemento accesible es el que se añadió más temprano.
- Menos posibilidades de operaciones que una lista pero más eficientes.

Stack:

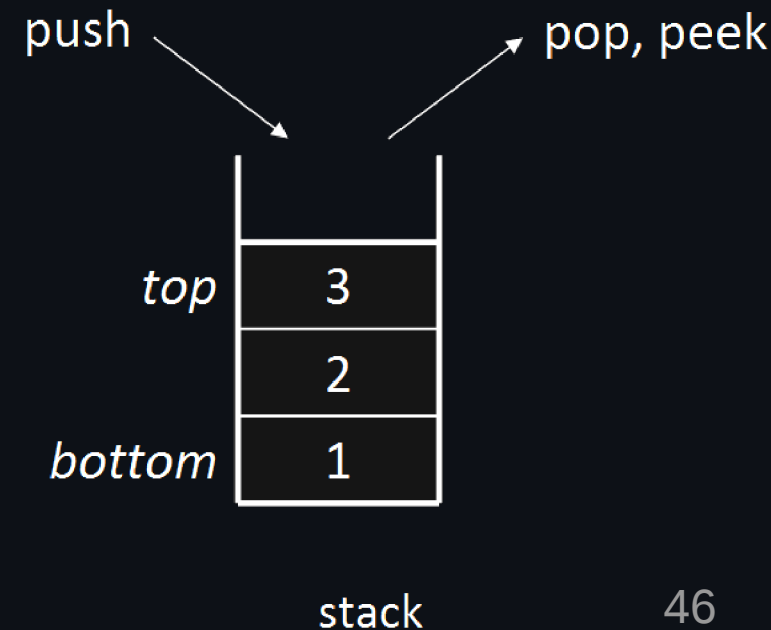


Queue:

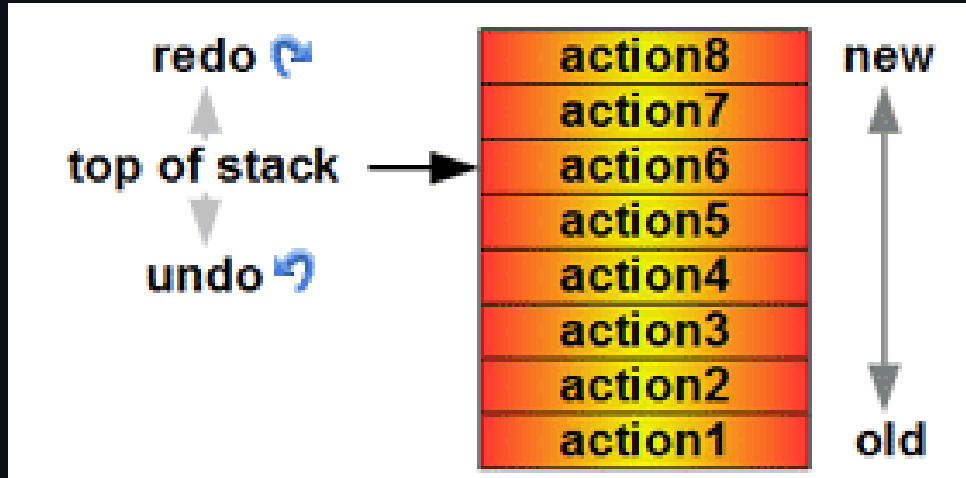


Pila (stack)

- **LIFO**: Last In First Out
 - Los elementos son guardados en el orden de inserción
 - No solemos pensar en la posición de los elementos, solo en el último añadido.
 - El "cliente" solo puede acceder al último elemento añadido.
-
- Operaciones básicas:
 - push: añadir un elemento
 - pop: quitar el último elemento añadido
 - peek (o top): ver el último elemento añadido

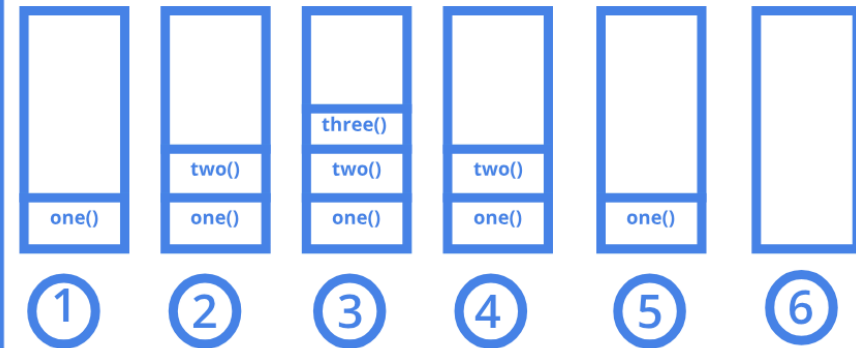


Pila (stack)



```
function one(){  
  two();  
}  
  
function two() {  
  three();  
}  
  
function three() {  
  console.trace("Call  
Stack");  
}
```

Call Stack



Class Stack

java.util.Stack

Constructor Summary

Constructors

Constructor and Description
Stack() Creates an empty Stack.

Method Summary

All Methods	Instance Methods	Concrete Methods
Modifier and Type	Method and Description	
boolean	empty() Tests if this stack is empty.	
E	peek() Looks at the object at the top of this stack without removing it from the stack.	
E	pop() Removes the object at the top of this stack and returns that object as the value of this function.	
E	push(E item) Pushes an item onto the top of this stack.	
int	search(Object o) Returns the 1-based position where an object is on this stack.	

Class stack

428jybu4h

JAVA ▼

RUN ▶

1

STDIN

Input for the program (Optional)

Output:

[]

- Para iterar sobre una pila se usa un bucle `while` para vaciarla.

```
while (!stack.isEmpty()) {  
    System.out.println(stack.pop());  
}
```

<https://visualgo.net/en/stack>

The screenshot displays the Visualgo website's interface for the Stack data structure. At the top, the navigation bar includes the Visualgo logo, a language dropdown menu set to 'en', and links to 'LL', 'STACK', 'QUEUE', 'DLL', and 'DEQUE'. On the right side of the header, there is a 'LOGIN' button and a link to 'Exploration Mode'. The main content area is a large, empty black rectangle. On the left side of this area, there is a vertical toolbar with a left-pointing arrow and a menu containing the following operations: 'Create(A)', 'Peek', 'Push', and 'Pop'. At the bottom of the interface, there is a playback speed control showing '1x' and a footer with links to 'About', 'Team', 'Terms of use', and 'Privacy Policy'.

```

class Stack {
    class Node {
        int data;
        Node next;
        public Node(int data) {
            this.data = data;
            this.next = null;
        }
    }
    Node head;
    public Stack() { this.head = null; }
    public void push(int e) {
        Node newNode = new Node(e);
        if (head != null) {
            newNode.next = head;
        }
        head = newNode;
    }
    public int pop() {
        int e = head.data;
        head = head.next;
        return e;
    }
    public int peek() { return head.data; }
}

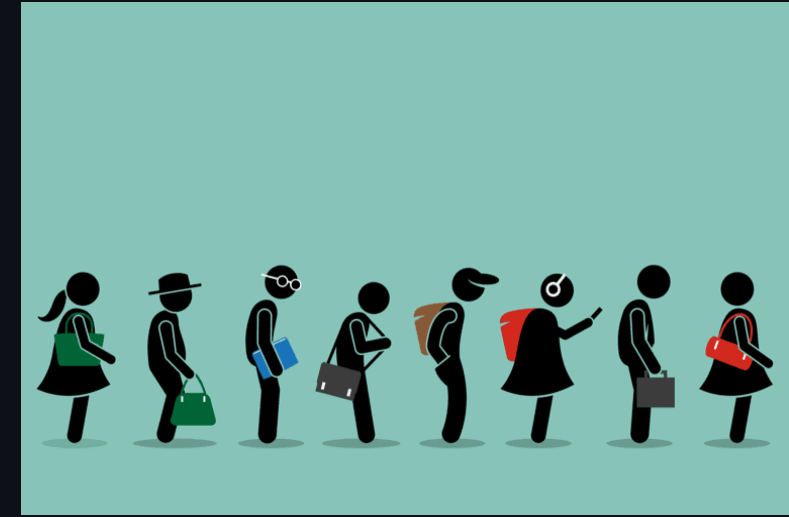
```

Complejidad de las operaciones de una pila:

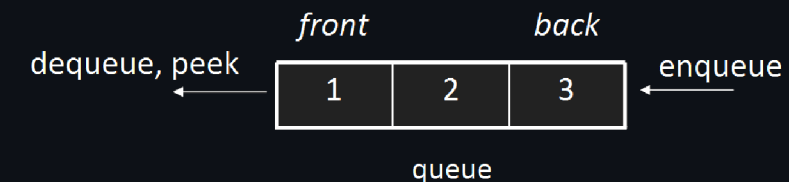
- `push` : $O(1)$
- `pop` : $O(1)$
- `peek` : $O(1)$

Cola (queue)

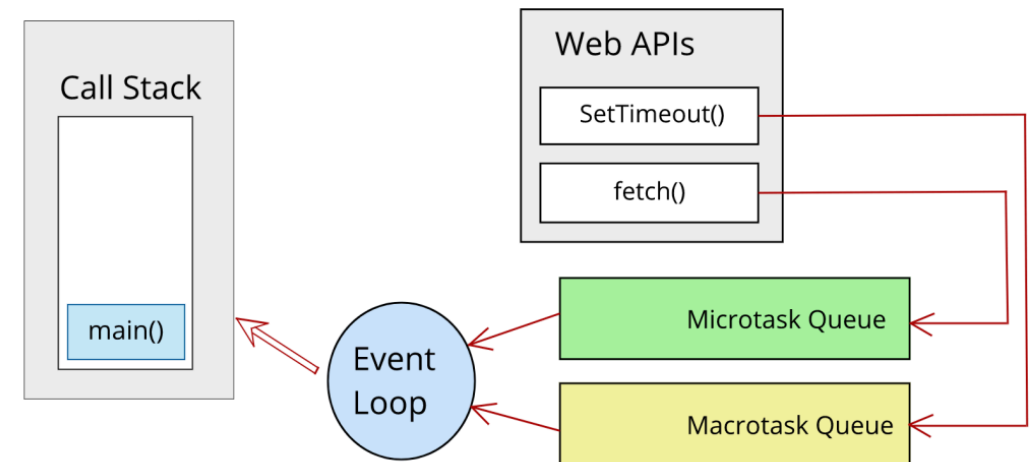
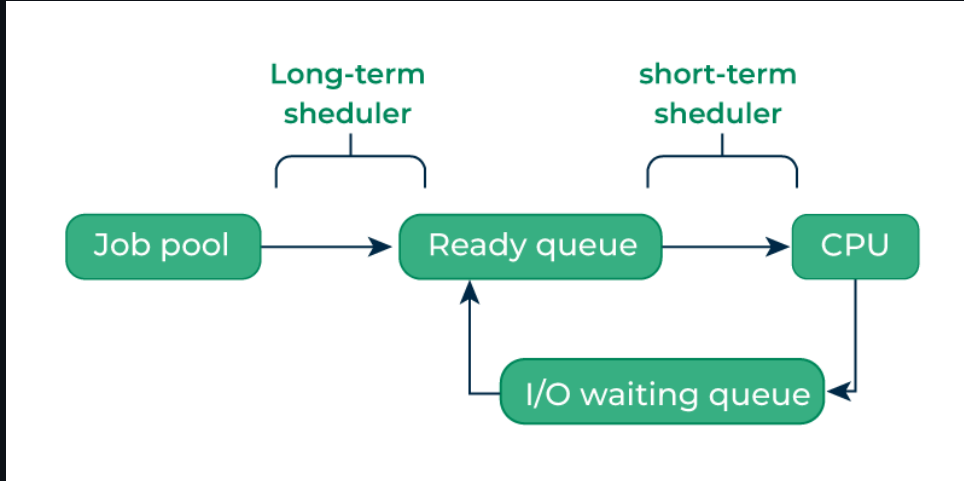
- **FIFO**: First In First Out
- Los elementos son guardados en el orden de inserción y no suelen tener índices.
- El "cliente" puede añadir elementos al final y examinar/quitar elementos del principio.



- Operaciones básicas:
 - enqueue: añadir un elemento al final
 - dequeue: quitar el elemento del principio
 - peek: ver el elemento del principio



Cola (queue)



www.datainfinities.com

Interface Queue

```
java.util.Queue
```

Method Summary

All Methods	Instance Methods	Abstract Methods
Modifier and Type	Method and Description	
boolean	add(E e)	Inserts the specified element into this queue if it is possible to do so immediately without violating capacity restrictions, returning true upon success and throwing an <code>IllegalStateException</code> if no space is currently available.
E	element()	Retrieves, but does not remove, the head of this queue.
boolean	offer(E e)	Inserts the specified element into this queue if it is possible to do so immediately without violating capacity restrictions.
E	peek()	Retrieves, but does not remove, the head of this queue, or returns null if this queue is empty.
E	poll()	Retrieves and removes the head of this queue, or returns null if this queue is empty.
E	remove()	Retrieves and removes the head of this queue.

Class stack

<https://visualgo.net/en/queue>

The screenshot shows the Visualgo website's Queue implementation page. The top navigation bar includes the Visualgo logo, a language dropdown set to 'en', and links for 'list', 'LL', 'STACK', 'QUEUE' (highlighted), 'DLL', and 'DEQUE'. On the right, it says 'Exploration Mode' with a dropdown arrow and a 'LOGIN' button. The main area is a dark blue canvas. On the left, a white sidebar contains a list of operations: 'Create(A)', 'Peek', 'Enqueue', and 'Dequeue'. A small '<' arrow is to the left of this sidebar. At the bottom left, there is a '1x' zoom indicator. At the bottom right, there are links for 'About', 'Team', 'Terms of use', and 'Privacy Policy'. A large '<' arrow is also visible on the far right edge of the canvas area.

```

class Queue {
    class Node {
        int data;
        Node next;
        public Node(int data) {
            this.data = data;
            this.next = null;
        }
    }
    Node head, tail;
    public Queue() {
        this.head = this.tail = null;
    }
    public void enqueue(int e) {
        Node newNode = new Node(e);
        if (head == null) {
            head = tail = newNode;
        } else {
            tail.next = newNode;
            tail = newNode;
        }
    }
    public int dequeue() {
        int e = head.data;
        head = head.next;
        return e;
    }
    public int peek() {
        return head.data;
    }
}

```

Complejidad de las operaciones de una cola:

- enqueue : $O(1)$
- dequeue : $O(1)$
- peek : $O(1)$

Ejercicios

- List
 - Reverse a doubly linked list (easy)
 - Cycle Detection (medium)
 - Add two numbers
- Stack
 - Stack using two queues (medium)
 - Balanced brackets (medium)
- Queue
 - Queue using two stacks (medium)