1) En base a la figura adjunta donde los puntos negros se consideran exactos.

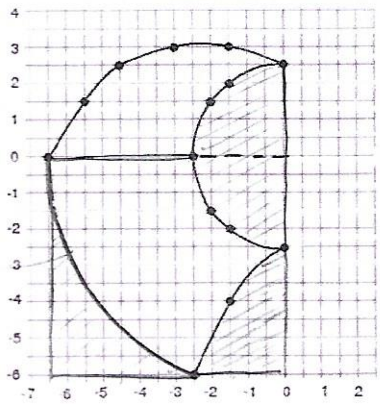
a) Aproximar por medio de una fórmula abierta de N-C que use tres puntos la integral del borde marcado por la linea de trazos modelado por: $y(x) = -\sqrt{6.5^2 - x^2}$ entre $-6,5$ y $-2,5$, estimándole el error por medio de una cerrada de 3 puntos. ¿Es buena su aproximación? ¿Es bueno su estimador?

b) ¿Puede acotar el error de la aproximación obtenida en a)? Justifique

c) Obtenga una aproximación lo mejor que pueda al área total.

d) ¿Cuál es la condición para que una estimación de Richardson sea válida? ?

e) Para un problema térmico transiente 1D resuelto por numéricamente. ¿Cúantas condiciones de borde (temporales y espaciales) son necesarias? ¿Depende del método? → ?



$y(x) = -\sqrt{6.5^2 - x^2}$

a) $x_0 = a = -6,5$ $\quad y_0 = 0$

$x_1 = a + h = -4,5$ $\quad y_1 = -4\sqrt{22}$

$x_2 = -2,5$ $\quad y_2 = -6$

$\boxed{h = \frac{b-a}{2} = 2}$

$\overset{h=2}{I}$ NC-3 abierta.

$$\int_{-6,5}^{-2,5} f(x)\,dx \approx \frac{4\frac{-2,5-(-6,5)}{2}}{3} \left(2 \cdot 0 - (-\sqrt{22}) + 2 \cdot (-6)\right)$$

$$= \frac{8}{3}\left(\sqrt{22} - 12\right) \cong -19,492\,224\,364$$

Uso $h=1$, calculando dos integrales I_1, I_2, para cubrir el intervalo $[-6,5 ; -2,5]$, a fin de calcular el estimador de Richardson:

$$I_1 = \int_{-6,5}^{-4,5} f(x)\,dx \approx \frac{-4,5-(-6,5)}{6} \left(1 \cdot 0 + 4(-2\sqrt{3}) + 1(-\sqrt{22})\right) = \frac{1}{3}\left(-8\sqrt{3} - \sqrt{22}\right) \cong -6,182\,274\,073.$$

$$I_2 = \int_{-4,5}^{-2,5} f(x)\,dx \approx \frac{-2,5-(-4,5)}{6} \left(1(-\sqrt{22}) + 4(-\sqrt{30}) + 1 \cdot (-6)\right) = -10,866\,439\,35.$$

$$\boxed{\overset{h=1}{I} = I_1 + I_2 = -17,048\,713\,42}$$

Por Richardson: $$E = \frac{\overset{h=1}{I} - \overset{h=2}{I}}{15} \cdot 16 = 2,606\,411\,968.$$

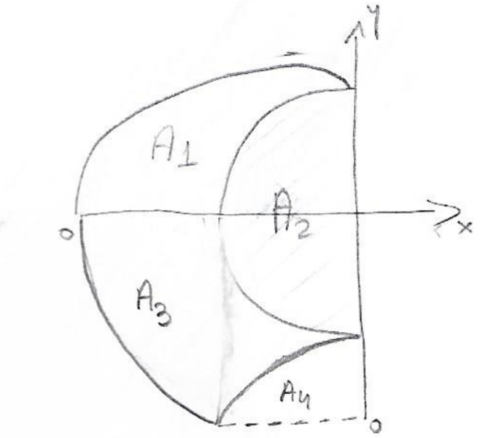
$$\boxed{\overset{h=2}{I} + E = -16,885\,812\,67}$$

- La aproximación mediante NC-3 no es buena, dado el valor obtenido en el estimador, de un orden de 2×10^0.
- El estimador, aunque útil para mejorar el valor de la aproximación, parece arrojar un error mayor a la aproximación mediante NC-3 en dos intervalos

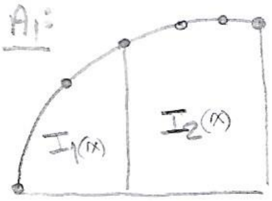
b) Para que la estimación de Richardson sea sólida (es decir, útil para mejorar una aproximación) debe cumplirse la condición de que $y = f^{2m}(x)$ se mantiene relativamente estable en el intervalo I considerado, con $m = 0, 1, 2, \dots$

c) Seccionando áreas a calcular:

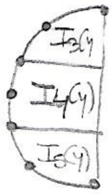
$$A = A_1 - (-A_2) + (-A_3) - (-A_4)$$



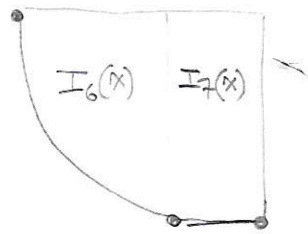
A_1:



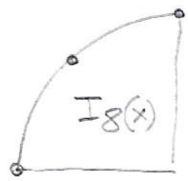
$-A_2$:



$-A_3$:



$-A_4$



A_1: $I_1 = \int_{-6,5}^{-4,5} f_1(x)\,dx = \frac{-4,5-(-6,5)}{6}\left(0 + 4\cdot(1,5) + 2,5\right)$

$I_2 = \int_{-4,5}^{0} f_1(x)\,dx = \frac{3[0-(-4,5)]}{8}\left(2,5 + 3\cdot 3 + 3\cdot 3 + 2,5\right)$

$$\boxed{A_1 = I_1 + I_2 = \frac{17}{6} + \frac{621}{16} = \frac{1999}{48} \approx 41,64583333.}$$

A_2: $I_3 = \int_{1,5}^{2,5} f_2(y)\,dy = \frac{1}{6}\left(-2 + 4(-1,5) + 0\right) = -\frac{4}{3}$

$A_2 = I_1 + I_2 + I_3 = -\frac{4}{3} + (-7) + \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{29}{3}$

$$\boxed{A_2 = -\frac{29}{3} \cong -9,666\,666\,667}$$

$I_4 = \int_{-1,5}^{1,5} f_2(y)\,dy = \frac{3}{6}\left(-2 + 4(-2,5) + (-2)\right) = -7$

$I_5 = \int_{-2,5}^{-1,5} f_2(y)\,dy = \frac{1}{6}\left(0 + 4\cdot(-1,5) + (-2)\right) = -\frac{4}{3}.$

A_3: $I_6 = -17,048\,713\,42 \rightarrow$ calculado en a) $\quad A_3 = I_6 + I_7 = -25,798\,713\,42.$

$I_7 = \int^{0} f_3(x)\,dx = (-2,5)\cdot 3,5 = -\frac{35}{4}$

A_4: Debo interpolar para hallar $f_4(x)$ y obtener puntos $y = f_4(x)$ equidistantes.

$P_8(x)$

x	$-2,5$	$-1,5$	0
y	-6	-4	$-2,5$
	2		1
		$-\frac{2}{5}$	

$$P_8(x) = -\frac{2}{5}x^2 + \frac{2}{5}x - \frac{5}{2}$$

Punto medio para el intervalo $[-2,5 ; 0]$:

$$h = \frac{0 - (-2,5)}{2} = 1,25$$

$$-2,5 + h = -1,25$$

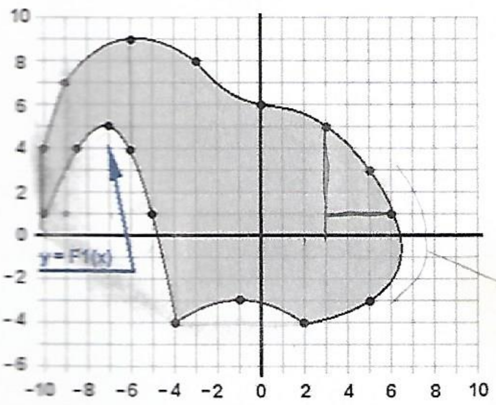
$$P_8(-1,25) = -3,625.$$

$$I_8 = \int_{-2,5}^{0} f_4(x)\,dx \approx \frac{2,5}{6}\left(-6 + 4(-3,625) + 0\right) = -\frac{205}{24}$$

$$A_4 = I_8 = -\frac{205}{24} \cong -8,541\,666\,667$$

$$\boxed{A = A_1 + A_2 - A_3 + A_4 = 49,236\,213\,42}$$

2) En una excavación arqueológica se ha encontrado una pieza de cobre de 1 cm de espesor y forma como la mostrada a continuación (la unidad de los ejes es cm).



a) Obtenga una aproximación al volumen de dicha pieza.

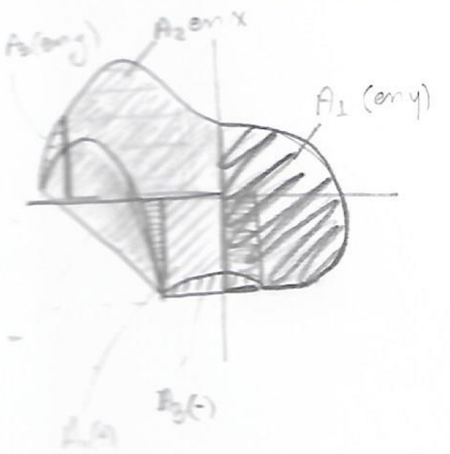
b) Estime el error de la integral de la función $F1(x)$ en el intervalo $[-10; -4]$ por medio de Richardson.

c) Suponiendo que todos los otros bordes se puede modelar por medio polinomios de hasta grado 3:

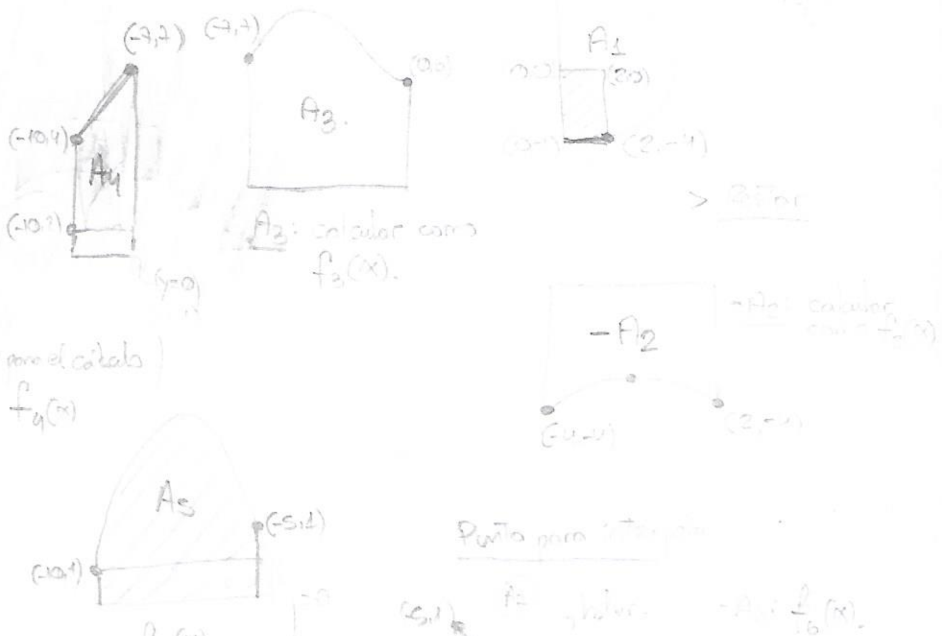
i) ¿Puede estimar el error de la aproximación del Volumen total?. Si su respuesta es afirmativa diga cuanto valdría dicha estimación; si su respuesta es negativa justifíquela.

ii) ¿Puede acotar el error de la aproximación del Volumen total?. Si su respuesta es afirmativa diga cuanto valdría dicha estimación; si su respuesta es negativa justifíquela.

Secciono el área a calcular



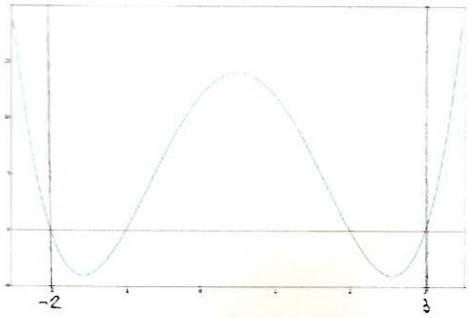
Disección de áreas



$V = 1\,[cm] \times \left(A_1 - A_2 + A_3 + A_4 - \underbrace{A_5 - A_6 - A_7}\right)[cm^2]$

Requiere interpolación.

4) Considere la siguiente función $y = f(x)$:



x	-2	$0.5-\sqrt{17/4}$	-1	0.5	2	$0.5+\sqrt{17/4}$	3
y	0	-4	0	?	0	-4	0

Tabla de datos correspondiente a la función.

a) Se sabe que $\int_{-2}^{3} f(x) = \frac{125}{6}$, obtenga una buena aproximación al valor de f(0.5).

b) Encuentre una función $g(x)$ que ajuste adecuadamente a $f(x)$ en el intervalo $[-2, 3]$.

a) Para obtener el valor aproximado de la integral $I = \int_{-2}^{3} f(x)dx$, puedo dividir el cálculo en Tres intervalos. Tal que $I \approx I_1 + I_2 + I_3$, Tales que:

$$I_1 = \int_{-2}^{-1} f(x)dx \quad ; \quad I_2 = \int_{-1}^{2} f(x)dx \quad ; \quad I_3 = \int_{2}^{3} f(x)dx.$$

Para el cálculo de I_1 e I_3 debo interpolar, a fin de obtener valores equiespaciados

• $P_1(x)$:

x	-2	$0,5-\sqrt{17/4}$	-1
y	0	-4	0

$-5+\sqrt{17}$; $3+\sqrt{17}$

$8+2\sqrt{17}$

• $P_3(x)$:

x	2	$0,5+\sqrt{17/4}$	3
y	0	-4	0

$-3-\sqrt{17}$; $5+\sqrt{17}$

$8+2\sqrt{17}$

$P_1(x) = (8+2\sqrt{17})x^2 + 48,7386x + 32,4924$

$P_3(x) = (8+2\sqrt{17})x^2 - 81,2311 + 97,4773$

Obtengo valores para $x = -1,5$ y $x = 2,5$.

- $P_1(-1,5) = -4,06155$
- $P_3(2,5) = -4,06155$.

Calculo las integrales mediante NC-3 cerrada:

$$I_1 = \frac{1}{6}[-1-(-2)](0+4(-4)+0) = -\frac{16}{6}$$

$$I_3 = \frac{1}{6}[3-2](0+4(-4)+0) = \frac{-16}{6}$$

$$I_2 = \frac{1}{6}(2-(-1))(0+4y+0) = 2y$$

$$I = -\frac{32}{6} + 2y = \frac{125}{6} \Rightarrow \boxed{y = \frac{157}{12} = 13,08\overline{3}}$$

b) Puedo, ahora que el valor de $g(x)$ para $x=0{,}5$ es conocido aproximadamente, obtener una interpolación para $P_2(x)$

$P_2(x) =$

x	-1	$0{,}5$	2
y	0	$\frac{157}{12}$	0

$$\frac{157}{18} \qquad -\frac{157}{18}$$

$$-\frac{157}{27}$$

$$P_2(x) = -\frac{157}{27}x^2 + 5{,}81481x + 11{,}6296.$$

$$g(x) = \begin{cases} P_1(x) = (8+\sqrt{17})x^2 + 48{,}7386x + 32{,}4924 & \text{para } x \in [-2,-1] \\ P_2(x) = -\frac{157}{27}x^2 + 5{,}81481x + 11{,}6296 & \text{para } x \in (-1,2) \\ P_3(x) = (8+\sqrt{17})x^2 - 81{,}2311 + 97{,}4773. & \text{para } x \in [2,3] \end{cases}$$

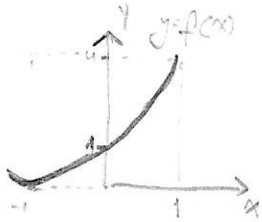
Ejercicio -1 Mostrar un ejemplo gráfico en donde una fórmula abierta de **Newton-Cotes** con 3 puntos de mejor aproximación a la integral que una cierta función que una fórmula cerrada.

$f(x) = 1x^2 + 2x + 1.$

$$\int_{-1}^{1} (x^2+2x+1)\,dx = \frac{8}{3} \longrightarrow \text{Valor real exacto.}$$

$$\int_{-1}^{1} (x^2+2x+1)\,dx \approx \frac{1}{2}\left[1\cdot 0 + 1\cdot 4\right] = 2 \longrightarrow \text{Trapecio (NC2)}$$

$$\int_{-1}^{1} (x^2+2x+1)\,dx \approx \frac{1}{3}\left[2\cdot 0 - 1\cdot 1 + 2\cdot 4\right] = \frac{7}{3} \longrightarrow \text{(NC3) abierta.}$$



* NC3 abierta es mejor que la regla del Trapecio para este ejemplo.

Ejercicio -2 Determine cuantos puntos con abscisas equiespaciadas deberá utilizar para aproximar a la integral de : $\int_{-10}^{10} e^{-x^2}\,dx$ tal que el error seguro sea menor a $\mathbf{10^{-4}}$ utilizando:

A) Newton-Cotes cerrado con **n=2**.
B) Newton-Cotes cerrado con **n=3**.
C) Newton-Cotes abierto con **n=3**.

Para acotar el error y hallar el n requerido, hacemos:

$|\varepsilon| < 10^{-4}$

A) $\varepsilon_{\text{Trapecio}} = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\varepsilon)$

B) $\varepsilon_{\text{Simpson}} = -\frac{b-a}{180} h^4 f^{IV}(\varepsilon)$

$I = [-10; 10]$

- $f'(x) = -2e^{-x^2}x \quad f'(x) = 0 \longrightarrow x = 0$
- $f''(x) = e^{-x^2}(4x^2-2) \quad f''(x) = 0 \longrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- $f'''(x) = 4e^{-x^2}x(2x^2-3) \quad f'''(x) = 0 \longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$
- $f^{IV}(x) = 4e^{-x^2}(4x^4-12x^2+3) \quad f^{IV}(x) = 0 \longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{2}}}$
- $f^{V}(x) = -8e^{-x^2}x(4x^4-20x^2+15) \quad f^{V}(x) = 0 \longrightarrow \pm\sqrt{\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{2}}} \approx$ $-2{,}02018$; $-0{,}958572$; 0; $0{,}958572$; $2{,}02018$

C) $\varepsilon_{NC3} = \frac{28}{90} h^5 f^{IV}(\varepsilon)$

A) $|f''(-10)| = 1{,}48 \times 10^{-41}$

$|f''(-\sqrt{\tfrac{3}{2}})| = 0{,}8925\ldots$

$|f''(0)| = 2$

$|f''(\sqrt{\tfrac{3}{2}})| = 0{,}8925\ldots$

$|f''(10)| = 1{,}48 \times 10^{-41}$

Mayor valor: $|f''(0)| = 2 \longrightarrow \xi = 0$

$$\left|-\frac{10-(-10)}{12} h^2 . 2\right| = \left|-\frac{40}{12}h^2\right| = \frac{10}{3}h^2 < 10^{-4}$$

$h < 5{,}477\,225\,575 \times 10^{-3}$

$$\frac{b-a}{n} < h \longrightarrow n > \frac{20}{5{,}477\,225\,575 \times 10^{-3}}$$

$n > 3651{,}483\,717 \Rightarrow \boxed{n > 3652}$

B) $|f^{IV}(-10)| = 5{,}77\ldots \times 10^{-37}$

$|f^{IV}(-2{,}02018)| \cong 4{,}39\ldots$

$|f^{IV}(-0{,}958572)| = -7{,}41\ldots$

$|f^{IV}(0)| = 12$

$|f^{IV}(0{,}958572)| \cong -7{,}41\ldots$

$|f^{IV}(2{,}02018)| \cong 1{,}39\ldots$

$|f^{IV}(10)| = 5{,}77\ldots \times 10^{-37}$

Mayor valor: 12 , para $\xi = \pm 2{,}02018$

$$\left|-\frac{10-(-10)}{180} h^4 . 12\right| = \frac{4}{3}h^4 < 10^{-4}$$

$h < 0{,}093\,060\,485\,91$

$$\frac{b-a}{n} < h \longrightarrow n > \frac{20}{0{,}093\,060\,48591} \Rightarrow n > 214{,}91\ldots$$

$\boxed{n > 216}$

C) Repito mayor valor para $f^{IV}(\varepsilon)$ obtenido en B). $\Rightarrow$ 12

Error para un intervalo: $\frac{28}{90} h^5 f^{IV}(\varepsilon) = \frac{56}{15} h^5$ (I)

Para error Total: $\sum_{i=0}^{n} \frac{28}{90} h^5 f^{IV}(\varepsilon) = \frac{28}{90} h^5 \sum_{i=0}^{n} f^{IV}(\varepsilon) = \frac{28}{90} h^5 . n . f^{IV}(p)$, con $p \in [-10;10]$

$b-a = \frac{n+1}{n+1} . h . n \Rightarrow \frac{28}{90} h^4 (b-a) f^{IV}(p)$ (II)

Luego, usando I) y II): $\frac{56}{15} h^4 . 20 . < 10^{-4} \Rightarrow \frac{224}{3} h^4 < 10^{-4}$

$$h < 0{,}034\,018\,746\,67.$$

$\frac{20}{n} < h \Rightarrow n > 587{,}91\ldots \Rightarrow \boxed{n > 588}$

Ejercicio -5

Dada la función f(x) graficada:

A) Aproximar a $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$ por medio de **N-C** con n=3.

B) Estimar su error por medio de Richardson.

C) Mejore la aproximación utilizando dicho estimador

D) ¿Que puede decir del error cometido?

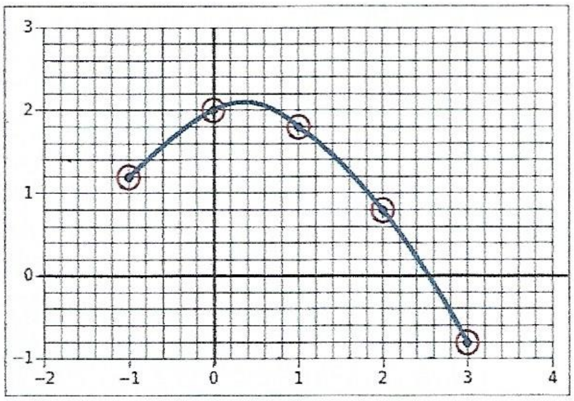


Tabla de valores:

x	-1	0	1	2	3
y	1,2	2	1,8	0,8	-0,8

$h = 1$

A) Integro en dos Tramos:

$a = -1$

$b = 3$

$$I_1 = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{1}{6}[1-(-1)]\cdot(1,2 + 4.2 + 1,8) = \frac{11}{3}$$

$$I_2 = \int_{1}^{3} f(x)dx = \frac{1}{6}(3-1)\cdot[1,8 + 4.0,8 + (-0,8)] = \frac{7}{5}$$

$$\boxed{I = I_1 + I_2 = \frac{76}{15}} \longrightarrow \text{Primera aproximación vía NC3.}$$

B) Estimador de Richardson: $E = \frac{I^{\frac{h}{2}} - I^{h}}{15}16$

Subdivido los intervalos, usando $h = 0,5$.

x	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	1,2	$\underbrace{1,725}_{P_1(-0,5)}$	2	$\underbrace{2,025}_{P_1(0,5)}$	1,8	$\underbrace{1,375}_{P_2(1,5)}$	0,8	$\underbrace{0,075}_{P_2(2,5)}$	-0,8

Interpolo para obtener una p(x) que me permita aproximar los puntos faltantes:

$P_1(x)$:

x	-1	0	1
y	1,2	2	1,8

$4/5 \quad -1/5 \quad -1/2$

$$P_1(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 0,3x + 2$$

$P_2(x)$:

x	1	2	3
y	1,8	0,8	-0,8

$-1 \quad -8/5 \quad -\frac{3}{10}$

$$P_2(x) = -0,3x^2 - 0,1x + 2,2$$

Tomo valores mirando la gráfica

$$I_a = \int_{-1}^{0} f(x)dx = \frac{1}{6}\cdot[1,2 + \overbrace{4.1,7} + 2] = \frac{5}{3}$$

$$I_b = \int_{0}^{1} f(x)dx = \frac{1}{6}\cdot[2 + 4.2,1 + 1,8] = \frac{61}{30}$$

$$I_c = \int_{1}^{2} f(x)dx = \frac{1}{6}\cdot[1,8 + 4.1,3 + 0,8] = \frac{13}{10}$$

$$I_D = \int_{2}^{3} f(x)dx = \frac{1}{6}\cdot[0,8 + 4.0 - 0,8] = 0$$

$$I_1^{\frac{h}{2}} = I_a + I_b = \frac{37}{10}$$

$$I_2^{\frac{h}{2}} = I_c + I_D = \frac{13}{10}$$

C) Calculo los estimadores:

$$E_1 = \frac{8}{225} \longrightarrow I_1^{*} = \frac{11}{3} + \frac{8}{225} = \frac{833}{225}$$

$$E_2 = -\frac{8}{75} \longrightarrow I_2^{*} = \frac{7}{5} - \frac{8}{75} = \frac{97}{75}$$

$$I^{*} = I_1^{*} + I_2^{*} = \frac{1124}{225} \approx 4,995555556$$

D) El error para I_1^{h} era por defecto ($E_1 > 0$)

El error para I_2^{h} era por exceso ($E_2 < 0$)