EJERCICIO -11 Dado el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{cases} y=e^{-(x^2+y^2)} & \text{I} \\ x+2y+z=8 & \text{II} \\ z=x^3+y & \text{III} \end{cases}$$

A) Aproxime a la solución utilizando el método de Newton para sistemas.

• Usando III en II: $x+2y+x^3+y=8 \rightarrow x^3+x+3y-8=0$ | IV

(*) Luego volver p/ definir z.

$$F(v)=\begin{bmatrix} e^{-x^2-y^2}-y \\ x^3+x+3y-8 \end{bmatrix} \qquad J(v)=\begin{bmatrix} -2x\,e^{-(x^2+y^2)} & -2y\,e^{-(x^2+y^2)}-1 \\ 3x^2+1 & 3 \end{bmatrix} \qquad v_i=v_{i-1}-vc_i$$

$$v_0=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

It. 1: $vc^0=J^{-1}(v_0)F(v_0)=\begin{bmatrix} -1,5 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v_1=\begin{bmatrix} 1,5 \\ -1 \end{bmatrix}$

It. 2: $vc^1=J^{-1}(v_1)F(v_1)=\begin{bmatrix} -0,3379\,173\,463 \\ -1,168\,713\,522 \end{bmatrix} \qquad v_2=\begin{bmatrix} 1,837\,917\,346 \\ 0,168\,713\,522 \end{bmatrix}$

It. 3: $vc_2=\begin{bmatrix} 0,013\,950\,053\,44 \\ 0,1323717843 \end{bmatrix} \qquad v_3=\begin{bmatrix} 1,823\,967\,293 \\ 0,036\,341\,7372 \end{bmatrix}$ ✓

$x \approx 1,823\,967\,293$

$y \approx 0,036\,341\,7372$

$z \approx 6,236\,791\,301.$

EJERCICIO -12 Se quiere determinar una aproximación a las coordenadas de las intersecciones entre :

$$\begin{cases} 4x^2+y^2+2xy-y=2 \\ 2x^2+3xy+y^2=3 \end{cases}$$

utilizando el método de Newton para sistemas.

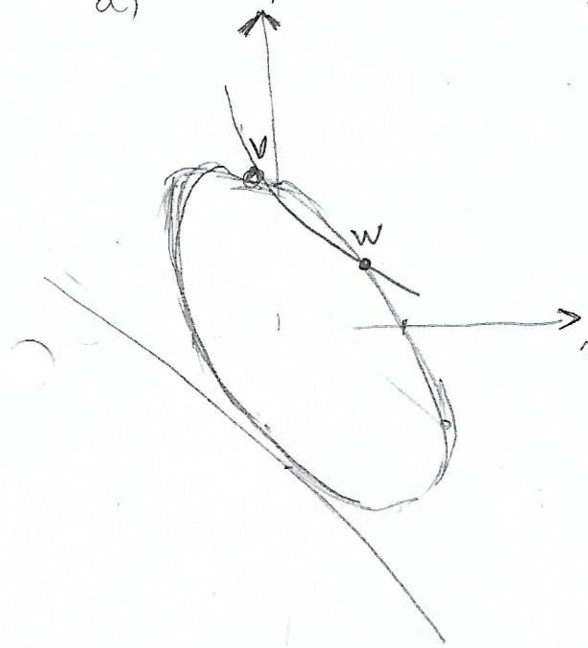
A) Realice una gráfica y obtenga puntos próximos a las intersecciones.

B) Realice 5 iteraciones a partir los puntos anteriores.

C) Reduce a una sola ecuación y apliqua N-R para ecuaciones no lineales.

---

a)



Hay dos intersecciones para la elipse y la hipérbola.

Ambos con $y>0$.

Una para $x>0$, otra con $x<0$

b) $V_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\quad F(V) = \begin{bmatrix} 4x^2+y^2+2xy-y-2 \\ 2x^2+3xy+y^2-3 \end{bmatrix}$

$$J(V) = \begin{bmatrix} 8x+2y & 2y+2x-1 \\ 4x+3y & 3x+2y \end{bmatrix}$$

It. 1 $\quad VC_0 = J^{-1}(V_0)F(V_0) = \begin{bmatrix} -0,5 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad V_1 = VC_0 - V_0 = \begin{bmatrix} -0,5 \\ 4 \end{bmatrix}$

It. 2 $\quad VC_1 = J^{-1}(V_1)F(V_1) = \begin{bmatrix} -0,014\,705\,882\,35 \\ 1,176\,470\,588 \end{bmatrix} \qquad V_2 = VC_1 - V_1 = \begin{bmatrix} -0,485\,294\,117\,7 \\ 2,823\,529\,412 \end{bmatrix}$

It. 3 $\quad VC_2 = J^{-1}(V_2)F(V_2) = \begin{bmatrix} -0,045\,772\,057\,61 \\ 0,389\,264\,7049 \end{bmatrix} \qquad V_3 = VC_2 - V_2 = \begin{bmatrix} -0,439\,522\,0601 \\ 2,434\,264\,707 \end{bmatrix}$

It. 4 $\quad VC_3 = J^{-1}(V_3)F(V_3) = \begin{bmatrix} -0,011\,502\,609\,97 \\ -0,046\,773\,278\,58 \end{bmatrix} \qquad V_4 = VC_3 - V_3 = \begin{bmatrix} -0,428\,019\,450\,1 \\ 2,481\,037\,986 \end{bmatrix}$

It. 5 $\quad VC_4 = J^{-1}(V_4)F(V_4) = \begin{bmatrix} 1,295\,874\,758 \times 10^{-4} \\ 0,09119\,330\,143 \end{bmatrix} \qquad \boxed{V_5 = \begin{bmatrix} -0,428\,149\,0376 \\ 2,389\,844\,685 \end{bmatrix}}$

(*) La otra solución, exacta, es $w = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \end{bmatrix}$ → Hay una o

C) Para una ecuación única:

$4x^2 + \cancel{y^2} + 2xy - y - 2 = 2x^2 + 3xy + \cancel{y^2} - 3$

$2x^2 - xy - y + 1 = 0$

$2x^2 + 1 = y(x+1)$

$$\boxed{\frac{2x^2+1}{x+1} = y = f(x)}$$

→ Expresión para aplicar Newton-Raphson.

- Función continua y derivable $\forall x \neq -1$

$x_0 = 1$ $\qquad f(x) = \frac{2x^2+1}{x+1}$ $\qquad f'(x) = \frac{4x^2+4x-2x^2-1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+4x-1}{(x+1)^2}$

It. 1 $\qquad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ $\qquad$ (*)

4) Considere el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$x^2 + y = 16.45$$
$$x + y^2 = 21.14$$

a) Realice tres iteraciones del método de Newton para calcular una solución aproximada al sistema. Utilice como condiciones iniciales el vector [3, 4]

b) Luego de las tres iteraciones calcule el valor de la norma 2 del residuo.

Escribo $F(x)$:

$$\begin{bmatrix} x^2 + y = 16,45 \\ x + y^2 = 21,14 \end{bmatrix}$$

1. Calculamos la Jacobiana: $J = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 2y \end{bmatrix}$

Condiciones iniciales (X^0): $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

Iteración 0:

$$J(x^0) = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \qquad F(x^0) = \begin{bmatrix} 9+4-16,45 \\ 3+16-21,14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3,45 \\ -2,14 \end{bmatrix}$$

$$J^{-1}(x^0) = \begin{bmatrix} \frac{8}{47} & -\frac{1}{47} \\ -\frac{1}{47} & \frac{6}{47} \end{bmatrix} \qquad vc^{(0)} = J^{-1}(x^0)\,F(x^0) = \begin{bmatrix} \frac{8}{47} & -\frac{1}{47} \\ -\frac{1}{47} & \frac{6}{47} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3,45 \\ -2,14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,541\ 702\ 127\ 7 \\ -0,199\ 787\ 234 \end{bmatrix}$$

$$x^1 = x^0 - vc^0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0,541\ 702\ 127\ 7 \\ -0,199\ 787\ 234 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,541\ 702\ 128 \\ 4,199\ 787\ 234 \end{bmatrix}$$

Iteración 1

$$J(x^1) = \begin{bmatrix} 7,083404255 & 1 \\ 1 & 8,399574468 \end{bmatrix} \qquad F(x^1) = \begin{bmatrix} 0,293\ 441\ 1954 \\ 0,0399\ 1493857 \end{bmatrix}$$

$$vc^{(1)} = J^{-1}(x^1) \cdot F(x^1) = \begin{bmatrix} 0,041\ 452\ 418\ 56 \\ 1,830\ 426\ 048 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \qquad x^{(2)} = x^{(1)} - vc^{(1)} = \begin{bmatrix} 3,500\ 249\ 709 \\ 4,19997027 \end{bmatrix}$$

Iteración 2:

$$J(x^2) = \begin{bmatrix} 7,000\ 499\ 418 & 1 \\ 1 & 8,399\ 940\ 553 \end{bmatrix} \qquad F(x^2) = \begin{bmatrix} 1,718\ 301\ 959 \times 10^{-3} \\ 3,336\ 38 \times 10^{-8} \end{bmatrix}$$

$$vc^{(2)} = J^{-1}(x^2) \cdot F(x^2) = \begin{bmatrix} 2,496\ 999\ 54 \times 10^{-4} \\ -2,972\ 242\ 346 \times 10^{-5} \end{bmatrix} \qquad x^3 = x^2 - vc^2 = \begin{bmatrix} 3,500\ 000\ 009 \\ 4,199\ 999\ 999 \end{bmatrix}$$

6

b) Calcular la norma 2 del residuo, para iteraciones 2 y 3.

$$\|x^3 - x^2\|_2 = \sqrt{((3,500\,000\,009 - 3,500\,249\,709)^2 + (4,199\,970\,277 - 4,199\,999\,999)^2}$$

EJERCICIO -9 Se quiere determinar una aproximación a las coordenadas de intersecciones entre :

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y^2 - x^2 = 1 \end{cases}$$

utilizando el método de Newton para ecuaciones no lineales.

A) Realice una gráfica y aísle las raíces obtenga puntos próximos a las intersecciones.
B) Utilizando el método de Newton para sistemas de ecuaciones no lineales realice 5 iteraciones a partir los puntos anteriores. ¿Están convergiendo?
C) ¿Podría resolver el mismo problema aplicando Newton para ecuaciones no lineales?. Si es posible, aplíquelo y compare los resultados anteriores.
D) ¿Que puede decir del error en cada caso?

$$F(x,y) = F(X) = \begin{bmatrix} -x^3 + y \\ -x^2 + y^2 - 1 \end{bmatrix} \qquad J(X) = \begin{bmatrix} -3x^2 & 1 \\ -2x & 2y \end{bmatrix} \qquad X^0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1,5 \end{bmatrix}$$

(Obtenido desde gráfica)
(Dos raíces, simétricas)

- Iteración 1:

$$F(X^0) = \begin{bmatrix} -0,50 \\ 0,25 \end{bmatrix} \qquad J(X^0) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \qquad VC^0 = J^{-1}(X^0)F(X^0) = \begin{bmatrix} 0,178\,571\,428\,6 \\ 0,035\,714\,285\,71 \end{bmatrix}$$

$$X^1 = X^0 - VC^0 = \begin{bmatrix} -1,178\,571\,429 \\ -1,535\,714\,286 \end{bmatrix}$$

- Iteración 2:

$$F(X^1) = \begin{bmatrix} 0,101\,357\,507\,1 \\ -0,030\,612\,244\,09 \end{bmatrix} \qquad J(X^1) = \begin{bmatrix} -4,167\,091\,837 & 1 \\ 2,357\,142\,857 & -3,071\,428\,572 \end{bmatrix}$$

$$VC^1 = J^{-1}(X^1)F(X^1) = \begin{bmatrix} -0,026\,882\,393\,95 \\ -0,010\,663\,897\,28 \end{bmatrix} \qquad X^2 = X^1 - VC^1 = \begin{bmatrix} -1,151\,689\,035 \\ -1,525\,050\,389 \end{bmatrix}$$

- Iteración 3:

$$F(X^2) = \begin{bmatrix} 2,535\,703\,364 \times 10^{-3} \\ -6,089\,443\,98 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \qquad J(X^2) = \begin{bmatrix} -3,979\,162\,898 & 1 \\ 2,303\,378\,069 & -3,050\,100\,777 \end{bmatrix}$$

$$VC^2 = \begin{bmatrix} -7,245\,872\,071 \times 10^{-4} \\ -3,475\,471\,67 \times 10^{-4} \end{bmatrix} \qquad X^3 = X^2 - VC^2 = \begin{bmatrix} -1,152\,413\,622 \\ -1,524\,702\,842 \end{bmatrix}$$

- Iteración 4

$$F(x^3) = \begin{bmatrix} 5,768\ 314\ 997 \times 10^{-3} \\ -3,338\ 399\ 439 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \qquad J(x^3) = \begin{bmatrix} -3,984\ 171\ 468 & 1 \\ 2,309\ 827\ 244 & -3,049\ 405\ 684 \end{bmatrix}$$

$$vc^3 = J^{-1}(x^3)\,F(x^3) = \begin{bmatrix} -1,447\ 660\ 394 \times 10^{-3} \\ 5,877\ 617\ 2 \times 10^{-7} \end{bmatrix} \qquad x^4 = x^3 - vc^3 = \begin{bmatrix} -1,150\ 965\ 961 \\ -1,524\ 703\ 43 \end{bmatrix}$$

- Iteración 5

$$F(x^4) = \begin{bmatrix} 7,240\ 535\ 35 \times 10^{-6} \\ -2,094\ 653\ 5 \times 10^{-6} \end{bmatrix} \qquad J(x^4) = \begin{bmatrix} -3,974\ 167\ 93 & 1 \\ 2,301\ 931\ 922 & -3,049\ 406\ 86 \end{bmatrix}$$

$$vc^4 = \begin{bmatrix} -2,035\ 738\ 144 \times 10^{-6} \\ -8,498\ 298\ 977 \times 10^{-7} \end{bmatrix} \qquad x^5 = \begin{bmatrix} -1,150\ 963\ 925 \\ -1,524\ 702\ 58 \end{bmatrix}$$

C) ¿Cómo aplicar? —— Generar ecuación única

I) $y = x^3$ → Reemplazando II con I: $f(x) = x^6 - x^2 - 1 = 0$

III) $y^2 - x^2 = 1$

$$f'(x) = 6x^5 - 2x$$

$$a_0 = 1 \qquad a_1 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)} = 1 - \frac{-1}{4} = \frac{5}{4} = 1,25 \qquad a_2 = 1,25 - \frac{f(1,25)}{f'(1,25)} = 1,25 - \frac{1,252\ 197\ 266}{15,810\ 546\ 88} = 1,170\ 799\ 876$$

$$a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)} = 1,151\,926\ 255 \qquad a_3 = a_2 - \frac{f(a_2)}{f'(a_2)} = 1,150\ 966\ 308$$

$$a_4 = 1,150\ 963\ 925.$$

$$\boxed{x_4 \approx 1,150\ 963\ 925}$$

$$y_4 = x_4^3 \rightarrow \boxed{y_4 \approx 1,524\ 702\ 58}$$

- Newton para ecuaciones no lineales converge más rápido que Newton para sistema de ecuaciones no lineales.

* Soluciones simétricas.

$$sol_1(x,y) = (1,150\ 963\ 925,\ 1,524\ 702\ 58)$$

$$sol_2(x,y) = (-1,150\ 963\ 925,\ -1,524\ 702\ 58)$$

D) $E(a_4)$

EJERCICIO -13 Una cadena montañosa puede modelarse por medio de la función:

$\mathbf{h = \ln(x+1) + x^2 \cos(x) + 100}$ válida en el intervalo **(0 ; 12)**.

Aproxime a la posición del mayor pico y el valle más profundo de la cadena montañosa en dicho intervalo.

A) Aplicando el método de newton para ecuaciones no lineales.
B) Transforme la ecuación en un sistema de dos ecuaciones no lineales y aplique para resolverlo el método de Newton para sistemas.
C) Encuentre un intervalo en donde seguro se encuentre la distancia vertical entre la parte más profunda y el pico más alto de dicha cadena montañosa.

---

a) $f(x) = \ln(x+1) + x^2\cos(x) + 100$ $\qquad I = [0, 12)$

$g(x) = f'(x) = \dfrac{1}{x+1} + 2x\cos(x) - x^2 \operatorname{sen}(x)$

Hallar máximos/mínimos de la función

$g'(x) = f''(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2} + 2\cos(x) - 2x\operatorname{sen}(x) - 2x\operatorname{sen}(x) - x^2\cos(x)$ $\qquad f'(x) = 0$

$g'(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2} + (2 - x^2)\cos(x) - 4x\operatorname{sen}(x)$ $\qquad x_i = x_{i-1} - \dfrac{g(x)}{g'(x)}$

$g(x) = 0 \rightarrow 2x\cos(x) = x^2 \operatorname{sen}(x) \rightarrow x\,tg(x) - 2 = 0$

(desprecio $\frac{1}{x+1}$)

· Calculando valores de $f(x)$, hallo:

máx en intervalo: $x \approx 6,5$

mín en intervalo: $x \approx 9,5$.

Para hallar valores más precisos, hallo los ceros aproximados de $g(x) = f'(x)$ usando Newton-Raphson.

$x_0 = 6,5$

$x_1 = x_0 - \dfrac{g(x_0)}{g'(x_0)} = 6,5 - (-0,08326522162) = 6,583265222$

$x_2 = x_1 - \dfrac{g(x_1)}{g'(x_1)} = 6,583265222 - 2,134468004 \times 10^{-3} = 6,581130754$

$x_3 = x_2 - \dfrac{g(x_2)}{g'(x_2)} = 6,581129465$ $\qquad x_4 = 6,581129465. \rightarrow$ Máximo

1) Un sistema de calentamiento no funciona correctamente. Se registraron las temperaturas reales (T_r) y las medidas (T_m) por el controlador durante 15 horas y se modelaron por medio de:

$$T_r = 50 - 10cos(0,8t - 8) - (t-5)^2 + 5t + 50$$
$$T_m = -(t-5)^2 + 7t + 40$$

donde la temperatura se da grados y el tiempo t en horas.

a) Determine analíticamente cuantas veces el controlador midió el valor real.

b) Determine con un error menor al segundo, el tiempo en que la temperatura pasó de ser menor a la medida del controlador a ser mayor, utilizando un método de alto orden.

c) ¿Qué es un método de alto orden?¿Como se mide ese orden?

---

a) Para determinar cuándo el valor medido T_m coincide con el valor real T_r, deben hallarse las intersecciones entre ambas funciones.

$$T_r = T_m \Rightarrow 50 - 10\cos(0,8t-8) - \cancel{(t-5)^2} + 5t + 50 = -\cancel{(t-5)^2} + 7t + 40$$

$$100 - 10\cos(0,8t-8) + 5t = 7t + 40$$

$$T_1(t) = \boxed{10\cos(0,8t-8) + 2t - 60 = 0}$$

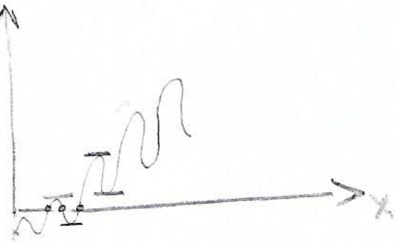
Cada raíz de esta función representa una intersección entre Tr y Tm.

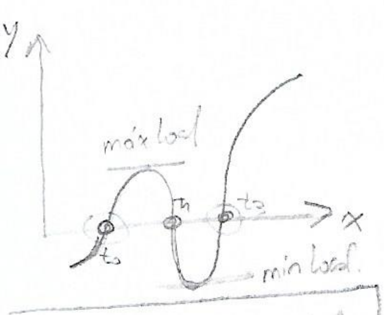
Existen tres ceros, obtenidos mediante aproximación de Taonc

$t_0 \approx 25,3$

$t_1 \approx 26,8$

$t_2 \approx 31,3$





b) $1[s] = \dfrac{1[h]}{60\,\cancel{[min]}} \cdot \dfrac{1\,\cancel{[min]}}{60\,[s]} = \dfrac{1}{3600}[h] = 2,7 \times 10^{-4}[h]$ → cota superior del error

Hallamos los valores de Tr y Tm en las cercanías de t_0, t_1, t_2

$t_0 \begin{cases} T_r(25) \cong -183,4 \\ t_m(25) = -185 \end{cases}$ $(t_r > t_m)$

$t_0 \begin{cases} T_r(25,6) \approx -206,32 \\ T_m(25,6) \approx -205,5 \end{cases}$ $\boxed{(t_r < t_m)}$

$t_2 \begin{cases} T_r(31) \cong -416,3 \\ T_m(31) \cong -419 \end{cases}$ $(t_r > T_m)$

$t_2 \begin{cases} T_r(33) \cong -528 \\ T_m(33) \cong -513 \end{cases}$ $(T_r < T_m)$

• Utilizo el método de Newton - Raphson, para aproximar t_0 y t_2

$$T_1'(t) = -10\,sen(0,8t-8) \cdot (0,8) + 2$$

15|__

Ento[illegible] aproximar t_1 resulta:

$$t_{i+1} = t_i - \frac{T_n(t_i)}{T_n'(t_i)} = t_i + \frac{10\cos(0{,}8t-8)+2t-60}{2-8\,\mathrm{sen}(0{,}8t-8)}$$

- Aproximando t_0:

$t_{0,0} = 25{,}2844 \quad t_{0,1} = t_{0,0} + \dfrac{T_n(t_{0,0})}{T_n'(t_{0,0})}$

$t_{0,1} = 25{,}284\,362\,77$

$t_{0,2} = 25{,}284\,362\,77$

$t_{0,3} = 25{,}284\,362\,77$

$\varepsilon_{0,3} = t_{0,3} - t_{0,2} < 10^{-10}$.

[no calculable con calculadora fx-570. Tomando el umbral menor]

- Aproximando t_2

$t_{2,0} = 31{,}2759$

$t_{2,1} = 31{,}275\,905\,69$

$t_{2,2} = 31{,}275\,905\,69$

$\varepsilon_{0,2} = t_{0,2} - t_{0,1} < 10^{-10}$

c)