Matemática Superior: estrategias de resolución de problemas.

- Caso general / procedimiento básico — Raíces de funciones.

1) Especificar explícitamente las funciones intervinientes.
2) Especificar el dominio de las funciones y del problema.
3) Hallar puntos críticos de las funciones $[f'(x)=0 \vee \nexists f'(x)]$
4) Aislar raíces y buscar las útiles.
5) Buscar cambios de signo en extremos (cotas inferior y superior)
6) Aplicar métodos numéricos.

- Transformada de Laplace para resolución de ecuaciones diferenciales.

Método Predictor - Corrector de Milne — Dada $y' = f(x, y)$

$$y^{P}_{(x_{n+1})} = y_{(x_{n-3})} + \frac{4}{3}h\left[2y'_{(x_{n-2})} - y'_{(x_{n-1})} + 2y'_{(x_n)}\right]$$ • Predictor de y (y^P)

$$y'^{P}_{(x_{n+1})} = f\left(x_{n+1}, y^{P}_{(x_{n+1})}\right)$$ • Predictor de y' (y'^P)

$$y^{C}_{(x_{n+1})} = y_{(x_{n-1})} + \frac{h}{3}\left[y'_{(x_{n-1})} + 4y'_{(x_n)} + y'^{P}_{(x_{n+1})}\right]$$ • Corrector de y (y^E)

El <u>Método PC</u> requiere de 4 valores previos para el valor <u>predictor</u> $n+1$:

$y^P_{(x_{n+1})}$ $\begin{cases} \bullet\ y(x_{n-3}) \quad \bullet\ y'(x_{n-2}) \quad \bullet\ y'(x_{n-1}) \quad \bullet\ y'(x_n) \end{cases}$

Requiere de 3 valores previos para calcular el valor <u>corrector</u> $n+1$, y del valor predictor $n+1$.

$y^C_{(x_{n+1})}$ $\begin{cases} \bullet\ y(x_{n-1}) \quad \bullet\ y'(x_{n-1}) \quad \bullet\ y'(x_n) \quad \bullet\ y'^{P}(x_{n+1}) \end{cases}$

Tema 1: Transformadas de Laplace.

- Funciones de Transferencia y de respuesta al impulso, $H(s)$ y $h(t)$

$$\mathcal{L}[h(t)] = H(s) \longleftrightarrow h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)]$$

Para entrada $u(t) = \delta(t) \longrightarrow$ $X(s) = H(s)\mathcal{L}[\delta(t)] = H(s)$.

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \mathcal{L}^{-1}[H(s)]$$

(*) En las FT y RI se asumen Todas las condiciones iniciales en cero.

Propiedades de la Transformada Laplace bilateral

Expresiones de base	$f_*(t)$	$R: Roc$ $R_0 = \{s \in \mathbb{C} / Real(s) > 0\}$	$F_*(S)$
Linealidad	$a f_1(t) + b f_2(t)$	$R \supseteq R_1 \cap R_2$	$a F_1(S) + b F_2(S)$
Desplazamiento temporal	$f(t-a)$	R	$F(S)\ e^{-aS}$
Desplazamiento en frecuencia	$f(t)\ e^{at}$	$R_{(s-a)}$	$F(S-a)$
Escalamiento	$f(at) \quad a>0$	$R_{\left(\frac{s}{a}\right)}$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{S}{a}\right)$
Convolución	$f_1(t) * f_2(t)$	$R \supseteq R_1 \cap R_2$	$F_1(S) . F_2(S)$
Derivada temporal	$\frac{d^n f_1(t)}{dt^n}$	$R \supseteq R_1$	$(S)^n F_1(s)$
Integración temporal	$\int_{-\infty}^{t} f_1(u) du$	$R \supseteq R_1 \cap R_0$	$\frac{1}{S} F_1(S)$
Derivada en frecuencia	$t^n f(t)$	R	$(-1)^n \frac{d^n}{d S^n} F(S)$
Conjugación	$\overline{f(t)}$	R	$\overline{F(\bar{s})}$
Simetría	$f(-t)$	$R_{(-s)}$	$F(-s)$
Integral impropia	$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$	$F(0)$	
Teorema del valor inicial si $f(t)=0$ si $t<0$ y sin singularidades en 0	$f(0^+)$	$\lim_{s \to \infty} S F(S)$	
Teorema del valor final si $f(t)=0$ si $t<0$ y sin singularidades en 0	$\lim_{t \to \infty} F(t)$	$\lim_{s \to 0} S F(S)$	

Teorema de corrim.

- Transformada de una derivada:

$$\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

Descomposición en fracciones simples: (4 casos)

- **Definición:**

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0 x^0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0 x^0}$$

- Donde $m > n$, y expresando a $B(x)$ como producto de factores lineales o cuadráticos, de la forma:

$$B(x) = (x+a_n)(x+a_{n-1})\ldots(x+a_1)(x+a_0)$$

$$B(x) = (a_n x^2 + b_n x + c_n)(a_{n-1}x^2 + b_{n-1}x + c_{n-1})\ldots(a_1 x^2 + b_1 x + c_1)(a_0 x^2 + b_0 x + c_0)$$

- Cada caso se iguala luego a $\frac{A(x)}{B(x)}$, a fin de despejar las constantes A_i y B_i con un sistema de ecuaciones.

Factores lineales distintos:

Ningún factor es idéntico.

$$\frac{A_1}{(x+a_1)} + \frac{A_2}{(x+a_2)} + \cdots + \frac{A_m}{(x+a_m)}$$

Factores lineales repetidos:

Pares de factores idénticos:

$$\frac{A_1}{(x+a_1)} + \frac{A_2}{(x+a_1)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x+a_1)^m}$$

Factores cuadráticos distintos:

Ningún par de factores igual

$$\frac{A_1 x + B_1}{(a_1 x^2 + b_1 x + c_1)} + \frac{A_2 x + B_2}{(a_2 x^2 + b_2 x + c_2)} + \ldots + \frac{A_n x + B_m}{(a_m x^2 + b_m x + c_m)}$$

Factores cuadráticos iguales:

$$\frac{A_1 x + B_1}{(a_1 x^2 + b_1 x + c_1)} + \frac{A_2 x + B_2}{(a_1 x^2 + b_1 x + c_1)^2} + \cdots + \frac{A_m x + B_m}{(a_1 x^2 + b_1 x + c_1)^m}$$

Cálculo de cota de error para resolución de sistemas lineales por Jacobi y Gauss-Seidel.

Para poder determinar cotas de error a las aproximaciones de sistemas de ecuaciones lineales bajo estos métodos, debe hallarse, primero, la matriz M. Esta matriz es usada en la fórmula:

$$\boxed{\|E(\vec{x})\|_\infty = \frac{\|M\|_\infty}{1 - \|M\|_\infty} \cdot \|\vec{x}^{\,n+1} - \vec{x}^{\,n}\|_\infty}$$

(*) Norma infinita del error (Distancia de Chebyshev)

• n: iteración (debería ser subíndice)

El cálculo de M se lleva adelante usando las matrices "N" y "P", variando la forma de "N" acorde al método utilizado. Para el siguiente desarrollo, se conviene en llamar "A" a la expresión matricial de los coeficientes del sistema de ecuaciones lineales.

• **Jacobi**: N es una matriz cuadrada, cuyos elementos no nulos están en la diagonal y son los mismos de la diagonal de A.

$$\rightarrow A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow N = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

• **Gauss-Seidel**: N es una matriz triangular inferior, cuyos elementos no nulos son los mismos desde la diagonal de A hacia abajo, incluyendo a la diagonal.

$$\rightarrow A = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 9 & 16 & 5 \\ 7 & 1 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow N = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 9 & 16 & 0 \\ 7 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

A partir de "A" y "N", obtenemos la matriz "P", tal que $\boxed{P = N - A}$

Finalmente, "M" se define, para el cálculo de la cota, como $\boxed{M = N^{-1}P}$

Extrapolación de Richardson (para ecuaciones diferenciales)

Se utiliza para mejorar los resultados de un método numérico. A partir de una estimación de igual forma mejora la precisión en el cálculo numérico de la derivada de una función, partiendo de la base de la serie de Taylor

Fórmula general: $$\boxed{A = \frac{t^{k_1} A\left(\frac{h}{t}\right) - A(h)}{(t^{k_1} - 1)} + O(h^{k_2})}$$

Siendo $O(h^{k_1})$ el término más grande del error, el uso de la extrapolación de Richardson permite substraer este término y obtener así una mejor aproximación.

Desarrollo:

- Dada la fórmula clásica para obtener la derivada de una función $f(x)$, sabemos que $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[f(x+h) - f(x)\right]$. Una aproximación tosca para el valor de $f'(x)$ luego puede obtenerse mediante la expresión ~~f(x)-f(x+h)~~

$$f'(x) \approx \frac{1}{h}\left[f(x+h) - f(x)\right]$$

- Una aproximación al error de esta fórmula puede obtenerse mediante el Teorema de Taylor:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \underline{\frac{1}{2}h^2 f''(\varepsilon)}$$

- Reescribiendo: $$f'(x) = \frac{1}{h}\left[f(x+h) - f(x)\right] \underline{- \frac{1}{2}hf''(\varepsilon)}$$

$$\boxed{-\frac{1}{2}hf''(\varepsilon) = O(h)}$$

(término del error) por truncamiento

$x < \varepsilon < x+h$

- Tomando en cuenta la ventaja que representa la convergencia de los procesos numéricos cuando esta ocurre con potencias de mayor orden aproximándose a cero, aquí buscamos una aproximación para $f'(x)$ donde el error se comporte como $O(h^2)$. Acudimos otra vez a Taylor para lograr una fórmula con ese error:

$$\begin{cases} f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2!}h^2 f''(x) + \frac{1}{3!}h^3 f'''(x) + \frac{1}{4!}h^4 f^{(4)}(x) + \ldots \\ f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{1}{2!}h^2 f''(x) - \frac{1}{3!}h^3 f'''(x) + \frac{1}{4!}h^4 f^{(4)}(x) + \ldots \end{cases}$$

- Restando ambas expresiones, obtenemos que:

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + 2\frac{1}{3!}h^3 f'''(x) + 2\frac{1}{5!}f^{(5)}(x) + \ldots$$

- Reacomodando términos: $f'(x) = \frac{1}{2h}\left[f(x+h) - f(x-h)\right] - \frac{2}{3!}h^2 f'''(x) - \frac{2}{5!}h^4 f^{(5)}(x) - \ldots$ (I)

(I) llegamos a otra fórmula para poder aproximar $f'(x)$

$$\boxed{\text{Entonces: } f'(x) \approx \frac{1}{2h}\left[f(x+h) - f(x-h)\right]\text{, con un error cuyo término mayor es } -\frac{1}{6}h^2 f'''(x) \text{ transformándolo en } O(h^2)}$$

- Utilizando el término de error del Teorema de Taylor, bajo un razonamiento similar puede obtenerse la siguiente fórmula:

$$f'(x) = \frac{1}{2h}\left[f(x+h) - f(x-h)\right] - \frac{1}{6}h^2\left[\frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)}{2}\right]$$

Podemos expresar el último término como $\boxed{\frac{1}{6}h^2 f'''(\xi)}$ debido a que representa la media de los dos valores de f''' en el intervalo $[x-h, x+h]$. Por tanto, podemos tener seguridad de que se encuentra entre el menor y mayor valor de f''' para este intervalo.

- Expresamos (I) como: $f' = \frac{1}{2h}\left[f(x+h) - f(x-h)\right] + a_2h^2 + a_4h^4 + a_6h^6 + \ldots$ (II), donde las constantes a_i dependen de f y de x. Manteniendo fijas f y x, podemos definir una función del paso h: $\varphi(h) = \frac{1}{2h}\left[f(x+h) - f(x-h)\right]$ (III) siendo $\varphi(h)$ una aproximación a $f'(x)$ con un error de orden $O(h^2)$.

- Tomando (II), calculamos también para $\frac{h}{2}$. Entonces:

$$\begin{cases} \varphi(h) = f'(x) - a_2h^2 - a_4h^4 - a_6h^6 - \ldots \\ \varphi\left(\frac{h}{2}\right) = f'(x) - a_2\left(\frac{h}{2}\right)^2 - a_4\left(\frac{h}{2}\right)^4 - a_6\left(\frac{h}{2}\right)^6 - \ldots \end{cases}$$

Multiplicando la segunda por 4 y restándola a la primera, luego:

$$\varphi(h) - 4\varphi\left(\frac{h}{2}\right) = -3f'(x) - \frac{3}{4}a_4h^4 - \frac{15}{16}a_6h^6$$

Dividiendo por -3 y reacomodando, resulta: $\boxed{\varphi\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{3}\left[\varphi\left(\frac{h}{2}\right) - \varphi(h)\right] = f'(x) + \frac{1}{4}a_4h^4 + \frac{5}{16}a_6h^6}$

Esta fórmula, luego, nos permite mejorar la aproximación hasta un error del orden $O(h^4)$. Dado que ahora la serie comienza por $\frac{1}{4}a_4h^4$ y asumimos un h pequeño, esto implica una dramática mejora en la aproximación.

- Este proceso puede repetirse. Si definimos $\Phi(h) = \frac{4}{3}\varphi(\frac{h}{2}) - \frac{1}{3}\varphi(h)$, podemos derivar las anteriores fórmulas para obtener:

$$\begin{cases} \phi(h) = f'(x) + b_4 h^4 + b_6 h^6 \\ \phi(\frac{h}{2}) = f'(x) + b_4 (\frac{h}{2})^4 + b_6 (\frac{h}{2})^6 \end{cases}$$

Combinando, tenemos: $\phi(h) - 16\phi(\frac{h}{2}) = -15f'(x) + \frac{3}{4} b_6 h^6 + \dots$

Luego: $\phi(\frac{h}{2}) + \frac{1}{15}\left[\phi(\frac{h}{2}) - \phi(h)\right] = f'(x) - \frac{1}{20} b_6 h^5$

La última fórmula nos permite estimar el error para $O(h^6)$, y podemos continuar repitiendo el procedimiento para acotar todavía más el error.

Usando el estimador de Richardson:

Aproximación numérica de solución de ecuaciones diferenciales

- Método de Euler
- Métodos predictor - corrector
- Método de Runge - kutta (órdenes II y IV)

- x: solución exacta (analítica)
- X: solución aproximada
- h: step-size.

Fórmulas:

Método de Euler:

- Método de 1er orden.
- Cada paso tiene un error de orden $O(h^2)$

$$\boxed{\begin{aligned} X_0 &= x_0 \\ X_{n+1} &= X_n + hF_n \end{aligned} \quad (n \geq 0)}$$

Método predictor - corrector:

- Método de 2º orden
- Error de orden $O(h^3)$

1. Computar valor 'predictado' de X_{n+1} ($\hat{X}_{n+1}$)

$$\hat{X}_{n+1} = X_n + hf(t_n, X_n)$$

2. Computar el valor 'corregido' de X_{n+1}

$$X_{n+1} = X_n + \frac{1}{2}h\left[f(t_n, X_n) + f(t_{n+1}, \hat{X}_{n+1})\right]$$

$\hat{X}$: valor "crudo" de X, computado en un primer caso para luego ser refinado en el paso siguiente.

Runge - Kutta (II):

- 2º orden
- Error $O(h^3)$

$$\begin{aligned} c_1 &= hf(t_n, X_n) \\ c_2 &= hf(t_n + h, X_n + c_1) \\ X_{n+1} &= X_n + \frac{1}{2}(c_1 + c_2) \end{aligned}$$

Runge - Kutta (IV):

$$\begin{aligned} c_1 &= hf(t_n, X_n) \\ c_2 &= hf(t_n + \tfrac{1}{2}h, X_n + \tfrac{1}{2}c_1) \\ c_3 &= hf(t_n + \tfrac{1}{2}h, X_n + \tfrac{1}{2}c_2) \\ c_4 &= hf(t_n + h, X_n + c_3) \\ X_{n+1} &= X_n + \frac{1}{6}(c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4) \end{aligned}$$

Modelos Numéricos
RESUMEN DE FÓRMULAS

Cálculo aproximado de raíces de ecuaciones no lineales

Método de Punto Fijo

Hipótesis:

1. $g(x)$ *continua y diferenciable en* $[a,b]$
2. $a \leqslant g(x) \leqslant b, \ \forall x \in [a,b]$
3. $\lambda = \underset{x \in [a,b]}{máx} |g'(x)| < 1$

Tesis:

1. $x = g(x)$ *tiene una única solución* α *en* $[a,b]$
2. *para cualquier elección de* $x_0 \in [a,b]$, $\lim_{n \to \infty} x_n = \alpha$

Método:

$x_{i+1} = g(x_i), \qquad i = 0, 1, \ldots, n$

Cota de Error:

$$|E| = |x_{n+1} - r| \leqslant \begin{cases} (si \ -1 < g'(x) < 0, \forall x \in [a.b]): & \dfrac{m}{1+m}|x_n - x_{n+1}| \\ (para\ cualquier\ otro\ caso): & \dfrac{m}{1-m}|x_n - x_{n+1}| \end{cases}; \qquad m = \underset{x \in [a,b]}{máx} |g'(x)| < 1$$

Método de Newton-Raphson

Hipótesis:

1. $f(x)$ *tiene una raíz en* $[a,b]$
2. $sg\, f(a) \neq sg\, f(b)$
3. $sg[f'(x)]$ *es constante en todo el intervalo*
4. $sg[f''(x)]$ *es constante en todo el intervalo*

Método:

Si $f(a) . f''(a) > 0 \Rightarrow \alpha_0 = a$
Si $f(b) . f''(b) > 0 \Rightarrow \alpha_0 = b$

$$\alpha_{k-1} = \alpha_k - \frac{f(\alpha_k)}{f'(\alpha_k)}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

Cota de Error:

$$|r - \alpha_k| \leqslant \frac{|f(\alpha_k)|}{\underset{x \in [a,b]}{mín} |f'(x)|} \qquad (Cota\ generál\ de\ Error)$$

$$|r - \alpha_k| \leqslant \frac{\underset{x \in [a,b]}{máx} |f''(x)|}{2 \underset{x \in [a,b]}{mín} |f'(x)|} (\alpha_k - \alpha_{k-1})^2 \qquad (Criterio\ de\ Parada)$$

Método de Regula-Falsi

Hipótesis:

1. $f(x)$ *es continua en* $[a,b]$
2. $sg\, f(a) \neq sg\, f(b)$
3. $sg[f'(x)]$ *es constante en todo el intervalo*

Método:

$\alpha_0 = a$
$\beta_0 = b$

$$w = \frac{f(\beta_n)\alpha_n - f(\alpha_n)\beta_n}{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}$$

Si $f(\alpha_n) . f(w) \leqslant 0$ *tomar* $\alpha_{n+1} = \alpha_n \ \wedge \ \beta_{n+1} = w$
de lo contrario, tomar $\alpha_{n+1} = w \ \wedge \ \beta_{n+1} = \beta_n$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Método de Gauss

$$a_{i,j}^{(k)}=a_{i,j}^{(k-1)}-\frac{a_{i,k}^{(k-1)}}{a_{k,k}^{(k-1)}}\cdot a_{k,j}^{(k-1)} \qquad \begin{cases} k=1,\dots,n-1 \\ i=k+1,\dots,n \\ j=k+1,\dots,n+1 \\ a_{i,j}^{(0)}=a_{i,j} \end{cases}$$

k: Nro. de Iteración *i: Fila* *j: Columna*

Métodos Iterativos

Sea el sistema $A\bar{x}=\bar{b}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

Método de Jacobi

Despejamos x_i, *con* $i=1,\dots,n$ *de la correspondiente* $i-$*ésima ecuación*

$$x_i^{(m+1)}=\frac{\left(b_i-\sum_{j=1\wedge j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(m)}\right)}{a_{ii}}, \qquad i=1,\dots,n \ \wedge \ m\geqslant 0$$

Análisis de la Convergencia

$$\sum_{j=1;j\neq i}^{n} |a_{i,j}|<|a_{i,i}|, \qquad i=1,2,\dots,n$$

Métodos de Gauss-Seidel

$$x_i^{(m+1)}=\frac{\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(m+1)}-\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(m)}\right)}{a_{ii}}, \qquad i=1,\dots,n \ \wedge \ m\geqslant 0$$

Generalidades de los Métodos Iterativos

Para resolver $A\vec{x}=\vec{b}$ *se puede expresar A como:*

$A=N-P$, *de donde* $(N-P)\vec{x}=\vec{b}\Rightarrow N\vec{x}=\vec{b}+P\vec{x}$

Se define el método iterativo como: $N\vec{x}^{m+1}=\vec{b}+P\vec{x}^{m}$, *para* $\vec{x}_i^{0}=\dfrac{b_i}{max\,a_{i,j}}$

Para el método de Jacovi $N=diag\{a_{1,1},a_{2,2},\dots,a_{n,n}\}$

Para el método de Gauss − Seidel N = a la matriz triangular inferior de A

$$Error=\|\vec{x}-\vec{x}^{(m+1)}\|\leqslant\frac{\|M\|}{1-\|M\|}\|\vec{x}^{(m+1)}-\vec{x}^{m}\|, \qquad donde\ M=N^{-1}P$$

Interpolación – Aproximación de Funciones

Polinomio de Interpolación de Lagrange

$$Pn(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{j=0\wedge j\neq i}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

Error del Polinomio de Interpolación de Lagrange

$$|f(x)-Pn(x)| \leq \max_{x\in I}\left|\frac{Wn(x)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x)\right| \qquad con\ I=[x_0,x_n]$$

$$Wn(x)=(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

$f^{(n+1)}(x)=$ *derivada de orden* $(n+1)$ *de* $f(x)$

Polinomio de Interpolación de Newton

Diferencias Divididas:

$$f[x_0,x_1,\dots,x_n]=\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{\prod_{j=0\wedge j\neq i}^{n}(x_i-x_j)}$$

x_0		x_1		x_2
y_0		y_1		y_2
	$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=a$		$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=b$	
		$\frac{b-a}{x_2-x_0}=c$		

Polinomio de Newton: Parabólico Progresivo

$$f(x)=f[x_0]+(x-x_0)f[x_0,x_1]+(x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2]+\dots+$$
$$+(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})f[x_0,x_1,\dots,x_n]+(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)f[x_0,x_1,\dots,x_n,x]$$

Diferencias Adelantadas (absisas equidistantes):

$$\Delta^k f(x)=\Delta^{k-1}f(x+h)-\Delta^{k-1}f(x) \qquad k=1,2,\dots,n$$
$$\Delta^0 f(x)=f(x)$$

Relación entre Diferencias Divididas y Diferencias Adelantadas:

$$f[x_0,x_1,\dots,x_k]=\frac{\Delta^k f(x_0)}{k!h^k}$$

Polinomio de Newton utilizando Diferencias Adelantadas:

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)\frac{\Delta f(x_0)}{h}+(x-x_0)(x-x_1)\frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2}+(x-x_0)\dots(x-x_2)\frac{\Delta^3 f(x_0)}{3!h^3}+$$
$$+\dots+(x-x_0)\dots(x-x_{n-1})\frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}$$

Diferencias Atrazadas (absisas equidistantes):

$$\nabla^k f(x)=\nabla^{k-1}f(x)-\nabla^{k-1}f(x-h) \qquad k=1,2,\dots,n$$
$$\nabla^0 f(x)=f(x)$$

Estimación del Error para el método de Adams-Bashforth con m=3

$$E = h^5 y^{v}(\epsilon)\frac{251}{720} \qquad x_{n-3} < \epsilon < x_n$$

Fórmulas Predictor-Corrector

Predictor:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \frac{h}{24}[55y'(x_n) - 59y'(x_{n-1}) + 37y'(x_{n-2}) - 9y'(x_{n-3})]$$

Corrector:

$$y^{(k)}(x_{n+1}) = y(x_n) + \frac{h}{24}[9y'^{(k-1)}(x_{n+1}) + 19y'(x_n) - 5y'(x_{n-1}) + y'(x_{n-2})] \qquad k: \textit{nro. de iteración}$$

$y^{(0)}(x_{n+1})$ *se obtiene a partir de Adams – Bashforth*

Estimación del Error para las Fórmulas Predictor-Corrector

$$Ep = h^5 y^{v}(\epsilon)\frac{251}{720} \qquad x_{n-3} < \epsilon < x_n$$

$$Ec = h^5 y^{v}(y)\frac{-19}{720} \qquad x_{n-2} < y < x_{n+1}$$

$$Ec \simeq \frac{-1}{14}[y^{(1)}(x_{n+1}) - y^{(0)}(x_{n+1})] = D_{n+1}$$

Método de Milne

Predictor de 3 puntos

$$y^{(0)}(x_{n+1}) = y(x_{n-3}) + \int_{x_{n-3}}^{x_{n+1}} y'(x)dx \qquad (\textit{Integración abierta})$$

$$y^{(0)}(x_{n+1}) = y(x_{n-3}) + \frac{4}{3}h[2y'(x_{n-2}) - y'(x_{n-1}) + 2y'(x_n)]$$

Corrector de 3 puntos:

$$y^{(k)}(x_{n+1}) = y(x_{n-1}) + \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} y'(x)dx \qquad (\textit{Integración cerrada})$$

$$y^{(k)}(x_{n+1}) = y(x_{n-1}) + \frac{h}{3}[y'(x_{n-1}) + 4y'(x_n) + y'^{(k-1)}(x_{n+1})]$$

Estimación del Error para la Fórmula de Milne

$$Ep = \frac{14}{45}h^5 y^{v}(\epsilon)$$

$$Ec = \frac{-1}{90}h^5 y^{v}(y)$$

$$Ec \simeq \frac{-1}{29}[y^{(1)}(x_{n+1}) - y^{(0)}(x_{n+1})] = D_{n+1}$$

Integración Numérica

Tablas de $I_{i,k}^{(n)}$

k=0 (fórmula cerrada)

n \ i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*denominador*
2	1						2
3	1	4					6
4	1	3					8
5	7	32	12				90
6	19	75	50				288
7	41	216	27	272			840
8	751	3577	1323	2989			17280
9	989	5888	-928	10496	-4540		28350
10	2857	15741	1080	19344	5778		89600
11	16067	106300	-48525	272400	-260550	427368	548752

k=1 (fórmula abierta)

n \ i	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*denominador*
2	1					2
3	2	-1				3
4	11	1				24
5	11	-14	26			20
6	611	-453	562			1440
7	460	-954	2196	-2459		945
8	1787	-2803	4967	-1711		4480
9	4045	-11690	33340	-55070	67822	9072?
10	2752447	-6603199	-15673880	-17085616	8891258	7257600

Tabla de $R_{n,k}$

n	*k=0*	*k=1*	*n*	*k=0*	*k=1*
2	$-h^3/12$	$3h^3/4$	**7**	$-9h^9/1400$	$3956h^9/14175$
3	$-h^5/90$	$14h^5/45$	**8**	$-8183h^9/518400$	$25713h^9/44800$
4	$-3h^5/80$	$95h^5/144$	**9**	$-2368h^{11}/467775$	$80335h^{11}/299376$
5	$-8h^7/945$	$41h^7/140$	**10**	$-673175h^{11}/163459296$	
6	$-275h^7/12096$	$5257h^7/8640$			

Tabla de γ_i para el método de Adams-Bashforth

α_i	*valor*
1	1/2
2	5/12
3	3/8
4	251/720

Relación entre Diferencias Divididas y Diferencias Atrazadas:

$$f[x_{-k},x_{-k+1},\dots,x_{-1},x_0]=\frac{\nabla^k f(x_0)}{k!h^k} \qquad (\textit{como para las Diferencias Adelantadas})$$

Polinomio de Newton utilizando Diferencias Atrazadas:

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)\frac{\nabla f(x_0)}{h}+(x-x_0)(x-x_{-1})\frac{\nabla^2 f(x_0)}{2!h^2}+(x-x_0)\dots(x-x_{-2})\frac{\nabla^3 f(x_0)}{3!h^3}+$$

$$+\dots+(x-x_0)\dots(x-x_{-n+1})\frac{\nabla^n f(x_0)}{n!h^n}$$

Diferencias Centrales (absisas equidistantes):

$$\delta^k f(x)=\delta^{k-1} f(x+\frac{1}{2}h)-\delta^{k-1} f(x-\frac{1}{2}h) \qquad k=1,2,\dots,n$$

$$\delta^0 f(x)=f(x)$$

Relación entre Diferencias Divididas y Diferencias Centrales:

$$f[x_{-n},\dots,x_0,\dots,x_n]=\frac{\delta^{2n} f(x_0)}{(2n)!h^{2n}}$$

y

$$f[x_{-n},\dots,x_0,\dots,x_n,x_{n+1}]=\frac{\delta^{2n+1} f(x_0+\frac{1}{2}h)}{(2n+1)!h^{2n+1}}$$

Polinomio de Newton utilizando Diferencias Centrales:

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)\frac{\delta^1 f(x_0+\frac{1}{2}h)}{h}+(x-x_0)(x-x_1)\frac{\delta^2 f(x_0)}{2!h^2}+$$

$$+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_{-1})\frac{\delta^3 f(x_0+\frac{1}{2}h)}{3!h^3}+\dots+$$

$$+\left|\begin{array}{l} (si\ m=2n): \quad +(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{-n+1})(x-x_n)\dfrac{\delta^{2n} f(x_0)}{(2n)!h^{2n}} \\ (si\ m=2n+1): \quad +(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)(x-x_{-n})\dfrac{\delta^{2n+1} f(x_0+\frac{1}{2}h)}{(2n+1)!h^{2n+1}} \end{array}\right|$$

Aproximación por Mínimos Cuadrados

Definición:

$$F(x)=\sum_{i=1}^{k} c_i \Phi_i(x)$$

$\{\Phi_1,\Phi_2,\dots,\Phi_k\}$: *Conjunto de funciones*

$\{c_1,c_2,\dots,c_k\}$: *Parámetros*

Resolución:

$$\left|\begin{array}{l} c_1\sum_{n=1}^{N}\Phi_1(x_n)\Phi_1(x_n)+\dots+c_k\sum_{n=1}^{N}\Phi_k(x_n)\Phi_1(x_n)=\sum_{n=1}^{N} f_n\Phi_1(x_n) \\ c_1\sum_{n=1}^{N}\Phi_1(x_n)\Phi_2(x_n)+\dots+c_k\sum_{n=1}^{N}\Phi_k(x_n)\Phi_2(x_n)=\sum_{n=1}^{N} f_n\Phi_2(x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_1\sum_{n=1}^{N}\Phi_1(x_n)\Phi_k(x_n)+\dots+c_k\sum_{n=1}^{N}\Phi_k(x_n)\Phi_k(x_n)=\sum_{n=1}^{N} f_n\Phi_k(x_n) \end{array}\right|$$

Cálculo del porcentaje de error

$$E=\frac{g(x_n)-y_n}{g(x_n)}*100$$

Integración Numérica

Fórmulas de Newton-Cotes

$$\int_a^b f(x)dx\simeq(b-a)\sum_{i=1}^{n} y_i I_{i,k}^{(n)} \qquad \begin{array}{ll}(b-a)=(n+1)*h & (\textit{Integración abierta}) \\ (b-a)=(n-1)*h & (\textit{Integración cerrada})\end{array}$$

Calculo de Error:

$$|E|\leqslant \max_{x\in I}|f^{(2m)}(x)R_{n,k}| \qquad n=2m-1 \quad o \quad n=2m$$

Criterio de Extrapolación de Richardson

$$I\simeq I_2+\underbrace{(I_2-I_1)\frac{(n_1-1)^{2m}}{(n_2-1)^{2m}-(n_1-1)^{2m}}}_{Error}$$

Ecuaciones Diferenciales

Solución en Serie de Tailor

$$y(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{y^{i}(x_0)(x-x_0)^{i}}{i!}$$

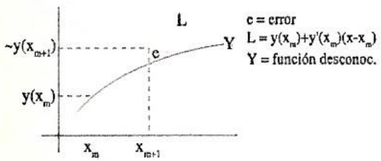
$$y^{i}(x_0)=\textit{Derivada de orden } i \textit{ de } y(x_0) \qquad (y^{0}(x_0)=y(x_0))$$

Para puntos equidistantes $x_0, x_1, \ldots, x_m$, separados por una distancia **h**, es decir $x_i=x_0+ih$. Podemos aproximar la solución en el siguiente punto X_{i+1} como sigue:

$$y(x_{i+1})=\sum_{i=0}^{n}\frac{y^{i}(x_i)(x_{i+1}-x_i)^{i}}{i!}=\sum_{i=0}^{n}\frac{y^{i}(x_i)h^{i}}{i!}$$

Nota: $Si \;\; y'=f(x,y) \;\Rightarrow\; y''=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'$

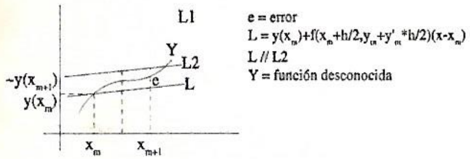
Método de Euler o de Runge-Kutta de Orden 1



Fórmula de Euler:

$$y(x_{m+1})=y(x_m)+y'(x_m)(x_{m+1}-x_m)=y(x_m)+hy'(x_m)=y(x_m)+hf(x_m,y_m)$$

Método de Runge-Kutta de Orden 2



Fórmula:

$$y(x_{m+1})=y(x_m)+hf(x_m+\frac{h}{2},y_m+f(x_m,y_m)\frac{h}{2})$$

Fórmula General:

$$y(x_{m+1})=y(x_m)+h[(1-w)f(x_m,y_m)+wf(x_m+\frac{h}{2w},y_m+f(x_m,y_m)\frac{h}{2w})]$$

Método de Runge-Kutta de Orden 4

Fórmula:

$$y(x_{m+1})=y(x_m)+\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)$$
$$k_1=hf(x_m,y_m)$$
$$k_2=hf(x_m+\frac{h}{2},y_m+\frac{k_1}{2})$$
$$k_3=hf(x_m+\frac{h}{2},y_m+\frac{k_2}{2})$$
$$k_4=hf(x_m+h,y_m+k_3)$$

Estimación del Error para Runge-Kutta en pasos de longitud h

$$Error=2^{r}\frac{(y^{h}_{m+1}-y^{\frac{h}{2}}_{m+1})}{1-2^{r}}$$

$r = \textit{orden del método}$

Estimación del Error para Runge-Kutta en pasos de longitud h/2

$$Error=\frac{(y^{\frac{h}{2}}_{m+1}-y^{h}_{m+1})}{2^{r}-1}$$

$r = \textit{orden del método}$

Métodos de Paso Múltiple

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+\int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x)dx$$

Método de Adams-Bashforth

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+\int_{x_n}^{x_{n+1}} Pn(x)dx$$

$$y'(x)\simeq Pn(x) \qquad Pn(x): \textit{Polinómio de Interpolación de } y'(x)$$

$$y(x_{n+1})\simeq y(x_n)+h[y'(x_n)+\gamma_1\Delta^{1}y'(x_n)+\gamma_2\Delta^{2}y'(x_n)+\ldots+\gamma_m\Delta^{m}y'(x_n)]$$

$$\gamma_i=\int_0^1\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+i-1)}{i!}d\alpha \qquad (\textit{ver Tabla de Adams}-\textit{Bashforth})$$

para m=3:

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+\frac{h}{24}[55y'(x_n)-59y'(x_{n-1})+37y'(x_{n-2})-9y'(x_{n-3})]$$