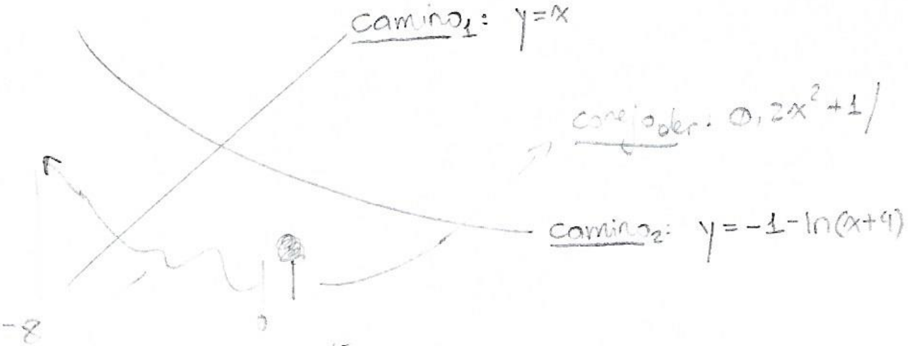
EJERCICIO -1 Dos conejos se encontraban cerca de un cruce de caminos por los que venían dos vehículos que, al encontrarse, tocaron sus bocinas. Asustados por dicho sonido cada conejo corrió a su respectiva madriguera (como se muestra en el dibujo). El que salió hacia la izquierda llegó a su madriguera luego de haber cruzado la ruta al mismo tiempo que **casi** es atropellado el otro conejo.

Camino 1: **y=x** (comunica con el puente)
Camino 2: **y= -1- ln(x+4)**

La trayectoria del conejo de la izquierda:
y=sen(x)[0.5 cos(x)-0.4]-6
valida en el intervalo **[-8,0]**

La trayectoria del conejo de la derecha
$y=0,2x^2+1/(x+4)-6,25$

A) ¿En que posición se encuentra la madriguera del conejo de la izquierda si se conoce que su ordenada vale **-5.9**? Para resolver este inciso debe realizar aislación analítica.
B) ¿Que conejo se encontraba más cerca del cruce de caminos cuando el de la izquierda llegó a su madriguera?
Nota: - Aplique métodos distintos, previamente garantizando convergencia en forma analítica de uno de los métodos.



conejo$_{izq}$: $y= \text{sen}(x)[0,5\cos(x)-0,4]-6$

A) $\begin{cases} y=-5,9 & \rightsquigarrow \text{ordenada de la madriguera.} \\ y=\text{sen}(x)[0,5\cos(x)-0,4]-6 & \end{cases} \Rightarrow \boxed{y=f_1(x)=\frac{1}{2}\,\text{sen}(x)\cos(x)-\frac{2}{5}\,\text{sen}(x)-\frac{1}{10}}$

→ Tray. conejo$_{izq}$.

→ aislación analítica.

• Busco puntos c_i tales que $f_1'(c_i)=0$ o $\nexists f_1'(c_i)$

$$f_1'(x)=\frac{1}{2}\underbrace{[\cos^2(x)-\text{sen}^2(x)]}_{}-\frac{2}{5}\cos(x)=\frac{1}{2}[2\cos^2(x)-1]-\frac{2}{5}\cos(x)=\boxed{\cos^2(x)-0,4\cos(x)-0,5}$$

$$u^2-0,4u-0,5$$

$\text{sen}^2(x)+\cos^2(x)=1$

$-\text{sen}^2(x)=-1+\cos^2(x)$

• $f_1'(x)$ existe $\forall x\in[-8,0]$.

Soluciones para $u^2-0,4u-0,5=0$

$\cos(x)=u \longrightarrow \frac{1}{10}(2-3\sqrt{6})=u_1$

$\longrightarrow \frac{1}{10}(2+3\sqrt{6})=u_2$

$u_1\approx -0,534846922 \longrightarrow \cos(x)=u_1$

$u_2\approx 0,934846922 \longrightarrow \cos(x)=u_2$

$x_1=-2,13512+2\pi k$

$x_2=2,13512+2\pi k$

$x_3=-0,362969+2\pi k$

$x_4=0,362969+2\pi k.$

Tomo las soluciones tal que $x_i\in[-8;0]$

$$\begin{cases} c_1=-6,646154307 \\ c_2=-5,920216307 \\ c_3=-4,148065307 \\ c_4=-2,13512 \\ c_5=-0,362969 \end{cases}$$

- Evalúo luego los valores de $f(x)$ en cada intervalo

↳ $f(x)$ es continua y diferenciable en todo $D=[-8,0]$

$I_1 \Rightarrow \begin{cases} f(-8) = 0{,}36\ldots & >0 \\ f(c_1) = -0{,}12\ldots & <0 \end{cases}$ ✓

$I_2 \begin{cases} f(c_1) = -0{,}12\ldots & <0 \\ f(c_2) = -0{,}076 & <0 \end{cases}$ ✗

$I_3 \Rightarrow \begin{cases} f(c_2) = -0{,}076\ldots & <0 \\ f(c_3) = -0{,}66\ldots & <0 \end{cases}$ ✗

$I_4 \begin{cases} f(c_3) <0 \\ f(c_4) = 0{,}46\ldots >0 \end{cases}$ ✓

$I_5 \Rightarrow \begin{cases} f(c_4) >0 \\ f(c_5) = -0{,}123\ldots <0 \end{cases}$ ✓

$I_6 \Rightarrow \begin{cases} f(c_5) <0 \\ f(0) = -0{,}1\ldots <0 \end{cases}$ ✗

- Intervalos donde existe una raíz: r_i tal que $f(r_i)=0$

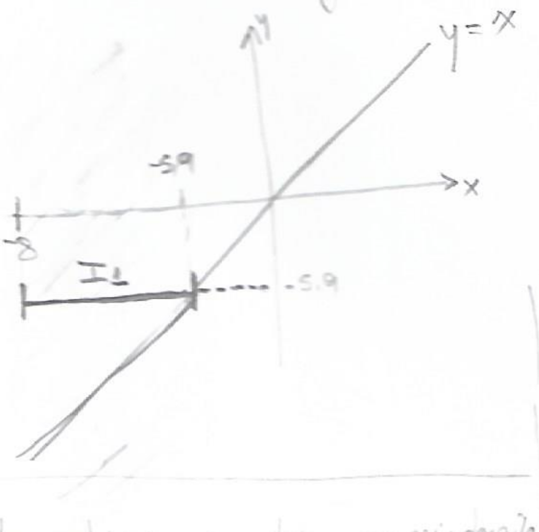
$\boxed{I_1 = [-8, -6{,}646154307]}$

$I_4 = [-4{,}14806531, -2{,}13512]$

$I_5 = [-2{,}13512; -0{,}362969]$

- Siendo que la madriguera tiene una ordenada $y=-5{,}9$ y se encuentra a la izquierda del camino, entonces las raíces válidas son aquellas menores a $x=-5{,}9$.

Por tanto, la madriguera está en la posición $x \in [8, -6{,}646154307]$, $y=-5{,}9$.



Por Newton-Raphson:

$\begin{cases} a = -8 \\ b = -6{,}646154307 \\ c_0 = -7{,}5 \end{cases}$

$r_1 = c_0 - \dfrac{f(c_0)}{f'(c_0)} = -7{,}232780237$

$r_2 = r_1 - \dfrac{f(r_1)}{f'(r_1)} = -7{,}261334329$

$r_3 = r_2 - \dfrac{f(r_2)}{f'(r_2)} = -7{,}261009375$

Cota de error: $\dfrac{f(r_3)}{\min[f'(a), f'(b)]} \approx 7{,}44 \times 10^{-8}$

$\boxed{E_r = \dfrac{r_3 - r_2}{r_2} \approx 4{,}46 \times 10^{-5}.}$

La madriguera se ubica, aproximadamente, en $P(x,y)$ tal que $x \approx -7{,}261009375 \pm 7{,}44 \times 10^{-8}$; $y = -5{,}9$

B) Intersección de los caminos

$$\begin{cases} y = x \\ y = -1 - \ln(x+4) \end{cases} \longrightarrow \boxed{g(x) = x + 1 + \ln(x+4) = 0}$$

$g(x)$ es monótona creciente

Dominio de $g(x)$:

$x + 4 > 0 \Rightarrow x \in (-4, +\infty)$

$$\lim_{x \to -4^+} g(x) = -\infty < 0 \text{ ; } g(0) \approx 2{,}386\,294\,361 > 0 \Rightarrow \boxed{\text{Hay raíz } r \text{ de } g(x) \text{ en } x \in (-4, 0]}$$

$$g'(x) = \frac{x+5}{x+4} \qquad D(g'(x)) = \mathbb{R} - \{-4\}$$

$g(-2) \approx -2 < 0$

$g(-1) \approx 1{,}0986\ldots > 0$

$\nexists g'(x)$ para $x = -4$.
$g'(x) = 0$ para $x = -5$.
} Valores fuera del dominio de $g(x)$.

- Buscamos una aproximación a la raíz en $(-4, 0]$. Uso el método de La bisección.

$a_0 = -2$
$b_0 = -1$ $\Rightarrow$ $r_1 = \dfrac{a_0 + b_0}{2} = -1{,}5$ $\quad g(-1{,}5) = 0{,}41\ldots$

$b_1 = -1{,}5$ $\Rightarrow$ $r_2 = \dfrac{a_0 + b_1}{2} = -1{,}75$ $\quad g(-1{,}75) = 0{,}06\ldots$

$a_1 = -1{,}8$
$b_2 = -1{,}75$ $\Rightarrow$ $r_3 = \dfrac{a_1 + b_2}{2} = -1{,}775$ $\quad g(-1{,}775) = 0{,}0247$

$b_3 = -1{,}775$ $\Rightarrow$ $r_4 = \dfrac{a_1 + b_3}{2} = -1{,}7875$ $\quad \boxed{g(-1{,}7875) = 0{,}0066231}$

$I = [-1{,}8 \,;\, -1{,}775]$

$\boxed{\text{Cruce (aprox): } P(-1{,}7875, -1{,}7875)}$

- Busco intersección entre la Trayectoria del conejo derecho y el camino 2.

$$\begin{cases} y = -1 - \ln(x+4) \\ y = 0{,}2x^2 + \dfrac{1}{x+4} - 6{,}25 \end{cases} \Rightarrow \boxed{h(x) = 0{,}2x^2 + \frac{1}{x+4} + \ln(x+4) - 5{,}25 = 0.} \qquad D[h(x)] = (-4, +\infty)$$

$$\boxed{h'(x) = 0{,}4x + \frac{1}{x+4} - \frac{1}{(x+4)^2}} \qquad D[h'(x)] = \mathbb{R} - \{-4\}$$

fuera de $D[h(x)]$.

$h'(x) = 0 \Rightarrow x \approx -0{,}5118$
(elimino imaginarias)

Dado que el conejo parte de $O(0, -6)$, ignoro los valores a la izquierda de O. Son válidos los valores $x > 0$ para buscar raíz.

$\boxed{h(0) = -3{,}613\,705\,639}$

$\lim_{x \to \infty} h(x) = +\infty.$

Con estos datos, aproximo la solución mediante el método de Newton-Raphson:

- Tomo un valor para el límite derecho del intervalo y lo evalúo para $h(x)$, sabiendo que $h(0) < 0$.

  $h(4) = 0,154\ 441\ 5417 \longrightarrow h(4) > 0$

- Hallo el intervalo, dado que $h(3) = -1,361\ 232\ 708 \longrightarrow h(3) < 0$

- Intervalo de la raíz de $h(x) \Rightarrow I = [3, 4]$.

Aplicando Newton-Raphson:

$$r_0 = 3,5 \longrightarrow r_1 = r_0 - \frac{h(r_0)}{h'(r_0)} \simeq \underline{3,9}30\ 049\ 327$$

$$r_2 = r_1 - \frac{h(r_1)}{h'(r_1)} \simeq \underline{3,908}\ 756\ 388$$

$$r_3 = r_2 - \frac{h(r_2)}{h'(r_2)} \simeq \underline{3,908\ 703831}$$

$$r_4 = r_3 - \frac{h(r_3)}{h'(r_3)} \simeq 3,908\ 7038$$

Cota de error $\quad |r - r_4| \leqslant 4,05271 \times 10^{-10}$

$$\boxed{r \in [3,90870383\ ;\ 3,908\ 703\ 8]}$$

Posición conejo 2: $\quad x \in [3,908\ 703\ 83\ ;\ 3,908\ 703\ 831]$

$y \in [-3,067\ 963\ 904\ ;\ -3,067\ 963\ 902]$ } Tomo punto más a la derecha y más arriba

Cruce $\quad x \approx -1,7875 \quad ; \quad y \approx -1,775.$

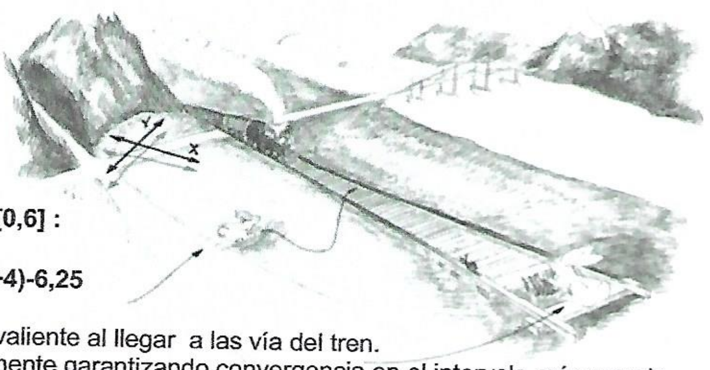
Posición conejo 1: $\quad x \approx -7,261\ 009\ 801 \qquad y = -5,9.$

$D(\text{conejo } 1, \text{cruce}) = 6,353\ 826\ 27$

$D(\text{conejo } 2, \text{cruce}) = 5,841\ 103\ 811$

el conejo 2 está más cerca del cruce cuando el 1 llega a su madriguera

EJERCICIO -2 Un conejo corrió asustado al ser casi atropellado por un vehículo. Al pasar por las vías de un tren , se paró para comer unas hojas tiernas. Otro valiente conejo, que se encontraba en su madriguera,se percató que por las vía se desplazaba un tren. Salió presuroso para avisarle al otro el peligro que corría. al cruzar por el camino (como se muestra en la figura) se paró para intentar avisarle. Como no lo consiguió, siguió hasta las vías del ferrocarril, sin darse cuenta que ponía en riesgo también su propia vida.



$t(x)$ Trayectoria del tren: **2Y+X= 6** $\Rightarrow y = 3 - 0{,}5x$

$c(x)$ Trayectoria del camino: **y= -1- ln(x+4)**

Trayectoria del conejo valiente valida en el intervalo **[0,6] :**

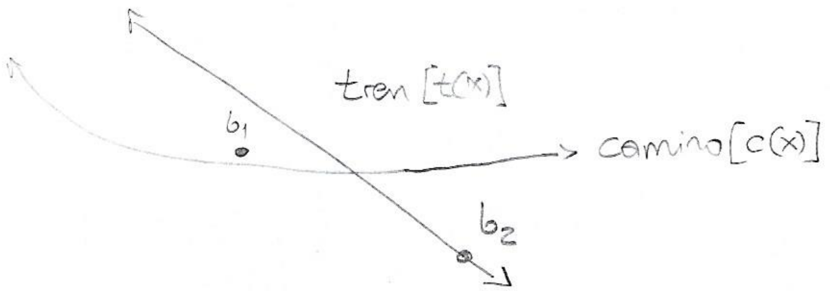
y= - sen(x) cos(x) + x + cos(x) ÷3

Trayectoria del conejo de la derecha **y=0,2x²+1/(x+4)-6,25**

A) Determine en que posición se encontraba el conejo valiente al llegar a las vía del tren.

Nota: para resolver este ítem debe aplicar **N-R**, previamente garantizando convergencia en el intervalo más grande que pueda y acotando el error por medio de su cota particular.

B) ¿Que relación existe, entre la distancia de separación de ellos cuando el conejo valiente se paró en el camino y luego cuando llegó a las vías? - Aplique métodos distintos.



- Conejo 1 $[b_1(x)] \Rightarrow y = -\text{sen}(x)\cos(x) + x + \cos(x) - 3 \qquad x \in [0, 6]$
- Conejo 2 $[b_2(x)] \Rightarrow y = 0{,}2x^2 + \dfrac{1}{x+4} - 6{,}25$

A) Intersección entre $t(x)$ y $b_1(x)$.
$$\begin{cases} y = 3 - 0{,}5x \\ y = -\text{sen}(x)\cos(x) + x + \cos(x) - 3 \end{cases} \qquad \boxed{x \in [0, 6]}$$

$$\boxed{f_1(x) = -\text{sen}(x)\cos(x) + 1{,}5x + \cos(x) = 0} \quad x \in [0, 6]$$

Aislo analíticamente posibles raíces:

$$f_1'(x) = -\cos^2(x) + \text{sen}^2(x) + 1{,}5 - \text{sen}(x)$$

$$f_1'(x) = -2\,\text{sen}^2(x) + \text{sen}(x) + 0{,}5$$

$f_1'(x) = 0 \Rightarrow$

$\exists f_1'(x) \ \forall x \in [0; 6]$

$$u = \text{sen}(x) \longrightarrow 2u^2 - u + 0{,}5 \quad \begin{cases} u_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{4} \\ u_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{4} \end{cases}$$

$$\text{sen}(x) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \qquad \text{sen}(x) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

$f_1'(x) = (4\,\text{sen}(x) - 1) \cdot \cos(x)$

$x \approx 2\pi n + 4{,}0841 \qquad x \approx 2\pi n + 2{,}8274$

$x \approx 2\pi n - 0{,}94248 \qquad x \approx 2\pi n + 0{,}31416$

posición del conejo 1 al llegar a los d min: $\begin{cases} x = 4{,}399993608 \\ y = 1{,}0003 \\ \end{cases}$

(posición

B) • Hallo posición del conejo 2

• Hallo posición inicial del conejo 1.

• Comparo distancia inicial y final del conejo 1 con la posición del conejo 2.

a) Posición del conejo 2

$$\begin{cases} y = 3 - 0{,}5x \\ y = 0{,}2x^2 + \frac{1}{x+4} - 6{,}25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_2(x) = 0{,}2x^2 + 0{,}5x + \frac{1}{x+4} - 9{,}25 = 0 \\ f_2'(x) = 0{,}4x + 0{,}5 - \frac{1}{(x+4)^2} \\ f_2''(x) = 0{,}4 + \frac{2}{(x+4)^3} \end{cases}$$

$f_2'(x) = 0 \Rightarrow x = -0{,}976519873$

$\nexists f_2'(x)$ para $x = -4$.

Intervalos a analizar:

			Hay raíz?
I_1	$-\infty$	-4	Sí
I_2	-4	$-0{,}976519873$	Sí
I_3	$-0{,}9765...$	$+\infty$	Sí

• Excluyo I_1 e I_2 dado que, si el conejo 2 está a la derecha del 1, su posición en x debe ser mayor a 0

$I_3 = [-0{,}976519873; +\infty) \Rightarrow$ Acoto a $I = [5, 6]$.

Posición conejo 2:

$\begin{cases} x = 5{,}626999883 \\ y = \end{cases}$

Por NR: $x_0 = 5{,}5 \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f_2(x_0)}{f_2'(x_0)} = 5{,}628206449$

$x_2 = x_1 - \frac{f_2(x_1)}{f_2'(x_1)} = 5{,}62699999$

Cota $|r - x_3| \leq 1{,}89568 \times 10^{-8}$

(muy pequeña)

$x_3 = x_2 - \frac{f_2(x_2)}{f_2'(x_2)} = 5{,}626999883$

Buscamos valores para distintos "n" enteros:

$n=-1$	~~$x=-2,\dots$~~	~~$x=-7,\dots$~~	~~$x=-4\dots$~~	~~$x=-5,\dots$~~
$n=0$	$\boxed{x=4,0841}$	~~$x=-0,94\dots$~~	$\boxed{x=2,8274}$	$\boxed{x=0,31416}$
$n=1$	~~$x=10\dots$~~	$\boxed{x=5,3407}$	~~$x=4,\dots$~~	~~$x=6,597\dots$~~

Intervalos a analizar:

			$f(a)$	$f(b)$	¿Hay r?
I_1	0	0,31416	<0	<0	NO
I_2	0,31416	2,8274	<0	<0	NO
I_3	2,8274	4,0841	<0	<0	NO
I_4	4,0841	5,3407	<0	>0	SÍ
I_5	5,3407	6	>0	>0	NO

La raíz se encuentra en el intervalo

- $x\in[\underbrace{4,0841}_{a}, \underbrace{5,3407}_{b}]$

Aplico NR, con $x_0 = 4,5$ ⟶

$$x_1 = x_0 - \frac{f_1(x_0)}{f_1'(x_0)} = 4,401688301$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f_1(x_1)}{f_1'(x_1)} = 4,399993677$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f_1(x_2)}{f_1'(x_2)} = 4,399993608$$

Cota de error para x_3:

- $|r - x_3| \leq 1,67653\times 10^{-13}$

$r \approx x_3$. → error muy pequeño.

Convergencia • $sg[f'(x)]$ constante en I_4: $sg[f'(a)] = sg[f'(b)]$

$sg[2,618\dots] = sg[2,108\dots]$

• $sg[f''(x)]$ constante en I_5: $sg[f''(a)] = sg[f''(b)]$

$sg[2,48\dots] \neq sg[-2,48\dots]$

• Reevalúo para $[4,0841; 4,5]$ ⟶ $sg[2,48\dots] = sg[1,03\dots]$

b) Posición inicial del conejo 2: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3. \end{cases}$

c) Cálculo de distancia

$C_{1\,inicial} = (0, 3)$

$C_{1\,final} = (4{,}399993608;\ 1{,}0003)$

$C_2 = (5{,}626999883\ ;\ 0{,}1865)$

$|C_{1\,inicial}\, C_2| = 6{,}29117715.$

diferencia = 4,818827043

$|C_{1\,final}\, C_2| = 1{,}472350107.$

El conejo 1 se acercó al conejo 2, desplazándose 4,818827043 unidades de distancia en ~~su~~ dirección hacia este último.