Apellido y Nombre: ____________________

Carrera: ______ DNI: ____________________

[Llenar con letra mayúscula de imprenta GRANDE]

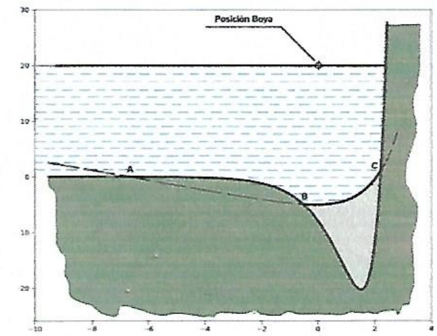
Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Santa Fe
Departamento Ingeniería
en Sistemas de Información
Asignatura: Matemática Superior

Examen final. Jueves 21 de Octubre de 2021

Instrucciones: **la evaluación dura tres horas . Entregar en hojas separadas <u>todos</u> los ejercicios, cada una con apellido y nombres. Incluya en la foto de la primera página de cada ejercicio su DNI en la esquina superior derecha. Justifique <u>todas</u> sus respuestas.**

1) [redacted].
   b) Mediante el método que considere adecuado calcule la transformadada de laplace de la función $tu(t-t_0)$. [redacted]?
   c) Describa que criterios de corte utilizaría en dos métodos de búsqueda de raices distintos, uno abierto y otro cerrado.
   d) ¿Es posible utilizar una función distinta de un polinomio para aproximar una función por el método de mínimos cuadrados? De un ejemplo y justifique.

2) En la base del terraplén de un dique se ha detectado zonas erosionadas. Para repararlo se ha puesto una cobertura con un cemento especial antierosión. El perfil superior del cemento es $H = e^x - 0.9x - 6$ y el del terraplén es $H = e^{2x} - 9e^x$



   a) Si el dique tiene 500 metros de ancho, calcule el volumen necesario de cemento especial antierosión. Todas las coordenadas se han considerado en metros.
   b) Aísle analíticamente las abscisas de los puntos A, B y C.
   c) Determine una aproximación para las abscisas del extremo derecho de la zona del cemento (B) y acote el error cometido.

3) Para que no se oxide un cartel se lo pintará con una pintura epoxi. La velocidad de secado de la pintura está modelada por medio de:

$$C' = t(9-t) + 0.15C$$

donde t es el tiempo medido en horas y C es el procentaje de secado.

   a) Determinar, utilizando un método Runge-Kutta de segundo orden, cual será el porcentaje de secado a las 5 horas de pintado y cual será aproximadamente el error cometido.
   b) Determinar, Utilizando Milne, cuando según este modelo, se terminará de secar.
   c) Escriba la función de iteración $C(t+\Delta T)$ utilizando el método de Taylor de segundo orden (utilizando hasta C'')

Olivencia, Ramiro.
DNI 35.215.045

1.c

Los métodos abiertos (Newton-Raphson, Secante) pueden tener como método de corte una cota de error máxima determinada. Una vez que la i-ésima iteración posee una cota <u>menor</u> a la máxima admitida, se deja de iterar.

En los métodos cerrados (Regula Falsi, Bisección) vamos a poder saber de antemano la cantidad de iteraciones requeridas por adelantado, dado que el intervalo "se achica" en cada iteración.

En la bisección, <u>por ejemplo</u>, antes de iterar sabemos que

$$\boxed{n > \frac{\ln(b-a)-\ln(\varepsilon)}{\ln(2)} - 1}$$

con $[a,b]$ extremos del intervalo, ε el error deseado máximo y n la cantidad de iteraciones.

1 / 10

Licencia, Ramiro.
DNI 35.215.045

1.b

$tu(t-t_0)$, asumiendo que:

- $u = u(t) \rightarrow$ función escalón.
- t_0 es un escalar

Luego: $\mathcal{L}[tu(t-t_0)] \rightarrow$ expresión a resolver.

i) Por el 2º Teorema del desplazamiento:

$\mathcal{L}[u(t-a)f(t-a)] = e^{-as}F(s)$, entonces nuestra expresión resulta: $(t-t_0+t_0)\,u(t-t_0)$, con $f(t) = t + t_0$

ii) Luego: $\mathcal{L}[tu(t-t_0)] = e^{-t_0 s}F(s)$

iii) Para hallar $F(s) \longrightarrow \mathcal{L}[f(t)] = F(s)$.

$$\mathcal{L}[t+t_0] = \frac{1}{s^2} + \frac{t_0}{s}$$

iv) Finalmente:

$$\boxed{\mathcal{L}[tu(t-t_0)] = \frac{e^{-t_0 s}}{s^2} + \frac{e^{-t_0 s}}{s}}$$

Olivencia, Ramiro
DNI 35.215.045

1.d

Cualquier función suave y derivable (en el intervalo analizado) puede utilizarse para aproximar por mínimos cuadrados. Sin embargo, aunque esta sea condición suficiente para el planteo, debe tenerse en cuenta la complejidad adicional de cálculo que puede revestir optar por otra función no polinómica ← las cuales, además de suaves, pueden derivarse con facilidad.

Un ejemplo donde se puede visualizar esa complejidad es con una función del tipo $f(x)=e^{ax}$, donde $f'(x)=ae^{ax}$, complejizando el cálculo.

3 / 10

Olivencia, Ramiro
DNI 35.215.045

2) <u>Perfil superior</u>: $H_1(x) = e^x - 0{,}9x - 6$

<u>Perfil terraplén</u> $H_2(x) = e^{2x} - 9e^x$

i) Genero una $f(x)$ con H_1 y H_2, tal que $f(x) = 0$.

- $f(x) = e^{2x} - 10e^x + 0{,}9x + 6$, con • $f'(x) = 2e^{2x} - 10e^x + 0{,}9 = 0$

ii) Busco puntos tales que $f'(x) = 0$, que está definida $\forall x \in \mathbb{R}$

- $f'(x) = 0 \longrightarrow x_1 = -2{,}38944$, $x_2 = 1{,}59093$.

Por ser $f(x)$ y $f'(x)$ definidas y continuas en todo $\mathbb{R}$, luego no hay puntos tales que $\nexists f(x)$ ni $\nexists f'(x)$.

iii) Los intervalos iniciales para A, B y C son:

$A \in (-\infty, -2{,}38944)$

$B \in (-2{,}38944 ; 1{,}59093)$

$C \in (1{,}59093 ; +\infty)$

iv) En base a la gráfica, mejoro las cotas:

$$\boxed{\begin{array}{l} A \in (-8, -6) \\ B \in (-2{,}38944 ; 1{,}59093) \\ C \in (1, 3) \end{array}}$$

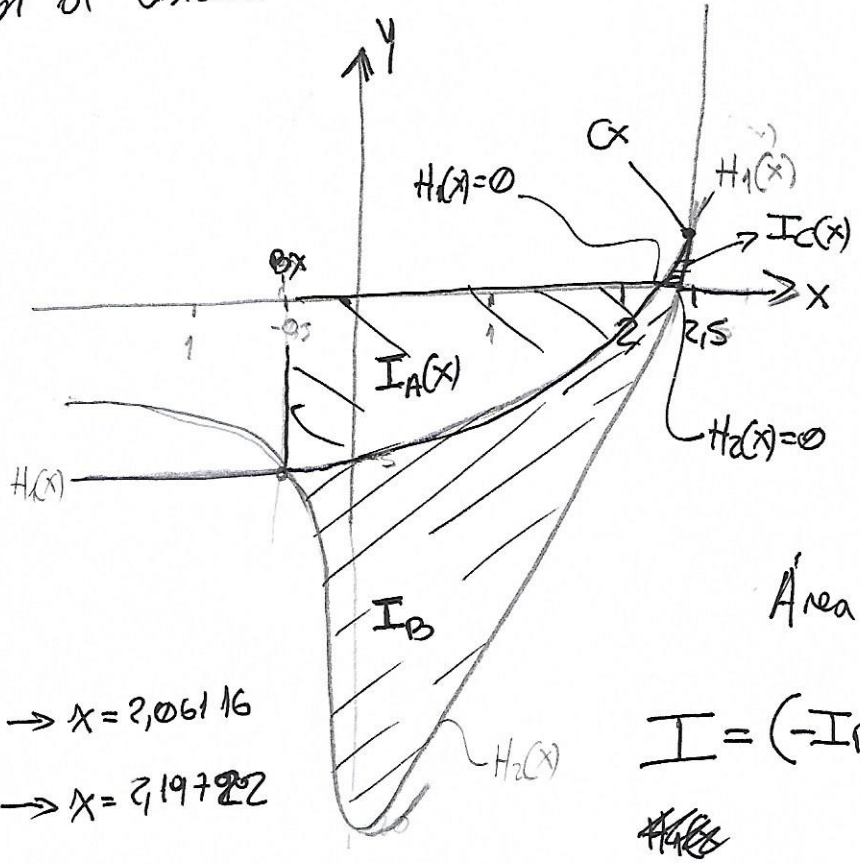
• Inciso 2.6

4/10

[redacted] 2.a $x \to$ en metros.

[redacted]

i) Subdividido el área del cemento para determinar las áreas a calcular:



Aproximo:

$B_x = -0{,}533\,873\,066$

$C_x = 2{,}210\,995\,369$

(por NR, con $(a,b)=(1,3)$)

Área total: I

$$I = (-I_B - (-I_A)) + I_C$$

Dato

$H_1(x)=0 \to x = 2{,}06116$

$H_2(x)=0 \to x = 2{,}19722$

ii) Planteo las integrales I_A, I_B, I_C:

$$I_A = \int_{B_x}^{x_{H_1=0}} H_1(x)\,dx$$

(*) Aproximo con NC3, cerrada (simpson)

$$I_B = \int_{B_x}^{x_{H_2=0}} H_2(x)\,dx \approx$$

(*) Aproximo con NC4, cerrada (simpson 3/8)

$$I_C = \int_{H_{1x}=0}^{C_x} H_1(x)\,dx - \int_{H_{2x}}^{C_x} H_2(x)\,dx$$

(*) Aproximo con NC2, cerrada (trapecio)

5 / 10

[redacted] (cont.)

2.a

iv) Planteo y resuelvo:

$$I_A = \frac{x_{H_1=0} - B_x}{6}\left[H_1(B_x) + 4H_1\left(\frac{x_{H_1=0} - B_x}{2} + B_x\right) + H_1(H_{1x=0})\right]$$

Oliencia, Ramiro.

DNI 35.25.045

$$I_A \approx -10{,}085$$

$$I_B = \frac{3}{8}\left(H_{2x=0} - B_x\right)\left(H_2(B_x) + 3H_2(B_x + Int_B) + 3H_2(B_x + 2Int_B) + H_2(H_{2x=0})\right)$$

(*) Int B = 0,910 364 3553

$$I_B \approx -35{,}3949$$

$$I_C = \frac{C_x - H_{1x=0}}{2}\left(H_1(C_x) + H_1(H_{1x=0})\right) - \frac{C_x - H_{2x=0}}{2}\left[H_2(H_{2x=0}) + H_2(C_x)\right]$$

$$I_C \approx 0{,}082 - 0{,}006 = 0{,}076$$

v) Finalmente $I = \left[-(-35{,}3949) - \left[-(-10{,}085)\right]\right] + 0{,}076$

$$I = 35{,}3949 - 10{,}085 + 0{,}076.$$

$$\boxed{I \approx 25{,}3859} \longrightarrow \text{en } m^2$$

vi) Volumen del perfil de cemento:

$$V = 500 \times 25{,}3859$$

$$\boxed{V = 12.692{,}95\ m^3}$$

6/10

Olivencia, Ramiro
DNI 35.215.045

2.c

Calculo una aproximación para B, usando el intervalo:

$x \in [-2{,}38944 \,;\, 1{,}59093]$

i) Verifico si $f(a) \cdot f(b) < 0$, con $a = -2{,}38944$; $b = 1{,}59093$.

$$f(a) \cdot f(b) = 2{,}9411 \cdot (-17{,}5598) = -51{,}645 \ldots < 0$$

↳ Garantizo convergencia para Newton-Raphson.

ii) Planteo N-R:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad , \quad \text{Tomando } c_0 = 0, \text{ con } c_0 \in (a, b)$$

$x_0 = c_0$.

iii) Calculo iteraciones:

$x_0 = 0$

$$x_1 = 0 - \frac{f(0)}{f'(0)} = -0{,}422535211$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -0{,}527771866$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = -0{,}533853599$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = -0{,}533873066.$$

Detengo la iteración en x_4.

iv) Busco el error; acotándolo:

$$\min_{x \in [a,b]} |f'(x)| = \min\{7{,}06802 \times 10^{-7} \,;\, 7{,}109 \times 10^{-5}\} = 7{,}06802 \times 10^{-7}$$

acoto: $$|r - x_4| \leq \frac{f(x_4)}{\min_{x \in [a,b]} |f'(x)|} \Rightarrow |r - x_4| \leq 0{,}00120322$$

v) Finalmente:

$$\boxed{x_4 \in [-0{,}535076286 \,,\, -0{,}532669846]}$$

↳ Aproximación a B_x

7/10

DNI: 35.215.045.
Ramiro Olivencia

3.

$t_0 = 0$ [horas]

$C_0 = 0$ [% secado] $\Rightarrow C_0 = C(t_0)$

$$C' = f(t,C) = t(9-t) + 0{,}15C$$

a) Planteo fórmula RK-2:

m inicial = 0

$h \longrightarrow$

$$C_{m+1} = C_m + f(k_{1m}, k_{2m})$$

$$k_{1m} = t_m + \frac{1}{2}$$

$$k_{2m} = C_m + \frac{1}{2} f(t_m, C_m)$$

RK-2, h=1

n	t	C_m	k_{1m}	k_{2m}	C_{m+1}
0	0	0	0	8	4
1	1	4	8,6	15,89	16,245
2	2	16,245	16,43675	22,9022625	35,91450625
3	3	35,91450625	23,38717594	28,89525233	62,05572038
4	4	62,05572038	29,30853806	33,70461177	93,56220529
5	5	93,56220529	34,03433079	37,13948041	~~129,14971109~~ >100

Luego de 5 horas, el porcentaje de secado es del $\boxed{93{,}56220529\ \%}$

Para calcular el error, uso Richardson. Calculo C(t) para t=4, t=4,5 y t=5, con $h=\frac{1}{2}$

RK-2, $h=\frac{1}{2}$

n	t	C_m	k_{1m}	k_{2m}	C_{m+1}
4	4	62,05572038	14,65417903	15,87824246	77,32193113
4,5	4,5	77,32193113	15,92414483	16,9934557	93,78073139
5	5	93,78073139	17,03355485	17,93607147	111,2655446.

8 / 10

3. a (cont.)

[redacted]

Estimo el error mediante Richardson:

$$E = 2^2 \frac{C_{m+1}^{h=1} - C_{m+1}^{h=1/2}}{1-2^2} = \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot [93,56220529 - 93,78073139]$$

$\boxed{E = 0,291368128\ \%}$ ⟶ Error porcentual estimado.

$\boxed{C_5^* = 93,85357342}$ ⟶ Valor mejorado de C_5

b) Calculo un paso adicional usando Milne, tomando los puntos iniciales $t = 2, 3, 4, 5$; usando C_5 mejorado:

Milne, $h = 1$

i	t	C^P	C'	C^C	Error
0	2	16,245	16,43675		
1	3	35,91450625	23,38717594		
2	4	62,05572038	201,30835806		
3	5	93,85357342	34,07803601		
4	6	130,4077545	37,56116317	129,7829421	0,021545252

Para aproximar el valor $C^\#$ tal que $C^\#(t^\#) = 100$, interpolo con t_m, C_m para $m = 4,5,6$ de la tabla de Milne:

t	4	5	6
C	62,05572038	93,85357342	129,7829421
	31,79785304	35,92936872	
	0,484083846		

El polinomio $P(t)$ para aproximar resulta:

$$\boxed{P(t) = 0,484083846\,t^2 + 27,44109842\,t - 55,45901485}$$

En el polinomio, igualo $P(t) = 100$ para hallar el valor $t^\#$. Luego:

$$P(t) = 100 \Rightarrow \begin{cases} \cancel{t_1^\# = -61,8765} \rightarrow \text{Descartado.} \\ t_2^\# = 5,18986 \rightarrow \text{Valor buscado.} \end{cases}$$

Luego: $\boxed{C(5,18986) \approx 100}$

9/10

Olivencia, Ramiro

DNI 35.215.045

3.C.

$$C'(t) = f(t, C) \qquad t_0 = 0 \qquad C(t_0) = 0$$

i) Planteo Taylor, hasta segundo grado (C'')

$$C(t+\Delta T) = C(t) + \Delta T\, C'(t) + \frac{(\Delta T)^2}{2} C''(t) + \underbrace{\frac{(\Delta T)^3}{6} C'''(\varepsilon)}_{\text{error}}$$

ii) Reemplazo los términos C' y C'' por:

$$C' = t(9-t) + 0{,}15C$$

$$\cancel{C'' = f'(t,C) = \frac{df}{dt} = \frac{df}{dC}\cdot\frac{dC}{dt} = 0{,}15\frac{dC}{dt}}$$

$$C'' = f'(t,C) = \frac{df}{dt} = \underbrace{\frac{df}{dC}\cdot\frac{dC}{dt}}_{\text{Regla de la cadena (derivación implícita)}} = \overbrace{0.15}^{df/dC} \cdot \overbrace{t(9-t) + 0{,}15C}^{\frac{dC}{dt} = C' = f} = C''$$

iii) Reemplazando:

$$C(t+\Delta T) = C(t) + \Delta T\left[t(9-t) + 0{,}15C\right] + \frac{(\Delta T)^2}{2}\left[0{,}15 \cdot t(9-t) + 0{,}15C\right] + \frac{(\Delta T)^3}{6} C'''(\varepsilon)$$

10 / 10