EJERCICIO -1 Complete solo utilizando la tabla de diferencias divididas, si es posible, la siguiente tabla sabiendo que pertenecen a un polinomio de grado 3

X	2	3	5	6	7	8
Y	1	?	-1	?	2	1

x	2	5	7	8
y	1	-1	2	1

$-\frac{2}{3}$ $\quad \frac{3}{2}$ $\quad -1$

$\frac{13}{30}$ $\quad -\frac{5}{6}$

$-\frac{19}{90}$

Simplificar

$$\boxed{P(x) = 1 - \frac{2}{3}(x-2) + \frac{13}{30}(x-2)(x-5) - \frac{19}{90}(x-2)(x-5)(x-7)}$$

$$\to P(x) = -\frac{19}{90}x^3 + \frac{61}{18}x^2 - \frac{727}{45}x + \frac{139}{9}$$

Evaluamos $P(x)$ para $x = 3$, $x = 6$

$$\boxed{P(3) = -\frac{20}{9} \qquad P(6) = \frac{41}{45}.}$$

EJERCICIO -2 Determine, utilizando solo la tabla de diferencias divididas, si es posible, el valor de A sabiendo que pertenecen a un polinomio de grado 3

X	A	5	2A	9	10
Y	3	1	2	4	3

?

Ejercicio -12 Se ha encontrado en la Siberia, congelados, algunos huesos de un mamífero no conocido hasta el momento. Este parecería ser un parientes del mamut.

Para realizar primero un modelo con polímeros de las piezas encontradas se necesita preliminarmente obtener el perfil de dichas piezas.

A) Ayude a los científicos modelando la parte marcada del perfil que parece ser parte de la cadera.

Nota: la zona del perfil definida por la función **F1(x)** debe modelarse por medio de dos parábolas que se unan suavemente en la abscisa **x=23** y el primer tramo debe tener un mínimo relativo en **x=22**

Para esta tiene los valores aproximados:

Y	20	21	22	23	24	24,5
X	3,2	2,7	2,5	3	3,5	3,3

x	3	4	6	7	9	13	16	19	22	24	24	21	19	19	20	21	22	23	24	24,5
y	10	13	14	12	11	12	16	18	17	14	11	8	6	4	3,2	2,7	2,5	3	3,5	3,3

$P_1(x)$ —

P	1	2	3
x	3	4	6
y	10	13	14

$3 \quad \frac{1}{2}$

$-\frac{5}{6}$

$\rightarrow \boxed{P_1(x) = -\frac{5}{6}t^2 + \frac{53}{6}t - 9}$

$P_2(x)$ —

P	3	4	5
x	6	7	9
y	14	12	11

$-2 \quad -\frac{1}{2}$

2

$\rightarrow \boxed{P_2(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{17}{2}t + 47}$

$P_3(x)$ —

P	5	6	7
x	9	13	16
y	11	12	16

$\frac{1}{4} \quad \frac{4}{3}$

$\frac{13}{84}$

$\rightarrow \boxed{P_3(x) = \frac{13}{84}x^2 - \frac{265}{84}x + \frac{188}{7}}$

$P_4(x)$ —

P	7	8	9
x	16	19	22
y	16	18	17

$\frac{2}{3} \quad -\frac{1}{3}$

$-\frac{1}{6}$

$\rightarrow \boxed{P_4(x) = -\frac{x^2}{6} + \frac{13}{2}x - \frac{136}{3}}$

$P_5(y)$ —

P	9	10	11
y	17	14	11
x	22	24	24

$-\frac{2}{3} \quad 0$

$-\frac{1}{9}$

$\rightarrow \boxed{P_5(y) = -\frac{y^2}{9} + \frac{25}{9}y + \frac{62}{9}}$

$P_6(y)$ —

P	10	11	12
y	14	11	8
x	24	24	21

0

$-\frac{13}{18}$

$\rightarrow \boxed{P_6(y) = -\frac{13}{18}y^2 + \frac{325}{18}y - \frac{785}{9}}$

(*) Válida el intervalo

[illegible] (11,24) y (8,21)

Reemplazo en las ec. originales (despejo con A, B, C, D, E)

$$\begin{cases} P_1 = ax^2 - 44ax + 4 + 475a & \text{— si } x < 23 \\ P_2 = (a - \frac{1}{2})x^2 + (-44a + 23)x + 475a + 260{,}5 & \text{— si } x \geq 23 \end{cases}$$

$P_1'(x) = 2ax - 44a$

$P_2'(x) = (a - \frac{1}{2})x + (-44a + 23)$

Hallamos el valor para a:

- Expreso las funciones agrupando términos de a:

$$\begin{cases} P_1(x) = a(x^2 - 44x + 475) + 4 & \text{— si } x < 23 \\ P_2(x) = a(x^2 - 44x + 475) - \frac{1}{2}x^2 + 23x + 260{,}5 & \text{si } x \geq 23 \end{cases}$$

Defino:

$$\gamma(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x < 23 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 23x + 260{,}5 & \end{cases}$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 - 44x + 475 & \text{si } x < 23 \\ x^2 - 44x + 475 & \text{si } x \geq 23 \end{cases}$$

- Genero la Tabla de valores para calcular a:

P	14							15
x	19	20	21	22	23	24	24,5	25
y	4	3,2	2,7	2,5	3	3,5	3,3	2
γ	4	4	4	4	525	524,5	523,875	523
φ	0	-5	-8	-9	-8	-5	-2,75	0
Y	0	-0,8	-1,3	-1,5	-522	-521	-520,575	-521

producto punto

$a \langle \varphi, \varphi \rangle = \langle Y, \varphi \rangle$

$a\,(266{,}5625) = 8240{,}48125$

$$\boxed{a = 30{,}913\,880\,42}$$

Entonces:

$$f_1(x) = \begin{cases} 30{,}913\,880\,42\,(x^2 - 44x + 475) + 4 & \text{— si } x \in [19, 23) \\ 30{,}913\,880\,42\,(x^2 - 44x + 475) - \frac{1}{2}x^2 + 23x + 260{,}5 & \text{— si } x \in [23, 25] \end{cases}$$

- Función completa que define el perfil a aproximar:

- $P_1(x)$ — Entre P_1 y P_3
- $P_2(x)$ — Entre P_3 y P_5
- $P_3(x)$ — Entre P_5 y P_7
- $P_4(x)$ — Entre P_7 y P_9
- $P_5(y)$ — Entre P_9 y P_{11}
- $P_6(y)$ — Entre P_{11} y P_{12}
- $P_7(y)$ — Entre P_{12} y P_{14}
- $f_1(x)$ — Entre P_{14} y P_{15}

Error relativo: $\boxed{E_{\%} = \dfrac{y - Y}{y}} \Longrightarrow$

(precisión de la aproximación mediante Y)

12 8 14

$$P_7(y) = \begin{array}{c|ccc} y & 8 & 6 & 4 \\ \hline x & 21 & 19 & 19 \end{array}$$

1 ∅

$\frac{1}{4}$

$$\boxed{P_7(y) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + 25}$$

Modelado de $f_1(x)$:

$$\begin{cases} P_1 = ax^2 + bx + c & P_1' = 2ax + b \\ P_2 = dx^2 + ex + f & P_2' = 2dx + e \end{cases}$$

$\boxed{P_1(23) = P_2(23)}$ $\boxed{P_1'(22) = \emptyset}$

$\boxed{P_1'(23) = P_2'(23)}$

$\boxed{P_1(19) = 4}$ $\boxed{P_2(25) = 2}$

si $P_1'(22) = \emptyset \rightarrow 44a + b = \emptyset \rightarrow \boxed{b = -44a}$ (A)

si $P_1(19) = 4 \rightarrow a19^2 - 44a19 + c = 4 \rightarrow \boxed{-475a + c = 4}$ (B)

si $P_2(25) = 2 \rightarrow d(25)^2 + e25 + f = 2 \rightarrow \boxed{625d + 25e + f = 2}$ (I)

si $P_1'(23) = P_2'(23) \rightarrow 46a + b = 46d + e \rightarrow \boxed{2a - 46d - e = \emptyset}$ (II)

si $P_1(23) = P_2(23) \rightarrow a(23)^2 + b(23) + c = d(23)^2 + e23 + f \rightarrow \boxed{529a + 23b + c - 529d - 23e - f = \emptyset}$

$\rightarrow \boxed{-483a + c - 529d - 23e - f = \emptyset}$ (III)

Usando (B) en (III). $-483a + 4 + 475a - 529d - 23e - f = \emptyset \Rightarrow \boxed{-8a + 4 - 529d - 23e - f = \emptyset}$ (IV)

Uso (II) en (IV): $-8a + 4 - 529d - 46a + 1058d - f = \emptyset \rightarrow \boxed{-54a + 529d - f = -4}$ (V)

Uso (I) en (V) $-54a + 529d - 2 + 625d + 25e = -4 \rightarrow \boxed{-54a - 1154d - 25e = -2}$ (VI)

Uso (II) en (VI) $-54a + 1154d + 25(2a - 46d) = -2 \rightarrow -4a + 4d = -2 \rightarrow 2a - 2d = 1$

$\boxed{d = a - \frac{1}{2}}$ (C)

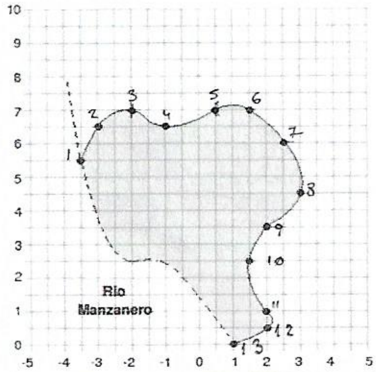
Uso (C) en (II): $2a - 46(a - \frac{1}{2}) = e \rightarrow \boxed{-44a + 23 = e}$ (D)

Uso (C) en (I): $625(a - \frac{1}{2}) + 25(-44a - 23) + f = 2 \rightarrow 625a - 1100a - 312,5 + 575 + f = 2$

$\rightarrow -475a + 260,5 + f = \emptyset \rightarrow \boxed{f = 475a - 260,5}$ (E)

Ejercicio -14 En el siguiente esquema se bosqueja el plano de la zona de un bosque de manzanos ubicado en la orilla del río manzanares.
A) Modele el perfil de dicho dibujo.

Nota: la zona marcada con lineas de trazos se debe modelar por medio de una función suave definida por dos tramos parabólicos que se una con continuidad en **x= 2,5** (Puede tomar datos aproximados de la gráfica en esta zona)



A)

P	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
x	-3,5	-3	-2	-1	0,5	1,5	2,5	3	2	1,5	2	2	1
y	5,5	6,5	7	6,5	7	7	6	4,5	3,5	2,5	1	0,5	0

$P_1(x) \Rightarrow$

P	1	2	3
x	-3,5	-3	-2
y	5,5	6,5	7

2 $\quad \frac{1}{2}$

-1

$$P_1(x) = -x^2 - \frac{9}{2}x + 2$$

$P_2(x)$

P	3	4	5
x	-2	-1	0,5
y	6,5	7	7

$\frac{1}{2}$ $\quad$ 0

$-\frac{1}{5}$

$$P_2(x) = -\frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{10}x + \frac{71}{10}$$

$P_3(x)$

P	5	6	7
x	0,5	1,5	2,5
y	7	7	6

0 $\quad$ -1

$-\frac{1}{2}$

$$P_3(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{53}{8}$$

$P_4(y)$

p	7	8	9
x	2,5	3	2
y	6	4,5	3,5

$-\frac{1}{3}$ $\quad$ 1

$-\frac{8}{15}$

$$P_4(y) = -\frac{8}{15}y^2 + \frac{79}{15}y - \frac{99}{10}$$

$P_5(y)$

P	9	10	11
x	2	1,5	2
y	3,5	2,5	1

$\frac{1}{2}$ $\quad -\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}$

$$P_5(y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{5}{2}y + \frac{37}{8}$$

$P_6(y)$

P	11	12	13
x	2	2	1
y	1	0,5	0

0 $\quad$ 2

-2

$$P_6(y) = -2y^2 + 3y + 1$$

B) Tabla de valores aproximados — con extremos exactos P_1 y P_{13}

	P_1						P_{13}
x	$-3,5$	$-3,1$	$-2,6$	-2	-1	0	1
y	$5,5$	4	3	$2,5$	$2,4$	$1,4$	0
γ	$-\frac{11}{12}$	$-\frac{11}{12}$	$-\frac{11}{12}$	$-\frac{11}{2}$	$-\frac{44}{9}$	$-\frac{37}{18}$	0
φ	$25,75$	$21,51$	$16,66$	$0,75$	$-1,25$	$-1,25$	$0,75$
Υ	$6,41666667$	$4,91666667$	$3,91666667$	8	$7,28888889$	$4,45555556$	0
$\epsilon\%$	$-16,67\%$	$-22,92\%$	$-30,56\%$	$-220,00\%$	$-203,70\%$	$-218,25\%$	0%

Datos: $f(-3,5) = 5,5$ R_1 $\quad g_2'(-2) = 0$ R_2 $\quad g_1(-2) = g_2(-2)$ R_3

$f(1) = 0$ R_4 $\quad g_1'(-2) = g_2'(-2)$ R_5

$$f(x)\begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{si } -3,5 \leq x < -2 \quad ec_1 \\ dx^2 + ex + f & -2 \geq x \geq 1 \quad ec_2 \end{cases}$$

$$f'(x)\begin{cases} 2ax + b & \text{si } -3,5 \leq x < -2 \quad ec_3 \\ 2dx + e & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \quad ec_4 \end{cases}$$

$R_2)\ f'(-2) = 0 \xrightarrow{ec_4} 2d(-2) + e = 0 \longrightarrow \boxed{e = 4d}$ (A) — elimino e.

(A) en (R_4) $\longrightarrow d + 4d + f = 0 \longrightarrow \boxed{f = -5d}$ (B) — elimino f

$R_5 \longrightarrow g_1'(-2) = g_2'(-2) \longrightarrow 2a(-2) + b = 2d(-2) + e \longrightarrow \boxed{-4a + b = -4d + e}$ (I)

$R_3 \longrightarrow g_1(-2) = g_2(-2) \longrightarrow \boxed{4a - 2b + c = 4d - 2e + f}$ (II)

(A y B) en (II) $\longrightarrow 4a - 2b + c = 4d - 8d - 5d \rightarrow \boxed{4a - 2b + c = -9d}$ (III)

$R_1) \longrightarrow \boxed{a(-3,5)^2 + b(-3,5) + c = 5,5}$

$\longrightarrow \boxed{c = 5,5 - 12,25a + 3,5b}$ (IV)

(IV) en (III) $\longrightarrow 4a - 2b - 5,5 - 12,25a + 3,5b = -9d \rightarrow \boxed{-8,25a + 1,5b - 5,5 = -9d}$ (V)

Desde (I): $-4a + b = 0 \longrightarrow \boxed{b = 4a}$ (C)

(C) en (V): $-8,25a + 6a - 5,5 = -9d \longrightarrow -2,25a - 5,5 = -9d \longrightarrow \boxed{d = \frac{1}{4}a + \frac{11}{18}}$ (D)

(D) en (III) $4a - 2b + c = -9(\frac{1}{4}a + \frac{11}{18}) \rightarrow 4a - 2b + c = -\frac{9}{4}a - \frac{11}{2} \rightarrow \boxed{8,5a - 2b + c = -\frac{11}{2}}$ (VI)

(C) en (VI) $8,5a - 2(4a) \ldots \rightarrow \boxed{c = \ldots}$

Reemplazando en las ecuaciones originales, con A, B, C D, E

$$f_1(x)\begin{cases} ax^2+4ax-\frac{1}{2}a-\frac{11}{12} & -3{,}5\leq x<-2 \\ \left(\frac{1}{4}a+\frac{11}{18}\right)x^2+\left(a+\frac{22}{9}\right)x-\frac{5}{4}a-\frac{55}{18} & -2\leq x\leq 1 \end{cases} \longrightarrow f(x)\begin{cases} a\left(x^2+4x-\frac{1}{2}\right)-\frac{11}{12} \\ a\left(x^2+x-\frac{5}{4}\right)+\frac{11}{18}x^2+\frac{22}{9}x-\frac{55}{18} \end{cases}$$

Defino $\varphi(x)$ y $\gamma(x)$

$$\varphi(x)\begin{cases} x^2+4x-\frac{1}{2} & -3{,}5\leq x<-2 \\ x^2+x-\frac{5}{4} & -2\leq x<1 \end{cases} \qquad \gamma(x)\begin{cases} -\frac{11}{12} & -3{,}5\leq x<-2 \\ \frac{11}{18}x^2+\frac{22}{9}x-\frac{55}{18} & -2\leq x\leq 1 \end{cases}$$

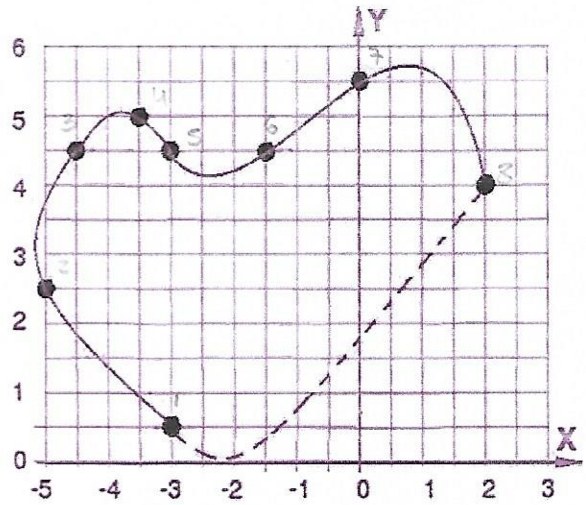
- Despejo a mediante los datos de la tabla:

$$a\langle\varphi,\varphi\rangle=\langle \underline{Y},\gamma\rangle \Rightarrow a=\frac{\langle Y,\gamma\rangle}{\langle\varphi,\varphi\rangle}$$

$$\Rightarrow a=\frac{327{,}557778}{1407{,}5482} \Rightarrow \boxed{a=0{,}23271514}$$

Finalmente, $f_1(x)$ que aproxima a la curva buscada se obtiene reemplazando el valor de a en la expresión de $f_1(x)$ de la parte superior.

2) Dada la figura. De los bordes inferior, izquierdo y superior se tienen los siguientes puntos exactos: (los puntos están ordenados en sentido horario, partiendo del punto más a la derecha del borde inferior y terminando en el punto más a la derecha del borde superior).



p	1	2	3	4	5	6	7	8
x	-3	-5	-4.5	-3.5	-3	-1.5	0	2
y	0.5	2.5	4.5	5	4.5	4.5	5.5	4

en el punto $(2;4)$ la pendiente es -3. De la función marcada con trazos del borde derecho se conocen puntos aproximados siendo el primero y el último exactos:

x	-3	-2	0	1	2
y	0.5	0.2	1.8	2.8	4

donde los valores en gris son exactos.

a) Modele la figura y para la línea de trazos utilice un polinomio de grado 3 que posea un punto de inflexión en para la abscisa $x = 1$.

b) ¿La estrategia utilizada en la interpolación es de soporte local o global? ¿La considera apropiada? Justifique.

c) ¿Qué propiedad tiene la matrix de coeficientes del sistema lineal a resolver para obtener la solución de una aproximación por mínimos cuadrados mediante una base ortonormal?

$P_1(y)$ — (P1, P2, P3)

y	0,5	2,5	4,5
x	-3	-5	-4,5

$-1 \quad \frac{1}{4} \quad \frac{5}{16}$

$$P_1(y) = \frac{5}{16}y^2 - \frac{31}{16}y - \frac{135}{64}$$ — Entre P_1 y P_3

$P_2(x)$ (P3, P4, P5)

x	-4,5	-3,5	-3
y	4,5	5	4,5

$\frac{1}{2} \quad -1 \quad -1$

$$P_2(x) = -x^2 - \frac{15}{2}x - 9$$ — Entre P_3 y P_5

$P_3(x)$ (P5, P6, P7)

x	-3	-1,5	0
y	4,5	4,5	5,5

$0 \quad \frac{2}{3} \quad \frac{2}{9}$

$$P_3(x) = \frac{2}{9}x^2 + x + \frac{11}{2}$$ — Entre P_5 y P_7

$P_4(x)$ (P6, P7, P8)

x	-1,5	0	2
y	4,5	5,5	4

$\frac{2}{3} \quad -\frac{3}{4} \quad -\frac{17}{42}$

$$P_4(x) = -\frac{17}{42}x^2 + \frac{13}{28}x + \frac{29}{6}$$ — Entre P_7 y P_8.

• sólo aproximo el tramo $P_7 - P_8$

a) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ —— $-3 \leq x \leq 2$

Restricciones:

$R_1)\ f(-3) = \frac{1}{2} \longrightarrow -27a + 9b - 3c + d = \frac{1}{2}$ (I)

$R_2)\ f(2) = 4 \longrightarrow 8a + 4b + 2c + d = 4$ (II)

$R_3)\ f'(2) = -3 \longrightarrow 12a + 4b + c = -3$ (III)

$R_4)\ f''(1) = 0 \longrightarrow 6a + 2b = 0 \longrightarrow \boxed{b = 3a}$ (A)

Despejo d (II). $\boxed{d = 4 - 8a - 4b - 2c}$ (IV)

(A) en (III): $12a + 4(3a) + c = -3 \rightarrow \boxed{c = -24a - 3}$ (B)

(A,B) en (II): $8a + 4(3a) + 2(-24a - 3) + d = 4$

$\longrightarrow 20a - 48a - 6 + d = 4$

$\longrightarrow -28a + d = 10$

$\longrightarrow \boxed{d = 28a + 10}$ (C)

(A,B,C) en (I): $-27a + 9(3a) - 3(-24a - 3) + 28a - 10 = 0{,}5$

$\longrightarrow 72a + 9 + 28a + 10 = 0{,}5$

$\longrightarrow 100a = -18{,}5$

$\longrightarrow a = -\frac{18{,}5}{100}$

$\longrightarrow \boxed{a = -0{,}185} \longrightarrow \boxed{b = -0{,}555}$

$\longrightarrow \boxed{c = 1{,}44}$

$\longrightarrow \boxed{d = 4{,}82}$

Reemplazando en la original $f(x)$, con (a, b, c, d)

$$\boxed{f(x) = -0{,}185x^3 - 0{,}555x^2 + 1{,}44x + 4{,}82}$$

b) • Soporte global: Suave. Todos los puntos abarcados en una sola función de grado n-1 para n puntos. Derivable en todos los puntos. Posibilidad de gran oscilación. Necesidad de recálculo si se suman o quitan punto de la muestra.

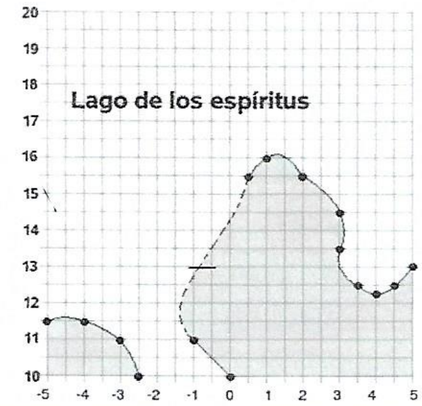
• Soporte local: No son suaves necesariamente. Abarcan los puntos de un conjunto de funciones. — grupos reducidos de puntos para expresar los distintos partes. No hay oscilación entre puntos y ajustan mejor los datos. No hace falta un recálculo al agregar o quitar puntos. El cálculo puede ser tedioso ( ) y complejo.

En este caso, la estrategia es de soporte global. En base a la magnitud del error relativo obtenido para el valor Y_i respecto de y_i, se demuestra que el enfoque no resulta muy apropiado para la aproximación.

c) Consultar!

Ejercicio -7

A la vera sur del lago (al este del nacimiento del río de la desesperanza) se desea construir un pequeño puerto, para lo cual se necesita primero modelar el perfil de la costa.



A) Modele el perfil del lago mostrado en el esquema. Sabiendo que para la zona en linea de trazos se a podido generar la siguiente tabla de valores aproximados:

X	-1,3	-1,3	-1,2	-0,5	0	0,3
Y	11.5	12	12,5	13,5	14,3	15

a la cual se la debe modelar por medio de dos parábolas que se unan suavemente en la ordenada **y=13**.

	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}	P_{13}	P_{14}
x	-5	-4	-3	-2,5	0	-1	0,5	1	2	3	3	3,5	4	4,5	5
y	11,5	11,5	11	10	10	11	15,5	16	15,5	14,5	13,5	12,5	12,25	12,5	13.

$P_1(x)$:

x	-5	-4	-3
y	11,5	11,5	11

$0 \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{4}$

$\longrightarrow \boxed{P_1(x) = -0,25x^2 - 2,25x + 6,5}$ (P_0, P_1, P_2)

$P_2(x)$

x	-4	-3	-2,5
y	11,5	11	10

$\longrightarrow \boxed{P_2(x) = -x^2 - 7,5x - 2,5}$ (P_1, P_2, P_3)

$P_3(x)$

x	0	-1
y	10	11

-1

$\longrightarrow \boxed{P_3(x) = 10 - x}$ (P_4, P_5)

$P_4(x)$

x	0,5	1	2
y	15,5	16	15,5

$1 \quad -\frac{1}{2} \quad -1$

$\boxed{P_4(x) = -x^2 + 2,5x + 14,5}$ (P_6, P_7, P_8)

$P_5(y)$

y	15,5	14,5	13,5
x	2	3	3

$-1 \quad 0 \quad -\frac{1}{2}$

$\boxed{P_5(y) = -0,5y^2 + 14y - 94,875}$ (P_8, P_9, P_{10})

$P_6(x)$

x	3	3,5	4
y	13,5	12,5	12,25

$\boxed{P_6(x) = 1,5x^2 - 11,75x + 35,25}$ (P_{10}, P_{11}, P_{12})

$P_7(x)$

x	4	4,5	5
y	12,25	12,5	13

$\boxed{P_7(x) = 0,5x^2 - 3,75x + 19,25}$ (P_{12}, P_{13}, P_{14})

[illegible] del método por $S(y)$, aproximando por mínimos cuadrados, entre (P_5) y (P_6)

Zona de la línea de trazos:

$S_1(y) = ay^2 + by + c \quad 11 \leq y \leq 13$ $\quad R_I)\ S_1(11) = -1$ $\quad R_{III})\ S_1(13) = S_2(13)$

$S_2(y) = dy^2 + ey + f \quad 13 < y \leq 15{,}5.$ $\quad R_{II})\ S_2(15{,}5) = 0{,}5$ $\quad R_{IV})\ S_1'(13) = S_2'(13)$

$R_I)$: $121a + 11b + c = -1 \longrightarrow c = -1 - 121a - 11b$

$R_{II})$ $240{,}25d + 15{,}5e + f = 0{,}5. \longrightarrow f = 0{,}5 - 240{,}25d - 15{,}5e$

$$S(y)^* \begin{cases} a(y^2-121) + b(y-11) - 1 \\ d(y^2-240{,}25) + e(y-15{,}5) - 0{,}5 \end{cases}$$

Uso III:

$a\,48 + b\,2 - 1 = d(-71{,}25) + e(-2{,}5) - 0{,}5$

$b = -24a + d(-35{,}625) + e(1{,}25) + 0{,}25.$

$S_1^{**}(y) = a(y^2-24) + d(-35{,}625y) + e(1{,}25y) + 0{,}25y$

Uso IV

$S_1^{**'}(13) = a(26) + d(-35{,}625) + e(16{,}25) + 0{,}25$

$S_2^{**'}(13) = d(26) + e(13)$

$a = \frac{1}{26}\left[d(26+35{,}625) + e(-16{,}25+13) + 0{,}25\right]$

$a = d(2{,}370\,192\,308) + e(-0{,}125) + \frac{1}{104}$

Elimino a)

$\left[d(2{,}370\,192\,308) + e(-0{,}125) + \frac{1}{104}\right](y^2-24) + d(-35{,}625y) + e(1{,}25y) + 0{,}25y$

$d(2{,}370\,192\,308y^2 - 35{,}625y - 0{,}098\,758\,012\,83) + e(-0{,}125y^2 + 1{,}25y + 3) + \frac{1}{104}y^2 + 0{,}25y + \frac{3}{13}$

$$S^{**}(y)=\begin{cases} d\underbrace{(2{,}370192308\,y^2-35{,}625y-0{,}09875801282)}_{\varphi_1}+e\underbrace{(-0{,}125y^2+1{,}25y+3)}_{\varphi_2}+\underbrace{\frac{1}{104}y^2+0{,}25y+\frac{3}{13}}_{\gamma_1} \\ d(y^2-240{,}25)+e(y-15{,}5)-\underbrace{0{,}5} \end{cases}$$

P	P5						P6
x	-1	-1,3	-1,2	-0,5	0	0,3	0,5
y	11	12	12,5	13,5	14,3	15	15,5
γ	4,1442308	4,6153846	4,8581731	-0,5	-0,5	-0,5	-0,5
$\varphi 1$	-101,8805	-82,69107	-71,31871	-58	-35,76	-15,25	0
$\varphi 2$	1,625	0	-0,90625	-2	-1,2	-0,5	0
X	-5,144231	-5,915385	-6,058173	0	0,5	0,8	1
E%	-414,42%	-355,03%	-404,85%	100,00%	X	-166,67%	-100,00%

Caso de mínimos cuadrados:
- 6 variables.
- 4 restricciones.

$\langle \varphi_0,\varphi_0\rangle = 27179,$[illegible]

$\langle \varphi_0,\varphi_1\rangle = \langle \varphi_1,\varphi_0\rangle =$ [illegible]

$\langle \varphi_1,\varphi_1\rangle = 9,$[illegible]

$\langle X,\varphi_0\rangle = 1415,$[illegible]

$\langle X,\varphi_1\rangle = -3,86915565.$

$$A=\begin{bmatrix}\langle\varphi_0,\varphi_0\rangle & \langle\varphi_0,\varphi_1\rangle \\ \langle\varphi_1,\varphi_0\rangle & \langle\varphi_1,\varphi_1\rangle\end{bmatrix}$$

Resolver el sistema:

$$\begin{aligned}\langle\varphi_0,\varphi_0\rangle b+\langle\varphi_0,\varphi_1\rangle d &= \langle X,\varphi_0\rangle \\ \langle\varphi_1,\varphi_0\rangle b+\langle\varphi_1,\varphi_1\rangle e &= \langle X,\varphi_1\rangle\end{aligned} \longrightarrow \begin{cases} d = 0{,}054026\ldots \\ e = -0{,}510\ldots \end{cases}$$

$a = 0,$[illegible] (fórmula II) $f = 0,096$[illegible]

$b = -8,$[illegible] (fórmula II)

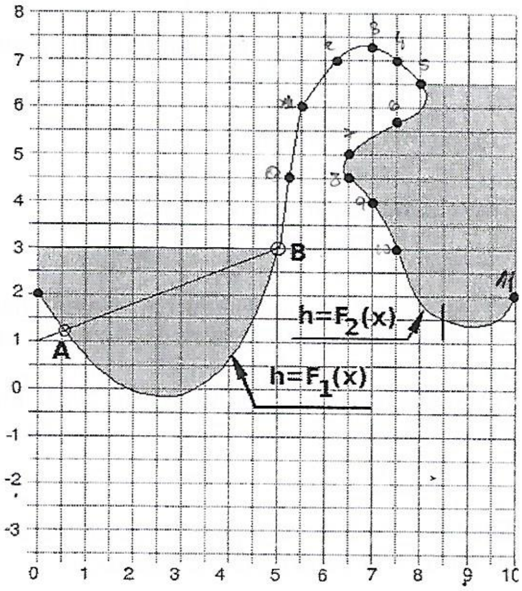
$c = 62,$[illegible] (fórmula I)

Luego

$$S(y)=\begin{cases} [\text{illegible}]\,y^2-8{,}[\text{illegible}]\,y+62{,}[\text{illegible}] & 11\le y\le 13 \\ 0{,}05402608317\,y^2-0{,}[\text{illegible}]\,y+0{,}[\text{illegible}] & 12\le y\le 15{,}5. \end{cases}$$

Parcial 21/02/11

Ejercicio -1 Se ha encontrado en una cadena montañosa de Córdoba un embalse natural, ideal para poder construir una represa hidroeléctrica. Un esquema del perfil del embalse se puede ver en el siguiente esquema.
Se requiere realizar una tubería recta que una puntos **A** y **B**.



$$F_1(x)=2e^{\frac{2x}{5}}-e^{\frac{x}{5}}-2x+1$$

la trayectoria de la cañería se puede modelar por medio de:

h=1+0,4x

A) Determine una región en donde se encuentre el punto **B**.
B) Determine si la distancia si dicha tubería tendrá una longitud mayor o menor a **4,74**

Observación: Debe previamente aislar analíticamente las raíces y garantizar convergencia para uno de ellos.
Debes usar métodos numéricos distintos.

Ejercicio -2
A) Modele el perfil marcado de este embalse.

Nota: la zona del fondo del embalse se debe modelar por medio de una función suave definida por dos tramos de parábola que se unan en **x=8,5.**
Tabla para la aproximación

7,5	x	7,75	8	8,5	9	9,5	9,75	10
3	h	2,3	1,8	1,5	1,35	1,4	1,6	2

Ejercicio 2

- Perfil del embalse. Cálculo del fondo — $h=F_2(x)$, aproximando por mínimos cuadrados con 8 puntos, 4 restricciones y 6 incógnitas. Extremos exactos: (P_{10}, P_{11})

$R_1: F_2(7{,}5)=3$ $\qquad$ $R_3: F_{1,2}(8{,}5)=F_{2,2}(8{,}5)$ — continuidad

$R_2: F_2(10)=2$ $\qquad$ $R_4: F'_{1,2}(8{,}5)=F'_{2,2}(8{,}5)$ — suavidad.

$$F_2(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & 7{,}5\leq x\leq 8{,}5 \\ dx^2+ex+f & 8{,}5< x\leq 10 \end{cases}$$

Uso R_1: $56{,}25a+7{,}5b+c=3 \longrightarrow \boxed{c=3-56{,}25a-7{,}5b}$ (I)

Uso R_2: $\boxed{f=2-100d-10e}$ (II)

$$F_2^*(x)=\begin{cases} a(x^2-56{,}25)+b(x-7{,}5)+3 & 7{,}5\leq x\leq 8{,}5 \\ d(x^2-100)+e(x-10)+2 & 8{,}5< x\leq 10 \end{cases}$$

Uso R_3:

$$2a(8,5)+b = 2d(8,5)+e \longrightarrow 17a+b = 17d+e \longrightarrow \boxed{e = 17a+b-17d}$$

Procurar <u>no</u> pasar denominadores dividiendo, <u>mientras se pueda</u>

$$g_2^{**}(x) = d(x^2-100)+(17a+b-17d)(x-10)+2 =$$
$$= d(x^2-17x+70)+a(17x-170)+b(x-10)+2$$

$$F_2^{**}(x) = \begin{cases} a(x^2-56,25)+b(x-7,5)+3 & 7,5 \le x \le 8,5 \\ d(x^2-17x+70)+a(17x+170)+b(x-10)+2, & 8,5 < x \le 10 \end{cases}$$

Uso R_4 — Reemplazo en $F_2^{**}(x)$

$$16a+b+3 = (-2,25)d + (-25,5)a + (-1,5)b + 2$$
$$(41,5)a + (2,5)b + 1 = -2,25d \longrightarrow d = \left(-\frac{166}{9}\right)a + \left(-\frac{10}{9}\right)b$$

$$g_2^{***}(x) = \left[\left(-\frac{166}{9}\right)a + \left(-\frac{10}{9}b\right) - \frac{4}{9}\right](x^2-17x+70)+\ldots$$
$$= a\left(-\frac{166}{9}x^2+\frac{2975}{9}x-\frac{13150}{9}\right)+b\left(-\frac{10}{9}x^2+\frac{179}{9}x-\frac{790}{9}\right)-\frac{4}{9}x^2+\frac{68}{9}x-\frac{262}{9}$$

$$F_2^{***}(x) = \begin{cases} a\underbrace{(x^2-56,25)}_{\varphi_0}+b\underbrace{(x-7,5)}_{\varphi_1}+\underbrace{3}_{Y} & 7,5 \le x \le 8,5. \\ a\underbrace{\left(-\frac{166}{9}x^2+\frac{2975}{9}x-\frac{13150}{9}\right)}_{\varphi_0}+b\underbrace{\left(-\frac{10}{9}x^2+\frac{179}{9}x-\frac{790}{9}\right)}_{\varphi_1}\underbrace{-\frac{4}{9}x^2+\frac{68}{9}x-\frac{262}{9}}_{Y} & 8,5 < x \le 10 \end{cases}$$

$\langle\varphi_0,\varphi_0\rangle = 1009,10402$

$\langle\varphi_0,\varphi_1\rangle = \langle\varphi_1,\varphi_0\rangle = 62,4074074$

$\langle\varphi_1,\varphi_1\rangle = 3,86053241$

$$\longrightarrow \begin{array}{l} \langle\varphi_0,\varphi_0\rangle a + \langle\varphi_0,\varphi_1\rangle b = \langle Y,\varphi_0\rangle \\ \langle\varphi_1,\varphi_0\rangle a + \langle\varphi_1,\varphi_1\rangle b = \langle Y,\varphi_1\rangle \end{array}$$

$\langle Y,\varphi_0\rangle = -89,3435185$

$\langle Y,\varphi_1\rangle = -5,54560185$

Resolviendo el sistema:

$a = 1,179838675$

$b = -20,50915943$

$$G(x)=\begin{cases} 1{,}179\,838\,675\,(x^2-56{,}25)-20{,}509\,159\,43\,(x-7{,}5)+3 & \longrightarrow\ 7{,}5\leq x\leq 8{,}5 \\ 1{,}179\,838\,675\left(-\frac{166}{9}x^2+\frac{2975}{9}x-\frac{13150}{9}\right)-20{,}509\,159\,43\left(-\frac{10}{9}x^2+\frac{179}{9}x-\frac{790}{9}\right)-\frac{4}{9}x^2+\frac{68}{9}x-\frac{262}{9} & 8{,}5< x\leq 10 \end{cases}$$

P	P10							P11
x	7,5	7,75	8	8,5	9	9,5	9,75	10
y	3	2,3	1,8	1,5	1,35	1,4	1,6	2
γ	3	3	3	3	2,8888889	2,5555556	2,3055556	2
$\varphi 0$	0	3,8125	7,75	16	19,888889	14,555556	8,4305556	0
$\varphi 1$	0	0,25	0,5	1	1,2222222	0,8888889	0,5138889	0
Y	0	-0,7	-1,2	-1,5	-1,5388889	-1,1555556	-0,7055556	0
G(x)	3	2,3708451	1,88917	1,3682594	1,2878188	1,498399	1,7128219	2
E%	0,00%	2,99%	4,72%	-9,63%	-4,83%	6,57%	6,59%	0,00%

Aproximación mediante interpolaciones:

P	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
x	5,25	5,5	6,25	7	7,5	8	7,5	6,5	6,5	7	7,5	10
y	4,5	6	7	7,5	7	6,5	5,75	5	4,5	4	3	2

$P_1(x) \Rightarrow$

P	P_0	P_1
x	5,25	5,5
y	4,5	6

$\longrightarrow P_1(x) = 6x-27 \qquad x\in[5{,}25;\ 5{,}5]$

$P_2(x) \Rightarrow$

P	P_1	P_2
x	5,5	6,25
y	6	7

$\longrightarrow P_2(x) = \frac{4}{3}x-\frac{4}{3} \qquad x\in[5{,}5;\ 6{,}25]$

$P_3(x) \Rightarrow$

P	P_2	P_3	P_4
x	6,25	7	7,5
y	7	7,5	7

$\longrightarrow P_3(x) = -\frac{3}{2}x^2+\frac{595}{48}x-\frac{617}{144} \qquad x\in[6{,}25;\ 7{,}5]$

$P_4(y) \Rightarrow$

P	P_4	P_5	P_6
y	7	6,5	5,75
x	7,5	8	7,5

$\longrightarrow P_4(y) = -\frac{3}{4}y^2+\frac{73}{8}y-\frac{157}{8} \qquad y\in[5{,}75;\ 7]$

$P_5(x) \Rightarrow$

P	P_6	P_7
x	7,5	6,5
y	5,75	5.

$\Rightarrow P_5(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{8}$ $\quad x \in [6,5 ; 7,5]$

$P_6(y) \Rightarrow$

P	P_7	P_8
x	5	4,5
y	6,5	6,5.

$\Rightarrow P_6(y) = 6,5$ $\quad y \in [4,5 ; 5]$

$P_7(x) \Rightarrow$

P	P_8	P_9	P_{10}
x	6,5	7	7,5
y	4,5	4	3

$\Longrightarrow P_7(x) = -x^2 + \frac{25}{2}x - \frac{79}{2}$ $\quad x \in [6,5 ; 7,5]$

* P_6 y P_7 son rectas dado que:

- No puede construirse una parábola que aproxime mucho mejor con P_6, P_7 y P_8.
- Un polinomio de 3er grado para P_4, P_5, P_6, P_7 es una peor aproximación que si se usa una recta en dos Tramos.

5) Dada la siguiente tabla de datos experimentales:

x	2.5	3.5	5.	6.	7.5	10.	12.5	15.
y	5.98	6.78	8.34	9.05	9.33	11.5	12.48	14.

a) Encuentre los coeficientes a y b que ajustan los datos a la curva $y = a\sqrt{x} + b$.

b) Estime cual será el valor de $y(9.0)$ y, de ser posible estime, la incertidumbre de dicho valor.

---

a) $\varphi_1(x) = \sqrt{x} \Rightarrow y = f(x) = a\sqrt{x} + b = a\,\varphi_1(x) + \varphi_2(x)$

$\varphi_2(x) = 1$

Para despejar los valores aproximados para a y b:

$<\varphi_0, \varphi_0> = 62$

$<\varphi_0, \varphi_1> = 21,446\,932\,9$

$<\varphi_1, \varphi_1> = 8$

$$\begin{bmatrix} <\varphi_0, \varphi_0> & <\varphi_0, \varphi_1> \\ <\varphi_1, \varphi_0> & <\varphi_1, \varphi_1> \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} <Y, \varphi_0> \\ <Y, \varphi_1> \end{bmatrix}$$

$<Y, \varphi_0> = 168,992\,031$ $\quad <Y, \varphi_1> = 63,46$

Luego:

$$\begin{bmatrix} 62 & 21,446\,932\,9 \\ 21,446\,9329 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 223,218\,798 \\ 77,46. \end{bmatrix}$$

$a \cong -0,251\,078\,199\,9$

$b \cong 8,605\,607\,163$

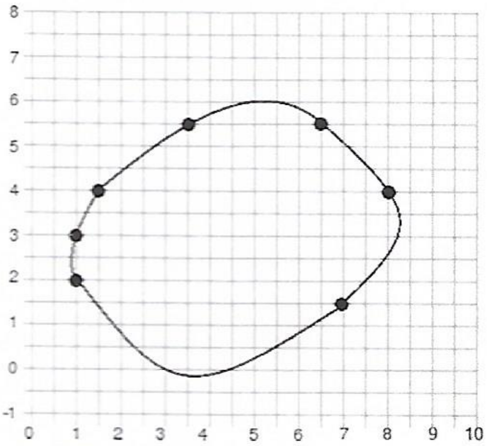
Luego $y = f(x) \approx g(x) \approx (3,454\,737\,088)\sqrt{x} + 0,420\,810\,6848$

b) Calculamos $y = f(9,0) \approx g(9,0) = 10,785\,021\,95$

(*) Al no poseer el dato experimental para el punto donde $x = 9,0$, no es posible calcular la incertidumbre para este valor particular. La incertidumbre para puntos cercanos puede observarse, en valor porcentual, para los valores visibles en la Tabla adjunta.

P	P0							P7
x	2,5	3,5	5	6	7,5	10	12,5	15
y	5,98	6,78	8,34	9,05	9,33	11,5	12,48	14
γ	0	0	0	0	0	0	0	0
$\varphi 0$	1,5811388	1,8708287	2,236068	2,4494897	2,7386128	3,1622777	3,5355339	3,8729833
$\varphi 1$	1	1	1	1	1	1	1	1
Y	5,98	6,78	8,34	9,05	9,33	11,5	12,48	14
G(x)	5,8832296	6,884032	8,1458377	8,8831537	9,8819979	11,345649	12,635151	13,80095
E%	-1,64%	1,51%	-2,38%	-1,88%	5,59%	-1,36%	1,23%	-1,44%

4) Se ha digitalizado una fotografia de una roca que orbita al planeta Plutón.



x	1.5	2.0	3.0	4.0	5.5	6.0
y	1.5	0.8	0.0	−0.2	0.5	0.8

Se sabe que los puntos marcados son exactos y la tabla es de valores aproximados

a) Encuentre una función que modele el perfil de dicha roca.
b) El borde inferior en el intervalo $[1, 7]$ se lo debe aproximar por medio de una función suave definida en dos tramos uno parabólico y uno recto que se unen en x=4,5

$P_1(y)$:

P	0	1	2
y	2	3	4
x	1	1	1,5

0 $\frac{1}{2}$

4

$P_1(y) = 4y^2 - 20y + 25$

$\boxed{\text{Interpolación (excluido el borde inferior)}}$

$P_2(x)$:

P	2	3	4
x	1,5	3,5	6,5
y	4,5	5,5	5,5

3/4 0

$-6,\widehat{6}$

$P_2(x) = -\frac{20}{3}x^2 + \frac{409}{12}x - \frac{257}{8}$

$P_3(y)$:

P	4	5	6
y	5,5	4	1,5
x	6,5	8	7

−1 $\frac{5}{2}$

$\frac{1}{7}$

$P_3(y) = \frac{1}{7}y^2 - \frac{43}{14}t + \frac{136}{7}$

Mínimos Cuadrados:

$$G(x) = \begin{cases} ax^2+bx+c & 1 \le x \le 4,5 \\ dx+e & 4,5 \le x \le 7 \end{cases}$$

Restricciones: R_I $G(1)=2$ $\quad$ R_{III} $G_1(4,5)=G_2(4,5)$

R_{II} $G(7)=1,5$ $\quad$ R_{IV} $G_1'(4,5)=G_2'(4,5)$

$$G^*(x) = \begin{cases} a(x^2-1)+b(x-1)+2 & 1 \le x \le 4,5 \\ d(x-7)+\frac{3}{2} & 4,5 \le x \le 7 \end{cases}$$

Por R_I:

$G(1) = a+b+c = 2 \Rightarrow \boxed{c = 2-a-b} \Rightarrow \boxed{G_1^*(x) = a(x^2-1)+b(x-1)+2}$

Por R_{II}:

$G(7) = d7+e = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{e = \frac{3}{2} - d7} \Rightarrow \boxed{G_2^*(x) = d(x-7)+\frac{3}{2}}$

Por R_{IV}: $G'(4,5) = 2a(\frac{9}{2}) + b = d \Rightarrow d = 9a+b.$

$$G_2^{**}(x) = (9a+b)(x-7)+\frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{G_2^{**}(x) = a(9x-63)+b(x-7)+\frac{3}{2}}$$

$\boxed{G_1^{**}(x) = G_1^{*}(x)}$ (sin cambios)

Por R_{III}:

$$G(4,5) = a(\frac{81}{4}-1)+b(\frac{9}{2}-1)+2 = a(\frac{81}{2}-63)+b(\frac{9}{2}-7)+\frac{3}{2}.$$

$$\Rightarrow \frac{77}{4}a+\frac{7}{2}b+2 = -\frac{45}{2}a-\frac{5}{2}b+\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{167}{4}a+6b+\frac{1}{2}=0 \Rightarrow 167a+24b+2=0 \Rightarrow \boxed{b=\frac{1}{12}-\frac{167}{24}a}$$

$$G_1^{***}(x) = a(x^2-1)+(\frac{1}{12}-\frac{167}{24}a)(x-1)+2 = \boxed{a(x^2-\frac{167}{24}x+\frac{143}{24})+\frac{1}{12}x+\frac{23}{12}}$$

$$G_2^{***}(x) = a(9x-63)+(\frac{1}{12}-\frac{167}{24}a)(x-7)+\frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{G_2^{***}(x) = a(\frac{49}{24}x-\frac{343}{24})+\frac{1}{12}x+\frac{11}{2}}$$

$$G^{***}(x) = \begin{cases} a\underbrace{(x^2-\frac{167}{24}x+\frac{143}{24})}_{\varphi(x)}+\underbrace{\frac{1}{12}x+\frac{23}{12}}_{\gamma(x)} & 1\leq x\leq 4,5 \\ a(\frac{49}{24}x-\frac{343}{24}) + \frac{1}{12}x+\frac{11}{12}. & 4,5\leq x\leq 7 \end{cases}$$

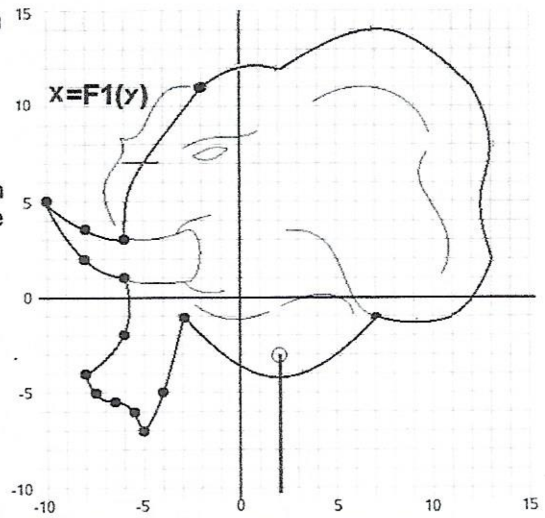
P	0							6
x	1	1,5	2	3	4	5,5	6	7
y	2	1,5	0,8	0	-0,2	0,5	0,5	1,5
γ	2	2,041666667	2,0833333	2,16666667	2,25	1,375	1,416666667	1,5
φ	0	-2,22916667	-3,9583333	-5,91666667	-5,875	-3,0625	-2,04166667	0
Y	0	-0,54166667	-1,2833333	-2,16666667	-2,45	-0,875	-0,91666667	0
G(x)	2	1,223753881	0,6309648	-0,00424204	0,094379386	0,251325425	0,667550283	1,5
E%	0,00%	-22,57%	-26,79%	100,00%	311,91%	-98,95%	25,10%	0,00%

$\langle\varphi,\varphi\rangle a = \langle \Upsilon,\varphi\rangle$ $\quad\langle\varphi,\varphi\rangle = 103,7074053$ $\quad\langle \Upsilon,\varphi\rangle = 38,05173611$ $\quad a = 0,366914147$

$$\boxed{G(x) = \begin{cases} 0{,}366914147\left(x^2 - \frac{107}{24}x + \frac{143}{24}\right) + \frac{1}{12}x + \frac{23}{12} & 1 \leq x \leq 4{,}5 \\ 0{,}366914147\left(\frac{49}{24}x - \frac{343}{24}\right) + \frac{1}{12}x + \frac{11}{12} & 4{,}5 \leq x \leq 7 \end{cases}}$$

→ Función que delimita, aproximadamente, el borde inferior en el intervalo $x \in [1, 7]$.

Ejercicio -17 Se han diseñado globos llenos de Helio con forma de elefante (como se muestra en la figura).



A) Modele el perfil marcado en el dibujo.

Nota: a la función **F1(y)** se la debe modelar por medio de una función suave definida en dos tramos uno recto y otro parabólico, los que se unen con suavidad en **y= 7**

Valores aproximados para la zona marcada por trazos

x	**-6**	**-5,9**	**-5,6**	**-4,3**	**-3,5**	**-2,6**	**-2**
y	**3**	**5**	**6**	**8**	**9**	**10**	**11**

Nota: los valores sombreados son exactos.

Cálculo de $f_1(y)$

$$f_1(y) = \begin{cases} ay^2+by+c & 3\le y\le 7 \\ dy+e & 7\le y\le 11. \end{cases}$$

Restricciones:

R_I: $f_1(3) = -6$ $\quad$ R_{III}: $f_1(7)=f_2(7)$

R_{II}: $f_2(11) = -2$ $\quad$ R_{IV}: $f_1'(7)=f_2'(7)$.

Por R_I: $a(3^2)+b(3)+c=-6 \Rightarrow \boxed{c=-6-9a-3b}$ (I)

Por R_{II}: $d(11)+e=-2 \Rightarrow \boxed{e=-2-11d}$ (II)

Por I y II:

$$g^*(y) = \begin{cases} a(y^2-9)+b(y-3)-6 & 3\le y\le 7 \\ d(y-11)-2 & 7\le y\le 11 \end{cases}$$

Usando R_{III} en $g^*(y)$: $a(49-9)+b(7-3)-6 = d(7-11)-2$

$a(40)+b(4)-4 = d(-4)$

$\boxed{d = a(-10)+b(-1)+1}$

$$g^{**}(y) = \begin{cases} a(y^2-9)+b(y-3)-6 & 3\le y\le 7 \\ a(-10y+110)+b(-y+11)+y-13 & 7< y\le 11 \end{cases}$$

Usando R_{III} en $g^{**}(y)$:

$$a(2y)+b = a(-10y)+b(-y)+1$$

$$a(2\cdot 7)+b = a(-10\cdot 7)+b(-7)+1$$

$$a(14)+b = a(-70)+b(-7)+1$$

$$a(84)+b(8) = 1 \longrightarrow \boxed{b = a\left(\frac{21}{2}\right)+\frac{1}{8}}$$

$$g^{**}(y) = \begin{cases} a(y^2-9)+\left[a\frac{21}{2}+\frac{1}{8}\right](y-3)-6 = \underbrace{a\left(y^2+\frac{21}{2}y-\frac{81}{2}\right)}_{\varphi(x)}+\underbrace{\frac{1}{8}y-\frac{51}{8}}_{\gamma(x)} \\ a(-10y+110)+\left[a\frac{21}{2}+\frac{1}{8}\right](-y+11)+y-13 = a\left(-\frac{41}{2}y+\frac{451}{2}\right)+\frac{7}{8}y-\frac{93}{8} \end{cases}$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} y^2+\frac{21}{2}y-\frac{81}{2} & 3\leq y\leq 7 \\ -\frac{41}{2}y+\frac{451}{2} & 7<y\leq 11 \end{cases}$$

$$\boxed{\langle\varphi,\varphi\rangle a = \langle\varphi,\underline{X}\rangle}$$

$$\langle\varphi,\varphi\rangle = 10674,75$$

$$\langle\varphi,\underline{X}\rangle = 31,7875$$

$$a = 0,00297782$$

$$\gamma(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}y-\frac{51}{8} & 3\leq y\leq 7 \\ \frac{7}{8}y-\frac{93}{8} & 7\leq y\leq 11 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} (0,00297782)\left(y^2+\frac{21}{2}y-\frac{81}{2}\right)+\frac{1}{8}y-\frac{51}{8} & 3\leq y\leq 7 \\ (0,00297782)\left(-\frac{41}{2}y+\frac{451}{2}\right)+\frac{7}{8}y-\frac{93}{8} & 7<y\leq 11. \end{cases}$$

P	P1					P0
y	3	5	6	8	9	10	11
x	-6	-5,9	-5,6	-4,3	-3,5	-2,6	-2
γ	-6	-5,75	-5,625	-4,625	-3,75	-2,875	-2
φ	0	37	58,5	61,5	41	20,5	0
X	0	-0,15	0,025	0,325	0,25	0,275	0
G(X)	-6	-5,6398207	-5,4507975	-4,4418641	-3,6279094	-2,8139547	-2
E%	0,00%	-4,61%	-2,74%	3,19%	3,53%	7,60%	0,00%

P	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x	-6	-8	-10	-8	-6	-6	-8	-7,5	-6,5	-5,5	-5
y	3	4,5	5	2	1	-2	-4	-5	-5,5	-6	-7

P	11	12	13
x	-5	-4	-3
y	-7	-5	-1

$P_1(x)$:

P	1	2	3
x	-6	-8	-10
y	3	4,5	5

$\rightarrow P_1(x) = -8x^2 - 112{,}75x - 385{,}5$

$x \in [-10, -6]$

$P_2(x)$:

P	3	4	5
x	-10	-8	-6
y	5	2	1

$\rightarrow P_2(x) = 4x^2 + 70{,}5x + 310$

$x \in [-10, -6]$

$P_3(y)$:

P	5	6	7
y	1	-2	-4
x	-6	-6	-8

$\rightarrow P_3(y) = -5y^2 - 5y + 4$

$y \in [-4, 1]$

$P_4(x)$:

P	7	8	9
x	-8	-7,5	-6,5
y	-4	-5	-5,5

$\rightarrow P_4(x) = x^2 + 13{,}5x + 40$

$x \in [-8, -6{,}5]$

$P_5(x)$:

P	9	10	11
x	-6,5	-5,5	-5
y	-5,5	-6	-7

$P_5(x) = -x^2 - 12{,}5x - 44{,}5$

$x \in [-6{,}5, -5]$

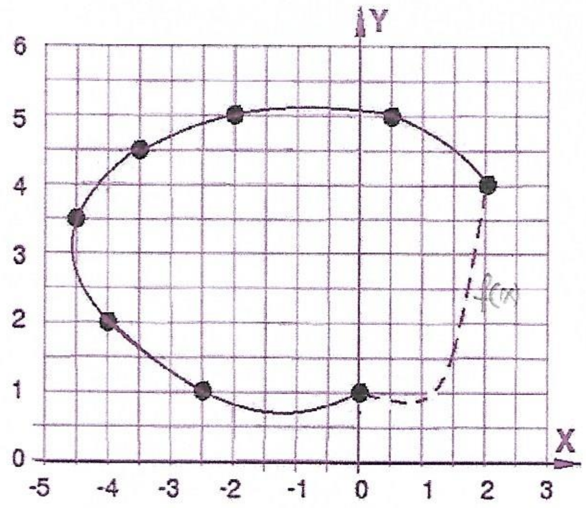
$P_6(x)$:

P	11	12	13
x	-5	-4	-3
y	-7	-5	-1

$P_6(x) = x^2 + 11x + 23$

$x \in [-5, -3]$

2) Dada la figura. De los bordes inferior, izquierdo y superior se tienen los siguientes puntos exactos: (los puntos están ordenados en sentido horario, partiendo del punto más a la derecha del borde inferior y terminando en el punto más a la derecha del borde superior).



x	0	-2.5	-4	-4.5	-3.5	-2	0,5	2
y	1	1	2	3.5	4.5	5	5	4

en el punto $(-2.5; 1)$ la pendiente es -0.5. De la función marcada con trazos del borde derecho se conocen puntos aproximados siendo el primero y el último exactos:

x	0	0,5	1	1,5	2
y	1	0.9	0.8	1.5	4

donde los valores en gris son exactos.

a) Modele la figura y para la línea de trazos utilice un polinomio de grado 3 que posea un punto de inflexión en para la abscisa $x = 0.5$.

b) ¿La estrategia utilizada en la interpolación es de soporte local o global? ¿La considera apropiada? Justifique.

c) ¿Qué propiedad tiene la matrix de coeficientes del sistema lineal a resolver para obtener la solución de una aproximación por mínimos cuadrados mediante una base ortonormal?

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad 0 \leq x \leq 2$

Restricciones

$R_1: f(0) = 1$ $\quad R_3: f''(0{,}5) = 0$

$R_2: f(2) = 4$

$R_1: \boxed{d = 1}$

$f^*(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 1$

$R_2: a8 + b4 + c2 + 1 = 4 \longrightarrow c = \frac{3}{2} - 2b - 4a$

$f^{*1}(x) = a(x^3 - 4x) + b(x^2 - 2x) + \frac{3}{2}x + 1$

$R_3: f^{**'}(x) = a(3x^2 - 4) + b(2x - 2) + \frac{3}{2} \; ; \; f^{**''}(x) = a(6x) + b(2)$

$f^{**''}(0{,}5) = a(6 \times 0{,}5) + b(2) = 0 \longrightarrow 3a + 2b = 0 \rightarrow b = -\frac{3}{2}a$

$$\boxed{f^{***}(x) = a\underbrace{\left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 - x\right)}_{\varphi(x)} + \underbrace{\frac{3}{2}x + 1}_{\gamma(x)}}$$

$\langle \varphi, \varphi \rangle a = \langle Y, \varphi \rangle$

$5{,}0625\,a = 5{,}3125$

$a = 1{,}148148148 = \frac{31}{27}$

$$f(x) = \frac{31}{27}\left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x\right) + \frac{3}{2}x + 1$$

$0 \leq x \leq 2$

P	P0				P4
x	0	0,5	1	1,5	2
y	1	0,9	0,8	1,5	4
γ	1	1,75	2,5	3,25	4
ϕ	0	-0,75	-1,5	-1,5	0
X	0	-0,85	-1,7	-1,75	0
f(x)	1	0,8888889	0,7777778	1,5277778	4
E%	0,00%	-1,25%	-2,86%	1,82%	0,00%

P	0	1	2	3	4	5	6	7
x	0	−2,5 ~~-2,4~~	-4	-4,5	-3,5	-2	0,5	2
y	1	1	2	3,5	4,5	5	5	4

P	0	1	2
X	0	-2,5	-4
y	1	1	2

$\emptyset \quad -\frac{10}{21}$

$-\frac{21}{25}$

$$\boxed{P_0(x) = -\frac{21}{25}x^2 + \frac{21}{10}x + 1}$$

$x \in [-4, 0]$

p	2	3	4
y	2	3,5	4,5
x	-4	-4,5	-3,5

$-\frac{1}{3} \quad 1$

$\frac{15}{8}$

$$\boxed{P_1(y) = \frac{15}{8}y^2 - \frac{511}{48}y + \frac{235}{24}}$$

$y \in [2, 4{,}5]$

P	4	5	6
x	-3,5	-2	0,5
y	4,5	5	5

$1/3 \quad \emptyset$

-12

$$\boxed{P_2(x) = -12x^2 - \frac{197}{3}x - \frac{235}{3}}$$

$x \in [-3{,}5, 0{,}5]$

P	5	6	7
x	-2	0,5	2
y	5	5	4

$\emptyset \quad -\frac{2}{3}$

-6

$$\boxed{P_3(x) = -6x^2 - 9x + 11}$$

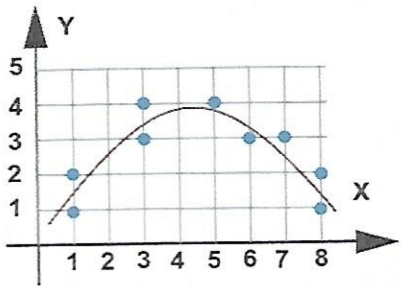
$x \in [-2, 2]$

EJERCICIO -5

a) Determine una aproximación a la función cuya gráfica se muestra solo usando los puntos marcados.

b) Verifique el ajuste obtenido.

c) ¿Fue buena su aproximación?



a) Función: $ax^2 + bx + c$.

$\varphi_0(x) = x^2$

$\varphi_1(x) = x$

$\varphi_2(x) = 1$

Para hallar a, b, c aproximamos por mínimos cuadrados:

$$\begin{bmatrix} \langle\varphi_0,\varphi_0\rangle & \langle\varphi_0,\varphi_1\rangle & \langle\varphi_0,\varphi_2\rangle \\ \langle\varphi_0,\varphi_1\rangle & \langle\varphi_1,\varphi_1\rangle & \langle\varphi_1,\varphi_2\rangle \\ \langle\varphi_0,\varphi_2\rangle & \langle\varphi_1,\varphi_2\rangle & \langle\varphi_2,\varphi_2\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle Y,\varphi_0\rangle \\ \langle Y,\varphi_1\rangle \\ \langle Y,\varphi_2\rangle \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 12678 & 1764 & 258 \\ 1764 & 258 & 42 \\ 258 & 42 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 613 \\ 107 \\ 23 \end{bmatrix}$$

- Resolviendo por Gauss:

$a = -0{,}193\,460\,098$

$b = 1{,}742\,005\,186$

$c = -0{,}02\,794\,583\,693.$

$$\boxed{f(x) = (-0{,}193\,460\,098)x^2 + 1{,}742\,005\,186x - 0{,}027\,945\,83693}$$

P	P1							P0
x	1	1	3	3	5	6	7	8	8
y	1	2	3	4	4	3	3	2	1
γ	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ϕ0	1	1	9	9	25	36	49	64	64
ϕ1	1	1	3	3	5	6	7	8	8
ϕ2	1	1	1	1	1	1	1	1	1
X	1	2	3	4	4	3	3	2	1
G(x)	1,5205993	1,5205993	3,4569288	3,4569288	3,8455776	3,4595217	2,6865457	1,5266494	1,5266494
E%	34,24%	-31,53%	13,22%	-15,71%	-4,02%	13,28%	-11,67%	-31,01%	34,50%

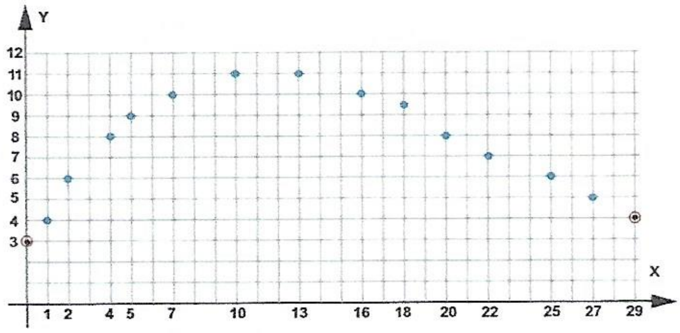
EJERCICIO -6

La siguiente gráfica representa los valores aproximados de una función.

a) Obtenga una aproximación suave **g(x)** a dicha función.

g(x) debe estar definida a tramos:
- uno parabólico.
- uno recto.

que se una suavemente en **x=15**.
Además se debe garantizar que: **g(0)=3** y **g(29)=4**.



b) Verifique el ajuste logrado.

$$g(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & 0 \leq x \leq 15 \\ dx + e & 15 < x \leq 29 \end{cases}$$

Restricciones:

$\underline{R_1}$: $g(0)=3$ $\quad$ $\underline{R_3}$: $g_1(15) = g_2(15)$

$\underline{R_2}$: $g(29)=4$ $\quad$ $\underline{R_4}$: $g_1'(15) = g_2'(15)$

$\underline{R_1}$: $\boxed{c=3}$ $\quad$ $\underline{R_2}$: $d(29)+e=4 \rightarrow \boxed{e = 4-29d}$

$$g^{*}(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 3 & 0 \leq x \leq 15 \\ d(x-29)+4 & 15 < x \leq 29 \end{cases}$$

$\underline{R_4}$: $2a(15)+b = d \Rightarrow \boxed{d = 30a+b}$

$$g^{**}(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 3 & 0 \leq x \leq 15 \\ a(30x-870) + b(x-29) + 4 & 15 < x \leq 29 \end{cases}$$

$\underline{R_3}$: $a225 + b15 + 3 = a(-420) + b(-14) + 4 \rightarrow 645a + 29b = 1$

$$\boxed{b = \frac{1}{29} - \frac{645}{29}a}$$

$$g^{***}(x) = \begin{cases} \underbrace{a\left(x^2 - \frac{645}{29}x\right)}_{\varphi(x)} + \underbrace{\frac{1}{29}x + 3}_{\gamma(x)} & 0 \leq x \leq 15 \\ a\left(\frac{225}{29}x - 225\right) + \frac{1}{29}x + 3 & 15 < x \leq 29 \end{cases}$$

$$\langle \varphi, \varphi \rangle a = \langle \bar{Y}, \varphi \rangle \rightarrow 94863a = -4861{,}071938 \rightarrow \boxed{a = -0{,}051\,243\,078}$$

$$g(x) = \begin{cases} (-0{,}051\,243\,078)\left(x^2 - \frac{645}{29}x\right) + \frac{1}{29}x + 3 & 0 \leq x \leq 15. \\ \\ (-0{,}051\,243\,078)\left(\frac{225}{29}x - 225\right) + \frac{1}{29}x + 3 & 15 < x \leq 29 \end{cases}$$

P	P0													P14
x	0	4	6	4	5	7	10	13	16	18	20	22	25	27	29
y	3	1	2	8	9	10	11	11	10	9,5	8	7	6	5	4
γ	3	3,137931	3,2068966	3,137931	3,1724138	3,2413793	3,3448276	3,4482759	3,5517241	3,6206897	3,6896552	3,7586207	3,862069	3,9310345	4
φ	0	-72,96552	-97,44828	-72,96552	-86,2069	-106,6897	-122,4138	-120,1379	-100,8621	-85,34483	-69,82759	-54,31034	-31,03448	-15,51724	0
Y	0	-2,137931	-1,206897	4,862069	5,8275862	6,7586207	7,6551724	7,5517241	6,4482759	5,8793103	4,3103448	3,2413793	2,137931	1,0689655	0
G(x)	3	6,8769087	8,2004462	6,8769087	7,5899205	8,7084856	9,6176872	9,6045132	8,720207	7,9940213	7,2678356	6,5416499	5,4523714	4,7261857	4
E%	0,00%	85,46%	75,61%	-16,33%	-18,58%	-14,83%	-14,37%	-14,53%	-14,68%	-18,84%	-10,07%	-7,01%	-10,04%	-5,79%	0,00%

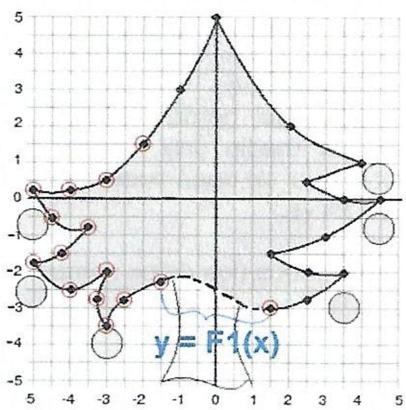
Ejercicio -16 Se desea realizar tarjetas navideñas como se muestra en el dibujo.

A) Para realizar dicha tarjeta debe modelar la parte del borde donde los puntos están marcados.

Nota: La zona del borde de F1(x) marcada con trazos se debe aproximar por medio una función suave definida en dos tramos parabólicos que se unen suavemente en x=0 y posee un máximo relativo en x= -1.

Datos aproximados (los datos sombreados son exactos)

x	-1,5	-1	0,5	0	0,5	1	1,5
y	-2,25	-2	-2,2	-2,5	-2,7	-3	-3



$$G(x) = \begin{cases} G_1(x)\ \ ax^2+bx+c & -1{,}5 \le x \le 0 \\ G_2(x)\ \ dx^2+ex+f & 0 < x \le 1{,}5 \end{cases}$$

Restricciones

R_1: $G(-1{,}5) = -2{,}25$ $\qquad$ R_3: $G_1(0) = G_2(0)$

R_2: $G(1{,}5) = -3$ $\qquad$ R_4: $G_1'(0) = G_2'(0)$.

R_1: $a(2{,}25) + b(-1{,}5) + c = -2{,}25 \longrightarrow \boxed{c = -2{,}25 + b(1{,}5) - a(2{,}25)}$ $\qquad$ R_5: $G'(-1) = 0$

$G_1^*(x) = a(x^2 - 2{,}25) + b(x+1{,}5) - 2{,}25.$

R_2: $d(2{,}25) + e(1{,}5) + f = 3 \longrightarrow \boxed{f = 3 - e(1{,}5) - d(2{,}25)}$

$G_2^*(x) = d(x^2 - 2{,}25) + e(x - 1{,}5) + 3$

R_5: $G_1^{*\prime}(x) = 2ax + b \to G_1^{*\prime}(-1) = -2a + b = 0 \to \boxed{b = 2a}$

$G_1^{**}(x) = a(x^2 + 2x + 0{,}75) - 2{,}25$

R_4: $2a(0) + 2a = 2d(0) + e \to 2a = e \to \boxed{e = 2a}$

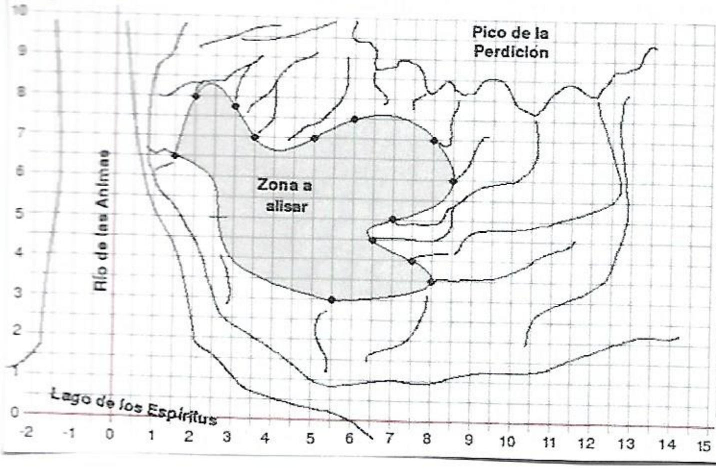
$G_2^{**}(x) = d(x^2 - 2{,}25) + a(2x - 3) + 3$

R_3: $a(0{,}75) - 2{,}25 = d(-2{,}25) + a(-3) + 3 \longrightarrow d(2{,}25) = a(-3{,}75) + 5{,}25$

$\longrightarrow \boxed{d = -\frac{5}{3}a + \frac{7}{3}}$ $\qquad$ $G_2^{***}(x) = \left(-\frac{5}{3}a + \frac{7}{3}\right)(x^2 - 2{,}25) + a(2x-3) + 3 = a\left(-\frac{5}{3}x^2 + 2x - \frac{83}{12}\right) + \frac{7}{3}x^2 - \frac{9}{4}$

$$G^{***}(x) = \begin{cases} a(x^2 + 2x + 0{,}75) - 2{,}25 & -1{,}5 \le x \le 0 \\ a\left(-\frac{5}{3}x^2 + 2x - \frac{83}{12}\right) + \frac{7}{3}x^2 - \frac{9}{4} & 0 < x \le 1{,}5 \end{cases}$$

Ejercicio -9



Para construir la estación norte se debe alisar una zona de montaña como se muestra en la figura.

A) Modele el perfil marcado de la zona a alisar.

Nota: la zona entre los puntos (1,5;6,5) y (5,5;3) se debe modelar por medio una función suave definida en dos tramos parabólicos, tal que posea una tangente vertical en y=5.

Tabla para la aproximación

Y	**3,5**	**4**	**4,5**	**5**	**5,5**	**6**
X	**4**	**3**	**2,7**	**2,6**	**2,5**	**2,3**

$$g(x)\begin{cases} \underbrace{ay^2+by+c}_{g_1(y)} & 3\leq y\leq 5 \\ \underbrace{dy^2+ey+f}_{g_2(y)} & 5<y\leq 6,5. \end{cases}$$

Restricciones

R_1: $g(3)=5,5$ R_3: $g_1(5)=g_2(5)$

R_2: $g(6,5)=1,5$ R_4: $g'(5)=0$

de R_1: $\boxed{c=5,5-3b-9a}$ de R_2: $\boxed{f=1,5-6,5e-42,25d}$

$$g(x)=\begin{cases} a(y^2-9)+b(y-3)+5,5 & 3\leq y\leq 5 \\ d(y^2-42,25)+e(y-6,5)+1,5 & 5<y\leq 6,5 \end{cases}$$

de R_4: $2.a.5+b=0 \longrightarrow$ $\boxed{b=-10a}$

$2d.5+e=0 \longrightarrow$ $\boxed{e=-10d}$

$$g(x)=\begin{cases} a(y^2-10y+21)+5,5 & 3\leq y\leq 5 \\ d(y^2-10y+22,75)+1,5. & 5<y\leq 6,5 \end{cases}$$

de R_3: $a(25-50+21)+5,5=d(25-50+22,75)+1,5.$

$a(-4)+4=d(-2,25) \longrightarrow \boxed{d=a\left(\frac{16}{9}\right)-\frac{16}{9}}$

$a\left(\frac{16}{9}\right)-\frac{16}{9}$

$$g^{***}(x) = \begin{cases} a(y^2-10y+21)+5{,}5. & 3 \leq y \leq 5 \\ a\left(\frac{16}{9}y^2 - \frac{160}{9}y + \frac{364}{9}\right) - \frac{16}{9}y^2 + \frac{160}{9} - \frac{701}{18} & 5 < y \leq 6{,}5. \end{cases}$$

1) Conceptos Teóricos.

[redacted]

b) Distinga los criterios de uso para los métodos de interpolación polinomial y de mínimos cuadrados.

[redacted]

HinT: buscar en PDFs de resumen la información para distinguir entre los criterios.

Interpolación polinomial:

Es un método de soporte Local. No son suaves, en general, a Través de toda la aproximación. Abarca los puntos de una función o funciones de a Tramos. No presentan oscilaciones, para órdenes bajos de los polinomios. ~~Usa datos exactos y ajusta~~ Los datos de entrada para aplicar las aproximaciones ajustan dentro de la aproximación. Si se agregan o quitan puntos, no hace falta un recálculo completo de Todos los Tramos.

Recomendado cuando se busca que los datos ajusten y deban modificarse las aproximaciones en base a nuevos datos o cambiando los Tramos de ajuste.

Mínimos cuadrados:

Es un método de soporte global. No ajusta igual de bien que la interpolación polinomial, pero garantiza suavidad a lo largo de toda la aproximación, la cual es una función única.

Puede oscilar y requiere ~~xx~~ recálculo completo ante cambios en los puntos de entrada.

Recomendable si debemos garantizar suavidad y no es tan importante Tener ajustes en datos precisos, como en el caso de valores experimentales o aproximados.

Relacionado

b) Enumere las ventajas y desventajas de los métodos (polinomios) de Newton y Lagrange para interpolación polinomial.