b) Describa ventajas y desventajas de utilizar expresiones analíticas o aproximaciones numéricas para la matriz del Jacobiano en el método de Newton.

El usar expresiones analíticas para calcular la Jacobiana posee el problema de un coste computacional extra para dicho cálculo. No sólo requiere calcular las derivadas de las funciones, sino los valores de éstas en cada iteración. Como ventaja, ~~[illegible]~~ la convergencia a través de iteraciones sucesivas puede, generalmente, ser más rápida.

Las aproximaciones numéricas poseen la ventaja de un cómputo más barato computacionalmente, con una convergencia más lenta. Sin embargo, más iteraciones pueden ser, por lo general, más baratas y calculables en menos tiempo en comparación a la versión analítica - arrojando una aproximación tal vez mejor en menos tiempo y mediante más operaciones.

c) En el método de mínimos cuadrados, ¿Cómo se calcula el funcional φ y cómo se relaciona con el residuo?

En el método de mínimos cuadrados, φ es la función cuyo error buscamos minimizar. Este proceso implica minimizar la distancia entre los puntos entregados como dato y la aproximación (la curva) calculada, siendo esas distancias las que se denominan "residuos".

Cada punto tomado como dato posee un valor de residuo al comparar el valor correspondiente de φ, el cual podemos analizar en conjunto para analizar si el ajuste de la curva de mínimos cuadrados es bueno. ~~[illegible]~~
Si los residuos tienen valores pequeños, entonces la curva ajusta a los datos.

Una de las mayores desventajas de usar expresiones analíticas para $J(\vec{x})$ en el método de Newton resulta del coste computacional. ~~de resolver~~ ~~un sistema lineal en cada iteración~~ ~~y~~ Tener que, ~~por tanto,~~ invertir una matriz para ~~ello~~.— matriz que, además, requiere del cálculo de nxn derivadas parciales.

b) Mediante el método que considere adecuado calcule la transformadada de laplace de la función $tu(t-t_0)$.

$tu(t-t_0) = t^2u - tut_0$, con t_0 asumido como escalar

$$\boxed{\mathcal{L}[t^2u - tut_0] = \frac{2}{s^3} - \frac{t_0}{s^2}}$$

$u \to$ función "step"

c) ¿Es posible utilizar una función distinta de un polinomio para aproximar una función por el método de mínimos cuadrados?

Sí. Cualquier función suave a lo largo del intervalo en análisis puede usarse para el cálculo de aproximación por mínimos cuadrados.

Sin embargo, el procedimiento de cálculo puede resultar más tedioso a razón del análisis de las derivadas— razón por la que usualmente se utilizan polinomios para el ajuste.

c) ¿Puede obtenerse una aproximación a la derivada primera con error de orden h^2 basándose en la expansión de Taylor?

Ejemplo Cheney, W. pág. 165.

1) Mediante expansiones de Taylor para $f(x+h)$ y $f(x-h)$:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \dots$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + \dots$$

2) Restando las expansiones entre sí:

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{2h}\left[f(x+h) - f(x-h)\right] - \frac{h^3}{3}f'''(x) - \dots}$$

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \frac{h^3}{3}f'''(x) + \frac{h^5}{5!}f^{v}(x) + \dots \Rightarrow$$ [redacted]

3) Descartando los términos de h^3 en adelante y dividiendo por $2h$:

$$\boxed{f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}}$$, con un error $-\frac{1}{6}f'''(\epsilon)$, calculado a partir del término $\frac{h^3}{3}f'''(x)$ al dividirlo por $(2h)$ y pasar al otro lado de la igualdad.

d) A partir de las expansiones de Taylor de $f(x)$, $f(x-2h)$ y $f(x+h)$, desarrolle una aproximación para $\frac{d^2 f}{dx^2}$. Diga que orden de error logra

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \frac{h^4}{4!}f^{iv}(x) + \frac{h^5}{5!}f^{v}(x) + \dots$$

$$f(x-2h) = f(x) - 2hf'(x) + \frac{(2h)^2}{2!}f''(x) - \frac{(2h)^3}{3!}f'''(x) + \frac{(2h)^4}{4!}f^{iv}(x) - \frac{(2h)^5}{5!}f^{v}(x) + \dots$$

$$= f(x) - 2hf'(x) + 2h^2 f''(x) - 3h^3 f'''(x) + \frac{2}{3}h^4 f^{iv}(x) - \frac{8}{15}h^5 f^{v}(x)$$

Combino linealmente y divido por h^2:

$$\frac{2f(x+h) + f(x-2h)}{h^2} = \frac{2}{h^2}f(x) + \frac{5}{2}f''(x)$$ [redacted] $$- \frac{8}{3}hf'''(x) + \dots$$

Luego: $$f''(x) \approx \frac{4f(x+h) + 2f(x-2h) - 4f(x)}{5h^2}$$, con término de error $-\frac{8}{3}hf'''(\epsilon)$ y error $O(h)$.

HinT: No detallar más allá de $f'''(x)$. En los problemas no se usa.

c) A partir de las expansiones de Taylor de $f(x-h/2)$, $f(x+2h)$ y $f(x+h/2)$, desarrolle una aproximación para $\frac{d^2f}{dx^2}$. Diga que orden de error logra

$f(x-\frac{h}{2}) = f(x)$ [redacted] $\underbrace{-\frac{h}{2}f'(x)}_{\text{(resta)}} + \frac{h^2}{4}f''(x) - \frac{h^3}{12}f'''(x) + \cdots$

$$f(x+\frac{h}{2}) = f(x) + \underbrace{\frac{h}{2}f'(x)}_{\text{(resta)}} + \frac{h^2}{4}f''(x) + \frac{h^3}{12}f'''(x) + \cdots$$

$$f(x+2h) = f(x) + \underbrace{2hf'(x)}_{\text{(resta)}} + h^2 f''(x) + \frac{h^3}{3}f'''(x) + \cdots$$

• eliminados al combinar.

• preservados.

Combinando linealmente, resulta:

$$2f(x-\frac{h}{2}) - 2f(x+\frac{h}{2}) + f(x+2h) = f(x) + h^2 f''(x) + \frac{1}{2}h^3 f'''(x)$$

Dividiendo por h^2 y descartando el Término $\frac{1}{2}h^3 f'''(x)$ (error)

$$\boxed{f''(x) \approx \frac{2f(x-\frac{h}{2}) - 2f(x+\frac{h}{2}) + f(x+2h) - f(x)}{h^2}}$$

, con Término de error $\frac{1}{2}hf(\varepsilon)$ y error de orden $O(h)$.

d) ¿Cuantos puntos necesitaría como mínimo para calcular exactamente la integral de un polinomio de grado 6 mediante el método de Newton–Coates?

Se requiere un mínimo de 7 puntos, para aplicar NC ~~[illegible]~~ cuyo término de error sea 0. Para que esto sea posible, la $f^{n}(\xi)$ debe ser igual a cero, y resulta que la fórmula de NC para 7 puntos posee un término de error $-\frac{9}{1400}h^9 f^{8}(\xi)$. Dado que la octava derivada de un polinomio de grado 6 es <u>cero</u> en todo su dominio, luego el término de error vale 0.

Más de 7 puntos obtienen el mismo resultado, tanto para NC con fórmulas abiertas o cerradas.

c) ¿Cuál es el mayor grado de un polinomio que puede integrarse de manera exacta con un método de cuadratura de gauss de 4 puntos?

Las fórmulas de Gauss (del método de cuadratura de Gauss) cumplen con la propiedad de que son <u>exactas</u> cuando un polinomio es de grado $2n-1$, siendo n la cantidad de puntos usados para el cálculo.

Por lo tanto, usando la fórmula de 4 puntos podemos integrar de manera exacta un polinomio de hasta grado 7.

Cuando el resultado del método de la cuadratura de Gauss es exacto, se llama ~~método~~ regla de la cuadratura de Gauss-Legendre.

b) Precise cual es la ventaja de la factorización **LU** frente a otro método directo para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Dada una matriz cuadrada M, su factorización $M = LU$ involucra la multiplicación de dos matrices triangulares.

Siendo que para resolver un sistema $M\vec{x} = \vec{b}$ debemos de hallar la inversa de la matriz M, tal que $\vec{x} = M^{-1}\vec{b}$

Invertir una matriz, en general, resulta en una operación computacionalmente muy costosa. Siendo que la inversión de matrices triangulares, superiores o inferiores, es más eficiente (y fácil) que el caso general, es conveniente la descomposición de M en LU, para resolver el sistema $LU\vec{x} = \vec{b}$, tal que $\vec{x} = U^{-1}L^{-1}\vec{b}$

c) ¿Qué propiedad tiene la matrix de coeficientes del sistema lineal a resolver para obtener la solución de una aproximación por mínimos cuadrados mediante una base ortonormal?

Para valores pequeños de $k \in \mathbb{N}$, normalmente el conjunto $\{\varphi_i(x)\} = \{x^i\}$ arroja buenas aproximaciones por mínimos cuadrados. Cuando k crece, se trabaja con un conjunto φ_i de funciones que está conformado por polinomios ortogonales.

De esta manera, se origina un sistema de ecuaciones diagonal, sin los problemas que arroja el método "clásico" para el caso general de matrices grandes.