Apellido y Nombre: ______________________

Carrera: ______ DNI: ______________________

[Llenar con letra mayúscula de imprenta GRANDE]

Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Santa Fe
Departamento Ingeniería
en Sistemas de Información
Asignatura: Matemática Superior

Examen final. Jueves 29 de Julio de 2021

Instrucciones: **la evaluación dura tres horas . Entregar en hojas separadas** <u>**todos**</u> **los ejercicios, cada una con apellido y nombres. Incluya en la foto de la primera página de cada ejercicio su DNI en la esquina superior derecha. Justifique** <u>**todas**</u> **sus respuestas.**

1) Se quiere determinar una aproximación a las coordenadas de las intersecciones entre :

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 + 2xy - y = 2 & \longrightarrow \text{Ecuación 1 (Elipse)} \\ 2x^2 + 3xy + y^2 = 3 & \longrightarrow \text{Ecuación 2 (Hipérbola)} \end{cases}$$

   a) Realice una gráfica y obtenga puntos próximos a las intersecciones.
   b) Realice 5 iteraciones a partir los puntos anteriores utilizando el método de Newton para sistemas.
   c) Reduzca a una sola ecuación y aplique N-R para ecuaciones no lineales.

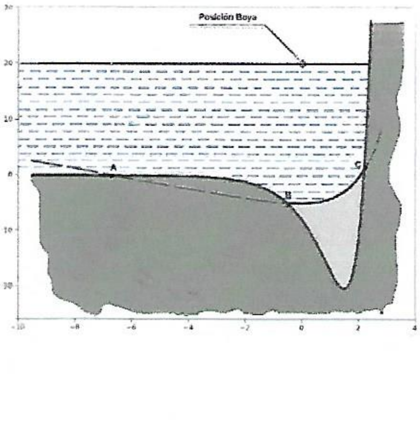
2) Se ha estimado el indice de crecimiento de la hoja de esta planta fosilizada por medio de:

$$C' = 1 + e^{cos(0,25C)-t}$$

donde t es el tiempo medido en semanas, y C el indice de crecimiento que inicialmente vale 1.5.

   a) Determinar, utilizando un método Runge-Kutta de segundo orden, estimando su error por Richardson, el indice de crecimiento en la semana 1 y en la semana 2.
   b) Determine, Utilizando Milne, cuando el indice llegará a 8.
   c) Escriba la función de iteración $C(t + \Delta T)$ utilizando el método de Taylor de segundo orden (utilizando hasta C'')

3) En la base del terraplén de un dique se ha detectado zonas erosionadas. Para repararlo se ha puesto una cobertura con un cemento especial antierosión. El perfil superior del cemento es $H = e^x - 0.9x - 6$ y el del terraplén es $H = e^{2x} - 9e^x$



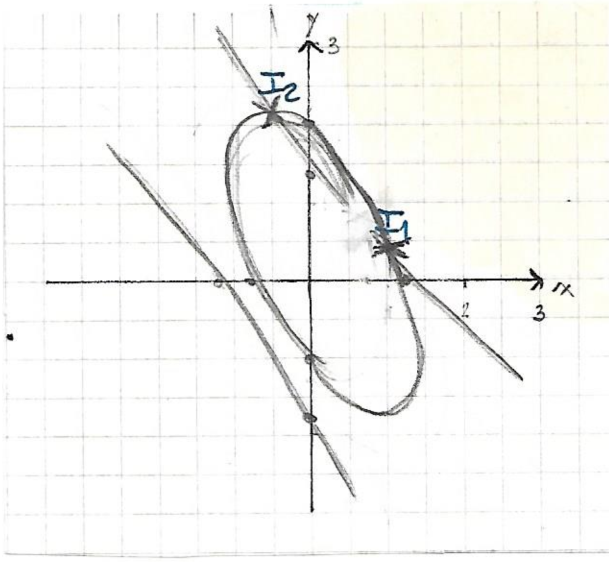
   a) Aísle analíticamente las abscisas de los puntos A, B y C.
   b) Determine una aproximación para las abscisas del extremo derecho de la zona del cemento (B) y acote el error cometido.
   c) Diga si la distancia de B a la posición de la boya (0; 20) es mayor a $\frac{1222}{49}$
   d) Si el dique tiene 500 metros de ancho, calcule el volumen necesario de cemento especial antierosión. Todas las coordenadas se han considerado en metros.

1.

a) Busco puntos para identificar las cónicas.

└ Ecuación 1: elipse rotada.

└ Ecuación 2: hipérbola rotada



Ec. 1:

$P_1(x,0): 4x^2=2 \quad x_1=\frac{\sqrt{2}}{2} \ , \ x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$P_2(0,y): y^2-y=2 \quad y_1=-1 \ , \ y_2=2$

Ec. 2:

$P_3(x,0): 2x^2=3 \quad x_3=\sqrt{\frac{3}{2}} \quad x_4=-\sqrt{\frac{3}{2}}$

$P_4(0,y): y^2=3 \quad y_3=-\sqrt{3} \quad y_4=\sqrt{3}$

Solución exacta

Puntos aproximados: $\boxed{I_1(1, 0{,}5)}$ $\quad I_2(-0{,}5, 2)$

b)

Planteo Newton-Raphson para I_2:

$$F(x,y)=\begin{bmatrix} 4x^2+y^2+2xy-y-2 \\ 2x^2+3xy+y^2-3 \end{bmatrix} \qquad \vec{x}_0=\begin{bmatrix} -0{,}5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$J(x,y)=\begin{bmatrix} 8x+2y & 2y+2x-1 \\ 4x+3y & 3x+2y \end{bmatrix}$$

Método: $\boxed{\vec{x}_n=\vec{x}_{n-1}-J^{-1}(x,y)\,F(x,y)}$

$$\vec{x}_1=\begin{bmatrix} -0{,}4375 \\ 2{,}5 \end{bmatrix} \qquad \vec{x}_2=\begin{bmatrix} -0{,}428548 \\ 2{,}390772 \end{bmatrix}$$

$$\vec{x}_3=\begin{bmatrix} -0{,}427726 \\ 2{,}38679 \end{bmatrix} \qquad \boxed{\vec{x}_4=\begin{bmatrix} -0{,}427726 \\ 2{,}38679 \end{bmatrix}}$$

Solución aproximada:

$$I_2 \approx \begin{cases} x \approx -0{,}427726 \\ y \approx 2{,}38679 \end{cases}$$

c) Reduzco el sistema a una ecuación única:

I) Multiplico la ec. 1 por 3, la ec. 2 por 2

$$\begin{cases} 12x^2 + 3y^2 + 6xy - 3y = 6 \\ 4x^2 + 6xy + 2y^2 = 6 \end{cases}$$

Punto aproximado:

Tomo $x = -0{,}427726$

II) Resto ec. 2 a ec. 1: $8x^2 + y^2 - 3y = 0$

$$x^2 = \frac{3y - y^2}{8} \Rightarrow x^2 = \frac{3}{8}y - \frac{1}{8}y^2$$

aproximo $\boxed{x^2 \approx 0{,}182949531}$

III) Uso sustitución de variables:

$$\boxed{f(y) = \frac{3}{8}y - \frac{1}{8}y^2 - 0{,}182949531}$$

IV) Busco puntos tales que $f(a)f(b) < 0$, para aplicar NR

$$f'(y) = \frac{3}{8} - \frac{2}{8}y \qquad f'(y) = 0 \Rightarrow \boxed{y = \frac{3}{2}} \quad (\text{máximo absoluto de } f)$$

Tomo $a = 2$ $\quad f(a) = 0{,}067050466$

Tomo $b = 4$ $\quad f(b) = -0{,}68295$ $\qquad$ Tomo $y_0 = 2{,}75 \in [2 ; 4]$

V) Planteo N-R

$$\boxed{y_{n+1} = y_n - \frac{\frac{3}{8}y - \frac{1}{8}y^2 - 0{,}182949531}{\frac{3}{8} - \frac{2}{8}y}}$$

VI) Itero.

$y_0 = 2{,}75$ $\qquad y_1 = 2{,}439561491$ $\qquad y_2 = 2{,}388275828$

$y_3 = 2{,}386795309$ $\qquad y_4 = 2{,}386794073$

VII. Acoto el error: $\min\limits_{[a,b]} f'(y) = -0{,}625.$ $\qquad \boxed{y \in [2{,}386794073 ; 2{,}386794073]}$

$$|r - y_4| \leq \frac{|f(y_4)|}{\min\limits_{[a,b]} f'(y)} \Rightarrow \boxed{|r - y_4| = 5{,}17797 \times 10^{-7}}$$

2.

$$c' = f(x,y) = 1 + \exp[\cos(0{,}25 \cdot c) + 1]$$

$t_0 = 0$

$c_0 = 1{,}5.$

a) Aplico Rk-2, con $h=1$. Calculo 2 iteraciones. Luego recalculo mejorado por Richardson la semana 2, usando $h=\frac{1}{2}$.

$h=1$.

n	t_n	c_n	k_{1n}	k_{2n}	c_{n+1}
0	0	1,5	3,535 796 077	1,499 982 275	4,017 889 176
1	1	4,017 889 176	1,629 099 158	1,158 560 274	5,411 718 892.
2	2	5,411 718 892.			

$$c_2^{h=1} = 5{,}411\,718\,892.$$

Recalculo el intervalo de $t_1 = 1$ a $t = 2$, con $h = \frac{1}{2}$.

n	t_n	c_n	k_{1n}	k_{2n}	c_{n+1}
1	1	4,017 889 176	0,814 549 579	0,659 078 131	4,754 703 031
1,5	1,5	4,754 703 031	0,661 983 913	0,583 593 021	5,377 641 498.
2	2	5,377 641 498			

$$c_2^{h=\frac{1}{2}} = 5{,}377\,641\,498.$$

Calculo Richardson (ϵ):

$$\epsilon = 2^2 \frac{c^{h=1} - c^{h=\frac{1}{2}}}{1 - 2^2}$$

$$\epsilon = \left(-\frac{4}{3}\right)(5{,}411\,718\,892 - 5{,}377\,641\,498)$$

$$c_2^* = c_2^{h=1} + \epsilon = 5{,}366\,282\,367$$

• Calculo c_3, a partir de c_2^*:

n	t_n	c^*	k_{1n}	k_{2n}	c_{n+1}^*
2	2	5,366 282 367	1,169 860 729	1,046 73802	6,474 531 741

DNI: 35.215.045

b) Para Milne, calculo C_3, a partir de C_2^*. Necesito 4 puntos iniciales.

~~$C_3^{h=1} = C_2^* + f(k_{1,2}; k_{2,2})$~~

$$C_3^{h=1} = C_2^* + f(k_{1,2}\,; k_{2,2})$$

$$C_3^{h=1} = 6,474\,581\,741 \text{ , para } t_3 = 3.$$

Procedo, con los datos, a calcular Milne:

$h=1$

n	t	C^P	C'	C^C	Error.
0	0	1,5	3,535796077		
1	1	4,017889176	1,629099158		
2	2	5,366282367	1,169860729		
3	3	6,474581741	1,047461764		
4	4	7,077681489	1,01503581	7,491196899	−0,01425915.
5	5	8,447664259	1,004025541	8,511791923	−0,0022113.

Iniciales. ~~Milne.~~

Milne.

Para hallar el valor t^* tal que $C(t^*) = 8$, interpolo los puntos $(t_3, C_3), (t_4, C_4), (t_5, C_5)$, a fin de hallar un valor aproximado de t^*

$P(t)$			
t	3	4	5
P	6,474581741	7,077681489	8,447664259

0,603099747   1,369982 77

7,693 ...

[redacted]

El polinomio P(t) para aproximar, resulta:

$$P(t) = 2{,}607\,959\,676\,t^2 - 17{,}652\,617\,987\,t + 35{,}960\,798\,615.$$

Busco, luego, t^*, tal que $P(t^*) = 8$.

Usando la fórmula resolvente, obtengo 2 valores:

$$\begin{cases} t_1^* = 2{,}52842 \\ t_2^* = 4{,}24032 \end{cases}$$

(no coincide con el patrón de RK-2 o Milne)

Tomo este valor.

~~Resultado:~~

$$\boxed{P(4{,}24032) \approx 8} \Rightarrow \boxed{t^* = 4{,}24032}$$

~~c) Ver método de Taylor: ¿cómo escribirlo?~~

~~Términos clave: "función de iteración"~~

$\cancel{C(t+\Delta T) = C(t) + C'(t)\Delta T + C''(t)\frac{\Delta T^2}{2}}$ ~~→ ¿Es esto a lo que se refiere?~~

$\cancel{C(t+\Delta T) = C(t) + C'(t)\Delta T}$

$\cancel{C' = f_t + f_c\, C(t)}$

$\cancel{f_t(t,C) = -e^{\cos(0{,}25C)-t}}$

$\cancel{f_c(t,C) = -0{,}25\,\mathrm{sen}(0{,}25C)\,e^{\cos(0{,}25C)-t}}$

$\cancel{C(t+\Delta T) = C(t) + \left[1 + e^{\cos(0{,}25C)-t}\right]\Delta T}$

$\cancel{\left[-0{,}25\,\mathrm{sen}(0{,}25C)\,e^{\cos(0{,}25C)-t}\right]}$

2.

c) $C' = f(t,C) = 1 + EXP(\cos(0{,}25C) - t)$ $\quad t_0 = 0 \quad C(t_0) = 1{,}5 \quad \Delta T = 1$

- Fórmula de Taylor de segundo grado: $C(t+\Delta t) = C(t) + C'(t)\Delta t + C''(t)\frac{(\Delta t)^2}{2}$

- Para nuestra función:

- Fórmula general de Taylor: $y' = f(t,y) \quad y(a) = \alpha, \quad a \leq t \leq b$

Expandiendo el polinomio de Taylor para $y(t_{i+1})$ resulta:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h y'(t_i) + \frac{h^2}{2} y''(t_i) + \underbrace{\frac{h^3}{6} y'''(t_i)}_{\text{Residuo / Término de error. Lo descartamos.}}$$

Siendo que para nuestro caso $C' = f(t,C)$, podemos de forma similar expresar, para el incremento ΔT,

$$\cancel{y(t+\Delta T) = y(t)} \qquad C(t+\Delta T) = C(t) + \Delta T\, C'(t) + \frac{(\Delta T)^2}{2} C''(t)$$

A partir de $C' = f(t,C)$, Tenemos que $C'' = f'(t,C)$. Reemplazamos:

$$\cancel{C' = 1 + e^{[\cos(0{,}25C) - t]}}$$

$$C' = 1 + e^{[\cos(0{,}25C) - t]}$$

$$C'' = -e^{[\cos(0{,}25C) - t]}$$

Luego, la función de iteración resulta: $\quad 0 \leq t \leq 2$ — para inciso "a"

$$\boxed{C(t+\Delta T) = C(t) + \Delta T\left(1 + e^{[\cos(0{,}25C) - t]}\right) + \frac{(\Delta T)^2}{2}\left(-e^{[\cos(0{,}25C) - t]}\right)}$$

3) Perfil superior: $H_1 = e^{x} - 0{,}9x - 6$ | [redacted]

$H_2 = e^{2x} - 9e^{x}$

Aislación analítica de raíces:

a) Genero una única función $f(x) = 0$, ~~tal que f(x)...~~

$$f(x) = e^{2x} - 10e^{x} + 0{,}9x + 6 \quad ; \quad f'(x) = 2e^{2x} - 10e^{x} + 0{,}9$$

- Busco puntos tales que $f'(x) = 0 \Rightarrow 2e^{2x} - 10e^{x} + 0{,}9 = 0$

$\boxed{x_1 \approx -2{,}38944}$ $\boxed{x_2 \approx 1{,}59093}$

- Siendo $f(x)$ y $f'(x)$ continuas y definidas en $\mathbb{R}$, luego no hay puntos tales que $\nexists f'(x)$.

Los puntos A, B, C, inicialmente se ubican en 3 intervalos:

$A \in (-\infty; -2{,}38944)$ $\boxed{B \in (-2{,}38944; 1{,}59093)}$ $C \in (1{,}59093; +\infty)$

- Acotando en base a la gráfica, elimino infinitudes:

$\boxed{A \in (-8, -2{,}38944)}$; $\boxed{C \in (1{,}59093; 4)}$

[redacted]

b) Calculo una aproximación para el punto B.

Intervalo: $x \in I = [-2{,}38944 \,;\, 1{,}59093]$

Uso Newton-Raphson para aproximar el x buscado.

$a = -2{,}38944 \quad ; \quad b = 1{,}59093.$

$f(x) = e^{2x} - 10e^{x} + 0{,}9x + 6$

$f'(x) = 2e^{2x} - 10e^{x} + 0{,}9$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x)}{f'(x)}}$$

Tomo $c_0 = x_0 = 0$

$$x_1 = 0 - \frac{f(0)}{f'(0)} = -0{,}422535211$$

$$x_2 = -0{,}422535211 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -0{,}527771866$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = -0{,}533853599$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = -0{,}533873066 \Rightarrow \boxed{x \approx -0{,}533873066}$$

Detengo en la cuarta iteración. Acoto el error:

$$\cancel{\min \left|[f'(a); f'(b)]\right| = \min \left|[7{,}06802 \times 10^{-7}; \ldots\right|}$$

Busco: $$\min_{x \in [a,b]} |f'(x)| = \min \{7{,}06802 \times 10^{-7} ; 7{,}109 \times 10^{-5}\} = 7{,}06802 \times 10^{-7}$$

$$|r - x_4| \leq \frac{|f(x_4)|}{\min\limits_{x \in [a,b]} |f'(x)|} \Rightarrow |r - x_4| \leq 0{,}00120322$$

Entonces, puedo acotar x_4 tal que: $\boxed{x \in [-0{,}535076286 \,;\, -0{,}532669846]}$

DNI 35.215.045.

c) Calculo f(x) para el intervalo del inciso anterior:

$x \in [-0{,}535\,076\,286 ; -0{,}532\,669\,846]$

$y \in [0{,}0051414 ; -0{,}0051479]$.

¿Cómo asegurar esa distancia? (ver ejemplos ya calculados)

Posición de la boya: $P_{boya}(0, 20)$

Tomo la peor aproximación para calcular la distancia:

$P_{ed}(-0{,}535\,076\,286, -0{,}005\,1479)$ (extremo derecho)

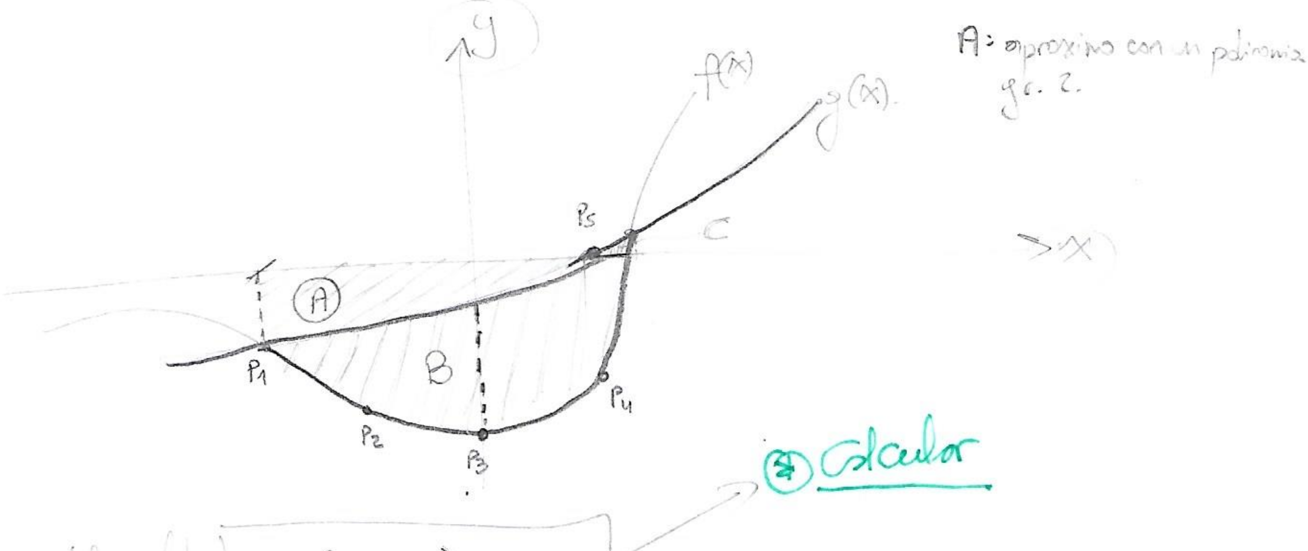
$$d(P_{boya}, P_{ed}) = \sqrt{(-0{,}535\,076\,286)^2 + (20 + 0{,}0051479)^2} = 20{,}012\,302\,44$$

Luego, verificamos que

$$d(P_{boya}, P_{ed}) < \frac{1222}{49} = 24{,}93875751$$

d) Ancho del dique: para calcular el volumen (no necesario para el área)

Cálculo: Integral de ambas menos la integral de abajo. ?



Calcular

Área del perfil (total): $\boxed{I = (-B - (-A)) + C}$

$$B = \int_{P_{1x}}^{P_{3x}} f(x)\,dx + \int_{P_{3x}}^{C_x} f(x)\,dx \quad A = \int_{B_x}^{C_x} g(x)\,dx \quad C = \int_{P_{5x}}^{C_x} g(x)\,dx$$