5) Se ha modelado una reacción química industrial mediante la fórmula:

$$r' = (1 - r^3)(1 + t^2)$$

Donde t es el tiempo medido en minutos, y r la cantidad de reactivo en toneladas; con una masa inicial $r(0) = 1.25$

a) Determinar, utilizando un método Runge-Kutta de segundo orden, cuanto será masa de reactivo a los 24 segundos con un error relativo menor al 5%.
b) Determinar, según este modelo, en cuanto tiempo la masa de reactivo será de una tonelada.

• Ecuación a resolver: $r' = f(t,r) = (1-r^3)(1+t^2)$

• Condiciones iniciales: $\underbrace{t_0 = 0}_{\text{en [min]}}$. $r(t_0) = r(0) = 1,25$.

a) Tomamos, para el RK-2, un h fracción de minuto que permita hallar $r(0,4)$, siendo $0,4\,[min] = 24\,[s]$. Luego: $h = 0,2$

m	t	r
0	0	1,25
1	0,2	1,135 040 809
2	0,4	1,072 897 769
3	0,6	

Fórmulas para iterar

$$r_{m+1} = r_m + \frac{1}{5} f(k_{1m}, k_{2m})$$

$$\begin{cases} k_{1m} = t_m + \frac{1}{10} \\ k_{2m} = r_m + \frac{1}{10} f(t,r) \end{cases}$$

m	t	$r^{h/2}$
2	0,3	1,095 510 926
3	0,4	1,067 041 929

Cálculo del error.

Usamos Richardson para calcular el error, usando dos pasos $h/2$.

$$\mathcal{E} = \left(-\frac{4}{3}\right)(1,067\,041\,929 - 1,072\,897\,769) = -0,00780788$$

Mejoramos la aproximación

$$r_2^h + \mathcal{E} = 1,065089982$$

$$E_{r\%} = \frac{1,072\,897\,769 - 1,065\,089\,982}{1,072\,897\,769} \times 100\% = 0,72\%.$$

Aproximamos, entonces, $r(0,4) \approx 1,065\,089\,982$ como solución adecuada al criterio de $E_{r\%} < 5\%$

b) Continuando con las iteraciones: $h = 0,2$

m	t	r
7	1,4	1,003 562 856
8	1,6	1,003 356 351
9	1,8	1,004 621 536

• Realizo una interpolación entre los puntos (t,r) para aproximar a $r(t_\alpha) = 1$

t	1,4	1,6	1,8
r	1,003 562 856	1,003 356 351	1,004 621 536

(−0,001 032 523) (0,006 326 061)

54,358 286 68

$1 = 1,003562856 - 1,003356351(t-1,4) + 54,35828668(t-1,4)(t-1,6)$

Luego, resolviendo:

$t_1 = 1,40033$

$t_2 = 1,59969.$

Dado que para un decaimiento no tiene sentido una solución que oscile luego del valor objetivo a interpolar, tomo t_1, como solución.

$$\boxed{\Gamma(1,40033) \approx 1}$$

Ejercicio -10

La velocidad de producción de tarjetas de navidad se puede modelar por medio d

$V = 3t+2e^{-(St)}$ donde t se mide en días y **S** se mide en cajas

A) Determine en que tiempo se producirán las primeras **50** cajas.

Nota: Debe usar un método Predictor-Corrector de Milne mejorado por usa métodos R-K , use de orden 2 mejorado por Richardson solo la cantidad de veces necesarias para poder comenzar con el P-C.

- Milne
- Richardson
- Interpolación.

$V = f(t, S) = 3t + 2e^{-(St)}$ ⟶ Ecuación a resolver. $V = \left[\frac{cajas}{días}\right]$

$t_0 = 0 \quad , \quad S(t_0) = 0$ ⟶ condiciones iniciales. $t = [días]$; $S = [cajas]$

a) Uso RK-2 con un $h = 2$ para tener un salto entre días enteros.

m	t	S
0	0	0
1	1	2,635 335 283
2	2	7,207 039 775
3	3	14,707 040 32

(tabla 1)

1º: Calculo 4 iteraciones de RK-2, para tener de base para Milne.

2º: Calculo 3 iteraciones para $h/2$, a fin de mejorar las soluciones.

m	t	S^*
0	0	0
1	1	2,618 105 017
2	2	7,144 402 672
3	3	14,644 402 88

(Tabla 2)

⊛ $h = 0{,}5$ ⟶ calculo dos pasos por cada paso de la Tabla 1. Mejoro con Richardson.

$$\boxed{\varepsilon = 2^2 \frac{Y_{m+1} - Y_{m+1}^{\frac{h}{2}}}{1 - 2^2}}$$

3º Calculo Milne, hasta alcanzar un valor superior a 50 para la aproximación de S. Uso los valores de la tabla 2 para alimentar el método.

m	t	S	S'	S^*
4	4	24,38901676	12	25,14440309
5	5	38,01810834	15	38,64440288
6	6	55,14440267	18	54,38901676

4º Interpolo para hallar el t^* tal que $S(t^*) \approx 50$

$$50 = 25{,}144\,403\,09 + 13{,}49999979\,(t-4) + 0{,}891021762\,(t-4)(t-5)$$

~~$t_1^* = -11{,}905$~~

$t_2^* = 5{,}75389$. ⟶ Solución válida.

A los 6 días de producción (5,75389; si tomamos fracciones de día) se habrán producido las primeras 50 cajas de Tarjetas

23/ _

Ejercicio -4

Se ha modelado el decaimiento de la población de tortuga de las Galápagos por medio de:

$$P'_{(t)}=\frac{-1000}{P_{(t)}+1}$$ Siendo P el porcentaje de tortugas dentro de t años con respecto a las actuales.

A) Usando un R-K de orden 2 de paso h (utilizando para mejorarlo un paso 1/3h) determine en que tiempo quedará la mitad de la población actual.

B) Determine, por medio de un P-C de Milne en cuantos años se podría producir la extinción.

C) De un ejemplo de una ecuación diferencial que pueda ser resuelta en forma exacta por un R-K de orden 8 solo si se la mejora por Richardson.

Ecuación a resolver: $P'=f(t,P)=\frac{-1000}{P+1}$ Unidades: t [año] ; P [% Tortugas]

Condiciones iniciales: $t_0=0$ $P=100$

A. Tomando un paso $h=1$:

Fórmulas para iterar:

$$\begin{aligned} P_{m+1} &= P_m + f(k_{1m}, k_{2m}) \\ k_{1m} &= t_m + \frac{1}{2} \\ k_{2m} &= P_m + \frac{1}{2} f(t_m, P_m) \end{aligned}$$

m	t	P
0	0	100
1	1	89,5609711
2	2	77,75199868
3	3	63,83337866
4	4	46,00173402

(Tabla 1)

Uso $h=1/3$ para mejorar la aproximación:

m	t	P
$3\frac{1}{3}$	$3\frac{1}{3}$	58,47113581
$3\frac{2}{3}$	$3\frac{2}{3}$	52,5751901
4	4	45,94537243

(Tabla 2)

$$\begin{bmatrix} P_{m+1} = P_m + \frac{1}{3} f(k_{1m}, k_{2m}) \\ k_{1m} = t_m + \frac{1}{6} \\ k_{2m} = P_m + \frac{1}{6} f(t_m, P_m) \end{bmatrix}$$ → fórmulas para iterar $h=1/3$

Interpolo los puntos de la Tabla 2 para hallar $P(t^*) \approx 50\%$.

$3\frac{1}{3}$	$3\frac{2}{3}$	4
58,47113581	52,5751901	45,94537243

-17,6896061 -19,88544591

-0,30361545

$$50 = 58,47113581 + (-17,6896061)(t^* - 3\tfrac{1}{3}) + (-0,30361545)(t^* - 3\tfrac{1}{3})(t^* - 3\tfrac{2}{3})$$

$\boxed{t_1^* = 3,81099}$ ~~$t_2^* = -55,0743$~~ ← se descarta

→ Cantidad, en años, para que la población de Tortugas quede en la mitad de la población actual

B. Calcular $P(t^*) = 0$, aproximando mediante Milne.

Para lograr una aproximación un poco más precisa, usaremos Milne con un $\boxed{h = \frac{1}{3}}$, dada la rápida tasa de cambio en valores cercanos a 0 por izquierda de $P(t)$ y debido al abrupto comportamiento oscilatorio para valores menores a 0 de $P(t)$.

m	t	P	P'	pc
3	3	63,833 378 66	-15,424 153 7	
4	$3\frac{1}{3}$	53,471 135 81	-16,814 879 8	
5	$3\frac{2}{3}$	52,575 190 1	-18,665 356 1	
6	4	45,945 372 43	-21,301 354 1	
7	$4\frac{1}{3}$	38,250 554 24	-25,477 347 2	38,204 614 01
8	$4\frac{2}{3}$	28,703 422 85	-33,666 153 7	28,516 349 19
9	5	15,042 202 27	-62,335 581	13,533 299 19
10	$5\frac{1}{3}$	-17,141 519 5	61,952 036 1	4,144 052 157
11	$5\frac{2}{3}$	91,092 978 7	-10,858 591 1	34,441 814 58

} Iniciales desde RK-2.

Interpolo tres valores últimos de pc para hallar el t^* tal que $P(t^*) \approx 0$

t	5	$5\frac{1}{3}$	$5\frac{2}{3}$
P	13,533 299 19	4,144 052 157	34,441 814 58

-28,170 558 15   90,902 377 52

0,005 598 249

Despejamos: $0 = 13,533\,299\,19 + (-28,170\,558\,15)(t^* - 5) + (0,005\,598\,249)(t^* - 5)(t^* - 5\tfrac{1}{3})$

$\boxed{t_1^* = 5,480\,42}$ ⟶ La población P se extinguirá aproximadamente 5,480 42 años respecto de la población actual.

$\cancel{t_2^* = 5036,88}$

C.

Llevar a Consulta

¿Polinomio de orden 9?

Página 26 ⟶

C.

Fórmula de Taylor de 8 términos:

$$y(x+h) = y(x) + h y'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) + \frac{h^3}{3!} y'''(x) + \frac{h^4}{4!} y^{IV}(x) + \frac{h^5}{5!} y^{V}(x) + \frac{h^6}{6!} y^{VI}(x) + \frac{h^7}{7!} y^{VII}(x)$$

$$+ \frac{h^8}{8!} y^{VIII}(x) + \underbrace{\frac{h^9}{9!} O(h)}_{\text{Término de error}}$$

($\neq 0$, en el caso general, para $gr(P) = 8$ resuelto con RK-8)

Si $y'(x)$ es un polinomio de grado 8 ($gr(P)=8$), entonces utilizando un método de orden 8 no podremos obtener con él una solución exacta, dado que en la aproximación por fórmula tendremos un término de error que no podemos garantizar que sea 0.

Si mejoro la fórmula mediante Richardson:

$$y(x+h) = y(x) + h y'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) + \dots + \frac{h^9}{9!} O(h) + \frac{h^{10}}{10!} O(h) \qquad (I)$$

$$y(x-h) = y(x) - h y'(x) + \frac{h^2}{2!} y''(x) - \dots - \frac{h^9}{9!} O(h) + \frac{h^{10}}{10!} O(h)$$

Restando miembro a miembro:

$$y(x+h) - y(x-h) = 2h y'(x) + 2\frac{h^3}{3!} y'''(x) + 2\frac{h^5}{5!} y^{V}(x) + 2\frac{h^7}{7!} y^{VII}(x) + \underbrace{2\frac{h^9}{9!} y^{IX}(x) + 2\frac{h^{11}}{11!} y^{XI}(x)}_{\text{Términos de error, fuera de RK-8.}}$$

Reacomodando:

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h} - a^2 h^2 - a^4 h^4 - a^6 h^6 - a^8 h^8 - \underbrace{\frac{h^{10}}{11!} O(h)}_{\text{Término de error.}}$$

$$y'(x) = \frac{y(x+\frac{h}{2}) - y(x-\frac{h}{2})}{h} - a^2\left(\frac{h}{2}\right)^2 - a^4\left(\frac{h}{2}\right)^4 - a^6\left(\frac{h}{2}\right)^6 - a^8\left(\frac{h}{2}\right)^8 - \frac{h^{10}}{11!} O\left(\frac{h}{2}\right) \qquad (II)$$

Luego, al derivar la fórmula a partir de (II), obtengo un término de error de orden 10 para mi aproximación, lo cual me garantiza que

$$\frac{d^9 y(x)}{dx^9} = 0, \text{ para cualquier } y'(x) = P(x) \text{ tal que } gr(P(x)) \leq 8.$$

t	1		1,5		2
P	0,439 420 171		1,547 558 423		3,751 519 806
		2,216 276 504		4,407 922 766	
			0,456 278 012		

<u>Despejo</u>: $2{,}728\,480\,747 = 0{,}439\,420\,171 + 2{,}216\,276\,504\,(t^*-1)$
$+\ 0{,}456\,278\,012\,(t^*-1)(t^*-1{,}5)$

$\cancel{t_1^* = -4{,}303\,28}$

$\boxed{t_2^* = 1{,}945\,98}$ → Para $t^* = 1{,}94598$ $P(t^*)$ entrega un valor aproximadamente igual al cuádruple de Turistas de $P(1)$.

<u>C.</u> El método de Milne parte de una fórmula que requiere una interpolación de tres puntos para aproximar el valor de la integral de las fórmulas del predictor y el corrector. A saber:

<u>Predictor</u>:
• Integración abierta.

$$y_{n+1}^{(0)}(x) = y_{n-3}(x) + \int_{x_{n-3}}^{x_{n+1}} y'(x)\,dx = y_{n-3}(x) + \frac{4}{3}h\left[2y'_{n-2}(x) - y'_{n-1}(x) + 2y'_{n}(x)\right]$$

<u>Corrector</u>:
• Integración cerrada.

$$y_{n+1}^{(k)}(x) = y_{n-1}(x) + \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} y'(x)\,dx = y_{n-1}(x) + \frac{h}{3}\left[y'_{n-1}(x) + 4y'_{n}(x) + y'^{(k-1)}_{n+1}(x)\right]$$

Para las fórmulas de aproximación a la integral, puede demostrarse que el error es

$\varepsilon_p = \frac{14}{45}h^5 y^{v}(\varepsilon)$ — fórmula del predictor.

$\varepsilon_c = \frac{-1}{90}h^5 y^{v}(\varepsilon)$ — fórmula del corrector.

y que, por tanto, el método de Milne es de <u>orden 4</u>. Ello implica que si $y'(x) = P(x)$, siendo $P(x)$ un polinomio tal que $gr(P(x)) = 3$, entonces Milne nos dará la <u>solución exacta</u> al problema.

Dado el caso de aplicación del estimador de Richardson, el término de error podría reducirse hasta una $\varepsilon^* = a h^7 y^{vii}(\varepsilon)$, con lo cual en polinomio $P(x)$ de grado <u>5</u>, tal que $y(x) = P(x)$, puede hallarse la solución exacta combinando <u>Milne y Richardson</u>.

D. Dado el caso anterior, mediante la aplicación de un método de Runge-Kutta de orden 6 es el que posibilitará hallar una solución exacta para un $y'(x) = P(x)$, con $P(x)$ siendo un polinomio tal que $gr(P(x)) \leq 5$.

5) Para estudiar la evolución de una población antigua, que utilizaba el cobre para realizar diversas herramientas, se ha modelado la evolución de una especie de ciervo autóctono que era la base de su alimentación:

$$P' = 0.2\ P\ t\ \text{-}2cos(\frac{t}{2})$$

siendo P la población de animales medida en miles y t el tiempo medido en años. Se sabe que la población para el tiempo inicial ($t = 0$) era de 5000.

a) Obtenga una aproximación para la población en el primer y segundo año por medio del método de Runge-Kutta de segundo orden.

b) Utilizando el métodoo de Milne determine cuando la población se duplicaría.

Ecuación a resolver: $P' = f(t, P) = 0{,}2\,P(t) - 2\cos(\frac{t}{2})$

Valores iniciales: $t_0 = 0$ $P(t_0) = 5000$ Unidades: t [año], P [animal $\times 1000$]

a)

m	t	P
0	0	5000
1	1	6097,922 417
2	2	7437,871 948
3	3	9073,484 676

Tabla 1 – RK-2

• En el primer año ($t=1$): $P = 6097{,}922\,417$

• En el segundo año ($t=2$): $P = 7437{,}871\,948$

b)

m	t	P^p	P^c
4	4	11104,3677	11093,34577

Tabla 2 – Milne.

Interpolo los puntos (t_2, P_2), (t_3, P_3) y (t_4, P_4) para hallar el valor t^* tal que $P(t^*) = 2 \cdot 5000 = 10000$

t	2	3	4
P	7437,871 948	9073,484 676	11093,345 77
		1635,612 79	2019,861 092
			0,005 204 967

$$10000 = 7437{,}871\,948 + 1635{,}612\,79(t^*-2) + 0{,}005\,204\,967(t^*-2)(t^*-3)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \cancel{t_1^* = -314\,239} \\ t_2^* = 3{,}566\,46 \end{array}}$$

Para $t^* = 3{,}566\,46$ se obtiene el valor $P(t^*) = 10000$, obteniéndose el tiempo para el cual la población se duplica respecto de la original.

Ejercicio -5

Científicos habían llevado un heladerita para conservar el almuerzo, pero al irse a realizar los estudios, por un descuido, la desconectaron. Sabiendo que al desconectarse la temperatura era de **-10ºC** y que si la temperatura supera los **10ºC** seguro se corta la cadena de frío. Indicar cuanto tiempo podrán durar estos alimentos. (Se sabe además que después de 2 horas el viento que gira formando un torbellino destapó parcialmente la heladera, por lo que hubo que modificar a partir de allí el modelo)

El modelo de calentamiento es está dado por: $Ø' = 3{,}9 - 0{,}2\,(t-2)^2 + 0{,}1\,e^{-(t-2)}$ **si t < 2 horas**

$Ø' = 4 - e^{(2-t)} + (t-2)/(Ø^2+1)$ **si t > 2 horas**

siendo **Ø** temperatura y **t** tiempo en horas

A) aproxime el primer tramo por medio de un R-K de orden 2 y el segundo tramo por medio de un P-C de Milne.

Ecuaciones a aproximar: $\begin{cases} \phi' = f(t,\phi) = 3{,}9 - 0{,}2(t-2)^2 + 0{,}1 e^{-(t-2)} & \text{si } t < 2 \\ \phi' = 4 - e^{(2-t)} + \dfrac{t-2}{\phi^2+1} & \text{si } t > 2 \end{cases}$

Condiciones iniciales: $t_0 = 0 \quad \phi(t_0) = -10$ Unidades: t[hora] ; ϕ[ºC]

a) Tramo 1 - Aproximación para $0 \le t < 2$:

$h = 0{,}5 = 1/2$

m	t	ϕ
0	0	-10
1	0,5	-8,357 064 493
2	1	-6,566 267 691
3	1,5	-4,676 708 08
4	2	-2,733 055 254

Tabla 1 - Rk-2

Tramo 2 - Aproximación para $t \ge 2$:

m	t	ϕ^P	ϕ^C
			0,001 131 865
5	2,5	-0,783 330 624	1,077 875 751
6	3	0,907 649 797	3,267 943 489
7	3,5	3,630 675 006	4,852 030 1
8	4	4,589 630 67	7,574 963 076
9	4,5	7,475 876 012	8,554 933 087
10	5	8,730 111 178	11,461 513 97
11	5,5	11,581 931 73	

Para hallar t^* tal que $\phi(t^*) \approx 10$[ºC], requiero interpolar (t_9, ϕ_9), (t_{10}, ϕ_{10}), (t_{11}, ϕ_{11})

t	4,5	5	5,5
ϕ	7,574 963 076	8,554 933 087	11,461 513 97

2,508 469 132 5,703 641 108

0,312 972 199

Despejo:

$$10 = 7{,}574\,963\,076 + 2{,}508\,469\,132(t-4{,}5) + 0{,}312\,972\,199(t-4{,}5)(t-5)$$

$\boxed{\begin{array}{l} \cancel{t_1^* = -3{,}967\,46} \\ t_2^* = 5{,}45247 \end{array}}$

$\boxed{\text{Para } t = 5{,}45247,\ P(t) \approx 10.}$

2) Se ha estimado el indice de crecimiento de la hoja de esta planta fosilizada por medio de:

$$C' = 1 + e^{cos(0,25C)-t}$$

donde t es el tiempo medido en semanas, y C el indice de crecimiento que inicialmente val[illegible] de 1.5.

a) Determinar, utilizando un método Runge-Kutta de segundo orden, estimando su error [illegible] por Richardson, el indice de crecimiento en la semana 1 y en la semana 2.
b) Determine, Utilizando Milne, cuando el indice llegará a 8.
c) ¿Que puede decir de los valores que obtuvo?
d) Escriba la función de iteración $C(t + \Delta T)$ utilizando el método de Taylor de segundo o[illegible]rden (utilizando hasta C'')
e) Describa las ventajas y desventajas de un método de integración de alto orden (por ejem[illegible]plo RK5-6) frente a un método multipaso. Tenga en cuenta tanto aspectos numéricos como computacionales.

Ecuación a resolver: $C' = 1 + e^{\cos(0,25C)} - t$ Unidades: t[semana]; C [adimensional]

Condiciones iniciales: $t_0 = 0$ $C(t_0) = 1,5$

a)

m	t	C
0	0	1,5
1	1/2	3,129 609 449
2	1	4,509 925 213
3	3/2	5,677 408 993
4	2	6,690 153 026

R-k(2) (h=1/2)

Tabla 1 – Rk-2, h=1/2

$$C_{m+1} = C_m + f(k_{1m}, k_{2m})$$

$$k_{1m} = t_m + \frac{1}{4}$$

$$k_{2m} = C_m + \frac{1}{4} f(t_m, C_m)$$

Rk-2 (fórmula para $h=\frac{1}{2}$)

Pasando a h=1 ajustamos por Richardson para los valores t=1 y t=2

m	t	C
0	0	1,5
1	1	4,447 444 404
2	2	6,643 999 592

Rk-2 (h=1)

$$\varepsilon_{(t=1)} = \frac{C_{m+1}^{h/2} - C_{m+1}^{h}}{2^2 - 1} = \frac{1}{3}(4,509\,925\,213 - 4,447\,444\,404) = 0,020\,826\,936$$

$$\varepsilon_{(t=2)} = \frac{C_{m+1}^{h/2} - C_{m+1}^{h}}{2^2 - 1} = \frac{1}{3}(6,690\,153\,026 - 6,643\,999\,592) = 0,015\,384\,478.$$

b) Mejoro las soluciones para $C(1)^{h/2}$ y $C(2)^{h/2}$ y los uso, junto a los demás valores de la Tabla 1 para aproximar por Milne

m	t	C^P	C^C
1	1/2	3,129 609 449	
2	1	4,593 232 959	
3	3/2	5,677 408 993	
4	2	6,751 690 937	
5	5/2	7,549 816 18	7,586 427 408
6	3	8,527 115 35	8,486 163 473

Predictor:

$$\overset{0}{C}(t_{m+1}) = C(t_{m-3}) + \frac{4h}{3}\left[2C(t_{m-2}) - C(t_{m-1}) + 2C(t_m)\right]$$

Corrector (1 iteración).

$$\overset{1}{C}(t_{m+1}) = C(t_{m-1}) + \frac{h}{3}\left[C'(t_{m-1}) + 4C(t_m) + \overset{(0)}{C'}(t_{m+1})\right]$$

Interpolo los puntos $(t_4, C_4^c), (t_5, C_5^c), (t_6, C_6^c)$ para hallar cuándo $C(t^*) = 8$, para un valor t^*.

t	2		2,5		3
C	6,751 690 937		7,549 816 18		8,527 115 35
		1,596 250 486		1,954 598 34	
			2,790 584 589		

32

c) $8 = 6{,}751\,690\,937 + 1{,}569\,250\,486\,(t^*-2) + 2{,}790\,584\,589\,(t^*-2)(t^*-2{,}5)$

$$\boxed{\begin{array}{l} \cancel{t_1^* = 1{,}2942} \\ t_2^* = 2{,}63379 \end{array}} \longrightarrow$$

Descarto el valor t_1^*, ya que no coincide con los valores $t \in [2, 3]$ entre los que busco interpolar. Luego, asigno $t^* = 2{,}63379$, tal que $C(t^*) \approx 8$

---

d) $C(t+\Delta T) = C(t) + \Delta t\, C'(t) + \frac{(\Delta t)^2}{2} C''(t)$ ✓

e) Los métodos RK permiten computar una iteración sin requerir datos de las iteraciones anteriores, a excepción del valor anterior computado para la función a aproximar, el cual puede estar dado por las condiciones iniciales. Permite, además, cambiar con facilidad el paso h según se requiera.

Las desventajas residen en que tiene una convergencia más lenta que los métodos PC y que requiere, según el orden, cada vez más cómputos de la derivada primera de la función con distintos parámetros.

El método de Milne, comparado con RK, requiere de cuatro valores iniciales para poder iterar, converge más rápido, y requiere sólo un cómputo de cada derivada, pudiendo computarse mediante el uso de valores obtenidos anteriormente.

2) Se ha modelado la presión interior de un volcán activo mediante:

$$P' = \frac{sen(P+t)}{1+t^2}$$

donde el tiempo t está medido en años y P es la presión relativa, con un valor inicial $P(0) = 0.6$. Cuando la presión relativa es mayor a 1, debe emitirse un alerta de erupción.

a) Determinar, utilizando un método RK de segundo orden, estimando su error por Richardson, si dentro de un año ya se ha emitido un alerta o no.
b) Determine, utilizando Milne, el valor de la presión relativa a los 2 años.
c) Estime la máxima presión relativa que alcanzará en el intervalo de tiempo $[0; 2]$.
d) Escriba la fórmula de iteración con tres términos para resolver la ecuación mediante el método de Taylor.
e) Describa qué son los métodos de resolución de EDP implícitos y explícitos y comente cúales son las diferencias entre ellos, mencionando ventajas y desventajas.

Ecuación a resolver: $P' = f(t,P) = \frac{sen(P+t)}{1+t^2}$ Unidades: t [año], P [adimensional]

Condiciones iniciales: $t_0 = 0 \quad P(t_0) = 0,6$

a) Itero con RK-2 usando $h = 1/2$. Cuatro iteraciones para luego servir de input a Milne.

m	t	P
0	0	0,6.
1	1/2	0,817 953 062
2	1	0,825 449 015
3	3/2	0,744 896 627

Tabla 1

$$P_{m+1} = P_m + f(k_{1m}, k_{2m})$$
$$k_{1m} = t_m + \frac{1}{4}$$
$$k_{2m} = P_m + \frac{1}{4} f(t_m, C_m)$$

Calculo el error por Richardson pasando a $h = 1$.
Itero para $h = 1$:

m	t	P
0	0	0,6
1	1	0,824 100 68

$$\mathcal{E}_1 = \frac{P_1^{\frac{h}{2}} - P_1^{h}}{2^2 - 1} = \frac{1}{3}\left(0,825\,449\,015 - 0,824\,100\,68\right)$$

$$\mathcal{E}_1 = 0,000\,449\,445.$$

Valor "mejorado": $P_1^{v} = 0,825\,898\,459$

En el primer año, para un $h = 1/2$, determino que la alerta no se emite durante el primer año.

b) Uso Milne para obtener $P(2)$, usando como input los datos de la Tabla 1. Uso $h = 1/2$

m	t	P^P	$P^{C(1)}$
4	2	0,694 724 928	0,646 356 471

$P(2) \approx 0,646\,356\,471.$

Predictor: $P^{0}_{m+1} = P_{m-3} + \frac{4}{3}h\left[2P'_{m-2} - P_{m-1} + 2P_m\right]$

Corrector: $P^{1}_{m+1} = P_{m-1} + \frac{h}{3}\left[P'_{m-1} + 4P'_m + P'^{(0)}_{m+1}\right]$

34/

c: Para estimar el máximo en el intervalo $[0,2]$, procedo a desarrollar dos interpolaciones, I_1, I_2, de los puntos obtenidos mediante los métodos numéricos.

I_1: (t_0,P_0); (t_1,P_1); (t_2,P_2)

I_2: (t_2,P_2); (t_3,P_3); (t_4,P_4)

I_1:

t	0	1/2	1
P	0,6	0,817 953 062	0,825 449 015

I_2:

	1	3/2	2
	0,825 449 015	0,744 896 627	0,694 724 928

$I_1(t) = -\frac{3}{5}\left(3{,}959635001002t^2 - 2{,}70633t - 1\right)$

$I_2(t) = 16{,}4578232378461t^2 - 41{,}3057t + 25{,}6733$

Para hallar máximos, busco los puntos críticos de ambos polinomios.

$I_1'(t) = 4{,}37578100006012t + 1{,}6238 = 0$

$I_2'(t) = 32{,}9156464756922t - 41{,}3057 = 0$

$\boxed{t_{1cr} = 0{,}34174}$

$\boxed{t_{2cr} = 1{,}2549}$

Evaluando los t_{cr} obtenidos en I_1 e I_2:

$\underbrace{I_1(t_{1cr}) = 0{,}8774589113992233}$

$I_2(t_{2cr}) = -0{,}2438706338659138$

Asumimos a $I_1(t_{1cr})$ como el máximo aproximado de la función P en el intervalo $[0,2]$, siendo el mayor punto crítico de P y superando el valor de $P(0)$ y $P(2)$

d) $P'(t,P) = P(t) + P'(t,P)h + P''(t,P')\frac{h}{2}$

e) Métodos explícitos:

- Calculan el estado de un sistema en un momento posterior a partir del estado del sistema conocido.

- $\underbrace{Y(t+\Delta t) = F(Y(t))}_{\text{Forma explícita}}$

Métodos implícitos:

- Encuentran una solución al resolver una ecuación que incluye dos estados conocidos del sistema, uno de inicio y otro conocido posterior.

- $\underbrace{G(Y(t), Y(t+\Delta t)) = 0}_{\text{Forma implícita}}$

Ejercicio -6

Se ha podido estimar, la velocidad de descomposición de un fragmento de papiro, si no se lo trata adecuadamente, por medio de la siguiente expresión:

$P' = 20 + 0{,}1t + 0{,}1\ln(0{,}01P+2)$ siendo **P** el porcentaje de deterioro del papiro y **t** el tiempo medido en años. Se sabe que actualmente está con un porcentaje de deterioro del **30%**

A) Determina una aproximación al porcentaje de deterioro en el próximo año por medio de un **R=K** de segundo orden, mejorado con Richardson.

B) Determina al tiempo que tardará en deteriorarse completamente. Deberá usar un Método Predictor-Corrector de Milne .

Ecuación a resolver: $P' = f(t,P) = 20 + 0{,}1t + 0{,}1\ln(0{,}01P+2)$

Condiciones iniciales: $t_0 = 0$ $P(t_0) = 0{,}3$ Unidades: t[años], P[% de deterioro]

A. Uso un $h=0{,}5$ para aplicar un método RK-2:

$$h=\tfrac{1}{2}\quad\begin{cases} P_{m+1} = P_0 + f(k_{1m}, k_{2m}) \\ k_{1m} = t_m + \frac{1}{4} \\ k_{2m} = P_m + \frac{1}{4} f(t_m, P_m) \end{cases}$$

$$h=1\quad\begin{cases} P_{m+1} = P_0 + f(k_{1m}, k_{2m}) \\ k_{1m} = t_m + \frac{1}{2} \\ k_{2m} = P_m + \frac{1}{2} f(t_m, P_m) \end{cases}$$

m	t	P
0	0	30
1	1/2	40,031 0493
2	1	50,088 00774
3	3/2	60,140 84099

Tabla 1 — $h = 1/2$

m	t	P
0	0	30
1	1	50,087 98653

Tabla 2 - $h=1$

Para luego aplicar Richardson:

$$\varepsilon = \frac{P_1^{\frac{h}{2}} - P_1^{h}}{2^2 - 1} = \frac{1}{3}(50{,}08800774 - 50{,}08798653)$$

$$\boxed{\varepsilon = 7{,}06831 \times 10^{-6}}$$

$$\boxed{P_1^* = 50{,}08801481}$$

% de deterioro aproximado, luego del 1er año.
(mejorado por Richardson con $P_1^{\frac{h}{2}} + \varepsilon = P_1^*$)

B) Tomo aproximaciones calculadas con $h=1$ para los cuatro valores iniciales. Continúo con $h=1$ para el cálculo.

m	t	PP	PC	$f(t,P)=P'$
0	0	30		20,036 172 78
1	1	50,088 014 81		20,139 809 29
2	2	70,279 477 68		20,243 181 31
3	3	90,574 227 33		20,346 325 71
4	4	110,972 118 2	110,972 063 1	20,449 272 15

Predictor:

$$P_{m+1}^{(0)} = P_{m-3} + \frac{4}{3}\left[2P'_{m-2} - P'_{m-1} + 2P'_m\right]$$

Corrector:

$$P_{m+1}^{(1)} = P_{m-1} + \frac{1}{3}\left[P'_{m-1} + 4P'_m + P'^{(0)}_{m+1}\right]$$

Interpolo con un polinomio de grado 2 los puntos $(t_2,P_2), (t_3,P_3), (t_4,P_4)$ a fin de hallar la aproximación t^* tal que $P(t^*) \simeq 100$.

t	2	3	4
P	70,279 477 68	90,574 22733	110,972 118 2

20,294 749 65   20,397 835 77

19,401 254 02

$$P(t^*) \approx 100 = 70{,}279\,477\,68 + 20{,}294\,749\,65(t-2) + 19{,}401\,254\,02\,(t-2)(t-3)$$

~~$t_1^* = 0{,}739\,005$~~ → fuera del intervalo.

$\boxed{t_2^* = 3{,}21488.}$ → Valor para el cual $P(t^*) \approx 100$.

Podemos aproximar a un Tiempo de $t = 3{,}21488$ el que debe transcurrir hasta que el pepino se detenga completamente.

Ejercicio -7

La velocidad de enfriamiento del café dentro de la taza puede ser modelada por medio de:

Temp ' = 0,1 (25-Temp) [1+e$^{(-t/10)}$] **t:** tiempo en minutos, **Temp:** temperatura en grados.

Cuando se midió, la temperatura del café fue de **85C**. Sabiendo que la temperatura ambiente es de **25C**.

A) Determinar cuanto tiempo se necesita para que el café llegue a una temperatura igual al doble de la ambiente.

Observaciones: Debe aplicar para la resolución un método de Runge Kutta de orden **2**, (mejorado por Richardson con un paso **h**, y luego dos de **0,55h** y **0,45h**) la cantidad de veces necesaria para luego aplicar un Método tipo Milne

Ecuación a resolver: $\frac{1}{10}(25-T)[1+e^{(-t/10)}]$ Unidades: t[min], T[°C]

Condiciones iniciales: $t_0 = 0$, $T = 85$

A) Temperatura objetivo: 50[°C] — Tomo $h=1$.

m	t	Temp (T)
0	0	85
1	1	74,428 3902
2	2	66,082 863 8
3	3	59,420 747 25.

Calculo Richardson con 2 pasos 0,55h y 0,45h

m	t	Temp T
2	2	66,082 863 8
3^*	2,55	62,887 974 45.
4^*	3	59,394 588 14.

(Calculo fórmula de error; desde Taylor

$$\begin{cases} T = T^{h} + ch^3 + O(h^4) \\ T = T^{h^*} + ch^3\left[0{,}55^3 + 0{,}45^3\right] + O(h^4) \end{cases}$$

$$T^{h^*} - T = \underbrace{ch^3}_{\varepsilon}\left[1 - 0{,}55^3 - 0{,}45^3\right]$$

$$\varepsilon = \frac{T^{h^*} - T}{1 - 0{,}55^3 - 0{,}45^3} = 0{,}7425(59{,}394\,588\,14 - 59{,}420\,747\,25)$$

$$\varepsilon = -0{,}019\,423\,136$$

$$\boxed{T^*(3) = 59{,}359\,709\,33}$$

Calculo Milne, usando los valores iniciales disponibles:

m	t	$Temp^P$	$Temp'$	$Temp^C$
0	0	85	-12	
1	1	74,428 3902	-9,415 304 72	
2	2	66,082 8638	-7,471 725 39	
3	3	59,359 709 33	-5,981 400 31	
4	4	53,904 419 13	-4,827 693 07	54,006 989 16
5	5	49,604 422 05	-3,952 775 84	49,611 033 03
6	6	46,028 232 76	-3,256 837 16	45,939 1046

Para hallar $Temp(t^*) \approx 50$, interpolo con un polinomio de grado 2 los puntos (t_3,T_3), (t_4,T_4), (t_5,T_5):

t	4	5	6
T	54,006 989 16	49,611 033 03	45,939 1046

$-4,395\,956\,128 \qquad -3,671\,928\,427$

$2,762\,325\,253$

$$\longrightarrow 50 = 54,006\,989\,16 - 4,395\,956\,128(t-4) + 2,702\,325\,253(t-4)(t-5)$$

$$\begin{cases} \boxed{t_1^* = 4,817\,94} \\ t_2 = \cancel{5,773\,45} \text{ (no coincide con datos iniciales del intervalo)} \end{cases}$$

Luego: $Temp(4,817\,94) \approx 50$

(Para $t = 4,817\,94$ [minutos], $Temp(t) \approx 50$[°C]).

∘ Tiempo de reducción: ≈ 49 min.

Ejercicio -8

La temperatura en el sur de la argentina se puede modelar por medio de:

$$y' = 3\frac{(y-2t)^2}{(t+1)\ln(t+1)}$$ con t en días y la temperatura en grados.

Para **t=1** la temperatura fue de **2,33º**

A) Determine una aproximación al tiempo en donde la temperatura alcanza a **8º**

Obs.: use un método Runge Kutta de segundo orden con un cierto "h" y luego mejore el valor obtenido usando **0,25h** y **0,75h** para construir la tabla inicial que necesita para aplicar un predictor corrector de Milne.

Ecuación a resolver: $y' = f(t,y) = 3\frac{(y-2t)}{(t+1)\ln(t+1)}$ Unidades: t [días], y [ºC].

Condiciones iniciales: $t_0 = 1$, $y(t_0) = 2,33$

A. Temperatura objetivo: 8º[C]. — Uso $h=1$

$$\begin{cases} y_{m+1} = y_m + f(k_{1m}, k_{2m}) \\ k_{1m} = t_m + \frac{1}{2} \\ k_{2m} = y_m + \frac{1}{2} f(t_m, y_m) \end{cases}$$

m	t	y [ºC]	y'	y mejorado o corregido.	Método de cálculo
0	1	2,33	0,235 064 235		inicial.
1	2	3,384 158 385	0,345 218 144		Rk-2 - h=1
2	3	4,951 420 108	0,594 851 920.		Rk-2. - h=1
3	4	~~6,371 122 537~~	1,459 279 219	6,021 524 451.	Rk-2 < h=1 (Richardson) / h=0,25+0,75.
4	5	~~6,348 857 093~~	3,720 042 996	8,335 424 034	Milne.
5	6	~~12,944 839 16~~	0,196 614 8	11,533 546 45	Milne.

1) Mejoro por Richardson el valor $y(3)$. — Pasos: 0,25h y 0,75h

m	t	y	y'	$y^{m/c}$	Método de cálculo
2	3	4,951 420 108			Rk-2/h=1
3*	3,25	5,145 277 619			Rk-2/h=0,25
4*	4	6,147 379 762.			Rk-2/h=0,75

A partir de la fórmula de Taylor, derivamos Richardson:

$$y_3 = y_3^h + ch^3 + O(h^4)$$
$$y_3 = y_3^{h^*} + ch^3[0,25^3 + 0,75^3] + O(h^4)$$
$$\Rightarrow ch^3 = \varepsilon = \frac{y_3^{h^*} - y_3^h}{1 - 0,25^3 - 0,75^3} = 0,5625(6,147\,379\,762 - 6,371\,122\,537)$$

$\boxed{\varepsilon = -0,125\,855\,311}$ → Error por Richardson.

$\boxed{y_3^{**} = y_3 + \varepsilon = 6,021\,524\,451}$ → Valor mejorado.

Para hallar $y(t^*) \approx 8$, interpolo los valores mejorados/corregidos de

$(t_3, y_3), (t_4, y_4), (t_5, y_5)$

4		5		6.
6,021 524 451		8,335 424 035		11,533 546 45.
	2,313 899 583		3,198 122 418	
		2,261 873 276.		

$$8 = 6{,}021\,524\,451 + 2{,}313\,899\,583\,(t^*-4) + 2{,}261\,873\,276\,(t^*-4)(t^*-5)$$

$t^*_1 = \cancel{3{,}053\,17}$ → no coincide con datos extendidos. (fuera de intervalo).

$\boxed{t^*_2 = 4{,}92383}$

$\boxed{y(4{,}92383) \approx 8}$

→ Para $t = 4{,}92383$, el valor de $y(t)$ se aproxima a 8°C.

Ejercicio -9

Se ha modelado el decrecimiento de la población de un cierto pez por medio de:

$$P'_{(t)} = \frac{-1200}{P_{(t)}+1}$$ Siendo **P** el porcentaje de peces dentro de t años con respecto a los actuales.

A) Usando un **R-K** de orden **2** de paso **h** (utilizando para mejorarlo un paso de **0,65h** y otro de **0,35h**) determine el porcentaje de peces dentro de un año.

B) Determine, por medio de un **P-C** de Milne, en cuantos años se llegará al **50%** de la cantidad de peces actuales.

Ecuación a resolver: $p' = \frac{-1200}{p+1}$ Cond. iniciales: $t_0 = 0$ $P(t_0) = 100$

$p' = f(t,p)$ Unidades: t[año] P[% población original]

A) $h = 1$ $P_{m+1} = P_m + f(t,p)$ $k_{1m} = t_m + \frac{1}{2}h$ $k_{2m} = P_m + \frac{1}{2}hf(t_m, y_m)$

m	t	p	p'	p corregido o mejorado.	Método de cálculo
0	0	100	-11,881 188 1		Rk-2 - h=1
1	1	87,326 320 67	-13,586 352 9	87,322 958 27	Rk-2 - h=1

Recálculo con $h_1 = 0,65$ y $h_2 = 0,35$, para otro valor de p_1 ($p_1^{h^*}$)

1'	0,65	91,957 529 05	/	/	Rk-2, h=0,65
2'	0,35	87,323 923 87	/	/	Rk-2, h=0,35

Por Richardson, usando fórmula de Taylor:

$$P_1 = P_1^h + ch^3 + O(h^4)$$
$$P_1 = P_1^{h^*} + ch^3[0,65^3 + 0,35^3] + O(h^4)$$
$$\longrightarrow ch^3 = \mathcal{E} = \frac{P_1^{h^*} - P_1^h}{1 - 0,65^3 - 0,35^3} = -0,042\,444\,03$$

$\boxed{P_1^* = P_1^h + \mathcal{E} = 87,322\,958\,27}$ $\longrightarrow$ porcentaje de peces para $t=1 \approx 87,32295827\%$ de la población para $t=0$

2	1	72,502 656 69	-	/	Rk-2 h=1
3	1	53,845 904 35	-21,879 482 4	/	Rk-2 h=1
4	1	27,192 359 8	-42,564 723 5	23,699 791 23	Milne

Para hallar t^* tal que $P(t^*) \approx 50\%$, interpolo los puntos (t_2,P_2), (t_3,P_3), (t_4,P_4)

t	2		3		4
p	72,502 656 69		53,845 904 35		23,699 791 23
		-18,656 752 34		-30,146 112 23	
			-0,174 074 102		

$p(t^*) \approx 50 = 72,502\,656\,69 - 18,656\,752\,34\,(t-2) - 0,174\,074\,102\,(t-2)(t-3)$

~~$t_1^* = -105,381$~~

$t_2^* = 3,20385 \longrightarrow p(3,20385) \approx 50\%$

Valor de t tal que P(t) ≈ 50%