

密级:

保密期限:

# 北京邮电大学

## 硕士学位论文



题目: 基于重整化群方法的 Koopman 分  
析

学 号: \_\_\_\_\_

姓 名: \_\_\_\_\_

专 业: 物理学

导 师: \_\_\_\_\_

学 院: 理学院

2020 年 9 月 3 日



**Secret Level:**

**Confidentiality Period:**



# **BEIJING UNIVERSITY OF POSTS AND TELECOMMUNICATIONS**

## **Thesis for Master Degree**

**Title :** Koopman analysis based on  
renormalization group method

**Student No.:** \_\_\_\_\_

**Candidate:** \_\_\_\_\_

**Subject:** Physics

**Supervisor:** \_\_\_\_\_

**Institute:** School of Science

**September 3, 2020**



# 基于重整化群方法的 Koopman 分析

## 摘 要

同步是耦合非线性系统的一个重要动力学特性，近年来得到了广泛的研究。然而，专注于单个轨道的分析似乎很难扩展到复杂系统，而全局统计方法则过于草率。Koopman 算符技术似乎很好地平衡了这两个观点。本文将 Koopman 分析推广到从观测时间序列中提取重要本征值和本征函数来研究耦合振子的同步问题。本文设计了一个重整化群方法来推导弱耦合本征系统的解析近似，它控制了振荡。对于中强耦合，数值计算进一步证实了平均频率和相关本征函数的重要性。通过检测相邻本征函数在不同耦合强度下的相关系数变化，可以很好地定位同步过渡点，这对其它非线性系统具有一定的应用价值。

**关键词：**同步   Koopman 算符   重整化群   本征值   本征函数  
平均频率   同步过渡点



# KOOPMAN ANALYSIS BASED ON RENORMALIZATION GROUP METHOD

## ABSTRACT

Synchronization is an important dynamics feature in coupled nonlinear systems, which has been studied extensively in recent years. However, analysis focused on individual orbits seems hard to extend to complex systems while a global statistical approach is overly cursory. Koopman operator technique seems to well balance the two points of view. In this paper, we extend Koopman analysis to the study of synchronization of coupled oscillators by extracting important eigenvalues and eigenfunctions from the observed time series. A renormalization group approach is designed to derive of an analytic approximation of the eigen-system for weak coupling, which dominates the oscillation. For moderate or strong couplings, numerical computation further confirms the importance of the average frequencies and the associated eigenfunctions. The synchronization transition points could be located with quite high accuracy by checking the change of the correlation coefficient of neighbouring eigenfunctions at different coupling strengths, which may be readily applied to other nonlinear systems.

**KEY WORDS:** synchronization   Koopman operator   renormalization group  
eigenvalues   eigenfunctions   average frequencies   synchronization transition points





# 目 录

第一章 引言 .....	1
1.1 研究背景 .....	1
1.2 本说明的主要内容 .....	3
第二章 基础知识 .....	5
2.1 动力学系统 .....	5
2.1.1 流 .....	5
2.1.2 映射 .....	6
2.2 复杂网络 .....	6
2.2.1 小世界网络 .....	6
2.2.2 矩阵表示 .....	7
2.3 Kuramoto 模型 .....	9
2.3.1 模型的提出 .....	9
2.3.2 模型方程 .....	10
2.3.3 序参量 .....	11
2.3.4 网络拓扑对同步的影响 .....	13
2.4 重整化群 .....	14
2.4.1 重整化群的发展 .....	14
2.4.2 重整化群 .....	16
2.4.3 重整化群在微分方程中的应用 .....	17
第三章 Koopman 算符 .....	21
3.1 定义 .....	21
3.2 谱分解 .....	22
3.3 本征值与本征函数 .....	23
3.4 动态模式分解 .....	24
第四章 最近邻 Kuramoto 模型的应用 .....	29
4.1 最近邻 Kuramoto 模型 .....	29
4.2 重整化群分析 .....	29

4.2.1	推导 .....	29
4.2.2	频率修正项 .....	32
4.2.3	频率修正项的应用 .....	32
4.3	Koopman 算符 .....	36
第五章	复杂网络上的 <b>Kuramoto</b> 模型的应用 .....	47
5.1	复杂网络 kuramoto 模型 .....	47
5.2	koopman 分析 .....	47
第六章	总结 .....	51
参考文献	.....	52

## 表格索引

2-1	邻接表.....	8
4-1	$N = 6$ 个振子重整化群解和 koopman 解比较: $K = 0.08$ .....	38
4-2	$N = 6$ 个振子临界耦合强度的数值解和 koopman 解: 最近邻 Kuramoto 模型 .....	45
5-1	$N = 10$ 个振子临界耦合强度的数值解和 koopman 解: 自然频率线性分布, 网络拓扑如图 5-1 .....	49
5-2	$N = 10$ 个振子临界耦合强度的数值解和 koopman 解: 自然频率随机分布, 网络拓扑如图 5-1 .....	49



## 插图索引

2-1	$N = 10$ 个节点网络拓扑图 .....	6
2-2	$N = 4$ 个节点的网络拓扑图.....	8
2-3	$N = 100$ 个振子的分岔树：自然频率服从区间 $[-1, 1]$ 内线性分布。 .....	14
2-4	$N = 100$ 个振子同步效率图：自然频率服从区间 $[-1, 1]$ 内线性分布，同步的节点比例 $P_s = \frac{N_s}{N}$ ( $N_s$ 表示发生同步的节点数) 与 $1.4K$ 的线性关系 (红色点)；曲线 $P_s = 1.4K$ (蓝色实线)。 .....	15
4-1	$N=2$ 个振子的分岔树：蓝色曲线是数值解，红色点是二阶重整化群频率。 34	
4-2	$N=3$ 个振子的分岔树：蓝色曲线是数值解，红色点是二阶重整化频率。 . 35	
4-3	$N=6$ 个振子自然频率分布 .....	37
4-4	$N = 6$ 个振子观测函数在 koopman 算符本征函数上的展开系数：状态变量 $\mathbf{Z}' = (z_1^t)$ ，观测函数 $(z_1^0, z_1^\tau, \dots, z_1^{(n-1)\tau})^T$ .....	39
4-5	$N = 6$ 个振子观测函数在 koopman 算符本征函数上的展开系数：状态变量 $\mathbf{Z}' = (z_1^t, z_2^t)$ ，观测函数 $(z_1^0, z_1^\tau, \dots, z_1^{(n-1)\tau})^T$ .....	40
4-6	$N = 6$ 个振子观测函数在 koopman 算符本征函数上的展开系数：状态变量 $\mathbf{Z}' = (z_1^t, z_2^t)$ 时，观测函数 $(z_2^0, z_2^\tau, \dots, z_2^{(n-1)\tau})^T$ .....	41
4-7	$N = 6$ 个振子观测函数在 koopman 算符本征函数上的展开系数：状态变量 $\mathbf{Z}' = (z_1^t, z_2^t)^T$ ，观测函数 $(z_1^0, z_2^0, z_1^\tau, z_2^\tau, \dots, z_1^{(n-1)\tau}, z_2^{(n-1)\tau})^T$ .....	42
4-8	$N = 6$ 个振子分岔树：蓝色曲线为数值解，红色点是 koopman 解.....	44
4-9	$N = 6$ 个振子本征函数的相关系数图：状态变量 $\mathbf{Z}' = (z_i^t)$ .....	45
5-1	$N = 10$ 个振子网络拓扑图 .....	48
5-2	$N = 10$ 个振子自然频率分布 .....	48
5-3	$N = 10$ 个振子分岔图：蓝色曲线是数值解，红色点是 koopman 解 .....	49
5-4	$N = 10$ 个振子本征函数的相关系数图：状态变量 $\mathbf{Z}' = (z_i^t)$ .....	49



## 符号对照表

$\mathbb{M}$	相空间
$\mathcal{K}$	Koopman 算符
$(\cdot)^T$	矩阵转置
$I$	虚数单位





# 第一章 引言

## 1.1 研究背景

在涉及自然现象、工程控制和人类活动各种领域的复杂系统中，每天都会产生收集大量的数据。数值计算上的进步，让我们处理分析这些大量的动力学数据成为了可能。然而，从这些有限的的数据中，要获得一个系统的所有细节信息几乎是不可能的，而且我们只能对少量的观测量进行观测，且这些观测量是系统状态的函数。在低维非线性动力学理论中，虽然我们是基于标量观测，但由于动力学是混沌的，实际我们获取的动力学信息是高度混合的，所以状态空间的重构也很有可能实现的。然而，在高维系统中，观测数据相比较于高维度，则显得过于稀少，以至于很多信息都被我们忽略了。另一方面，观测量经常受到各种噪声的污染，这些噪声的存在可能会对我们研究的结果造成很大的误差。所以，如何从这些局部有限的观测量中提取整个系统的重要信息或者我们感兴趣的兴趣，一直是理论和实践中的一个重大挑战。

相比较于传统的专注于单一轨道分析的研究方法，将所有的观测量当作一个整体，来观察它随时间的演化可能更有成效。这种思路可以抑制可能存在的噪声，从所有分量及其时间相关性中挖掘到稳定的动力学信息。算符理论为我们开启了一个新的研究篇章。1930 年，Bernard Koopman 和 John von Neumann 提出的 Koopman 算符可以描述状态空间中可观测函数随时间的演化<sup>[1,2]</sup>。近年来，随着计算机技术和数据科学的兴起，这种非线性动力学分析的替代框架得到了人们广泛的探索，并在不同领域得到了大量的应用<sup>[3-7]</sup>。在这个新的分析方法中，我们着重讨论了 Koopman 算符的谱性质，特别是数值计算中主导的本征值和本征函数。然而，在高维系统中，Koopman 算符通常由一个本征值众多的非常大的矩阵来表示，而且由于问题的复杂性，在如何识别和解释主导的本征值和本征函数方面还缺乏可靠的方法，更不用说传统的分析方法了。

然而，重整化群理论的最新进展为我们提供了一点思路：从局部展开中可以提取全局信息<sup>[8]</sup>。重整化群研究了物理定律在不同尺度上的变化，在文献<sup>[9]</sup>中被首次提出用于量子物理和统计物理中的微扰计算。后来，它被扩展到处理流和映射的非线性动力学<sup>[8,10,11]</sup>。重整化群方法的出发点是消除摄动级数中的发散项（或共振项），从而提取对细节不敏感的系统结构和动力学的稳定特征，因此可以看作是渐

近分析的一种变分形式 [8,10,11]。常见的一些渐近分析技术，如多尺度法 (MS)、边界层法 (BL)、WKB 近似等，因为其复杂性和局限性，我们使用起来会非常复杂和困难 [12-14]。相反，重整化群方法是一种非常简单的摄动展开方法，不需要我们掌握任何先验知识，因而在实际应用中非常方便。在文献 [15] 中，重整化群分析进一步被扩展到高维相空间中对低维结构的处理。本文将利用重整化群方法对耦合振子的 Kuramoto 模型进行微扰分析。

1665 年，惠更斯在耦合钟摆中观察到同步现象。自此，同步现象作为一种非常普遍且基本的自然现象，在各个领域被观测到，并被广泛研究，特别是在高维非线性耦合系统中，如一场音乐会中观众们有节奏的掌声、人体内起搏器细胞维持基本功能的同步振动、流体流动模式、传染病的爆发等。Kuramoto 模型一直是研究同步现象的一个经典且成熟的模型 [16-20]，即使它的动力学行为仍然存在着许多谜团，但是丝毫不影响各个学者对它的研究热情。因此，Kuramoto 模型为高维非线性系统的 Koopman 分析提供了一个良好的研究平台。最近，Ott 和 Antonsen 提出了一种很好的技术，称为 QA 方法 [21,22]，该方法严格地给出了在包含同步态的大振子群极限下的一个低维子流形。它在不同背景下的成功表明了，尽管动力学是弱混沌的，但在网络系统的同步中也可能存在着低维行为。因此，在 Kuramoto 模型的 Koopman 分析中，即使在振子数量有限的情况下，也有可能用单指标确定可能存在的同步现象。

由于在展开阶数或收敛阶数上的限制（特别是当系统规模较大时），重整化群方法只对弱耦合的振子系统是友好的。而且，在实际应用中，很难得到实际系统的精确运动方程。复杂网络上 Kuramoto 模型同步的数值分析取得了许多进展，引起了一股研究热潮。在文献 [18] 中，通过观察复序参数可以发现全局跃迁。但这种方法需要知道所有振子的演化过程，并且不能准确地得到临界耦合强度，更不用说局部同步点了。在文献 [19] 中，通过观察振子的分岔树，可以找到局部和全局相变点。但我们也需要知道所有振子的演化数据和平均频率。本文中，我们采用 Koopman 算符对耦合系统进行分析，基于 Hankel 矩阵和奇异值分解进行动态模态分解。根据时滞嵌入理论，我们从部分振子中重构出足够的信息。根据 Koopman 算符的频谱特性，识别耦合振子的频率结构，得到重要的频率分量。同时，考虑耦合强度变化时主特征函数的相关函数，可以确定相变点的位置。通过与数值结果的比较，验证了 Koopman 方法的可靠性。

## 1.2 本说明的主要内容

第2章首先在第2.1节中介绍了动力学的基本知识；第2.2节介绍了复杂网络中的小世界模型和矩阵表示；第2.3节介绍了 Kuramoto 模型，包括模型发展历史，模型方程和相关性质；第2.4节介绍了重整化群理论和其在求解微分方程中的应用。

第3章介绍了 Koopman 算符的定义，谱分解，本征值和本征函数，以及求解 Koopman 算符的算法，即动态模式分解。

第4章以最近邻 Kuramoto 模型为例，基于重整化理论对模型进行微扰展开，求解得到近似解析解和重整化频率；基于 Koopman 分析，求解本征频率和临界耦合强度。最后将两种分析方法与数值解比较。

第5章将 Koopman 分析拓展到复杂网络的 Kuramoto 模型中，并将分析结果与数值解相比较。

第6章是对文章的总结并讨论了本文待改进的地方。



## 第二章 基础知识

### 2.1 动力学系统

庞加莱采用几何方法展开对三体问题的研究，首次碰触到混沌存在，即确定性系统敏感依赖于初始条件的非周期行为，由于这一性质，我们不能对混沌进行长期的预测。随着计算机的发展，信息时代的到来，动力学发展迎来了挑战和转折，凭借传统的线性方法已经不能满足对各个学科的研究，我们需要借助非线性动力学理论来更加精确的刻画动力学问题。另一方面，人们的研究方式得到巨大改变，在计算机的帮助下，我们能更加直观的探索到非线性动力学的性质。比如对洛伦兹系统的混沌和分形的研究。

非线性动力学已解决了较多问题，如机械系统中的过阻尼运动、流体中湍流的形成、激光的运作等。借助非线性动力学理论所建立的模型不仅能反映各系统的运动规律，还能预测其未来动力学演化特性，为解决各学科中的非线性问题提供理论指导和借鉴。动力学从最开始物理学的一个独立分支，到现在俨然成为一门交叉学科，动力学的发展焕发着蓬勃生机，且具有无限前景。

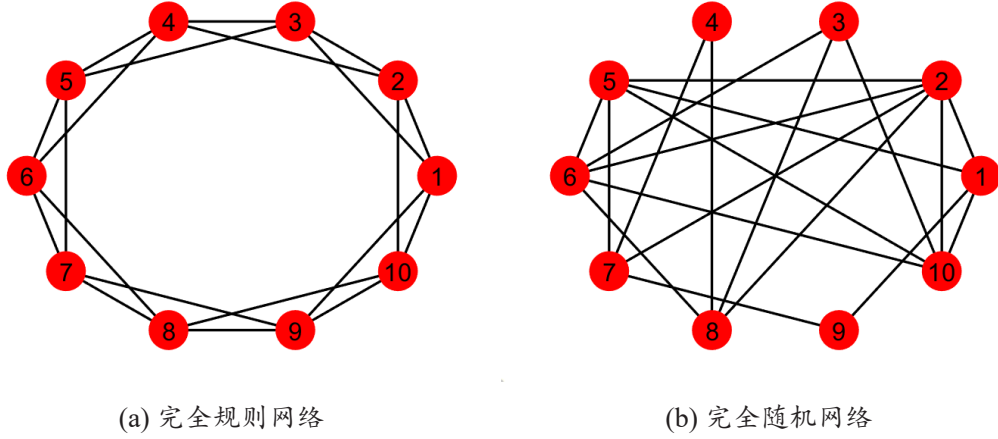
微分方程和差分方程可以表示两种动力学系统。前者表示连续时间的动力学系统，我们称之为流，而后者刻画的是离散时间的动力学系统，一般我们叫做映射。

#### 2.1.1 流

微分方程表示的动力学系统，称之为流。对于一个系统，如果知道该系统的初始状态，以及状态改变速率，那么就可以根据这些已知量，在相空间中演化出系统轨迹。从这个角度来看，可以用下面的常微分方程表示一般的连续时间的非线性动力学系统：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}). \quad (2-1)$$

其中， $\mathbf{x} \in \mathbb{M}$  是光滑流形  $\mathbb{M}$  上的  $n$  维状态向量。比如，运动物体的位移和速度，萤火虫发光节律的相位，反应器中化学物质的浓度等。 $\dot{\mathbf{x}}$  表示  $\mathbf{x}$  对时间  $t$  的微分，即  $\dot{\mathbf{x}} = d\mathbf{x}/dt$ ，反映状态变化速率。 $\mathbf{F} : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}$  是关于非线性向量值的光滑函数，和状

图 2-1  $N = 10$  个节点网络拓扑图

态向量  $\mathbf{x}$  具有相同维度。 $\mathbf{F}$  由研究的具体问题决定, 各个状态变量随时间演化的速率满足  $\mathbf{F}$  这样的函数关系。对于式 (2-1) 这样的一个动力学方程, 我们可以用  $\mathbf{S}'(\mathbf{x}_0)$  表示其初值为  $\mathbf{x}_0$  的解。

### 2.1.2 映射

离散时间的动力学系统, 称之为映射。用如下的差分方程表示:

$$\mathbf{x}_{p+1} = \mathbf{T}(\mathbf{x}_p). \quad (2-2)$$

式中,  $\mathbf{x}_p$  的下标  $p \in N$  是时间指标, 所以  $\mathbf{x}_p$  表示时刻  $p$  的状态。式 (2-2) 表示的含义是, 时刻  $p$  的状态  $\mathbf{x}_p$  经过一次映射  $\mathbf{T}$ , 下一时刻的状态为  $\mathbf{x}_{p+1}$ 。

## 2.2 复杂网络

### 2.2.1 小世界网络

用图论的观点来描述的话, 网络就是一个由大量顶点以及它们之间所连的边构成的图。很早之前, 人们认为网络分为完全规则网络和完全随机网络 (如图2-1)。一种比较典型的随机网络是 ER 模型。构造 ER 模型时, 首先我们需要确定节点个数  $N$  和连边概率  $p \in [0, 1]$ , 假设  $N$  个节点中的每对节点之间以连边概率  $p \in [0, 1]$  相连。ER 网络在很长一段时期内被广泛用于描述现实中的网络。20 世纪末, 随着对复杂网络的研究越来越多, 人们慢慢发现, 这些网络的特性已经不能较好的描述自然、社会、工程等网络。

1998 年, Watts 提出小世界网络<sup>[23]</sup> (也被称为 WS 小世界模型) 对小世界现象<sup>[24]</sup> 在数学上进行了描述。小世界网络很普遍, 所以将 Kuramoto 模型拓展到复杂网络上很有意义。WS 模型因随机化可能会导致连通性被破坏, 后续还有其他改进的模型, 如 Watts 提出 NW 模型, 但是本文重点不在此, 所以用 WS 模型足以模拟我们想要的复杂网络模型。

现在我们来具体介绍一下如何构造一个 WS 模型: 首先我们从一个完全的规则网络出发, 即始于一个  $N$  个节点的网络, 节点排布在圆上, 每个节点与它左右相邻的各  $d/2$  个节点相连 ( $d$  是网络中节点的度, 这里取偶数)。以概率  $p$  随机化重连网络中已经连接的每一条边, 即令每一条边的一个端点保持不变, 舍弃这条边, 随机在网络中选择另一个新的端点与这个端点重新连接, 其中规定不可以出现自连和重边。当  $p = 0$  时, 网络退化为完全规则的网络, 如图2-1a所示; 当  $p = 1$  时, 网络对应于完全随机的网络, 如图2-1b。所以, 当我们从 0 到 1 变化  $p$ , 可以实现从完全规则的网络到完全随机的网络的过渡。

### 2.2.2 矩阵表示

为了进行计算, 我们需要在数学上对网络 (即图) 进行表示。考虑到图的基本组成是节点和边, 一般有两种方法来描述网络的连接: 邻接矩阵表示法, 邻接表表示法。

首先介绍邻接矩阵表示法。如图2-2所示, 图中有 4 个节点, 那么邻接矩阵就有 4 行 4 列, 行数和列数都代表着节点。我们用  $a_{ij} = 0$  或 1 表示节点  $i$  与节点  $j$  之间是否存在连接关系, 对应图中是否有边。如果  $a_{ij} = 0$ , 表示节点  $i$  与节点  $j$  之间没有边, 即无连接; 当  $a_{ij} = 1$  时, 表示存在边, 即有连接。所以图2-2用邻接矩阵法表示的结果如式 (2-3) 所示。

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2-3)$$

$a_{ii} = 0$  表示没有自连接。我们发现整个矩阵是一个对称矩阵。因为这里我们讨论的是无向图, 所以  $a_{ij}$  和  $a_{ji}$  的值相等。当网络为有向图式,  $a_{ij}$  代表的是从节点  $i$  指向节点  $j$  的边, 此时的邻接矩阵就不一定是对称矩阵了。

接下来我们, 我们介绍邻接表表示法。邻接矩阵列出了所有的点与点之间的关



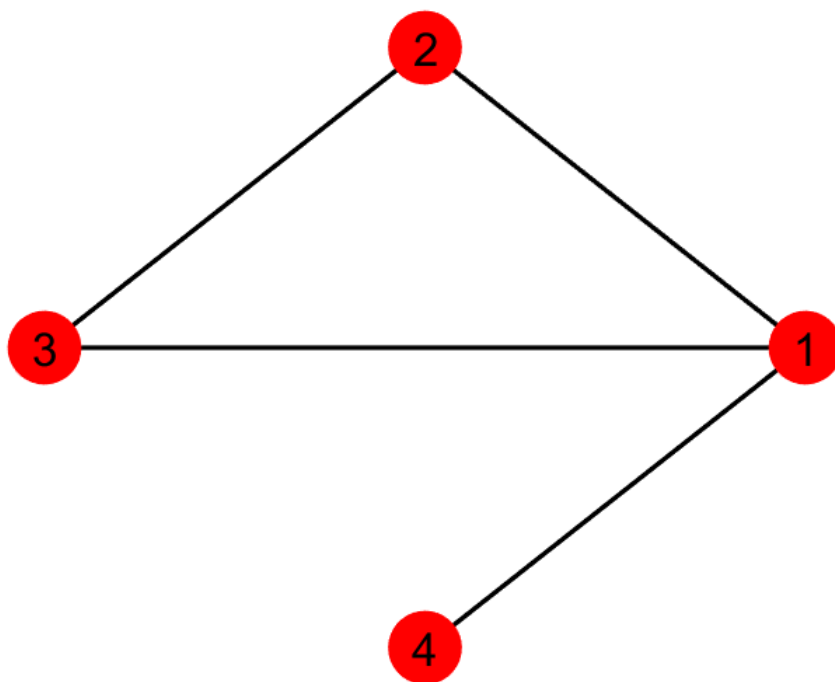
图 2-2  $N = 4$  个节点的网络拓扑图

表 2-1 邻接表

1	2	3	4
2	1	3	
3	1	2	
4	1		

系，无论是有连接还是无连接。而邻接表只列出了有连接的关系，对于没有连接关系没有直接说明，没有列出即表明不存在连接关系。表2-1是图2-2的邻接表。第一列表示节点序号，有4个节点，所以有4行，每一行列出了对应节点相连的节点。节点1和节点2, 3, 4都相邻，所以第一行节点1对应节点2, 3, 4；节点2与节点1, 3有连接，所以第二行对应1, 3；节点3与节点1, 2有连接，所以第三行对应1, 2。节点4只与节点1有连接，所以第四行只对应1。邻接表也可以表示有向图，此时第一列表示有向边起点的序号。

基于刚才对两种方法的描述，对于我们接下来要研究的模型，邻接矩阵表示法更加适合我们的计算。所以后面我们将以此方法为基础进行相关计算。



## 2.3 Kuramoto 模型

### 2.3.1 模型的提出

耦合系统作为一种十分普遍的高维非线性系统广泛存在。生物学例子包括心脏起搏细胞网络，大脑视交叉上核的昼夜节律起搏细胞，酵母细胞悬液中的代谢同步性，同步闪烁的萤火虫聚集，蟋蟀齐鸣。在物理学和工程学中也有许多例子，如激光阵列，微波振荡器，超导约瑟夫森结等。系统中相互耦合的振子在一定初始条件下，随时间演化，最终振子状态达到一个相对关系，我们称之为达到同步状态<sup>[16?]</sup>。同步现象与我们的生活紧密相关，其中，描述耦合振子宏观长期行为的平均频率，以及同步的临界耦合强度引起人们的广泛研究。它们对于人体维持正常生物节律，物种的繁衍，以及工程控制都具有重大意义，也一直是物理、生物、化学和社会系统中研究的难点<sup>[25]</sup>。

Wiener 对集体同步展开了数学研究，并推测集体同步与大脑  $\alpha$  节律的产生有关。但是，Wiener 基于傅里叶积分的数学方法的研究却无法进行下去<sup>[26]</sup>。

接着，Winfree 提出用大量相互作用的极限环振子来描述这个问题<sup>[27]</sup>。虽然这个问题很难解决，但是 Winfree 认识到，如果耦合很弱，并且振子几乎一致，问题将会发生简化。对此，我们可以尝试分离时间尺度：在快时间尺度上，振子松弛到它们的极限周期上，因此可以仅用它们的相位来描述耦合系统；而在长时间尺度上，由于振子之间的弱耦合和微小的频率差，这些相位会演化。Winfree 继续简化模型，假设每个振子都耦合到整个系统产生的集体节律上，类似于物理学中的平均场近似，建立了如下的模型：

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \left( \sum_{j=1}^N X(\theta_j) \right) Z(\theta_i), i = 1, 2, \dots, N \quad (2-4)$$

其中， $\theta_i$  是振子  $i$  的相位， $\dot{\theta}_i$  是该振子的瞬时频率。 $\omega_i$  是振子  $i$  的自然频率，服从一定的分布  $g(\omega)$ 。振子  $j$  会对其他振子施加一个相位相关的影响  $X(\theta_j)$ ，振荡器  $i$  的相应响应  $Z(\theta_i)$  取决于其相位  $i$ 。通过数值模拟和解析近似，Winfree 发现这样的耦合系统可以表现出相变的时间模拟。与耦合强度相比，当自然频率相差较大时，系统的行为是非相干的，每个振子都以其自然频率运行。随着固有频率差距的减小，非相干现象持续存在，直到超过某一阈值，一小群振子突然同步。但是 Winfree 提出的这个模型难以求解，同步的研究继续朝着其他的方向进行。

受到 Winfree 研究的启发，1975 年，Kuramoto 在他的基础上提出了 Kuramoto 模

型<sup>[28]</sup>。描述了在任意固有频率下运行的相位振子模型，它们之间进行相位差的正弦耦合。Kuramoto 模型最初用于描述生物振子，化学振子，后续具有更广泛的应用<sup>[17-20]</sup>。从此该模型成为一个比较通用的描述大量耦合振子的同步行为的研究模型。解决同步问题的一个成功方法是将系统中的每个成员建模为这样的相位振子。该模型足够简单，可以进行数学处理；也足够丰富，可以显示多种同步模式；并且足够灵活，可以适合多种物理场景。

### 2.3.2 模型方程

基于摄动平均法，对于任何弱耦合、几乎一致的极限环振子系统，长期动力学由以下普遍形式的相位方程给出：

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^N \Gamma(\theta_j - \theta_i), i = 1, 2, \dots, N \quad (2-5)$$

因为相互作用函数  $\Gamma(\theta_j - \theta_i)$  可以有任意多个傅里叶谐波，并且连接拓扑也不明确：振荡器可以连接成链、环、立方晶格、和随机图或任何其他拓扑。所以上式研究仍然不简单。

平均场案例应该是最容易处理的，所以，我们可以对应一种最简单的情况（即平均加权，全连接，纯正弦耦合）：

$$\Gamma(\theta_j - \theta_i) = K \sin(\theta_j - \theta_i), \quad (2-6)$$

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), i = 1, 2, \dots, N \quad (2-7)$$

这里的  $K$  是振子间的耦合强度（也可称为耦合系数）。该模型忽略幅度信息，只考虑相位信息，其行为可以描述为： $N$  个振子试图以各自的自然频率  $\omega_i$  在单位圆上独立转动，而耦合则使其趋向于与其他振子一起同步转动。当耦合较弱时，或者固有频率相差较大时，系统行为是非相干，振子倾向于独立旋转；随着频率差减小，耦合越来越大时，非相干现象一直存在，达到某个阈值，一小群振子突然局部同步。当超过系统的临界耦合强度时，所有振子实现集体同步，自发锁定到一个共同的平均频率上。其频率是这些  $N$  个振子自然频率的代数平均值。为了表征长时间旋转行为，定义了一个平均频率：

$$\hat{\omega}_i = \langle \dot{\theta}_i \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\theta}_i(t) dt. \quad (2-8)$$

平均频率体现了振子宏观的运动状态，是一个比较简单的判断同步的指标，可以用来选择 Koopman 分析中的重要模式，在后文我们将作详细介绍。

对于 Kuramoto 模型，我们一般采用四阶龙格-库塔，就可以得到定步长的求解结果。综上，Kuramoto 模型描述了一大群固有频率来自于给定的分布的耦合极限环振子。如果耦合强度超过某一阈值，系统就会出现相变：一些振荡器会自发同步，而另一些则保持不相干。

### 2.3.3 序参量

为了可视化相位的动态，我们想象在复杂平面上，一个点群绕着单位圆运行。复参量定义如下：

$$re^{I\Psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{I\theta_j}. \quad (2-9)$$

复参量是一个宏观量，可以用来描述整个振子群产生的集体节律。半径  $r(t)$  可以描述相位相干性， $\Psi(t)$  表示平均相位。例如，如果所有的振子都在一个紧密的团中运动，就有  $r \approx 1$ ，而粒子群就像一个巨大的振子。另一方面，如果振子散布在圆上，那么  $r \approx 0$ ；单个振子之间不相干，不会产生宏观的节律。

而 Kuramoto 模型可以用序参量重写。给式 (2-9) 乘上  $e^{-I\theta_i}$  ( $I$  是虚数单位)，我们有

$$re^{I(\Psi-\theta_i)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{I(\theta_j-\theta_i)}. \quad (2-10)$$

比较虚数部分，可以得到

$$r \sin(\Psi - \theta_i) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i). \quad (2-11)$$

所以式 (2-7) 变成：

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + Kr \sin(\Psi - \theta_i), i = 1, 2, \dots, N. \quad (2-12)$$

在这种形式下，模型的平均场特征变得明显。每一个振子似乎都与其他所有振子不耦合，好像只通过平均场量  $r$  和  $\Psi$  相互作用。具体地说，相位  $\theta_i$  被拉向平均相位，而不是任何单个振子的相位。耦合的有效强度与相干半径  $r$  成正比，这种比例性在耦合和相干之间建立了一个正反馈回路：随着总体变得更相干， $r$  增大，因此有效耦

合  $Kr$  增大, 这会在同步振子群中吸引更多的振子。如果新振子进一步加强了相干性, 这一过程将继续进行下去。

Kuramoto 在早期的工作中就通过序参量正确预测了  $N \rightarrow \infty$  极限下该模型解的长期行为。为了寻求稳定解, 假设  $r$  是常数,  $\Psi$  以频率  $\Omega$  的速度匀速旋转 (不失一般性, 令  $\Omega = 0$ )。此时, 式 (2-12) 简化为:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i - Kr \sin \theta_i, i = 1, 2, \dots, N \quad (2-13)$$

因为相关半径  $r$  被假设为常数, 所以可以认为此时所有的振子都是非相干的。反过来看, 最后求解结果的  $r$  和  $\Psi$  必须与最初的假设符合。当满足条件  $|\omega_i| \leq Kr$  时, 我们令  $\dot{\theta}_i = 0$  来求解不动点, 即不动点满足下面等式:

$$\omega_i = Kr \sin \theta_i. \quad (2-14)$$

其中, 我们规定  $|\theta_i| \leq \frac{1}{2}\pi$ 。此时振子存在“锁相”, 即使不能同步, 也存在相同的瞬时频率。若  $|\omega_i| > Kr$ , 振子发生相移, 以非匀速的方式在单位圆上转动, 在某些相位上转动较快, 在某些相位上又放慢速度。导致某些振子“追赶”上其他振子后再次分离, 不会发生同步。

为了避免出现相移与  $r$  是常数这个前提矛盾, 我们假设振子在圆上形成一个平稳分布, 且质心不变。用  $\rho(\theta, \omega)d\theta$  表示相位处在区间  $[\theta, \theta + d\theta]$  内, 自然频率为  $\omega$  的振子。平稳性需要  $\rho(\theta, \omega)$  与  $\theta$  处频率成负相关: 振子在慢频率处堆积, 在快频率处“逃离”。即满足条件:

$$\rho(\theta, \omega) = \frac{C}{|\omega - Kr \sin \theta|}. \quad (2-15)$$

对于每个自然频率  $\omega$  下的常数  $C$  都由  $\int_{-\pi}^{\pi} \rho(\theta, \omega)d\theta = 1$  决定:

$$C = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega^2 - (Kr)^2}. \quad (2-16)$$

根据一致性条件, 我们可以得出:

$$\langle e^{l\theta} \rangle = \langle e^{l\theta} \rangle_{lock} + \langle e^{l\theta} \rangle_{drift}. \quad (2-17)$$

尖括号表示振子的平均。用下标“lock”表示锁相的振子, 下标“drift”表示相移的振子。因为我们假设  $\Psi = 0$ , 所以  $\langle e^{l\theta} \rangle = r e^{l\Psi} = r$ , 即

$$r = \langle e^{l\theta} \rangle_{lock} + \langle e^{l\theta} \rangle_{drift}. \quad (2-18)$$

首先我们估算一下锁相的振子。锁相状态下，满足式 (2-14)。我们用  $\theta^*$  表示不动点。当  $N \rightarrow \infty$  时，因为  $g(\omega) = g(-\omega)$ ，所以锁相振子的分布是关于  $\theta = 0$  对称的。分布在  $\theta^*$  与分布在  $-\theta^*$  的振子数量是相同的，所以  $\langle \sin \theta \rangle_{lock} = 0$  成立，我们可以得出下式：

$$\langle e^{I\theta} \rangle_{lock} = \langle \cos \theta \rangle_{lock} = \int_{-Kr}^{Kr} \cos \theta(\omega) g(\omega) d\omega. \quad (2-19)$$

联合式 (2-14)，可以求解上式：

$$\langle e^{I\theta} \rangle_{lock} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta g(Kr \sin \theta) Kr \cos \theta d\theta = Kr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta g(Kr \sin \theta) d\theta. \quad (2-20)$$

接下来，求解相移的振子：

$$\langle e^{I\theta} \rangle_{drift} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{|\omega| > Kr} e^{I\theta} \rho(\theta, \omega) g(\omega) d\omega d\theta. \quad (2-21)$$

因为有  $g(\omega) = g(-\omega)$  和对称性  $\rho(\theta + \pi, -\omega) = \rho(\theta, \omega)$ ，所以上式积分等于零。因此，根据上面的求解，我们可以得到：

$$r = Kr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta g(Kr \sin \theta) d\theta. \quad (2-22)$$

式 (2-22) 总是存在一个零解  $r = 0$ ，对应于  $\rho(\theta, \omega) = 1/2\pi$ 。解的第二个分支，对应于部分同步状态，满足：

$$1 = K \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \theta g(Kr \sin \theta) d\theta. \quad (2-23)$$

令  $r \rightarrow 0^+$ ，在  $K = K_c$  处，会出现分岔，有：

$$K_c = \frac{2}{\pi g(0)}. \quad (2-24)$$

这是 Kuramoto 关于集体同步开始时临界耦合的精确公式。

#### 2.3.4 网络拓扑对同步的影响

过去的各种实验和结论都证明，对于大量耦合的非一致振子，需要较大的耦合强度才能全局同步。在文献<sup>[7]</sup>中，通过实验研究了不同空间频率分布时振子同步情况。证明了振子同步的临界耦合强度与初始频率分布无关，同步效率主要取决于振子在空间中排列的拓扑结构。提出了空间频率配置物理量  $R$ ，定义如下：

$$R = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\omega_{i+1} - \omega_i)^2. \quad (2-25)$$

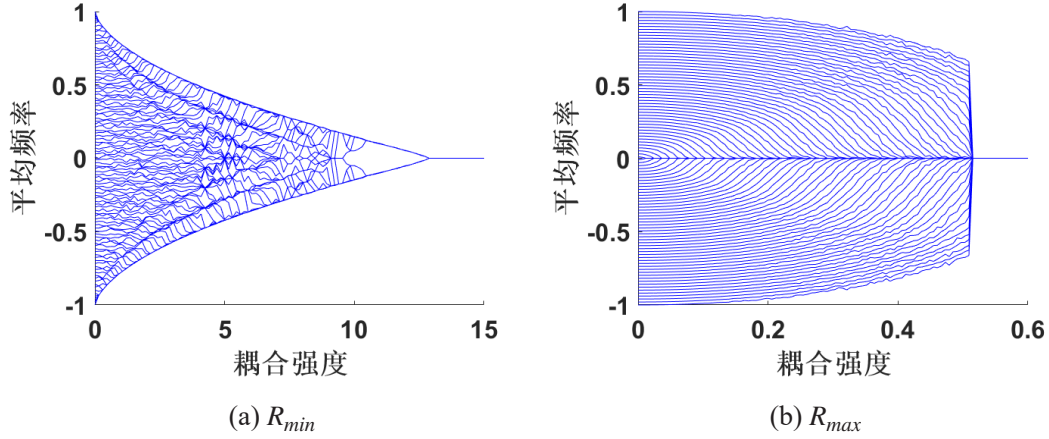


图 2-3  $N = 100$  个振子的分岔树：自然频率服从区间  $[-1, 1]$  内线性分布。

实验指出同步效率随  $R$  单调增加。根据物理量  $R$  来排列振子的拓扑结构，可以使系统在小耦合强度下全局同步。图 2-3 对  $R_{min}$  和  $R_{max}$  的情况进行了比较，图中绘制了  $N = 100$  个振子的分岔树，这些振子的自然频率服从区间  $[-1, 1]$  内的线性分布。其中，图 2-3a 按照  $R_{min}$  的规则排列振子，即在圆上按振子  $1, 2, 3, \dots, N-1, N$  顺序排列；图 2-3b 按照  $R_{max}$  的规则配置拓扑结构，即在圆上按照顺序振子  $1, N-1, 3, N-3, \dots, N/2, \dots, N-2, 2, N$  排布。。很明显可以观察到，当系统满足  $R_{max}$  的条件下，大量振子可以在较小的耦合强度下发生全局同步。这个结论对于我们进行相关工程设计具有很大帮助。

文献<sup>[29]</sup>在此基础上提出，自然频率服从线性分布，且满足  $R_{max}$  配置的振子在发生爆发性同步前，同步的节点比例  $P_s = N_s/N$  ( $N_s$  表示发生同步的节点数) 与耦合强度  $K$  线性相关。以图 2-3b 为例，将  $P_s$  与耦合强度的关系绘制在图 2-4 中（红色点），表示振子同步效率，在爆发性同步前，有  $P_s \approx 1.4K$  成立。线性关系的合理性和因子 1.4 将在后面的章节进行证明。

## 2.4 重整化群

### 2.4.1 重整化群的发展

1948 年，Schwinger, Feynman 和 Tomonaga 分别提出了重整化方法来消除量子电动力学中微扰理论的发散<sup>[30?–34]</sup>。Dyson 证明了这三种方法是等价的<sup>[35,36]</sup>。因为极高的精度，量子电动力学成为最精确的理论。1953 年，Gell-Mann 和 Low 提出了处理量子场论中发散的重整化群方法<sup>[37]</sup>。1971 年，Wilson 引入重整化群方法<sup>[38]</sup>，发



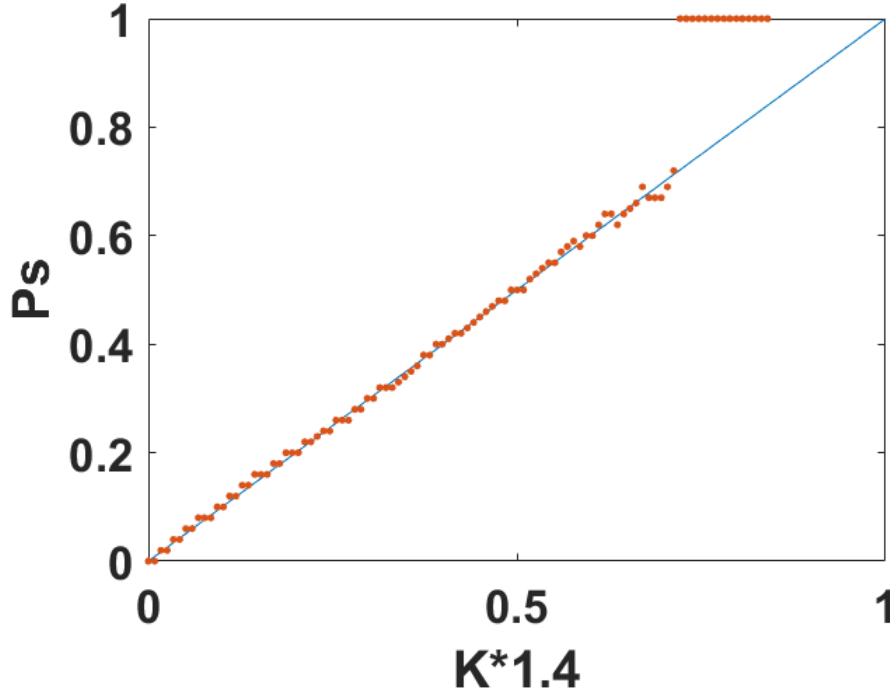


图 2-4  $N=100$  个振子同步效率图：自然频率服从区间  $[-1, 1]$  内线性分布，同步的节点比例  $P_s = \frac{N_s}{N}$  ( $N_s$  表示发生同步的节点数) 与  $1.4K$  的线性关系 (红色点)；曲线  $P_s = 1.4K$  (蓝色实线)。

展了二阶相变理论，使统计物理进入了一个新的时代。20 世纪 90 年代，Goldenfeld 等人开始对非线性偏微分方程用重整化群方法代替量纲分析<sup>[10,11,39?–44]</sup>。

重整化群方法涵盖了传统的奇异摄动方法，如多尺度法、边界层理论、平均法、正规形理论<sup>[43–46]</sup>。文献<sup>[43]</sup>中证明了许多奇异摄动方法可以理解为重整化摄动理论，并且用约化摄动方法得到的振幅方程是重整化群方程。但是重整化群方法比传统的摄动方法更有效、更精确，因为它只做了简单的摄动展开，需要很少的先验知识，且不需要对扰动级数的结构作特殊假设，也不需要使用渐近匹配。该方法在实践中更加有效和准确，是从扰动展开中提取全局信息的标准方法<sup>[43]</sup>。此后，重整化群方法在理论和应用两个方面都得了一定发展。例如，Kunihiro、Nozaki、Oono 和 Shiwa 在文献<sup>[47–49]</sup>中提出了 proto-RG 方法，Tu 和 Cheng 引入了改进的重整化群方法来扰动偏微分方程<sup>[50–52]</sup>。Kunihiro 用重整化群方法得到的一个近似解是一系列曲线的包络，根据微分几何中的经典包络理论，对重整化群方法进行几何解释<sup>[53–60]</sup>。Ziane 等人<sup>[61]</sup>利用平均算子定义了一阶重整化群方程，证明了给定方程的精确解与重整化群方法得到的近似解在很长一段时间内是足够接近的。重整化群的标准方法及其几何公式已经发展并应用于许多问题，如中心流形<sup>[62]</sup>、微分系统中的异宿轨道<sup>[15]</sup>等。

### 2.4.2 重整化群

本节，我们将应用最近发展起来的重整化群方法研究了弱随机性下一维相位耦合振子链的同步问题。重整化群预测自然频率随机分布的耦合振子是如何形成频率同步的簇。尽管重整化群最初用于强随机性，即长尾分布，但即使在弱随机性的情况下，也能很好地与数值模拟相一致。

只受到最近邻相互作用的一维振子链由如下运动方程描述：

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + K_{i-1} \sin(\theta_{i-1} - \theta_i) + K_i \sin(\theta_{i+1} - \theta_i). \quad (2-26)$$

$K_i$  服从随机分布  $\rho_K$ ，总是为正。耦合作用将振子组织成一组组频率相同的群。基于重整化群思想，这些被组合的振子群可以被当作一个个有效的振子，因此模型 (2-26) 可以拓展为：

$$m_i \dot{\theta}_i = m_i \omega_i + K_{i-1} \sin(\theta_{i-1} - \theta_i) + K_i \sin(\theta_{i+1} - \theta_i). \quad (2-27)$$

其中，参数  $m_i$  表示有效振子  $i$  所包含的原始振子的数目。 $m_i$  可以被称为有效振子  $i$  的质量，一对有效振子间被约化的质量为： $\mu = \frac{m_i m_{i+1}}{m_i + m_{i+1}}$ 。

重整化群基于两个抽取步骤，这两个步骤对应于系统的粗粒化。首先是强耦合抽取步骤。两个强耦合  $K_n$  连接的振子  $n$  和  $n+1$ ，互相追逐对方的频率，我们预期它们终将达到同步状态。因此，它们被组合成质量为  $M$  的单个有效振子，质量  $M$  满足：

$$M = m_n + m_{n+1}. \quad (2-28)$$

固有频率  $\Omega$ ：

$$\Omega = (m_n \omega_n + m_{n+1} \omega_{n+1}) / M. \quad (2-29)$$

此步骤在比率（如  $\omega_n / K_n$ ， $K_{n-1} / K_n$ ）低于零阶有效。我们把这样一对被组合的有效振子称为强耦合。新的有效振子可以继续与其他振子重新组合，因此强耦合的振子属于同一频率同步簇。清楚起见，当一对振子由于强耦合而被组合时，我们称它们的键被破坏。

第二个抽取步骤是快振子抽取步骤。固有频率  $\omega_n$  较大的振子相对它邻近的振子，可以看作在自由转动。这样的振子不会与其相邻振子同步，因此与相邻振子的耦合  $K_{n-1}$ ， $K_n$  可以被设置为零。此步骤在比率（如  $K_n / \omega_n$ ， $K_{n-1} / \omega_n$ ）低于一阶有效。实际上，我们会把这样的快振子从链中移除，以备后续分析，并且与相邻振子  $n1$  和



$n+1$  之间的耦合被设置为零。快振子及其邻近的固有频率存在二阶频移，但由于其很小，本文将忽略了它。快振子可以由多个强耦合振子组成。因此，提出快振子意味着该振子团处于其最终形式。

通过连续执行上面两个抽取步骤，振子链被重整化。这个过程是在一系列参数  $m_i, \omega_i, K_i$  上进行的数值求解。为了决定首先抽取哪个振子或键，我们计算每个振子或键的能量： $\{|\omega_i|, \frac{K_i}{2\mu_{i,i+1}}\}$ 。在这种情况下，能量反映了某些因素对集群的影响有多大。链中能量最高的振子频率很高，应该作为快振子被抽取。同样地，能量最高的键应该是强耦合的。有最高的能量的振子或键应该最先被抽取，因此粗粒化对应于系统能量尺度的降低。在实际操作中，我们设定能量标度  $E$ ，并考虑抽取每个周期中能量大于等于  $E$  的振子和键的。

虽然一个振子或键可能具有最高的能量，但在被抽取之前，它必须满足另一个标准。我们用比率  $r_n$  来衡量一对振子同步的趋势：

$$r_n = \frac{K_n}{\mu_{n,n+1}|\omega_n - \omega_{n+1}|}. \quad (2-30)$$

如果满足条件  $\frac{K_n}{2\mu} \geq E$  且  $r_n > 1$ ，那么键是强耦合的。如果满足条件  $|\omega_n| \geq E$ ， $r_{n-1} < 1$  且  $r_n < 1$ ，振子  $n$  可以被认为是一个快振子，将其移除当前的分析。阈值 1 是基于对小链的数值研究而选择的，对于两个振子链来说是精确的。

能量最大的振子或链不可能会立即被抽取。比如，如果  $r_{n-1} < 1$ ，但是  $r_n > 1$ ，振子  $n$  不会那么快被抽取。但最终，整个耦合系统链中振子完成抽取后，只会留下了一堆快振子。每一个快振子对应于一个频率同步的簇。经过重整化处理，我们便可以对振子群质量和频率进行统计研究。

### 2.4.3 重整化群在微分方程中的应用

本节，我们将重整化群应用于微分方程近似求解。对于一组  $n$  维微分方程，可以将其状态的瞬时变化率分为两个部分：线性部分和非线性部分，如下式所示：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{L}\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{N}(\mathbf{x}). \quad (2-31)$$

其中， $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$  是  $n$  维状态向量， $\mathbf{L}$  表示  $n \times n$  矩阵， $\mathbf{N}(\mathbf{x}) \sim O(|\mathbf{x}|^2)$  是微分方程在  $\mathbf{x} = 0$  领域的非线性项，包含状态量  $\mathbf{x}$  的高阶项，用  $\varepsilon$  这个极小量表示非线性项的幅度。不失一般性，我们假设  $\mathbf{L}$  为对角化矩阵（如果不是，我们可以将其

对角化), 则有:

$$\mathbf{L} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n). \quad (2-32)$$

其中,  $\lambda_i$  就是  $\mathbf{L}$  的本征值。

接下来, 将  $\mathbf{x}$  进行关于极小量  $\varepsilon$  的微扰展开:

$$\mathbf{x} = \mathbf{u}_0 + \varepsilon \mathbf{u}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{u}_2 + \dots. \quad (2-33)$$

将式 (2-33) 代入原微分方程式 (2-31) 中, 比较极小量  $\varepsilon$  可以得到一组微分方程:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_0 &= \mathbf{L}\mathbf{u}_0 \\ \dot{\mathbf{u}}_1 &= \mathbf{L}\mathbf{u}_1 + \mathbf{N}(\mathbf{u}_0) \\ \dot{\mathbf{u}}_2 &= \mathbf{L}\mathbf{u}_2 + \mathbf{N}_2(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1) \\ &\dots \end{aligned} \quad (2-34)$$

其中,  $\mathbf{N}_2(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1) = \nabla \mathbf{N}(\mathbf{u}_0) \cdot \mathbf{u}_1$  为二阶非线性项。  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{L}\mathbf{u}_0$  是线性微分方程, 很容易求解得到

$$\mathbf{u}_0(t, t_0) = e^{\mathbf{L}(t-t_0)} \mathbf{A}. \quad (2-35)$$

由此我们可到一阶非线性项  $\mathbf{N}(\mathbf{u}_0)$ , 即可继续求解  $\mathbf{u}_1$ :

$$\mathbf{u}_1(t, t_0) = e^{\mathbf{L}(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{L}(\tau-t_0)} \mathbf{N}[e^{\mathbf{L}(\tau-t_0)} \mathbf{A}] d\tau. \quad (2-36)$$

为方便起见, 我们令  $\mathbf{u}(t, t_0) = 0$ 。以此类推, 因为高阶展开系数始终取决于低价求解结果, 所以我们便可以按阶数一步步求解  $\mathbf{x}$  关于极小量  $\varepsilon$  的微扰展开的展开系数。在求解微分过程中, 当不存在共振项时, 求解结果为指数函数, 如果存在共振项, 那么求解结果会出现  $t - t_0$  次方项。

将求解的展开系数  $\mathbf{u}_i, i = 1, 2, \dots$  带入式 (2-33), 便得到微扰展开式。如果  $\mathbf{L}$  的所有本征值满足  $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$ , 求解结果不会出现  $t - t_0$  次方项, 那么微扰展开式是有效的, 否则无效。

接下来我们使用重整化群方法可以得到更好的近似。上面微扰展开求解的结果为  $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}[t; t_0, \mathbf{A}(t_0)]$ , 是关于初始值  $\mathbf{A}(t_0)$  和初始时刻  $t_0$  的函数, 它表示初始  $t_0$  时刻初值为  $\mathbf{A}(t_0)$  的运动轨迹。因为当初值  $\mathbf{A}(t_0)$  沿着轨迹改变时, 运动轨迹也不会发生改变, 此时初值的轨迹也就是系统的运动轨迹。重整化群方程是一组关于  $d\mathbf{A}(t_0)/dt_0$  的

方程，通过下式可以进行推导

$$\left. \frac{d\dot{\mathbf{x}}[t; t_0, \mathbf{A}(t_0)]}{dt_0} \right|_{t=t_0} = 0. \quad (2-37)$$

这里令  $t = t_0$ ，是因为我们想通过  $t \rightarrow t_0$  消除发散共振项，所以在此处我们取了一个极端值，即初始时刻  $t_0$ 。 $\dot{\mathbf{x}}[t; t_0, \mathbf{A}(t_0)]$  阶数等于  $\mathbf{A}(t_0)$  的阶数；若  $\mathbf{A}(t_0)$  为精确解，则  $\dot{\mathbf{x}}[t; t_0, \mathbf{A}(t_0)]$  也是精确解。

我们尝试研究子流形上的动力学。比如对应于本征值  $\lambda_i$  的动力学，它位于原点无穷小领域的  $x_i$  方向，我们只关注初始向量的第  $i$  个分量，即  $\mathbf{A} = (0, \dots, 0, A_i, 0, \dots, 0)$ 。这时，初始向量仅有第  $i$  个分量  $A_i$  是由我们决定，对于非第  $i$  个分量的后续高阶微扰展开系数的求解需要作一定调整。比如求解  $\mathbf{u}_1$  第  $j$  ( $j \neq i$ ) 个分量：

$$\mathbf{u}_{1,j}(t, t_0) = e^{\lambda_i(t-t_0)} \int_{t_0}^t e^{-\lambda(\tau-t_0)} N[e^{L(\tau-t_0)} \mathbf{A}] d\tau. \quad (2-38)$$

通过式 (2-37) 我们不能直接推导重整化群方程，这时，我们采用式 (2-39) 进行关于  $dA_i(t_0)/dt_0$  的重整化群方程的推导。

$$\left. \frac{d\dot{x}_i[t; t_0, A_i(t_0)]}{dt_0} \right|_{t=t_0} = 0. \quad (2-39)$$

通过数学推导，可以证明其他分量的方程都满足根据式 (2-39) 得到的重整化群方程。该方法得到的级数展开的解的收敛性在文献<sup>[62]</sup>中进行详细证明，本文不做赘述。



## 第三章 Koopman 算符

在非线性系统的相空间中，当动力学是混沌时，典型的轨道以一种复杂的方式蜿蜒而行，对于它的描述是一个相当大的挑战。然而，Koopman 证明了可以用在可观测函数组成的希尔伯特空间上的无穷维线性算子来分析与哈密顿流相关的非线性动力系统。且对于哈密顿流体来说，该算符是酉的，意味着任何两个可观测函数的内积保持不变。综上，状态空间观测值的演化可以用一个线性算符来描述，这个算符后来被称为 Koopman 算符。随后 koopman 算符的谱的研究和应用也越来越多，为高维非线性系统的数据驱动研究提供了一个通用的框架<sup>[3-7]</sup>。这种分析框架将动力学的差分问题转化为关于这类算符行为的问题。

### 3.1 定义

koopman 算符  $\mathcal{K}$  是作用在动力系统相空间观测函数上的无穷维线性算符，描述该函数沿着相空间轨道的值的演化。

首先，我们考虑一个离散动力系统。其演化方程见2.1.2节中的式 (2-2)，状态变量  $\mathbf{x}$  演化一步到状态  $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ 。假设观测函数为  $g$ ，一个任意向量值的函数，将相空间  $\mathbb{M}$  映射到数值空间  $\mathbb{C}$ 。所有可观测的空间如  $g$  是一个线性向量空间，相关 Koopman 算符  $\mathcal{K}$  作用在这个线性空间上：

$$\mathcal{K}g(\mathbf{x}) = g'(\mathbf{x}). \quad (3-1)$$

其中， $g'(\mathbf{x}) = g(\mathbf{T}(\mathbf{x}))$ ，表示函数形式的演化。而在数值上，Koopman 算符  $\mathcal{K}$  作用于观测函数  $g(\mathbf{x})$  的值等于观测函数在下一状态  $\mathbf{T}(\mathbf{x})$  上的值  $g(\mathbf{T}(\mathbf{x}))$ ，即

$$\mathcal{K}g(\mathbf{x}) = g(\mathbf{T}(\mathbf{x})). \quad (3-2)$$

其中，Koopman 算符  $\mathcal{K}$  是线性的，满足：

$$\mathcal{K}(c_1g_1(\mathbf{x}) + c_2g_2(\mathbf{x})) = c_1g_1(\mathbf{T}(\mathbf{x})) + c_2g_2(\mathbf{T}(\mathbf{x})) = c_1\mathcal{K}g_1(\mathbf{x}) + c_2\mathcal{K}g_2(\mathbf{x}). \quad (3-3)$$

接着，我们考虑在相空间  $\mathbb{M}$  上的一个连续时间的动力学系统。动力学方程见2.1.1节中的式 (2-1)，其中，方程的解表示为  $S^t(\mathbf{x}_0)$ （初值为  $\mathbf{x}_0$ ）。同样，选取观测

函数：

$$g(t, \mathbf{x}_0) = g(S^t(\mathbf{x}_0)). \quad (3-4)$$

我们可以定义一个关于时间  $t$  的线性算子族  $\mathcal{K}^t$  ( $t \in [0, \infty)$ )，作用在这个观测空间上：

$$\mathcal{K}^t g(\mathbf{x}_0) = g(S^t(\mathbf{x}_0)). \quad (3-5)$$

对于确定的时间  $t$ ，线性算子族  $\mathcal{K}^t$  将观测函数  $g(\mathbf{x}_0)$  映射到  $g(t, \mathbf{x}_0)$ ，称该算符为连续时间系统的 koopman 算符。

### 3.2 谱分解

不失一般性，这里我们分析作用于离散动力系统的 Koopman 算符  $\mathcal{K}$ 。我们定义算符簇  $P_T^\omega$ ：

$$[P_T^\omega(g)](\mathbf{x}) = g_\omega^*(\mathbf{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} e^{I2\pi j\omega} g(T^j(\mathbf{x})). \quad (3-6)$$

其中， $\omega \in [-0.5, 0.5]$ 。 $g(T^j(\mathbf{x}))$  是系统  $T$  轨迹上观测量  $g$  的时间序列，该轨迹从时间 0 的  $\mathbf{x}$  点开始运动。所以，对于固定点  $\mathbf{x}$ ， $g_\omega^*(\mathbf{x})$  就是该时间序列的傅里叶变换，使用快速傅里叶变换可以很容易计算。类似时间平均，函数  $g_\omega^*(\mathbf{x})$  对于 Koopman 算符的谱分析至关重要：它们是对应于本征值  $e^{-I2\pi\omega}$  的本征函数。

$$\begin{aligned} \mathcal{K} g_\omega^*(\mathbf{x}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} e^{I2\pi j\omega} g(T^{j+1}(\mathbf{x})) \\ &= e^{-I2\pi\omega} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} e^{I2\pi(j+1)\omega} g(T^{j+1}(\mathbf{x})) = e^{-I2\pi\omega} g_\omega^*(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (3-7)$$

Koopman 算符  $\mathcal{K}$  的本征函数只能是  $g_\omega^*$  这种形式。实际上，一个非零的  $P_T^\omega$  是在 Koopman 算符  $\mathcal{K}$ （与本征值  $e^{-I2\pi\omega}$  相关）的本征空间上的正交投影算子。

当  $\omega = 0$  时，相空间  $\mathbb{M}$  上都能满足观测函数  $g$  的时间平均  $g^*$  为：

$$P_T = P_T^0 = g^*(\mathbf{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g(T^i(\mathbf{x})), \quad (3-8)$$

此时  $g^*$  是 Koopman 算符对应于本征值 1 的本征函数， $g^*$  在轨道上是常数，即

$$\mathcal{K} g^*(\mathbf{x}) = g^*(\mathbf{x}). \quad (3-9)$$

正因为  $\mathcal{K}$  是酉的，所以它的谱被限制在复平面的单位圆上。Koopman 算符  $\mathcal{K}$  的谱可以唯一地分解为正则部分和奇异部分<sup>[7]</sup>，如式 (3-10)：

$$\mathcal{K} = \mathcal{K}_s + \mathcal{K}_r. \quad (3-10)$$

其中  $\mathcal{K}_s$  是奇异部分，对应离散谱，与 Koopman 算符本征值有关：

$$\mathcal{K}_s = \sum_i \lambda_i P_{\lambda_i}. \quad (3-11)$$

其中  $\lambda_i$  是本征值， $P_{\lambda_i}$  是与本征值  $\lambda_i$  相关的本征空间投影算符。 $\mathcal{K}_s$  是奇异正则部分，对应连续谱。

$$\mathcal{K}_r = \int e^{i2\pi\theta} dE(\theta). \quad (3-12)$$

其中谱测度  $dE(\theta)$  是连续的。很明显，本征值 1 处的本征函数的水平集（时间平均值）将相空间划分为不变集。

### 3.3 本征值与本征函数

从上述定义和分析可以看出，Koopman 算符与系统动力学密切相关。事实上，所有的轨道信息都可以从一组完整的观测数据中提取出来。或者，线性算符的动力学特征也可以用其本征函数和本征值来表征，而且在系统有扰动的情況下，这些本征值可能更稳定，因此有利于数值演化。文献<sup>[1]</sup>中，Koopman 本人将 Koopman 算符的谱性质与连续性、可积性和遍历性联系起来。Mezić 等人对其展开深入研究，使用 Koopman 本征函数提取状态空间的不变集和遍历分块。<sup>[6,6,7,63-66]</sup> 接下来我们将探究本征值和本征函数的性质，以及它们与动力学的关系。

假设 Koopman 算符  $\mathcal{K}$  的本征值为  $\lambda_k$ ，其对应的本征函数为  $\varphi_k(\mathbf{x})$ ，则有：

$$\mathcal{K} \varphi_k(\mathbf{x}) = \varphi_k(\mathbf{T}(\mathbf{x})) = \lambda_k \varphi_k(\mathbf{x}) \quad k = 1, 2, \dots \quad (3-13)$$

那么  $\lambda_k$  的  $n$  次方  $\lambda_k^n$  ( $n \in \mathbb{Z}$  为整数) 也是 Koopman 算符  $\mathcal{K}$  的一组本征值，其对应的本征值为  $\varphi_k^n(\mathbf{x}) = (\varphi_k(\mathbf{x}))^n$ ：

$$\mathcal{K} \varphi_k^n(\mathbf{x}) = (\varphi_k(\mathbf{T}(\mathbf{x})))^n = (\lambda_k \varphi_k(\mathbf{x}))^n = \lambda_k^n \varphi_k^n(\mathbf{x}) \quad (3-14)$$

若有本征值  $\lambda_{k_1}$ ,  $\lambda_{k_2}$ ，其对应的本征函数分别为  $\varphi_{k_1}(\mathbf{x}), \varphi_{k_2}(\mathbf{x})$ ，则有本征值  $\lambda_{k_1} \lambda_{k_2}$  对应

本征函数  $\psi(\mathbf{x}) = \varphi_{k_1}(\mathbf{x})\varphi_{k_2}(\mathbf{x})$ :

$$\mathcal{K}\psi(\mathbf{x}) = \psi(\mathbf{T}(\mathbf{x})) = \varphi_{k_1}(\mathbf{T}(\mathbf{x}))\varphi_{k_2}(\mathbf{T}(\mathbf{x})) = \lambda_{k_1}\lambda_{k_2}\varphi_{k_1}(\mathbf{x})\varphi_{k_2}(\mathbf{x}). \quad (3-15)$$

因此, 对于 Koopman 算符, 本征函数的乘积是本征函数, 本征函数的幂方也是本征函数, 本征函数的多种组合可能会在某种意义上阻碍对主导演化的主本征函数的搜索。

如果渐近动力学是简单的吸引子 (如不动点, 周期轨道, 不变环面), Koopman 算符的谱将仅由特征值 (离散谱) 组成, 那么特征函数可以作为基, 观测函数  $g(\mathbf{x})$  可以在这组基上展开, 如下所示<sup>[4,6]</sup>:

$$g(\mathbf{x}) = \sum_i b_i \varphi_{k_i}(\mathbf{x}). \quad (3-16)$$

在遍历分量上, Koopman 算子是酉的, 因此它的谱集中在复平面上的一个单位圆上, 而其他特征值标志着相应模式的增长或衰减, 从而表示瞬态<sup>[7]</sup>。对于本征值  $\lambda_k = 1$ , 假设其对应的本征函数  $\varphi_k(\mathbf{x})$ , 则有

$$\varphi_k(\mathbf{x}_p) = \mathcal{K}\varphi_k(\mathbf{x}_{p-1}) = \varphi_k(\mathbf{x}_{p-1}) = \dots = \varphi_k(\mathbf{x}_0). \quad (3-17)$$

其中,  $p \in \mathbf{Z}$  为时间指标。说明沿着这条轨道, 本征值不随时间变化, 轨道上的所有点都是相同的值, 这就映射出动力系统的不变子集<sup>[63,64]</sup>。对于长混沌轨道, 子集应该是包含该轨道的遍历分量。当本征值为  $\lambda_k = e^{i\theta}$  ( $\theta$  为实数) 时, 设其对应于的本征函数  $\varphi_k(\mathbf{x})$ , 则有

$$\varphi_k(\mathbf{x}_p) = \mathcal{K}\varphi_k(\mathbf{x}_{p-1}) = e^{i\theta}\varphi_k(\mathbf{x}_{p-1}) = \dots = e^{ip\theta}\varphi_k(\mathbf{x}_0). \quad (3-18)$$

其中,  $p \in \mathbf{Z}$  为时间指标。此时本征函数描述某种类型的周期运动<sup>[7]</sup>。

### 3.4 动态模式分解

计算机使获取、处理和分析大量的动力学数据成为可能, 这种数据驱动的方法使新技术、新范式成为可能<sup>[67]</sup>。传统的系统逐点描述动力学系统主要集中在单个轨道上, 而算符理论将所有轨道描述为一个整体, 从而自然地提供了一种全局角度分析系统动力学。自 Mezić 和 Banaszuk 的工作以来<sup>[5,7]</sup>, Koopman 分析一直是最近数据驱动的复杂系统特性研究的重点。通过引入 Koopman 算符, 我们将非线性动力学转



化为无穷维线性动力学，带来了新的挑战。Koopman 算符的有限维线性逼近可能有助于在吸引子上建立动力学模型，而那些显式地推进状态的逼近也可能有助于控制。

流体力学界引入的动态模式分解为 Koopman 模式分解提供了一个实用的数值框架。动态模式分解已广泛应用于广泛的应用领域，包括流体动力学、神经科学、机器人学、流行病学和视频处理。在这些领域中，动态模式分解对于从数据中提取时空相干结构非常有用；这些结构通常被称为模式，以固定频率和/或增长或衰减速率振荡。通过将状态空间分解成这些时空相干模式，可以推断出高维观测数据背后的物理机制。动态模式分解的成功很大程度上依赖于线性代数，因为该过程易于实现，其结果具有很高的可解释性，并且该方法自然适用于扩展，例如压缩感知，消除驱动效应的歧义，多分辨率分析，去噪，以及流媒体变体。动态模式分解与 Koopman 算符的谱分析密切相关<sup>[68,69]</sup>。其中该算法的一个变体被用于计算横流中射流的 Koopman 模式。在文献<sup>[7]</sup>中，提出将谱分解用于基于实验数据和仿真数据的模式分解和模型简化。该算法在流体力学领域的初步成功，推动了利用 Koopman 算符理论对高维复杂系统进行数据驱动分析的研究。因此，近年来，人们提出了大量的动态模式分解型算法来计算 Koopman 谱特性。动态模式分解可以看作是 Koopman 谱分析的数值近似。下面，将介绍基于 Koopman 算子的动态模式分解的不同数值方法。

大部分情况，我们可以得到一组时间序列： $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_\tau, \mathbf{x}_{2\tau}, \dots, \mathbf{x}_{(n-2)\tau}, \mathbf{x}_{(n-1)\tau}$ ，它将被用来提取被研究系统的关键动力学模式或信息。一般来说，时间步长  $\tau$  应该是适当的：如果取较小的时间步长，计算难度会大大增加，而如果时间步长太大，则会错过短期动力学。它应该是我们感兴趣的最小时间尺度的一小部分。接下来选择一组观测值  $g_i(\mathbf{x}), i = 1, 2, \dots, m$  来近似观测函数，可构造数据矩阵：

$$X = (g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x})) = \begin{pmatrix} g_1(\mathbf{x}_0) & g_2(\mathbf{x}_0) & \dots & g_m(\mathbf{x}_0) \\ g_1(\mathbf{x}_\tau) & g_2(\mathbf{x}_\tau) & \dots & g_m(\mathbf{x}_\tau) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(\mathbf{x}_{(n-1)\tau}) & g_2(\mathbf{x}_{(n-1)\tau}) & \dots & g_m(\mathbf{x}_{(n-1)\tau}) \end{pmatrix}, \quad (3-19)$$

$$Y = (g'_1(\mathbf{x}), g'_2(\mathbf{x}), \dots, g'_m(\mathbf{x})) = \begin{pmatrix} g_1(\mathbf{x}_\tau) & g_2(\mathbf{x}_\tau) & \dots & g_m(\mathbf{x}_\tau) \\ g_1(\mathbf{x}_{2\tau}) & g_2(\mathbf{x}_{2\tau}) & \dots & g_m(\mathbf{x}_{2\tau}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(\mathbf{x}_{n\tau}) & g_2(\mathbf{x}_{n\tau}) & \dots & g_m(\mathbf{x}_{n\tau}) \end{pmatrix}. \quad (3-20)$$

矩阵  $X, Y$  的每一列是观测量的  $n$  点近似。代表点的数目  $n$  应足够大，以提供良好的

空间分辨率。Koopman 算符在这个有限维函数空间中的投影  $\mathcal{K}^\tau$  可通过下式矩阵的逆（或伪逆）得到，

$$\mathcal{K}^\tau X = Y, \text{ or } \mathcal{K}^\tau = YX^T(XX^T)^{-1}. \quad (3-21)$$

基函数的选择也很重要，这取决于待研究的特征。我们需要足够的基函数来描述这些特征并得出可靠的结论<sup>[68,70,71]</sup>。对于好的基函数， $m$  可以很小，我们可以大大减轻计算负担，特别是对于高维系统。但基函数的维数和形式的选择是一个难题。

常用的基函数包括高斯基、傅立叶基、多项式基等，这些基函数在某些场合可能很好，但在其他场合可能不好。幸运的是，可以基于 Hankel 矩阵从数值上提取自然基。Hankel 矩阵的形成可以直接使用测量值的延迟嵌入，即  $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ 。延迟嵌入是非线性系统吸引子的一种几何重构方法，在现代时间序列分析理论中有着极其重要的应用<sup>[72?]</sup>。文献<sup>[4]</sup>中证明了在有限的观测量的 Hankel 数据矩阵上应用动态模式分解可以得到 Koopman 算符的本征函数和本征值。通过将延迟嵌入与动态模式分解相结合，我们能够从部分数据中提取出关于不可访问状态空间的有趣的动力学信息。更明确地说，我们将 Hankel 矩阵写成如下形式：

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 & \mathbf{x}_\tau & \cdots & \mathbf{x}_{m\tau} \\ \mathbf{x}_\tau & \mathbf{x}_{2\tau} & \cdots & \mathbf{x}_{(m+1)\tau} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{x}_{(n-1)\tau} & \mathbf{x}_{n\tau} & \cdots & \mathbf{x}_{(n+m-1)\tau} \end{pmatrix}. \quad (3-22)$$

其中每一列都可以被视为基于相空间中典型轨迹上的  $n$  点的可观测数据。众所周知，如果系统是混沌的，在相空间中定义的非平凡光滑函数很快就会变得相当粗糙。因此，在这种表示中无法捕捉到高波数波动，我们所能期望的最好结果是能够用  $n$  点来描述函数特征（或特征的平均值）。接下来我们介绍基于 Hankel 矩阵的动态模式分解算法。

由于 Hankel 矩阵的列向量通常都不是正交的，所以最好先对 Hankel 矩阵进行奇异值分解，用正交基提取重要方向<sup>[73]</sup>。因此，大型结构包含在前  $r$  列中。我们在下

面的分析中遵循这个过程，将 Hankel 矩阵写成

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T \\ &= \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_m \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - & \mathbf{v}_1^T & - \\ - & \mathbf{v}_2^T & - \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ - & \mathbf{v}_n^T & - \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3-23)$$

通常情况下，正奇异值按降序排列，反映  $\mathbf{U}$  和  $\mathbf{V}$  对应列的相对重要性。 $\mathbf{U}$  的列可以看作是一个新的正交基，而  $\mathbf{V}^T$  列是这个新基中可观测值的坐标除以相应的奇异值。换言之，原始 Hankel 矩阵在新基中变成  $\Sigma\mathbf{V}^T$ 。截断阶  $r$  的选择取决于奇异值的相对大小以及所研究的特征。为了可靠性，这里我们保留满足  $\sigma \geq 10^{-7}$  条件的所有模式，因此

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{H}} &= \hat{\mathbf{U}}\hat{\Sigma}\hat{\mathbf{V}}^T \\ &= \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_r \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - & \mathbf{v}_1^T & - \\ - & \mathbf{v}_2^T & - \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ - & \mathbf{v}_r^T & - \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3-24)$$

我们可以对  $\hat{\mathbf{V}}$  执行类似于式3-21中的 Koopman 分析。使用矩阵乘法，可以得到本征函数在原函数空间中的表示。由于忽略了非必要部分，大大降低了计算复杂度。结果表明，该方法计算效率高，稳定性好。奇异值分解本质上是一种线性变换，广泛应用于数值分析中的降维或噪声滤波。在当前背景下，Koopman 分析将通过在分析中嵌入时间演化来进一步降低维数，同时通过仅保留主导特征函数来保持鲁棒性。



## 第四章 最近邻 Kuramoto 模型的应用

### 4.1 最近邻 Kuramoto 模型

最近邻 Kuramoto 模型被大量研究讨论<sup>[74,75]</sup>，这是一个极具代表性的简单 Kuramoto 模型，所以本节我们将先对其展开研究讨论。最近邻耦合 kuramoto 模型方程如下：

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + K(\sin(\theta_{i+1} - \theta_i) + \sin(\theta_{i-1} - \theta_i)), \quad i = 1, \dots, N \quad (4-1)$$

其中， $\theta_i$  是振子  $i$  的相位。 $\omega_i$  是振子  $i$  的自然频率。 $K$  是振子间的耦合强度（也可称为耦合系数）。这里，我们添加边界条件： $\theta_0 = \theta_N$ ， $\theta_{N+k} = \theta_k$ 。从上式可以看出，只有相邻振子间会有直接干扰项。

因正弦函数的讨论较复杂，为了便于分析计算，我们对公式 (4-1) 进行一定变换。令  $z_i = e^{I\theta_i}$  ( $I = \sqrt{-1}$  是虚数单位)，将相位信息用成指数形式表示，以消掉正弦项。变换后结果如下所示

$$\dot{z}_i = I\omega_i z_i + \frac{K}{2}(z_{i+1} - z_i^2 \bar{z}_{i+1} + z_{i-1} - z_i^2 \bar{z}_{i-1}), \quad i = 1, \dots, N \quad (4-2)$$

其中，符号 “ $-$ ” 表示共轭， $z_0 = z_N$ ， $z_{N+k} = z_k$ 。

接下来，在不丧失一般性的前提下，我们将对最近邻 Kuramoto 模型进行 Koopman 分析。在弱耦合极限下，设计了一种基于重整化群分析的微扰方法来计算本征频率和本征函数。即使是最低阶近似也能很好地与数值计算相吻合。如果耦合变强，解析方法就变得过于繁琐，只能进行纯数值计算。

### 4.2 重整化群分析

#### 4.2.1 推导

摄动重整化群方法的出发点都是消除摄动级数的发散，我们将非线性方程组分为线性部分和非线性部分，利用非线性来消除共振项，并在求解重整化群方程时通过限制  $t \rightarrow t_0$  进一步消除发散共振项。接下来，基于第2.4节，我们对最近邻 kuramoto 模型的微分方程进行具体推导。

对于耦合振子来说，暂态后对外展现的频率是最终的平均频率，而不是初始的自然频率，我们在公式 (4.1) 中引入重整化频率  $\tilde{\omega}_i$ ，得到如下结果

$$\dot{z}_i = I\tilde{\omega}_i z_i + \frac{\varepsilon K}{2}(z_{i+1} - z_i^2 \bar{z}_{i+1} + z_{i-1} - z_i^2 \bar{z}_{i-1}) - I\varepsilon^2(\Delta\omega_i)z_i. \quad (4-3)$$

其中， $\Delta\omega_i = \tilde{\omega}_i - \omega_i$ 。引入重整化频率  $\tilde{\omega}_i$  的过程中，为保持方程不变，产生了  $\omega_i - \tilde{\omega}_i$  这一项，我们定义  $\Delta\omega_i$  为频率修正量。通过频率修正项，可以消除微分方程中产生的共振项。注意到上式，我们还引入极小量  $\varepsilon$ ，这是为了方便下面对  $z_i$  微扰展开。振子间耦合作用在一阶项中才会出现，而共振项在二阶才开始出现。所以在不同项前乘以对应阶数的极小量  $\varepsilon$ 。

接下来，对  $z_i$  和频率修正  $\Delta\omega_i$  进行极小量  $\varepsilon$  的微扰展开：

$$\begin{aligned} z_i &= z_{i0} + \varepsilon z_{i1} + \varepsilon^2 z_{i2} + \cdots \\ \Delta\omega_i &= \Delta\omega_{i0} + \varepsilon \Delta\omega_{i1} + \varepsilon^2 \Delta\omega_{i2} + \cdots \end{aligned} \quad (4-4)$$

其中， $z_{ik}$  和  $\Delta\omega_{ik}$  第一个下标  $i$  表示振子序号，第二个下标  $k$  表示阶数。将微扰展开式代入方程中，比较极小量的系数，得到一组微分方程。

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(0)}: \dot{z}_{i0} &= i\tilde{\omega}_i z_{i0} \\ \varepsilon^{(1)}: \dot{z}_{i1} &= i\tilde{\omega}_i z_{i1} + \frac{K}{2}(z_{(i+1)0} - z_{i0}^2 \bar{z}_{(i+1)0} + z_{(i-1)0} - z_{i0}^2 \bar{z}_{(i-1)0}) \\ \varepsilon^{(2)}: \dot{z}_{i2} &= i\tilde{\omega}_i z_{i2} + \frac{K}{2}(z_{(i+1)1} - z_{i0}^2 \bar{z}_{(i+1)1} - 2z_{i0}z_{i1}\bar{z}_{(i+1)0} + z_{(i-1)1} \\ &\quad - z_{i0}^2 \bar{z}_{(i-1)1} - 2z_{i0}z_{i1}\bar{z}_{(i-1)0}) - i\Delta\omega_{i0}z_{i0} \\ &\quad \dots \end{aligned} \quad (4-5)$$

第一行的微扰展开，是根据零阶极小量  $\varepsilon$  的系数得到的，可见它是一个简单的线性微分方程；第二行和第三行分别是根据一阶、二阶极小量  $\varepsilon$  的系数得到的，非线性部分是由  $z_i$  泰勒展开的低阶项给出，我们便可以依次求出  $z_{i0}$ ,  $z_{i1}$ ,  $\dots$ ，得到指定阶数的近似解析解。

根据极小量微扰展开的零阶，求解结果为

$$z_{i0} = A_i e^{i\tilde{\omega}_i(t-t_0)}. \quad (4-6)$$

式中我们引入  $A_i$  表示  $z_{i0}$  在初始时刻  $t_0$  的值，即  $z_i$  初始值关于极小量  $\varepsilon$  零阶展开值。实际上  $A_i$  关于初始时刻  $t_0$  的轨迹就是原系统的轨迹。基于解 (4-6)，进一步求解极小

量泰勒展开的一阶。微扰展开一阶系数求解结果：

$$z_{i1} = \frac{K}{2} \frac{I}{\tilde{\omega}_i - \tilde{\omega}_{i-1}} (A_{i-1} e^{I\tilde{\omega}_{i-1}(t-t_0)} + \bar{A}_{i-1} A_i^2 e^{I(2\tilde{\omega}_i - \tilde{\omega}_{i-1})(t-t_0)}) + \frac{K}{2} \frac{I}{\tilde{\omega}_i - \tilde{\omega}_{i+1}} (A_{i+1} e^{I\tilde{\omega}_{i+1}(t-t_0)} + \bar{A}_{i+1} A_i^2 e^{I(2\tilde{\omega}_i - \tilde{\omega}_{i+1})(t-t_0)}). \quad (4-7)$$

根据低阶求解结果 (4-6) (4-7)，我们可以继续求解二阶系数。此时解不仅有类似  $e^{I\tilde{\omega}(t-t_0)}$  形式的指数项，还会出现  $t - t_0$  的幂方项，即共振项。其中为了消除共振项，我们令

$$\Delta\omega_{i0} = \frac{K^2}{4(\tilde{\omega}_{i-1} - \tilde{\omega}_i)(\tilde{\omega}_{i+1} - \tilde{\omega}_i)} [(1 + |A_i|^2 + 2|A_{i+1}|^2)\tilde{\omega}_{i-1} - 2(1 + |A_{i+1}|^2 + |A_i|^2 + |A_{i-1}|^2)\tilde{\omega}_i + (1 + |A_i|^2 + 2|A_{i-1}|^2)\tilde{\omega}_{i+1}]. \quad (4-8)$$

按照相同步骤通过低阶的求解结果可以求出更高阶的结果，因篇幅有限，就不一一列出。最终  $z_i$  的近似解析解如下：

$$\begin{aligned} \dot{z}_i = & A_i e^{I\tilde{\omega}_i(t-t_0)} + \frac{\varepsilon K}{2} \left[ \frac{I}{\tilde{\omega}_i - \tilde{\omega}_{i-1}} (A_{i-1} e^{I\tilde{\omega}_{i-1}(t-t_0)} + \bar{A}_{i-1} A_i^2 e^{I(2\tilde{\omega}_i - \tilde{\omega}_{i-1})(t-t_0)}) \right. \\ & \left. + \frac{I}{\tilde{\omega}_i - \tilde{\omega}_{i+1}} (A_{i+1} e^{I\tilde{\omega}_{i+1}(t-t_0)} + \bar{A}_{i+1} A_i^2 e^{I(2\tilde{\omega}_i - \tilde{\omega}_{i+1})(t-t_0)}) \right] + \dots \end{aligned} \quad (4-9)$$

其中， $\dot{z}_i = \dot{z}_i[t; t_0, \mathbf{A}(t_0)] \approx z_i$ 。 $\dot{z}_i$  是关于参数初始时刻  $t_0$  和初始向量  $\mathbf{A}(t_0)$  的函数。当极小量  $\varepsilon$  展开到 1 阶，我们将得到一阶解析解。同理可得二阶，三阶……解析解。 $z_i$  关于极小量  $\varepsilon$  的展开阶数越高，可以得到更加精确的近似解析解。

我们关注某个子流形上的动力学，如在原点的一个无穷小领域内，沿着  $z_i$  的特征方向，则初始向量为  $\mathbf{A} = (0, \dots, A_i, \dots, 0)$ ，只保留  $A_i$  方向，即关注振子  $i$  的周期轨道。根据如下重整化方程

$$\left. \frac{d\dot{z}_i[t; t_0, A_i(t_0)]}{dt_0} \right|_{t=t_0} = 0. \quad (4-10)$$

便可以求解  $dA_i(t_0)/dt_0$  的 RG 方程， $A_i(t_0)$  的阶数取决于  $\dot{z}_i[t; t_0, A_i(t_0)]$  的阶数。只要  $t$  无限趋向  $t_0$ ，便可去掉发散共振项，得到  $t_0$  附近的近似解。 $A_i(t_0)$  的演化方程如下：

$$\dot{A}_i = i\tilde{\omega}_i A_i \quad (4-11)$$

上式结合第 3.1 节，得到 Koopman 算符  $\mathcal{K}^\tau$  的本征值为  $e^{i\tilde{\omega}_i\tau}$ ，对应本征函数为  $A_i$ 。此处，我们不但求解近似解析解，还得到 koopman 算符的本征值和本征函数，具有一定物理意义：耦合振子的平均频率对应于本征值，初值对应本征函数。



基于式4-9，我们可以得到 koopman 算符的本征函数  $A_i$  在  $z_i$  上的多项式展开。

$$A_i = \frac{Ke^{-I\tilde{\omega}_i(t-t_0)}\epsilon}{2I\Delta\tilde{\omega}_i}z_{i-1} + \left(1 - \frac{K^2\epsilon^2}{2(\Delta\tilde{\omega}_i)^2} - \frac{K^2\epsilon^2}{2(\Delta\tilde{\omega}_{i+1})^2}\right)e^{-I\tilde{\omega}_i(t-t_0)}z_i + \frac{Ke^{-I\tilde{\omega}_i(t-t_0)}\epsilon}{2I(-\Delta\tilde{\omega}_{i+1})}z_{i+1} \\ + \frac{Ke^{-I\tilde{\omega}_i(t-t_0)}\epsilon}{2I\Delta\tilde{\omega}_i}\bar{z}_{i-1}z_i^2 + \frac{Ke^{-I\tilde{\omega}_i(t-t_0)}\epsilon}{2I\Delta(-\tilde{\omega}_{i+1})}z_i^2\bar{z}_{i+1} + \frac{K^2e^{-I\tilde{\omega}_i(t-t_0)}\epsilon^2}{8(\Delta\tilde{\omega}_i)^2}z_{i-1}^2\bar{z}_i + \frac{K^2e^{-I\tilde{\omega}_i(t-t_0)}\epsilon^2}{8(-\Delta\tilde{\omega}_{i+1})^2}\bar{z}_iz_{i+1}^2. \quad (4-12)$$

其中， $\Delta\tilde{\omega}_i = \tilde{\omega}_i - \tilde{\omega}_{i-1}$ 。因为  $z_i$  是二阶近似，所以  $A_i$  的结果也是二阶近似。

#### 4.2.2 频率修正项

耦合系统中，振子经历了从初始的自然频率到最终平均频率的消除暂态的过程，这一过程中对其频率进行不断修正，直至达到稳态。上节引入的频率修正项  $\Delta\omega$ （不失一般性，去掉下标  $j$ ）代表了初态到稳态整个过程的频率修正。假设初始频率为  $\omega$  的振子，历经了  $t_0$  时刻到  $t_1$  时刻的频率修正  $\Delta\omega^{(t_0t_1)}$ ， $t_1$  时刻到  $t_2$  时刻的频率修正  $\Delta\omega^{(t_1t_2)}$ ， $\dots$ ，在  $t_n$  时刻才达到稳态的重整化频率  $\tilde{\omega}$ ，那么有  $\Delta\omega = \Delta\omega^{(t_0t_1)} + \Delta\omega^{(t_1t_2)} + \dots + \Delta\omega^{(t_{n-1}t_n)}$ ，此后  $\Delta\omega^{(t_jt_{j+1})} = 0$  ( $j \geq n$ )。

我们考虑在单位圆上的振子，令  $|A_j| = 1$ ，则频率修正项泰勒展开零阶简化为

$$\Delta w_{j0} = \frac{K^2}{\tilde{\omega}_{j-1} - \omega_j} + \frac{K^2}{\tilde{\omega}_{j+1} - \omega_j} \quad (4-13)$$

观察这个式子，首先它分为两项，第一项反应了第  $j-1$  个振子对其频率的二阶修正，第二项则是第  $j+1$  个振子对其产生的影响，正好对应于“最邻近耦合”。再观察这个二阶修正项的每一项可以发现，它正比于耦合强度的二次方，反比于邻近振子平均频率与该振子的自然频率的差值。前者正好反应了“二阶修正”；而后者可以类比“拍现象”，若频率相近，则邻近振子对其耦合更强，反之，则邻近振子对其影响较弱。

当然，我们还可以求解更高阶修正  $\Delta w_{j1} = 0, \dots$ ，这里不一一展现。接下来，我们对其进行具体的数值分析。

#### 4.2.3 频率修正项的应用

首先考虑两个振子的情况，其 Kuramoto 模型简化为

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \omega_1 + K\sin(\theta_2 - \theta_1), \\ \dot{\theta}_2 &= \omega_2 + K\sin(\theta_2 - \theta_1). \end{aligned} \quad (4-14)$$



微扰分析中我们使用频率修正项一阶一阶的消除共振项，得到：

$$\begin{aligned}\Delta\omega_{10} &= \frac{K^2}{\tilde{\omega}_2 - \omega_1}, \quad \Delta\omega_{11} = 0, \\ \Delta\omega_{20} &= \frac{K^2}{\tilde{\omega}_1 - \omega_2}, \quad \Delta\omega_{21} = 0.\end{aligned}\tag{4-15}$$

根据上面求解得到的结果（此处以及下文我们仅讨论至二阶，不做赘述），我们得到频率修正项的近似：

$$\begin{aligned}\Delta\omega_1 &= \tilde{\omega}_1 - \omega_1 = \frac{K^2}{\tilde{\omega}_2 - \omega_1}, \\ \Delta\omega_2 &= \tilde{\omega}_2 - \omega_2 = \frac{K^2}{\tilde{\omega}_1 - \omega_2}.\end{aligned}\tag{4-16}$$

其中  $\tilde{\omega}_1$  和  $\tilde{\omega}_2$  是未知量，是我们关心的平均频率。所以当振子初始频率  $\omega_1, \omega_2$  和耦合强度  $K$  已知时，式 (4-16) 是一个二元方程组。联立方程组，可得到下式方程：

$$(\Delta\omega_2)^2 - (\omega_2 - \omega_1)(\Delta\omega_2) + K^2 = 0.\tag{4-17}$$

我们便可以根据这个一元二次方程求解频率修正项  $\Delta\omega_1$  和  $\Delta\omega_2$ ，从而可以得到振子稳态的平均频率  $\tilde{\omega}_1$  和  $\tilde{\omega}_2$ 。

在图4-1中，我们画出了初始频率为  $-0.7, 0.9$  的  $N=2$  个振子的分岔树。其中，蓝色曲线是数值解。红色点是通过频率修正项求出的重整化群解。从图中我们可以发现，重整化群方法求解的重整化频率与数值解求解的结果完全吻合，这是因为此时通过修正项求解的便是精确解。结合图4-1我们再分析一下式 (4-17)，因为它是个一元二次方程，所以通过  $\Delta = (\omega_2 - \omega_1)^2 - 4K^2$  的大小，我们可以判别该方程根的个数：当  $\Delta > 0$  时，该方程有两个不相等的实根，对应于振子未达到同步，两个振子以不同的平均频率转动，此时耦合强度满足  $0 < K < \frac{|\omega_2 - \omega_1|}{2}$ ；当  $\Delta = 0$  时，该方程有两个相等实根，对应于振子正好达到同步状态，得到临界耦合强度  $K_c = \frac{|\omega_2 - \omega_1|}{2} = 0.8$ ；当耦合强度大于临界耦合强度  $K_c$  时，两个振子以共同的平均频率  $\omega_0 = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} = 0.1$  同步转动。

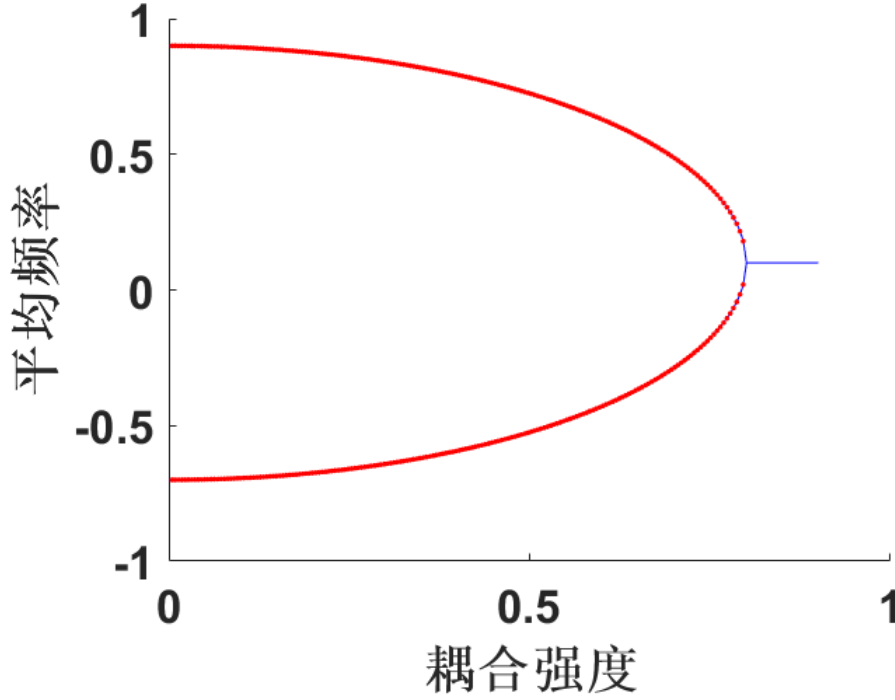


图 4-1  $N=2$  个振子的分岔树：蓝色曲线是数值解，红色点是二阶重整化群频率。

接下来我们考虑三个振子的情况。频率修正项方程组如下所示：

$$\begin{aligned}\Delta\omega_1 &= \tilde{\omega}_1 - \omega_1 = \frac{K^2}{\tilde{\omega}_2 - \omega_1}, \\ \Delta\omega_2 &= \tilde{\omega}_2 - \omega_2 = \frac{K^2}{\tilde{\omega}_1 - \omega_2} + \frac{K^2}{\tilde{\omega}_3 - \omega_2}, \\ \Delta\omega_3 &= \tilde{\omega}_3 - \omega_3 = \frac{K^2}{\tilde{\omega}_2 - \omega_3}.\end{aligned}\tag{4-18}$$

因为边界条件，振子 1 受到振子 2 的影响，振子 2 受到振子 1 和 3 的影响，而振子 3 受到振子 2 的耦合。联立方程组 (4-18)，可以得到一个一元三次方程。

$$(\Delta\omega_2)^3 + (B_1 + B_2)(\Delta\omega_2)^2 + (B_1B_2 - \frac{K^4}{B_1B_2} + 2K^2)(\Delta\omega_2) + (K^2 + \frac{K^4}{B_1B_2})(B_1 + B_2) = 0\tag{4-19}$$

其中  $B_1 = \omega_2 - \omega_1$ ， $B_2 = \omega_2 - \omega_3$ 。我们便可以根据这个一元三次方程求解频率修正项，从而可以得到振子稳态的平均频率。

我们画出了初始频率为  $-0.6, 0, 0.8$  的  $N=3$  个振子的分岔树绘制在图4-2中。和前面相同，蓝色曲线是精确数值解的，红色点是通过二阶修正项求出的重整化群解。通过观测，我们可以发现对于较小的耦合强度  $K$ ，重整化群方法求解的重整化

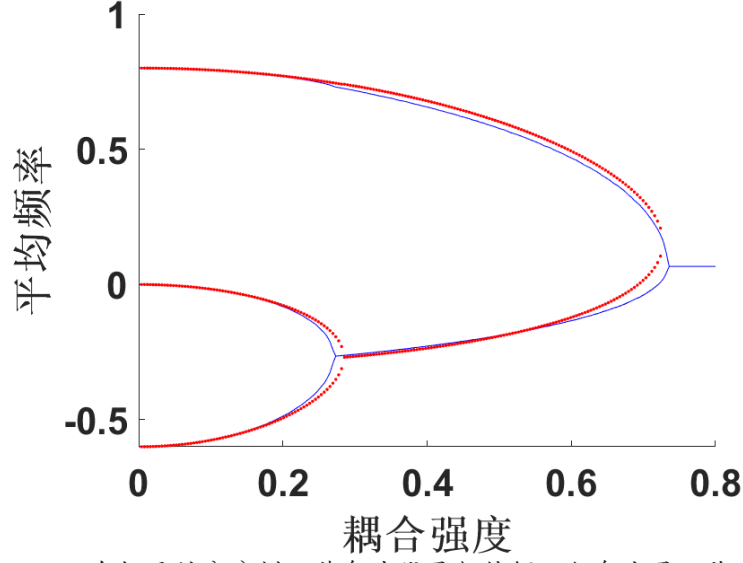


图 4-2  $N=3$  个振子的分岔树：蓝色曲线是数值解，红色点是二阶重整化频率。

频率与数值解误差较小，准确性较高，临近相变处，误差相对较大。但是总体上看，重整化频率与数值解吻合较好。

当振子数量再增加时，直接计算方程是复杂不现实的。这时，我们对一种特殊情况进行讨论： $N=100$  个按照  $R_{max}$  配置的振子群，其自然频率服从区间  $[-1, 1]$  内的线性分布。从图 2-3b 中，我们可以观察到，耦合强度较小时，分岔树趋于椭圆形状。我们可以假设此时振子满足以下等式：

$$\frac{\tilde{\omega}_i^2}{\omega_i^2} + \frac{K^2}{K_{ci}^2} = 1 \quad (4-20)$$

该情况下，在发生爆发性同步前，同步节点比例  $P_s = \frac{N_s}{N}$  与局部临界耦合强度  $K_{cs}$  线性相关<sup>[29]</sup>。我们可以用重整化群方法求得的零阶修正项  $\Delta\omega_{i0}$  来近似实际频率修正项  $\Delta\tilde{\omega}_i - \omega_i$ ：

$$\frac{K^2}{\tilde{\omega}_{i+1} - \omega_i} + \frac{K^2}{\tilde{\omega}_{i-1} - \omega_i} = \tilde{\omega}_i - \omega_i \quad (4-21)$$

为了表示方便，我们忽略掉表示阶数的下标，用  $\Delta\omega_i$  表示  $\Delta\omega_{i0}$ 。此时振子因为空间配置，初始频率分布如下所示：

$$\omega_i = (-1)^{i+1} \left[ -1 + (i-1) \frac{2}{N} \right] \quad (4-22)$$

其中， $i = 1, 2, \dots, N$ 。

接下来我们证明，当  $|\omega_i|$  线性分布时， $K_{ci}$  线性分布的合理性。根据式 (4-20)，我

们对  $\tilde{\omega}_i$  进行泰勒展开:

$$\tilde{\omega}_i = \omega_i \sqrt{1 - \frac{K^2}{K_{ci}^2}} = \omega_i \left(1 - \frac{1}{2} \frac{K^2}{K_{ci}^2} + O\left(\left(\frac{K^2}{K_{ci}^2}\right)^2\right)\right). \quad (4-23)$$

根据式 (4-22) 和式 (4-23), 我们可以得到

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_i - \omega_i &= -\frac{\omega_i K^2}{2K_{ci}^2}, \\ \tilde{\omega}_{i-1} - \omega_i &= -\frac{\omega_{i-1} K^2}{2K_{c(i-1)}^2} - 2\omega_i - D_i, \\ \tilde{\omega}_{i+1} - \omega_i &= -\frac{\omega_{i+1} K^2}{2K_{c(i+1)}^2} - 2\omega_i + D_i, \\ \omega_{i+1} - \omega_{i-1} &= 2D_i. \end{aligned} \quad (4-24)$$

其中,  $D_i = (-1)^i \frac{2}{N}$ 。当振子数  $N \rightarrow \infty$  时, 有下式成立:

$$\begin{aligned} D_i &\rightarrow 0, \\ K_{c(i-1)} &\rightarrow K_{ci}, \\ K_{c(i+1)} &\rightarrow K_{ci}, \\ \omega_{i-1} &\rightarrow -\omega_i, \\ \omega_{i+1} &\rightarrow -\omega_i. \end{aligned} \quad (4-25)$$

联立式 (4-21)(4-24)(4-25), 可以推导出:  $\omega_i^2 \approx 2K_{ci}^2$ , 所以我们证明了当自然频率服从式 (4-22) 分布时, 临界耦合强度 ( $K_{ci}$ ) 与振子序号线性相关, 即与同步比例  $P_s$  线性相关:  $P_s \approx 1.4K_{ci}$ 。

### 4.3 Koopman 算符

上述重整化群分析方法仅适用于最低阶, 弱耦合收敛性好的情况。为了研究更一般的情况, 必须采用数值计算。在这一部分中, 我们将分析耦合系统的频率结构, 然后根据 Koopman 算子的特征值和特征函数提取主频并定位相变点。以  $N = 6$  个振子为例, 随机选取自然频率为: -1、-0.7、-0.4、0、0.2、0.6, 如图4-3所示。

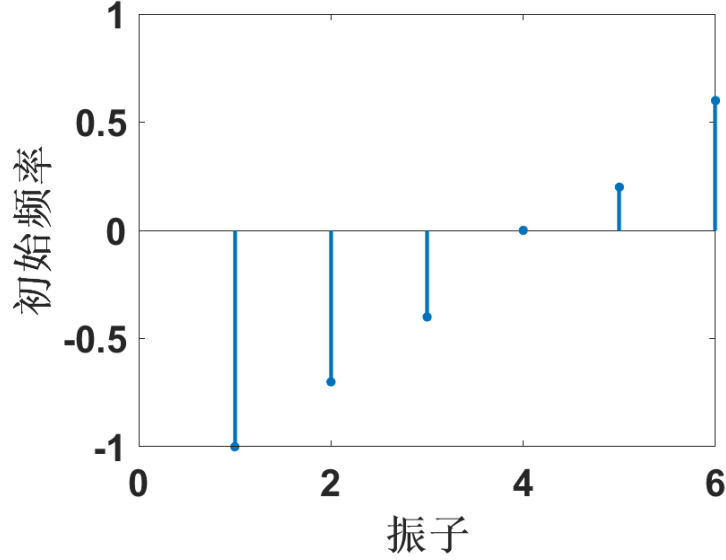


图 4-3 N=6 个振子自然频率分布

我们用观测量  $\mathbf{Z}^t$ （上标  $t$  是时间指标）来构造 Hankel 矩阵：

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}^0 & \mathbf{Z}^\tau & \dots & \mathbf{Z}^{m\tau} \\ \mathbf{Z}^\tau & \mathbf{Z}^{2\tau} & \dots & \mathbf{Z}^{(m+1)\tau} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Z}^{(n-1)\tau} & \mathbf{Z}^{n\tau} & \dots & \mathbf{Z}^{(n+m-1)\tau} \end{pmatrix}, \quad (4-26)$$

这里的观测量  $\mathbf{Z}^t$  是由状态变量  $z_i^t = z_i(t)$  构成的行向量或列向量。基于 3.4 节中的算法步骤，我们选择步长  $\tau = 0.01$ ，矩阵维度  $n = 2000$ ， $m = 5000$ ，来求解 Koopman 算符在数据计算中有限维近似，进而计算出本征值和本征函数。

首先我们先来分析一下观测量取单个振子状态的情况，即  $\mathbf{Z}^t = (z_1^t)$ 。图 4-4 绘制了观测量  $\mathbf{Z}^t = (z_1^t)$  时，不同耦合强度  $K$  下，观测函数

$$(\mathbf{Z}^0, \mathbf{Z}^\tau, \dots, \mathbf{Z}^{(n-1)\tau})^T = (z_1^0, z_1^\tau, \dots, z_1^{(n-1)\tau})^T \quad (4-27)$$

在 koopman 算符本征函数上的展开系数。其横坐标为本征值（模长为 1）的频率，纵坐标是观测函数在本征函数的展开系数，类似于频谱图，是离散非对称的。为了便于绘制和观测，我们将横坐标限制在区间  $[-3, 3]$  内，因为主要频率集中在这个区间内。横坐标表示的频率对应于系统中振子平均频率，以及它们的线性组合，与 3.3 节中本征值，本征函数性质吻合。显然，最重要的特征值与振子 1 的平均频率有关。我们选择几种具有代表性的耦合系数来观察展开系数，即频谱的变化，包括  $K = 0$  的无耦合， $K = 0.61$  的小耦合， $K = 1.21$  的较大耦合， $K = 1.43$  的邻近同步， $K = 1.45$  的临

表 4-1  $N = 6$  个振子重整化群解和 koopman 解比较:  $K = 0.08$ 

	$z_1$	$z_2$	$z_1^2 z_2$	$\bar{z}_1 z_2^2$
重整化群解	1.00000	0.14588	0.14588	0.01064
koopman 解	43.98444	5.84375	5.79867	0.42083
重整化群解 / koopman 解	0.02274	0.02496	0.02516	0.02529

界同步,  $K = 1.47$  的同步后。当振子间无耦合关系, 即  $K = 0$  时, 见图4-4a, 此时振子频率组成只有一种, 为  $\tilde{\omega} = -1$ , 即振子 1 的自然频率。因为此时振子之间无耦合, 振子 1 不受其他振子的干扰; 从图4-4b到图4-4d的变化, 我们可以观测到, 随着耦合强度增大趋于同步的过程中, 频率组成越来越复杂, 且非线性组成的频率占比会增加, 当然中间存在一些局部同步, 从图中不能明显观察到; 当达到临界耦合强度时, 振子同步, 发生相变, 主频为同步频率, 从图4-4e中可以看出, 此时频谱图能量集中在一个频率上; 比较图4-4e临界同步、图4-4f同步后、无耦合情况, 频谱图类似, 说明同步后系统在一定程度上可以将系统当作“一个”群处理, 它们以一个公共频率转动。图4-4e和图4-4f因为计算误差仍然残留一些其他频率成分, 但是能量极其微小, 可以忽略不计。综上所述, 本征函数描述了不同频率的模态, 观测函数的展开系数给出了一种“谱”, 反应了对应振子的频谱组成。根据谱随耦合强度的变化, 我们能发现全局同步点,  $K = 1.45$ , 误差在 0.04 内。

表4-2中, 我们比较了 Koopman 方法与重整化群方法在  $K = 0.08$  时分析结果 (二阶近似)。系数比值约为 0.025, 说明这两个函数是成比例的, 在小耦合情况下, 这两个函数很好地匹配。

接下来我们将讨论状态量  $\mathbf{Z}^t$  不同取法的区别。图4-4、图4-5、图4-6和图4-7是取不同观测量的分析结果。和图4-4一样, 图4-5、图4-6和图4-7的横坐标表示频率, 纵坐标是不同观测函数在本征函数上展开系数。图4-4在前面已经讨论过, 观测量取得是单个振子状态变量。图4-5和图4-6考虑了当观测量  $\mathbf{Z}^t = (z_1^t, z_2^t)$  时, 观测函数  $(z_1^0, z_1^\tau, \dots, z_1^{(n-1)\tau})^T$  和  $(z_2^0, z_2^\tau, \dots, z_2^{(n-1)\tau})^T$  分别在 koopman 算符本征函数上的展开系数。图4-7是当观测量  $\mathbf{Z}^t = (z_1^t, z_2^t)^T$  时, 观测函数  $(z_1^0, z_2^0, z_1^\tau, z_2^\tau, \dots, z_1^{(n-1)\tau}, z_2^{(n-1)\tau})^T$  在 koopman 算符本征函数上的展开系数。我们可以发现, 当观测量  $\mathbf{Z}^t$  是行向量时, 图4-5和图4-6的结果类似于观测量取单个振子状态量的情况, 这说明本质上这几种情况类似, 还是对每个振子的单独分析。不难证明, 因为此时一个观测函数描述的是某一个振子的相平面。对于这种情况, 本征函数作为基可以表示某一个振子的运动

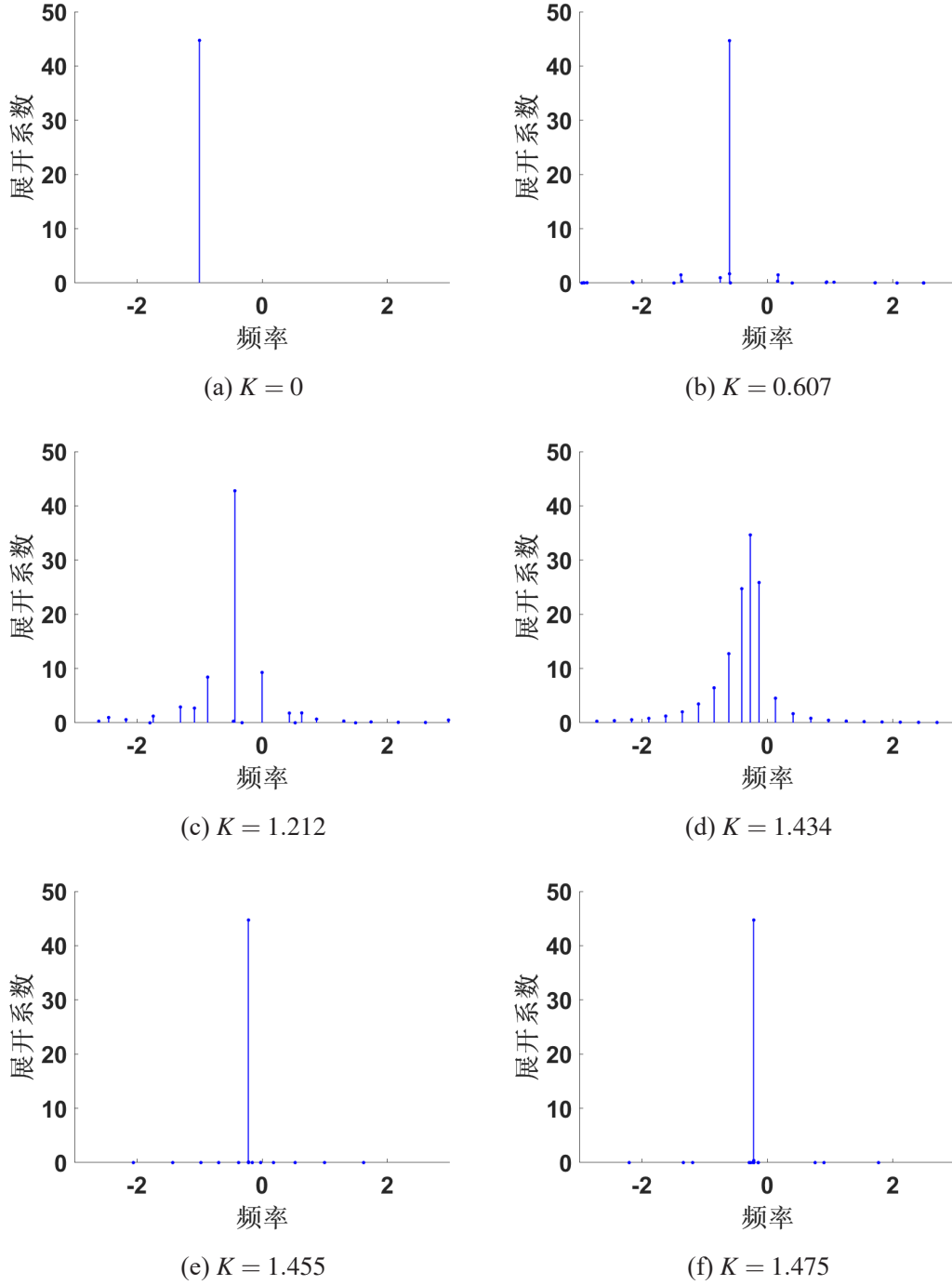


图 4-4  $N = 6$  个振子观测函数在 koopman 算符本征函数上的展开系数：状态变量  $\mathbf{Z}^t = (z_1^t)$ ，观测函数  $(z_1^0, z_1^\tau, \dots, z_1^{(n-1)\tau})^T$

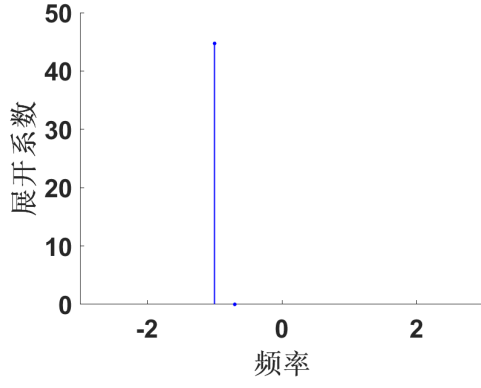
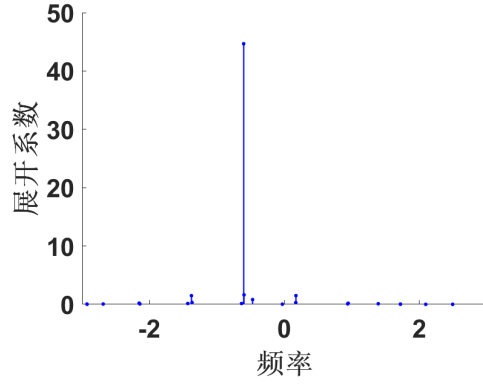
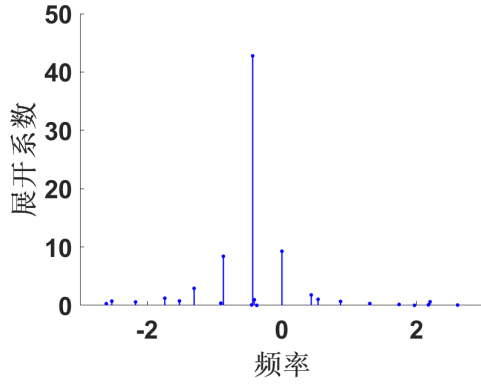
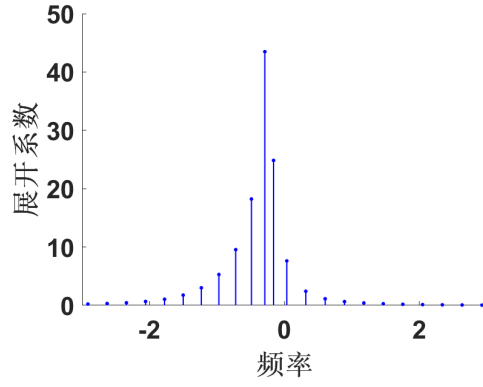
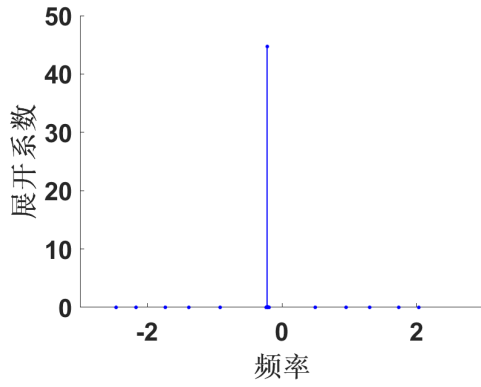
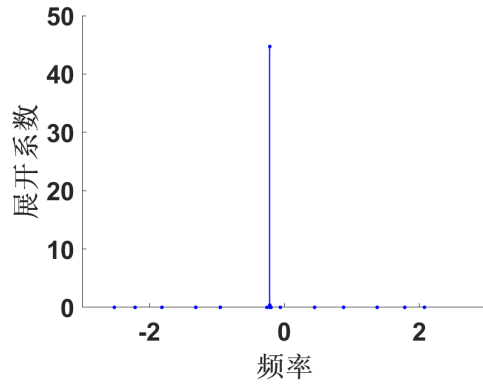
(a)  $K = 0$ (b)  $K = 0.607$ (c)  $K = 1.212$ (d)  $K = 1.434$ (e)  $K = 1.455$ (f)  $K = 1.475$ 

图 4-5  $N = 6$  个振子观测函数在 koopman 算符本征函数上的展开系数：状态变量  $\mathbf{Z}^t = (z_1^t, z_2^t)^T$ , 观测函数  $(z_1^0, z_1^\tau, \dots, z_1^{(n-1)\tau})^T$



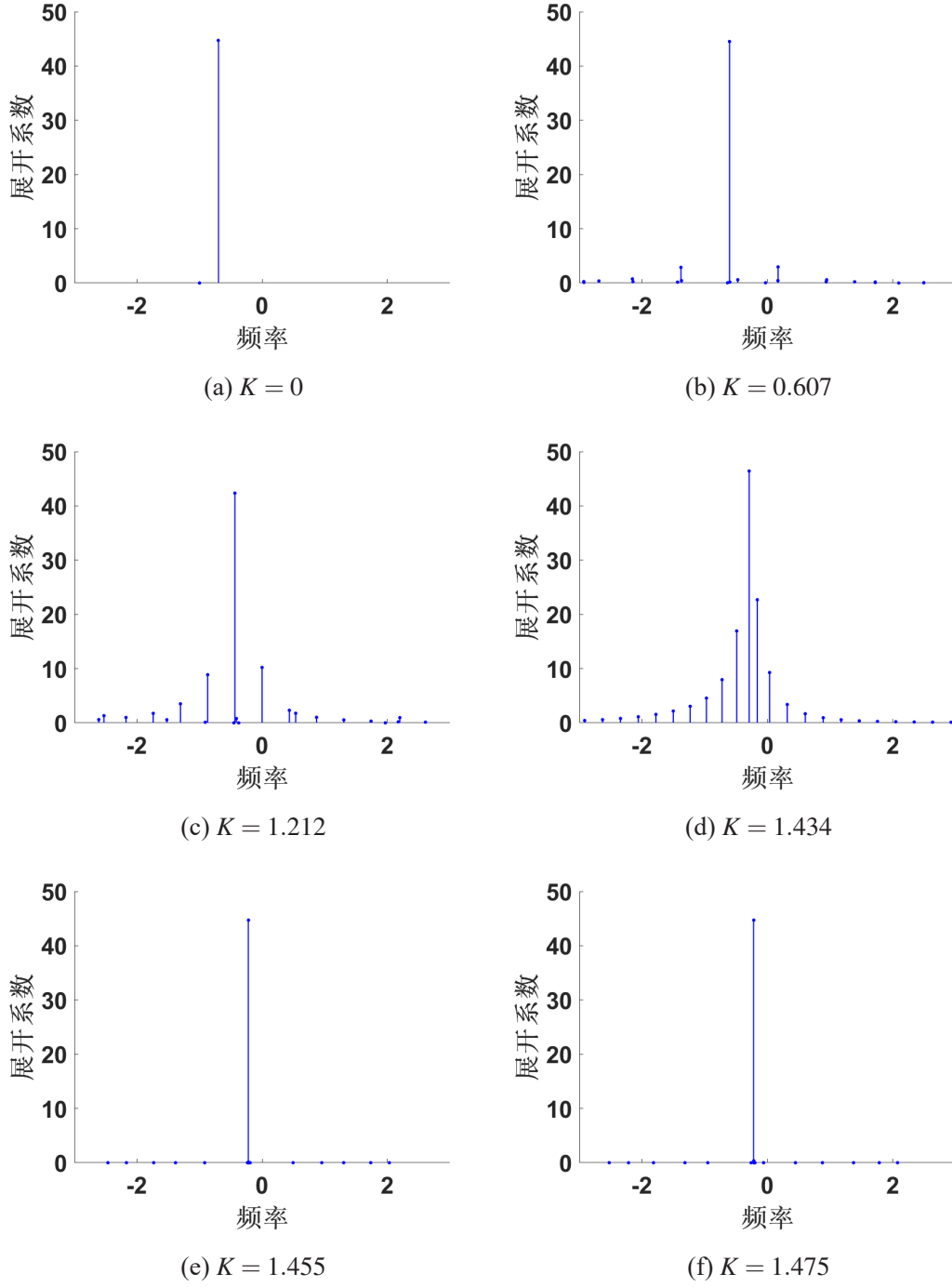


图 4-6  $N = 6$  个振子观测函数在 koopman 算符本征函数上的展开系数：状态变量  $\mathbf{Z}^t = (z_1^t, z_2^t)$  时，观测函数  $(z_2^0, z_2^\tau, \dots, z_2^{(n-1)\tau})^T$

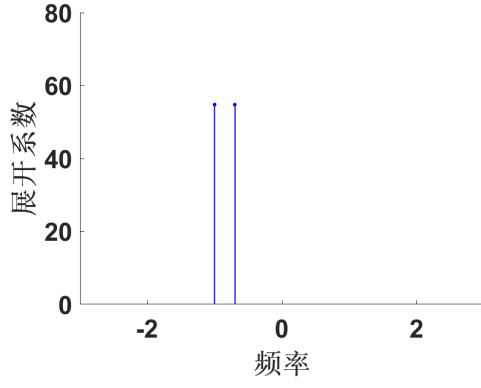
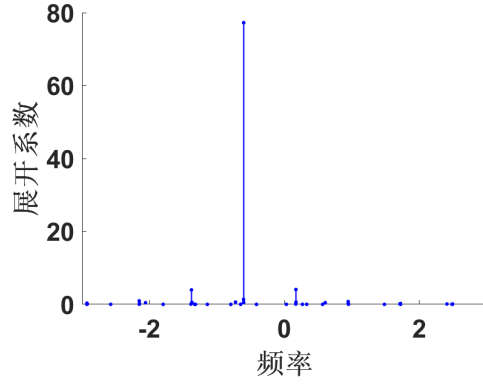
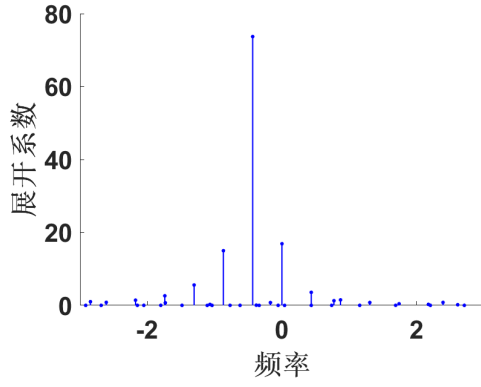
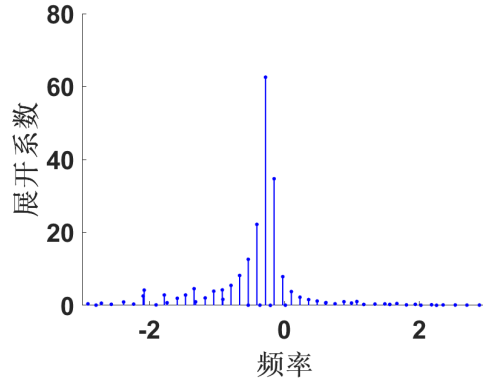
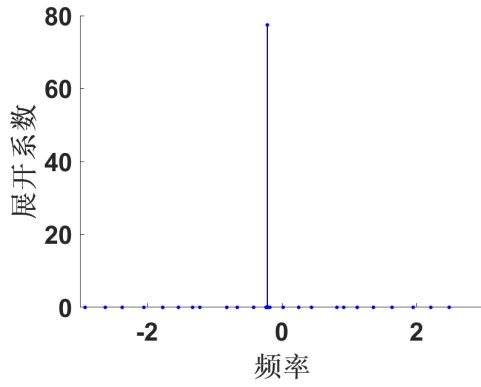
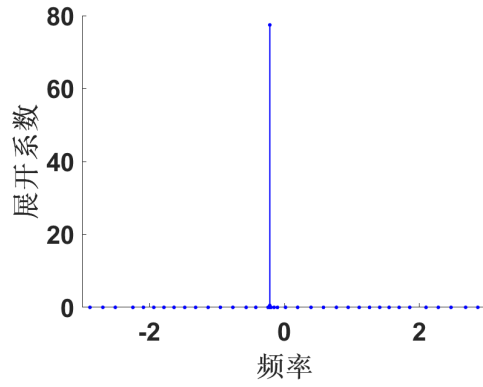
(a)  $K = 0$ (b)  $K = 0.607$ (c)  $K = 1.212$ (d)  $K = 1.434$ (e)  $K = 1.455$ (f)  $K = 1.475$ 

图 4-7  $N=6$  个振子观测函数在 koopman 算符本征函数上的展开系数：状态变量  $\mathbf{Z}^t = (z_1^t, z_2^t)^T$ ，观测函数  $(z_1^0, z_2^0, z_1^\tau, z_2^\tau, \dots, z_1^{(n-1)\tau}, z_2^{(n-1)\tau})^T$

特征，最重要的模式是该振子的运动模式，其他耦合较弱的振子，以及它们组合的运动模式可以忽略不计。当观测量  $\mathbf{Z}^t$  是列向量时，即  $\mathbf{Z}^t = (z_i^t)$ ，观测图4-7，无耦合情况下存在两种频率成分  $\tilde{\omega} = -1, -0.7$ ，正好是振子 1 和 2 的自然频率，说明将多个振子看作一个“团”分析，因为此时一个观测函数描述的是多个振子组成的相空间。对于这个“团”，本征函数作为基可以表示这个“团”的动力学特征，最重要的模式应该包括这个“团”内所有振子基本的运动模式。综上，所以这两种方法区别在于观测量选取不同，导致最后分析对象是单独振子还是多个振子组成的振子团。除此之外，它们都能对分析对象进行频谱分析，随着耦合强度增大，频谱组成变化和图4-4变化类似。

随着耦合强度的增加，主动参与的本征模先增大，在某一时刻开始减小，并在临界点附近坍缩为主本征模。在 Koopman 算子的框架下，如何找到重要的本征模以及如何确定分岔点是需要检验的关键问题。通过对图4-4，图4-5和图4-6的分析，我们发现无论耦合强度如何，最大的展开系数总是与平均频率有关，而平均频率被认为是振子最重要的模式，所以我们可以直接追踪谱最大的频率。而图4-7在无耦合时，有两个频率比较突出，对应是这两个振子的平均频率。所以我们可以从  $K = 0$  开始，追踪这两个频率。4.2节中的 RG 分析结果——平均频率是该系统 koopman 分析的一组本征值——也为 Koopman 分析提供了坚实的基础。结合3.3节，我们可以知晓平均频率线性组合也是一组本征值，对应本征函数也可以求出，但是相对于平均频率，它并不是主要的。

图4-8中，蓝色曲线是直接数值求解的结果，红色点是 Koopman 方法的结果。为了得到图4-8a，令观测量  $\mathbf{Z}^t = (z_i^t), i = 1, 2, \dots, N$ ，对每个振子作单独 koopman 分析，最后获取了 6 组频谱图，分别提取了  $N = 6$  个振子谱最大的频率。图4-8b则是令观测量  $\mathbf{Z}^t = (z_i^t, z_{i+1}^t), i = 1, 3, 5$ ，分别对每两个振子作 Koopman 分析，最后获取了 6 组频谱图，也是提取谱最大的频率。图4-8c绘制方法略有不同，取观测量  $\mathbf{Z}^t = (z_i^t, z_{i+1}^t)^T, i = 1, 3, 5$ ，对每两个振子作 Koopman 分析，最后获取了 3 组频谱图，追踪的是从零耦合开始的两个频率。图4-8结果显示，作用在状态空间上的 koopman 算符最重要的本征值对应振子的平均频率，可根据观测函数在本征函数上的展开系数得到。但是在局部相变点处 koopman 分析结果不是很好，因为此时振子间作用复杂，即将发生同步，展开系数相差不大，简单的通过最大展开系数判断最重要频率可能会存在一定误差。但是，总体来说在误差范围内，和数值结果对应较好。

由此可知，本征值与振子的平均频率之间存在对应关系，而本征函数则反映了

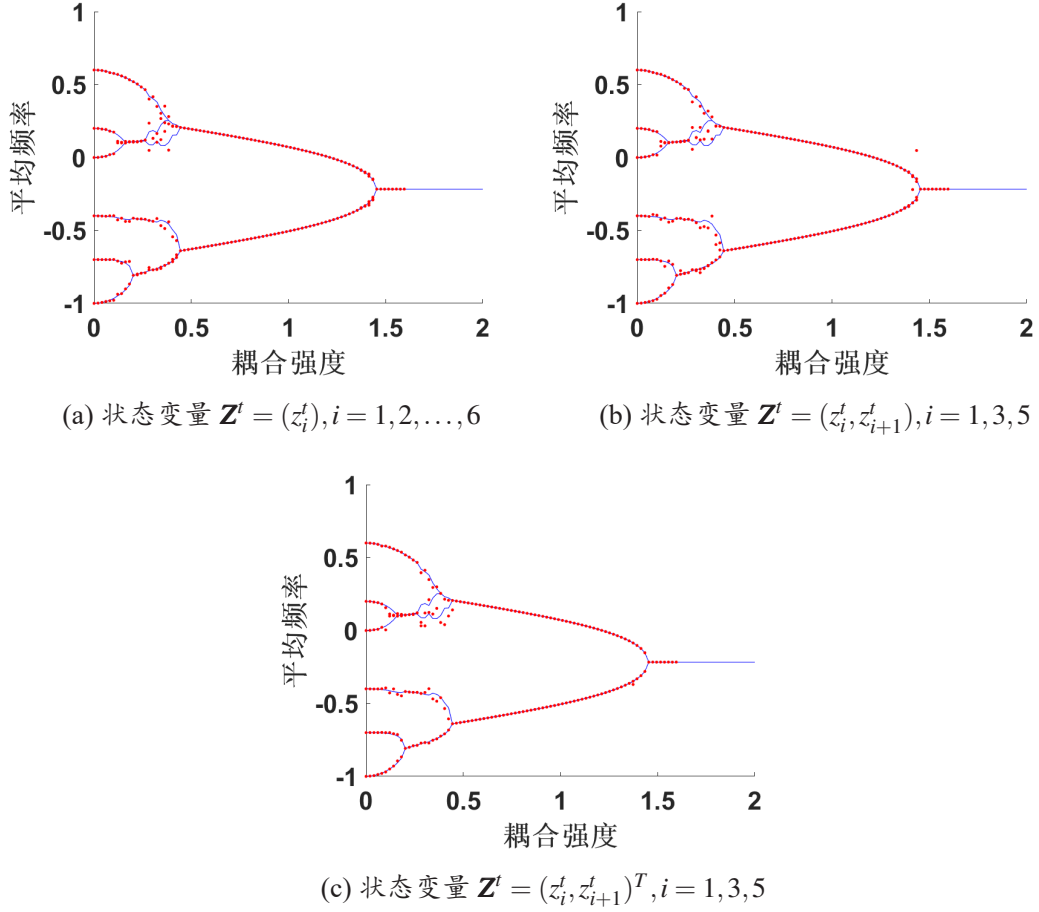


图 4-8  $N = 6$  个振子分岔树：蓝色曲线为数值解，红色点是 koopman 解

相位中不同运动模式的相对重要性，发生相变的时刻便是主导运动模式产生显著变化的时候，因此通过检测主导运动模式随耦合强度的变化，可以找出相变点。不失一般性，我们这一节以及下一章对状态量取单个振子状态的情况进行讨论。定义  $\mathbf{Z}^t = (z_n^t)$  时，本征函数  $\varphi_n$  的相关系数：

$$\rho_n(K_j) = \frac{\text{Cov}(\varphi_n(K_{j-1}), \varphi_n(K_j))}{\sqrt{\text{Var}(\varphi_n(K_{j-1}))\text{Var}(\varphi_n(K_j))}} \quad (4-28)$$

这里本征函数取某一耦合强度下，谱最大的本征函数函数，所以我们强调其为耦合强度的函数。其中  $K_{j+1} - K_j = 0.02$ 。 $\rho_n(K_j)$  能预测部分同步点，为了便于观察，我们结合所有振子： $\rho = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \rho_n(K_j)$ ，将“ $\rho$ - $K$ ”图绘制在4-9中。从图中我们知道，在多数情况下相关系数  $\rho = 1$ ，这是因为此时运动模式随着耦合强度平稳变化。当快到达或达到局部、全局同步点时，即将或正产生相变，导致本来独立转动的振子或者振子团同步转动，由原来的频率跃变为公共的同步频率，运动模式会发现显著改变，

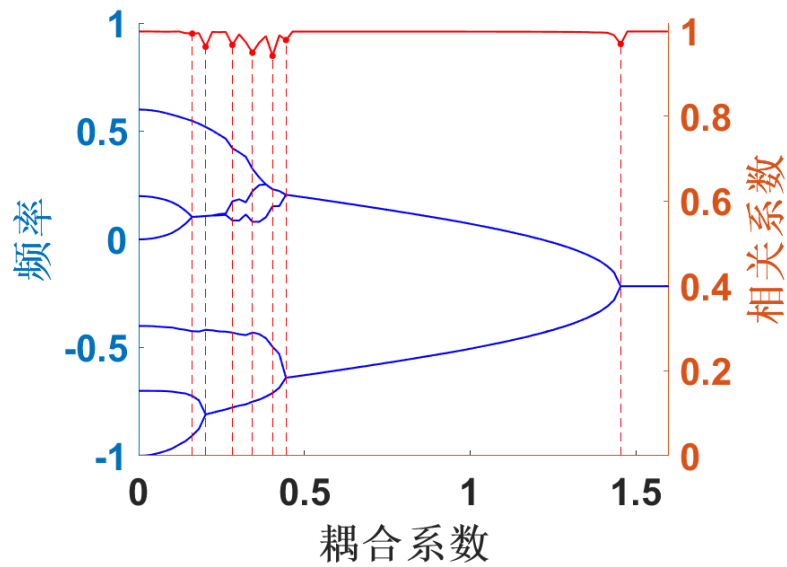


图 4-9  $N=6$  个振子本征函数的相关系数图：状态变量  $\mathbf{Z}^t = (z_i^t)$

表 4-2  $N=6$  个振子临界耦合强度的数值解和 koopman 解：最近邻 Kuramoto 模型

数值解	0.16	0.20	0.26	0.32	0.38	0.44	1.45
koopman 解	0.16	0.20	0.28	0.34	0.40	0.44	1.45

这便是同步过渡，此时  $\rho < 1$ 。过渡的尽头便是同步，对应图4-9相关系数的波谷，对应的耦合系数见表4-2。通过和数值解的对比，我们发现误差在 0.02 内。

由此可见，Koopman 方法只需要知道演化数据，就可以通过本征值和本征函数提取重要的平均频率。根据相关系数随耦合强度的变化，可以检测出多个相变点。综上，在最近邻 Kuramoto 模型中，数值解、小耦合重整化群方法的解析解与 Koopman 分析结果吻合较好，证明了 Koopman 方法的可靠性。



## 第五章 复杂网络上的 Kuramoto 模型的应用

上一节我们用 koopman 分析了  $N = 6$  个振子的最邻近 kuramoto 模型。但是现实中的耦合振子模型一般都是基于复杂网络，对于复杂网络的 Kuramoto 模型的研究也越来越多<sup>[18]</sup>，所以本节我们将会进行拓展，讨论复杂网络的 kuramoto 模型。

### 5.1 复杂网络 kuramoto 模型

不失一般性，较简单且常见的复杂网络 Kuramoto 模型如下所示：

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + K \sum_{j=1}^N a_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, \dots, N \quad (5-1)$$

这里我们采用邻接矩阵表示法来描述 Kuramoto 模型的网络拓扑。 $a_{ij} = 0$ 或 $1$ ，表示网络中振子是否具有邻接关系。 $a_{ij} = 0$ 表示振子间无邻接，否则有。

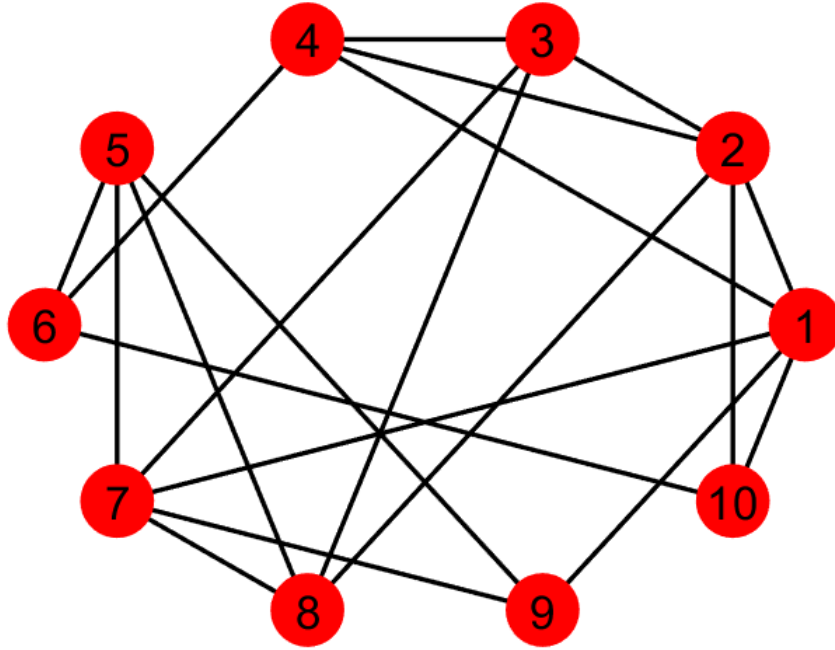
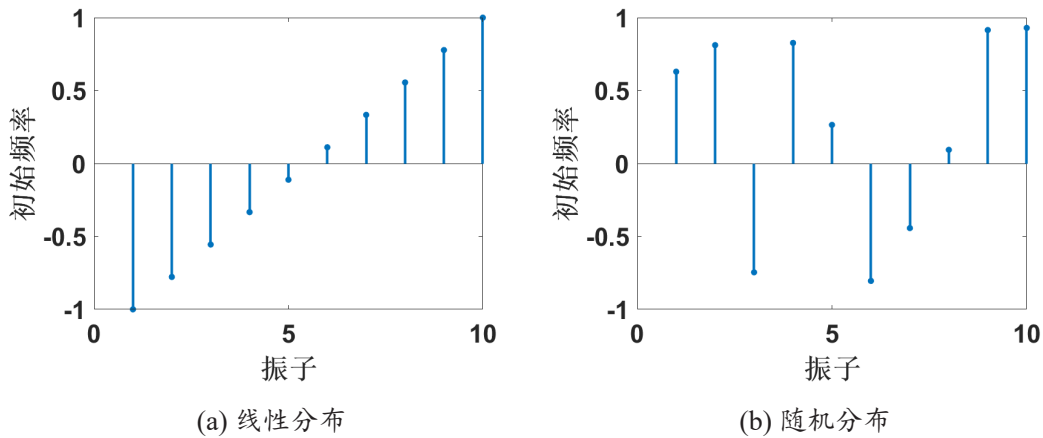
图5-1给出了一个网络拓扑图，是我们按照  $N = 10$  个节点，度  $d = 4$ ，随机化重连概率  $p = 0.5$  生成的 WS 小世界模型。为了便于观察，所以这里选择了  $N = 10$  个振子进行分析。10 个红点表示 10 个振子，黑色数字是对应振子的编号，黑色边表示振子间有邻接关系，即  $a_{ij} = 1$  接下来我们基于该网络拓扑进行讨论。

### 5.2 koopman 分析

按照上一节生成的网络拓扑，本节我们将聚焦于自然频率在区间  $[-1, 1]$  内线性分布和随机分布两种情况的分析。其初始频率如图5-2所示（横坐标表示振子，纵坐标是振子频率）。其中，图5-2a是区间  $[-1, 1]$  内的线性分布，分布函数如式5-2所示，而图5-2b是区间  $[-1, 1]$  内的随机分布。

$$\omega_i = -1 + \frac{2(i-1)}{N} \quad (5-2)$$

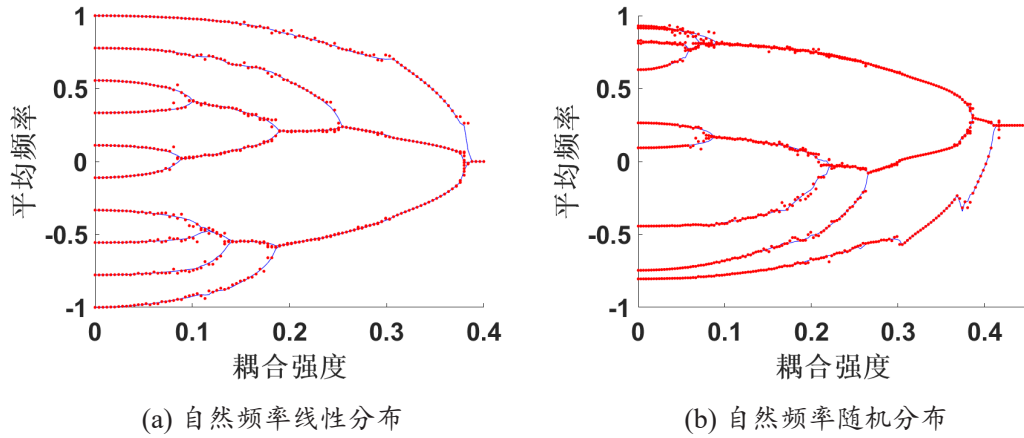
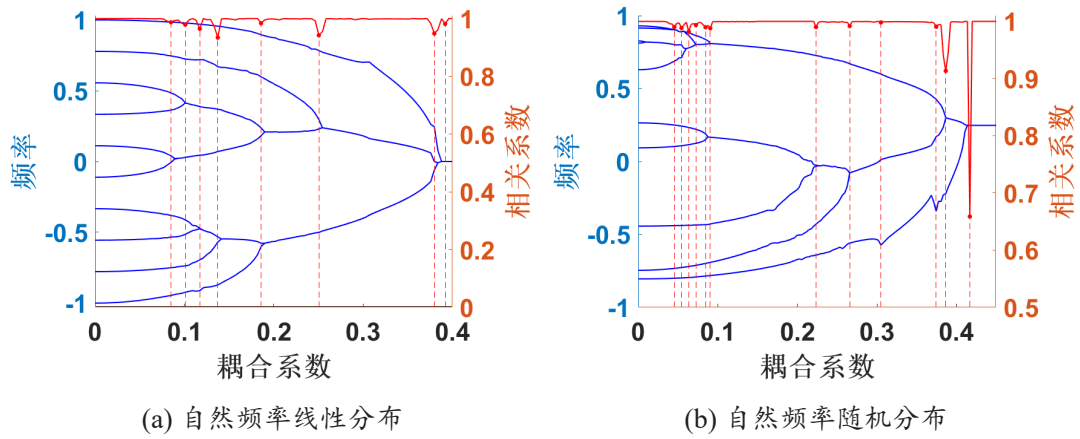
在图5-3中分别给出了两种自然频率分布的分岔图，横坐标是耦合强度，纵坐标是求解的频率。其中，蓝色曲线是直接数值解求解的平均频率。振子之间的频率分布和耦合强度对同步过程有明显的影响。频率相近的振子往往先发生局部同步。随着耦合强度的增加，非相干态逐渐减小，相干度逐渐增强。经过越来越大规模的局部同步，最终在一定的临界耦合强度下实现全局同步。我们将通过 Koopman 方法获

图 5-1  $N = 10$  个振子网络拓扑图图 5-2  $N = 10$  个振子自然频率分布

取的最重要的一组本征频率用小红点绘制在图5-3中。由于局部分岔点处振子之间的干扰是微妙和敏感的，导致 Koopman 方法求解的本征频率在局部分岔点与直接数值求解的平均频率吻合的不是很好。显然，除了局部分岔点外，结果总体上是相当可靠的。

我们在图 5-1中绘制了复杂网络上 10 个振子的 Kuramoto 模型的“ $\rho$ - $K$ ”图（红色曲线）。图5-4a的自然频率是区间  $[-1, 1]$  内的线性分布，而图5-4b是区间  $[-1, 1]$  内



图 5-3  $N=10$  个振子分岔图：蓝色曲线是数值解，红色点是 koopman 解图 5-4  $N=10$  个振子本征函数的相关系数图：状态变量  $\mathbf{Z}^i = (z_i^j)$ 表 5-1  $N=10$  个振子临界耦合强度的数值解和 koopman 解：自然频率线性分布，网络拓扑如图 5-1

数值解	0.088	0.100	0.116	0.140	0.190	0.254	0.384	0.388
Koopman 解	0.086	0.100	0.116	0.138	0.186	0.252	0.380	0.390

表 5-2  $N=10$  个振子临界耦合强度的数值解和 koopman 解：自然频率随机分布，网络拓扑如图 5-1

数值解	0.009	0.045	0.060	0.072	0.087	0.090	0.225	0.267	0.387	0.414
Koopman 解	-	0.045	0.054, 0.063	0.072	0.084	0.090	0.222	0.267	0.387	0.417

的随机分布。分岔树中，相关系数的波谷与分岔树同步点也较好的对应。甚至，我们还可以检测到频率跃变点。比如图5-4a中  $K = 0.225, 0.267$  处。

表5-1详细列出了数值解和 Koopman 解的临界耦合强度，这里耦合强度变化步长为  $K_j - K_{j-1} = 0.002$ 。从表中我们可以看出，koopman 解与数值解较好对应，误差在 0.01 内。

表5-2也列出了数值解和 koopman 解的临界耦合强度和频率跃变点，其耦合强度变化步长为  $K_j - K_{j-1} = 0.003$ 。不幸的是  $K = 0.009$  处的相变点在 Koopman 方法中并没有被识别。这时因为两个振子之间的固有频率差很小，并且同步发生在非常小的耦合强度下（接近于零）。此时，模式的微小变化让我们无法捕捉到相变点。值得一提的是通过数值求解在  $K = 0.060$  处存在一个同步相变点和一个同步破裂点，它们分别对应于 Koopman 解的两个波谷  $K = 0.054, 0.063$ 。这里耦合强度变化步长小于前一章中最近邻耦合中耦合强度变化步长，所以这里误差也偏小。说明耦合强度变化步长大小影响最后求解误差，所以如果我们需要更加精确的结果，可以缩短这个变化步长。

综上所述，在复杂网络的 Kuramoto 模型中，Koopman 分析的结果仍然是可靠的。

## 第六章 总结

利用 Koopman 算子的谱特性，我们可以划分相空间，提取重要的动力学模式，并确定耦合非线性系统的整体性质。本文将这一方法推广到分析环或复杂网络上的 Kuramoto 模型。在对时间序列建立 Hankel 矩阵并对该矩阵进行奇异值分解预处理后，我们对近似的 Koopman 算符进行动态模式分解。用得到的本征函数和本征值来展开频率结构，通过对比不同本征函数的权重可以找到主要模式。当重整化群分析在小耦合情况下有效时，重整化频率被证明是振子的平均频率。在中等耦合或强耦合的情况下，我们用 Koopman 方法证明了本征频率也同样是振子的平均频率。相邻耦合强度间本征函数的相关性是重要动力学模式变化率的一种表现，通过这种变化率，可以找到局部或全局同步点。这些新技术可以作为提取复杂系统中重要动力学信息新的工具。

在上述分析中，在分岔点附近，Koopman 分析得到的频率有时与平均频率不匹配。如何提高计算效率，准确地确定重要的频率是需要进一步探讨的问题。我们使用相关函数作为分岔的指标，这在大多数情况下似乎是有效的，但可能不是最好的，因为大多数其他特征函数都被忽略了。在目前的处理中，动力学的一些重要特征可能会丢失，因此，如果能找到一种从中获取有用信息的方法，将会非常有帮助。此外，在目前的研究中，我们提供了足够的信息。如果只有有限的数据可用，那么从 Koopman 分析中可以提取什么样的信息是一个有趣的问题，这可能与用来构造近似 Koopman 算符的函数基有关。

回顾整个分析过程，Koopman 技术不需要运动的控制方程，一个时间序列就可以满足上述所有操作。为了降低高维关联的复杂度，降低基选择的难度，我们将动态模式分解的概念与时延嵌入、SVD 相结合。在保证稳定性和可靠性的前提下，Koopman 分析帮助我们从小范围观测中重建全局信息，同时最小化不可避免的噪声影响。在这种复杂系统的分析中，平均频率的重要性出人意料地再次显现出来，尽管自然界的节律无处不在，时时刻刻围绕在我们身边。Koopman 分析似乎为分析和理解这些迷人的非线性系统提供了一个新的框架。

## 参考文献

- [1] Koopman B O. Hamiltonian systems and transformation in Hilbert space[J]. 1931, 17(5): 315.
- [2] Koopman B, Neumann J v. Dynamical systems of continuous spectra[J]. 1932, 18(3): 255.
- [3] Brunton S L, Brunton B W, Proctor J L, et al. Koopman invariant subspaces and finite linear representations of nonlinear dynamical systems for control[J]. 2016, 11(2).
- [4] Arbabi H, Mezic I. Ergodic theory, dynamic mode decomposition, and computation of spectral properties of the Koopman operator[J]. 2017, 16(4): 2096–2126.
- [5] Mezić I, Banaszuk A. Comparison of systems with complex behavior[J]. 2004, 197(1-2): 101–133.
- [6] Mauroy A, Mezić I. Global stability analysis using the eigenfunctions of the Koopman operator[J]. 2016, 61(11): 3356–3369.
- [7] Mezić I. Spectral properties of dynamical systems, model reduction and decompositions[J]. 2005, 41(1-3): 309–325.
- [8] Goldenfeld N. CRC Press, 2018.
- [9] Zinn-Justin J. Clarendon Press, 1996.
- [10] Chen L Y, Goldenfeld N, Oono Y, et al. Selection, stability and renormalization[J]. 1994, 204(1-4): 111–133.
- [11] Paquette G, Chen L Y, Goldenfeld N, et al. Structural stability and renormalization group for propagating fronts[J]. 1994, 72(1): 76.
- [12] Vakakis A F, Azeez M. Analytic Approximation of the Homoclinic Orbits of the Lorenz System at  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$  and  $\rho = 13.926\dots$ [J]. 1998, 15(3): 245–257.
- [13] Kevorkian J, Cole J, Nayfeh A H. Perturbation methods in applied mathematics[J]. 1982, 7: 414–420.
- [14] Bender C M, Orszag S A. Springer Science & Business Media, 2013.
- [15] Lan Y. Bridging steady states with renormalization group analysis[J]. 2013, 87(1): 012914.
- [16] Rosenblum M G, Pikovsky A S, Kurths J. Phase synchronization of chaotic oscillators.[J]. 1996, 76(11): 1804.
- [17] Acebrón J A, Bonilla L L, Vicente C J P, et al. The Kuramoto model: A simple paradigm for synchronization phenomena[J]. 2005, 77(1): 137.
- [18] Chiba H, Medvedev G S, Mizuhara M S. Bifurcations in the Kuramoto model on graphs[J]. 2018, 28(7): 073109.
- [19] Wu Y, Xiao J, Hu G, et al. Synchronizing large number of nonidentical oscillators with small coupling[J]. 2012, 97(4): 40005–0.
- [20] Strogatz S H. From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators[J]. 2000, 143(1-4): 1–20.

- [21] Ott E, Antonsen T M. Low dimensional behavior of large systems of globally coupled oscillators[J]. 2008, 18(3): 037113.
- [22] Ott E, Antonsen T M. Long time evolution of phase oscillator systems[J]. 2009, 19(2): 023117.
- [23] Watts D J, Strogatz S H. Collective dynamics of ‘small-world’ networks[J]. 1998, 393(6684): 440.
- [24] Marconi G. Wireless telegraphic communication[J]. 1909, 11: 198–222.
- [25] Pikovsky A, Kurths J, Rosenblum M, et al. Cambridge university press, 2003.
- [26] Wiener N, Teichmann T. WILEY, 1958.
- [27] Winfree A T. Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators[J]. 1967, 16(1): 15–42.
- [28] Kuramoto Y. International symposium on mathematical problems in theoretical physics[J]. 1975, 30: 420.
- [29] Chen W, Liu W, Lan Y, et al. Explosive synchronization transition in a ring of coupled oscillators[J]. 2019, 70: 271–281.
- [30] Schwinger J. On quantum-electrodynamics and the magnetic moment of the electron[J]. 1948, 73(4): 416.
- [31] Schwinger J. Quantum electrodynamics. I. A covariant formulation[J]. 1948, 74(10): 1439.
- [32] Feynman R P. Relativistic cut-off for quantum electrodynamics[J]. 1948, 74(10): 1430.
- [33] Tomonaga S I, Oppenheimer J R. On infinite field reactions in quantum field theory[J]. 1948, 74(2): 224.
- [34] Tati T, Tomonaga S i. A Self-Consistent Subtraction Method in the Quantum Field Theory, I[J]. 1948, 3: 391–406.
- [35] Dyson F J. The electromagnetic shift of energy levels[J]. 1948, 73(6): 617.
- [36] Dyson F J. The radiation theories of Tomonaga, Schwinger, and Feynman[J]. 1949, 75(3): 486.
- [37] Gell-Mann M, Low F E. Quantum electrodynamics at small distances[J]. 1954, 95(5): 1300.
- [38] Wilson K G. Renormalization group and critical phenomena. I. Renormalization group and the Kadanoff scaling picture[J]. 1971, 4(9): 3174.
- [39] Goldenfeld N, Martin O, Oono Y. Intermediate asymptotics and renormalization group theory[J]. 1989, 4(4): 355–372.
- [40] Goldenfeld N, Martin O, Oono Y, et al. Anomalous dimensions and the renormalization group in a nonlinear diffusion process[J]. 1990, 64(12): 1361.
- [41] Chen L Y, Goldenfeld N, Oono Y. Renormalization-group theory for the modified porous-medium equation[J]. 1991, 44(10): 6544.
- [42] Chen L Y, Goldenfeld N. Renormalization-group theory for the propagation of a turbulent burst[J]. 1992, 45(8): 5572.

- [43] Chen L Y, Goldenfeld N, Oono Y. Renormalization group theory for global asymptotic analysis[J]. 1994, 73(10): 1311.
- [44] Chen L Y, Goldenfeld N, Oono Y. Renormalization group and singular perturbations: Multiple scales, boundary layers, and reductive perturbation theory[J]. 1996, 54(1): 376.
- [45] Chiba H. Simplified renormalization group method for ordinary differential equations[J]. 2009, 246(5): 1991–2019.
- [46] Deville R E L, Harkin A, Holzer M, et al. Analysis of a renormalization group method and normal form theory for perturbed ordinary differential equations[J]. 2008, 237(8): 1029–1052.
- [47] Nozaki K, Oono Y, Shiwa Y. Reductive use of renormalization group[J]. 2000, 62(4): R4501.
- [48] Shiwa Y. Renormalization-group theoretical reduction of the Swift-Hohenberg model[J]. 2000, 63(1): 016119.
- [49] Shiwa Y. Renormalization-group for amplitude equations in cellular pattern formation with and without conservation law[J]. 2011, 125(5): 871–878.
- [50] Tao T, Geng C. Breather dynamics in the perturbed sine-Gordon equation[J]. 2003, 40(4): 390.
- [51] Tao T, Geng C, Jian-Wei L. Anomalous dimension in the solution of the modified porous medium equation[J]. 2002, 37(6): 741.
- [52] Tao T, Geng C, Jian-Wei L. Anomalous dimension in the solution of a nonlinear diffusion equation[J]. 2001, 36(5): 617.
- [53] Kunihiro T. A geometrical formulation of the renormalization group method for global analysis[J]. 1995, 94(4): 503–514.
- [54] Kunihiro T. A geometrical formulation of the renormalization group method for global analysis II: Partial differential equations[J]. 1997, 14(1): 51.
- [55] Ei S I, Fujii K, Kunihiro T. Renormalization-group method for reduction of evolution equations; invariant manifolds and envelopes[J]. 2000, 280(2): 236–298.
- [56] Hatta Y, Kunihiro T. Renormalization group method applied to kinetic equations: roles of initial values and time[J]. 2002, 298(1): 24–57.
- [57] Kunihiro T. Renormalization-group resummation of a divergent series of the perturbative wave functions of quantum systems[J]. 1998, 131: 459–470.
- [58] Kunihiro T. Renormalization-group resummation of a divergent series of the perturbative wave functions of the quantum anharmonic oscillator[J]. 1998, 57(4): R2035.
- [59] Kunihiro T, Matsukidaira J. Dynamical reduction of discrete systems based on the renormalization-group method[J]. 1998, 57(4): 4817.
- [60] Kunihiro T, Tsumura K. Application of the renormalization-group method to the reduction of transport equations[J]. 2006, 39(25): 8089.
- [61] Ziane M. On a certain renormalization group method[J]. 2000, 41(5): 3290–3299.

- 
- [62] Chiba, Hayato. Approximation of center manifolds on the renormalization group method[J]. 2008, 49(10): 102703.
- [63] Budišić M, Mezić I. Geometry of the ergodic quotient reveals coherent structures in flows[J]. 2012, 241(15): 1255–1269.
- [64] Mezić I, Wiggins S. A method for visualization of invariant sets of dynamical systems based on the ergodic partition[J]. 1999, 9(1): 213–218.
- [65] Budišić M, Mezić I. An approximate parametrization of the ergodic partition using time averaged observables[A]. // Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) held jointly with 2009 28th Chinese Control Conference[C]. 2009: 3162–3168.
- [66] Mezić I. On applications of the spectral theory of the Koopman operator in dynamical systems and control theory[A]. // 2015 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)[C]. 2015: 7034–7041.
- [67] Kaiser E, Kutz J N, Brunton S L. Sparse identification of nonlinear dynamics for model predictive control in the low-data limit[J]. 2017, 474(2219).
- [68] Rowley C W, Mezić I, Bagheri S, et al. Spectral analysis of nonlinear flows[J]. 2009, 641: 115–127.
- [69] Mezi, Igor. Analysis of Fluid Flows via Spectral Properties of the Koopman Operator[J]. 2013, 45(1): 357–378.
- [70] Brunton B W, Johnson L A, Ojemann J G, et al. Extracting spatial–temporal coherent patterns in large-scale neural recordings using dynamic mode decomposition[J]. 2016, 258: 1–15.
- [71] Schmid P J. Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data[J]. 2010, 656: 5–28.
- [72] Sauer T, Yorke J A, Casdagli M. Embedology[J]. 1991, 65(3-4): 579–616.
- [73] Brunton S L, Brunton B W, Proctor J L, et al. Chaos as an intermittently forced linear system[J]. 2017, 8(1): 1–9.
- [74] Zheng Z, Hu G, Hu B. Phase slips and phase synchronization of coupled oscillators[J]. 1998, 81(24): 5318.
- [75] El-Nashar H F, Muruganandam P, Ferreira F F, et al. Transition to complete synchronization in phase-coupled oscillators with nearest neighbor coupling[J]. 2009, 19(1): 013103.

