

Koopman算符在埃农映射中的动力学

张聪¹, 兰岳恒¹

¹ 北京邮电大学理学院, 北京 100876

摘要: 现实中大多数系统通常由于原理复杂而难以用准确的动力学方程描述, 只能得到一些实验观测到的系统特性数据, 我们希望通过系统的特性数据提取出动力学系统的动力学模式, 并对这些动力学模式做一定的划分。Koopman算符提供了一个有效的数学工具, 它描述了可观测量在相空间中的演化, 可以用于提取非线性系统的动力学特征。我们通过计算Koopman算符的本征值和本征函数对埃农映射系统的相空间进行划分, 并研究了埃农映射的稳定流型与不稳定流型、周期轨道与Koopman算符本征函数的关系, 这为在高维非线性系统中分析复杂的动力学提出了一种可行的方法。

关键词: 系统理论; Koopman算符; 埃农映射; 混沌; 动力学系统

中图分类号: O19, O59

Koopman Operator and Dynamics in Hénon Map

Cong Zhang¹, Yueheng Lan¹

¹ School of Science, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876

Abstract: In reality, most systems are usually difficult to describe with accurate equations of motion due to their complexity. Only some system data can be observed. We hope to extract the key features of the dynamical system through the observed data of the system. The phase space of the system is partitioned to different patches accordingly. The Koopman operator provides an effective mathematical tool, which describes the evolution of the observable in the phase space and can be used to extract the characteristic modes of a nonlinear system. We partition the phase space of the Hénon map by calculating the eigenvalues and eigenfunctions of the Koopman operator, and study the relationship between the stable manifold and the unstable manifold of the Hénon map, the periodic orbit and the eigenfunction of the Koopman operator, Which provides a possible method for analyzing complex dynamics in high-dimensional nonlinear systems

Key words: System Theory; Koopman Operator; Hénon map; Chaos; Dynamical System

基金项目: 国家自然科学基金(11775035,11375093)

作者简介: 张聪 (1995-), 男, 硕士, 主要研究方向: 非线性动力学系统。通信作者: 兰岳恒 (1973-), 男, 教授, 主要研究方向: 统计物理。

0 引言

当今社会的发展充斥着各种信息交换,包括机械、能源、交通、化工、生物、航空航天等各项领域,然而在信息传递中愈发庞大的信息量中,如何有效的提取关键的信息是一个亟待解决的问题。对于复杂系统,由于我们缺乏基本的物理原理或复杂性的理解而不易作出有效的描述,也不能确定其动力学特征。但是随着数据采集和存储技术的发展,我们可以通过大量模拟、实验及高分辨率观测获得大量的系统特性数据。这些数据往往可以用一些智能算法,如神经网络来处理,但是我们仍有必要对系统关键的动力学特征有更深一步的理解,因此通过系统的特性数据来分析系统的动力学特征尤为重要。

动力学系统通常研究相空间中的轨道结构及其在不同参数下的变化。在线性或可积系统中,轨道比较规则并且可以定量的计算系统的演化特征,但是当动力学比较复杂时,如大多数非线性系统甚至是混沌系统,传统的分析方法通常不适用,甚至数值计算也是不可靠的,比如混沌系统中,系统轨道结构非常复杂,并且系统对初始条件或外部扰动非常敏感。这种情况下我们通常引入统计理论,比如统计物理中从微观描述到宏观描述,但是由于缺乏变分原理且轨道的不稳定性,在非线性系统的处理中可能会丢失重要的动力学特征。在建立统计物理的框架时,许多人就提出了对统计物理的担忧,并将刘维尔方程作为出发点。这种方法的关注点从轨道转移到相空间特定函数的演化,哈密达系统中的演化过程就是通过著名的刘维尔算符完成的。

Koopman 算符由B. O. Koopman 于1931 年提出,它描述了动力学系统相空间中定义的函数的演化,与刘维尔算符密切相关。Koopman算符的本征值和本征函数可以描述系统动力学的全局特征,Mezić等人首先将其用于相空间划分以及简化高维动力学的可能性。近年来,基于Koopman算符的动力学模式分解(DMD)算法及其改进版本已在不同场合进行了广泛测试,包括电力系统、建筑、能源效率和流体系统等。DMD算法原则上可以根据测量数据通过严格的收敛性来计算频谱的精细结构。此外通过合理的安排数据序列可以轻松的构造Hankel矩阵,从而更方便的计算谱特征,更多的研究也揭示了线性化变化与Koopman算符谱之间的关系。

本文介绍了动力学系统与混沌系统并利用Koopman算符分析埃农映射的动力学,包括相空间划分、周期轨道,并对动力学系统的相空间进行划分。这种相空间划分的方法相较于计算集合拓扑结构更容易计算和实现,也更容易推广到一般的非线性系统。

1 动力学系统与混沌

动力学研究的是系统是如何随时间变化,以及这些变化的规律。这些系统的性质或者是特征是由一些所谓的状态变量所表征。动力学描述这些状态变量随时间的变化的规律。这种规律既可以表示为状态变量的微分方程,也可用关于状态变量的离散方程表示。

在物理学中,我们比较熟悉的系统很多都是用线性方程描述动力学规律,即所谓的线性系统。线性方程很容易求解并且具有一些很简单的特性(如叠加原理)。在(??)中,若 $f_i(i = 1, 2, \dots, n)$ 均为各自变量的线性函数,则我们的动力学系统即为一线性系统。连续时间线性系

统可以用矩阵表示:

$$\dot{x} = Ax \quad (1)$$

其中 x 表示由所有状态变量构成的列向量, A 为 $n \times n$ 的矩阵($A_{ij} \in \mathbb{R}$)。

离散时间的线性动力学方程也可以用矩阵来表示:

$$x_{n+1} = Ax_n \quad (2)$$

其中 x 表示由所有状态变量构成的列向量, A 为 $n \times n$ 的矩阵($A_{ij} \in \mathbb{R}$), 下标 n 表示系统的迭代次数, 即离散的时间指标。

然而在实际中, 许多物理现象乃至其他一些自然现象或者是社会现象毕竟是很复杂的, 它们的动力学规律往往需要使用非线性方程表示。这些非线性方程除极少数外, 一般都不存在解析解, 但是它们却具有与线性方程解的不同的一些独特性质, 所以非线性动力学需要一些其他的方法来研究其性质。

混沌是非线性确定动力系统呈现出具有随机性的运动形态, 即在一个确定性系统中, 存在着貌似随机的不规则运动, 其行为表现为不可重复、不可预测, 这就是混沌现象。混沌是非线性动力系统的固有特性, 是非线性系统普遍存在的现象。混沌具有确定性、初值敏感性、不可预测性。

当系统作一般的规则运动时, 无法避免涨落所引起的初始条件的微小变化一般只引起运动状态的微小差别, 即初始状态接近的轨道始终是接近的, 从而人们可以对系统的运动作出预测。然而混沌却不然, 它具有对初始条件的敏感依赖性, 即初始条件的微小差别常常使轨道按指数形式分开。洛伦兹也曾戏称混沌运动对初始条件的敏感依赖性为“蝴蝶效应”。

对于一个实际系统, 由于无法避免内部涨落和外部环境噪声等因素的影响, 初始状态的微小差别难以避免, 因此混沌对初始状态的这种敏感依赖性必然会导致运动的不确定性与随机性。由于这种随机性, 混沌系统在有限的相空间中必然要有折叠, 否则轨线就只能是封闭曲线(规则的周期运动)或延伸到无穷远(发散解)。

2 Koopman算符

对于离散时间动力学系统, 设对于相空间 \mathbf{P} 上的任意一点 $x_p \in \mathbf{P}$, 有 $x_{p+1} = T(x_p)$ 。其中 p 为迭代次数, T 描述了相空间的迭代规律。定义作用在相空间函数 $f(x)$ 上的Koopman算符 U , 使得:

$$Uf(x) = f(T(x)) \quad (3)$$

其中 $f(x)$ 为定义在相空间上的任意可观测函数, 如粒子的坐标、动量、浓度、概率密度等等。

Koopman算符 U 是一个线性算符, 可以对其进行谱分解。设有一复数 λ 和一复标量函数 $\phi(x)$, 使得

$$U\phi(x) = \phi(T(x)) = \lambda\phi(x) \quad (4)$$

则称 λ 为Koopman算符的本征值, $\phi(x)$ 为Koopman算符的本征函数。

在动力学系统中, Koopman算符的本征值与本征函数有着特殊的含义。根据本征函数的定义, 我们有

$$\begin{aligned}\phi(x_p) &= U\phi(x_{p-1}) = \lambda\phi(x_{p-1}) \\ &= \lambda U\phi(x_{p-2}) = \lambda^2\phi(x_{p-2}) \\ &\dots \\ &= \lambda^{n-1}U\phi(x_0) = \lambda^n\phi(x_0)\end{aligned}\quad (5)$$

其中 p 为时间因子。特别的, 当 $\lambda = 1$ 时, 则本征函数 $\phi(x_p) = \phi(x_{p-1}) = \dots = \phi(x_0)$ ($p \in \mathbb{Z}$ 为时间指标), 此时本征函数不随时间发生变化, 即 $\phi(x) = C$ (C 为常数), 这与动力学系统中的守恒量相对应。例如在能量守恒定律中, 就对应一个能量函数不随时间发生变化 $E(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, \dots, x_n, \dot{x}_n, t) = C$, 亦可反推该函数是Koopman算符的本征函数。当 $|\lambda| = 1$ 时 (即 $\lambda = e^{i\theta}$), 则本征函数 $|\phi(x_p)| = |\phi(x_{p-1})| = \dots = |\phi(x_0)|$ ($p \in \mathbb{Z}$ 为时间指标), 此时本征函数的模不随时间发生变化 (而相位在发生变化), 这也对应了动力学系统中的一种不变量。

我们将通过数值计算求得Koopman算符的本征函数。Koopman算符作用在函数上, 描述了函数的演化规律。为了能够精确的描述一个本征函数, 我们可以选取一组基函数 $g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x), x \in \mathbb{R}$, 其张成了一个函数空间, 对于在该函数空间的任意函数 $f(x)$, 我们都可以表示为

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i g_i(x) \quad (6)$$

为了得到Koopman算符的本征函数, 我们需要构造演化前与演化后的数据, 通常采用构造数据矩阵的方式, 设某 p 时刻的数据为 $\{x_{p_1}, x_{p_2}, \dots, x_{p_n}\}$, $x_i \in \mathbb{R}^n$, 当时刻为 $p+1$ 时, 数据演化为 $\{x_{p_1+1}, x_{p_2+1}, \dots, x_{p_n+1}\}$, $x_i \in \mathbb{R}^n$, 在选取的基函数 $g_i(x), i = 1, 2, \dots, m$ 下, 利用已知数据点将 m 个基函数 (我们称之为“函数格点”) 及演化后的函数表示为在 $\{x_{p_1}, x_{p_2}, \dots, x_{p_n}\}$ (我们称之为“演化格点”) 下的列向量, 从而构成两个 $n \times m$ 的数据矩阵:

$$K = (g_1(x_p), g_2(x_p), \dots, g_m(x_p)) = \begin{pmatrix} g_1(x_{p_1}) & g_2(x_{p_1}) & \dots & g_m(x_{p_1}) \\ g_1(x_{p_2}) & g_2(x_{p_2}) & \dots & g_m(x_{p_2}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(x_{p_n}) & g_2(x_{p_n}) & \dots & g_m(x_{p_n}) \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}L &= (g_1(x_{p+1}), g_2(x_{p+1}), \dots, g_m(x_{p+1})) \\ &= (\tilde{g}_1(x), \tilde{g}_2(x), \dots, \tilde{g}_m(x)) = \begin{pmatrix} g_1(x_{p_1+1}) & g_2(x_{p_1+1}) & \dots & g_m(x_{p_1+1}) \\ g_1(x_{p_2+1}) & g_2(x_{p_2+1}) & \dots & g_m(x_{p_2+1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(x_{p_n+1}) & g_2(x_{p_n+1}) & \dots & g_m(x_{p_n+1}) \end{pmatrix}\end{aligned} \quad (8)$$

其中 K 我们称为演化前数据矩阵, L 称为演化后数据矩阵, 当相空间的点数足够多时, 可以视矩阵的每一列为一个基函数的离散数据表示, K 、 L 则可以看作是多基函数的组合, 而演化后的基函数又可以看作一个新的函数, 视为Koopman算符作用在基函数上得到。于是 K 、

L 之间的关系可由Koopman算符表示

$$UK = L \quad (9)$$

在构造矩阵 K 与 L 时, 我们需要选定一组基函数 $g_i(x), i = 1, 2, \dots, m$, 基函数的选取对我们计算本征函数的结果至关重要, 为了能较好的表示出Koopman算符的本征函数, 需要一组较完备的基函数作为算符作用的可观测量, 可以选取Gauss基函数、Fourier基函数、Legendre基函数。在选取合适的基函数与构造数据矩阵 K 与 L 后, 我们即可以根据 $UK = L$ 计算求得Koopman算符的矩阵表示以及本征值与本征函数, 通常我们会得到 n 个本征值与本征函数, 而在这些本征值中, 我们比较关心的是本征值(或者本征值的模)接近1的本征函数, 因为本征值为1的本征函数反映了相空间中一条随时间演化不变的轨道, 这种轨道即是系统的一个关键特征, 而由于我们的数值计算误差, 因此我们将选取接近1的本征值对应的本征函数。

Koopman算符理论上能够区分相空间的不同区域的性质, 对于具有噪声的数据和涨落的演化规律, Koopman算符同样可以通过控制函数空间的精细度来对相空间进行粗细粒度的划分, 因此Koopman算符具有鲁棒性: 即使我们的演化有噪声的影响, 如探究噪声中常见的高斯白噪声, 我们同样可以对相空间进行粗粒度的划分。这在我们探究动力学系统中的演化规律中尤为重要。

3 埃农映射

埃农(Hénon)映射是1976年由法国数学家Michel Hénon提出的。Hénon映射是一种可以产生混沌现象的离散映射系统。最近, 用埃农映射产生的混沌序列进行图像加密的报道逐渐增多。埃农映射的迭代方程可以描述为

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n + 1 - ax_n^2 \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases} \quad x, y \in [-1.5, 1.5] \quad (10)$$

埃农映射存在两个不动点: $x^* = \frac{b-1 \pm \sqrt{(b-1)^2 + 4a}}{2a}, y^* = bx^*$ 。在经典的埃农映射中, 我们通常取 $a = 1.4$ 与 $b = 0.3$, 此时该映射出现奇怪吸引子并表现出混沌现象。

3.1 Koopman算符对埃农映射的吸引子划分

我们可以通过构造自然函数格点来计算Koopman算符的本征值与本征函数, 但自然基函数是由粒子的演化得到的, 而二维映射中存在两组演化, 我们在求本征函数时需要区分演化的维度, 即是 x 方向的本征函数还是 y 方向的本征函数。同时, 由于埃农映射并不是相空间到自身的映射, 且其存在收缩性, 故我们不能将本征函数画在整个相空间中。但是在埃农映射中存在一吸引子区域满足到自身的映射, 于是在自然基函数空间中, 我们选取吸引子作为我们的相空间, 在吸引子区域作出本征函数图像。

当在演化格点数量 $n = 2000$, 基函数数量 $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ 时, 我们画出埃农映射在吸引子域上的本征函数图像。每个基函数取本征值最接近1的本征函数图像, 观察随着基函数

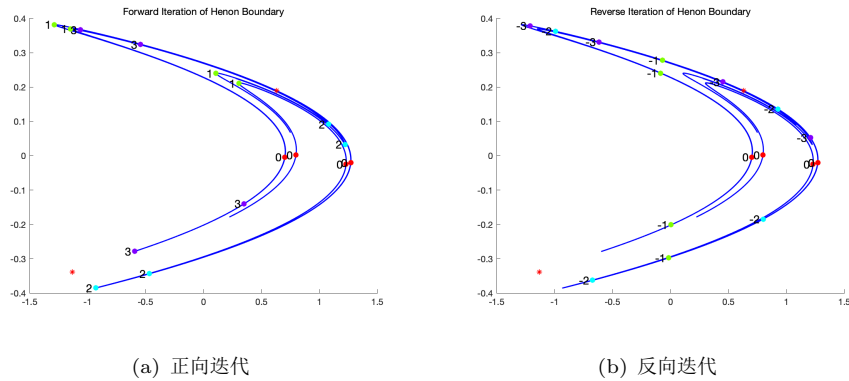


图 1: 埃农映射的边界点及其像点、原像点

的增加, 本征函数的图像如何变化, 如图2。

在埃农映射的本征函数图像中, 我们可以发现一些关键的本征函数的极值点。针对埃农映射的边界点, 我们可以通过寻找其在吸引子图像中的转折点寻找到, 为了较精确的计算出埃农映射的边界点, 我们可以取其曲率较大的点, 我们通过计算得到埃农映射中四个较关键的边界点, 并将埃农映射的边界点与吸引子画在一起, 如图1, 观察其位置发现, 这些点都处于埃农映射吸引子最主要的弯折区域, 由于埃农映射的吸引子是一个分形结构, 因此在弯折区域存在4个边界点。

为了能寻找到其他层次的边界点, 我们对埃农映射的四个边界点进行正向演化得到其像点, 反向演化得到其原像点, 如图1, 我们将正向演化及其次数用正数标注在图中, 将反向演化及其次数用负数标注在图中, 0表示最原始的四个边界点。在之前的讨论中, 我们称边界点的原像点为其他层次的边界点, 在此处我们同样这样定义。我们对比本征函数图像的极值点及埃农映射的边界点。

我们选取自然基函数, 并取演化格点数量 $n = 2000$, 函数格点数量 $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, 分别作本征函数图像, 并将边界点的位置标出, 画出随基函数增加, 本征函数极值点与埃农映射边界点的关系, 如图2。从图中, 我们可以更清晰的发现这个结论: Koopman算符的本征值反映了埃农映射的边界点, 且随着基函数数量的增加, 能够反映出埃农映射不同层次的边界点, 基函数数量每增加1, 埃农映射的边界点便能反映更多一个层次。

3.2 埃农映射的周期轨道

在这里我们讨论埃农映射的周期轨道, 在第二章中我们讨论了周期轨道对相空间动力学特征的划分, 周期轨道也是动力学特征的重要部分。为此我们可以通过Multipoint Shooting的方法计算得到埃农映射不同周期的周期轨道, 如图3, 我们计算了 $T = 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10$ 时埃农映射的周期轨道。在离散映射系统中, 设有一周期为 T 的动力学系统 $x_{n+T} = f^T(x_n) = x_n$, 若定义一个新的映射 $F = f^T$, 则对于新的映射 F , 我们有 $F(x_n) = x_n$, 即 x_n 为新映射系统的不动点。新映射 F 与原映射 f 之间为 T 次映射, 在相空间可表示为 T 次重复变换过程。为此, 我们将

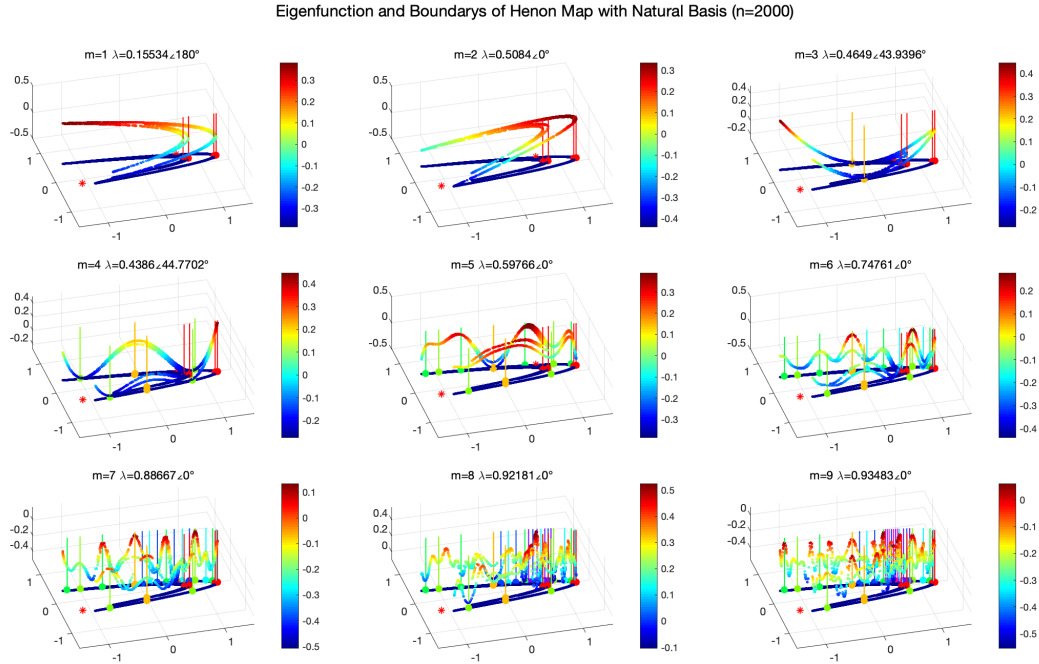


图 2: 埃农映射的边界点与本征函数对吸引子的划分($n = 2000$)

周期点看作新映射的不动点，并将这些不动点在新映射上进行线性化，如图4，我们选取本征函数参数：演化格点数量 $n = 100 \times 100$ ，高斯基函数数量 $m = 50 \times 50$ ，周期轨道参数 $T = 12$ ，分别对比其周期轨道位置及其线性化方向。我们发现，周期轨道分布在吸引子域上，且其存在两个本征方向，一个方向是稳定的，另一个方向是不稳定的，且稳定的方向即沿着吸引子方向，不稳定的方向沿着埃农映射的本征函数流向，于是我们可以得出，在相空间 $[-1.5, 1.5] \times [-1.5, 1.5]$ 中，埃农映射的本征函数图像的流向与埃农映射的不稳定流型一致。

3.3 埃农映射的不稳定流型

我们可以通过数值计算得出埃农映射的不稳定流型：在数值计算中，我们可以先将埃农映射迭代 n 次，再讲埃农映射迭代 $-n$ （负数表示反向迭代），理论上这样点的位置不会发生变化，但是由于数值计算误差，若初始点不处于不稳定流型，则正向迭代会使其发散，且放大数值计算造成的误差(即使误差很小),这样，粒子再反向迭代回来之后，便很难回到原来的位置。若初始点处于不稳定流型区域中，正向迭代会使其趋于流向吸引子域而非发散，这样反向迭代便可以回到其原来的位置，我们可以利用这样的数据计算技巧确定埃农映射的不稳定流型区域，如图5,我们取遍布整个相空间的初始点，并画出了当反复迭代次数为2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26时埃农映射的迭代图。从图中我们可以看到，随着迭代次数的增加，原来处于整个相空间区域的点只剩下了一部分，而这剩下的一部分恰好就反映了不稳定流型的区域。

我们取迭代次数为20下的不稳定流型区域，并将其与某一个本征函数作对比，如图6。我

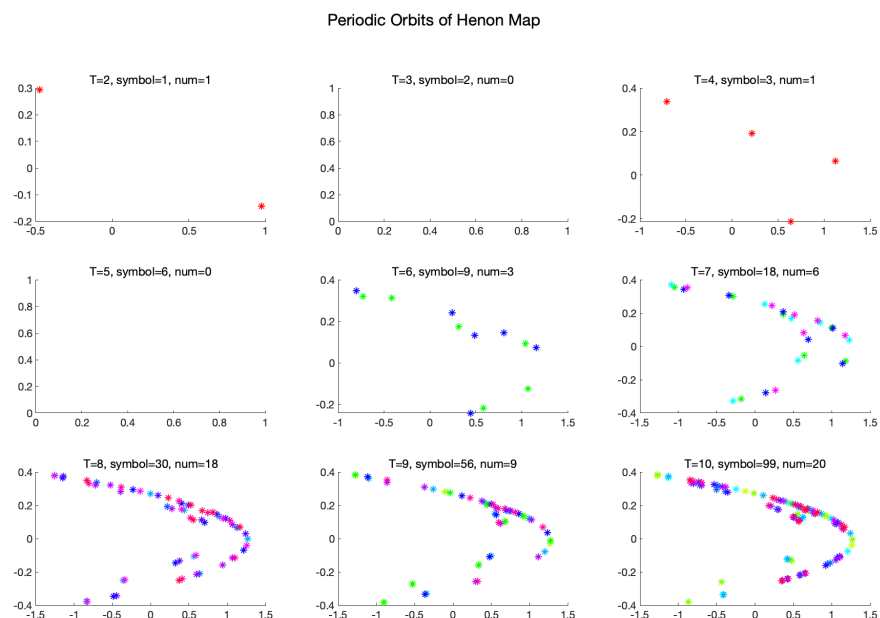


图 3: 埃农映射的周期轨道:在每个子图的标题中, T 表示周期, symbol 表示符号动力学允许的最多轨道数, num 表示我们寻找到的收敛的轨道数量,并将这些轨道画在同一张图中, $\text{num}=0$ 表示没有计算到该周期下的轨道,但并不意味着不存在此周期,因为Multipoint Shooting的方法受到初始点选取的限制

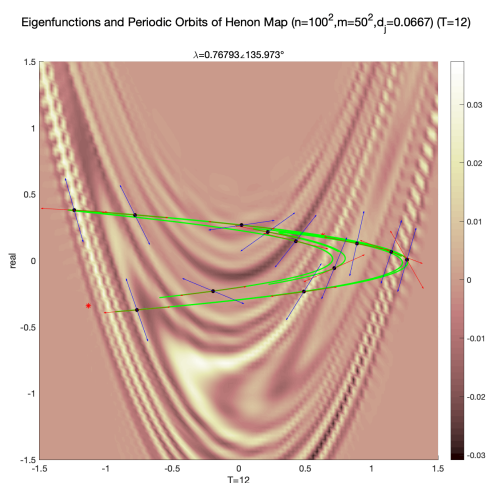


图 4: 埃农映射的本征函数与周期轨道($T=12$):粉色区域表示本征函数值的大小,绿色的线表示吸引子域,黑色的点表示某周期下埃农映射的周期轨道,且每个周期点上存在两个本征方向用箭头表示,蓝色表示不稳定方向,红色表示稳定方向。

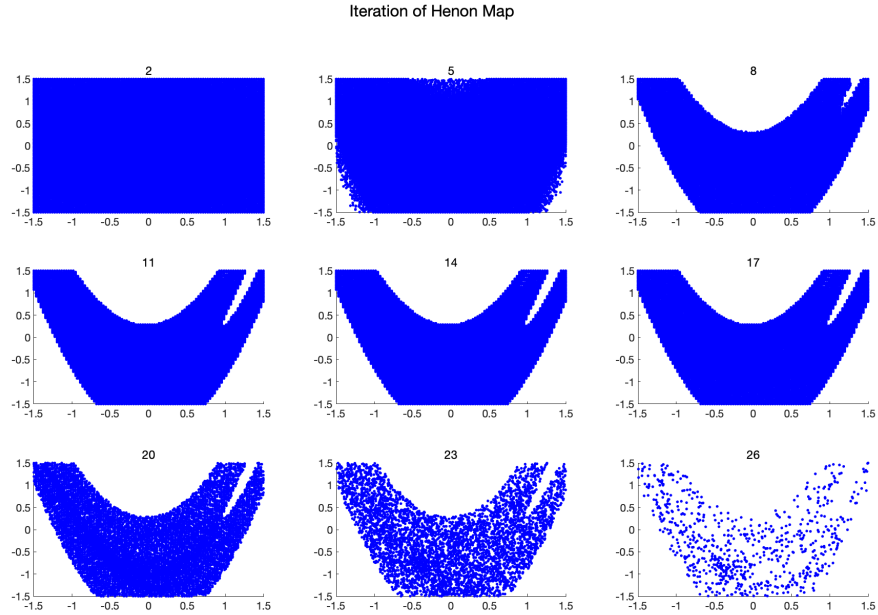


图 5: 埃农映射的迭代:不稳定流型

们发现, 本征函数有明显变化的区域与我们通过迭代寻找到的不稳定流型的区域吻合, 这说明了我们的本征函数图像的流向恰好就是埃农映射的不稳定流型。为了进一步印证我们的猜想, 我们可以较严格的画出埃农映射的不稳定流型。具体方法为, 从周期点出发, 根据其线性化方向, 对其临近的点进行演化, 若我们演化的间隔足够小, 我们便可以通过将这些轨迹连接起来得到埃农映射的不稳定流型。为了使我们演化的间隔比较均匀, Hobson提出了一种演化不稳定流型的计算方法, 我们利用这种方法, 画处 $T = 4, 7$ 时, 由周期轨道演化而成的埃农映射的不稳定流型, 如图7。

我们发现, 周期轨道迭代下产生的不稳定流型与埃农映射的本征函数流向一致, 且在一条不稳定流型轨道上, 本征函数值的大小几乎一致。于是我们可以有结论: 在埃农映射中, Koopman算符的本征函数流向与不稳定流型一致, 在同一条不稳定流型轨道中, 本征函数值的大小几乎相同。

3.4 埃农映射的另一组参数

埃农映射另一组经典的参数 $a = 1.0, b = 0.54$ 下, 我们同样可以计算其本征值与本征函数。图8画出了 $n = 10000, m = 1, 2, 3, 4$ 时x维度在吸引子域上的本征函数, 黑色的点表示此时埃农映射的边界点, 同样可以观察到埃农映射本征函数的极值点与边界点较好的吻合。

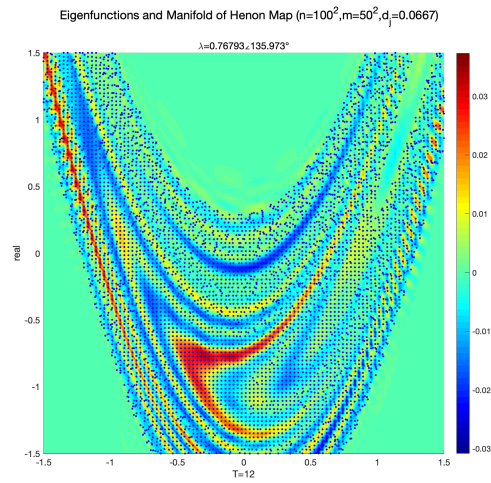


图 6: 埃农映射的不稳定流型与本征函数

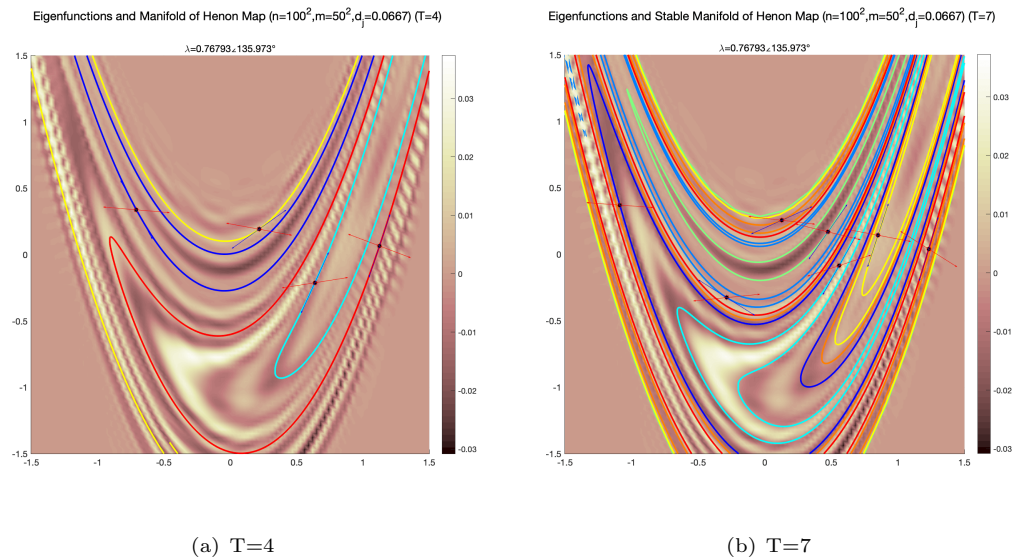


图 7: 埃农映射的不稳定流型与本征函数($T=4,7$): 粉色区域表示埃农映射的本征函数, 黑色的点表示周期轨道的位置, 两个本征方向用蓝色与红色箭头标出, 沿着不稳定方向(蓝色)演化而成的不稳定流型用实线标出, 且四个点演化而成的不稳定流型轨道颜色不同

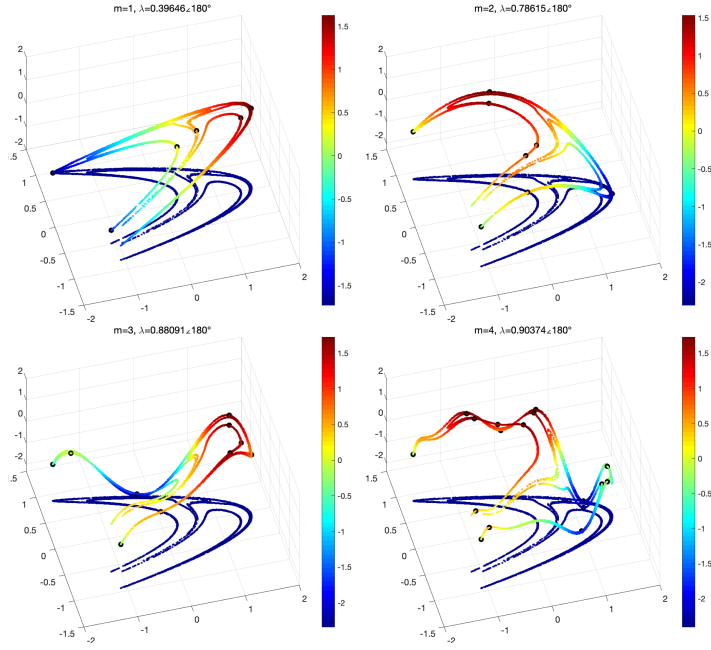


图 8: 自然基函数下埃农映射($a = 1.0, b = 0.54$)的本征函数: 彩色的点表示本征函数的实部, 黑色的点表示边界点, 蓝色的区域表示在二维xy平面的投影。

4 三维埃农映射

Gonchenko 等人发现了一个动力学与二维埃农映射有较高的相似性的三维映射, 其动力学方程为

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = z_n \\ z_{n+1} = 0.72x_n + Cy_n + Az_n - 1.45z_n^2 + 0.515y_nz_n - y_n^2 \end{cases} \quad (11)$$

我们取一组参数 $A = -1.86, C = 0.03, D = 0$ 。计算三维埃农映射的本征函数, 取 $n = 5000, m = 2$, 如图9。为便于观察, 我们用不同视角来画出本征函数图像。通过观察本征函数图像, 我们可以观察到本征函数的极值点, 其近似位于吸引子几何弯折区域, 我们认为这与三维埃农映射的边界点相关, 而其相关性则有待进一步证实。

5 总结与讨论

Koopman算符描述了相空间可观测函数的演化, 并可以找到重要的动力学模式。在Koopman算符的谱分解中, 可以识别出许多本征值和本征函数, 但是要找出最相关的本征值并解释其动力学意义仍然是一个巨大的挑战。在本文中, 我们选取了适当条件的本征函数的极值, 并与埃农映射中符号动力学的边界点位置作了一定的对比, 发现它们在一定误差范围内重叠在一起, 我

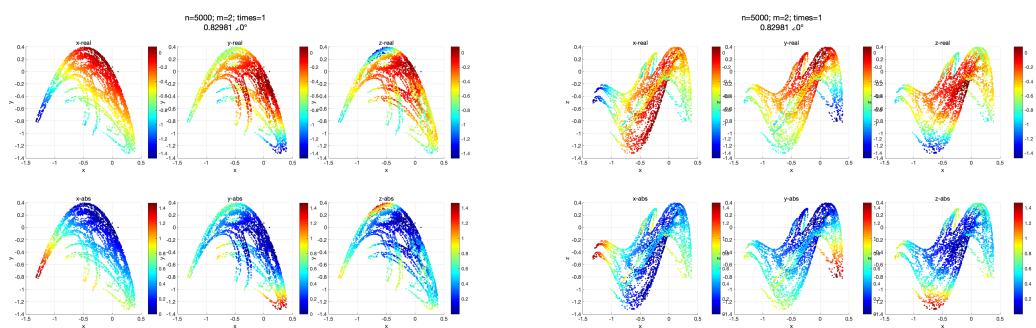


图 9: 三维埃农映射自然基函数下的本征函数:左图为xy平面, 右图为xz平面; 在每个子图中, 第一行表示三个维度的本征函数的实部, 第二行表示三个维度的本征函数的模

们还对比了埃农映射的稳定流型和不稳定流型, 发现与Koopman算符的本征函数密切相关, 而埃农映射的周期轨道的线性化则与不稳定流型吻合。在我们选取的一定的基函数下, 很容易可以计算出Koopman算符的谱, 且精度随着基函数的数量增加而增加。与其他基函数相比, 直接从演化数据中提取的自然演化的基函数是最有效的, 且这种方法应适用于其他非线性与混沌系统。

在非线性系统的研究中, 相空间的划分一直是一个关键的问题, 尤其当相空间的维度是高维时。过去的方法都集中在构造稳定和不稳定的流形或确定某些拓扑指数上, 这些特征在轨道结构比较复杂时很难计算, 比如在耦合的非线性系统中。在本文中, 通过计算Koopman算符的谱特征采取了另一种思路, 从而避免了对相空间复杂的几何特征进行描述。因此, 将我们的方法扩展到复杂的非线性系统中的处理并获取适当的符号动力学描述是合理的。

致谢

这项工作得到了国家自然科学基金委员会的资助(Grant No.11775035和No.11375093), 还获得了中央高校基本科研业务费专项资金资助(合同号2019XD-A10)。

参考文献 (References)

- [1] 贾继莹. Koopman算符在一些动力系统算法和应用研究[D]. 2015.
- [2] Govindarajan N, Mohr R, Chandrasekaran S, et al. On the approximation of koopman spectra for measure preserving transformations[J]. 2019, 18(3): 1454–1497.
- [3] Korda M, Putinar M, Mezić I. Data-driven spectral analysis of the Koopman operator[J]. 2020, 48(2): 599–629.

- [4] Brunton S L, Brunton B W, Proctor J L, et al. Koopman invariant subspaces and finite linear representations of nonlinear dynamical systems for control[J]. 2016, 11(2).
- [5] Simó C. On the Hénon-Pomeau attractor[J]. 1979, 21(4): 465–494.
- [6] Brunton S L, Brunton B W, Proctor J L, et al. Chaos as an intermittently forced linear system[J]. 2017, 8(1): 1–9.
- [7] Mezić I. On applications of the spectral theory of the Koopman operator in dynamical systems and control theory[A]. // 2015 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)[C]. 2015: 7034–7041.
- [8] Gaspard P, Nicolis G, Provata A, et al. Spectral signature of the pitchfork bifurcation: Liouville equation approach[J]. 1995, 51(1): 74.
- [9] Gaspard P, Tasaki S. Liouvillian dynamics of the Hopf bifurcation[J]. 2001, 64(5): 056232.
- [10] Lan Y, Mezić I. Linearization in the large of nonlinear systems and Koopman operator spectrum[J]. 2013, 242(1): 42–53.
- [11] Lan Y, Cvitanović P. Variational method for finding periodic orbits in a general flow[J]. 2004, 69(1): 016217.
- [12] Jaeger L, Kantz H. Structure of generating partitions for two-dimensional maps[J]. 1997, 30(16): L567.
- [13] Grassberger P, Kantz H. Generating partitions for the dissipative Hénon map[J]. 1985, 113(5): 235–238.
- [14] Mezić I. Spectral properties of dynamical systems, model reduction and decompositions[J]. 2005, 41(1-3): 309–325.
- [15] Chen K K, Tu J H, Rowley C W. Variants of dynamic mode decomposition: boundary condition, Koopman, and Fourier analyses[J]. 2012, 22(6): 887–915.
- [16] Tu J H, Rowley C W, Luchtenburg D M, et al. On dynamic mode decomposition: Theory and applications[J]. 2013.
- [17] Petersen K E. Ergodic theory[M]. Cambridge University Press, 1989.
- [18] Antoniou I, Sadovnichii V, Shkarin S. Time operators and shift representation of dynamical systems[J]. 1999, 269(2-4): 299–313.
- [19] Susuki Y, Mezić I. Nonlinear Koopman modes and coherency identification of coupled swing dynamics[J]. 2011, 26(4): 1894–1904.

- [20] Eisenhower B, Maile T, Fischer M, et al. Decomposing building system data for model validation and analysis using the Koopman operator[J]. 2010, 4(1): 434–441.
- [21] Georgescu M, Eisenhower B, Mezić I. Creating zoning approximations to building energy models using the Koopman operator[J]. 2012, 5(1): 40–47.
- [22] Schmid P J. Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data[J]. 2010, 656: 5–28.
- [23] Schmid P J, Li L, Juniper M P, et al. Applications of the dynamic mode decomposition[J]. 2011, 25(1-4): 249–259.
- [24] Bagheri S. Koopman-mode decomposition of the cylinder wake[J]. 2013, 726: 596–623.
- [25] Mezić I. Analysis of fluid flows via spectral properties of the Koopman operator[J]. 2013, 45: 357–378.
- [26] Budišić M, Mohr R, Mezić I. Applied koopmanism[J]. 2012, 22(4): 047510.
- [27] Strogatz S. Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering (studies in nonlinearity)[M]. CRC Press, 2001.
- [28] Mauroy A, Mezić I. A spectral operator-theoretic framework for global stability[A]. // 52nd IEEE Conference on Decision and Control[C]. 2013: 5234–5239.
- [29] Arbabi H, Mezic I. Ergodic theory, dynamic mode decomposition, and computation of spectral properties of the Koopman operator[J]. 2017, 16(4): 2096–2126.
- [30] Robinson C. Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos[M]. CRC press, 1998.
- [31] Hao B I. Symbolic dynamics and characterization of complexity[J]. 1991, 51(1-3): 161–176.
- [32] Grassberger P, Kantz H, Moenig U. On the symbolic dynamics of the Hénon map[J]. 1989, 22(24): 5217.
- [33] Landau L. Statistical Mechanics[M]. Butterworth-Heinemann, 1973.
- [34] Biham O, Wenzel W. Characterization of unstable periodic orbits in chaotic attractors and repellers[J]. 1989, 63(8): 819.
- [35] Holmes P, Lumley J L, Berkooz G. Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry.[M]. Cambridge University Press, 1996.
- [36] Prigogine I. Non-equilibrium statistical mechanics[M]. Courier Dover Publications, 2017.

- [37] Cvitanović P, Artuso R, Mainieri R, et al. Chaos: Classical and Quantum[M]. Chaos-Book.org (Niels Bohr Institute, Copenhagen 2020), 2020.
- [38] d'Alessandro G, Grassberger P, Isola S, et al. On the topology of the Hénon map[J]. 1990, 23(22): 5285.
- [39] Giovannini F, Politi A. Generating partitions in Hénon-type maps[J]. 1992, 161(4): 332–336.