混沌系统的 Koopman 分析与应用

复杂系统的边界点划分

张聪

指导教师：兰岳恒
北京邮电大学理学院

理学硕士学位论文答辩
2020 年 9 月 29 日上午

目录

本节目录

研究背景与意义

研究背景

1. 信息时代 → 信息 → 数据 → 数据分析
2. 动力学系统 → 线性、非线性
3. 非线性动力学
4. 动力学系统的数值计算
5. Koopman 算符 → 提取系统的关键特征

意义：通过 Koopman 算符分析系统关键特征

我们希望能够找到一种方法，仅通过系统数据的演化过程得到系统的一些演化特征，并在这些演化特征中提取出关键特征。Koopman 算符给我们提供了一个有效的数学工具。Koopman 算法由 B.O.Koopman 与 1931 年引入，它作用在某个函数上，描述了函数的演化。若将系统的特性数据演化视为函数的演化，我们即可以用 Koopman 算符分析系统的特征。

本节目录

Koopman 算符

Koopman 算符定义

$$Uf(x) = f(T(x)) = \tilde{f}(x)$$

对于固定的时间 t，上式可写为

$$U_t f(x) = f(T_t(x)) = \tilde{f}_t(x)$$

举例

对于一个函数：$f(x) = x^2$
动力学方程：$\dot{x} = -2x \to x(t) = x(0)e^{-2t} \to T_t(x) = xe^{-2t}$
Koopman 算符：$U_t f(x) = f(T_t(x)) = f(xe^{-2t}) = x^2 e^{-4t} = \tilde{f}(x)$

- Koopman 算符描述了函数的演化

Koopman 算符在函数空间上的描述

对于一个可观测量函数 $f(x)$，自变量经过时间 t 的演化变为 $\tilde{f}(x)$

$$f(x) \xrightarrow{t} \tilde{f}(x)$$

用 Koopman 算符可表示为

$$Uf(x_p) = f(x_{p+1}) = \tilde{f}(x_p)$$

其中 p 表示时间因子，在 m 维函数空间中将可观测量展开

$$f(x_p) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i g_i(x_p)$$

则

$$Uf(x_p) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i U g_i(x_p) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \tilde{g}_i(x_p) = \tilde{f}(x_p)$$

$$Uf(x_p) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i g_i(x_{p+1}) = f(x_{p+1})$$

Koopman 算符的本征值和本征函数

本征函数的定义

$$U\phi_k(x) = \phi_k(T(x)) = \lambda_k\phi_k(x)$$

在函数空间中

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i g_i(x)$$

$$U\phi(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i U g_i(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \tilde{g}_i(x)$$

$$U\phi(x) = \lambda(x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda a_i g_i(x)$$

本征函数的性质

根据本征函数的定义，我们有

$$\phi_k(x_p) = U\phi_k(x_{p-1}) = \lambda\phi_k(x_{p-1}) = \cdots = \lambda^p\phi_k(x_0)$$

当 $\lambda = 1$ 时，

$$\phi_k(x_p) = \phi_k(x_{p-1}) = \cdots = \phi_k(x_0)$$

- 本征值 $\lambda = 1$ 下的本征函数中，函数值相等的点属于一个不变集。
- 在动力学系统中，不变集与不动点和周期轨道密切相关

Koopman 算符的本征函数的计算

Koopman 算符作用在一组基函数上可得到一组基函数的演化，即

$$U(g_1(x), g_2(x), \cdots, g_m(x)) = (\tilde{g}_1(x), \tilde{g}_2(x), \cdots, \tilde{g}_m(x))$$

简记为

$$UK = L$$

其中

$$K = (g_1(x_p), g_2(x_p), \cdots, g_m(x_p)) = \begin{pmatrix} g_1(x_{p_1}) & g_2(x_{p_1}) & \cdots & g_m(x_{p_1}) \\ g_1(x_{p_2}) & g_2(x_{p_2}) & \cdots & g_m(x_{p_2}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(x_{p_n}) & g_2(x_{p_n}) & \cdots & g_m(x_{p_n}) \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$L = (\tilde{g}_1(x_p), \tilde{g}_2(x_p), \cdots, \tilde{g}_m(x_p)) = \begin{pmatrix} \tilde{g}_1(x_{p_1}) & \tilde{g}_2(x_{p_1}) & \cdots & \tilde{g}_m(x_{p_1}) \\ \tilde{g}_1(x_{p_2}) & \tilde{g}_2(x_{p_2}) & \cdots & \tilde{g}_m(x_{p_2}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{g}_1(x_{p_n}) & \tilde{g}_2(x_{p_n}) & \cdots & \tilde{g}_m(x_{p_n}) \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$L = (g_1(x_{p+1}), g_2(x_{p+1}), \cdots, g_m(x_{p+1})) = \begin{pmatrix} g_1(x_{p_1+1}) & g_2(x_{p_1+1}) & \cdots & g_m(x_{p_1+1}) \\ g_1(x_{p_2+1}) & g_2(x_{p_2+1}) & \cdots & g_m(x_{p_2+1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(x_{p_n+1}) & g_2(x_{p_n+1}) & \cdots & g_m(x_{p_n+1}) \end{pmatrix} \tag{3}$$

Koopman 分析的步骤

1. 获得系统的特征数据 x_p, x_{p+1}
2. 选取合适的基函数空间 $g(x)$(基函数形式、函数格点、演化格点)
3. 确定某时刻的数据矩阵 K 及演化之后的数据矩阵 L
4. 通过 $UK = L$ 计算出 Koopman 算符的矩阵表示
5. 计算出 Koopman 算符的本征值 λ 和 $\phi(x)$
6. 找到我们关心的 λ 和 $\phi(x)$（如 $|\lambda| = 1$）
7. 系统特征分析

本节目录

Logistic Map

动力学方程

$$x_{n+1} = f(x_n) = \gamma x_n(1 - x_n)$$

$$x_n \in [0, 1], n = 1, 2, 3, \cdots$$

这里我们取 $\gamma = 4$，使该系统处于混沌状态。
两个不动点：0 和 $\frac{3}{4}$。

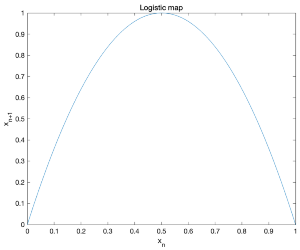


图 1: Logistic map 相图

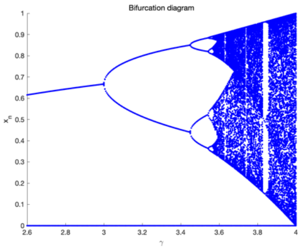


图 2: Logistic map 分岔图

Logistic map 的本征函数 (m=6)

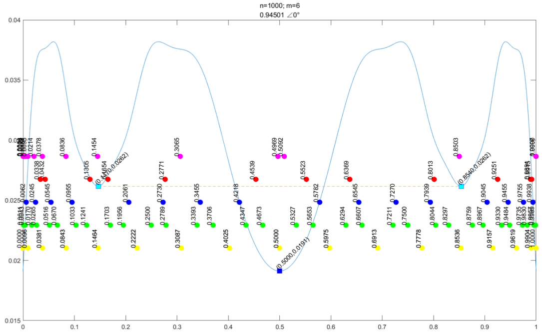


图 3: Logistic map 的本征函数 (m=6)

可见，Koopman 算符的极值点与动力学系统的“边界点”得到了较好的吻合。而边界点反映了 Logistic Map 的符号动力学。符号动力学的划分可以一定程度的预测系统的长期行为。

符号动力学

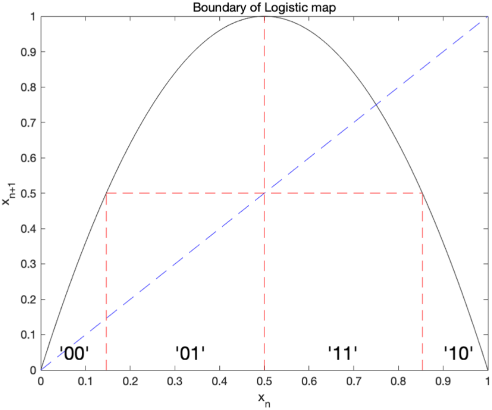


图 4: Logistic Map 的符号动力学划分

- 相空间的任何一点都可以用一个符号动力学序列来表示

Logistic map 的本征函数 (m=100)

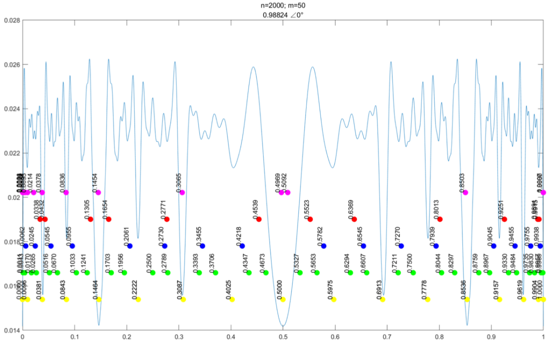


图 5: Logistic map 的本征函数 (m=100)

- Koopman 算符的极值点与动力学系统的“边界点”得到了较好的吻合。而边界点反映了 Logistic Map 的符号动力学。符号动力学的划分可以一定程度的预测系统的长期行为。

Koopman 算符是有效的，但是...

本征函数取决于:

- n: 演化格点个数（相空间维度）
- m: 基函数个数（函数空间维度）
- $g(x)$: 基函数（形式、数量等参数）（形式如 Gauss、Fourier、Rectangle、Legendre）
- λ: 本征值与本征函数（实、虚、模、幅角）

所以我们得到了一系列的本征函数

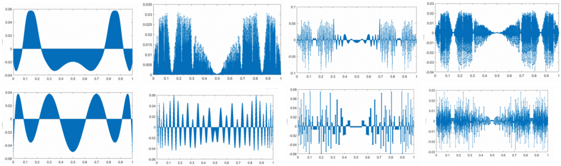


图 6: 其他的一些本征函数

寻找结构简单的本征函数

- $\lambda = 0$ 的本征函数是奇异的，在本征函数中存在 Jordan 块结构
- $\lambda = 0$ 的本征函数的线性叠加仍为本征函数，我们求得的本征函数并非最简
- 我们希望能够找到结构“简单”的本征函数，以更好的划分相空间

一个显然的想法（但不见的是最好的）是构造一个我们期望的约束函数，求其最小值对应的参数，用公式可描述为

$$\arg\min_{\boldsymbol{x},\lambda} \quad \alpha||Ax - \lambda x|| + \beta||D(x)||_p$$

1. p:p 范数
2. $D(x) = (x_2 - x_1, x_3 - x_2, \cdots, x_n - x_{n-1})^T$
3. $\alpha \gg \beta$（满足本征函数定义）
4. 约束：$||x|| \equiv 1$

Tent Map

动力学方程

$$x_{n+1} = f(x_n) = 1 - 2|x - \frac{1}{2}|$$

$$x_n \in [0, 1], n = 1, 2, 3, \cdots$$

两个不动点：0 和 $\frac{2}{3}$

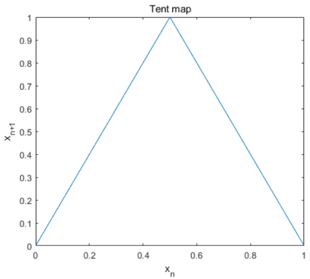


图 7: Tent map 相图

Tent map 的本征函数 (m=4)

$$U^T = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

图 8: Koopman 算符的矩阵表示 (m=4)

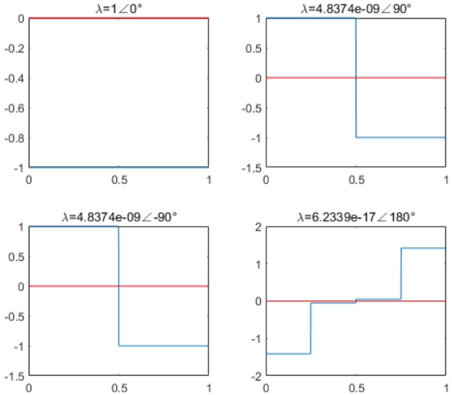


图 9: Tent map 的本征函数

U^T, Tent map, Rectangle basis function, m=4

Tent map 的本征函数 (m=100)

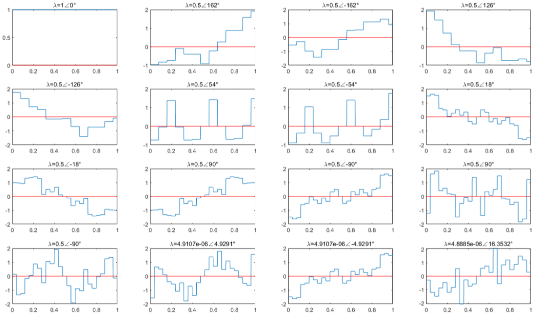


图 10: U^T, Tent map, Rectangle basis function, m=100

Tent map 的本征函数 (m=100)

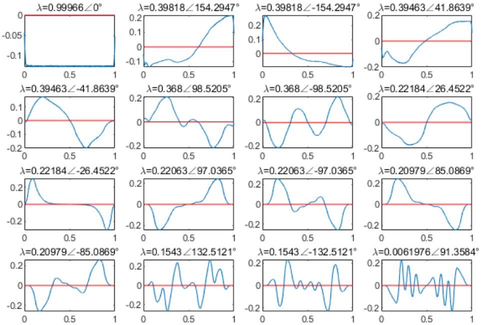


图 11: U^T, Tent map, Gauss basis function, m=100

寻找结构简单的本征函数 (迭代法)

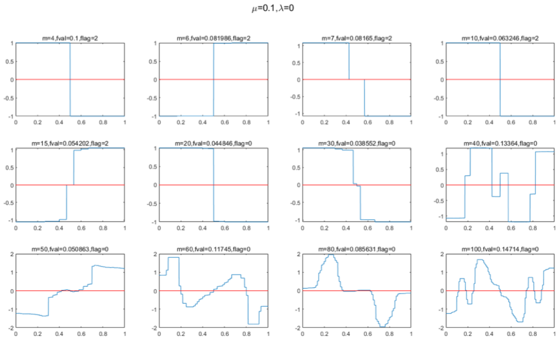


图 12: U^T, Tent map, Rectangle basis function, m=[4,6,7,10,15,20,30,40,50,60,80,100]

- 迭代法不能跳出局部最小值

寻找结构简单的本征函数 (随机梯度下降)

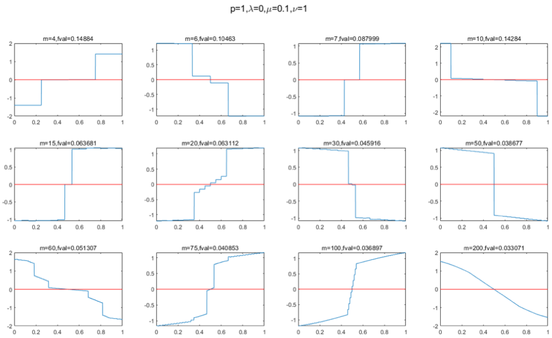


图 13: U^T, Tent map, Rectangle basis function, m=[4,6,7,10,15,20,30,40,50,60,80,100]

Henon Map

动力学方程

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n + 1 - a x_n^2 \\ y_{n+1} = b x_n \end{cases} \qquad x, y \in [-1.5, 1.5]$$

我们选取 a=1.4,b=0.3 使其处于混沌状态。
两个不动点：(0.6314,0.1894) 和 (-1.1314,-0.3394)

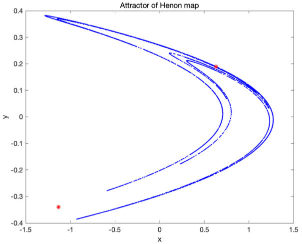


图 14: Henon map 相图

Henon map 的本征函数

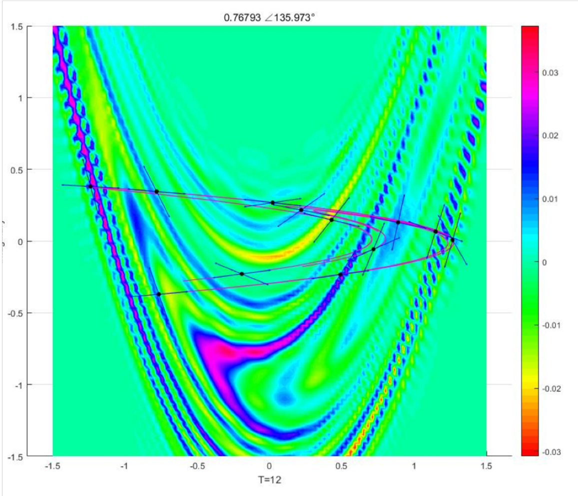
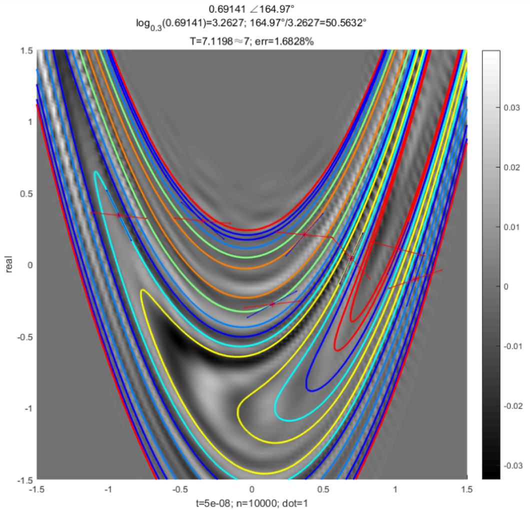


图 15: Henon map 的本征函数

Henon map 的本征函数



Lorenz System

动力学方程

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = x(\gamma - z) - y \\ \dot{z} = xy - \beta z \end{cases}$$

取 $\beta = \frac{8}{3}, \rho = 28, \sigma = 10$ 使系统处于混沌状态，初始点 (-1,3,4)
三个不动点：(0,0,0)、(-8.4853,8.4853,27)、(8.4853,-8,4853,27)

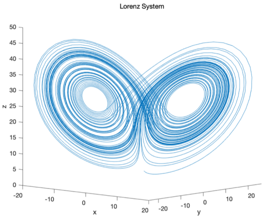


图 17: Lorenz System 相图

Lorenz System 的本征函数

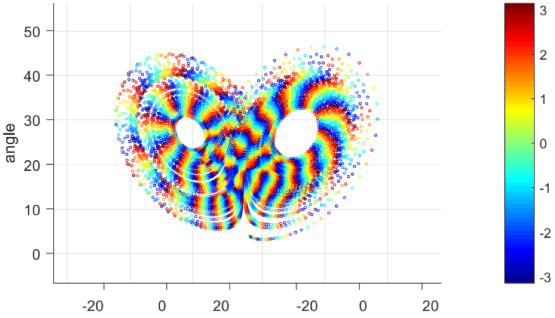


图 18: Lorenz System 的本征函数

Lorenz System 的本征函数

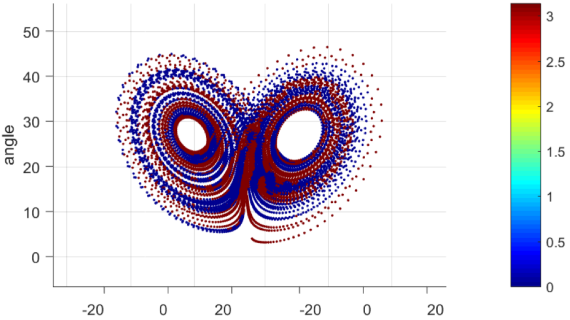


图 19: Lorenz System 的本征函数

本节目录

总结

1. Koopman 算符提供了一个有效的数学工具，作用于某个函数并描述了该函数的演化。
2. 若将系统特征数据的演化看作为相空间的函数的演化，则可以用 Koopman 算符分析系统的演化特征，进一步提取关键特性，并在一定程度上预测系统的长期行为。
3. 本征函数值相等的点属于一个不变集。在动力学系统中，不变集与周期轨道密切相关。
4. Koopman 算符本征函数值的“极值点”在某些情况下与系统的“边界点”非常吻合。“边界点”反映了动力学系统的符号动力学划分，而符号动力学的划分可以预测系统的长期行为。
5. 适用于任何动力学系统

致谢

感谢各位老师莅临指导

北京邮电大学理学院
张聪